

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**KISITLI DURUM KALMAN FİLTRESİ VE BAZI UYGULAMALARI**

**Esin KÖKSAL BABACAN**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA**

**2009**

**Her hakkı saklıdır**

## ÖZET

### Doktora Tezi

#### KISITLI DURUM KALMAN FİLTRESİ VE BAZI UYGULAMALARI

Esin KÖKSAL BABACAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Levent Özbek

Durum-uzay modelleri iktisat, biyoloji, tıp ve mühendislik gibi pek çok alanda uygulama olanağına sahiptir. Bu gibi alanlarda ilgilenilen süreçle ilgili model üzerinde yer alan parametrelerde kimi kısıtlar söz konusu olabilir. Bu bağlamda kısıtlı durum-uzay modeli ve Kalman Filtresinin kullanımı büyük önem taşımakta ve araştırılması gereken konular arasında yer almaktadır.

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan durum-uzay modelleri ele alınıp Kalman Filtresi ve İlerletilmiş Kalman Filtresinin özellikleri üzerinde durulmuştur. Durum-uzay modelinde yer alan durum vektörünün üzerinde kısıt olması koşulu altında Kısıtlı Kalman Filtresinin elde edilişi açıklanmış ve yakınsama problemleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca çeşitli uygulama çalışmaları yapılmıştır.

**Haziran 2009, 162 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Durum-Uzay Modeli, Kalman Filtresi, İlerletilmiş Kalman Filtresi, Kısıtlı Kalman Filtresi, Sistem Belirleme, Kompartman Modelleri, Kontrol.

## **ABSTRACT**

**Ph. D. Thesis**

### **KALMAN FILTERING WITH CONSTRAINED STATE AND SOME APPLICATIONS**

**Esin KÖKSAL BABACAN**

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Science  
Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Levent Özbek

State-space models are application area in economy, biology, medicine and engineering. In these area relating process models have some constraint. In this sense, constrained Kalman Filter and Kalman Filter using is important and take part of investigate.

In this study, linear and nonlinear state-space models are emphasized and properties of Kalman Filter and Extended Kalman Filter are given. Kalman Filtering when constraint on state vector in state-space models are explained and convergence problems are investigated. Besides, some applications are created.

**June 2009, 162 pages**

**Key Words:** State-Space Models, Kalman Filter, Extended Kalman Filter, Constrained Kalman Filter, System Identification, Compartmental Models, Control.

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek beni teşvik eden ve her konuda yol gösteren danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Levent ÖZBEK(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'e çok teşekkür ederim.

Doktoramın başlangıç aşamasında Kalman Filtresini bana öğreten ve beni bu konuda çalışmaya yönlendiren sevgili hocam sayın Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'e katkılarından dolayı teşekkür ederim.

TİK üyelerim Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü) ve Yrd. Doç. Dr. Murat EFE (Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü)'ye tez çalışmalarım boyunca verdikleri katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Tıp alanında uygulama çalışması esnasında verdiği katkılardan dolayı Uzm. Dr. Nuray YAZIHAN (Ankara Üniversitesi Tıp Fakültesi Dahili Tıp Bilimleri Fیزیopatoloji Bilim Dalı)'a ve ekonomi alanındaki uygulama çalışmalarında verdiği destekten ötürü sayın Doç. Dr. Ümit ÖZLALE (Bilkent Üniversitesi İktisadi İdari Ve Sosyal Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü)' ye teşekkür ederim.

Beni büyüten, çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen sevgili anne ve babacığım, beni her zaman destekleyen ve çalışmaya teşvik eden sevgili kardeşlerime çok teşekkür ederim.

Beni anlayıp, her zaman yanımda olan ve beni her koşulda destekleyen sevgili eşime çok teşekkür ederim.

Esin KÖKSAL BABACAN

Ankara, Haziran 2009

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	1
2. KALMAN FİLTRESİ .....	4
2.1 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modeli ve Kalman Filtresi.....	4
2.2. Lineer Olmayan Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi.....	9
3. KISITLI DURUM KALMAN FİLTRESİ .....	14
3.1 Lineer Kısıtlı Durum Kalman Filtresi.....	14
3.1.1 Maksimum olasılık yöntemi .....	15
3.1.2 Ortalama kare yöntemi.....	16
3.1.3 İz düşüm yöntemi .....	18
3.2 Kısıtlı Durum Kalman Filtresi Tahmininin Özellikleri.....	19
3.3 Kısıtlı Durum İlerletilmiş Kalman Filtresi .....	22
3.4 Kısıtlı Lineer Olmadığı Durum.....	23
4. KESİKLİ ZAMAN DETERMİNİSTİK DURUM-UZAY MODELLERİNDE İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI .....	24
4.1 Kısıt Olmaması Durumunda Yakınsama.....	24
4.2 Kısıtlı Durumda Yakınsama.....	36
5. KESİKLİ ZAMAN STOKASTİK DURUM-UZAY MODELLERİNDE İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI .....	43
5.1 Kısıtsız Durumda Yakınsama .....	43
5.1.1 İlerletilmiş Kalman Filtresi için hata sınırları.....	46
5.2 Kısıtlı Durumda Yakınsama.....	52
6. EN ÇOK OLABİLİRLİK YÖNTEMİ İLE MODEL PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ.....	58

6.1 Log-Olabilirlik Fonksiyonunun Türevleri .....	60
6.2 Standart Hata .....	68
6.3 Durum-Uzay Modelleri İçin Optimal Kontrol .....	69
6.4 Durum-Uzay Modellerinin Parametrelerine Göre Türevleri.....	70
<b>7. UYGULANAN KONTROL BİLİNDİĞİNDE DURUM-UZAY MODELLERİNİN EKONOMİK PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ.....</b>	<b>73</b>
7.1 Uygulanan Kontrol Bilindiğinde Durum-Uzay Modellerinin Ekonomik Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Yöntemi İle Tahmini .....	74
7.2 Uygulanan Kontrol Bilindiğinde Durum-Uzay Modellerinin Ekonomik Parametrelerinin İlerletilmiş Kalman Filtresi İle Tahmini .....	76
7.3 Parametrelerin Üzerinde Kısıt Olması Durumunda Tahmin .....	78
7.3.1 Kısıtlı durumda en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin.....	78
7.3.2 Kısıtlı durumda ilerletilmiş kalman filtresi ile tahmin .....	79
<b>8. UYGULAMALAR.....</b>	<b>80</b>
8.1 Tümör Hücrelerinin Kılcal Damarlardan Geçirgenliğinin Online Tahmini .....	80
8.1.1 ICG kompartman modeli .....	81
8.1.2 Geçirgenlik parametresi tahmini için ilerletilmiş kalman filtresi.....	82
8.1.3 Deneysel sonuçlar ve tartışma .....	83
8.1.5 Kısıtlı durumda geçirgenlik parametrelerinin tahmini .....	86
8.1.6 Sonuç.....	86
8.2 Ekonomi Örneği 1 .....	87
8.2.1 En çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini .....	89
8.2.2 İlerletilmiş kalman filtresi ile parametre tahmini .....	89
8.2.3 Kısıtlı durum.....	93
8.2.4 Sonuç.....	95
8.3 Ekonomi Örneği 2 .....	95
8.3.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametre Tahmini .....	97
8.3.2 İlerletilmiş Kalman Filtresi ile Parametre Tahmini.....	98

<b>8.3.3 Kısıtlı durum.....</b>	<b>101</b>
<b>8.3.4 Ekonomi örneği 2 (gerçek veriler) .....</b>	<b>103</b>
<b>8.3.5 Sonuç.....</b>	<b>106</b>
<b>9. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>107</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>109</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>114</b>
<b>EK 1 Fare Tümörleri için Kesikli Durum-Uzay Modelinin Elde Edilişi....</b>	<b>115</b>
<b>EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı... </b>	<b>116</b>
<b>EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları.....</b>	<b>122</b>
<b>EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları.....</b>	<b>138</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>161</b>

## SİMGELER DİZİNİ

$x_n$	Durum vektörü
$y_n$	Gözlem vektörü
$w_n$	Hata vektörü
$v_n$	Hata vektörü
$u_n$	Kontrol girdisi
$E(x_0) = \bar{x}_0$	Başlangıç durumu
$P_0$	Başlangıç kovaryans matrisi
$Y_n$	$\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ n anına kadar olan tüm gözlemler
$\hat{x}_{n+1}$	$Y_n$ verildiğinde, $x_{n+1}$ ' nin koşullu beklenen değeri
$\hat{x}_{n n}$	$Y_n$ verildiğinde, $x_n$ ' nin koşullu beklenen değeri
$P_{n n}$	$Y_n$ verildiğinde, $x_n$ ' nin koşullu kovaryansı
$\hat{x}_{n n-1}$	$Y_{n-1}$ verildiğinde, $x_n$ ' nin koşullu beklenen değeri
$P_{n n-1}$	$Y_{n-1}$ verildiğinde, $x_n$ ' nin koşullu kovaryansı
$K_n$	Kalman Kazanç matrisi
$\alpha$	Unutma faktörü
$\zeta_n$	Hata vektörü
$D$	Kısıt matrisi (sabit matris)
$d_n$	Bilinen vektör
$s$	Kısıtların sayısı
$q$	Durumların sayısı
$\tilde{x}$	Kısıtlı Kalman Filtresi tahmini
$W$	Simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisi
$f(x_n, u_n)$	Birinci dereceden türeğe sahip fonksiyon
$h(x_n)$	Birinci dereceden türeğe sahip fonksiyon
$\hat{x}_n^-$	Önsel tahmin
$\hat{x}_n^+$	Sonsal tahmin

$A_n$	$f$ fonksiyonunun $x$ durum vektörüne göre birinci dereceden türevlerinin matrisi
$C_n$	$h$ fonksiyonunun $x$ durum vektörüne göre birinci dereceden türevlerinin matrisi
$\zeta_n$	$n$ zamanındaki kısıtsız Kalman filtresi tahmin hatası
$\mathcal{G}_n$	$n$ zamanındaki kısıtlı Kalman filtresi tahmin hatası
$J(\theta)$	Negatif olabilirlik fonksiyonu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 8.1 Kompartman Modeli .....	81
Şekil 8.2 Gözlenen(Mavi) ve Kalman Filtresi ile Tahmin Edilen(Kırmızı) ICG Yoğunlukları.....	84
Şekil 8.3 Kompartmanlardaki ICG Yoğunluklarının Tahminleri.....	84
Şekil 8.4 Geçirgenlik Parametrelerinin Tahminleri.....	85
Şekil 8.5 Kısıtlı Durumda Geçirgenlik Parametreleri Tahminleri (kırmızı-kısıtlı tahmin, mavi-kısıtsız tahmin).....	86
Şekil 8.6 $a_n$ ve $y_n$ Gözlemleri.....	90
Şekil 8.7 Gözlemlerin Tahmini(Mavi gerçek-Kırmızı Tahmin) .....	90
Şekil 8.8 Gerçek ve Optimal Kontrol .....	91
Şekil 8.9 $\rho_1$ ve $\rho_2$ Tahminleri.....	91
Şekil 8.10 $r$ ve $b$ Tahminleri .....	92
Şekil 8.11 $\gamma$ Tahmini .....	92
Şekil 8.12 $\rho_1$ ve $\rho_2$ Tahminleri.....	94
Şekil 8.13 $\gamma$ Tahmini .....	94
Şekil 8.14 $\lambda_\pi$ ve $\lambda_y$ Tahminleri (Kayıp Fonksiyonu Parametreleri).....	98
Şekil 8.15 $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$ ve $\beta_r$ Tahminleri (Üretim Açığı, Sistem Parametreleri).....	99
Şekil 8.16 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve $\alpha_4$ Tahminleri (Enflasyon Denklemi, Sistem Parametreleri)....	99
Şekil 8.17 Optimal kontrol ve Gerçek kontrol .....	100
Şekil 8.18 $\pi_n$ ve $y_n$ Gözlemleri .....	100
Şekil 8.19 $\pi_n$ ve $y_n$ Tahminleri (Gözlem Tahminleri).....	101
Şekil 8.20 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve $\alpha_4$ Tahminleri.....	102
Şekil 8.21 $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$ ve $\beta_r$ Tahminleri.....	103
Şekil 8.22 Optimal kontrol ve Gerçek kontrol .....	104
Şekil 8.23 $\lambda_\pi$ ve $\lambda_y$ Tahminleri (Kayıp Fonksiyonu Parametreleri).....	104
Şekil 8.24 $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$ ve $\beta_r$ Tahminleri (Üretim Açığı, Sistem Parametreleri).....	105
Şekil 8.25 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve $\alpha_4$ Tahminleri.....	105

## 1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelleri, 1960'lı yıllarda uydu, güdümlü mermi, uzay araçları ve hareket yeteneği olan hedeflerin konumunu izleme ve kontrol etme gibi uygulamalar için geliştirilmiştir. Durum-uzay modelleri, fiziksel ve ekonomik sistemlerin modellenmesinde pek çok uygulama alanına sahiptir (Özbek 1998).

Durum-uzay modelinde asıl problem, gözlenemeyen  $x_n$  durum vektörünü  $y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$  gözlemlerini kullanarak tahmin etmektir. Bu problem filtreleme olarak bilinir (Jazwinski 1970). İndirgemeli (ardışık) tahmin sadece  $n$  anındaki  $y_n$  gözlemine ve  $n-1$  anındaki  $\hat{x}_{n-1}$  tahminine bağlı olarak  $n$  anındaki  $x_n$  durumunun en iyi  $\hat{x}_n$  değerini tahmin etme problemidir ve Kalman (1960) tarafından dik izdüşüm yöntemiyle çözülmüştür. Bu çözüm yöntemi Kalman Filtresi olarak bilinir ve bu tahmin değişik optimizasyon ölçütlerine göre elde edilebilir (Özbek 1998).

Durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinde ve başlangıç durumunda herhangi bir dağılım varsayımı yapılmadan sadece beklenen değerlerinin ve kovaryans matrislerinin bilindiği varsayımı yapılarak, durum vektörünün tahmininin dik izdüşüm yöntemi ile bulunması; Jazwinski (1970), Davis and Vinter (1985)' de detaylı olarak ele alınmıştır. Davis and Vinter (1985), durum-uzay modeli ile ilgili kontrol edilebilme, gözlemlenebilme, kararlılık gibi birçok özellik ve bunlarla ilgili birçok teorem vermiştir.

Bir sistemi incelemekteki amaç sistemin davranışını öğrenmek, sistemi denetlemek, sistemi yenilemek, korumak veya sistemi kontrol altında tutmak olabilir. Durum-uzay modeli ile modellenen bir sistemin istenilen biçimde kontrol edilebilmesi gözlenemeyen durum vektörünün tahminine bağlıdır. Filtreleme ve kontrol arasında dualite özelliği vardır (Kalman 1960, Kalman and Bucy 1961). Bu nedenle filtreleme işlemi bir sistemi incelemede önemli bir yer tutar (Özbek 1998).

Kalman Filtresi dinamik sistemlerin durumunu tahmin etmekte kullanılır. Bununla birlikte, Kalman Filtresi uygulamalarında sıklıkla bilinen model veya sinyal bilgileri

önemsenmez ya da ihmal edilir (Massicotte *et al.* 1995). Örneğin durum değerlerinin kısıtları Kalman Filtresinin yapısına kolaylıkla uyum sağlayamadığından sıklıkla ihmal edilir. Simon ve Chia (2002) çalışmalarında durum eşitliği üzerinde kısıt olması durumunda Kalman Filtresini elde etmişlerdir.

Chen and Chiang (1993) çalışmalarında Kısıtlı Kalman Filtresinin yakınsama hızının kısıtsıza göre biraz daha hızlı olduğunu simülasyon ile göstermişlerdir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde lineer kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve Kalman Filtresi ile lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresine ilişkin bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; durum değişkenleri için bilinen bir ön bilgi yani kısıt olması durumunda, Kalman Filtresi ile durum tahminini elde etme yöntemleri anlatılmıştır. Kısıtlı durum Kalman Filtresinin özellikleri ile ilgili bilgi verilmiştir. Lineer olmayan durum-uzay modelleri için kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi ve kısıtın lineer olmadığı durumda kısıtlı Kalman Filtresinin elde edilişi ile ilgili bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde; lineer olmayan kesikli zaman deterministik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsama problemi ele alınmıştır. Boutayeb *et al.* (1997)' de İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritmasında verilen hata kovaryansı yerine Özbek and Aliev (1998)' de önerilen hata kovaryansının alınması ile yakınsamada olan değişim araştırılmıştır. Bu sonuçlar göz önüne alınarak daha önce incelenmemiş olan kısıtlı durumda yakınsama incelenmiş ve sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması ele alınmış ve daha önce incelenmemiş olan kısıtlı durumda yakınsama incelenerek sonuçlar elde edilmiştir.

Altıncı bölümün ilk kısmında kesikli zaman stokastik durum uzay modellerinde bilinmeyen parametrelerin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ve tahminin elde edilmiş adımları anlatılmıştır, ikinci kısmında parametre tahminlerinin standart hatalarının

hesaplanması anlatılmıştır, üçüncü kısmında durum-uzay modelleri için optimal kontrol problemi ve bu kontrol probleminin çözümü verilmiştir, dördüncü kısmında optimal kontrol problemi çözülürken kontrolle ilgili bilinmeyen parametrelerin (bir ekonomi modeline ait) tahmininin en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilmesi anlatılmıştır.

Çalışmanın yedinci bölümünde uygulanan kontrol bilinirken durum-uzay modellerinin parametrelerinin tahmini problemi üzerinde durulmuş ve bu problemin çözümü için kullanılabilir bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem en çok olabilirlik tahmini elde edilirken de kullanılmıştır.

Çalışmanın sekizinci bölümü uygulama çalışmalarına ayrılmıştır. İlk uygulama, tıp alanında uygulama olanağı olan kompartman modelleri için İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak fare tümörleri verileri üzerinde yapılmıştır. Durum değişkenleri arasında bilinen bir kısıt olması durumunda filtre tekrar çalıştırılıp sonuçlar yorumlanmıştır.

İkinci ve üçüncü uygulama çalışmaları ekonomi alanında yapılmıştır. İlk uygulamada, durum-uzay modeli ve kontrol kullanılarak istenilen parametre tahminleri, kısıtlı ve kısıtsız durum için en çok olabilirlik yöntemiyle ve İlerletilmiş Kalman Filtresiyle hesaplanmıştır. İkinci uygulama merkez bankalarının tercih parametrelerini belirlemekle ilgilidir ve ABD ekonomisiyle ilgili gerçek veriler kullanılarak da tahminler hesaplanmıştır.

## 2. KALMAN FİLTRESİ

Bu bölümün ilk kısmında kesikli zaman stokastik durum-uzay modelinin tanıtımı ve Kalman Filtresi, ikinci kısmında lineer olmayan durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi verilmiştir. İlerletilmiş Kalman Filtresi ile ilgili yapılan çalışmalara örnekler verilmiştir.

### 2.1 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modeli ve Kalman Filtresi

Bu kısımda kesikli zaman stokastik durum-uzay modelinin tanıtımı verilmiş ve Kalman Filtresi ve birtakım özellikleri anlatılmıştır.

Durum-uzay modeli, sistemin durumunu gösteren ancak gözlenemeyen  $\{x_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  stokastik süreci ile ilgili bir durum eşitliği ve gözlenebilen,  $\{y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  stokastik süreci ile ilgili bir ölçüm (gözlem) eşitliğinden oluşan

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n + G_n w_n \quad (2.1)$$

$$y_n = H_n x_n + v_n \quad (2.2)$$

şeklinde bir modeldir. Burada,  $x_n \in R^q$ , sistem durum vektörünü,  $y_n \in R^m$ , sistem gözlem vektörünü göstermektedir.  $A_n$ ,  $q \times q$  boyutlu sistem geçiş matrisini,  $H_n$ ,  $m \times q$  boyutlu gözlem matrisini göstermektedir.  $B_n$ ,  $q \times m$ ,  $G_n$ ,  $q \times q$  boyutlu matristir. Bu matrisler zamana bağlı olduğunda modele dinamik model, aksi halde statik model denir.  $w_n \in R^q$  ve  $v_n \in R^m$  sıfır ortalamalı beyaz gürültü süreçlerini (hata terimi) göstermektedir. Yani,  $x_n \in R^q$  sistem durum vektörü,  $y_n \in R^m$  sistem gözlem vektörü,  $u_n \in R^p$  sistem kontrol vektörü olmak üzere model varsayımları ,

$$E(x_0) = \bar{x}_0$$

$$E(w_n) = 0$$

$$E(v_n) = 0$$

$$Kov(x_0) = E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] = P_0$$

$$E(w_n w_j') = \begin{cases} Q_n, n = j \\ 0, n \neq j \end{cases}$$

$$Kov(v_n v_j') = \begin{cases} R_n, n = j \\ 0, n \neq j \end{cases}$$

$$E(w_j v_n') = 0$$

$$E(x_0 w_n') = 0$$

$$E(x_0 v_n') = 0$$

şeklinde. Ayrıca tüm  $n = 0, 1, 2, \dots$  anlarında  $A_n, B_n, G_n, Q_n$  ve  $R_n$  matrislerinin bilindiği varsayılır (Davis and Vinter 1985). En iyi filtreleme problemi (hatanın kovaryansının minimum olması anlamında)  $Y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  gözlemleri verildiğinde  $x_n$  durumunun en iyi tahminini belirleme problemidir.  $Y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  gözlemleri verildiğinde  $x_n$  durumunun tahmini

$$\hat{x}_{n|n} = E[x_n | y_0, y_1, \dots, y_n] = E[x_n | Y_n]$$

ile hatanın kovaryans matrisi

$$P_{n|n} = E[(x_n - \hat{x}_{n|n})(x_n - \hat{x}_{n|n})' | Y_n]$$

ile,  $Y_{n-1} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$  gözlemleri verildiğinde  $x_n$  durumunun tahmini,

$$\hat{x}_{n|n-1} = E[x_n | y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] = E[x_n | Y_{n-1}]$$

ile, hatanın kovaryans matrisi

$$P_{n|n-1} = E[(x_n - \hat{x}_{n|n-1})(x_n - \hat{x}_{n|n-1})' | Y_{n-1}]$$

ile gösterilsin. Buna göre Kalman Filtresi,

$$P_{0|-1} = P_0$$

$$\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak,

$$\hat{x}_{n|n-1} = A_{n-1} \hat{x}_{n-1|n-1} + B_{n-1} u_{n-1}$$

$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + K_n [y_n - H \hat{x}_{n|n-1}] \quad (2.3)$$

$$K_n = P_{n|n-1} H_n' (H_n P_{n|n-1} H_n' + R_n)^{-1}$$

$$P_{n|n-1} = A_{n-1} P_{n-1} A_{n-1}' + G_{n-1} Q_{n-1} G_{n-1}'$$

$$P_n = (I - K_n H_n) P_{n|n-1}$$

biçiminde verilir. Burada,  $K_n$  Kalman kazancı olarak bilinir (Davis and Vinter 1985, Anderson and Moore 1979).  $\hat{x}_{n|n-1}$  ve  $\hat{x}_{n|n}$ ,  $x_n$  durum vektörünün önsel ve sonsal tahminleri olarak adlandırılır.

Anderson and Moore (1979)'da Kalman Filtresi ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir.  $Y_n$  ile  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  ölçümlerinin sütun vektörleri gösterilmek üzere, eğer  $x_0$ ,  $w_n$  ve  $v_n$ 'nin dağılımları normal ise  $x_{n+1}$  in Kalman Filtresi tahmini  $\hat{x}_{n+1|n}$  in,  $Y_n$  ölçümleri verildiğinde  $x_{n+1}$  in koşullu beklenen değeri olduğunu göstermişlerdir. Yani,

$$\hat{x}_{n+1|n} = E[x_{n+1} | Y_n]$$

dir. Hatta  $x_0$ ,  $w_n$  ve  $v_n$ 'nin ortak dağılımları normal olmasa bile  $Y_n$  ölçümleri verildiğinde, Kalman Filtresi tahmini, tahmin hatasının varyansını minimum yapan

tahmindir. Anderson and Moore (1979)'da Kalman Filtresi tahmini (minimum varyanslı tahmin),

$$\hat{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + P_{xy} P_{yy}^{-1} (Y_n - \bar{Y}_n)$$

olarak verilmiştir. Burada  $\bar{x}_{n+1}$ ,  $x_{n+1}$ 'in beklenen değeri;  $\bar{Y}_n$ ,  $Y_n$ 'nin beklenen değeri,  $P_{xy}$ ,  $x_{n+1}$  ve  $Y_n$ 'nin varyans kovaryans matrisi;  $P_{yy}$ ,  $Y_n$ 'nin kovaryans matrisi ve  $\bar{x}_{n+1}$ ,  $x_{n+1}$ 'in verilen  $Y_n$  gözlemleri üzerine koşullu ortalamasıdır. Benzer şekilde Anderson and Moore (1979)'dan dolayı  $\hat{x}_{n+1}$ 'in  $Y_n$  verildiğinde koşullu normal dağılım olduğu durumda,  $\hat{x}_{n+1}$  Kalman Filtresi tahmininin ve  $Y_n$ 'nin ortak dağılımının normal olduğu bilinmektedir. Buna göre,  $Y_n$  verildiğinde  $x_{n+1}$ 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$P(x|Y) = \frac{e\{-(x - \bar{x})P^{-1}(x - \bar{x})/2\}}{(2\pi)^{q/2} |P|^{1/2}}$$

biçimindedir. Burada,  $q$ ,  $x$ 'in boyutu ve

$$P = P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{yx}$$

olup,  $P_{xx}$ ,  $x_n$ 'nin kovaryans matrisidir. Kalman Filtresi tahmini,  $P(x|Y)$  koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimum yapan  $x$  değeridir ve  $P$ , Kalman Filtresi tahmininin kovaryansıdır.

Kalman Filtresi, kurulan model sistem dinamiğini tam olarak temsil ediyorsa durumun en iyi tahminini verir. Eğer sistem dinamiği iyi temsil edilmemişse yani filtre yanlış model üzerinde kurulmuşsa filtre yanlış çalışacaktır. Bunu önlemek amacıyla Fagin (1964), yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içereceğini ve bu nedenle de gözlemlerin üstel olarak ağırlıklandırılabilirliğini önermiştir. Xia *et al.* (1994), bu yöntemi durum-uzay modeline uygulamışlar ve hata kovaryans matrisinin,

$$P_{n|n-1} = \alpha A_{n-1} P_{n-1} A_{n-1}' + G_{n-1} Q_{n-1} G_{n-1}'$$

biçiminde olması gerektiğini önermişlerdir. Burada  $\alpha \geq 1$  özelliğini sağlamalıdır aksi halde  $\alpha = 1$  alınacaktır. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresinin performansının unutm faktörü  $\alpha$ 'nın seçimine bağlı olduğu ve en iyi filtre olacak şekilde bu unutm faktörünün hesaplanması gerektiği belirtilmiş, unutm faktörünün hesaplanması için değişik algoritmalar önermişlerdir.

Fagin (1964) tarafından önerilen yöntemi durum-uzay modeline uyarlamak için aşağıdaki algoritma uygulanmalıdır. Kalman Filtresinin özelliklerinden bilindiği gibi filtre gürültü kovaryansları ağırlıklandırılırsa değişiklik sadece hatanın kovaryans matrisinde kendisini gösterir. Bu durum Gustafsson (1992) tarafından da belirtilmiştir. Başlangıç durumu, sistem ve gözlem gürültü süreçlerinin kovaryans matrisleri  $\alpha$  ağırlık faktörü ile,

$$\bar{P}_0 = \alpha P_0, \bar{Q}_n = \alpha Q_n, \bar{R}_n = \alpha R_n$$

biçiminde ağırlıklandırılırsa, Kalman Filtresi eşitliklerinde,  $\hat{x}_{n|n-1}$  tahmini aynı kalırken değişiklik sadece hatanın kovaryans matrisinde kendisini gösterir. Bu durumda kovaryans matrisi

$$\bar{P}_{n|n-1} = \alpha P_{n|n-1}$$

şekline gelir (Özbek and Aliev 1998). Yani,

$$P_{n|n-1} = \alpha (A_{n-1} P_{n-1} A_{n-1}' + G_{n-1} Q_{n-1} G_{n-1}')$$

olur.

## 2.2. Lineer Olmayan Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi

Bu kısımda lineer olmayan durum-uzay modeli tanıtılmış ve İlerletilmiş Kalman Filtresi verilmiştir. Durum-uzay modelinde yer alan sistem gözlem matrislerinin bilinmemesi durumunda (sistem belirleme) İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak bu matrislerin nasıl tahmin edileceği konusunda açıklama yapılmıştır.

