T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# BİRİNCİ MERTEBE SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÜSTEL KATSAYILI FARK ŞEMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehdi ERDOĞAN

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN

VAN-2009

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN danışmanlığında, Mehdi ERDOĞAN tarafından sunulan “Birinci mertebe singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferansiyel denklemler için  üstel katsayılı fark şemaları” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince 30/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Doç. Dr. Zeynel YALÇIN İmza:

Üye: Yrd. DOÇ. Dr. Fevzi ERDOĞAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./..../…... tarih ve ................ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nahit AKTAŞ

Enstitü Müdürü

ÖZET

# BİRİNCİ MERTEBE SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÜSTEL KATSAYILI FARK ŞEMALARI

ERDOĞAN, Mehdi

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN

Haziran 2009, 34 Sayfa

Bu çalışmada, singüler pertürbe özellikli birinci mertebe lineer gecikmeli diferansiyel denklemler için üstel katsayılı fark şemaları incelenmiştir. Singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferansiyel denkleme öncelikle nümerik adımlar metodu uygulanarak her bir alt aralıkta singüler pertürbe özellikli adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü. Daha sonra, problem için baz fonksiyonları kullanılarak kalan terimleri integral şeklinde olan üstel katsayılı fark şeması kuruldu ve fark şemasının pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsaklığı incelendi.

Alınan teorik sonuçlar Matematica programlama dilinde bir örnek üzerinde denetlenmiştir.

**Anahtar kelimeler**: Singüler pertürbe özellikli problem, Üstel katsayılı fark şeması, Gecikmeli diferansiyel denklem, Düzgün yakınsaklık, Nümerik adımlar metodu.

ABSTRACT

**AN EXPONENTIALLY FITTED DIFFERENCE SCHEME FOR FIRST ORDER SINGULARY PERTURBED DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

ERDOĞAN, Mehdi

MSc, Mathematics Science

Supervizor: Asst. Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

June 2009, 34 pages

In this study, it is investigated an exponentially fitted difference scheme for linear first-order singularly perturbed delay differential equations. Applying the method of numerical steps, singularly perturbed delay differential equations are converted to singularly perturbed ordinary differential equations on each subinterval. Then for the problem, an exponentially fitted difference scheme is contructed use of exponentially basis functions which remainder term in integral form and it is shown that the difference scheme is uniformly convergent with respect to perturbation parameter.

The theoretical results have are presented on a numerical example of the programming Matematica.

**Key words:** Singularly perturbed problem, Exponential fitted difference scheme , Delay differential equations, Uniform convergence, The method of numerical steps.

# ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler uygulamalı matematik, biyobilim, kontrol teorisi ve fizik gibi uygulamalı bilim dallarında çok sık kullanılmaktadır. Bu konu üzerinde yapılan araştırmalar son yıllarda oldukça artmıştır.

Singüler pertürbe özellikli problemler; yüksek mertebeden türevler karşısında küçük pozitif bir parametrenin bulunduğu problemlerdir. Böyle bir problemin çözümü tanım bölgesinin bazı kısımlarında düzenli ve yavaş, bazı kısımlarında ise çok hızlı değişime sahip olması nedeniyle çözüm çok değişkenli bir karakter gösterir. Yani çözüm, sınır katları olarak bilinen ince geçiş katlarında hızlı diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişim gösterir. Bu ise singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümünde zorluklara neden olmaktadır. Bu sebeple diferansiyel denklemin kesin çözümünü bulmak yerine, yaklaşık çözümü elde etmek, matematiksel ve uygulamalı bilimlerde daha pratik olmaktadır.

Bu çalışmada, singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden lineer gecikmeli bir diferansiyel denklem için, kalan terimleri integral şeklinde olan baz fonksiyonları kullanılarak üstel katsayılı fark şeması kurularak yaklaşık çözümü incelenmiştir.

Bu çalışma süresince göstermiş oldukları yardımlarından ve özveriyle çalışmalarından dolayı öncelikle değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN olmak üzere, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik bölümünden Prof. Dr. Cemil Tunç, Prof. Dr. Hakkı Duru, Yrd. Doç. Dr. Musa Çakır, Yrd. Doç. Dr. Cesim Temel, Yrd. Doç. Dr. Sebahaddin Şevgin, Arş. Gör. Erkan Çimen ve Arş. Gör. Gıyas Sakar' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\varepsilon$ | : Singüler pertürbasyon parametresi |
| $t$ | : Bağımsız değişken |
| $u_i$ | : Sürekli problemin çözümü(kesin çözüm) |
| L | : Diferansiyel operatör |
| $\ell$ | : Diferansiyel fark operatörü |
| $y_i$ | : Fark probleminin çözümü(yaklaşık çözüm) |
| $h$ | : Şebeke adımı |
| $x_i$ | : Düğüm noktaları |
| $g_x$ | : $\frac{g_{i+1}-g_i}{h}$ ; $x_i$ noktasındaki ileri fark türevi |
| $g_{\bar{x}}$ | : $\frac{g_i-g_{i-1}}{h}$ ; $x_i$ noktasındaki geri fark türevi |
| $g_{\dot{x}}$ | : $\frac{g_{i+1}-g_{i-1}}{2h}$ ; $x_i$ noktasındaki merkezi fark türevi |
| $\Vert . \Vert_{C(\omega_h)}$ | : $\omega_h$ şebekesindeki ayrık norm |
| $R_i$ | : Kalan terim |
| $\theta_i$ | : Fark probleminin üstel katsayısı |
| $\tau$ | : Gecikme parametresi |
| $\omega_{N,p}$ | : Herbir alt aralıkta düzgün şebeke |

EKLER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Teknoloji ve Bilimin ilerlemesi ile birlikte bazı Fizik, Biyoloji, Kimya, Tıp, Kontrol Sistemleri vs. alanlarda olayların daha ayrıntılı incelenmesi sonucunda anlaşıldı ki birçok olayın değişme hızı sistemin sadece o andaki durumuna bağlı değil, geçmiş, hatta gelecek durumuna da bağlı olabiliyor. Bunun fark edilmesi ile Gecikmeli Diferansiyel Denklemler teorisi geliştirildi. Ancak bu olayların daha da detaylı incelenmesi sonucunda görüldü ki sistemin herhangi bir zamandaki değişme hızı her yerde aynı olmayabilir, bazı yerlerde düzgün, bazı yerlerde ise daha hızlı değişmeler olabiliyor. Bu durumun açıklanabilmesi için Singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferansiyel denklemler teorisi geliştirildi, üzerinde daha çok araştırma yapıldı ve halen de devam etmektedir.

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler, uygulamalı bilim dallarının birçok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin, akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, kütlenin hareketi, plastik, kimyasal reaktör teori, aerodinamik, elektron plazma dalgaları, elektrik akımı, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, oşinografi, meteoroloji, iletişim hatları, yayılma teori ve reaksiyon-difüzyon gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Singüler pertürbe özellikli problemlere ilgi, yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar esasen asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmış ve 1960’ lı yıllardan sonraki dönemlerde çok iyi sonuçlar alınmıştır.

Matematiksel olarak bu problemler, yüksek mertebeli türevlerin katsayılarının pozitif küçük parametrenin olduğu problemler olarak bilinir. Bu tür problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında hızlı bazı kısımlarda ise yavaş ve düzenli değişir. Hızlı değişim olan yerlerde çözümün türevleri sınırsız olur. Bu durum uygun fark şemalarının kurulması ve incelenmesi bakımından standart olmayan bir yaklaşım gerektirir. Bu nedenle klasik nümerik yöntemlerin (düzgün şebekelerde klasik fark şemasının) kararsızlıkları nedeniyle pratik değeri yoktur. Çünkü şema adımlarının küçülmesi ile yaklaşık çözüm kesin çözüme yakınsamaz hatta bazen ıraksama olabilir

Dolayısıyla singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümü için adaptif fark şemalarının seçimi daha önemli bir durumu arz etmektedir. Son yıllarda bu alanda iki tür yaklaşım ağırlıklı olarak kullanılmaktadır.