Bir sistem ile ilgili durum değişkeni  $q$ -boyutlu  $x$  rasgele vektörü ve gözlem değişkeni  $m$  boyutlu  $y$  rasgele vektörü olsun.  $f: \mathfrak{R}^q \rightarrow \mathfrak{R}^q$  ve  $h: \mathfrak{R}^q \rightarrow \mathfrak{R}^m$  fonksiyonları birinci dereceden sürekli türevlere sahip olmak üzere lineer olmayan durum-uzay modeli,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f_n(x_n) + H_n(x_n)w_n \\ y_n &= h_n(x_n) + v_n\end{aligned}\tag{2.4}$$

ve

$$E(w_n) = 0,$$

$$E(v_n) = 0$$

$$E(w_n w_i') = \begin{cases} Q_n, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases},$$

$$E(v_n v_i') = \begin{cases} R_n, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}\tag{2.5}$$

$$E(x_0 w_n') = 0,$$

$$E(x_0 v_n') = 0,$$

varsayımları altında İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması;

$$\hat{x}_0 = E(x_0),$$

$$P_0 = \text{Kov}(x_0)$$

başlangıç değerleri ve  $n = 1, 2, \dots$  için

$$\begin{aligned}
P_{n|n-1} &= \left[ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) \right] P_{n-1} \left[ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) \right]' + H_{n-1}(\hat{x}_{n-1}) Q_{n-1} H_{n-1}'(\hat{x}_{n-1}) \\
\hat{x}_{n|n-1} &= f_{n-1}(\hat{x}_{n-1}) \\
K_n &= P_{n|n-1} \left[ \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\hat{x}_{n|n-1}) \right] \left[ \left[ \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\hat{x}_{n|n-1}) \right] P_{n|n-1} \left[ \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\hat{x}_{n|n-1}) \right]' + R_n \right]^{-1} \\
P_n &= \left[ I - K_n \left[ \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\hat{x}_{n|n-1}) \right] \right] P_{n|n-1} \\
\hat{x}_n &= \hat{x}_{n|n-1} + K_n [y_n - h_n(\hat{x}_{n|n-1})], \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

eşitlikleri ile verilir (Jazwinski 1970, Chui and Chen 1991, Chen 1993).

Lineer olmayan durumda filtrenin optimalliği için herhangi bir iddiada bulunulmaz, fakat uygulamalarda genellikle iyi sonuçlar verdiği söylenebilir (Anderson and Moore 1979).

$\theta$  bilinmeyen parametre vektörünü göstermek üzere; durum-uzay modelindeki matrisler  $A_n(\theta), G_n(\theta), H_n(\theta)$  şeklinde  $\theta$ ' nın fonksiyonu biçiminde yazılsın ve  $\theta$  parametre vektörünün rasgele yürüyüş şeklinde modellendiği kabul edilsin. Bu durumda model,

$$x_{n+1} = A_n(\theta_n)x_n + B_n(\theta_n)u_n + G_n(\theta_n)w_n \tag{2.7}$$

$$y_n = H_n(\theta_n)x_n + v_n \tag{2.8}$$

ve parametre vektörü,

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \zeta_n \tag{2.9}$$

şeklinde olacağından (2.7) ve (2.9) eşitlikleri yeni bir durum vektörü gibi düşünülüp birleştirilirse yeni oluşan durum-uzay modeli

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n(\theta_n)x_n + B_n(\theta_n)u_n \\ \theta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_n(\theta_n)w_n \\ \zeta_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$y_n = [H_n \ 0] \begin{bmatrix} x_n \\ \theta_n \end{bmatrix} + v_n$$

gibi lineer olmayan bir model olacaktır ve İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanabilir. Burada  $\zeta_n$  sıfır ortalamalı,  $v_n$  ve  $w_n$  ' den bağımsız beyaz gürültü serisidir ve  $Var(\zeta_n) = S_n = S$  olduğu kabul edilmiştir.  $S = 0$  olması durumunda parametre vektörünün sabit olduğu varsayımı yapılmış olur ve (2.10) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan durum-uzay modeline İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulandığında parametre vektörü hakkında herhangi bir bilgi elde edilemez. Bu nedenle uygulamalarda  $S > 0$  (pozitif tanımlı) olarak alınır.

İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması eşitlikleri (2.10) eşitliklerine uygulanırsa, Özbek and Aliev (1998)' deki unutm faktörü ile birlikte

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_0) \\ E(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} Kov(x_0) & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix}$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak  $n = 1, 2, \dots$  için,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{n|n-1} \\ \hat{\theta}_{n|n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1})\hat{x}_{n-1} + B_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1})u_{n-1} \\ \hat{\theta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_{n|n-1} = \alpha_n \begin{bmatrix} A_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) & \frac{d}{d\theta}(A_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}))\hat{x}_{n-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} P_{n-1} \begin{bmatrix} A_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) & \frac{d}{d\theta}(A_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}))\hat{x}_{n-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}' \quad (2.12)$$

$$+ \alpha_n \begin{bmatrix} G_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1})Q_{n-1}G_{n-1}'(\hat{\theta}_{n-1}) & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$K_n = P_{n|n-1} [H_n \ 0]' \{ [H_n \ 0] P_{n|n-1} [H_n \ 0]' + R_n \}^{-1}$$

$$P_n = \{ I - K_n [H_n \ 0] \} P_{n|n-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n|n-1} \\ \hat{\theta}_{n|n-1} \end{bmatrix} + K_n \{ y_n - [H_n \hat{x}_{n|n-1}] \}$$

biçiminde verilir (Anderson and Moore 1979). Burada,  $K_n$  Kalman kazanç matrisidir.

Boutayeb *et al.* (1997) deterministik lineer olmayan kesikli zaman sistemlerinde İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminlerinin gerçek değerlere yakınsamasını Lyapunov yaklaşımını kullanarak göstermişlerdir. Sayısal örneklerle tahminlerin yakınsadığını gözlemlemişlerdir.

Reif *et al.* (1996) lineer olmayan gözlemcinin önceden belirlenen durağanlık derecesi ile üstel gözlemci olduğunu göstermişlerdir ve gözlemcinin üstel durağanlığını göstermek için Lyapunov fonksiyonu tekniğini kullanmışlardır. Simülasyon çalışması ile önerilen gözlemcinin İlerletilmiş Kalman Filtresine göre daha iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Reif *et al.* (1999), çalışmalarında stokastik kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsamasını incelemişlerdir.

Benzer şekilde, Boutayeb and Aubry (1999), Guo and Zhu (2002), Reif *et al.* (1998) İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması problemi üzerinde çalışmışlardır.

Özbek and Efe (2004), çalışmalarında kompartman modellerine uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresini uygulamışlardır.

Özbek *et al.* (2003), çalışmalarında İlerletilmiş Kalman Filtresini makroekonomik modellere uygulamışlardır.

Özbek ve Öztürk (2003), çalışmalarında bir yayın ucuna bağlı bir cismin salınımı ile ilgili durum-uzay modelini elde etmiş ve sürtünme katsayısının bilinmediği ve üçüncü durum değişkeni olarak modele katıldığı durumu göz önüne alarak İlerletilmiş Kalman Filtresinin işlerliğini simülasyon çalışmalarıyla göstermişlerdir.

Köksal vd. (2005a,b) tekrar aynı konuda çalışmış ve İlerletilmiş Kalman Filtresi ile bunun bir düzenlemesini simülasyon çalışmalarıyla karşılaştırmışlardır.

Köksal ve Öztürk (2004), İlerletilmiş Kalman Filtresini ARMAX modellerinde parametre tahmini için kullanmışlardır.

Köksal ve Özbek (2006a), Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması konusunu ele almış ve hata kovaryans matrisinin Özbek and Aliev (1998) de önerilen şekliyle alınmasıyla yakınsama hızındaki artışı analitik olarak göstermişlerdir.

### 3. KISITLI DURUM KALMAN FİLTRESİ

Bu bölümde ilk olarak lineer durum-uzay modellerinde durum değişkenleri için bir ön bilgi olması durumunda Kısıtlı Durum Kalman Filtresinin elde edilme yöntemleri anlatılmıştır. Kısıtlı Durum Kalman Filtresi Tahmininin özellikleri konusunda bilgi verilmiştir. Lineer olmayan durum-uzay modellerinde durum değişkenleri için bir ön bilgi olması durumunda Kısıtlı Durum İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini anlatılmıştır. Son olarak kısıtın lineer olmadığı durum göz önüne alınmış ve bu durumda Kısıtlı Durum Kalman Filtresi tahmini hakkında bilgi verilmiştir.

#### 3.1 Lineer Kısıtlı Durum Kalman Filtresi

Bu kısımda lineer kısıtlı durum Kalman Filtresi tanıtılmış ve kısıtlı durum Kalman Filtresi tahmininin elde edilmiş yöntemleri verilmiştir.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= A_n x_n + B_n u_n + w_n \\ y_n &= H_n x_n + v_n\end{aligned}\tag{3.1}$$

durum-uzay modeli ile birlikte,

$$Dx_n = d_n\tag{3.2}$$

kısıtı göz önüne alınsın. Burada,

$D : s \times q$  boyutlu sabit matris

$d_n : s \times 1$  boyutlu bilinen vektör

$s$  : kısıtların sayısı

$q$  : durumların sayısı

olmak üzere,  $s \leq q$  ve  $\text{rank}(D) = s$  olduğu varsayılınsın. Burada kısıt;

$$DE[x_n] = d_n$$

şeklinde de alınabilir.

Bu kısımda kısıtlı durum tahmininin elde edilişi ile ilgili üç farklı yöntem hakkında bilgi verilmiştir. Bu yöntemler, Simon and Chia (2002)'den derlenmiştir.

### 3.1.1 Maksimum olasılık yöntemi

Bu kısımda kısıtlı Kalman Filtresi tahmini Kalman Filtresinin maksimum olasılık yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Burada kısıtlı tahmin ( $\tilde{x}$ ), kısıtsız Kalman Filtresi tahmini ( $\hat{x}$ ) nin koşullu normal dağılıma sahip olmasına bağlıdır, bu da  $x_0, \{w_n\}$  ve  $\{v_n\}$ ' ların normal dağılıma sahip olmasına dayanır. Bu türetim Durrant-Whyte (1988)' de verilen gösterimin bir genellemesidir.

Anderson and Moore (1979)'a göre Kalman Filtresi tahmininin  $P(x|Y)$  koşullu olasılığını maksimum yapan  $x$  değeri olduğu bilinmektedir. Buna göre kısıtlı Kalman Filtresi  $P(\tilde{x}|Y)$  olasılığını maksimum yapan ve verilen kısıtı sağlayan  $\tilde{x}$  değerinin bulunmasıyla elde edilir.  $P(\tilde{x}|Y)$  yi maksimize etmekle bunun doğal logaritmasını maksimize etmek aynıdır. Yani,

$$\text{maks } \ln P(\tilde{x}|Y) \Rightarrow D\tilde{x} = d \text{ koşulu altında } \min(\tilde{x} - \bar{x})' P^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) \quad (3.3)$$

kısıtlı optimizasyon probleminin çözülmesi gerekir. Problem Lagrange yöntemiyle çözülebilir. Buna göre, Lagrange fonksiyonu,

$$L = (\tilde{x} - \bar{x})' P^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d)$$

olmak üzere, minimum problem için gerekli koşullar,

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = 0 \Rightarrow P^{-1}(\tilde{x} - \bar{x}) + D^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow d = D\tilde{x}$$

ile verilir ve buradan çözüm,

$$\begin{aligned} \lambda &= (DPD^T)^{-1}(D\bar{x} - d) \\ \tilde{x} &= \bar{x} - PD'(DPD')^{-1}(D\bar{x} - d) \end{aligned} \quad (3.4)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $\bar{x}$  ( $x$  in koşullu olasılığı) kısıtsız Kalman Filtresi tahmini olduğundan kısıtlı tahmin kısıtsız tahmin yardımıyla,

$$\tilde{x} = \hat{x} - PD'(DPD')^{-1}(D\hat{x} - d) \quad (3.5)$$

olarak elde edilir.

### 3.1.2 Ortalama kare yöntemi

Bu yöntemde kısıtlı Kalman Filtresi tahmini hata kareler ortalaması minimizasyonu ile elde edilir. Yani,

$$D\tilde{x} = d \text{ koşulu altında } \min_x E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) \quad (3.6)$$

probleminin çözülmesi gerekir. Burada,  $\|\cdot\|$  vektör-2 normunu göstermektedir.

$x$  ve  $Y$  nin ortak dağıldığı varsayılırsa, hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) &= \int (x - \tilde{x})'(x - \tilde{x})P(x|Y)dx \\
&= \int x'xP(x|Y)dx - 2\tilde{x}' \int xP(x|Y)dx + \tilde{x}'\tilde{x}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Kısıtlı problemin Lagrange fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
L &= E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d) \\
&= \int x^T xP(x|Y)dx - 2\tilde{x}^T \int xP(x|Y)dx + \tilde{x}^T \tilde{x} + 2\lambda^T (D\tilde{x} - d)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

biçiminde olmak üzere,

$$\hat{x} = \int xP(x|Y)dx \tag{3.7a}$$

olduğu göz önüne alındığında minimum problemi için gerekli koşullar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = 0 &\Rightarrow -2\hat{x} + 2\tilde{x} + 2D^T \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow D\tilde{x} - d = 0
\end{aligned}$$

ile verilir ve çözüm,

$$\begin{aligned}
\lambda &= (DD^T)^{-1}(D\hat{x} - d) \\
\tilde{x} &= \hat{x} - D^T (DD^T)^{-1}(D\hat{x} - d)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. (3.7a) ile verilen  $\hat{x}$  kısıtsız Kalman Filtresi tahmini  $x_0$ ,  $w_n$  ve  $v_n$ ' nin ortak dağılımının normal olduğu durumda verilen Kalman Filtresi tahminidir. Fakat bunlar normal dağılım olmasa bile (3.7a) ile verilen koşullu ortalama  $x$ ' in kısıtsız tahminini tanımlarken de kullanılabilir. Bu durumda da kısıtlı tahmin yine (3.8)' de verildiği gibi elde edilir.

### 3.1.3 İz düşüm yöntemi

Bu yöntemde kısıtlı Kalman Filtresi, kısıtsız durum tahmini  $\hat{x}$  nın kısıt yüzeyine dik iz düşümü ile elde edilir. Yani,

$$D\tilde{x} = d \text{ koşulu altında } \min(\tilde{x} - \hat{x})'W(\tilde{x} - \hat{x}) \quad (3.9)$$

problemi çözülmüştür. Burada,  $W$  simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisidir. Bu problemin çözümü de diğer yöntemlere benzer olarak,

$$\tilde{x} = \hat{x} - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x} - d) \quad (3.10)$$

biçiminde elde edilir.

Dikkat edilecek olursa iz düşüm yönteminde,  $W = P^{-1}$  alınmasıyla maksimum olasılık yöntemi,  $W = I$  alınmasıyla ortalama kare yöntemi tahminleri elde edilir.

Lineer sistemler için  $W = P^{-1}$  en iyi kısıtlı tahmin ediciyi verir, fakat aynı iddia lineer olmayan durum için yapılamaz.

$D$  kare matris olduğunda, yani kısıtların sayısı durumların sayısına eşit olduğunda, durumların tümü kısıtlanmıştır. Bu durumda bölümün başında verilen varsayımlara göre  $D$  matrisi tam ranklı olduğundan tersi vardır ve (3.10) kısıtlı tahmini,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \hat{x} - W^{-1}D'(D')^{-1}WD^{-1}(D\hat{x} - d) \\ &= D^{-1}d \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

### 3.2 Kısıtlı Durum Kalman Filtresi Tahmininin Özellikleri

Simon and Chia (2002) de Kısıtlı Durum Kalman Filtresi tahmininin istatistiksel özelliklerini incelemişler ve bu özellikleri teoremler şeklinde vermişlerdir. Bu kısımda bu teoremlerin bir kısmı verilmiştir. Bu teoremler verilirken eğer  $A$  ve  $B$  kare matrislerinin boyutları aynı ise  $A > B$  ile  $A - B$  nin pozitif tanımlı olduğu ve  $A \geq B$  ile  $A - B$  nin pozitif yarı tanımlı olduğu ifade edilmiştir.

**Teorem 3.2.1.** (3.10) eşitliği ile verilen  $\tilde{x}$  kısıtlı durum tahmini (3.1) sistemi için yansız tahmindir. Yani;

$$E(\tilde{x}) = E(x)$$

dir.

**İspat.** Herhangi pozitif tanımlı  $W$  ağırlık matrisi için,

$$x - \tilde{x} = x - \hat{x} + W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x} - d) \quad (3.12)$$

$$x - \tilde{x} = x - \hat{x} + W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1} \underbrace{(D\hat{x} - Dx)}_{D(\hat{x}-x)} \quad (3.13)$$

$$= (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)(x - \hat{x}) \quad (3.14)$$

olur.  $W$ ,  $x$  den bağımsız bilinen bir matris olduğundan iki tarafın beklenen değerinin alınmasıyla,

$$E(x - \tilde{x}) = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)E(x - \hat{x}) \quad (3.15)$$

elde edilir. Kısıtsız Kalman Filtresi tahmini yansız tahmin olduğundan  $E(\hat{x}) = E(x)$  dir ve (3.15) eşitliğinin sağ tarafı 0 olur. Böylece,  $E(\tilde{x}) = E(x)$  elde edilir.

**Teorem 3.2.2** Kısıtlı durum tahmini  $\tilde{x}$  olmak üzere  $W = P^{-1}$  alındığında kısıtsız durum tahmininden daha küçük hata kovaryansına sahiptir. Yani,

$$Kov(x - \tilde{x}) < Kov(x - \hat{x}) \quad (3.16)$$

dır.

**İspat.** Eğer  $W = P^{-1}$  ise;

$$x - \tilde{x} = (I - PD^T (DPD^T)^{-1} D)(x - \hat{x}) \quad (3.17)$$

$$= (I - J)(x - \hat{x}) \quad (3.18)$$

burada

$$J = PD^T (DPD^T)^{-1} D \quad (3.19)$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre kısıtlı tahmin hatasının kovaryansı,

$$\begin{aligned} Kov(x - \tilde{x}) &= E[(x - \tilde{x})(x - \tilde{x})^T] \\ &= E\{[(I - J)(x - \hat{x})][(I - J)(x - \hat{x})]^T\} \\ &= (I - J)Kov(x - \hat{x})(I - J)^T \\ &= P - JP - PJ^T + JPJ^T \end{aligned} \quad (3.20)$$

$J$  nin tanımından  $PJ^T = JPJ^T$  olduğu kolayca görülür. Buna göre yukarıdaki denklem

$$Kov(x - \tilde{x}) = P - JP \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Anderson and Moore (1979)' dan  $JP$  nin pozitif tanımlı olduğu bilindiğinden,

$$Kov(x - \tilde{x}) - P = -JP < 0 \quad (3.22)$$

yazılabilir. Buradan,

$$Kov(x - \tilde{x}) < P \quad (3.23)$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.2.3.** Kısıtlı Durum Kalman Filtreleri arasında  $W = P^{-1}$  olan filtre en küçük tahmin hata kovaryansına sahiptir.

**İspat.**  $\Lambda_W$  ile (3.10) ile verilen Kısıtlı Durum Kalman Filtresi tahmin hatasının kovaryansı gösterilsin. Yani,

$$\Lambda_W = E[(x - \tilde{x})(x - \tilde{x})^T] \quad (3.24)$$

olsun.

$$x - \tilde{x} = (I - PD^T (DPD^T)^{-1} D)(x - \hat{x})$$

olarak alınmıştı. (3.14) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \Lambda_W &= (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1} D)P(I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1} D)^T \\ &= P - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1} DP - PD^T (DW^{-1}D^T)^{-1} DW^{-1} \\ &\quad + W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1} DPD^T (DW^{-1}D^T)^{-1} DW^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir.  $W = P^{-1}$  olarak alınırsa;

$$\Lambda_{P^{-1}} = P - PD^T (DPD^T)^{-1} DP \quad (3.26)$$

olur. (3.25) ile (3.26) eşitliğinin farkı alınırsa

$$\Lambda_{P^{-1}} - \Lambda_W = -MPM^T \quad (3.27)$$

bulunur. Burada,

$$M = PD^T(DPD^T)^{-1}D - W^{-1}D^T(DPD^T)^{-1}D \quad (3.28)$$

ve  $\forall M$  için  $MPM^T$  pozitif yarı tanımlı olduğu için,

$$\Lambda_{P^{-1}} \leq \Lambda_W \quad (3.29)$$

olarak elde edilir. Böylece  $W = P^{-1}$  alınması ile (3.10) ile verilen Kısıtlı Durum Kalman Filtresi tahmini minimum hata kovaryansına sahiptir.

### 3.3 Kısıtlı Durum İlerletilmiş Kalman Filtresi

Bu kısımda lineer olmayan durum-uzay modellerinde durum eşitliği için bilinen bir ön bilgi olması durumunda kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmininin elde edilişi anlatılmıştır.

(2.4) ile verilen lineer olmayan durum-uzay modeli ve (3.2) ile verilen durum kısıtı göz önüne alınsın. Lineer durum-uzay modellerinde Kısıtlı Kalman Filtresi için önceki kısımda verilenler burada da geçerlidir. Tek fark, kısıtsız Kalman Filtresi tahmini yerine kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini kullanılmasıdır. Yani genel olarak, kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini,

$$\tilde{x} = \hat{x} - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x} - d) \quad (3.30)$$

ile verilir ve  $\hat{x}$  değişkenlerle ilgili herhangi bir bilgi yokken elde edilen İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminidir (Simon and Chia 2002).

Köksal ve Özbek (2006 b) çalışmalarında, sistem durum değişkenleri arasında lineer bir ilişki olması durumunda Kalman Filtresi tahminlerinin elde edilmesini anlatmış ve kısıt olması ve olmaması durumunda elde edilen tahmin sonuçlarını simülasyon çalışması yaparak karşılaştırmışlardır.

### 3.4 Kısıtın Lineer Olmadığı Durum

Bu kısımda durum değişkenleri için bilinen önbilginin lineer olmadığı durum göz önüne alınmış ve bu durumda kısıtlı Kalman Filtresi tahmininin elde edilmesini anlatılmıştır.

Lineer olmayan durum kısıtı,

$$g(x_n) = d_n \quad (3.31)$$

biçiminde olsun. Bu kısıt geçerli kısıtlı durum tahmini  $\tilde{x}$  da lineerleştirilebilir, yani

$$g(\tilde{x}) + g'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \approx d \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir ve buradan da,

$$g'(\tilde{x})x \approx d - g(\tilde{x}) + g'(\tilde{x})\tilde{x} \quad (3.33)$$

elde edilir. Yani,  $D$  yerine  $g'(\tilde{x})$  ve  $d$  yerine  $d - g(\tilde{x}) + g'(\tilde{x})\tilde{x}$  alınarak (3.2) ile verilen lineer kısıt olması durumunda yapılan işlemler burada tekrarlanarak Kısıtlı Kalman Filtresi tahminleri elde edilir.

## 4. KESİKLİ ZAMAN DETERMİNİSTİK DURUM-UZAY MODELLERİNDE İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI

Lineer olmayan stokastik sistemler için durum tahmini fen ve mühendislikte sıkça karşılaşılan bir problemdir. Lineer olmayan tahmin problemini çözmek genelde zordur, fakat çeşitli pratik yaklaşım yöntemleri vardır (Liang, Sorenson 1974, Wishner and *et al.* 1969). Bu yöntemlerin en kullanılışlarından biri de İlerletilmiş Kalman Filtresidir ve pratik uygulamalarda çok kabul gören bir tahmin yöntemidir (Jazwinski 1970, Anderson and Moore 1979, Gelb 1984, La Scala et al. 1996). Aynı problem lineer olmayan deterministik sistemlerde durum tahmini için de geçerlidir. Bu durumda sistem gözlemlenebilir ve çıktılarda gürültü yoktur.

### 4.1 Kısıt Olmaması Durumunda Yakınsama

Bu kısımda, Reif and Unbehauen (1999)' un çalışmaları göz önüne alınarak, lineer olmayan deterministik sistemler için bir gözlemci olarak İlerletilmiş Kalman Filtresi ve lineer olmayan filtrenin asimptotik limiti anlatılmıştır. Lakshmikantham and Trigiante (1998)' de verilen Lyapunov fonksiyonunun ikinci yöntemi kullanılarak, verilen gözlemcinin üstel gözlemci olduğu gösterilmiş ve tahmin hatası dinamiğinin üstel durağan olduğu verilmiştir. Bu sonuç İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsamasını içermektedir.

Burada Reif and Unbehauen (1999)'dan farklı olarak Kalman Filtresinin üstel ağırlıklandırılması Özbek and Aliev (1998)'de önerilen biçimde alınmış ve ağırlıklandırmanın bu şekilde alınması ile yakınsamanın biraz daha hızlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Lineer olmayan kesikli zaman deterministik,

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \quad (4.1)$$

$$y_n = h(x_n) \quad (4.2)$$

durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Burada,  $n \in N_0$  kesikli zaman noktasını,  $x_n \in R^q$  durum vektörünü,  $u_n \in R^p$  girdi vektörünü,  $y_n \in R^m$  çıktı vektörünü göstermektedir.

$f(.,.)$  ve  $h(.)$  fonksiyonlarının her ikisinin de birinci dereceden sürekli türevlere sahip olduğu varsayılınsın. Bu sistem için bir gözlemci,

$$\hat{x}_{n+1}^- = f(\hat{x}_n^+, u_n) \quad (4.3)$$

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n(y_n - h(\hat{x}_n^-)). \quad (4.4)$$

eşitlikleri ile verilir (Reif and Unbehauen 1999). Daha önceki bölümlerde ifade edildiği gibi  $K_n$  zamanla değişen  $q \times m$  boyutlu gözlemci kazancıdır.  $\hat{x}_n^-$  ve  $\hat{x}_n^+$  önsel ve sonsal tahminler olarak adlandırılır.  $f(.,.)$  ve  $h(.)$  fonksiyonları birinci dereceden sürekli türeve sahip fonksiyonlar olduklarından,

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n^+, u_n)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n^-)$$

olmak üzere,

$$f(x_n, u_n) - f(\hat{x}_n^+, u_n) = A_n(x_n - \hat{x}_n^+) + \varphi(x_n, \hat{x}_n^+, u_n) \quad (4.5)$$

$$h(x_n) - h(\hat{x}_n^-) = C_n(x_n - \hat{x}_n^-) + \chi(x_n, \hat{x}_n^-) \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir.

$n$  zamanındaki tahmin hatası  $\zeta_n$  ile gösterilmek üzere,

$$\zeta_n = x_n - \hat{x}_n^- \quad (4.7)$$

dır ve (4.3) den (4.1) nin çıkarılması ve (4.2) ile (4.4)-(4.6) nin göz önüne alınmasıyla,

$$\zeta_{n+1} = A_n(I - K_n C_n)\zeta_n + r_n \quad (4.8)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$r_n = \varphi(x_n, \hat{x}_n^+, u_n) - A_n K_n \chi(x_n, \hat{x}_n^-) \quad (4.9)$$

dir. (4.8) ile verilen hata dinamiğini analiz etmek için kesikli-zaman sistemlerinin üstel durağanlığı kavramı kullanılabilir (Lakshmikantham and Trigiante 1998).

**Tanım 4.1.** Verilen  $\varepsilon, \eta > 0$  ve  $\theta > 1$  pozitif reel sayıları için  $B_\varepsilon = \{v \in R^q \mid \|v\| < \varepsilon\}$  olmak üzere,  $\zeta_0 \in B_\varepsilon$  olacak şekilde, (4.8) eşitliğinin her  $\zeta_n$  çözümü için

$$\|\zeta_n\| \leq \eta \|\zeta_0\| \theta^{-n} \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.8) ile verilen fark denklemi 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahiptir (Lakshmikantham and Trigiante 1998).

**Tanım 4.2.** Eğer (4.8) fark denklemi 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahipse (4.3) ve (4.4) ile verilen gözlemci üstel gözlemcidir (Reif and Unbehauen 1999).

**Tanım 4.3.** Deterministik kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi aşağıdaki fark denklemleri ile verilir (Reif and Unbehauen 1999);

**Zaman Yinelemesi:**

$$\hat{x}_{n+1}^- = f(\hat{x}_n^+, u_n) \quad (4.11)$$

$$P_{n+1}^- = \alpha^2 A_n P_n^+ A_n^T + Q \quad (4.12)$$

Burada işlemler yapılırken (4.12) eşitliği yerine Özbek and Aliev (1998)'de verilen,

$$P_{n+1}^- = \alpha^2 (A_n P_n^+ A_n^T + Q) \quad (4.12a)$$

eşitliği kullanılacaktır.

**Lineerleştirme:**

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n^+, u_n) \quad (4.13)$$

**Ölçüm Yinelemesi:**

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n (y_n - h(\hat{x}_n^-)) \quad (4.14)$$

$$P_n^+ = (I - K_n C_n) P_n^- \quad (4.15)$$

**Kalman Kazancı:**

$$K_n = P_n^- C_n^T (C_n P_n^- C_n^T + R)^{-1} \quad (4.16)$$

**Lineerleştirme:**

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n^-) \quad (4.17)$$

Burada,  $Q$  simetrik pozitif tanımlı  $q \times q$  boyutlu matris,  $R$  simetrik pozitif tanımlı  $m \times m$  boyutlu matris ve  $\alpha \geq 1$  reel sayıdır.

## Notlar:

(1)  $\alpha = 1$  alınmasıyla, bilinen İlerletilmiş Kalman Filtresi elde edilir.  $\alpha > 1$  için Kalman Filtresi üstel ağırlıklandırılmıştır.

(2) Kalman Filtresi lineer stokastik sistemler için optimal filtre olarak kullanıldığında,  $Q$  ve  $R$ , gürültü terimlerinin kovaryans matrisleridir. Lineer olmayan deterministik gözlemci olarak uygulamaları için  $Q$  ve  $R$  keyfi, simetrik, pozitif tanımlı matrisler olarak seçilebilirler. Bu gözlemcinin durağanlığını etkilememesine rağmen performansı üzerinde önemli etkileri vardır. Benzer şekilde, eğer lineer olmayan deterministik sistemlerin gözlemcisi olarak kullanılıyorsa,  $P_0^+$  için herhangi simetrik pozitif tanımlı matris seçilebilir.