1. Düzgün (eşit aralıklı düğümlerden oluşan) şebekede üstel katsayılı fark şemalarının uygulanması.

2. Sınır katları dâhilinde özel kuralla belirlenen düzgün olmayan şebekenin seçimine dayalı fark metotları.

Singüler pertürbe özellikli denklemlerde yüksek mertebeli türevin pozitif küçük parametre içermesinden dolayı bu problemlerin çözümünde sınır katları oluşur ve çözüm bulmak zorlaşır. Bu zorlukları aşmak için yapılan bazı çalışmaları hatırlatmakta yarar vardır. Bunlar: Bachalov (1969) bağımsız değişkenli bilinmeyen fonksiyonları sınır katı içermeyen özel dönüşümler geliştirerek inşa etmiştir. Doolan ve Ark. (1980) başlangıç ve sınır katlarındaki problemler için düzgün nümerik metotları incelemiştir. Roos ve Ark. (1996) singüler pertürbe denklemlerin genel nümerik metotlarını vermiştir. Farell ve Ark. (2000) bu konuda sınır katı tekniklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu alanda, Chow ve Mallet-Paret (1983) singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemleri araştırmıştır. Mallet - Paret ve Nussbaum (1989) psikolojik açıdan fark gecikme denklemlerini ele almıştır. Chow ve Ark. (1992) gecikmeli denklemlerde dalga boylarını ele almıştır. In't Hount (1992; 1997) gecikmeli diferansiyel denklemler için bazı metotları ele almıştır. Tian (2002) diferansiyel denklemlerde singüler pertürbasyon teorisini gecikmeli diferansiyel denklemlere genişletmiştir. McCartin (2001) gecikmeli diferansiyel denklemlerin üstel uygunluğunu incelemiştir. Amiraliyev ve Duru (2005) parametrized singüler pertürbasyon problemini araştırmıştır. Amiraliyev ve Erdoğan (2007) singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemler için düzgün nümerik metodu ele almışlardır. Erdoğan (2009) Birinci mertebe gecikmeli diferansiyel denklemler için üstel katsayılı fark şemaları için çalışmalar yapmıştır.

Bu çalışmada birinci mertebe singüler pertürbe özellikli gecikmeli

$$\varepsilon u'(t)+a(t)u(t)+b(t)u(t-r)=f(t)\ ,\ \ t\in I \qquad (1.1)$$

$$u(t)=\varphi(t)\ ,\ t\in I_0 \qquad (1.2)$$

Başlangıç-değer problemi $\bar{I}=[0,T]$ olmak üzere incelenecektir.

Burada $\varepsilon$ pozitif küçük bir pertürbasyon parametresi, $I = (0,T] = \bigcup_{p=1}^{m} I_p$, $I_p = \{t: r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $0 \leq s \leq m$ ,ve $I_0 = [-r, 0]$ aralığında olup, $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t)$, $f(t)$ ve $\varphi$(t) de yeterince düzgün fonksiyonlar, $r$ gecikme sabitidir.

Çalışmamızda esas olan gecikmeli diferansiyel denklemlerin kesin ve yaklaşık çözümleri incelenecek, problemin üstel katsayılı fark şeması kurularak fark şemasının yakınsaklık analizi yapılarak çözüm algoritması incelenecektir.

Çalışmamız altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve literatür bildirilişi, ikinci bölümde çalışmamız için gerekli olan ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde sürekli problemin kesin çözümün değerlendirilmeleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde fark şemasının kurulması yapılmıştır. Beşinci bölümde yakınsaklığın analizi ve hata değerlendirmeleri yapılmıştır. Altıncı bölümde alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde değerlendirilmiş ve bilgisayar programı ile nümerik sonuçlar gösterilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

### Tanım 2.1. Şebeke ve Düzgün Şebeke

**(i)**. $[a, b]$ kapalı aralığın sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir. Bu durumda

$$a = h_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{N-1} < x_N = b$$

noktaları [0,1] kapalı aralığında bir şebeke oluşturur.

**(ii).** $\omega_h$={$x_i$=$i.h \quad i = 1,2,3, \ldots, N - 1$ ve h=$\frac{b-a}{N}$ } ,

$\overline{\omega}_h$=$U\{x = a, b \}$ ifadesine ise bir düzgün şebeke denir. $x_i \in \overline{\omega}_h$ elemanları şebekenin düğüm noktalarını veya kısaca düğümlerini, $h$ ise şebekenin adımını gösterir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

### Tanım 2.2. Singüler Pertürbeli Problem

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler matematiksel olarak, en yüksek mertebeli türevler içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemler olarak bilinir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahiptir. Yani çözüm, sınır katları denilen, ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir.

**Örnek:**

$$Lu = \varepsilon u' + a(x)u = f(x), 0 < x \leq l$$

$$u(0) = A$$

problemi birinci mertebeden singüler pertürbe özellikli bir başlangıç-değer problemidir. Burada $\varepsilon$ küçük pozitif bir parametre $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve $A$ verilmiş sabittir. Bu problemin çözümü genel olarak $x = 0$ noktasında sınır katına sahiptir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.3. Regüler Problem**

Küçük bir $\varepsilon$ parametresine bağımlı olan bir başlangıç ya da sınır-değer problemini düşünelim. Veri ve denklemde $\varepsilon = 0$ olarak elde edilen problem indirgenmiş (pertürbe olmayan) problem olarak adlandırılır. Eğer indirgenmiş problemlerin biri ya da her ikisi, tek çözüme sahipken aynı tip ve mertebeliyse verilen problem bir regüler pertürbasyon problemi olarak adlandırılır.

$$u'(x) + \varepsilon u(x) = 0, 0 < x \leq 1$$

$$u(0) = 1$$

çözüm $u(x) = e^{-\varepsilon x}$ şeklindedir ve $\varepsilon'$ nun artan pozitif kuvvetlerine göre

$$u(x) = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 - \ldots$$

gibi bir seri ile ifade edilmektedir. Ayrıca keyfi $x_0 \epsilon [0,1]$ sabiti için

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{\varepsilon\to 0} u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{x\to x_0} u(x) = 1$$

olur. Dolayısıyla ele alınan bu başlangıç-değer problemi regüler pertürbe olmuş bir problemdir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.4. Düzgün Yakınsaklık**

Bir fark metodu, $u_i$ problemin kesin çözümü $y_i$ problemin yaklaşık çözümü olmak üzere $\varepsilon$ ‘dan bağımsız yeterince küçük tüm $h$ sabitleri için

$$\max_i |u_i - y_i| \leq Ch^k$$

olacak şekilde $\varepsilon$ ‘dan bağımsız bir $C$ sabiti var ise ayrık maksimum normda $k$ mertebeden $\varepsilon$ ‘na göre yakınsaktır denir.

Daha genel olarak eğer $\varepsilon$ ‘dan bağımsız yeterince küçük $h$ lar için

$$|u_i - y_i| \leq Ch^k$$

olacak şekilde $\varepsilon$'dan bağımsız bir $C$ sabiti var ise, fark metodu şeması $\|.\|$ normunda $k$ mertebeden $\varepsilon$'na göre düzgün yakınsaktır denir. Eğer $n$. mertebeden yakınsama istenirse $n$ hata sabiti $\varepsilon$'dan bağımsız olmak zorundadır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.5. Sınır Katı**

Bir singüler pertürbasyon probleminin hızlı değişebildiği herhangi bir sınır noktasının bir komşuluğuna, o noktanın birer sınır katı denir. Sınır katı dışındaki üstel küçük değerlere sahip fonksiyona sınır katı fonksiyonu denir. Başlangıç-değer problemi için kullanılan sınır katına başlangıç katı denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.6. Fark Şemasının Kararlılığı**

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

$$L_h y = \varphi_h, \ x \epsilon \omega_h \tag{2.1}$$

$$\ell_h y = f_h, \ x \epsilon \Upsilon_h \tag{2.2}$$

fark probleminin söz konusu olduğunu varsayalım, burada $L_h$ ve $\ell_h, \overline{\omega}_h$ şebekesinde tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, $\varphi_h, f_h$ başlangıç veri fonksiyonlarıdır ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. $\tilde{y}$ ile (2.1)-(2.2) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\varphi_h$ ve $f_h$olan çözümünü belirleyelim.