(3)  $P_n^+$  matrisi için (4.15) ölçüm yinelemesi,

$$P_n^+ = (I - K_n C_n) P_n^- (I - K_n C_n)^T + K_n R K_n^T \quad (4.18)$$

şeklinde yazılabilir (Gelb 1984).

(4) (4.16) deki Kalman Kazanç matrisi,

$$K_n = P_n^+ C_n^T R^{-1} \quad (4.19)$$

gibi yazılabilir (Gelb 1984).

Reif and Unbehauen (1999)' da kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olduğunun gösterilmesi için üç tane lemma kullanılmıştır.

Bu lemmalardan birincisi (4.9) eşitliğinde verilen  $r_n$  artık teriminin sınırlılığını saptamak için kullanılır. İkincisi bilinen matris tersi lemmasıdır ve üçüncüsü de  $P_{n+1}^-$  ve  $P_n^+$  kovaryanslarının çözümünde kullanılacak matris eşitsizliği lemmasıdır.

**Lemma 4.1.**  $x, \hat{x}^-, \hat{x}^+ \in R^q$  reel vektörleri,  $u \in R^p$  ve  $A_{q \times q}$  ve  $C_{m \times q}$  ve  $K_{q \times m}$  matrisleri ve  $\varphi(.,.,.)$  ve  $\chi(.,.)$  lineer olmayan fonksiyonları göz önüne alınsın ve aşağıdaki varsayımlar sağlansın.

(1) Aşağıdaki sınırları sağlayacak şekilde  $\bar{a}, \bar{c}, \bar{k} > 0$  pozitif sayıları mevcut olsun,

$$\|A\| \leq \bar{a} \quad (4.20a)$$

$$\|C\| \leq \bar{c} \quad (4.20b)$$

$$\|K\| \leq \bar{k} \quad (4.20c)$$

(2)  $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$  pozitif reel sayıları mevcut olsun öyle ki;

$$\|\varphi(x, \hat{x}^+, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.21a)$$

$$\|\chi(x, \hat{x}^-)\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}^-\|^2 \quad (4.21b)$$

$\|x - \hat{x}^+\| \leq \varepsilon_\varphi$  ve  $\|x - \hat{x}^-\| \leq \varepsilon_\chi$  için sağlansın.

(3)  $\hat{x}^+$ ,

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + KC(x - \hat{x}^-) + K\chi(x, \hat{x}^-) \quad (4.22)$$

eşitliğini sağlansın.  $r,$

$$r = \varphi(x, \hat{x}^+, u) - AK\chi(x, \hat{x}^-). \quad (4.23)$$

biçiminde tanımlansın.

Bu durumda,  $\epsilon, \kappa > 0$  pozitif reel sayıları mevcuttur öyle ki,  $\|x - \hat{x}^-\| \leq \epsilon$  olduğunda

$$\|r\| \leq \kappa \|x - \hat{x}^-\|^2 \quad (4.24)$$

olur.

**Lemma 4.2.**  $\Gamma$  ve  $\Delta$ ,  $q \times q$  boyutlu tersi alınabilir matrisleri göz önüne alınsın ve  $\Gamma^{-1} + \Delta$  nın da tersinir olduğu varsayılınsın. Bu durumda,

$$(\Gamma^{-1} + \Delta)^{-1} = \Gamma - \Gamma(\Gamma + \Delta^{-1})^{-1}\Gamma \quad (4.25)$$

sağlanır (Anderson and Moore 1979, Lewis 1986).

**Lemma 4.3.**  $n \geq 0$  için (4.12) ve (4.15) ile verilen  $P_n^+, P_n^-$  simetrik pozitif tanımlı matrisleri göz önüne alınsın.  $\Pi_n^-$  ve  $\Pi_n^+$

$$\Pi_n^- = (P_n^-)^{-1} \quad (4.26)$$

$$\Pi_n^+ = (P_n^+)^{-1} \quad (4.27)$$

ile gösterilmek üzere,  $A_n^{-1}$  ve  $(I - K_n C_n)^{-1}$  her  $n \geq 0$  için mevcut olsun. Bu durumda,

$$\Pi_{n+1}^- \leq \alpha^{-2} A_n^{-T} (I - K_n C_n)^{-T} [\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + \alpha^2 A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^-] (I - K_n C_n)^{-1} A_n^{-1} \quad (4.28)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu eşitsizlik (4.12a) ile verilen  $P_n^-$  hata kovaryansı için yazılacak olursa,

$$\Pi_{n+1}^- \leq \alpha^{-2} A_n^{-T} (I - K_n C_n)^{-T} [\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^-] (I - K_n C_n)^{-1} A_n^{-1} \quad (4.28a)$$

olarak elde edilir.

**İspat.**  $P_{n+1}^- = \alpha^2 A_n (P_n^+ + A_n^{-1} Q A_n^{-T}) A_n^T$  olarak alındığı için bunun tersinin hesaplanması gerekir,

$$\begin{aligned} (P_{n+1}^-)^{-1} &= \alpha^{-2} (A_n^T)^{-1} (P_n^+ + A_n^{-1} Q A_n^{-T})^{-1} A_n^{-1} \\ &= \alpha^{-2} (A_n^T)^{-1} ((P_n^+)^{-1} - (P_n^+)^{-1} ((P_n^+)^{-1} + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} (P_n^+)^{-1}) A_n^{-1} \\ &= \alpha^{-2} A_n^{-T} [\Pi_n^+ - \Pi_n^+ (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^+] A_n^{-1} \\ &\leq \alpha^{-2} A_n^{-T} ((I - K_n C_n)^{-T} \Pi_n^- (I - K_n C_n)^{-1} \\ &\quad - (I - K_n C_n)^{-T} \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^- (I - K_n C_n)^{-1}) A_n^{-1} \\ \Pi_{n+1}^- &\leq \alpha^{-2} A_n^{-T} (I - K_n C_n)^{-T} [\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^-] (I - K_n C_n)^{-1} A_n^{-1} \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 4.1.** 4.11 ve 4.17 eşitlikleri ile verilen kesikli zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın ve

1)  $\forall n \geq 0$  için

$$\|A_n\| \leq \bar{a} \quad (4.29a)$$

$$\|C_n\| \leq \bar{c} \quad (4.29b)$$

$$\underline{p}I \leq P_n^- \leq \bar{p}I \quad (4.29c)$$

$$\underline{p}I \leq P_n^+ \leq \bar{p}I \quad (4.29d)$$

olacak şekilde  $\bar{a}, \bar{c}, \underline{p}, \bar{p} > 0$  pozitif reel sayıları var olsun.

2)  $n \geq 0$  için  $A_n$  tersinir olsun.

3) (4.9) eşitliğinin içinde verilen  $\varphi(.,.,.), \chi(.,.)$  fonksiyonları sınırlı olacak şekilde  $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$  pozitif reel sayıları mevcut olsun, öyle ki

$$\|\varphi(x, \hat{x}^+, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}^+\|^2 \quad (4.30)$$

$$\|\chi(x, \hat{x}^-)\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}^-\|^2 \quad (4.31)$$

$x, \hat{x}^+, \hat{x}^- \in R^q$  ve  $u \in R^p$ ,  $\|x - \hat{x}^+\| \leq \varepsilon_\varphi$  ve  $\|x - \hat{x}^-\| \leq \varepsilon_\chi$

koşulları sağlansın. Bu koşullar altında verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi bir üstel gözlemcidir. Üstelik tanım da üstel bozulma hatası için verilen  $\theta$  sabiti  $\alpha$  değerinden büyüktür (Reif and Unbehauen 1999).

**İspat 4.1.** Tahmin hatası  $\zeta_n$  için (4.8) ile verilen fark denklemi göz önüne alınsın. Bunun üstel durağanlığını ispatlamak için  $\Pi_n^- = (P_n^-)^{-1}$  olmak üzere,

$$V_n = \zeta_n^T \Pi_n^- \zeta_n \quad (4.32)$$

Lyapunov fonksiyonu seçilsin. (4.29c) den dolayı bu Lyapunov fonksiyonu

$$\frac{1}{p} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \frac{1}{p} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.33)$$

sınırlarında yazılabilir.

(4.29c) ve (4.29d) kısıtlarından ve  $P_n^-$  ve  $P_n^+$  nin tersinirliğinden ve (4.15) den,

$$(I - K_n C_n)^{-1} = P_n^- \Pi_n^+$$

matrisi mevcuttur. 2 varsayımıyla birlikte lemma 4.3 ün varsayımları sağlanır. (4.8) ve (4.28a) ile birlikte  $V_{n+1}(\zeta_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \zeta_{n+1}^T \Pi_{n+1}^- \zeta_{n+1} \\ &\leq \alpha^{-2} \zeta_n^T [\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^-] \zeta_n + 2r_n^T \Pi_{n+1}^- A_n (I - K_n C_n) \zeta_n + r_n^T \Pi_{n+1}^- r_n \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.  $R$  nin en küçük öz değeri  $\underline{r}$  ile gösterilirse (4.19) ve (4.29b), (4.29d) den

$$\|K_n\| \leq \|P_n^+\| \cdot \|C_n\| \cdot \|R^{-1}\| \leq \bar{k} \quad (4.34)$$

elde edilir, burada  $\bar{k} = \bar{p}\bar{c}/\underline{r}$  dir. (4.29a), (4.29b), (4.34), (4.30) ve (4.31) ile yukarıdaki eşitsizliğe lemma1 uygulanabilir. (4.29a)-(4.29d) ve (4.34) ile birlikte,  $\|\zeta_n\| \leq \epsilon$  için ve  $\underline{q} > 0$  pozitif tanımlı  $Q$  matrisinin en küçük öz değeri olmak üzere,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &\leq \alpha^{-2} \zeta_n^T \Pi_n^- \zeta_n - \frac{1}{\alpha^2 \bar{p}^2 (1/\underline{p} + \bar{a}^2/\underline{q})} \|\zeta_n\|^2 + 2\kappa \|\zeta_n\|^2 \frac{\bar{a}(1 + \bar{k}\bar{c})}{\underline{p}} \|\zeta_n\| \\ &\quad + \kappa \|\zeta_n\|^2 \frac{1}{\underline{p}} \kappa \epsilon \|\zeta_n\| \end{aligned} \quad (4.35)$$

olarak yazılabilir.

$$\kappa' = \frac{\kappa}{\underline{p}} (2\bar{a}(1 + \bar{k}\bar{c}) + \kappa \epsilon) \quad (4.36)$$

şeklinde gösterilmek üzere;

$$V_{n+1}(\zeta_{n+1}) \leq \alpha^{-2} V_n(\zeta_n) - \left( \frac{1}{\alpha^2 \bar{p}^2 (1/\underline{p} + \bar{a}^2/\underline{q})} - \kappa' \|\zeta_n\| \right) \|\zeta_n\|^2 \quad (4.37)$$

olur.

$$\varepsilon' = \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2\alpha^2 \kappa' \bar{p}^{-2} (1/\underline{p} + \bar{a}^{-2}/\underline{q})}\right) \quad (4.38)$$

olarak alınmasıyla  $\|\zeta_n\| \leq \varepsilon'$  için,

$$V_{n+1}(\zeta_{n+1}) \leq \alpha^{-2} V_n(\zeta_n) - \frac{1}{2\alpha^2 \bar{p}^{-2} (1/\underline{p} + \bar{a}^{-2}/\underline{q})} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.39)$$

$$V_{n+1}(\zeta_{n+1}) - V_n(\zeta_n) \leq -\frac{1}{2\alpha^2 \bar{p}^{-2} (1/\underline{p} + \bar{a}^{-2}/\underline{q})} \|\zeta_n\|^2 + (\alpha^{-2} - 1)V_n(\zeta_n) \quad (4.40)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.33) ten ve  $\alpha \geq 1$  olmasından dolayı ifadenin sağ tarafı negatiftir, bu nedenle  $V_{n+1}(\zeta_{n+1}) - V_n(\zeta_n)$  farkı da negatif tanımlı olur. Fark denklemleri için Lyapunov fonksiyonlarının standart sonucunun uygulanmasından (Lakshmikantham and Trigiante 1998), (4.8) ile verilen fark denkleminin asimptotik olarak 0 noktasında denge durağanlık noktasına sahip olduğu sonucu çıkar. (4.33) ve (4.40) den,

$$V_{n+1}(\zeta_{n+1}) \leq V_n(\zeta_n) \left( \alpha^{-2} - \frac{\underline{p}}{2\alpha^2 \bar{p}^{-2} (1/\underline{p} + \bar{a}^{-2}/\underline{q})} \right) \quad (4.41)$$

yazılabilir. Buradan da,

$$V_n(\zeta_n) \leq V_0(\zeta_0) \left( \alpha^{-2} - \frac{\underline{p}}{2\alpha^2 \bar{p}^{-2} (1/\underline{p} + \bar{a}^{-2}/\underline{q})} \right)^n \quad (4.42)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan  $\bar{p} > 1$  olarak varsayılabilir, böylece

$$1 - \frac{\underline{p}}{2\bar{p}^2 \left( \frac{1}{\underline{p}} + \frac{\bar{a}}{\underline{q}} \right)} > 0 \quad (4.43)$$

olur. (4.33) ün kullanımıyla (4.42) den

$$\|\varsigma_n\| \leq \sqrt{\bar{p}/\underline{p}} \|\varsigma_0\| \left( \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\underline{p}}{2\bar{p}^2 \left( \frac{1}{\underline{p}} + \frac{\bar{a}}{\underline{q}} \right)}}} \right)^{-n} \quad (4.44)$$

olarak yazılabilir.

Yani,

$$\eta = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}} > 0 \quad (4.45)$$

ve

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\underline{p}}{2\bar{p}^2 \left( \frac{1}{\underline{p}} + \frac{\bar{a}}{\underline{q}} \right)}}} > \alpha \quad (4.46)$$

dir.

Reif and Unbehauen (1999)' de,

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\underline{p}}{2\bar{p}^2 \left( \frac{1}{\underline{p}} + \alpha^2 \frac{\bar{a}}{\underline{q}} \right)}}} > \alpha$$

olduğu gösterilmiştir. Bu  $\theta$  değeri, (4.12a) eşitliğinin kullanılmasıyla (4.46) da elde edilen  $\theta$  değerinden daha küçüktür.

Yani, Özbek ve Aliev (1998) de önerilen hata kovaryans matrisinin kullanılmasıyla yakınsama hızı biraz daha artmıştır.

## 4.2 Kısıtlı Durumda Yakınsama

Önceki kısımda lineer olmayan deterministik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması konusu ele alınmış ve belli koşullar altında tahmin hatasının sınırlı kaldığı ve üstel gözlemci olduğu gösterilmişti. Bu kısımda durum eşitlikleri hakkında bir ön bilgi olması durumunda Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi hatasının davranışı incelenmiştir. Yine belli koşullar altında sınırlı kaldığını ve üstel gözlemci olduğunu göstermek için bir önceki kısımda kullanılan tanımlar ve yöntem uygulanmıştır.

(4.1) ve (4.2) ile verilen kesikli zaman durum-uzay modeli ve (3.2) ile verilen  $Dx_n = d_n$  kısıtı göz önüne alınsın. Daha önce de belirtildiği gibi,  $n \in N_0$  kesikli zaman,  $x_n \in R^q$  durum vektörü,  $u_n \in R^p$  girdi vektörü ve  $y_n \in R^m$  çıktı vektörü olsun.  $D$ ,  $s \times q$  boyutlu sabit matris,  $d_n$ ,  $s \times 1$  boyutlu bilinen vektör,  $s$  kısıtların sayısı ve  $q$  durumların sayısı olmak üzere  $s \leq q$  ve  $rank(D) = s$  olduğu varsayılınsın. Buna göre Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi Kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini ile oluşturulacaktır. Kısıtlı Kalman Filtresi tahmini  $\tilde{x}$  ile gösterilmek üzere genel olarak,

$$\tilde{x}_n = \hat{x}_n - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x}_n - d_n) \quad (4.47)$$

biçiminde elde edildiği daha önce söylenmişti (Simon and Chia 2002). Burada,  $\hat{x}_n$  kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminidir ve  $W$  simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisidir. Kısıtsız durumda,

$$\hat{x}_{n+1}^- = f(\hat{x}_n^+, u_n)$$

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n(y_n - h(\hat{x}_n^-))$$

olmak üzere kısıtlı sistem için gözlemci,

$$\tilde{x}_{n+1}^- = \hat{x}_{n+1}^- - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x}_{n+1}^- - d_{n+1}) \quad (4.48)$$

$$\tilde{x}_n^+ = \hat{x}_n^+ - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x}_n^+ - d_n) \quad (4.49)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada,  $K_n$  zamanla değişen  $q \times m$  boyutlu gözlemci kazanç matrisidir.  $\tilde{x}_n^-$  ve  $\tilde{x}_n^+$  önsel ve sonsal tahminler olarak adlandırılır.

Kısıtlı tahmin hatası;

$$\mathcal{G}_n = x_n - \tilde{x}_n^- \quad (4.50)$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\mathcal{G}_n = x_n - (\hat{x}_n^- - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x}_n^- - d_n)) \quad (4.51)$$

biçiminde olur ve  $Dx_n = d_n$  olduğunun göz önüne alınması ile,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= x_n - \hat{x}_n^- + W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x}_n^- - Dx_n) \\ &= (x_n - \hat{x}_n^-) - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D(x_n - \hat{x}_n^-) \\ &= (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)(x_n - \hat{x}_n^-) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece;  $n$  ci zamandaki kısıtsız tahmin hatası

$$\zeta_n = x_n - \hat{x}_n^- \quad (4.52)$$

olmak üzere, kısıtlı tahmin hatası;

$$g_n = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_n \quad (4.53)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde; Reif and Unbehauen (1999)'de

$$\zeta_{n+1} = A_n(I - K_n C_n)\zeta_n + r_n \quad (4.54)$$

olarak verilmişti. Buna göre,

$$g_{n+1} = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_{n+1} \quad (4.55)$$

olur. Hata dinamiğinin analizi için önceki kısımda verilen kesikli-zaman sistemlerin üstel durağanlığı tanımı kullanılacaktır.

**Tanım 4.4** Deterministik kesikli-zaman kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi fark denklemleri göz önüne alındığında Tanım 4.2 aynen geçerli olacak sadece zaman yinelemesi ve ölçüm yinelemesinde aşağıdaki değişiklikler olacaktır.

**Zaman Yinelemesi:**

$$\hat{x}_{n+1}^- = f(\hat{x}_n^+, u_n) \quad (4.56a)$$

$$\tilde{x}_{n+1}^- = \hat{x}_{n+1}^- - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x}_{n+1}^- - d_{n+1})$$

$$P_{n+1}^- = \alpha^2 A_n P_n^+ A_n^T + Q \quad (4.56b)$$

Bir önceki bölümdekine benzer olarak burada (4.56b) eşitliği yerine,

$$P_{n+1}^- = \alpha^2 (A_n P_n^+ A_n^T + Q) \quad (4.56c)$$

eşitliği kullanılmıştır.

### Ölçüm Yinelemesi:

$$\hat{x}_n^+ = \hat{x}_n^- + K_n(y_n - h(\hat{x}_n^-)) \quad (4.57a)$$

$$\tilde{x}_n^+ = \hat{x}_n^+ - W^{-1}D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x}_n^+ - d_n)$$

$$P_n^+ = (I - K_nC_n)P_n^- \quad (4.57b)$$

Bir önceki kısımda kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olduğunun gösterilmesi için üç tane lemma kullanılmıştı. Bu lemmalar kısıtlı durum kesikli-zaman İlerletilmiş Kalman Filtresinin üstel gözlemci olduğunun gösterilmesinde de etkin olarak kullanılacaktır.

**Teorem 4.2.** Tanım 4.4 ile verilen kısıtlı kesikli zaman İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın ve Teorem 4.1 in varsayımları ile birlikte aşağıdaki varsayımlar da sağlansın.

(i)  $\forall n \geq 0$  için,  $\bar{w}, \bar{d} > 0$  pozitif reel sayıları,

$$\|W\| \leq \bar{w} \quad (4.58a)$$

$$\|D\| \leq \bar{d} \quad (4.58b)$$

sınırlarını sağlayacak şekilde mevcut olsun.

Bu durumda, kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi üstel gözlemcidir ve tanımda verilen,  $\eta$  ve  $\theta$  değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

**İspat 4.2.** Tahmin hatası  $\mathcal{G}_n$  için (4.55) ile verilen fark denklemi göz önüne alınsın. Bunun üstel durağanlığını göstermek için

$$\mathcal{G}_n = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_n \text{ ve } \Pi_n^- = (P_n^-)^{-1}$$

olmak üzere

$$V_n(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_n^T (Kov(\mathcal{G}_n))^{-1} \mathcal{G}_n \quad (4.59)$$

Lyapunov fonksiyonu seçilsin.

$$Kov(\mathcal{G}_n) = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)Kov(\zeta_n)(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T$$

dir. Buna göre,

$$V_n(\mathcal{G}_n) = \zeta_n^T (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T (Kov(\mathcal{G}_n))^{-1} (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_n$$

$$V_n(\mathcal{G}_n) = \zeta_n^T \frac{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T}{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1}} \frac{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T}{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1}} [Kov(\zeta_n)]$$

$$V_n(\mathcal{G}_n) = \zeta_n^T \Pi_n^- \zeta_n$$

olur. Yani,

$$V_n(\mathcal{G}_n) = V_n(\zeta_n)$$

dir. Benzer şekilde,

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \mathcal{G}_{n+1}^T (Kov(\mathcal{G}_{n+1}))^{-1} \mathcal{G}_{n+1}$$

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \zeta_{n+1}^T (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T (Kov(\mathcal{G}_{n+1}))^{-1} (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_{n+1}$$

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \zeta_{n+1}^T \frac{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T}{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1}} \frac{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T}{(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1}} [Kov(\zeta_{n+1})]$$

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \zeta_{n+1}^T \Pi_{n+1}^- \zeta_{n+1} = V_{n+1}(\zeta_{n+1})$$

olur. Buna göre bir önceki kısımda verilen işlemler göz önüne alındığında,

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \mathcal{G}_{n+1}^T (Kov(\mathcal{G}_{n+1}))^{-1} \mathcal{G}_{n+1} = V_{n+1}(\zeta_{n+1}) = \zeta_{n+1}^T \Pi_{n+1}^- \zeta_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (A_n(I - K_n C_n) \zeta_n + r_n)^T (\alpha^{-2} A_n^{-T} (\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^+) A_n^{-1}) (A_n(I - K_n C_n) \zeta_n + r_n) \\
&\leq \alpha^{-2} (\zeta_n^T (\Pi_n^- - \Pi_n^- (\Pi_n^+ + A_n^T Q^{-1} A_n)^{-1} \Pi_n^+) \zeta_n) + 2r_n^T \Pi_{n+1}^- A_n (I - K_n C_n) \zeta_n + r_n^T \Pi_{n+1}^- r_n
\end{aligned}$$

olarak yazılır ve işlemlere devam edildiğinde,

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) \leq \alpha^{-2} V_n(\mathcal{G}_n) - \frac{1}{2\alpha^2 \underline{p}^{-2} (1/\underline{p} + \underline{a}^{-2}/\underline{q})} \|\zeta_n\|^2 \quad (4.60)$$

$$\|\mathcal{G}_n\| \leq 2\|\zeta_n\| \quad (4.61)$$

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) - V_n(\mathcal{G}_n) \leq -\frac{1}{8\alpha^2 \underline{p}^{-2} (1/\underline{p} + \underline{a}^{-2}/\underline{q})} \|\mathcal{G}_n\|^2 + (\alpha^{-2} - 1)V_n(\mathcal{G}_n) \quad (4.62)$$

ve en son olarak

$$V_n(\mathcal{G}_n) \leq V_0(\mathcal{G}_0) \left( \alpha^{-2} - \frac{\underline{p}}{2\alpha^2 \underline{p}^{-2} (1/\underline{p} + \underline{a}^{-2}/\underline{q})} \right)^n \quad (4.63)$$

elde edilir. Buna göre,

$$\|\mathcal{G}_n\| \leq \sqrt{\frac{\underline{p}}{\underline{p}}} \|\mathcal{G}_0\| \left( \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\underline{p}}{2\underline{p}^{-2} (1/\underline{p} + \underline{a}^{-2}/\underline{q})}}} \right)^{-n} \quad (4.64)$$

olur. Yani,

$$\eta = \sqrt{\frac{\underline{p}}{\underline{p}}} > 0 \quad (4.65)$$

ve

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{p}{2\bar{p}^2 (1/\underline{p} + \bar{a}^2/\underline{q})}}} > \alpha \quad (4.66)$$

elde edilmiş olur. Burada eğer (4.56b) eşitliği kullanılsaydı,

$$\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{p}{2\bar{p}^2 (1/\underline{p} + \alpha^2 \bar{a}^2/\underline{q})}}} > \alpha$$

olarak elde edilirdi ki bu (4.66) eşitliğinde elde edilen  $\theta$  değerinden daha küçük olurdu. Yani hata kovaryansının bu şekilde alınması ile yakınsama hızı biraz daha artmıştır.

Eğer İlerletilmiş Kalman Filtresi deterministik gözlemci olarak alınırsa belli koşullar altında bir üstel gözlemcidir (Reif and Unbehauen 1999). Benzer şekilde sistem durum vektörü üzerinde kısıt olması durumunda da İlerletilmiş Kalman Filtresi aynı özelliklerini korumaktadır (Koksal Babacan *et al.* 2008).

## 5. KESİKLİ ZAMAN STOKASTİK DURUM-UZAY MODELLERİNDE İLERLETİLMİŞ KALMAN FİLTRESİNİN YAKINSAMASI

### 5.1 Kısıtsız Durumda Yakınsama

Bu kısımda lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmin hatasının davranışı araştırılmıştır. Tahmin hatasının, belli koşullar altında sınırlı kaldığı gösterilmiştir (Reif et al. 1999).

Stokastik lineer olmayan,

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) + G_n w_n \quad (5.1)$$

$$y_n = h(x_n) + H_n v_n \quad (5.2)$$

kesikli zaman durum-uzay modeli göz önüne alınsın (Reif et al. 1999). Burada,  $n \in N_0$  kesikli zaman noktasını,  $x_n \in R^q$  durum vektörünü,  $u_n \in R^p$  girdi vektörünü,  $y_n \in R^m$  çıktı vektörünü,  $v_n, w_n, R^k$  ve  $R^l$  de ve birbiriyle ilişkisiz sıfır ortalamalı, birim kovaryanslı gürültü terimleri ve  $H_n, G_n$  zamanla değişen  $m \times k$  ve  $q \times l$  boyutlu matrisleri göstermektedir.  $x_0$  başlangıç koşulu sabit ve  $f(.,.)$  ve  $h(.)$  fonksiyonlarının her ikisinin de sürekli türevlere sahip olduğu varsayılınsın. Bu model için bir durum tahmin edicisi,

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n (y_n - h(\hat{x}_n)) \quad (5.3)$$

ile verilir. Burada  $K_n$  zamanla değişen  $q \times m$  boyutlu gözlemci kazanç matrisidir. Durum tahmini  $\hat{x}_n$  ile gösterilmek üzere,  $f(.,.)$  ve  $h(.)$  fonksiyonları birinci dereceden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olduklarından,

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n, u_n) \quad (5.4)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n) \quad (5.5)$$

olmak üzere,

$$f(x_n, u_n) - f(\hat{x}_n, u_n) = A_n(x_n - \hat{x}_n) + \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) \quad (5.6)$$

ve

$$h(x_n) - h(\hat{x}_n) = C_n(x_n - \hat{x}_n) + \chi(x_n, \hat{x}_n) \quad (5.7)$$

biçiminde yazılabilirler.

$n$  zamanında ki tahmin hatası  $\zeta_n$  ile gösterilmek üzere,

$$\zeta_n = x_n - \hat{x}_n \quad (5.8)$$

dır ve (5.1) den (5.3) ün çıkarılması ve (5.2) ile (5.4)-(5.7) nin göz önüne alınmasıyla,

$$\zeta_{n+1} = A_n(I - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n \quad (5.9)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$r_n = \varphi(x_n, \hat{x}_n, u_n) - K_n \chi(x_n, \hat{x}_n) \quad (5.10)$$

$$s_n = G_n w_n - K_n H_n v_n \quad (5.11)$$

dır. (5.9) daki hata dinamiğini incelemek için stokastik süreçlerde sınırlılık için verilen iki tanım kullanılabilir.

**Tanım 5.1.** Eğer  $\eta, \nu > 0$  ve  $0 < \varphi < 1$  reel sayıları,

$$E\{\|\zeta_n\|^2\} \leq \eta \|\zeta_0\|^2 \varphi^n + \nu \quad (5.12)$$

eşitsizliğini her  $n \geq 0$  değeri için sağlayacak şekilde mevcutsa  $\zeta_n$  stokastik sürecine ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır denir (Agniel and Jury 1971, Tarn and Rasis 1976).

**Tanım 5.2.** Eğer;

$$\sup_{n \geq 0} \|\zeta_n\| < \infty \quad (5.13)$$

eşitsizliği bir olasılığı ile sağlanır ise stokastik süreç bir olasılık ile sınırlıdır denir (Agniel and Jury 1971, Tarn and Rasis 1976).