Eğer öyle, $h$'a bağlı olmayan $C_1, C_2$ sabitleri varsa yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \left\|\tilde{f}_h - f_h\right\|_3$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Bu durumda (2.1)-(2.2) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_3$ şebeke normlarıdır.

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın $h$'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade ediyor (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.7. Maksimum Prensibi**

$$\begin{cases} \ell[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i\,, & i = 1,2,3,\dots,N-1 \\ y_0 = \mu_1, \quad y_{\mathrm{N}} = \mu_2\,, & i = 1,2,3,\dots,N-1 \end{cases}$$

$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0$ Bu durumda tüm

$i = 1,2,3,\dots,N-1$ elemanları ve $y_i \neq sbt.$ için

$\ell[y_i] \geq 0\,,\ (\ell[y_i] \leq 0)$

şartları sağlanıyorsa $y_i$ şebeke fonksiyonu, pozitif maksimum değerini (negatif minimum değerini) şebekenin iç noktalarında yani $i = 1,2,3,\dots,N-1$ için alamaz. Burada $A_i$, $B_i$, $C_i$ ve $D_i$ sabitlerdir. Bu duruma maksimum prensibi denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

**Tanım 2.8. Sonlu Farklar**

Sonlu farklar yöntemi ile nümerik türev almak için bir takım ayrık noktalarda değeri bilinen bir $f(t_i)$ fonksiyonunun bir noktasındaki türevi bilinen bu değerler kullanılarak ifade edilir.

Burada $h$ adım uzunluğu, $t_{i+1}$ ve $t_{i-1}$ civarında $f(t_i)$ fonksiyonu , $\xi \epsilon [t_i\ , t_{i+1}]$ olmak üzere

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + h\ .f'(t_i) + \frac{h^2}{2}.f''(t_i) + \frac{h^3}{6}.f'''(t_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \qquad (2.3)$$

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - h\ .f'(t_i) + \frac{h^2}{2}.f''(t_i) - \frac{h^3}{6}.f'''(t_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \qquad (2.4)$$

şeklinde Taylor serisine açılır.

Denklem (2.3) ve (2.4) den

$$f(t_{i+1}) - f(t_{i-1}) = 2.h\, f'(t_i) - \frac{h^3}{3}. f'''(t_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

$$f(t_{i+1}) - 2.f(t_i) + f(t_{i-1}) = 2.h^2 f''(t_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

denklemleri elde edilir. Buradan da;

$$f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{2.5}$$

$$f''(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - 2.f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) denklemlerine merkezi fark türev formülleri denir.

$$f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h} + O(h^2) \tag{2.7}$$

$$f''(t_i) = \frac{f(t_{i+2}) - 2.f(t_{i+1}) + f(t_i)}{h^2} + O(h^2) \tag{2.8}$$

denklemlerine ileri fark türev formülleri denir.

$$f'(t_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h} + O(h^2) \tag{2.9}$$

$$f''(t_i) = \frac{f(t_i) - 2.f(t_{i-1}) + f(t_{i-2})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.10}$$

denklemlerine geri fark türev formülleri denir (Samarskii, 2001).

**Tanım 2.9. Nümerik Adımlar Yöntemi**

Bir sabit gecikmesi $u'(t) = f(t, u(t), u(t-r))$ denklemine ele alalım. Burada gecikmesi $r > 0$ olmak üzere $t_0 - r \le t \le t_0$ olduğunda, yani $E_{t_0} = \{t_0 - r \le t \le t_0\}$ başlangıç kümesinde $u(t) = \varphi_0(t)$ kabul edelim. $f(t, u_1, u_2)$ .fonksiyonu üç değişkenli fonksiyon olup $G = \{t_0 \le t \le T, -\infty < u_1 < \infty, -\infty < u_2 < \infty\}$ kümesinde süreklidir.

Bu şekilde

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-r)), \quad t_0 \le t \le T \tag{2.11}$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in T_{t_0} \tag{2.12}$$

koşulunu sağlayan çözümünü bulalım. Yani (2.11)-(2.12) başlangıç–değer problemini (Cauchy problemi) nümerik adımlar yöntemi ile çözelim.

Birinci adım olarak öncelikle (2.11)-(2.12) probleminin çözümünü $I_1 = [t_0, t_0 + r]$ aralığında araştıralım. Açıktır ki $t$ değişkeni $[t_0, t_0 + r]$ aralığında değiştikçe $t_0 - r \le t - r \le t_0$ olur. $t_0 < t < t_0 + r$ olduğunda $t_0 - r \le t - r \le t_0$ olur. $t \in I_1$ olduğunda $t_0 - r \in [t_0 - r, t_0]$ olacağından

$$u(t-r) = \varphi(t-r)$$

olup (2.11) denklemi

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_0(t-r)), \quad t_0 \le t \le t_0 + r \tag{2.13}$$

şekline, (2.12) koşulu ise

$$u(t) = \varphi_0(t_0) \tag{2.14}$$

şekline dönüşür. Bu şekilde (2.11)-(2.12) gecikmeli başlangıç–değer problemi adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş oldu. Burada artık çözüm adi diferansiyel denklemlerdeki çözüm yöntemi ile yapılır. Daha basit bir gösterim için

$$f(t, u(t), \varphi_0(t-r)) = g_0(t, u) \tag{2.15}$$

ile gösterirsek

$$u' = g_0(t, u) \tag{2.16}$$

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{2.17}$$

denkleminin elde edildiği görülür. Koşula göre $g_0(t,u)$ sürekli olduğundan (2.16) denkleminin $G = \{t_0 \le t \le T, -\infty < u < \infty\}$ aralığında adi diferansiyel denklemlerden bildiğimiz Peano teoremine göre (2.17) koşulunu sağlayan en az bir çözümü var ve bildiğimiz gibi bu çözüm $[t_0, t_0+\alpha], (0<\alpha\le r)$ aralığında belirlenmiştir. Burada $\alpha = \min\{t_0, T/M\}$, $M = \max_G |g(t,u)|$ şeklindedir,

Eğer $\alpha < r$ olursa her defa bulunan çözüm devam ettirilen çözüm olduğunu farz ederek bulduğumuz çözümü $[t_0, t_0+r]$ aralığında $\varphi_1(t)$ ile gösterelim. Daha sonra ikinci adım olarak (2.11) –(2.12) probleminin $I_2 = [t_0+r, t_0+2r]$ aralığında çözümünü araştıralım.

Açıktır ki $t_0+r \le t \le t_0+2r$ olduğunda $t_0 \le t-r \le t_0+r$ olur. Daha önce $[t_0, t_0+r]$ aralığında çözümü bulmuştuk. Yani bu aralıkta $u(t) = \varphi_1(t\ )$ dir. Demek ki $[t_0+r, t_0+2r]$ aralığında $x(t-r) = \varphi_1(t-r)$ olduğundan (2.11)-(2.12) problemi

$$u^{'}(t) = f(t, u(t), \varphi_1(t-r)) \tag{2.18}$$

$$u(t_o - r) = \varphi_1(t-r) \tag{2.19}$$

formuna dönüşür ve bayağı diferansiyel denkleme dönüştüğü görülür. Yeniden

$$u(t_o - r) = \varphi_1(t-r)$$

kabul etsek $g_1(t,x)$ fonksiyonu $G = \{t_0+r \le t \le t_0+2r, -\infty < u < \infty\}$ aralığında sürekli fonksiyon olur. (2.18)-(2.19) probleminin Peano Teoremine göre çözümü vardır. Yeniden bu devam ettirilen çözümü $\varphi_2(t)$ ile gösterelim. Böylelikle (2.18)-(2.19) probleminin $\varphi_2(t)$ çözümü $I_2 = [t_0+\tau, t_0+2\tau]$ aralığına belirlenir. Bu durumda $I_3 = [t_0+2r, t_0+3r]$ aralığında $x(t-r) = \varphi_2(t-r)$ olduğu yine de görülür ve $I_3$ aralığında problemin çözümü

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_2(t-r)) \tag{2.20}$$

bayağı diferansiyel denklemin

$$u(t_0+2r) = \varphi_2(t_0+2r) \tag{2.21}$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Bu işlemi devam ettirmekle

$$u(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & t\in I_0\\ \varphi_1(t), & t\in I_1\\ \varphi_2(t), & t\in I_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \varphi_n(t), & t\in I_n\end{cases}$$

fonksiyonu elde edilir ki bu da (2.11)-(2.12) probleminin çözümüdür.