**Lemma 5.1.**  $V_n(\zeta_n)$  stokastik süreci için,

$$\underline{\nu} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \bar{\nu} \|\zeta_n\|^2 \quad (5.14)$$

ve

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq \mu - \alpha V_n(\zeta_n) \quad (5.15)$$

eşitsizliklerini (5.9) un her çözümü için sağlayacak  $\underline{\nu}, \bar{\nu}, \mu > 0$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  reel sayıları mevcut olsun. Bu durumda stokastik süreç ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır denir ve

$$E\{\|\zeta_n\|^2\} \leq \frac{\bar{\nu}}{\underline{\nu}} E\{\|\zeta_0\|^2\} (1-\alpha)^n + \frac{\mu}{\underline{\nu}} \sum_{i=1}^{n-1} (1-\alpha)^i \quad (5.16)$$

$\forall n \geq 0$  için gerekleŒmiŒ olur, üstelik stokastik süreç 1 olasılıkla sınırlıdır (Reif *et al.* 1999, Agniel and Jury 1971, Tarn and Rasis 1976, Goodwin and Sin 1984, Morozan 1968, Curtain 1972).

### 5.1.1. İlerletilmiŒ Kalman Filtresi için hata sınırları

**Tanım 5.3.** Bir kesikli zaman stokastik İlerletilmiŒ Kalman Filtresi aŒağıdaki fark denklemleri ile verilir (Reif *et al.* 1999).

**Durum Tahmini İçin Fark Denklemi:**

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n(y_n - h(\hat{x}_n)) \quad (5.17)$$

**Riccati Fark Denklemi:**

$$P_{n+1} = A_n P_n A_n^T + Q_n - K_n (C_n P_n C_n^T + R_n) K_n^T \quad (5.18)$$

**LineerleŒtirme:**

$$A_n = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_n, u_n) \quad (5.19)$$

$$C_n = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_n) \quad (5.20)$$

**Kalman Kazancı:**

$$K_n = A_n P_n C_n^T (C_n P_n C_n^T + R)^{-1} \quad (5.21)$$

Burada,  $Q_n$  zamanla deėiŒen, simetrik, pozitif tanımlı  $q \times q$  boyutlu matris,  $R_n$  zamanla deėiŒen simetrik pozitif tanımlı  $m \times m$  boyutlu matristir.

**Not:**  $Q_n$  ve  $R_n$  matrisleri için alışıldık seçim bunların (5.1) ve (5.2) ile verilen sistemdeki gürültü terimlerinin kovaryansları olmasıdır ve

$$Q_n = G_n G_n^T$$

$$R_n = H_n H_n^T$$

şeklindedir.

Deterministik tahmin probleminde bu seçim,  $G_n G_n^T = 0$ ,  $H_n H_n^T = 0$  şeklindedir (Reif et al. 1996, Reif *et al.* 1997).

Reif *et al.* (1999) çalışmalarında hata teriminin sınırlılığı için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

**Teorem 5.1.** (5.1), (5.2) ile verilen lineer olmayan stokastik süreç ve Tanım 5.3 ile verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın. Aşağıdaki varsayımlar sağlansın,

1)  $\forall n \geq 0$  için  $\bar{a}, \bar{c}, \underline{p}, \bar{p} > 0$  pozitif reel sayıları,

$$\|A_n\| \leq \bar{a} \quad (5.22a)$$

$$\|C_n\| \leq \bar{c} \quad (5.22b)$$

$$\underline{p}I \leq P_n \leq \bar{p}I \quad (5.22c)$$

$$\underline{q}I \leq Q_n \quad (5.22d)$$

$$\underline{r}I \leq R_n \quad (5.22e)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde mevcut olsun.

2)  $\forall n \geq 0$  için  $A_n$  tersinir olsun.

3)  $x, \hat{x} \in R^p$ ,  $\|x - \hat{x}\| \leq \epsilon_\varphi$  ve  $\|x - \hat{x}\| \leq \epsilon_\chi$  olacak şekilde  $\epsilon_\varphi, \epsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$  reel sayıları mevcut olsun. Bu durumda 5.10 ile verilen  $\varphi, \chi$  lineer olmayan fonksiyonları sınırlı olur,

$$\|\varphi(x, \hat{x}, u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}\|^2 \quad (5.23a)$$

$$\|\chi(x, \hat{x})\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}\|^2 \quad (5.23b)$$

Böylece eğer, başlangıç tahmin hatası için,

$$\|\zeta_0\| < \epsilon \quad (5.24)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde  $\epsilon > 0$  sayısı ve gürültü terimlerinin kovaryansları,

$$G_n G_n^T \leq \delta I \quad (5.25)$$

$$H_n H_n^T \leq \delta I \quad (5.26)$$

sınırlarında olacak şekilde  $\delta > 0$  sayısı bulanabilirse (5.8) ile verilen  $\zeta_n$  tahmin hatası ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır ve 1 olasılıkla sınırlıdır.

Teoremin ispatı birkaç lemmaya bölünmüştür (Reif *et al.* 1999).

**Lemma 5.2.** Teorem 5.1 in koşulları altında;  $n \geq 0$ ,  $K_n$  Kalman Kazancı ve  $\Pi_n = P_n^{-1}$  olmak üzere,

$$(A_n - K_n C_n)^T \Pi_{n+1} (A_n - K_n C_n) \leq (1 - \alpha) \Pi_n \quad (5.27)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde  $0 < \alpha < 1$  reel sayısı mevcuttur ve burada

$$1 - \alpha = \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{p(a + \frac{a}{pc})^2 / r}\right)} \text{ olarak bulunur (Lewis 1986).}$$

**Lemma 5.3.** Teorem 5.1 in koşulları altında,  $\Pi_n = P_n^{-1}$  ve  $K_n, r_n$  (5.21) ve (5.10) da verildiği gibi olsun. Böyle ise,  $\epsilon', K_{nonl} > 0$  pozitif reel sayıları mevcuttur öyle ki;

$$r_n^T \Pi_n [2(A_n - K_n C_n)(x_n - \hat{x}_n) + r_n] \leq K_{nonl} \|x_n - \hat{x}_n\|^3 \quad (5.28)$$

$\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \epsilon'$  için sağlanır ve  $\kappa' = (\kappa_\varphi + \frac{1}{a p c} \frac{1}{r} \kappa_\chi)$  olmak üzere,

$$\kappa_{nonl} = \kappa' \frac{1}{p} (2(\bar{a} + \frac{1}{a p c} \frac{1}{r} \bar{c}) + \kappa' \epsilon')$$
 olarak bulunur.

**Lemma 5.4.** Teorem 5.1 in koşulları altında,  $\Pi_n = P_n^{-1}$  olsun ve  $K_n, s_n$  (5.21) ve (5.11) de verildiği gibi olsun. Bu durumda;  $\delta$  dan bağımsız olarak pozitif reel bir  $K_{noise} > 0$  sayısı vardır ki;

$$E\{s_n^T \Pi_{n+1} s_n\} \leq K_{noise} \delta \quad (5.29)$$

sağlanır ve  $K_{noise} = \frac{q}{p} + \frac{a^{-2} c^{-2} p^{-2} m}{p r^2}$  olarak bulunur. Burada,

$$iz(G_n G_n^T) \leq \delta iz(I) = q \delta$$

$$iz(H_n H_n^T) \leq \delta iz(I) = m \delta$$

dır.

**İspat 5.1.**

$$V_n(\zeta_n) = \zeta_n^T \Pi_n \zeta_n \quad (5.30)$$

fonksiyonu seçilsin,  $\Pi_n = P_n^{-1}$  ve  $P_n$  pozitif tanımlı olduğundan bu fonksiyon mevcuttur (Mendel 1986).

(5.22c) den,

$$\frac{1}{\underline{p}} \|\zeta_n\|^2 \leq V_n(\zeta_n) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\zeta_n\|^2 \quad (5.31)$$

yazılabilir, (5.14) eşitliğinde bu  $\underline{v} = \frac{1}{\underline{p}}$  ve  $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p}}$  ye tekabül eder. Lemma 5.1 in gereksinimlerinin sağlanması için (5.15) de verildiği gibi  $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$  için bir üst sınıra ihtiyaç vardır. (5.9) dan

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= \zeta_{n+1}^T \Pi_{n+1} \zeta_{n+1} \\ V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &= (A_n(I - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n)^T \Pi_{n+1} (A_n(I - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n) \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir. Lemma 5.2 nin uygulanmasıyla (5.30) da kullanılarak,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\zeta_{n+1}) &\leq (1 - \alpha)V_n(\zeta_n) + r_n^T \Pi_{n+1} (2(A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n) \\ &\quad + 2s_n^T \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n) + s_n^T \Pi_{n+1} s_n \end{aligned} \quad (5.33)$$

olarak bulunur.  $E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\}$  koşullu beklenen değeri alınsın, beyaz gürültü özelliğinden  $E\{s_n^T \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n)|\zeta_n\}$  ihmal edilebilir çünkü ne  $\Pi_{n+1} = P_{n+1}^{-1}$  ne de  $A_n, C_n, K_n, r_n, \zeta_n, v_n$  ya da  $w_n$  e bağlıdır. Kalan terimler lemma 5.3 ve lemma 5.4 ile tahmin edilebilir;

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\alpha V_n(\zeta_n) + K_{nonl} \|\zeta_n\|^3 + K_{noise} \delta \quad (5.34)$$

$\|\zeta_n\| \leq \epsilon$  için.

$$\epsilon = \min\left(\epsilon', \frac{\alpha}{2pK_{nonl}}\right) \quad (5.35)$$

olarak tanımlanmasıyla,  $\|\zeta_n\| \leq \epsilon$  için (5.30), (5.31) ile birlikte;

$$K_{nonl} \|\zeta_n\| \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2p} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n)$$

elde edilir. Bunun (5.34) de yerine konulmasıyla,  $\|\zeta_n\| \leq \epsilon$  için

$$\begin{aligned} E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\alpha V_n(\zeta_n) + \underbrace{K_{nonl} \|\zeta_n\|^3}_{\leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n)} + K_{noise} \delta \\ E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) &\leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) + K_{noise} \delta \end{aligned} \quad (5.36)$$

elde edilir.  $\|\zeta_0\| \leq \epsilon$ ,  $\underline{v} = \frac{1}{p}$  ve  $\bar{v} = \frac{1}{\underline{p}}$  ve  $\mu = K_{noise} \delta$  olmak üzere lemma 5.1 uygulanabilir. Bununla birlikte,  $\tilde{\epsilon} \leq \epsilon$  olduğu durum göz önüne alınmak üzere  $\tilde{\epsilon} \leq \|\zeta_n\| \leq \epsilon$  için,

$$E\{V_{n+1}(\zeta_{n+1})|\zeta_n\} - V_n(\zeta_n) \leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) + K_{noise} \delta \leq 0 \quad (5.37)$$

eşitsizliği tahmin hatasının sınırlılığını garanti eder (Gard 1988).

$$\delta = \frac{\alpha \tilde{\epsilon}^2}{2pK_{noise}}$$

olarak seçilmesiyle;  $\|\zeta_n\| \geq \tilde{\epsilon}$  olmak üzere bir  $\tilde{\epsilon} \leq \epsilon$  için,

$$K_{noise} \delta \leq \frac{\alpha}{2p} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) \quad (5.38)$$

olup (5.37) eşitsizliği sağlanır.

Böylece; başlangıç hatası ve gürültü terimlerinin (5.24)-(5.26) ile sınırlandırılması ile tahmin hatasının sınırlı kaldığı sonucuna ulaşılır (Reif *et al.* 1999).

## 5.2 Kısıtlı Durumda Yakınsama

Bir önceki kısımda lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmin hatasının belirli koşullar altında sınırlı kaldığı gösterilmişti. Bu kısımda lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde durum değişkenleri için bilinen bir önbilgi olması durumunda kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmin hatasının da belirli koşullar altında sınırlı kaldığı gösterilmiştir. (5.1) ve (5.2) ile verilen kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve  $Dx_n = d_n$  kısıtı göz önüne alınsın. Daha öncede söylendiği gibi,  $n \in N_0$  kesikli zaman,  $x_n \in R^q$  durum vektörü,  $u_n \in R^p$  girdi vektörü ve  $y_n \in R^m$  çıktı vektörü olsun.  $D$ ,  $s \times q$  boyutlu sabit matris,  $d_n$ ,  $s \times 1$  boyutlu bilinen vektör,  $s$  kısıtların sayısı ve  $q$  durumların sayısı olmak üzere  $s \leq q$  ve  $rank(D) = s$  olduğu varsayılınsın.  $v_n, w_n, R^k$  ve  $R^l$  de ve birbiriyle ilişkisiz sıfır ortalamalı, birim kovaryanslı gürültü terimleri ve  $H_n, G_n$  zamanla değişen  $m \times k$  ve  $q \times l$  boyutlu matrisleri göstermektedir. Buna göre Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi, Kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini ile oluşturulacaktır. Kısıtlı Kalman Filtresi tahmini  $\tilde{x}$  ile gösterilmek üzere genel olarak (Simon and Chia 2002),

$$\tilde{x}_n = \hat{x}_n - W^{-1} D'(DW^{-1}D')^{-1}(D\hat{x}_n - d_n) \quad (5.39)$$

biçiminde elde edildiği ifade edilmiştir. Burada,  $\hat{x}$  kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminidir ve  $W$  simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisidir.

Kısıtsız İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini,

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n(y_n - h(\hat{x}_n))$$

olmak üzere bu sistem için de kısıtlı durum İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini (5.39) eşitliği ile elde edilir. Kısıtlı tahmin hatası

$$\mathcal{G}_n = x_n - \tilde{x}_n \quad (5.40)$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\mathcal{G}_n = x_n - (\hat{x}_n - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x}_n - d_n))$$

biçiminde olup,  $Dx_n = d_n$  nin göz önüne alınması ile,

$$\mathcal{G}_n = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)(x_n - \hat{x}_n)$$

olarak elde edilir. Böylece;  $n$  ci zamandaki kısıtsız tahmin hatası

$$\zeta_n = x_n - \hat{x}_n$$

olmak üzere, kısıtlı tahmin hatası;

$$\mathcal{G}_n = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_n \quad (5.41)$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde;

$$\zeta_{n+1} = (A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n$$

olmak üzere,

$$\mathcal{G}_{n+1} = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_{n+1}$$

olup

$$\mathcal{G}_{n+1} = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)((A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n) \quad (5.42)$$

dir. Burada,  $r_n$  ve  $s_n$  daha önce ifade edildiği gibidir. Kısıtlı hata dinamiğinin analizi için daha önce stokastik süreçlerde sınırlılık için verilen iki tanım kullanılabilir.

**Tanım 5.4.** Kesikli zaman stokastik kısıtlı durum İlerletilmiş Kalman filtresinin Tanım 5.3 ile verilen fark denklemlerinden tek farkı,

**Durum Tahmini İçin Fark Denklemleri:**

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, u_n) + K_n(y_n - h(\hat{x}_n))$$

hesaplandıktan sonra her bir adım sonunda,

$$\tilde{x}_{n+1} = \hat{x}_{n+1} - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}(D\hat{x}_{n+1} - d_{n+1})$$

' in hesaplanmasıdır. Diğer fark denklemleri olduğu gibi alınır.

**Teorem 5.2.**

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) + G_n w_n$$

$$y_n = h(x_n) + H_n v_n$$

ile verilen lineer olmayan durum-uzay modeli ve Tanım 5.4 ile verilen kısıtlı durum İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın ve Teorem 5.1 in varsayımları ile birlikte

$$\|W\| \leq \bar{w} \quad (5.43a)$$

$$\|D\| \leq \bar{d} \quad (5.43b)$$

varsayımları da sağlansın. Bu durumda, eğer başlangıç tahmin hatası için,

$$\|\mathcal{G}_0\| < \epsilon \quad (5.44)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde ve gürültü terimlerinin kovaryansları

$$G_n G_n^T \leq \delta I \quad (5.45)$$

$$H_n H_n^T \leq \delta I \quad (5.46)$$

sınırlarında olacak şekilde  $\delta, \epsilon > 0$  sayıları bulunabilirse (5.40) ile verilen  $\mathcal{G}_n$  tahmin hatası ortalama kareler anlamında üstel sınırlıdır ve bir olasılıkla sınırlıdır.

Teoremin ispatı için Teorem 5.1 in ispatında kullanılan lemmalar kullanılacaktır.

**İspat 5.2.**  $\mathcal{G}_n = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)\zeta_n$  ve  $\Pi_n = P_n^{-1}$  olmak üzere

$$V_n(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_n^T (Kov(\mathcal{G}_n))^{-1} \mathcal{G}_n \quad (5.47)$$

fonksiyonu seçilsin. (5.22c) den dolayı bu fonksiyon aşağıdaki sınırlarda yazılabilir.

$$\frac{1}{4p} \|\mathcal{G}_n\|^2 \leq V_n(\mathcal{G}_n) \leq \frac{1}{4p} \|\mathcal{G}_n\|^2 \quad (5.48)$$

$$\mathcal{G}_{n+1} = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)((A_n - K_n C_n)\zeta_n + r_n + s_n)$$

ve

$$Kov(\mathcal{G}_{n+1}) = (I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)Kov(\zeta_{n+1})(I - W^{-1}D^T(DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T$$

olmak üzere

$$V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) = \mathcal{G}_{n+1}^T (Kov(\mathcal{G}_{n+1}))^{-1} \mathcal{G}_{n+1}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) &= \zeta_{n+1}^T (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-T} \Pi_{n+1} \\ &\quad \times (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1} (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D) \zeta_{n+1} \\ V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) &= V_{n+1}(\zeta_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) &= (s_n^T + r_n^T + \zeta_n^T (A_n - K_n C_n)^T) (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^T (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-T} \\ &\quad \Pi_{n+1} (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D) (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D)^{-1} ((A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n + s_n) \end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) &\leq (1 - \alpha) V_n(\zeta_n) + r_n^T \Pi_{n+1} (2(A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) \\ &\quad + 2s_n^T \Pi_{n+1} ((A_n - K_n C_n) \zeta_n + r_n) + s_n^T \Pi_{n+1} s_n \end{aligned} \quad (5.49)$$

olarak elde edilir,  $E(V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) | \mathcal{G}_n)$  koşullu beklenen değerinin alınması ile,  $\mathcal{G}_n = (I - W^{-1}D^T (DW^{-1}D^T)^{-1}D) \zeta_n$  olmak üzere,  $\|\mathcal{G}_n\| \leq 2 \|\zeta_n\| \leq 2 \in'$  için,

$$E(V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1}) | \mathcal{G}_n) - V_n(\mathcal{G}_n) \leq -\alpha V_n(\mathcal{G}_n) + K_{nonl} \|\zeta_n\|^3 + K_{noise} \delta \quad (5.50)$$

bulunur. Buna göre,

$$\in = \min(\in', \frac{\alpha}{2pK_{nonl}}) \quad (5.51)$$

olarak seçilmesiyle  $\|\mathcal{G}_n\| \leq 2 \in'$  için,

$$\kappa_{nonl} \|\zeta_n\| \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2p} \|\zeta_n\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\zeta_n) = \frac{\alpha}{2} V_n(\mathcal{G}_n)$$

olup bunun (5.50) eşitliğinde yazılmasıyla,

$$E(V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1})|\mathcal{G}_n) - V_n(\mathcal{G}_n) \leq -\frac{\alpha}{2} V_n(\mathcal{G}_n) + K_{noise} \delta \quad (5.52)$$

elde edilir.

$2\tilde{\epsilon} \leq \|\mathcal{G}_n\| \leq 2\epsilon$  için, bir  $\tilde{\epsilon} < \epsilon$  olmak üzere,

$$\delta = \frac{\alpha \tilde{\epsilon}^2}{2pK_{noise}} \quad (5.53)$$

olarak seçilmesiyle ,

$$K_{noise} \delta \leq \frac{\alpha}{2p} \frac{\|\mathcal{G}_n\|^2}{4} \leq \frac{\alpha}{2} V_n(\mathcal{G}_n)$$

biçiminde elde edilir, buna göre

$$E(V_{n+1}(\mathcal{G}_{n+1})|\mathcal{G}_n) - V_n(\mathcal{G}_n) \leq 0 \quad (5.54)$$

elde edilir.

Sonuç olarak başlangıç durum tahmininin ve gürültü kovaryanslarının sınırlandırılması ile kısıtlı durum Kalman Filtresi tahmin hatasının da sınırlı olduğu söylenebilir. Bu kısımda elde edilen sonuçlar “Stochastic Stability of the Discrete-Time Constrained Extended Kalman Filter” çalışması adı altında Turkish Journal Of Electrical Engineering and Computer Sciences dergisine gönderilmiştir.

## 6. EN ÇOK OLABİLİRLİK YÖNTEMİ İLE MODEL PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde lineer, kesikli zaman, normal dağılıma sahip sistemlerin parametrelerinin log olabilirlik fonksiyonu kullanılarak belirlenmesi anlatılmıştır. Yani sistemle ilgili bilinmeyen parametrelerin Kalman Filtresi kullanılarak en çok olabilirlik yöntemiyle hesaplanması anlatılmıştır.

Durum-uzay modellerinde kesikli zaman lineer sistem parametrelerinin en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmesinde optimizasyon algoritmaları kullanılır ve bu da türevlerin hesaplanmasını gerektirir.

$\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$  sonlu boyutlu, kesikli, lineer zamanla değişen normal dağılıma sahip gözlem değişkeni,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Ax_n + Bu_n + Gw_n \\y_n &= Hx_n + v_n\end{aligned}$$

durum-uzay modelinden elde edilsin. Burada,  $x_n \in R^q$  sistem durum vektörü,  $y_n \in R^m$ , sistem gözlem vektörü,  $w_n \in R^q$  ve  $v_n \in R^m$  birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı ve

$$Kov(w_n w_k) = \begin{cases} Q & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases} \quad , \quad Kov(v_n v_k) = \begin{cases} R & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n \neq k \end{cases}$$

kovaryans matrisli normal dağılıma sahip hata terimleri ve  $u_n \in R^p$ , sistem kontrol vektörüdür.

$$E(x_0) = 0$$

$$Kov(x_0) = P_{1|0}$$

olmak üzere Kalman Filtresi,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0 &= 0 \\
P(0) &= P_0 \\
\hat{x}_{n+1} &= A\hat{x}_n + Bu_n + AK_n[y_n - H\hat{x}_n] \\
K_n &= P_n H'(HP_n H' + R)^{-1} \\
P_{n+1} &= AP_n A' + GQG' - AK_n(HP_n H' + R)^{-1} K_n' A'
\end{aligned} \tag{6.1}$$

biçiminde alınsın. Burada,  $P_{n+1}$  denklemi Riccati denklemi olarak bilinir.

$A, B, G, H, Q$  ve  $R$  matrisleri bilinmeyen parametreler içersin. Bu parametrelerin bütünü  $\Theta$  vektörü ile gösterilsin.  $y_n$  nin  $\{y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, y_0\}$  üzerine koşullu dağılımı ortalaması  $H\hat{x}_n$  ve varyansı  $HP_n H' + R$  olan normal dağılıma sahip (Wilson and Kumar 1982, Anderson and Moore 1979) olduğundan negatif olabilirlik fonksiyonu;

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^N \ln[\det(HP_n H' + R)] + iz(HP_n H' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_n)(y_n - H\hat{x}_n)' \tag{6.2}$$

biçiminde yazılır ve parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri bu fonksiyonun parametrelere göre minimizasyonu ile elde edilir. Bunu elde edebilmek içinde negatif olabilirlik fonksiyonunun bilinmeyen parametrelere göre türevlerinin alınması gerekir.

Wilson and Kumar (1982) ve Hooker (1994) çalışmalarında  $K_n$  ve  $P_n$ ' nin zamanla değişmediği ve  $P_n$ ' nin

$$P = APA' + GQG' - AK(HPH' + R)^{-1} K' A' \tag{6.3}$$

Riccati denklemini sağladığı durumu göz önüne alarak türev alma işlemlerini yapmışlardır. Kısaca bu işlemler anlatılsın;

(6.3) eşitliği sağlandığında yani  $K_n = K$  ve  $P_n = P$  olduğu durumda

$$\delta_n = (y_n - H\hat{x}_n)$$

$$\Gamma_{\delta\delta}(n) = \delta_n \delta_n'$$

$$\Gamma_{\delta\delta} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \Gamma_{\delta\delta}(n)$$

$$P_y = HP_n H' + R$$

olmak üzere negatif olabilirlik fonksiyonu,

$$J(\theta) = (1+N)(\ln[\det(P_y)] + izP_y^{-1}\Gamma_{\delta\delta}) \quad (6.4)$$

olarak yazılabilir.

### 6.1 Log-Olabilirlik Fonksiyonunun Türevleri

$$P_y = (HPH' + R)$$

olmak üzere negatif log-olabilirlik fonksiyonu  $J'$  nin,  $\Theta$  vektöründe bulunan bilinmeyen parametre  $\theta$  ya göre türevi,  $(1+N)$  çarpım faktörü gözardı edilerek ve

$$iz\left(\frac{\partial P_y}{\partial \theta} M\right) = G_1 \text{ ve } iz\left(\frac{\partial \Gamma_{\delta\delta}}{\partial \theta} P_y^{-1}\right) = G_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= iz\left(\frac{\partial P_y}{\partial \theta} M\right) + iz\left(\frac{\partial \Gamma_{\delta\delta}}{\partial \theta} P_y^{-1}\right) \\ &= G_1 + G_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

yazılabilir. Burada,

$$M = P_y^{-1} - P_y^{-1} \Gamma_{\hat{x}\delta} P_y^{-1}$$

dır.  $G_1$  ve  $G_2$ ' nin elde edilmesi gerekir. İlk olarak  $G_1$  ele alınsın.  $P_y$  ifadesi kullanılarak ilk türev alınırsa,

$$G_1 = 2iz \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} P H' M \right) + iz \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} M \right) + iz \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} H' M H \right)$$

olur.

$$\bar{A} = A(I - KH)$$

alınmak üzere,  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  ifadesi

$$\bar{A} \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{A}' + \Omega + \Omega' = \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (6.6)$$

eşitliğini sağlar ve burada

$$\Omega = \frac{\partial A}{\partial \theta} P \bar{A}' - AK \frac{\partial H}{\partial \theta} P \bar{A}' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (GQG') + \frac{1}{2} AK \frac{\partial R}{\partial \theta} K' A'$$

dır.

$G_2$ ' nin elde edilmesi için,

$$\Gamma_{\hat{x}\delta} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \hat{x}(n) \delta'(n) \quad (6.7)$$

olarak alınsın.

$\partial \hat{x} / \partial \theta(n) \cong s(n)$  olmak üzere

$$s(n+1) = \bar{A}s(n) + d(n)$$

olarak yazılabilir ve burada

$$d(n) = \frac{\partial A}{\partial \theta} \hat{x}_n + \frac{\partial}{\partial \theta} (AK) y_n + \frac{\partial B}{\partial \theta} u_n$$

dir. Buna göre,

$$G_2 = -2iz \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \Gamma_{\hat{x}_0} P_y^{-1} \right) - 2iz \left( \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n \delta'_n P_y^{-1} H \right)$$

biçiminde yazılabilir.

Dikkat edilirse  $\partial J / \partial \theta$ , Riccati denklemine ve öngörü denklemine duyarlı terimlerle birlikte sistem matrislerinin türevlerini içermektedir. Bu duyarlı terimler sistem matrislerinin türevleri biçiminde yazılmalıdır.

$G_2$  ifadesindeki ikinci terim, yardımcı denklemlerle ilgili aşağıdaki sonuçların kullanılması ile düzenlenebilir (Yared 1979).

$$s(n+1) = Cs(n) + d(n), n = 0, 1, \dots, N-1$$

olmak üzere,

$$L = \sum_{n=0}^N s'(n) c_n = iz \left( \sum_{n=0}^N s(n) c'_n \right)$$

ise

$$\begin{aligned}
L &= s'(0)\lambda_0 + \left(\sum_{n=1}^N d'(n-1)\lambda_n\right) \\
&= iz(s(0)\lambda'_0 + \sum_{k=1}^N d(n-1)\lambda'_n)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\lambda_n = C' \lambda_{n+1} + c_n, n = N-1, \dots, 0$$

ve

$$\lambda_N = c_N.$$

dir.

Yukarıdaki sonuç,

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \bar{A}' \lambda_{n+1} + H' P_y^{-1} \delta_n \\
\lambda_N &= H' P_y^{-1} \delta_N
\end{aligned} \tag{6.8}$$

olmak üzere  $C = \bar{A}$  ve  $c_n = H' P_y^{-1} \delta_n$  için kullanılırsa,

$$-2iz \left( \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n \delta'_n P_y^{-1} H \right) = -2iz \frac{1}{N+1} \left( \frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \theta} \lambda'_0 + \sum_{n=1}^N d_{n-1} \lambda'_{n-1} \right)$$

olarak yazılabilir.