Başlangıç koşulunun çözümünün bu yöntem ile bulunmasına nümerik adımlar yöntemi denir. Bazen de ardışık integrallama yöntemi de denir.

Nümerik adımlar yöntemi ile bir sonlu aralıkta gecikmeli diferansiyel denklemleri bu aralığın sonlu alt aralıklarında adi diferansiyel denkleme dönüştürmektedir (Yakubov, Hesenov ve Ahmedov, 1978).

**Tanım 2.10. Bazı Formüller ve Eşitsizlikler (Kuadratur Formülleri)**

***i)*** Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formülleri kullanılacaktır

$$\int_a^b p(x)f(x)d=\left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b)+(1-\sigma)f(a)\}+$$

$$f(a;b)\int_a^b(x-x^{\sigma})p(x)dx+R(f) \tag{2.22}$$

Burada σ- reel parametre, $p(x)\in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$R(f)=\int_a^b dxp(x)\int_a^b f^n(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi \quad ,f\in C^n, \qquad n=1 \;\; veya\, n=2$$

$$K_s(x,\xi)=T_s(x-\xi)-(b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s\,, \quad s=0{,}1 \tag{2.23}$$

$$x^{(\sigma)}=\sigma b+(1-\sigma)a \;\;,\;\; f(a;b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!} \quad , \qquad \lambda \geq 0 \quad ; T_s(\lambda) = 0 \quad , \quad \lambda < 0.$$

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f(a;b) \int_a^b p(x) dx \quad + \bar{R}(f) \, , \tag{2.24}$$

$$\bar{R}(f) = -\int_a^b dx p(x) \int_a^b f^n \, (\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, f \in C^n, n = 1 \quad veya \, n = 2$$

$$\bar{R}(f) = -\int_a^b dx p(x) \int_a^b f^n \, (\xi) K_0(x,\xi) d\xi \, , \qquad f \in C^2$$

(2.23) ve (2.24) formüllerinde aynı $K_s(x,\xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır. Ayrıca

$$K_0(a,\xi) = K_b(b,\xi) = 0 \quad ,$$

$$K_1(a,\xi) = K_1(b,\xi) = K_1(x,a) = K_1(x,b) = 0$$

$$K_1(\xi,x) = K_1(\xi,x) \qquad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(\xi,x) = -K_0(\xi,x) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} K_1(\xi,x) = -K_0(\xi,x)$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = f(\frac{a+b}{b}) \int_a^b p(x) dx \, + R^*(f) \qquad ,$$

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}^* \, (x,\xi) d\xi +$$

$$(n-1) f(a;b) \int_a^b \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right) p(x) dx \, , \tag{2.25}$$

$$n = 1 \; veya \; n = 2$$

$$K_{n-1}^*(x,\xi) = T_s(x-\xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) - (a+b)^{-1}(b-\xi)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right),$$

$s = 0,1$ (Amiraliyev ve Memmedov, 1995).

***ii*) Bazı Eşitsizlikler**

$$g' = g(\alpha_0;\alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi,x)g''(\ \xi)d\xi \ \ ,g \in C^2 \quad , \ \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1 \qquad (2.26)$$

Burada $K_0(\xi,x)$ fonksiyonu (2.23) formülünde tanımlanmıştır (Memmedov, 1980).

***iii) μ*-eşitsizliği**

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2 \quad , \quad \mu > 0$$

***iv)* Gronwall İntegral Eşitsizlikleri**

Burada kullanılan $v(t)$, $p(t)$, $q(t), g(t)$ foksiyonlarının sürekli olduğunu varsayıyoruz.

$$v(t) \leq u_0 + \int_0^1 [p(s)v(s) + q(s)]ds \quad , \quad p(t) \geq 0$$

ise

$$v(t) \leq u_0 exp\left(\int_0^1 p(\xi)v(\ \xi)\right) + \int_0^t q(s) exp\left(\int_0^1 p(\xi)v(\ \xi)\right) ds$$

olur.

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^1 p(s)v(s)ds \quad , \quad p(t) \geq 0$$

ise

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(s)p(s) exp\ \left(\int_s^t p(\xi) d\ \xi\right) d\xi$$

olur (Memmedov,1980).

***v)* Gronwall Eşitsizliğinin Fark Benzeri:** $y_j \geq 0$ fonksiyonu

$$y_j \leq \alpha \ + \tau \sum_{k=1}^{j} \{a_k y_k + b_k y_{k-1} + f_k\} \quad , \ y_0 \leq \alpha$$

$(a_k, b_k \ \geq 0 \ , \ 1 - \tau a_k > 0 \ \ , \ k = 1,2, \dots \dots \dots \dots ; \tau > 0$ reel parametre $)$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$y_i \leq \alpha exp\left[\tau \sum_{k=1}^{j} \frac{a_k - b_k}{1 - \tau a_k}\right] + \tau \sum_{k=1}^{j} \frac{f_k}{1 - \tau a_k} exp\left[\tau \sum_{\substack{\ell=k+1 \\ \ell \leq j}}^{j} \frac{a_\ell - b_\ell}{1 - \tau a_\ell}\right],$$

$$j = 1,2, \ldots .. \tag{2.27}$$

olur. Eğer, ayrıca $a_k = c_0 = sbt$ ise

$$y_i \leq \alpha exp\left[\tau \sum_{k=1}^{j} \frac{(c_0 + c_1)t_j}{1 - \tau c_0}\right] + \frac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{k=1}^{j} f_k \left[\frac{(c_o - c_1)t_{j-k}}{1 - \tau c_0}\right],$$

$$j = 1,2, \ldots .. \tag{2.28}$$

$$(t_j = j\tau \quad , \quad j = 0,1, \ldots .)$$

Olur. Eğer gerçekten

$$z_j = \begin{cases} \alpha + \tau \sum_{k=1}^{j} (a_k y_k + b_k y_{k-1} + f_k) \quad , & j = 1,2, \ldots \\ \alpha, & j = 0 \end{cases}$$

ile gösterirsek

$$y_j \leq z_j \quad , \quad j = 0,1, \ldots \tag{2.29}$$

ve ayrıca

$$\frac{z_j - z_{j-i}}{\tau} = a_j y_j + b_j y_{j-1} + f_i \leq a_j z_j + b_j z_{j-1} + f_j$$

olduğu açıktır. Şimdi buraya m mertebeden lineer fark denklemi uygulanırsa ve (2.22)'yi dikkate alırsak (2.27) ve (2.28)'nın doğruluğunu görebiliriz (Samarskii ve Gulin, 1989).

**Tanım .2.11. Peano Teoremi(Varlık)**

$$u' = g(t, u)$$
$$u(t_0) = u_0 \qquad (2.29)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alan , burada $g$ fonksiyonu $I \times R$ $(I = \{t : t \epsilon R,\ r_1 < t < r_2\})$ sürekli reel değerli bir fonksiyondur.

**Teorem.2.12.**

(2.29) başlangıç eğer problemini göz önüne alalım. $g(t, u)$ fonksiyonunun

$$S: t_0 \le t \le t_0 + \alpha\ , |u| < \infty$$

şeridi üzerinde sürekli ve sınırlı olduğunu varsayalım. Bu takdirde (2.29) problemi $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığı üzerinde tanımlı en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir.

Sonuç olarak (2.12) teoremindeki kabullere ilaveten $g$ fonksiyonunun $u$ ‘ ya göre monoton artan olduğunu varsayalım. Bu takdirde (2.29) problemi $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığı üzerinde bir tek çözüme sahiptir (Ahmad ve Rama Mohana Rao, 1999).

**Tanım.2.13.Üstel Katsayılı Fark Şeması**

Bir fark operatörünün belirli katsayılarının bir uygun üstel katsayıyı çarpan olarak içeren fark şemasıdır.

Örnek olarak aşağıdaki fark şeması

$$ly_i \equiv \varepsilon\theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f_i, \qquad i = 1,2, \dots, N$$
$$y_0 = A$$

sunulabilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i\rho}{1 - e^{-a_i\rho}} e^{-a_i\rho}$$

üstel fonksiyondur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

## 3. SÜREKLİ PROBLEM

Bu kısımda fark şeması kurulma sürecinde kesin çözümle ilgili gerekli değerlendirmeler yapılacak, bir lemma ve ispatı verilecektir.

**Lemma 3.1.**

*a, b,* $f \in C^1(\bar{I})$ , $\varphi \in C^1(\bar{I}_0)$ olsun. O zaman ( 1.1) - (1.2) probleminin $u(t)$ çözümü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|u(t)\|_{\infty,I_p} \leq C_p , \qquad 1\leq p \leq m \tag{3.1}$$

burada $C_p$ gösterimleri sabitler olup, aşağıdaki şekildedir.

$$C_1=\alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_1} + (1+\alpha^{-1}\|b\|_{\infty,I_1})\|\varphi\|_{\infty,I_0}$$

$$C_p=\alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_p} + (1+\alpha^{-1}\|b\|_{\infty,I_p})C_{p-1} , \qquad p = 2,3,\ldots\ldots,m \tag{3.2}$$

(Erdogan, 2009).

**İspat:** Lemmanın ispatı p ye göre tümevarımla yapılabilir. *p* =1 için (1.1) den

$$\varepsilon u'(t)+a(t)u(t) + b(t)u(t-r) = f(t)$$

denkleminde

$$|F(t)| = f(t) - b(t)u(t-r)$$

olmak üzere

$$\varepsilon u'(t) + \ a(t)u(t) = F(t) \ , \qquad t \in I_1$$

şeklinde yazılabilir. Maksimum prensibini uygulayarak

$$|u(t)| \leq |u(0)| + \alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_1} = |\varphi(0)| + \alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_1}$$

elde ederiz.

Bundan sonra

$$|F(t)| \leq |f(t)| + |b(t)||\varphi(t-r)| \ \leq \|f\|_{\infty,I_1} + \|b\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0}$$

olduğundan

$$|u(t)| = |\varphi(0)| + \alpha^{-1}(\|f\|_{\infty,I_1} + \|b\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0})$$

ve bundan dolayı da $p = 1$ için (3.1) sağlanır. $p = k$ için de (3.1) doğru olsun. O zaman $I_k$ üzerinde maksimum prensibini tekrar uygulanırsa

$$|u(t)| \leq |u(r)_k| + \alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_{k+1}}$$
$$= C_k + \alpha^{-1}\left(\|f\|_{\infty,I_{k+1}} + \|b\|_{\infty,I_{k+1}}\|\varphi\|_{\infty,I_{k+1}}C_k\right)$$

$$=\alpha^{-1}\|f\|_{\infty,I_{k+1}} + \ (1 + \alpha^{-1}\|b\|_{\infty,I_{k+1}})\ C_k$$

olduğu görülür. Böylece *p=k+1* için (3.1) eşitsizliği sağlanır.

# 4. FARK ŞEMASININ OLUŞTURULMASI

Bu bölümde (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümü için üstel katsayılı düzgün şebekeyi kuracağız. Burada $\bar{\omega}_{N_0}$düzgün şebekesi $\bar{I}=[0,T]$ üzerinde düzgün şebekede üstel katsayılı fark şeması kurulacaktır.

$$\bar{\omega}_{N_0} = \{t_i = ih\,, i = 1,2,\dots\dots, N\,, N_h = r\} \qquad (4.1)$$

düzgün şebekesini ele alalım. Ayrıca her bir alt aralık üzerinde

$$\bar{\omega}_{N,p} = \{t_i\colon (p-r)N \;\; 1 \le i \le p.N = N_0\}\,, 1 \le p \le m \qquad (4.2)$$

şebekesini ele alalım ve bu şebekelerin toplamını $I_p$ ( $1 \le p \le m$ ) her bir alt aralığında *N* tane şebeke noktalarını

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^{m} \omega_{N_p} \qquad (4.3)$$

şebekesi ile gösterelim ve bu şebeke herhangi bir düzgün olmayan şebeke olsun. İfadeyi basitleştirmek için herhangi bir *g*(*t*) için $g_i=g(t_i)$ alalım ve ayrıca $y_i$, $t_i$ noktasında *u*(*t*) ye kesin çözüme karşılık gelen yaklaşık çözüm olsun.

$\bar{\omega}_{N_o}$ üzerinde tanımlanan herhangi bir $\{\omega_i\}$ şebeke fonksiyonu için

$$\omega_{\bar{t},i} = (\omega_i - \omega_{i-1})/h$$

$$\|\omega\|_{\infty,N,p} = \|\omega\|_{\infty,\omega_N,p} \quad : \max_{(p-1)N \le i \le p.N} |\omega_i| \qquad (4.4)$$

şeklinde belirtelim. Fark şemasının kurulması süreci için başlangıç olarak aşağıdaki özdeşlikten hareket edeceğiz.

$$x_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)\psi(t)dt = x_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi(t)dt \qquad (4.5)$$

burada $\psi_i(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmış baz fonksiyonudur.

$$\psi_i(t) = \begin{cases} e^{-\frac{a_i(t_i-t)}{\varepsilon}}, & t_{i-1} \le t \le t_i \\ 0\,, & t_i \notin (t_{i-1}, t_i) \end{cases} \qquad (4.6)$$

Ayrıca

$$\chi_i = \left(h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)\, dt\right)^{-1} = \frac{a_i\rho}{1-e^{-a_i\rho}}\,, \qquad (4.7)$$

ve $\rho = \frac{h}{\varepsilon}$ dır.

$\psi_i(t)$ baz fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$-\varepsilon\psi_i'(t) + a_i\psi_i(t) = 0, \quad t_{i-1} \le t \le t_i$$

$$\psi_i(t_i) = 1 \tag{4.8}$$

(4.5) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$\chi_i h^{-1}\,\varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t)\psi_i(t)\,dt + a_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)\psi_i(t)\,dt \; +$$

$$b_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r)\psi_i(t)\,dt + R_i = f_i \tag{4.9}$$

$R_i$ kalan terim olup,

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}$$

$$R_i^{(1)} = \chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)]u(t)\psi_i(t)\,dt$$

$$\tag{4.10}$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [b(t) - b(t_i)]u(t-r)\psi_i(t-r)\,dt$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t_i) - f(t)]\psi_i(t)\,dt$$

şeklindedir.

(4.5) deki integralleri (2.22) ve (2.23) kuadratur formüllerinden yararlanarak, integrallerin her biri için yaklaşımlarını yazalım

$$= \varepsilon\chi_i h^{-1}\, u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)\,dt + a_i\chi_i h^{-1}\, u(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)\,dt$$

$$+ b_i\chi_i h^{-1}\, u(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t-r)\,dt + \varepsilon\chi_i h^{-1}\, u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i)\psi_i(t)\,dt$$

$$+\varepsilon\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\psi_i'(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi)K(t,\xi)d\xi$$

$$+a_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi)K(t,\xi)d\xi$$

$$+b_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\psi_i(t-r) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi-r)K(t,\xi)d\xi$$

$$K_0(t,\xi) = T_0(t-\xi) - h^{-1}(t-t_i)$$

$\psi_i(t)$ baz fonksiyonu,

$$-\varepsilon\psi_i'(t) + a_i\psi_i(t) = 0$$

denkleminin çözümü olduğundan aldığımız denklemdeki hatanın toplamı sıfırdır. Böylece son eşitlik

$$\varepsilon u_{\bar{t},i} + a_i u(t_i) + a_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i)\psi_i(t)\,dt.\,u_{\bar{t},i}$$

$$= \varepsilon\left(1 + \varepsilon^{-1}a_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i)\psi_i(t)\,dt\right)u_{\bar{t},i} + a_i u_i + b_i u_{i-N}$$

$$= \varepsilon\theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + b_i u_{i-N}$$

olduğundan (1.1) problemi için aşağıdaki fark şemasını alabiliriz.