$d(n)$  ifadesi  $\partial \hat{x}_0 / \partial \theta = 0$  olduğu kullanılarak  $G_2$  ifadesi,

$$G_2 = -2iz\left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \Gamma_{\hat{x}\delta} P_y^{-1}\right) - 2iz\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \theta} \Gamma_{\hat{x}\lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (AK) \Gamma_{y\lambda} + \frac{\partial B}{\partial \theta} \Gamma_{u\lambda}\right)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\Gamma_{\hat{x}\lambda} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \hat{x}(n-1) \lambda'(n) \quad (6.9)$$

$$\Gamma_{u\lambda} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N u(n-1) \lambda'(n) \quad (6.10)$$

$$\Gamma_{y\lambda} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N y(n-1) \lambda'(n) \quad (6.11)$$

dır.  $\partial \bar{A} / \partial \theta$  ve  $\partial / \partial \theta (AK)$  için bu ifadelerin kullanımı ile

$$\Gamma_{\delta\lambda} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \delta_{n-1} \lambda'_n \quad (6.12)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} = & iz \frac{\partial P}{\partial \theta} (H' MH - 2H' P_y^{-1} \Gamma_{\delta\lambda} \bar{A}) - 2iz \frac{\partial A}{\partial \theta} (\Gamma_{\hat{x}\lambda} + K \Gamma_{\delta\lambda}) \\ & - 2iz \frac{\partial B}{\partial \theta} (\Gamma_{u\lambda}) - iz \frac{\partial R}{\partial \theta} (2P_y^{-1} \Gamma_{\delta\lambda} AK - M) + 2iz \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ & \cdot (-\Gamma_{\hat{x}\delta} P_y^{-1} - P \bar{A}' \Gamma_{\delta\lambda}' P_y^{-1} + (\Gamma_{\hat{x}\lambda} + K \Gamma_{\delta\lambda}) AK + K(I - \Gamma_{\delta\delta}) P_y^{-1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada halen  $\partial P / \partial \theta$  ifadesi bulunduğundan bunu yok etmek için,

$$H' MH - 2H' P_y^{-1} \Gamma_{\delta\lambda} \bar{A} = S$$

olarak alınsın.  $\partial P / \partial \theta$  simetrik matrisi,

$$\bar{A} \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{A}' + \Omega + \Omega' = \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

olmak üzere  $\partial J / \partial \theta$  ifadesinin ilk terimi,

$$iz \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} S \right)$$

olur.

Simetrik  $W$  matrisi,

$$\bar{A}' W \bar{A} + \frac{S + S'}{2} = W \quad (6.13)$$

eşitliğini sağladığında

$$iz \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} S \right) = iz \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( \frac{S + S'}{2} \right) = iz W (\Omega + \Omega') = 2iz (W \Omega)$$

olarak yazılabilir (Yared 1979).

Böylece  $\Omega$  nın yerine konulması ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= 2iz \frac{\partial A}{\partial \theta} (P \bar{F}' W - \Gamma_{\hat{x}\lambda} - K \Gamma_{\delta\lambda}) + 2iz \frac{\partial G}{\partial \theta} (Q G' W) \\ &- 2iz \frac{\partial H}{\partial \theta} (-\Gamma_{\hat{x}\delta} P_y^{-1} - P \bar{A}' \Gamma_{\delta\lambda}' P_y^{-1} + (\Gamma_{\hat{x}\lambda} + K \Gamma_{\delta\lambda}) A K + K (I - \Gamma_{\delta\delta} P_y^{-1}) - P \bar{A}' W A K) \\ &- 2iz \frac{\partial B}{\partial \theta} (\Gamma_{u\lambda}) + iz \frac{\partial Q}{\partial \theta} (G' W G) \\ &+ iz \frac{\partial R}{\partial \theta} (2P_y^{-1} \Gamma_{\delta\lambda} A K - P_y^{-1} (I - \Gamma_{\delta\delta} P_y^{-1}) + K' A' W A K) \end{aligned} \quad (6.14)$$

olarak elde edilir.

Log olabilirlik fonksiyonu hesaplanırken yapılan işlemler aşağıdaki gibi adım adım özetlenebilir;

1)  $\{y_n, n = 0, 1, \dots, N\}$  ve  $\{u_n, n = 0, 1, \dots, N-1\}$  dizilerini tut.

2)  $F, G, H, B, Q, R$  matrislerini tahmin et.

3) (6.3) Riccati denklemini ve  $\hat{x}_{n+1}$  öngörü denklemini çöz.  $\{\hat{x}_n, \delta_n, n = N, \dots, 0\}$  kayıtlarını ve  $\Gamma_{\delta\delta}, \Gamma_{\hat{x}\delta}$  matrislerini tut ve (6.4) ile verilen  $J'$  yi hesapla.

4)  $\{\lambda_n, n = N, \dots, 0\}$  ve  $\Gamma_{\hat{x}\lambda}, \Gamma_{u\lambda}, \Gamma_{y\lambda}$  ve  $\Gamma_{\delta\lambda}$  için (8.8) ile verilen yardımcı denklemini çöz.

5)  $W$  için (6.13) ile verilen lineer matris denklemini çöz.

6) (6.14) den  $J'$  nin türevini hesapla.

Kalman tahmini zamanla değişiyorsa yani  $P_n$  ve  $K_n$  zamanla değişiyorsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= \sum_{n=0}^N iz \left( \frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta} M_n \right) + \sum_{n=0}^N iz \left( \left( \frac{\partial \delta_n}{\partial \theta} \delta_n' + \delta_n \frac{\partial \delta_n'}{\partial \theta} \right) P_y^{-1}(n) \right) \\ &= G_1 \quad + \quad G_2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

ve

$$M_n = P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n) \Gamma_{\delta\delta} P_y^{-1}(n)$$

$$P_y(n) = (HP_n H' + R)$$

olmak üzere,  $G_1$  ifadesinden başlanırsa,  $P_y(n)$  kovaryans matrisinin türevinin alınması gerekir;

$$\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} P_n H' + H \frac{\partial P_n}{\partial \theta} H' + H P_n \frac{\partial H'}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)$$

Buna göre,  $M_n$  matrisi ile sondan çarpılıp izi alınırsa,

$$G_1 = \sum_{n=0}^N \left( 2iz \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} P_n H' M_n \right) + iz \left( \frac{\partial P_n}{\partial \alpha} H' M_n H \right) + iz \left( \frac{\partial R}{\partial \alpha} M_n \right) \right)$$

elde edilir. Burada kovaryans matrisi,

$$P_{n+1} = A P_n A' + G Q G' - K_n (H P_n H' + R)^{-1} K_n'$$

nin türevi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{n+1}}{\partial \theta} &= \frac{\partial A}{\partial \theta} P_n A' + A \frac{\partial P_n}{\partial \theta} A' + A P_n \frac{\partial A'}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial \theta} Q G' + G \frac{\partial Q}{\partial \theta} G' + G Q \frac{\partial G'}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{\partial K_n}{\partial \theta} (H P_n H' + R)^{-1} K_n' - K_n \frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta} K_n' - K_n P_y(n) \frac{\partial K_n'}{\partial \theta} \end{aligned}$$

olur.  $G_2$  ifadesi için,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\delta\delta}(n) &= (y_n - H \hat{x}_n)(y_n - H \hat{x}_n)' \\ \delta_n &= (y_n - H \hat{x}_n) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \Gamma_{\delta\delta}(n)}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_n - H \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} \right) \delta_n'$$

$$= \delta_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_n - H \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} \right)$$

Bu türevin  $P_y^{-1}(n)$  ile çarpılması ve izinin alınması ile,

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{n=0}^N iz \left\{ \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_n - H \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} \right) \delta_n' + \delta_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_{n|n-1} - H \frac{\partial \hat{x}_{n|n-1}}{\partial \theta} \right) \right\} P_y^{-1}(n) \\ &= \sum_{n=0}^N -2iz \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_n \delta_n' P_y^{-1}(n) \right) + 2iz \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} \delta_n' P_y^{-1}(n) \right) - 2iz \left( \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} H \delta_n' P_y^{-1}(n) \right) \end{aligned}$$

olur. Burada  $\hat{x}_{n+1}$  türevi

$$\frac{\partial \hat{x}_{n+1}}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} \hat{x}_n + A \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} + \frac{\partial K_n}{\partial \theta} \delta(n) + K_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \hat{x}_n - H \frac{\partial \hat{x}_n}{\partial \theta} \right)$$

dir.  $G_1$  ve  $G_2$  ifadelerinin toplanması ile log-olabilirlik fonksiyonu elde edilir.

## 6.2 Standart Hata

Parametre tahminleri hesaplandıktan sonra standart hataları aşağıdaki şekilde hesaplanır (Anderson *et al*, 1995).

$$J_n(\theta) = \ln[\det(HP_n H' + R)] iz(y_n - H\hat{x}_n)'(HP_n H' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_n) \quad (6.16)$$

olmak üzere;

$$S_\varepsilon(\Theta) = \text{diag} \left( \sqrt{\left( \sum_n \frac{\partial J_n(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial J_n(\theta)}{\partial \theta} \right)^{-1}} \right) \quad (6.17)$$

biçimindedir. Buna göre türevlerin elde edilmesi gerekir,

$$M_n = P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n)\delta_n(n)\delta_n'P_y^{-1}(n)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_n(\theta)}{\partial \theta} &= iz\left(P_y^{-1}(n)\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial \delta_n'}{\partial \theta}P_y^{-1}(n)\delta_n + \delta_n'P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n}{\partial \theta} \\ &\quad - \delta_n'P_y^{-1}(n)\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta}P_y^{-1}(n)\delta_n \\ &= iz\left\{\left(P_y^{-1}(n) - P_y^{-1}(n)\delta_n\delta_n'\frac{\partial P_y(n)}{\partial \theta}\right)\right\} + iz\left\{\frac{\partial \delta_n'}{\partial \theta}P_y^{-1}(n)\delta_n + \delta_n'P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n}{\partial \theta}\right\} \\ &= iz\left\{\frac{\partial P_y^{-1}(n)}{\partial \theta}M_n\right\} + iz\left\{P_y^{-1}(n)\frac{\partial \delta_n\delta_n'}{\partial \theta}\right\} \end{aligned}$$

dır.

### 6.3 Durum-Uzay Modelleri İçin Optimal Kontrol

İndirimli stokastik regülatör problemi göz önüne alınsın. Bu optimizasyon problemi,

$$\min_{\{u_n\}} E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left( x_n'R_1x_n + u_n'Q_1u_n + 2x_n'Wu_n \right) \quad (6.18)$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$

biçimindedir (Anderson *et. al.* 1995). (6.18) ile verilen fonksiyon kayıp fonksiyonu olarak adlandırılır ve kayıp fonksiyonunda bulunan  $R_1$  ve  $Q_1$  matrisleri simetrik ve negatif olmayan matrislerdir. Bu kontrol probleminin çözümü

$$u_n = -F_n'x_n$$

ile verilir ve burada

$$F_n = (Q_1 + \beta B'(P_1)_{n+1} B)^{-1} (\beta B'(P_1)_{n+1} A + W') \quad (6.19)$$

ve

$$(P_1)_{n+1} = R_1 + \beta A'(P_1)_n A - (W + \beta A'(P_1)_n B)(Q_1 + \beta B'(P_1)_n B)^{-1} \times (\beta B'(P_1)_n A + W') \quad (6.20)$$

dir. Durum vektörü bilinmediğinde optimal kontrolü bulmak için, Kalman Filtresi ile durum tahmin edilerek  $u_n = -F_n \hat{x}_n$  olarak kullanılır.

Kayıp fonksiyonundaki  $Q_1, W$  ve  $R_1$  matrisleri de bilinmeyen parametreler içerebilirler. Bu durumda bunlarında tahmin edilmesi gerekmektedir. En çok olabilirlik yöntemiyle bunların tahmin edilebilmesi için bu matrislerin türevlerine ihtiyaç duyulacaktır.

#### 6.4 Durum-Uzay Modellerinin Parametrelerine Göre Türevleri

Durum-uzay modelinde model parametreleriyle birlikte optimal lineer regülatör problemi için verilen maliyet fonksiyonunda da bilinmeyen parametreler olabilir. Bu durumda durum vektörü (Anderson *et al.* 1995),

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n$$

olmak üzere, optimal kontrol  $u_n = -Fx_n$  olarak elde edildiğinden bunun yerine yazılmasıyla,

$$x_{n+1} = Ax_n + B(-Fx_n) + Gw_n$$

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n + Gw_n$$

biçiminde olur. Burada,

$$F = (Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1} (\beta B' P_1 A + W')$$

olmak üzere

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - (W + \beta A' P_1 B)(Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1} (\beta B' P_1 A + W')$$

olduğu daha önce ifade edilmişti. Burada  $Q_1$ ,  $R_1$  ve  $W$  matrisleri de bilinmeyen parametreler içerdiğinden bunların da tahmin edilmesi gerekir. Bu nedenle,

$$x_{n+1} = (A - BF)x_n + Gw_n$$

olmak üzere  $A_0 = (A - BF)$  biçiminde alınarak daha önceki kısımda anlatılan işlemler bu durum denklemini göz önüne alınarak yapılır. Maksimize edilecek fonksiyon burada aynıdır. Sistem geçiş matrisinde  $A$  yerine  $A_0$ 'ın alınmasıyla Kalman Filtresinde değişimler olacaktır.

$$(P_1)_{n+1} = R_1 + \beta A'(P_1)_n A - (W + \beta A'(P_1)_n B)(Q_1 + \beta B'(P_1)_n B)^{-1} (\beta B'(P_1)_n A + W')$$

$$F_{n+1} = (Q_1 + \beta B'(P_1)_{n+1} B)^{-1} (\beta B'(P_1)_{n+1} A + W')$$

$$\hat{x}_{n+1} = (A - BF_{n+1})\hat{x}_n + K_n[y_n - H\hat{x}_n]$$

$$K_n = (A - BF_n)P_n H'(HP_n H' + R)^{-1}$$

$$P_{n+1} = ((A - BF_n) - K_n H)P_n((A - BF_n)' - H' K_n') + GQG'$$

$A_0 = (A - BF)$  olmak üzere  $A_0$  ın  $\theta$  parametre vektörüne göre türevi;

$$\frac{\partial A_0}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \theta} F - B \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

ve  $F$ ' nin türevi;

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta} = & -(Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 B + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} B + \beta B' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) F \\ & + (Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1} \left( \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta B' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada  $\frac{\partial P_1}{\partial \theta}$  türevi,

$$P_1 = R_1 + \beta A' P_1 A - \underbrace{(W + \beta A' P_1 B)(Q_1 + \beta B' P_1 B)^{-1}}_{F'} (\beta B' P_1 A + W')$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial \theta} = & \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 A + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta A' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ & - \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} P_1 B + \beta A' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} B + \beta A' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) F \\ & + F' \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 B + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} B + \beta B' P_1 \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) F \\ & - F' \left( \beta \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A + \beta B' \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A + \beta B' P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial W'}{\partial \theta} \right) \\ = & \beta A'_0 \frac{\partial P_1}{\partial \theta} A_0 + \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial A'}{\partial \theta} A_0 - \beta F' \frac{\partial B'}{\partial \theta} P_1 A_0 \\ & + \beta (A' - F' B') P_1 \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial W}{\partial \theta} F - F' \frac{\partial W'}{\partial \theta} + F' \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} F\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Anderson *et al.* 1995).

Görüldüğü gibi bu tahminlerin elde edilebilmesi için verilen tüm türevlerin hesaplanması gerekir. Bu da oldukça karmaşık ve çok işlem gerektiren bir yöntemdir.

## 7.UYGULANAN KONTROL BİLİNDİĞİNDE DURUM-UZAY MODELLERİNİN EKONOMİK PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde uygulanan kontrol bilindiğinde bu kullanılarak kayıp fonksiyonlarındaki parametrelerin nasıl tahmin edilebileceğine ilişkin bir yöntem verilmiş ve bu yöntemin ekonomi literatürüne katkısından bahsedilmiştir.

Uygulama çalışmaları kısmında, bahsedilen bu yöntemin nasıl çalıştığını sınamak amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmış ve sonuçların tutarlı olduğu görüldükten sonra gerçek veri seti kullanarak son uygulama çalışması tekrarlanmıştır.

Ekonomi alanında, optimal para politikalarının Merkez Bankaları tarafından nasıl uygulandığı ve bu süreçte karşılaşılan problemlerin kontrol teorisi yardımıyla çözümlenmesi ekonomi literatüründe gün geçtikçe daha fazla önem kazanan konular arasında yer almaktadır.

Uygulanan kontrol bilinirken parametreleri bilinmeyen kayıp fonksiyonunu ve ekonomi dinamiklerinin getirdiği kısıtları kullanarak modeli durum-uzay modeli haline getirmek ve Kalman Filtresi yardımıyla bilinmeyen parametreleri tahmin etmek buradaki esas amaçtır. Ekonomi dinamiklerinin getirdiği kısıtlar çoğunlukla enflasyon ve üretim açığını gösteren denklemlerdir. Burada, uygulanan kontrol bilindiğinde kullanılarak, daha önceki bölümde bahsedilen  $Q_1, R_1$  ve  $W$  matrislerinde bulunan bilinmeyen parametreler tahmin edilecek ve uygulanan kontrol mekanizması belirlenmeye çalışılacaktır. Bununla birlikte modelde bulunan sistem parametreleri de eşanlı olarak tahmin edilebilecektir.

Kayıp fonksiyonunun parametrelerini diğer parametrelerle birlikte tahmin eden çalışmalardan bazıları Salemi (1995), Favero ve Rovelli (2003) ve Özlale (2003)'dir. Favero ve Rovelli (2003) çalışmalarında GMM (Generalized Method of Moments) tekniğini kullanırken diğer çalışmalar problemi durum-uzay modeli çerçevesinde ele alıp Kalman Filtresi ya da EM algoritması kullanarak çözmüşlerdir. Kayıp fonksiyonunun parametrelerini tahmin eden daha önceki bu çalışmalar merkez bankalarının zaman içinde değişebilen tercihlerini modellemede yetersiz kalmaktadır.

Bu çalışmalarda, ekonominin değişen dinamiklerine karşı merkez bankalarının aynı tercihleri koruduğu varsayımı yapılmıştır. Oysa merkez bankaları, enflasyonun yüksek ya da hedefler doğrultusunda seyrettiği farklı durumlarda aynı tercihlerle para politikasını yürütmeyebilir ya da izlenen para politikasında yapılacak bir değişiklik merkez bankası için varsayılan kayıp fonksiyonundaki tercih parametrelerinin alacağı değerleri önemli ölçüde değiştirebilir. Bu nedenle ekonomi alanında yapılan ikinci uygulama çalışmasın da merkez bankaları için zaman değişkenli kayıp fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun merkez bankalarının tercihlerini yansıtan parametreleri modelde yer alan diğer parametrelerle aynı anda tahmin edilmiştir.

Ekonomi alanında parametre tahminleri literatürde genellikle en çok olabilirlik yöntemiyle yapılmaktadır (Anderson *et al.* 1995). Bu çalışmada uygulanan kontrolün bilindiği durumda parametre tahminleri hem İlerletilmiş Kalman Filtresi hem de en çok olabilirlik yöntemi ile yapılmış ve simülasyon çalışması yapılarak her iki yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

### **7.1 Uygulanan Kontrol Bilindiğinde Durum-Uzay Modellerinin Ekonomik Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Yöntemi İle Tahmini**

Durum eşitliği,

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + Gw_n \quad (7.1)$$

olmak üzere, optimal kontrolün  $u_n = -F_n x_n$  olarak elde edildiği söylenmişti. Optimal kontrol değeri ile uygulanan (gerçek) kontrol değeri arasında bir fark olacağından,

$$u_n^{optimal} - u_n^{uygulanan} = e_n$$

olarak alınmasıyla

$$x_{n+1} = Ax_n + Be_n + Gw_n \quad (7.2)$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre durum eşitliği,

$$x_{n+1} = Ax_n + B (u_n^{optimal} - u_n^{uygulanan}) + Gw_n$$

olur.  $u_n^{optimal} = -F_n x_n$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = (A - BF_n)x_n - Bu_n^{uygulanan} + Gw_n$$

olarak yazılır. Burada,

$$F_n = (Q_1 + \beta B'(P_1)_{n+1} B)^{-1} (\beta B'(P_1)_{n+1} A + W') \quad (7.3)$$

ve

$$(P_1)_{n+1} = R_1 + \beta A'(P_1)_n A - (W + \beta A'(P_1)_n B) (Q_1 + \beta B'(P_1)_n B)^{-1} (\beta B'(P_1)_n A + W') \quad (7.4)$$

olduğu daha önce ifade edilmişti. Amaç, uygulanan kontrol yani  $u_n$ ' ler biliniyorken bilinmeyen parametreleri tahmin etmek olduğundan durum vektörü,

$$x_{n+1} = (A - BF_n)x_n - Bu_n^{uygulanan} + Gw_n \quad (7.5)$$

olmak üzere  $A_0 = (A - BF_n)$  olarak alınıp olabirlik fonksiyonu oluşturulmalı ve  $A_0$  matrisinde bulunan bilinmeyen parametrelere göre maksimize edilerek parametre tahminlerine ulaşılmalıdır. Sistem geçiş matrisinde  $A$  yerine  $(A - BF_n)$ ' in alınması ve uygulanan kontrolle optimal kontrol arasındaki farkın işleme katılmasıyla Kalman Filtresinde değişimler olur. Buna göre, her bir adımda  $F_n$  ve  $(P_1)_n$  matrislerinin hesaplanması gerekir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
& \hat{x}_0, P_0, (P_1)_0 \\
& F_{n-1} = (Q_1 + \beta B'(P_1)_{n-1} B)^{-1} (\beta B'(P_1)_{n-1} A + W') \\
& \hat{x}_{n/n-1} = (A - BF_{n-1}) \hat{x}_{n-1|n-1} - B u_{n-1}^{\text{uygulanan}} \\
& \hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n/n-1} + K_n [y_n - H \hat{x}_{n/n-1}] \\
& (P_1)_n = R_1 + \beta A'(P_1)_{n-1} A - (W + \beta A'(P_1)_{n-1} B) (Q_1 + \beta B'(P_1)_{n-1} B)^{-1} (\beta B'(P_1)_{n-1} A + W') \quad (7.6) \\
& P_{n|n-1} = (A - BF_{n-1}) P_{n-1|n-1} (A - BF_{n-1})' + G Q G' \\
& P_{n|n} = (I - K_n H) P_{n|n-1} \\
& K_n = (A - BF_{n|n-1}) P_{n|n-1} H' (H P_{n|n-1} H' + R)^{-1}
\end{aligned}$$

algoritması işletilerek,

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^N \ln[\det(H P_{n|n-1} H' + R)] + iz (H P_{n|n-1} H' + R)^{-1} (y_n - H \hat{x}_{n|n-1}) (y_n - H \hat{x}_{n|n-1})' \quad (7.7)$$

negatif olabilirlik fonksiyonu hesaplanıp, bu fonksiyonu minimize eden parametre değerleri hesaplanarak sonuca ulaşılır (Anderson and Moore 1979).

## 7.2. Uygulanan Kontrol Bilindiğinde Durum-Uzay Modellerinin Ekonomik Parametrelerinin İlerletilmiş Kalman Filtresi İle Tahmini

İlerletilmiş Kalman Filtresi, bilinmeyen ve zamanla değişen sistem parametresi bulunduran lineer durum-uzay modellerinde sistem belirleme için elverişli bir algoritmadır. Lineer olmayan durum-uzay modeli,

$$x_{n+1} = A(\theta)x_n + G(\theta)u_n + w_n \quad (7.8)$$

$$y_n = H(\theta)x_n + e_n \quad (7.9)$$

eşitlikleri ile verilsin (Ljung, Söderström 1985). Burada,  $F$ ,  $G$  ve  $H$  boyutları uygun şekilde seçilmiş vektör değerli fonksiyonları,  $w_n$  ve  $e_n$  sırasıyla  $R_1(\theta)$  ve  $R_2(\theta)$  kovaryans matrisli beyaz gürültü süreçlerini göstermektedir.

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix}, \bar{K}_n = \begin{pmatrix} K_n \\ L_n \end{pmatrix}, \bar{P}_n = \begin{pmatrix} P_1(n) & P_2(n) \\ P_2^T(n) & P_3(n) \end{pmatrix}$$

olarak alındığında  $\bar{K}$  ve  $\bar{P}$  sırasıyla Kalman Kazancı ve İlerletilmiş durumun kovaryans matrisidir. İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması (Ljung and Söderström 1985),

$$\hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n + G_n u_n + K_n (y_n - H_n \hat{x}_n) \quad (7.10)$$

$$\hat{x}_0 = 0$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + L_n (y_n - H_{n-1} \hat{x}_n) \quad (7.11)$$

$$\hat{\theta}_0 = \theta_0$$

$$K_n = (A_n P_1(n) H_n^T + M_n P_1^T(n) H_n^T + A_n P_2(n) D_n^T + M_n P_2(n) D_n^T + R_{12}) S_n^{-1} \quad (7.12)$$

$$S_n = H_n P_1(n) H_n^T + H_n P_2(n) D_n^T + D_n P_2^T(n) H_n^T + D_n P_3(n) D_n^T + R_2 \quad (7.13)$$

$$L(n) = (P_2^T(n) H_{n-1}^T + P_3(n) D_n^T) S_n^{-1} \quad (7.14)$$

$$P_1(n+1) = A_n P_1(n) A_n^T + A_n P_2(n) M_n^T + M_n P_2^T(n) A_n^T + M_n P_3(n) M_n^T - K_n S_n K_n^T + R_1 \quad (7.15)$$

$$P_1(0) = \Pi_0(\theta_0)$$

$$P_2(n+1) = A_n P_2(n) + M_n P_3(n) - K_n S_n L_n^T \quad (7.16)$$

$$P_2(0) = 0$$

$$P_3(n+1) = P_3(n) - L_n S_n L_n^T \quad (7.17)$$

$$P_3(0) = P_0$$

eşitlikleri ile verilir. Burada,

$$A_n = A(\hat{\theta}_n)$$

$$G_n = G(\hat{\theta}_n) \quad (7.18)$$

$$H_n = H(\hat{\theta}_n)$$

$$M_n = M(\hat{\theta}_n, \hat{x}_n, u_n)$$

$$M(\hat{\theta}, x, u) = \frac{\partial}{\partial \theta} [A(\theta)x + G(\theta)u] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (7.19)$$

$$D_n = D(\hat{\theta}_{n-1}, \hat{x}_n)$$

$$D(\hat{\theta}, x) = \frac{\partial}{\partial \theta} [H(\theta)x] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (7.20)$$

dir. Uygulanan kontrol bilindiğinde ve optimal kontrolle uygulanan kontrol arasındaki fark göz önüne alındığında, (7.10) eşitliği

$$\hat{x}_{n+1} = (A - BF_n)\hat{x}_n - Bu_{uygulanan} + G_n u_n + K_n (y_n - H_n \hat{x}_n)$$

biçiminde alınmalıdır. Yine, her bir adımda  $F_n$  ve  $(P_1)_n$  matrislerinin hesaplanması gerekir.

### 7.3 Parametrelerin Üzerinde Kısıt Olması Durumunda Tahmin

Durum-uzay modelinde ve maliyet fonksiyonunda bulunan parametreler üzerinde,

$$D\theta_n = d \quad (7.21)$$

biçiminde bir ilişki olduğu göz önüne alınsın. Burada  $D$  sabit matris,  $d$  bilinen vektördür ve kısıtların sayısı durumların sayısından küçük ya da eşittir. Bu durumda yukarıda verilen tahminlerde bu kısıtların da hesaba katılması gerekir.

#### 7.3.1 Kısıtlı durumda en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin

Bölüm 7.1 de verilenlere ek olarak, (7.21) kısıtı göz önüne alınsın.

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^N \ln[\det(HP_{n|n-1}H' + R)] + iz(HP_{n|n-1}H' + R)^{-1}(y_n - H\hat{x}_{n|n-1})(y_n - H\hat{x}_{n|n-1})'$$

fonksiyonunun minimizasyonu

$$D\theta_n = d$$

kısıtı göz önüne alınarak yapılmalıdır. Burada bilinen kısıtlı optimizasyon teknikleri kullanılarak sonuca ulaşılır.

### 7.3.2. Kısıtlı durumda ilerletilmiş kalman filtresi ile tahmin

7.2 ile verilen İlerletilmiş Kalman Filtresinde,

$$D\theta_n = d$$

kısıtı göz önüne alınarak Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanarak sonuca ulaşılır. Kısıtlı Kalman Filtresi, kısıtsız durum tahmini  $\hat{\theta}_n$  nın kısıt yüzeyine dik izdüşümü ile elde edilir, yani,

$$D\tilde{\theta} = d \text{ olacak şekilde } \min(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n)'T(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n) \quad (7.22)$$

optimizasyon problemi çözülür. Burada,  $T$  simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisidir ve problemin çözümü

$$\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - T^{-1}D'(DT^{-1}D')^{-1}(D\hat{\theta}_n - d) \quad (7.23)$$

ile verilir. Buna göre Bölüm (7.2) de verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritmasında (7.11) eşitliğinin altına her bir adımda (7.23) eşitliği getirilerek işlemler yapılmalıdır.

,

## 8. UYGULAMALAR

### 8.1 Tümör Hücrelerinin Kılcal Damarlardan Geçirgenliğinin Online Tahmini

Kompartman Analizi bir biyolojik sistemin homojen kompartmanlara bölüdüğü ve bu kompartmanlar arasında materyal alışverişi olduğu varsayımıyla birlikte kullanılan biyo matematiksel modelleme yöntemlerinden birisidir. Kompartman Modelleri vücuttaki ilaç hareketiyle (farmokinetik) ilgili kullanıldığında materyal konsantrasyon değişimi kendi farmokinetik parametresi ile zamana bağlıdır (Botsman *et. al.* 1997). Eğer parametreler bilinirse uygun farmokinetik denklemlerin uygulanmasıyla kompartmanlardaki konsantrasyon düzeyi tahmin edilebilir. Böylece parametre tahmini problemi ortaya çıkar. Parametre belirleme problemi lineer olmayan tahmin problemidir. Bu tahmin problemi, durum tahmin problemi ile birlikte çözüldüğünde lineer model lineer olmayan modele dönüşecektir (Greval and Andrews 1984). Daha öncede ifade edildiği gibi, İlerletilmiş Kalman Filtresi lineer olmayan sistemlerde durum tahmini için kullanılan en yaygın tahmin yöntemlerinden biridir.

Özbek and Efe (2004) çalışmalarında, bir kişiye verilen ilaç hareketiyle ilgili oluşturulan kompartman modeline uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresini uygulamışlardır. Önerilen yöntemi simülasyonla üretilen verilere uygulamışlar ve kompartmanlar arasındaki geçiş oranı parametrelerini zamanla değişen ve sabit olmak üzere iki durumda da tahmin etmişlerdir.

Cuccia and *et al.* (2003) çalışmalarında, fare tümörü modellerinde ICG (indocyanine green) ve Methylene blue dinamiklerini incelemişlerdir.

ICG, normal dokuya kıyasla tümörlü dokuda daha uzun süre kalabilen ışığa-duyarlı bir ilaçtır.

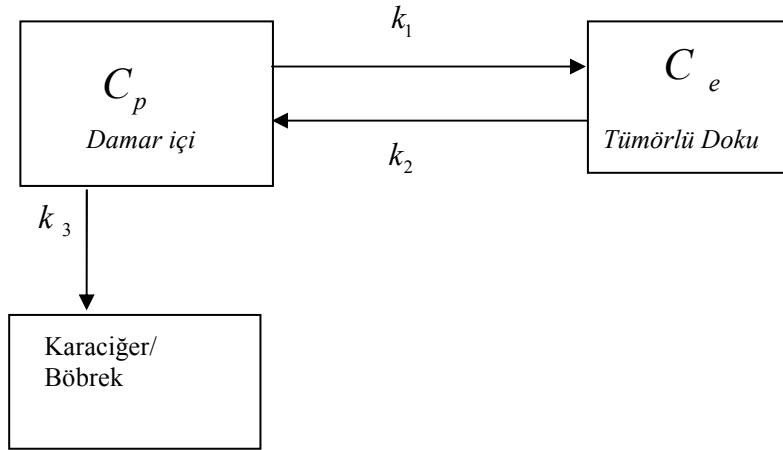
Bu çalışmada ICG kompartman modelleri için uyarlı İlerletilmiş Kalman Filtresi türetilerek Cuccia and *et al.* (2003)'de deneysel olarak elde edilen gerçek veriler kullanılarak, kompartmanların tümör hücrelerinin komşu damarlara yayılmasında ve

damar içinden dokulara geçişinin ölçümünde kullanılan ICG yoğunluklarının tahmini ve kılcaldamarlar arasındaki geçirgenlik parametresi tahmini yapılmıştır.

### 8.1.1 ICG kompartman modeli

Kanser oluşumu son dönemlerde sıklığı artan patolojilerin başında gelir. Eğer herhangi bir dokuda tümör varsa verilen ICG damar içi(plazma)nden ektravasküler alana (tümörlü doku) geçer. Tümörlü dokudan da damar içine tekrar dönüşler söz konusudur. Bu fizyolojik yapıya uygun olarak iki kompartmanlı model düşünülebilir.

Bu kompartman modelinde,  $C_p$  ile damar içindeki ICG yoğunluğu,  $C_e$  ile tümörlü dokudaki ICG yoğunluğu gösterilmiştir.  $k_1$  oranı damardan tümörlü dokuya geçen ICG oranı,  $k_2$  oranı tümörlü dokudan damar içine geçen ICG oranı ve  $k_3$ , plazmadan karaciğer ve böbreğe geçen ICG oranını ifade etmektedir. Bahsedilen  $k_3$  oranı, oldukça küçük olduğu için matematiksel model oluşturulurken bu oran göz ardı edilmiştir.



Şekil 8.1 Kompartman Modeli

Tümörlü dokudaki ICG yoğunluğu, damardaki ICG yoğunlunun  $k_1$  oranı kadar artacak (buradan geçişler söz konusu olduğu için) ve kendi yoğunluğunun  $k_2$  oranı kadar azalacaktır. Buna göre tümörlü dokudaki ICG yoğunluğunun birim zamandaki değişimi,

$$\frac{dC_e(t)}{dt} = k_1 C_p(t) - k_2 C_e(t) \quad (8.1)$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilecektir.

Yukarıda da bahsedildiği gibi  $k_3$  oranı göz ardı edilebilir ve böylece birim zamanda plazmadaki ICG yoğunluğu değişimi,

$$\frac{dC_p(t)}{dt} = -k_1 C_p(t) + k_2 C_e(t) \quad (8.2)$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilebilir. Çünkü birim zamanda sadece plazmada bulunan ICG yoğunluğunun  $k_1$  oranı tümörlü dokuya geçmiş olacaktır.

### 8.1.2 Geçirgenlik parametresi tahmini için ilerletilmiş kalman filtresi

Bölüm 2.2 ile verilen lineer olmayan durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi göz önüne alınsın.

$x_n = [x_{1,n} \ x_{2,n}]$ ,  $n$  zamanında tahmin edilecek durumları içeren durum vektörü olsun. Burada,  $x_{1,n} = C_p$  ve  $x_{2,n} = C_e$  olacaktır. Buna göre durum-uzay modeli (Ek 1),

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 \Delta_t & k_2 \Delta_t \\ k_1 \Delta_t & 1 - k_2 \Delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

$$y_n = [0 \ 1] x_n$$

şeklinde yazılır. Burada,  $k_1$  ve  $k_2$  geçirgenlik parametreleridir.  $\Phi_n(\theta)$  ile ifade edilen sistem matrisi, bilinmeyen  $\theta = [k_1 \ k_2]'$  parametresinin bir fonksiyonu olmuş olur. Burada amaç bilinmeyen  $\theta$  parametresini belirlemektir. Bunu belirleyebilmek için  $\theta$

parametresi rasgele yürüyüş süreci olarak düşünülüp Bölüm 2.2. ile verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanarak parametreler tahmin edilebilir.

### 8.1.3 Deneysel sonuçlar ve tartışma

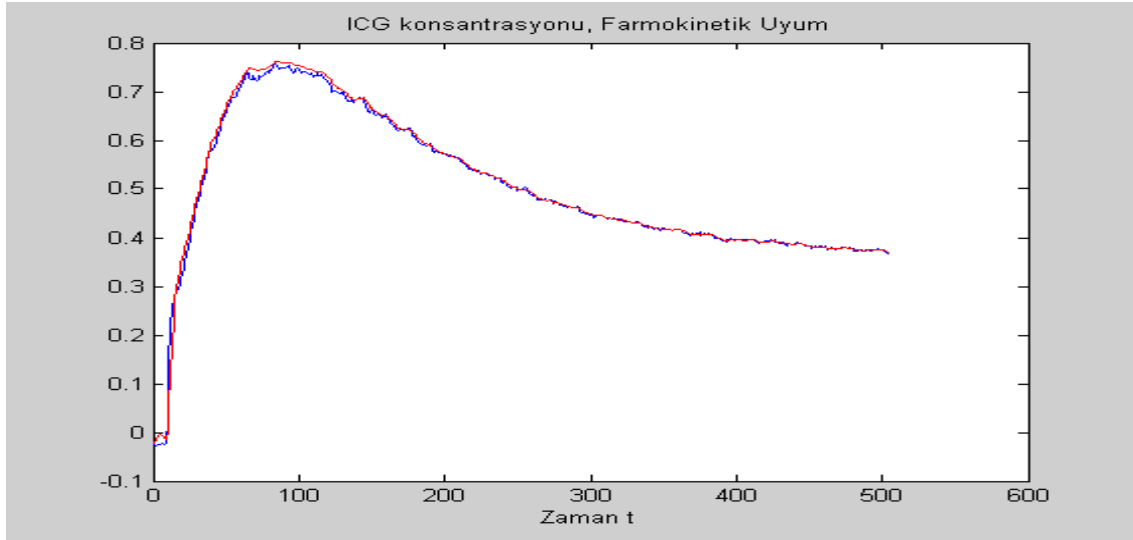
Yapılan çalışmada, matematiksel modelde plazmadaki başlangıç ICG yoğunluğu  $C_p(0) = 5$  ve başlangıç anında ektravasküler alandaki ICG yoğunluğu  $C_e(0) = 0$  olarak alınmıştır. İlerletilmiş Kalman Filtresi hem durum tahmini hem de parametre tahmini için kullanılacağından parametreler için de başlangıç değerlerinin verilmesi gerekmektedir. İyi oluşturulmuş bir modelde, geçirgenlik parametreleri  $k_1, k_2$  için başlangıç değerlerinin seçimi çok büyük önem taşıyorsa da yakınsamayı hızlandırır. Durum vektörü  $x = [x_1 \ x_2 \ k_1 \ k_2]'$  olacaktır.  $x_1$ , plazmadaki ICG yoğunluğu,  $x_2$  tümör hücreindeki ICG yoğunluğu,  $k_1$  ve  $k_2$  bahsedilen geçirgenlik parametreleri olacaktır. Kontrol olarak ifade edilen sistem girdisi  $u_n = 0$  olarak varsayılmıştır. Geçirgenlik parametresi sabit olacağından, unutma faktörü  $\alpha = 1$  olarak alınıp Standart İlerletilmiş Kalman Filtresine göre tahminler elde edilmiştir. Bununla birlikte,  $\alpha > 1$  alınması ile Ozbek and Efe (2004) deki gibi zamanla değişen tahminler elde edilebilir. Durum ve parametreler için başlangıç değerleri  $x(0) = [5 \ 0 \ 0.2 \ 0.1]'$  olarak alınmıştır. Sistem gürültüsü için standart sapma 0.025 ve ölçüm gürültüsü için standart sapma 0.075 olarak alınmıştır.  $k_1, k_2$  parametrelerinin standart sapması innovasyon kovaryans matrisi  $S$  nin içinde yer alsın ve 0.005 ile 0.001 olarak alsın. Anlatılanlara göre Matlab ile yazılan program Ek 2 ile verilmiştir.

Modele göre geçirgenlik parametreleri hakkında herhangi bir bilgi yoktur ve bunların tahminleri üretilir. Ektravasküler alandaki ICG yoğunluğunun deneyinde, yoğunluklar 500 saniye izlenmiştir.

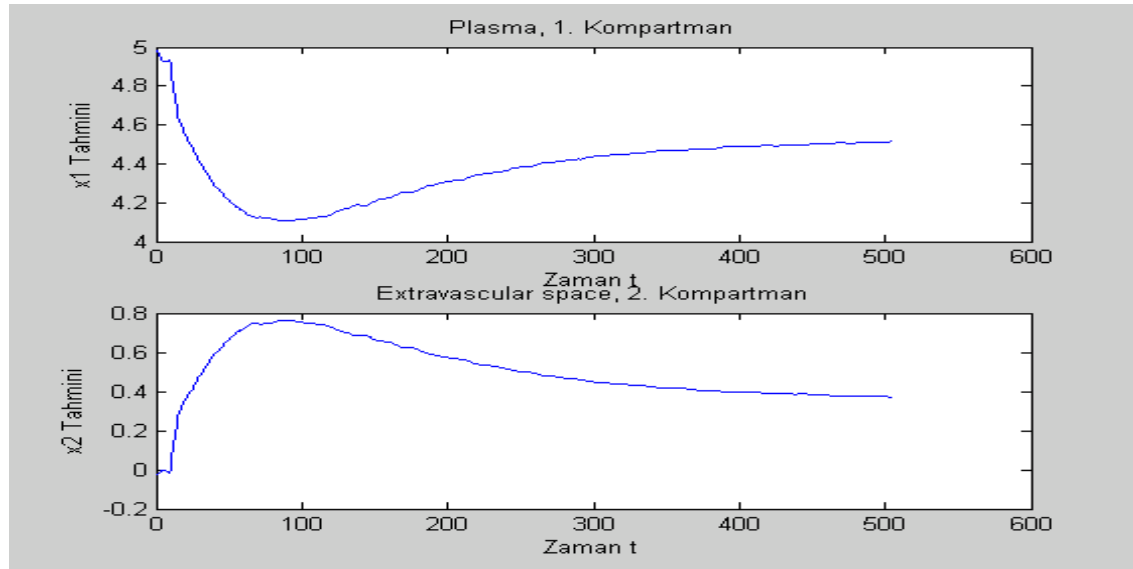
Şekil 8.2'de gözlenen ICG yoğunlukları (mavi) ve bunların Kalman Filtresi tahminleri (kırmızı) verilmiştir. Buradan oluşturulan matematiksel modelin gözlemlere iyi uyum sağladığı kolaylıkla görülür.

Şekil 8.3'de kompartmanlardaki ICG yoğunlukları (durum tahminlerini) görülmektedir.

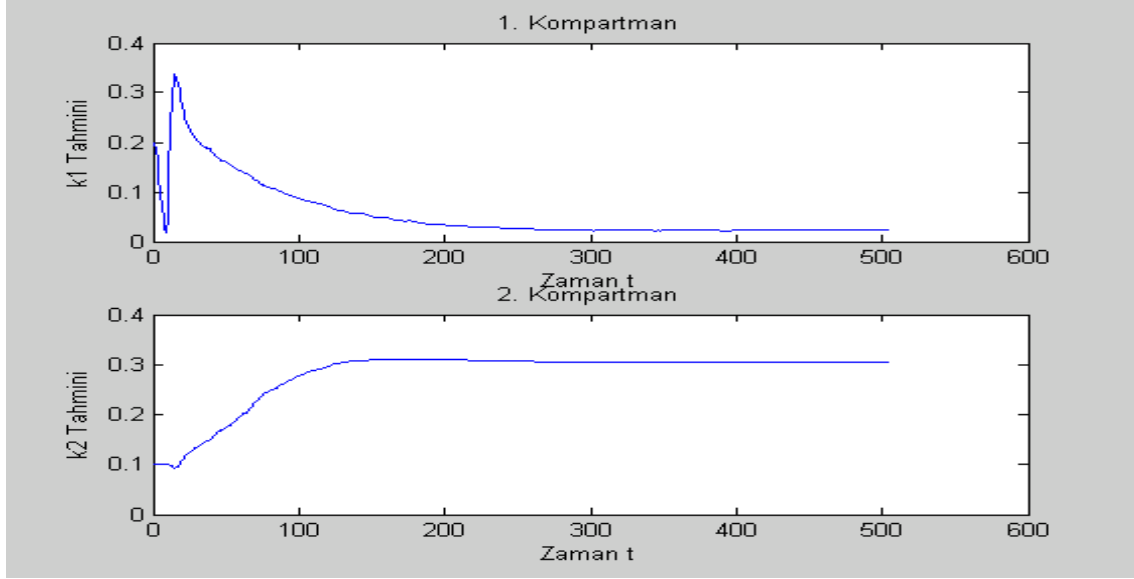
Şekil-8.4'de de asıl amaç olan tümör hücrelerinin kılcal damarlardan geçirgenlik parametreleri tahminlerinin grafikleri verilmektedir. Dikkat edilecek olursa geçirgenlik parametreleri durağan bir duruma yakınsar ve bu değer etrafında çok az değişkenlik gösterir. Tümör hücreleri yaşayan hücrelerdir ve geçirgenliği etkileyen gerçek faktörleri saklarlar.



Şekil 8.2 Gözlenen(Mavi) ve Kalman Filtresi ile Tahmin Edilen(Kırmızı) ICG Yoğunlukları



Şekil 8.3 Kompartmanlardaki ICG Yoğunluklarının Tahminleri



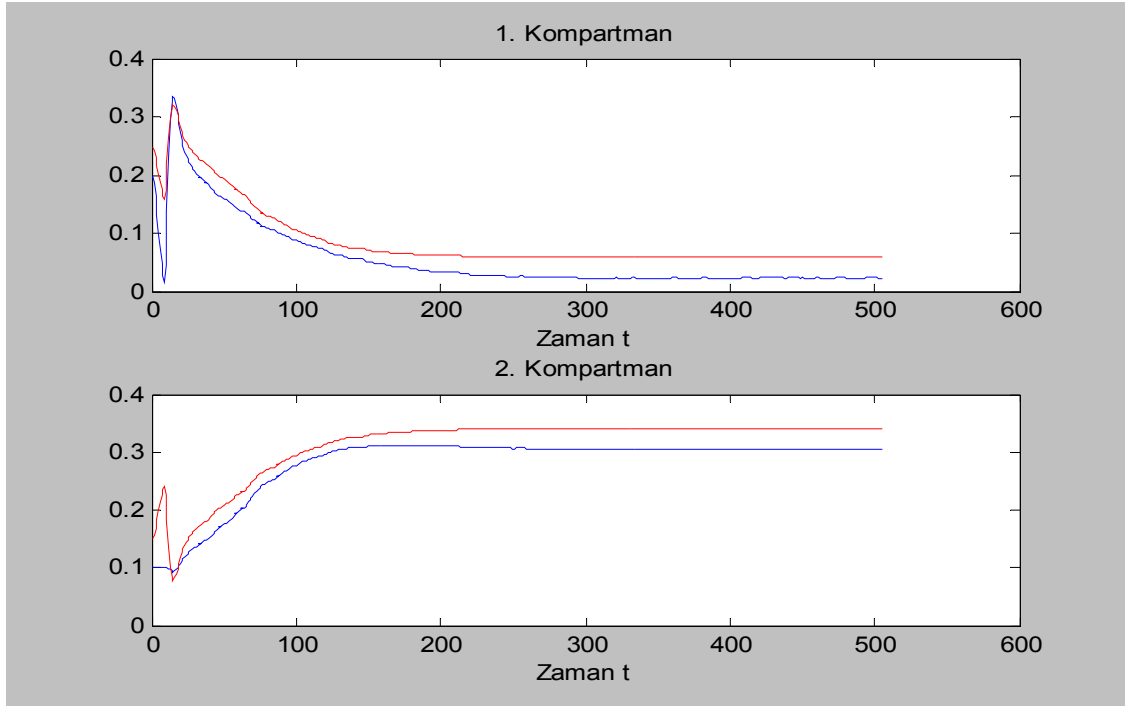
Şekil 8.4 Geçirgenlik Parametrelerinin Tahminleri

ICG yoğunlukları ve geçirgenlik parametrelerinin tahminleri Cuccia *et al.* (2003)'de uygulanan lineer olmayan en küçük kareler Levenberg-Marquart Algoritması ile karşılaştırıldığında önerilen İlerletilmiş Kalman Filtresi yönteminin avantajları,

- İlerletilmiş Kalman tahminleri karışık denklemlere gerek kalmadan daha basit bir yaklaşım sunar.
- ICG yoğunlukları ve geçirgenlik parametrelerinin her ikisinde olan bütün değişiklikler tüm gözlem boyunca hassasiyetle belirlenebilir.
- Sunulan model, durum ve parametrelerin başlangıç değerlerinden bağımsız olarak durum ve parametrelerin her ikisindeki değişim oranını bulur.
- Kompartmanların herhangi birinin ölçümleri olmasa bile her iki kompartmanında çıktıları tahmin edilebilir.
- Eğer plazmadaki hücre sayıları bilinirse uygun oluşturulan İlerletilmiş Kalman Filtresi ile extracellular hücrelerinin sayısı belirlenebilir. Bu da diğer kompartmandan transfer edilen hücrelerin sayısının online olarak tahmin edilebilmesi anlamına gelir. Bu da tümör patolojisinin süresinin tahmininde oldukça önemlidir.

### 8.1.5 Kısıtlı durumda geçirgenlik parametrelerinin tahmini

Bu kısımda, fare tümörleri kompartmanları arasında ICG transferini sağlayan kılcal damar geçirgenlikleri hakkında ekstra bir bilgi olması durumunda tahmin konusu ele alınacaktır.  $k_1$  ve  $k_2$  parametreleri arasında  $k_1 + k_2 = .4$  şeklinde bir ön bilgi olduğu varsayılınsın. Bu ön bilgi ışığı altında deneysel olarak elde edilmiş olan veriler kullanılarak parametre değerleri zaman değişkenli olarak hesaplınsın. Kısıt işin içine katıldığı için her bir t anında geçirgenlik parametrelerinin toplamı .4 olacak şekilde sonuçlar elde edilecektir. Buna göre elde edilen tahminlerin grafikleri aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 8.5 Kısıtlı Durumda Geçirgenlik Parametreleri Tahminleri (kırmızı-kısıtlı tahmin, mavi-kısıtsız tahmin)

### 8.1.6 Sonuç

Bu uygulamada, fare tümörleri kompartmanları arasındaki ICG transferi ve eliminasyonu için iki-kompartmanlı farmokinetik model tanıtıldı. Deneysel olarak elde

edilen gözlemler için analizi yapıldı. Önerilen yöntemle hem kompartmanlardaki yoğunluk hem de kompartmanlar arasındaki transferi sağlayan kılcal damar geçirgenlikleri elde edildi. Kompleks lineer olmayan diğer algoritmalarla karşılaştırıldığında İlerletilmiş Kalman Filtresi oldukça uygun sonuçlar ve ekstra bilgi sağlamaktadır ve kanserli doku örneklerinde tümör hücrelerinin davranışını analiz etmede kullanılabilecek bir yöntemdir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar “Online Estimation of Capillary Permeability and Contrast Agent Concentration in Rat Tumors” çalışması adı altında Hacettepe Journal of Mathematics And Statistics dergisine gönderilmiştir.

## 8.2 Ekonomi Örneği 1

$c_n, i_n, a_n, y_n$ ;  $n$  zamanında, sırasıyla tüketim, yatırım, elde bulunan varlık ve dışsal gelir olmak üzere,

$$\begin{aligned} c_n + i_n &= r a_n + y_n \\ a_{n+1} &= a_n + i_n \\ y_{n+1} &= \rho_1 y_n + \rho_2 y_{n-1} \end{aligned} \tag{8.4}$$

kısıtlarını sağlayacak şekilde aşağıdaki kayıp fonksiyonunu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \left\{ (c_n - b)^2 + \gamma i_n^2 \right\} \tag{8.5}$$

minimize edecek parametre değerleri belirlenmeye çalışılsın (Ljungqvist and Sargent 2000). Hane halkı giderlerini minimize etmek üzere tasarlanan bu kontrol problemi için  $y_0, y_{-1}$  başlangıç koşullarıdır ve  $b > 0, \gamma > 0, r > 0, \beta \in (0, 1)$  ve  $\rho_1, \rho_2$  parametrelerdir. İlk olarak verilen probleme uygun olarak durum-uzay modeli elde edilmelidir.  $u_n = i_n = a_{n+1} - a_n$  olmak üzere 3 boyutlu  $x_n$  durum vektörü aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ y_{n+1} \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ y_n \\ y_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_n + w_n \quad (8.6)$$

Görüldüğü gibi durum vektöründe bilinmeyen parametreler mevcuttur.

Aynı şekilde yukarıda verilen kayıp fonksiyonuna ulaşabilmek için  $R_1, Q_1$  ve  $W$  matrisleri de aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır,

$$R_1 = \begin{bmatrix} r^2 & r & 0 & -br \\ r & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -br & -b & 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = 1 + \gamma, \quad W = [-r \quad -1 \quad 0 \quad b]' \quad (8.7)$$

Buna göre,

$$(c_n - b)^2 + \gamma i_n^2 = x_n' R_1 x_n + u_n' Q_1 u_n + 2x_n' W u_n \quad (8.8)$$

şeklinde yazılabilir (Ljungqvist *et al.* 2000). Burada,  $c_n = ra_n + y_n - i_n$  olarak alınmıştır. Dikkat edilirse  $R_1, Q_1$  ve  $W$  matrisleri de bilinmeyen parametreler içermektedir. Şimdi bu parametre tahminlerini yapmak için en çok olabilirlik yöntemi ve İlerletilmiş Kalman Filtresi yöntemi kullanılsın ve sonuçlar karşılaştırılsın. Bu simülasyon çalışmasında parametre değerleri  $(\rho_1, \rho_2, r, b, \gamma) = (1.2, -3, -0.0526, 30, 1)$  ve  $\beta = 1$  olarak alınıp modelden veri üretilmiş, bu parametrelerin bilinmediği varsayılarak tahminler yapılmış ve bu değerlerle karşılaştırılmıştır. Bu kısımda elde edilen sonuçlar Ek 3' te verilen programların çalıştırılması ile elde edilmiştir. Kullanılan gözlem vektörü,

$$z_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_n + v_n \quad (8.9)$$

ve  $\text{kov}(v_n) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$  dir.

### 8.2.1 En çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini

(8.6) ve (8.9) ile verilen durum-uzay modeli ve (8.7) ile verilen denklemler göz önüne alınsın. Bölüm 7.1 de verilen bilgiler ışığında Kalman Filtresi işletilip en çok olabilirlik yöntemiyle parametre tahminleri yapıldığında,

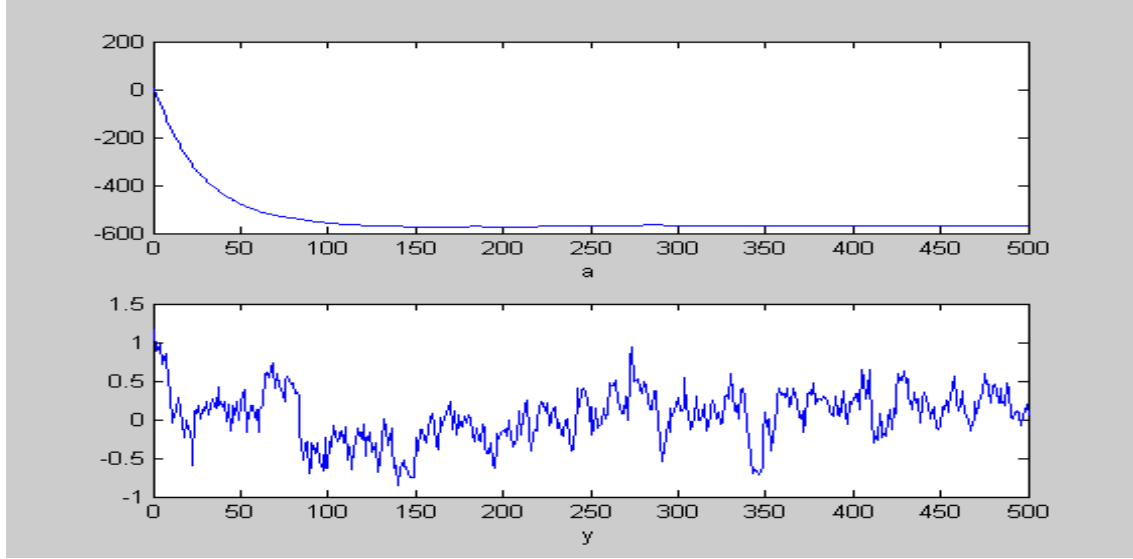
$\hat{\theta} = \rho_1 = 0.6789$	standarthata =0.0029
$\rho_2 = 0.2298$	0.0056
$r = -0.0060$	0.0008
$b = 3.8826$	0.0389
$\gamma = -0.8346$	0.0032

sonuçları elde edilmiştir. En çok olabilirlik yöntemiyle elde edilen bu tahminlerin simülasyonla üretilen değerlere çokta yakın sonuçlar verdiği söylenemez.

### 8.2.2 İlerletilmiş kalman filtresi ile parametre tahmini

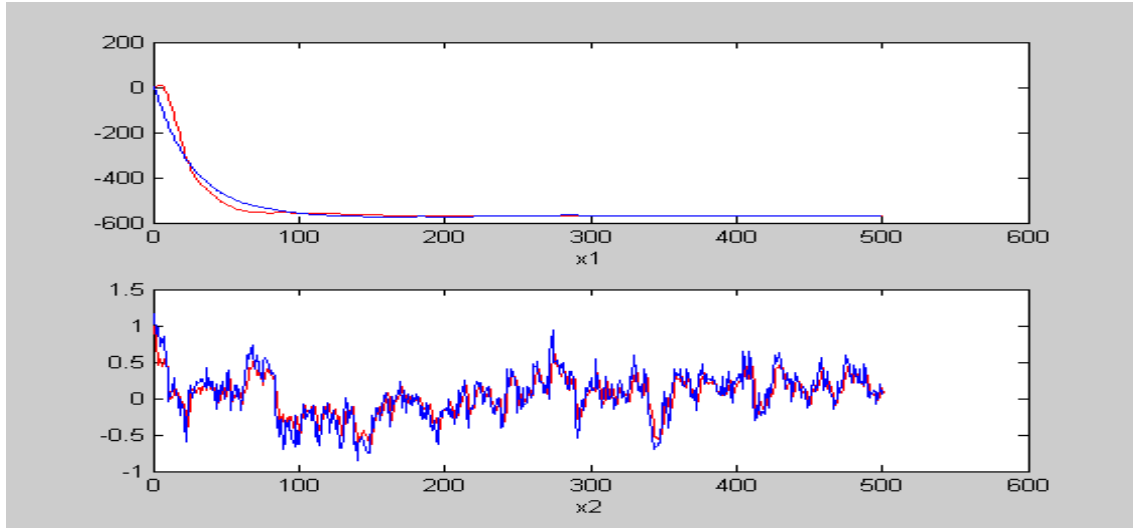
(8.6) ve (8.9) ile verilen durum-uzay modeli ve (8.8) ile verilen kayıp fonksiyonu göz önüne alınsın. Tahmin edilmek istenen parametreler,  $\theta = [\rho_1 \rho_2 r b \gamma]'$  vektörü ile gösterilsin. Bu modele 7.2 ile verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulansın.