$$\varepsilon\theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + b_i u_{i-N} + R_i = f_i \quad ,1 \le i \le N_0 \tag{4.11}$$

burada

$$\theta_i = 1 + \varepsilon^{-1}a_i\chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i)\psi_i(t)\,dt \tag{4.12}$$

ile gösterilirse

$$\chi_i = \left(h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i)\varphi_i(t)dt\right)^{-1}$$

$$\chi_i h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t)dt = 1$$

olmak üzere

$$\theta_i = 1 + \varepsilon^{-1} a_i \chi_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i)\varphi_i(t)\, dt$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}\, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} t e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} t_i e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}\, dt$$

burada

$$u = t \;\Rightarrow du = dt \;\;,\;\; dv = e^{\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} dt \;\Rightarrow v = \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}$$

değişken dönüşümü son eşitlikte yerine yazılırsa

$$= t\frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} dx - t_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} dt$$

$$= t_i \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t_i)} - t_{i-1} \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t_{i-1})} - \left(\frac{\varepsilon}{a_i} + t_i\right) \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)} \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$= t_i \frac{\varepsilon}{a_i} - t_{i-1} \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t_{i-1})} - \frac{\varepsilon^2}{a_i^2} + \frac{\varepsilon^2}{a_i^2} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t_{i-1})}$$

$$-t_i \frac{\varepsilon}{a_i} + t_i \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t_{i-1})}$$

$$= t_i \chi_i h^{-1} - t_{i-1} \chi_i h^{-1} e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}} - \chi_i h^{-1} \frac{\varepsilon}{a_i} + \chi_i h^{-1} \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}}$$

$$-t_i \chi_i h^{-1} + t_i \chi_i h^{-1} e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}}$$

$$= t_i \chi_i h^{-1} \frac{\varepsilon}{a_i} (1 - e^{-\rho a_i}) + \chi_i h^{-1} e^{-\rho a_i} (t_i - t_{i-1})$$

$$= \chi_i e^{-\rho a_i} \frac{t_i - t_{i-1}}{h} = \frac{\rho a_i}{1 - e^{-\rho a_i}} e^{-\rho a_i}$$

olup, son eşitlikten

$$\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-\rho a_i}} e^{-\rho a_i} \qquad (4.13)$$

olduğu görülür.

Böylece (4.9) bağıntısında kalan terimi ihmal ederek (1.1) ve (1.2) problemi için aşağıdaki şekilde bir fark problemi yazabiliriz.

$$Ly_i = \varepsilon\theta_i y_{\bar{t},i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = f_i \quad , \quad 1 \le i \le N_0 \tag{4.14}$$

$$y_i = \varphi_i \, , \quad -N \le i \le 0 \tag{4.15}$$

(Erdogan, 2009).

# 5. YAKINSAKLIK ANALİZİ

Metodun yakınsaklığını değerlendirmek için $z_i = y_i - u_i, 0 \leq i \leq N_0$ dönüşümü yaparak (5.1) -(5.2) fark problemini yazabiliriz.

$$\varepsilon\theta_i z_{\bar{t},i} + a_i z_i + b_i z_{i-N} = R_i \ , \quad 1 \leq i \leq N_0 \tag{5.1}$$

$$z_i = \varphi_i \ , \quad -N \leq i \leq 0 \tag{5.2}$$

burada $R_i$ ve $\theta_i$ sırasıyla (4.10) ve (4.13) te verilmiştir (Erdogan, 2009).

**Lemma.5.1.** $y_i$, (1.1)-(1.2) probleminin yaklaşık çözümü olsun. Buna göre aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|y\|_{\infty,I_p} \leq \|\varphi\|_{\infty,I_{p-1}}.Q_p + \alpha^{-1}\sum_{k=1}^{p}\|f\|_{\infty,I_k}Q_{p-k} \ , \quad 1 \leq p \leq m \tag{5.3}$$

burada

$$Q_{p-k} = \begin{cases} 1 & , \quad p = k \quad ise \\ \prod_{s=k+1}^{p}\left(1 + \alpha^{-1}\|b\|_{\infty,I_s}\right) & , 0 \leq k \leq p-1 \end{cases} \tag{5.4}$$

dır (Erdogan, 2009).

**İspat:** *p* için tümevarımla kolaylıkla ispatlanabilir.

$t \in I_1$ için

$$y_1 \leq \alpha^{-1}f_1 + (1 + \alpha^{-1}b_1)\varphi$$

$t \in I_2$ için

$$y_2 \leq \alpha^{-1}f_2 + (1 + \alpha^{-1}b_2).(\alpha^{-1}f_1 + (1 + \alpha^{-1}b_1)\varphi))$$

$$\leq \alpha^{-1}f_2 + \alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1}b_2)f_1 + (1 + \alpha^{-1}b_1)(1 + \alpha^{-1}b_2)\varphi$$

$t \in I_3$ için

$y_3 \leq \alpha^{-1} f_3 + y_2(1 + \alpha^{-1} b_3)$

$\leq \alpha^{-1} f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3) \leq \alpha^{-1} f_2 + \alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1} b_2) f_1 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)\varphi$

$= \alpha^{-1} f_3 + \alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1} b_3) f_2 + \alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)\varphi$

$= \alpha^{-1}[f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3) f_2 + (1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1] +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)\varphi$

$t \in I_4$ için

$y_4 \leq \alpha^{-1} f_4 + y_3(1 + \alpha^{-1} b_4)$

$\leq \alpha^{-1} f_4 + (1 + \alpha^{-1} b_4)[\alpha^{-1}[f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3) f_2 + (1 + \alpha^{-1} b_2)(1 +$
$\alpha^{-1} b_3) f_1] + (1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)\varphi]$

$= \alpha^{-1} f_4 + \alpha^{-1}[(1 + \alpha^{-1} b_4) f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4) f_2 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4)\varphi]$

$= \alpha^{-1}[f_4(1 + \alpha^{-1} b_4) f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4) f_2 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1] +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4)\varphi$

$y_1 \leq \alpha^{-1} f_1 + (1 + \alpha^{-1} b_1)\varphi_0$

$y_2 \leq \alpha^{-1}[f_2 + (1 + \alpha^{-1} b_2) f_1] + (1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)\varphi_0$

$y_3 \leq \alpha^{-1}[[f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3) f_2 + (1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1] +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)\varphi_0$

$y_4 \leq \alpha^{-1}[f_4 + (1 + \alpha^{-1} b_4) f_3 + (1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4) f_2 +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3) f_1] +$

$(1 + \alpha^{-1} b_1)(1 + \alpha^{-1} b_2)(1 + \alpha^{-1} b_3)(1 + \alpha^{-1} b_4)\varphi_0$

süreç bu şekilde devam ettirilirse

$$\|y\|_{\infty,p} \leq \alpha^{-1}\|\varphi_0\|_0 \prod_{k=1}^{p}\|b\|_k + \sum_{i=1}^{p}\|f\|_i\theta_i\alpha^{-(p-j)}$$

$$\|y\|_{\infty,p} \leq \alpha^{-1}\|\varphi_0\|_0\theta_p + \sum_{k=1}^{p}\alpha^{-(p-k)}\|f\|_h\theta_{i-h}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\|y\|_{\infty,I_p} \leq \|\varphi\|_{\infty,I_{p-1}}.Q_p + \alpha^{-1}\sum_{k=1}^{p}\|f\|_{\infty,I_k}Q_{p-k} \quad , \quad 1 \leq p \leq m$$

dır.

**Lemma 5.2.**

$z_i$, (5.1) ve (5.2) probleminin çözümü olsun. Buna göre aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|z\|_{\infty,N,p} \leq C\sum_{k=1}^{p}\|R\|_{\infty,\omega_{N,k}} \tag{5.5}$$

(Erdogan, 2009).

**İspat:** (5.3) te $\varphi \equiv 0$ ve $f \equiv R$ kabul edilerek ispat kolaylıkla elde edilir.

**Lemma 5.3**.

Bölüm 2 ve lemma 3.1 deki varsayımlar altında R hata fonksiyonu için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\|R\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq Ch\,,\ 1 \leq p \leq m \tag{5.6}$$

(Erdogan, 2009).

**İspat:** Burada kalan terim $R_i^{(k)}$ , $k = 1,2,3$ ... olmak üzere

$$\left\|R^{(k)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq Ch \ \ , k = 1,2,3 \ldots \tag{5.7}$$

olduğunu gösterelim. Ortalama değer teoremini kullanarak

$$|a(t) - a(t_i)| = |a'(\xi)(t - t_i)|\,, \xi \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$= \max_{\omega_{N,p}}|a'(\xi)||(t - t_i)| \leq Ch \tag{5.8}$$

yazılabilir.