(8.9) ile verilen gözlem vektörüne göre birinci ve ikinci durum değişkenleri gözlemlenmektedir. Yani  $a_n$  ve  $y_n$  ' ler gözlenmiştir. Buna göre, Şekil 8.6 ile üretilen gözlem değerlerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 8.6  $a_n$  ve  $y_n$  Gözlemleri

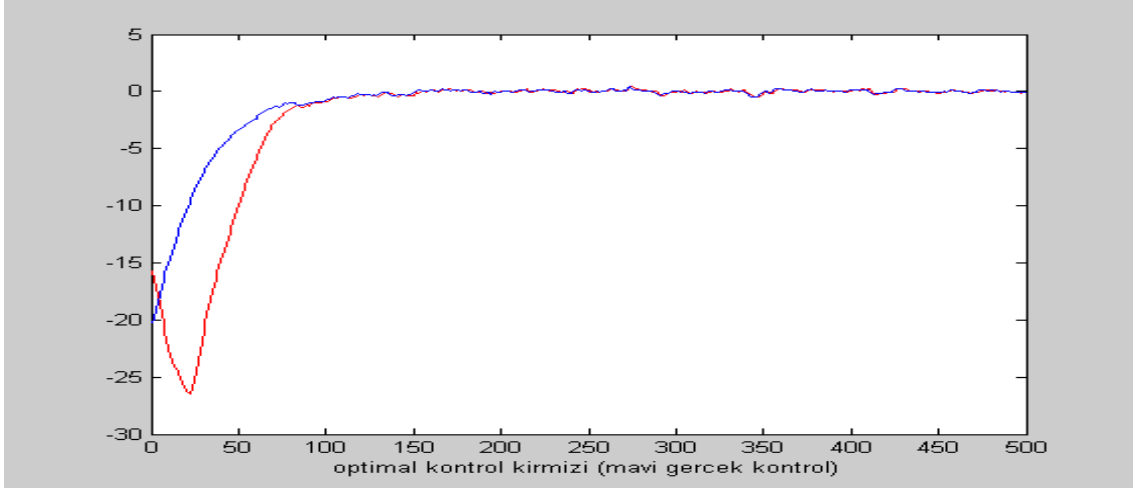
Şekil 8.7 ile gözlem değerleri ve bunların İlerletilmiş Kalman Filtresi ile tahminlerinin grafikleri verilmiştir. Burada mavi renkle verilenler simülasyonla üretilen gözlemler ve kırmızı ile verilenler de İlerletilmiş Kalman Filtresi ile tahminlerinin grafikleridir. Grafiklere bakıldığında gözlemlerle tahminlerin çok yakın çıktığı görülmektedir. Yani tahminlerin oldukça iyi olduğu söylenebilir.



Şekil 8.7 Gözlemlerin Tahmini(Mavi gerçek-Kırmızı Tahmin)

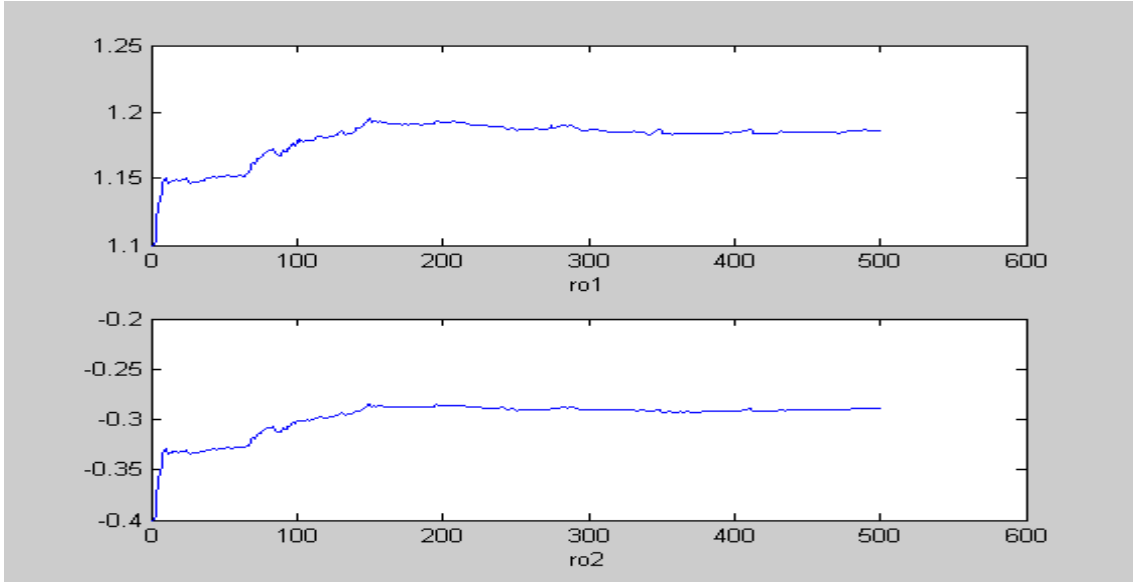
Şekil 8.8 ile simülasyonla üretilen kontrol değerleri ile tahmin edilen kontrol değerleri gösterilmektedir. Mavi ile simülasyonla üretilen kontrol değerleri, kırmızı ile tahmin

edilen kontrol değerleri gsterilmektedir. Sonuçların birbirine oldukęa yakın olduğu söylenebilir.



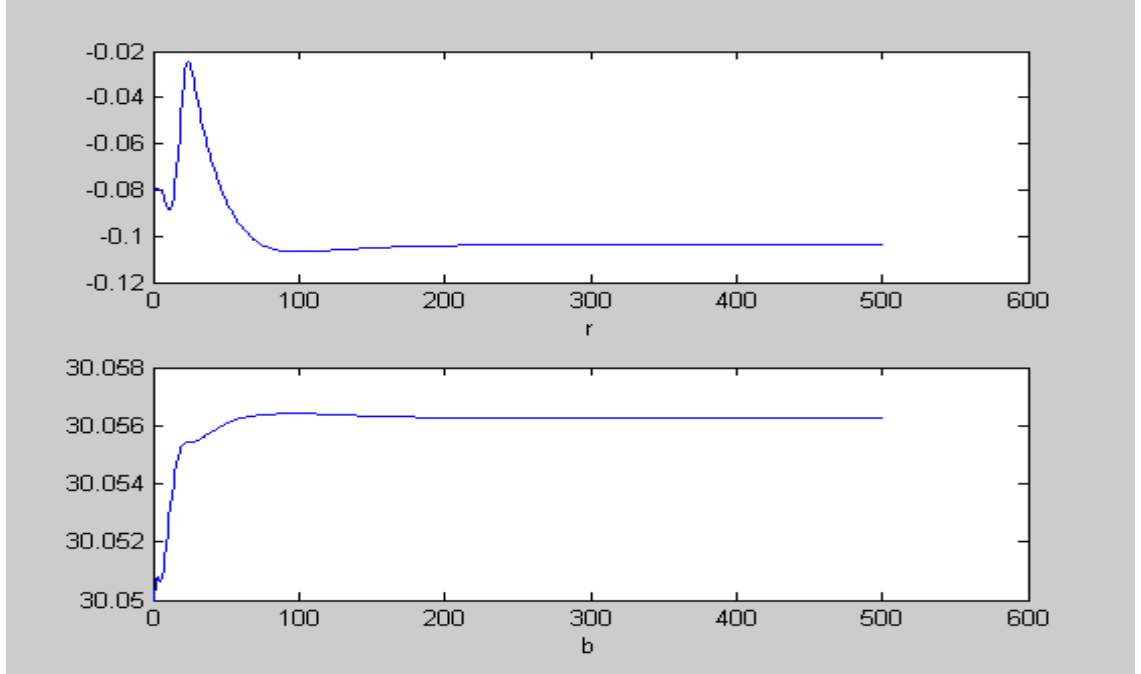
Şekil 8.8 Gerçek ve Optimal Kontrol

Şekil 8.9 ile  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  tahminlerinin grafikleri verilmiştir. Simülasyonla  $\rho_1 = 1.2$  ve  $\rho_2 = -0.3$  olarak üretilmiştir. Grafiklere bakıldığında tahminlerin simülasyonla üretilen bu değerlere oldukęa yakın olduğu görülmektedir.



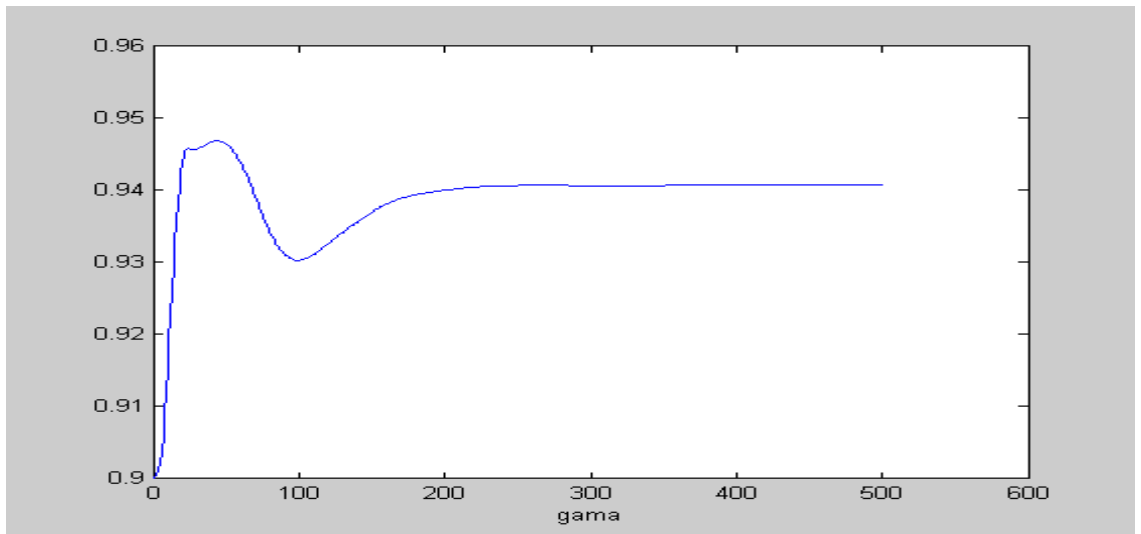
Şekil 8.9  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  Tahminleri

Şekil 8.10 ile  $r$  ile  $b$  tahminlerinin grafikleri verilmiştir. Simülasyonla,  $r = -.0526$  ve  $b = 30$  olarak üretilmiştir. Grafiklere bakıldığında  $r$  için tahminlerin,  $b$  için elde edilen kadar iyi olmadığı söylenebilir.



Şekil 8.10  $r$  ve  $b$  Tahminleri

Şekil 8.11 ile  $\gamma$  tahmininin grafiği verilmiştir. Simülasyonla bu değer  $\gamma = 1$  olarak üretilmiştir. Tahmin grafiği de bu değere oldukça yakın çıkmıştır.



Şekil 8.11  $\gamma$  Tahmini

### 8.2.3 Kısıtlı durum

Parametreler arasında,

$$\rho_1 + \rho_2 = .9$$

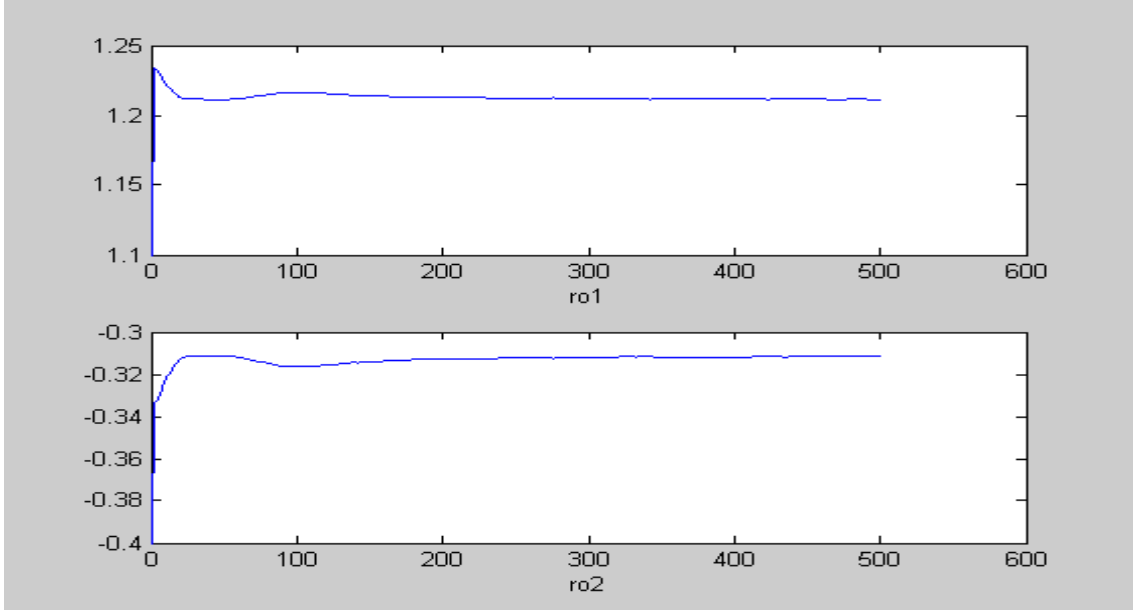
$$\gamma + \rho_1 = 2.2$$

şeklinde bilinen bir önbilgi olduğunda tahminler nasıl olacaktır?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ r \\ b \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} .9 \\ 2.2 \end{bmatrix}}_d$$

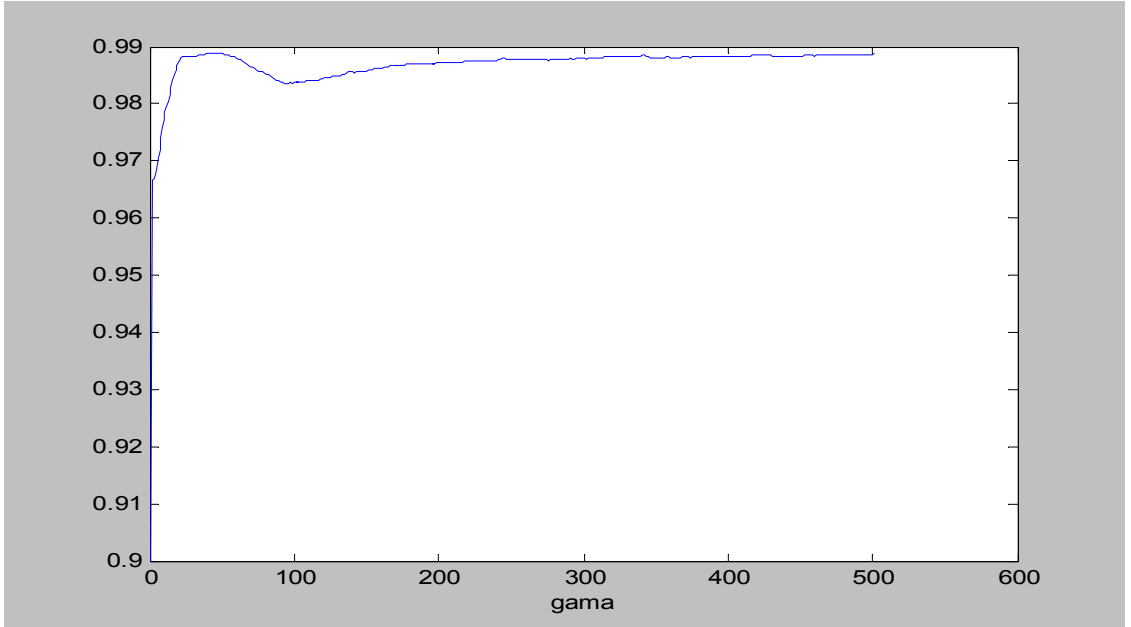
kısıtı göz önüne alınarak kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanarak tahmin yapıldığında sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilir. Kısıtlar sadece parametreler üzerinde olduğundan üzerinde kısıt olan parametre tahminlerinin grafikleri verilecektir.

Şekil 8.12 ile  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  nin kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahminleri verilmiştir. Her bir adımda  $\rho_1 + \rho_2 = .9$  olacak şekilde tahminler elde edilmiştir. Grafiklere bakıldığında tahminler, simülasyonla üretilen  $\rho_1 = 1.2$  ve  $\rho_2 = -.3$  değerlerine oldukça yakın elde edilmiştir.



Şekil 8.12  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  Tahminleri

Şekil 8.13 ile  $\gamma$  nın İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmini verilmiştir.  $\gamma$  için kısıtsız durumla karşılaştırılınca, kısıtlı durumda elde edilen tahminlerin simülasyonla üretilen  $\gamma = 1$  değerine daha yakın sonuçlar verdiği söylenebilir.



Şekil 8.13  $\gamma$  Tahmini

## 8.2.4 Sonuç

En çok olabilirlik yöntemiyle parametrelerle ilgili tek değer elde edilirken İlerletilmiş Kalman Filtresi ile zaman değişkenli parametre tahminleri elde edilmiştir. Kısıtsız ve kısıtlı her iki durumda da elde edilen tahmin değerleri simülasyonla üretilen değerlere oldukça yakın çıkmıştır. Buna göre önerilen yöntemin iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar "Simultaneous Estimation of Time Varying Parameters in an Optimal Control Problem With Quadratic Objective Function and Linear Constraints" çalışması adı altında Computational Economics dergisine gönderilmiştir.

## 8.3 Ekonomi Örneği 2

Kayıp fonksiyonundaki tercih parametrelerini önceden belirleyip, kontrol değişkeni olan faiz oranlarının ekonomiye gelen bir şoka nasıl tepki vereceği Rudebush and Svensson (1998,1999) ve Claride *et al.* (1999)'da yer almaktadır.

Merkez bankalarının tercih parametrelerinin, ekonomiyi karakterize eden parametrelerle beraber tahmin edilmesi modelin gerçeği açıklama gücünü artıracak ve gözlemlenen faiz oranlarının nasıl bir tercih sonucu ortaya çıktığı konusunda önemli ipuçları verecektir. Kayıp fonksiyonu parametrelerini diğer parametrelerle beraber tahmin eden çalışmalardan bazıları Salemi (1995), Favero and Rovelli (2003) ve Özlale (2003)'dür. Bu çalışmalarda ortaya çıkan temel sonuçlar genellikle birbirleriyle tutarlı olup inceledikleri A.B.D para politikası hakkında ortak sonuçlara ulaşmaktadırlar. Kayıp fonksiyonu parametrelerini tahmin eden bu çalışmalar merkez bankalarının zaman içinde değişebilen tercihlerini modellemede yetersiz kalmaktadırlar.

Bu uygulama çalışmasında merkez bankaları için zaman değişkenli kayıp fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun merkez bankasının tercihlerini yansıtan parametreleri modelde yer alan diğer parametrelerle aynı anda tahmin edilmiştir.

Model lineer olmayan bir model olduğu için İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak sonuca gidilmiştir. İlerletilmiş Kalman Filtresini iktisatta kullanan çalışmalar arasında Grillenzoni (1993), Bacchetta and Gerlach (1997) ve Özbek ve Özlale (2005) örnek olarak verilebilir.

Enflasyon ve üretim açığına ilişkin denklemler,

$$\pi_{n+1} = \alpha_{\pi 1}\pi_n + \alpha_{\pi 2}\pi_{n-1} + \alpha_{\pi 3}\pi_{n-2} + \alpha_{\pi 4}\pi_{n-3} + \alpha_{\pi y}y_n + \varepsilon_{n+1} \quad (8.10)$$

$$y_{n+1} = \beta_{y1}y_n + \beta_{y2}y_{n-1} - \beta_r(i_n - \pi_n) + \eta_{n+1} \quad (8.11)$$

biçiminde olmak üzere, kayıp fonksiyonu,

$$\lambda_{\pi,n}(\pi_n)^2 + \lambda_{y,n}(y_n)^2 \quad (8.12)$$

olarak alınsın. Burada,  $\lambda_{\pi,n}$  ve  $\lambda_{y,n}$  sırasıyla merkez bankasının enflasyon ve üretim açığı tercihlerini belirtmektedir.

Buna göre modelin durum uzay modeli gösterimi,

$$\begin{bmatrix} \pi_{n+1} \\ \pi_n \\ \pi_{n-1} \\ \pi_{n-2} \\ y_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_r & 0 & 0 & 0 & \beta_{y1} & \beta_{y2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_n \\ \pi_{n-1} \\ \pi_{n-2} \\ \pi_{n-3} \\ y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_r \\ 0 \end{bmatrix} i_n + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

$$\begin{bmatrix} \pi_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_n \\ \pi_{n-1} \\ \pi_{n-2} \\ \pi_{n-3} \\ y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

olarak yazılabilir. Kayıp fonksiyonu da,

$$x_n' R_1 x_n + u_n' Q_1 u_n + 2x_n' W u_n = \begin{bmatrix} \pi_n \\ \pi_{n-1} \\ \pi_{n-2} \\ \pi_{n-3} \\ y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \lambda_\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_n \\ \pi_{n-1} \\ \pi_{n-2} \\ \pi_{n-3} \\ y_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

şeklinde yazılabilir. Yani,  $Q_1 = 0, W = 0$  dır. Kontrol değişkeni  $i_n$  olarak verilmiştir. (8.13) ve (8.14) ile tanımlanan modelde bulunan parametrelerin ve (8.15) ile verilen kayıp fonksiyonunda bulunan parametrelerin bilinmediği durumda  $\lambda_y + \lambda_\pi = 1$  olmak üzere  $i_n$  kontrol değeri bilindiğinde bu parametrelerin tahmin edilmesi problemi ele alınmaktadır.

İlk olarak yapılacak olan simülasyon çalışmasında, modeli oluştururken parametre değerleri,  $\alpha_1 = .1, \alpha_2 = .1, \alpha_3 = .1, \alpha_4 = .1, \alpha_y = .1, \beta_1 = 1, \beta_2 = .1, \beta_r = .1, \lambda_y = .7, \lambda_\pi = .3$  olarak alınmıştır. Bu kısımda elde edilen sonuçlar Ek 4 ile verilen programların çalıştırılması ile edilmiştir.

### 8.3.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametre Tahmini

En çok olabilirlik yöntemiyle parametre tahminleri yapıldığında,

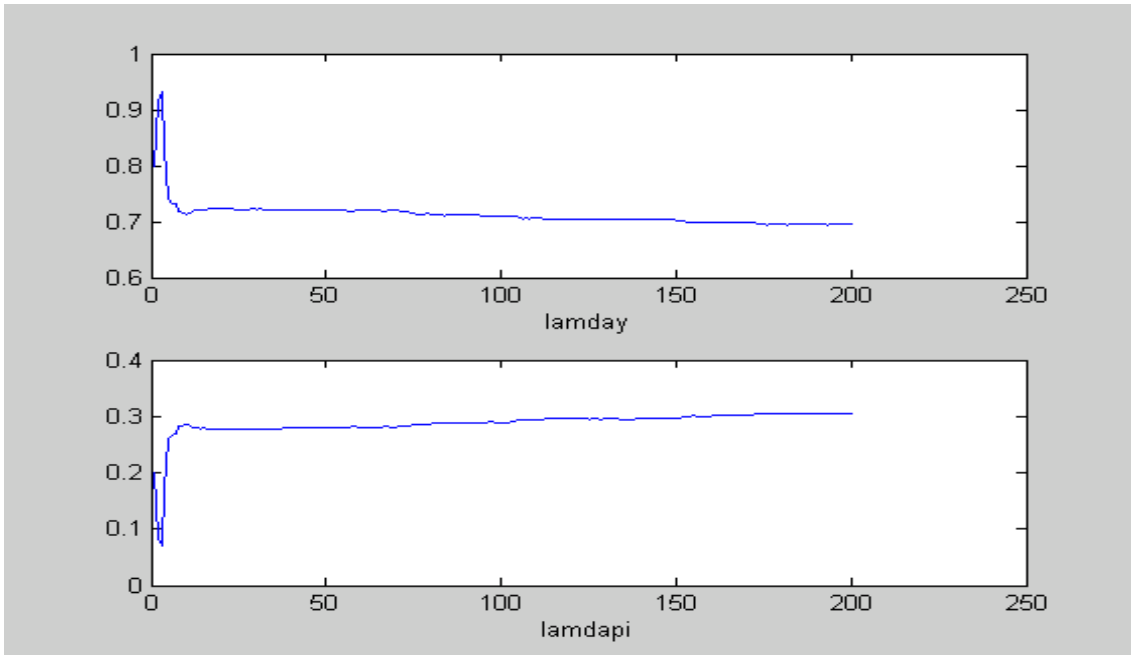
$\alpha_1 = 0.1693$	0.1684
$\alpha_2 = 0.1511$	0.1697
$\alpha_3 = 0.1137$	0.1668
$\alpha_4 = 0.0851$	0.1448
$\hat{\theta} = \alpha_y = 0.2513$	standarthata= 0.2303
$\beta_1 = 0.2230$	0.2589
$\beta_2 = -0.0710$	0.2163
$\beta_r = 0.0812$	0.1249
$\lambda_y = 1.1755$	1.4908

olarak elde edilmiştir.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_y, \beta_r$  için sonuçlar iyiyken  $\beta_1, \beta_2, \lambda_y$  için sonuçların çokta iyi olduğu söylenemez.

### 8.3.2 İlerletilmiş Kalman Filtresi ile Parametre Tahmini

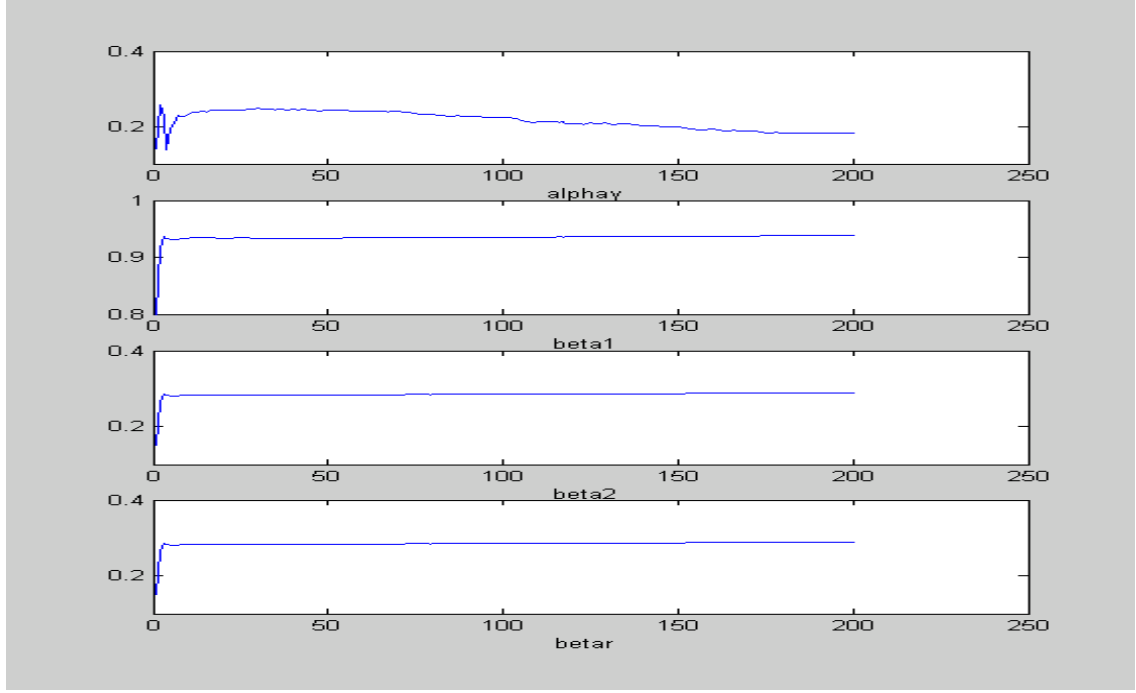
Bölüm 7.1.2 de verilen İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması kullanılarak hem kayıp fonksiyonundaki hem de modeldeki parametreler tahmin edilmiştir.

Şekil 8.14 ile kayıp fonksiyonu parametrelerinin tahminlerinin grafiği verilmiştir. Tahminlerin simülasyonla üretilen  $\lambda_y = .7$  ve  $\lambda_\pi = .3$  değerlerine oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.