Böylece

$$\left|R_i^{(1)}\right| \leq Chh^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|u(t)|\psi_i(t)dt \tag{5.9}$$

olur. $0 \leq \psi_i(t) \leq 1$ olduğunu gözönüne alarak ve Lemma 3.1 kullanarak

$$\left\|R^{(1)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq Ch \tag{5.10}$$

olduğu görülür. Benzer yöntemle

$R_i^{(2)}$ kalan terim için , $b \epsilon C^1(\bar{I})$ olduğundan, Lemma 3.1 kullanılarak

$$\left|R_i^{(2)}\right| \leq h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|b(t) - b(t_i)u(t-r)\psi_i(t)|\,dt \leq C\int_{t_{i-1}}^{t_i}|u(\xi - r)|d\xi \tag{5.11}$$

değerlendirmesi sağlanır.

Böylece

$$\left\|R^{(2)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq C\int_{t_{i-1}}^{t_i}|u(\xi - r)|d\xi \tag{5.12}$$

olur.

$s = \xi - r$ dönüşümü yapılarak

$$\left\|R^{(2)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq C\int_{t_{i-1}}^{t_i}|u(s)|ds = C\left(\int_{-r}^{0}|\varphi(s)|ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i}|u(s)|ds\right) \tag{5.13}$$

eşitsizliğine indirgenir. Buradan

$$\left\|R^{(2)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq Ch\left(\|\varphi\|_{0,1} + C_p\right) = O(h) \tag{5.14}$$

olur. Yukarıdaki benzer yöntem ile

$$\left\|R^{(3)}\right\|_{\infty,\omega_{N,k}} \leq Ch \tag{5.15}$$

olduğu görülür.

Lemma.5.1.-Lemma.5.3. göz önüne alınarak düzgün yakınsaklığı veren aşağıdaki temel teorem yazılabilir.

**Teorem 5.4.**

$u$, (1.1)-(1.2) probleminin çözümü ve $y$ ise (4.14)-(4.15) fark probleminin çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme sağlanır.

$$\|y-u\|_{\infty,\bar{\omega}_{N,p}} \le Ch,\ 1 \le p \le m. \qquad (5.15)$$

Burada $C, h$ ve $\varepsilon$ bağımsız keyfi sabittir (Erdogan, 2009).

## 6. NÜMERİK SONUÇLAR

(1.1)-(1.2) problemi için alınan teorik sonuçlar aşağıdaki örnek için incelenmiştir.

$$\varepsilon u' + u = \frac{1}{2}u(t-1)\,,\;\; t\,\in[0,T] \qquad (6.1)$$

$$u(t) = 2 \quad , \qquad -1 \le t \le 0$$

probleminin $0 \le t \le 2$ aralığında problemin çözümünü inceleyelim.

$t \epsilon I_1$ için

$u(t-1) = 2$ olur. Bunu (6.1) de yerine yazarsak

$$\varepsilon u' + u = 1, \quad t\,\in[0,T] \qquad (6.2)$$

$$u(0) = 2 \quad , \qquad 0 \le t \le 1$$

birinci mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklem elde edilir. İntegral çarpanı

$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{\varepsilon}dt}$ olduğunu göz önüne alarak (6.2) denkleminin çözümünün

$u_1 = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(e^{\frac{t}{\varepsilon}} + C\right)$ ve $u(0) = 2$ başlangıç şartı göz önüne alındığında

$u_1(t) = 1 + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ elde edilir.

Bu adımda elde ettiğimiz $u$ çözümünü ikinci adımda kullanırsak

$t \epsilon I_2$ için

$$\varepsilon u' + u = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}\right) \qquad (6.4)$$

$$u_1(1) = 1 + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad , \qquad 1 \le t \le 2$$

başlangıç-değer problemini elde ederiz.

İntegral çarpanı

$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{\varepsilon} dt}$ olduğunu göz önüne alarak (6.4) denkleminin çözümünün birinci adımdaki yöntemi tekrar uygulamakla, ayrıca

$u(1) = 1 + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ başlangıç şartı göz önüne alındığında

$$u_2(t) = \frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \left[\frac{1}{2} + \frac{t-1}{2\varepsilon}\right] e^{-(1-t)/\varepsilon}$$

elde edilir.

Sonuç olarak verilen problemin $0 \leq t \leq 2$ aralığındaki çözümü

$$u(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, & t \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \left[\frac{1}{2} + \frac{t-1}{2\varepsilon}\right] e^{-(1-t)/\varepsilon}, & t \in (1,2] \end{cases}$$

elde edilir.

Hesaplanan $e_\varepsilon^{N,p}$ düzgün maksimum hatası

$$e_\varepsilon^{N,p} = \|y - u\|_{\infty,\omega_{N,p}}, p = 1,2 \ldots \tag{6.5}$$

şeklindedir.

Matematica programlama dilinde program yapılarak $N$ ve $\varepsilon$'nun değişik değerleri için $y$ ve $u$ hesaplanmıştır.

**Ek: 1**

**Çizelge 6.1.** $\omega_{N,1}$ de hesaplanan $e_{\varepsilon}^{N,1}$ değerleri

| $\varepsilon$ | N=64 | N=128 | N=256 | N=5 12 | N=1024 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-1}$ | 1.6939x$10^{-15}$ | 9.4369x$10^{-15}$ | 1.87905x$10^{-14}$ | 1.55431x$10^{-15}$ | 3.06977x$10^{-14}$ |
| $2^{-2}$ | 1.36002x$10^{-15}$ | 1.69309x$10^{-15}$ | 9.7352710$^{-15}$ | 2.02199x$10^{-14}$ | 2.99066x$10^{-15}$ |
| $2^{-3}$ | 3.60822x$10^{-16}$ | 1.42595x$10^{-15}$ | 2.11381x$10^{-15}$ | 1.2418x$10^{-14}$ | 2.02199x$10^{-14}$ |
| $2^{-4}$ | 7.49401x$10^{-16}$ | 4.97979x$10^{-16}$ | 1.58175x$10^{-15}$ | 2.24325x$10^{-15}$ | 1.02418x$10^{-14}$ |
| $2^{-5}$ | 3.00809x$10^{-16}$ | 7.49401x$10^{-15}$ | 4.97979x$10^{-16}$ | 2.17647x$10^{-15}$ | 2.35365x$10^{-15}$ |
| $2^{-6}$ | 1.57331x$10^{-16}$ | 1.57331x$10^{-16}$ | 7.49401x$10^{-16}$ | 1.33227x$10^{-15}$ | 2.17647x$10^{-15}$ |
| $2^{-7}$ | 1.11022x$10^{-15}$ | 1.57331x$10^{-16}$ | 4.44089x$10^{-16}$ | 7.49401x$10^{-16}$ | 1.33227x$10^{-15}$ |
| $2^{-8}$ | 1.06631x$10^{-16}$ | 1.11022x$10^{-16}$ | 1.57331x$10^{-16}$ | 4.44089x $10^{-16}$ | 7.49401x$10^{-16}$ |
| $2^{-9}$ | 2.14422 x$10^{-16}$ | 1.06631 x $10^{-16}$ | 1.11022 x $10^{-16}$ | 1.57331 x$10^{-16}$ | 4.44089x $10^{-16}$ |
| $2^{-10}$ | 1.51591x$10^{-17}$ | 2.14422 x $10^{-16}$ | 1.06631 x $10^{-16}$ | 1.11022 x $10^{-16}$ | 1.57331x$10^{-16}$ |

**Çizelge 6.2.** $\omega_{N,2}$ de hesaplanan $e_{\varepsilon}^{N,2}$ değerleri

| $\varepsilon$ | N=64 | N=128 | N=256 | N=512 | N=1024 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-1}$ | 0.00284435x$10^{-15}$ | 0.00142957x$10^{-15}$ | 0.00071664x $10^{-14}$ | 0.00035879x $10^{-15}$ | 0.000179512x$10^{-14}$ |
| $2^{-2}$ | 0.00563021x$10^{-15}$ | 0.00284435x $10^{-15}$ | 0.00142957x$10^{-15}$ | 0.000716647x$10^{-14}$ | 0.00035879x$10^{-15}$ |
| $2^{-3}$ | 0.0110318x $10^{-16}$ | 0.000563021x$10^{-15}$ | 0.00284435x $10^{-15}$ | 0.00142957x$10^{-14}$ | 0.000716647x$10^{-14}$ |
| $2^{-4}$ | 0.0211904x$10^{-16}$ | 0.0110318x $10^{-16}$ | 0.00563021x$10^{-15}$ | 0.00284435x$10^{-15}$ | 0.00142957x$10^{-14}$ |
| $2^{-5}$ | 0.0391904x$10^{-16}$ | 0.0211904x$10^{-16}$ | 0.0110318x$10^{-16}$ | 0.00563021x$10^{-15}$ | 0.00284435x$10^{-15}$ |
| $2^{-6}$ | 0.0676676x$10^{-16}$ | 0.0324525x$10^{-16}$ | 0.0211904x$10^{-16}$ | 0.0110318x$10^{-15}$ | 0.00563021x$10^{-15}$ |
| $2^{-7}$ | 0.0768255x$10^{-16}$ | 0.0676676x$10^{-16}$ | 0.0391904x$10^{-16}$ | 0.0211904x$10^{-16}$ | 0.0110318x$10^{-15}$ |
| $2^{-8}$ | 0.0273057x$10^{-16}$ | 0.0767801x$10^{-16}$ | 0.0676676x$10^{-16}$ | 0.0391904x$10^{-16}$ | 0.0211.904x$10^{-16}$ |
| $2^{-9}$ | 0.00117418x$10^{-16}$ | 0.0276412x$10^{-16}$ | 0.0768255x$10^{-16}$ | 0.0676676x$10^{-16}$ | 0.0391904x$10^{-16}$ |
| $2^{-10}$ | 0.844014x$10^{-17}$ | 0.00117418x$10^{-16}$ | 0.0276412x$10^{-16}$ | 0.0768255x$10^{-16}$ | 0.0676676x$10^{-16}$ |

# 7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Gecikmeli diferansiyel denklemler zaman değişiminin hem şimdiki durumuna hem de geçmişte hatta gelecekteki bir zaman civarındaki durumuna bağlı olduğu için Fizik, Biyobilim, Kontrol teorisi vs. olaylarını modellemek üzere kullanılmaktadır. Singüler pertürbe özellikli problemler için esas amaç düzgün yakınsak fark şemasının kurulmasıdır. Çünkü bu tür problemler matematiksel olarak en yüksek mertebeli türevleri içeren terimlerinin katsayılarının küçük bir $\varepsilon$ parametresinin olduğu problemler olarak tanımlanır. Bu problemin $t = 0$ noktasında bir tek sınır katına sahip olduğu bilinir. Bu tip problemlerin özelliği, $\varepsilon$ parametresinin küçük değerlerinde tanım bölgesinin bazı yerlerinde çok hızlı diğer kısımlarında ise düzenli ve yavaş değişime sahiptir.

Bu çalışmada, pozitif küçük bir parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemi için nümerik adımlar yöntemi kullanarak her bir adımda singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden diferansiyel denkleme indirgendi. Yani, Singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferansiyel denkleme öncelikle nümerik adımlar metodu $[0, T]$ aralığında uygulanarak, her bir $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında singüler pertürbe özellikli adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü. Daha sonra üstel katsayılı fark şeması kurularak yaklaşık çözüm oluşturuldu. Yakınsaklık analizi yapılarak, yaklaşık çözümün kesin çözüme düzgün yakınsak olduğu gösterildi. Bir örnek verilerek kesin çözüm ile yaklaşık çözümler arasındaki ilişki bilgisayar programı ile denetlendi.

## KAYNAKLAR


Ahmad, S., Rama Mohana Rao, M., 1999. ***Theory of ordinary differential equations*. *With applications in biology and engineering***. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd, New Delhi.

Amiraliyev, G.M., 1990. ***Difference method for he solution of one problem of the theory dipersive waves.*** Differentsial'nye Uravneniya**,** 2146-2154.

Amiraliyev, G. M., Memmedov, Y. D., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseuudo-parabolic equations. ***Turkish J. of Math.,*** 19, 207-222

Amiraliyev, G.M., Duru, H., 2002. ***Nümerik Analiz.*** Pegema Yayıncılık, Ankara.

Amiraliyev, G.M., Duru, H., 2005. A note on a parametherized singular perturbation problem. ***Journal of Computational and Applied Mathematics.,*** 182, 233-242.

Amiraliyev, G. M., Erdogan, F., 2007. Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations. ***Computers and Mathematics with Application.,*** 1251-1259.

Bakhvalov, N. S., 1969. On optimization of methods for solving boundary-value problems in the presence of a boundary layer. The use of special transformations in the numerical solution of bounary-layer problems**.** ***Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,*** 9,4,841-859.

Bellman, R., Cooke, K.L., 1963. ***Differential-Difference Equations.*** Academic Press, New York, USA.

Chow, S. N., Mallet-Paret, J., 1983. ***Singularly Perturbed Delay-differential equations. In.*** J. Chandra and A.C. Scott, Editors, Coupled Nonlinear Oscillators, North-Holland, Amsterdam 7-12.

Chow, S. N., Hale, J. K., Huang, W., 1992. From fine waves to square waves in delay equations. ***Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A.***, 120: 223-229.

Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. ***Uniform Numerical Methods or Problems with Initial and Boundary Layers.*** Boole Press, Dublin.

Driver, R.D., 1977. ***Ordinary and Delay Differential Equations***. Applied Mathematical Sciense*s*. Springer. New York, USA.

Erdogan, F., 2009. An Exponentıaly Fıtted Method For Singulary Perturbed Delay Dıfferentıal Equatıons. ***Advances in Difference Equations.***, 10. 1155/781579.

Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I., 2000. ***Robust Computational Techniques or Boundary Layers.*** Chapman- Hall/CRC, New York, USA.

In't Hout, K. J., 1992. A new interpolation procedure for adapting Runge-Kutta methods to delay differential equations***. BIT.,*** 32: 634-649.

In't Hout, K. J ., 1997. Stability analysis of Runge-Kutta methods for systems of delay differential equations. ***IMAJ. Numer. Anal.,*** 17:17-27.

Mallet-Paret, J., Nussbaum, R. D., 1989. A different.ial-delay equations arising in optics physicology. ***SIAMJ. Math. Anal.,*** 20: 249-292.

McCartin, B. J. 2001. Exponential fitting of delayed recruitment renewal equation. ***J. of Comput. and Appl Mat,. 136***: 343-256.

Memmedov, Y. C.,1980. ***Eşitsizlikler hakkında teoremler.*** İlim, Aşkabad.

Tian, H., 2002. The exponential asymptotic stability of singularly perturbed delay differential equations with a bounded lag***. J. Math. Anal Appl., 270:*** 143-149.

Roos, H. G., Styness, M., Tobiska, L., 1996. ***Numercal methot for singularly perturbed differantial aquations. Convection-diffusion and flow problems.*** Springer-Verlag, New York, USA.

Samarskii, A. A., 2001. ***The Theory of Difference Schemes*** . Marrel Dekker, inc, New York, USA.

Samarskii, A. A., Gulin, A. V., 1989. ***Sayısal Yöntemler.*** Nauka, Moskova.

Yakubov, M., Hesenov, K., Ahmedov, G., 1978. ***Adi Diferansiyel Tenlikler.*** Azerbaycan İlimler Akademiyası Neşriyatı, Bakü, Azerbaycan.

## ÖZGEÇMİŞ

Mehdi ERDOĞAN, 1978 yılında Muş'ta doğdu. İlkokulu Umurca köyü ilkokulunda, ortaokulu Korkut Y.İ.B.O.'da, liseyi İzmir Vali Vecdi Gönül Lisesi'nde tamamladı. 1998 yılında girdiği Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Matematik programını 2003 yılında derece ile bitirdi. 2006 yılında Y.Y.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü matematik ana bilim dalında yüksek lisans programına başladı. Halen özel öğretim kurumlarında uzman matematikçi olarak görev yapmaktadır.

İletişim: merdogan@yyu.edu.tr