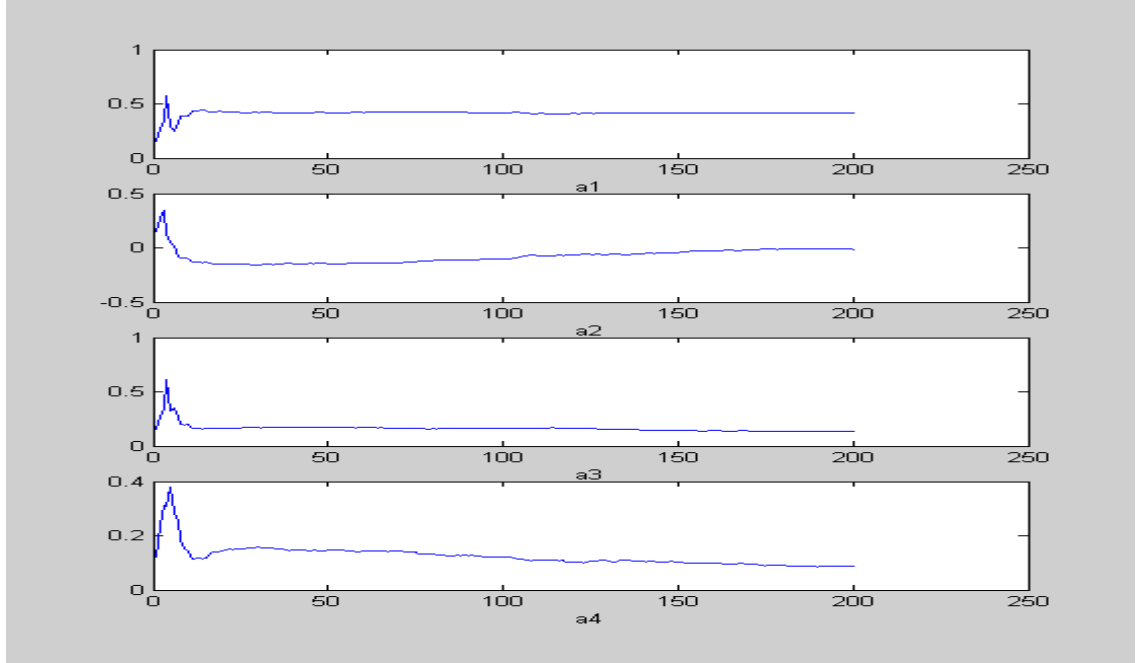
Şekil 8.14  $\lambda_\pi$  ve  $\lambda_y$  Tahminleri (Kayıp Fonksiyonu Parametreleri)

Şekil 8.15 ile üretim açığına ilişkin verilen denklemdeki parametre tahminlerinin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerde,  $\alpha_y, \beta_1, \beta_2, \beta_r$  tahminleri simülasyonla üretilen değerlere oldukça yakın sonuçlar vermiştir.



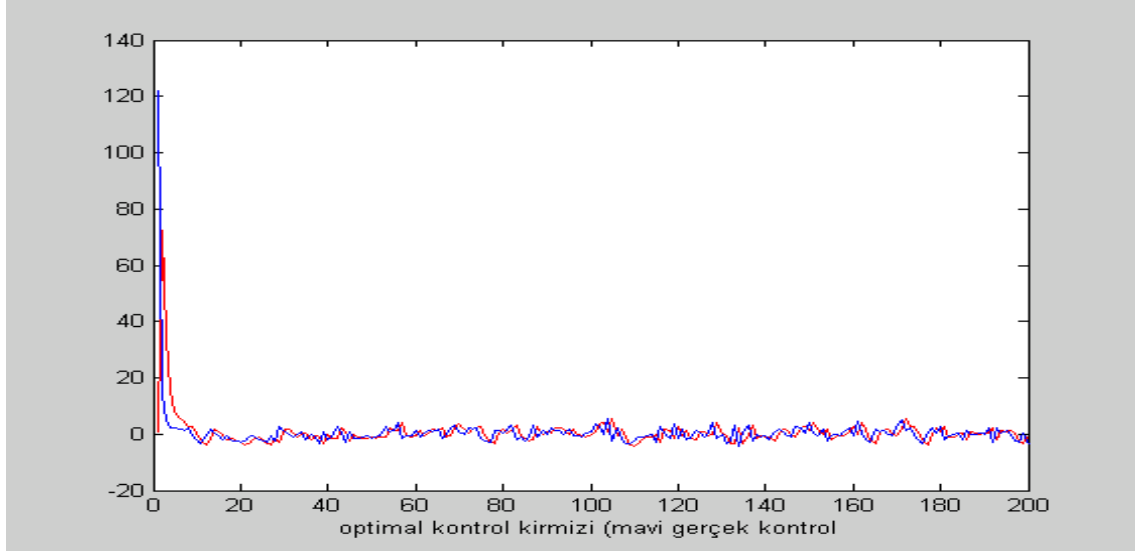
Şekil 8.15  $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$  ve  $\beta_r$  Tahminleri (Üretim Açığı, Sistem Parametreleri)

Şekil 8.16 ile  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  parametre tahminlerinin grafikleri verilmiştir. Bu tahminlerde simülasyonla üretilen değerlere oldukça yakın sonuçlar vermiştir.



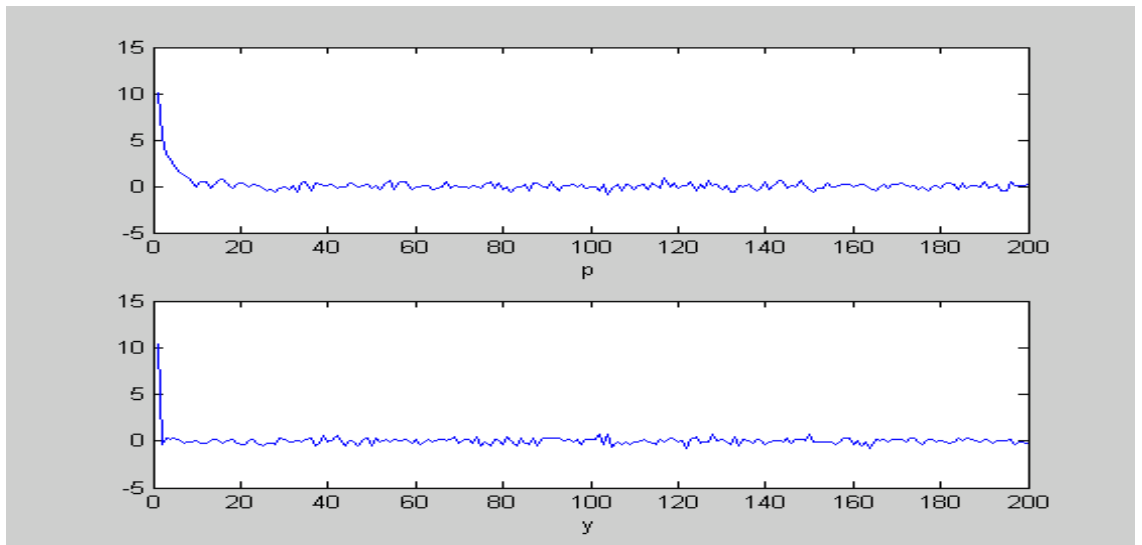
Şekil 8.16  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  Tahminleri (Enflasyon Denklemi, Sistem Parametreleri)

Şekil 8.17 ile gerçek kontrol ile optimal kontrolün grafikleri verilmiştir. Gerçek kontrol maviyle, optimal kontrol kırmızıyla ifade edilmiştir. Optimal kontrol simülasyonla üretilen gerçek kontrole oldukça yaklaşmıştır.

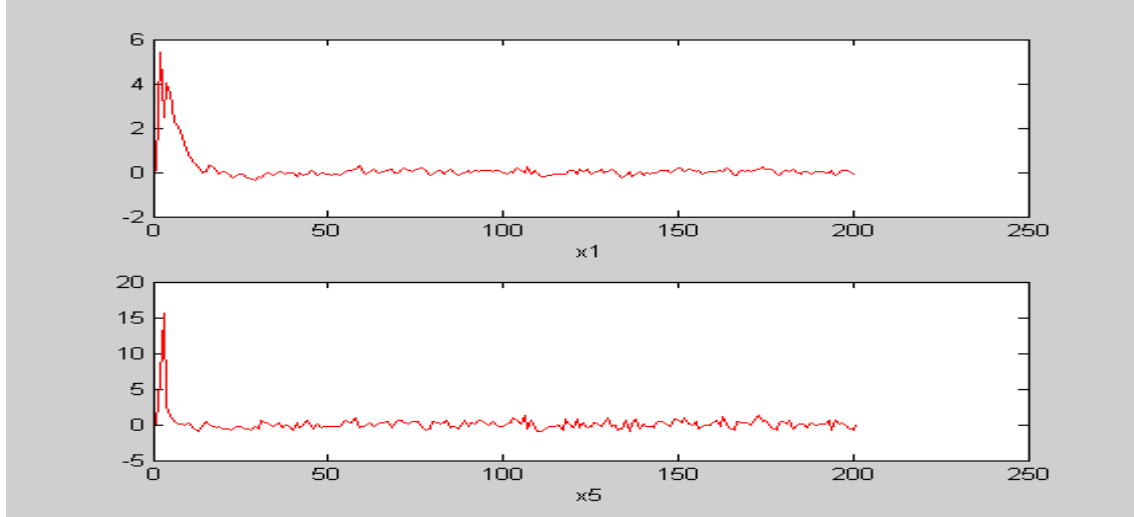


Şekil 8.17 Optimal kontrol ve Gerçek kontrol

Şekil 8.18 ile gözlenen  $\pi_n$  ve  $y_n$  değerlerinin grafikleri, Şekil 8.19 ile de bunların İlerletilmiş Kalman Filtresi ile tahminleri verilmiştir. Tahminlerle gerçek değerler birbirlerine oldukça yakındır.



Şekil 8.18  $\pi_n$  ve  $y_n$  Gözlemleri



Şekil 8.19  $\pi_n$  ve  $y_n$  Tahminleri (Gözlem Tahminleri)

### 8.3.3 Kısıtlı durum

Parametreler arasında,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = .2$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 = .2$$

$$\alpha_y + \beta_1 = 1.1$$

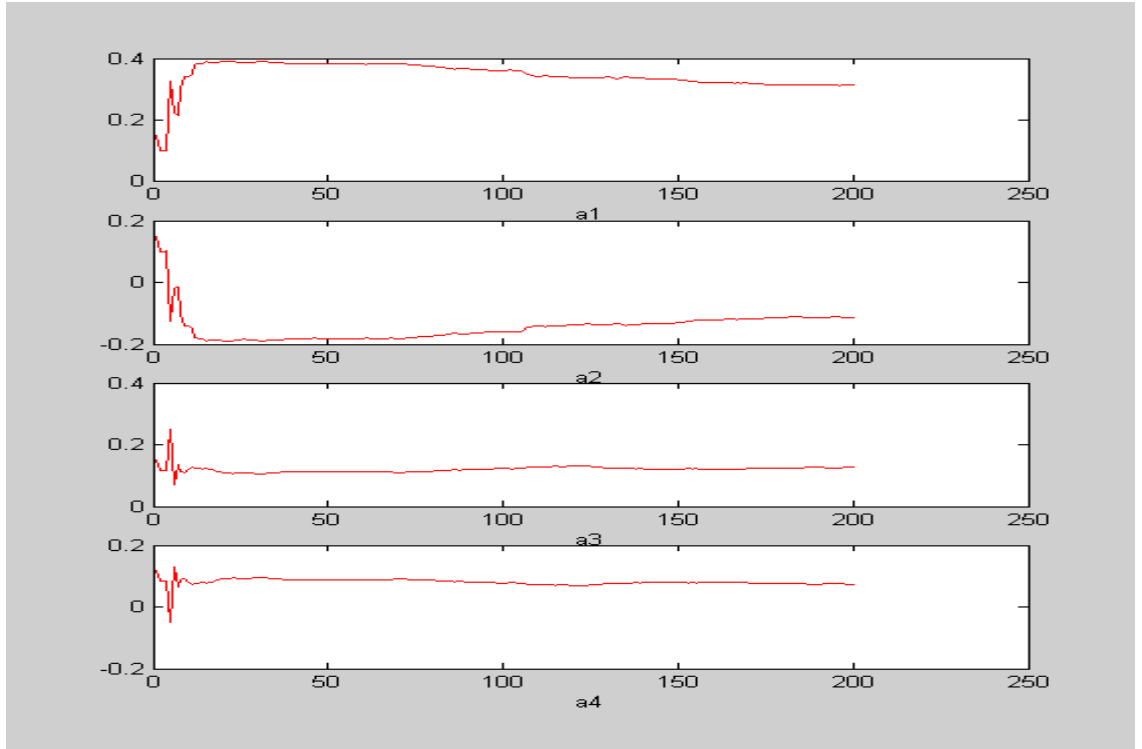
$$\beta_1 + \beta_2 = 1.1$$

şeklinde ilişki olduğu bilindiğinde tahminler nasıl olacaktır?

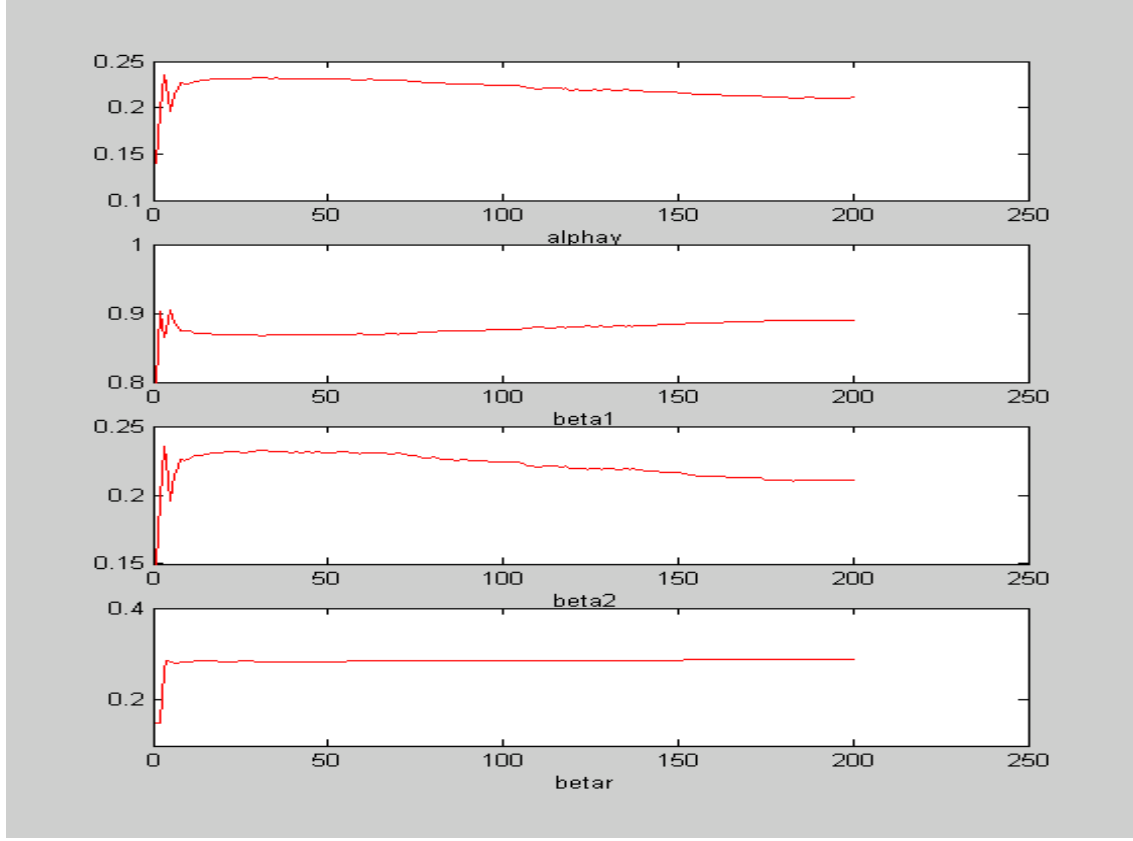
$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_y \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_r \\ \lambda_\pi \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_y \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_r \\ \lambda_\pi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} .2 \\ .2 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}}_d$$

kısıtı göz önüne alınarak kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanarak tahmin yapıldığında sonuçlar Şekil 8.20 ve Şekil 8.21 deki gibi elde edilir. Kısıtsız durumla karşılaştırıldığında kısıtlı durumda gerçek değerlere daha yakın sonuçların çıktığı söylenebilir.



Şekil 8.20  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  Tahminleri



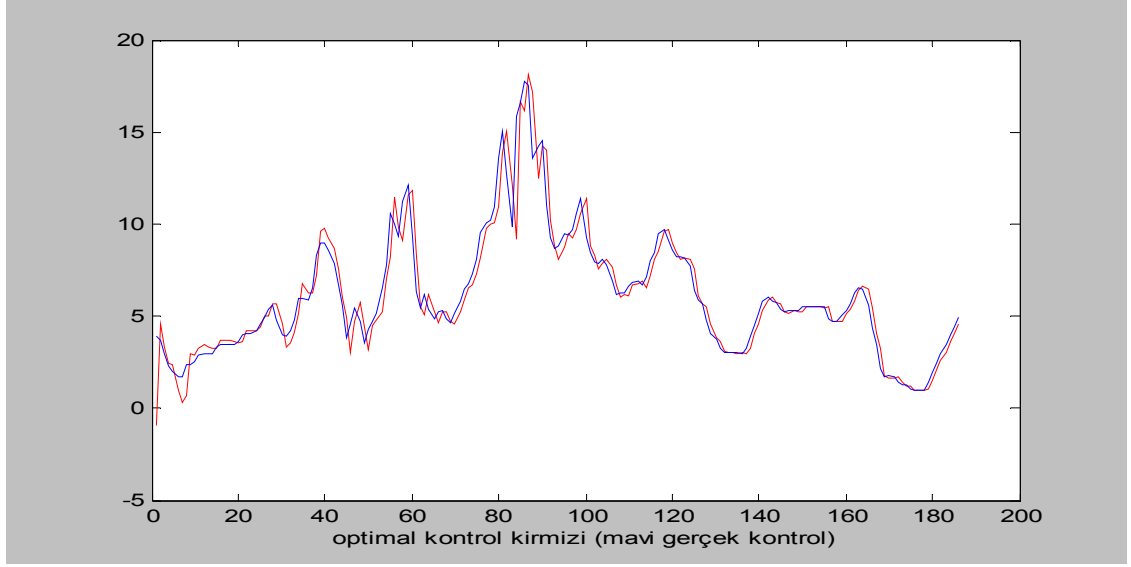
Şekil 8.21  $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$  ve  $\beta_r$  Tahminleri

### 8.3.4 Ekonomi örneği 2 (gerçek veriler)

Bu uygulama çalışmasında bir önceki uygulama çalışmasında alınan model ele alınmış ve A.B.D Ekonomisine ait gerçek veriler kullanılarak parametre tahminleri yapılmıştır.

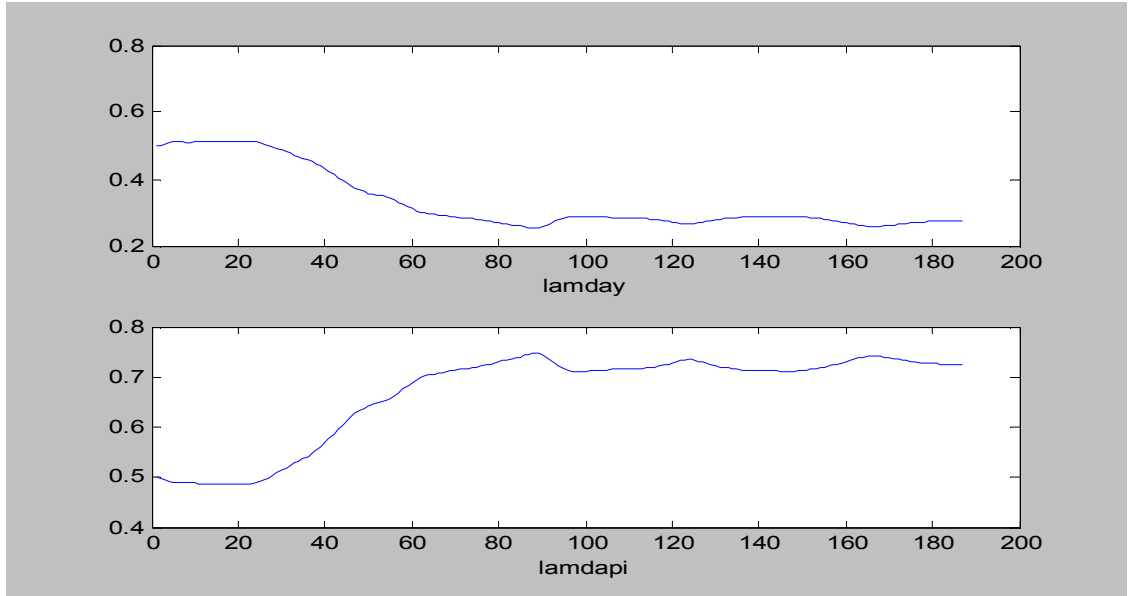
Burada,  $i_n$  A.B.D Merkez Bankası F.E.D' in gecelik faiz oranı ve  $y_n$ , gerçekleşen ile potansiyel üretim arasındaki farkı gösteren çıktı açığıdır. Veriler model2dat1.txt dosyasında olmak üzere, bunlar Matlab paket programında gözlenen değerler olarak çağrılmış ve İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritmasında bu değerler yerine konularak yazılan program çalıştırılıp parametre ve durum tahminleri elde edilmiştir.

Şekil 8.22 ile verilen kontrol değerleri ile optimal kontrol mekanizması uygulanarak elde edilen optimal kontrolün grafikleri verilmiştir. Sonuçların gerçek değerlere oldukça yakınlığı görülmektedir.

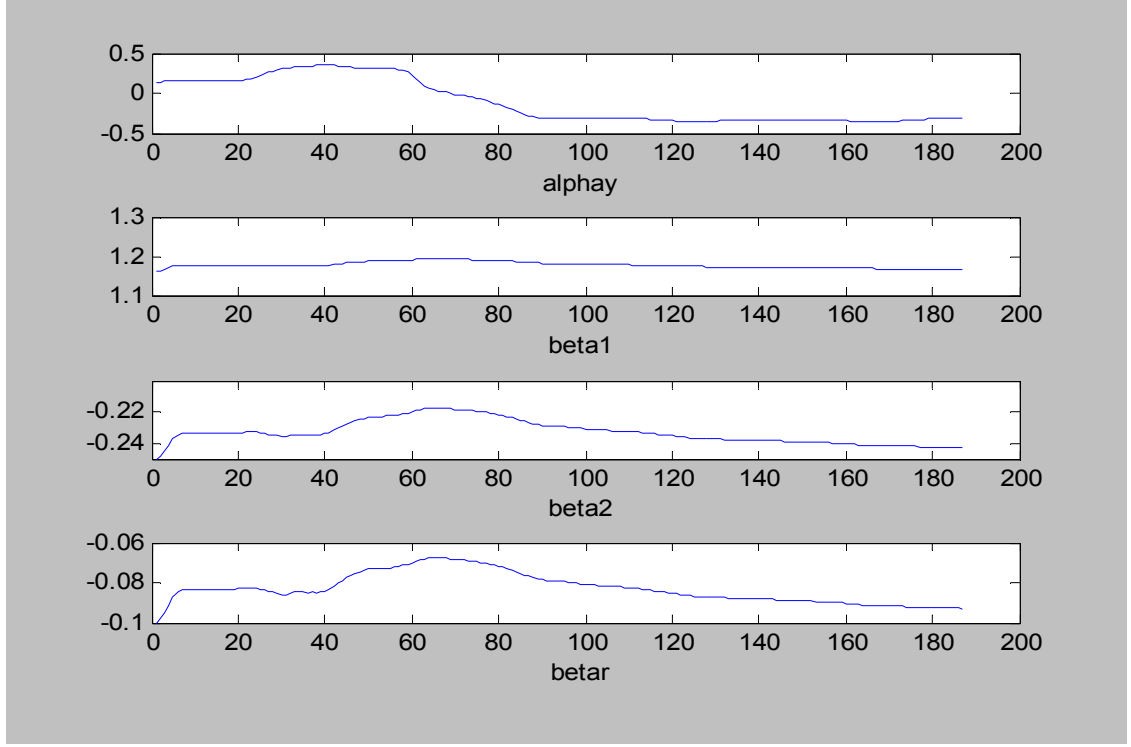


Şekil 8.22 Optimal kontrol ve Gerçek kontrol

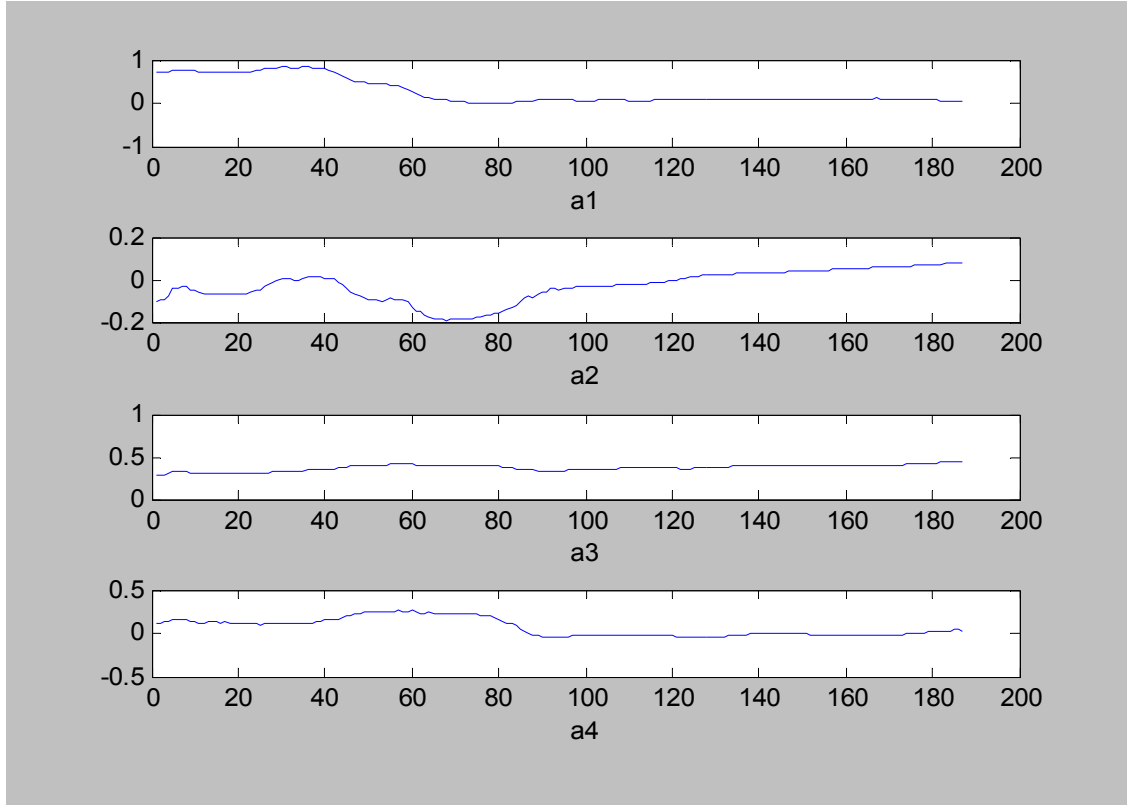
Bundan sonraki grafiklerde de parametre tahminleri yer almaktadır.



Şekil 8.23  $\lambda_{\pi}$  ve  $\lambda_y$  Tahminleri (Kayıp Fonksiyonu Parametreleri)



Şekil 8.24  $\alpha_y, \beta_1, \beta_2$  ve  $\beta_r$  Tahminleri (Üretim Açığı, Sistem Parametreleri)



Şekil 8.25  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  Tahminleri

Cecchetti and Ehrmann (2000), Bernanke *et al.* (1999), Clarida *et al.* (1999) çalışmalarında da burada elde edilen sonuca benzer olarak  $\lambda_\pi$  nin artış gösterdiği sonucu gözlenmiştir. Bu da, tahmin yönteminin doğruluğu konusunda destek sağlamaktadır.

### **8.3.5 Sonuç**

Burada amaç, uygulanan kontrol bilinirken parametreleri bilinmeyen kayıp fonksiyonunu ve ekonomi dinamiklerinin getirdiği kısıtları kullanarak modeli durum-uzay modeli haline getirmek ve İlerletilmiş Kalman Filtresi ve en çok olabilirlik yöntemleri yardımıyla bilinmeyen parametreleri hesap etmek idi.

Kontrol problemi kullanılarak tahmin edilen parametrelerin doğruluğunu görmek amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır. Parametre değerleri ve başlangıç değerleri değiştirilerek yapılan simülasyon çalışmalarında çıkan sonuçların model oluşturulurken kullanılan parametre değerlerine oldukça yakın çıktığı görülmüştür. İkinci uygulama çalışmasında A.B.D ekonomisine ait veriler kullanılarak parametre tahminleri yapılmıştır.

İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak zaman değişkenli oluşturulan kayıp fonksiyonunda ve modelde bulunan parametre değerleri zaman değişkenli olarak elde edilebilmiştir.

## 9. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada lineer kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve Kalman Filtresi ile lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresine yer verilmiştir.

Durum değişkenleri için bilinen bir ön bilgi yani kısıt olması durumunda, Kalman Filtresi ile durum tahminini elde etme yöntemleri ve Kısıtlı durum Kalman Filtresinin özellikleri verilmiştir. Lineer olmayan durum-uzay modelleri için kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi ve kısıtın lineer olmadığı durumda kısıtlı Kalman Filtresinin elde edilişi ile ilgili bilgi verilmiştir.

Lineer olmayan kesikli zaman deterministik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsama problemi ele alınmış ve Boutayeb *et al.* (1997)'de İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritmasında verilen hata kovaryansı yerine Özbek and Aliev (1998)'de önerilen hata kovaryansının alınması ile yakınsama hızının biraz daha arttığı gösterilmiştir.

Kısıtlı durum lineer olmayan deterministik durum-uzay modelleri için Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmininin özellikleri araştırılmış ve belli koşullar altında üstel gözlemci olduğu gösterilmiş ve kısıt olması durumunda yakınsama hızında herhangi bir değişiklik olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Hata kovaryansı için Özbek and Aliev (1998)'de önerilen hata kovaryansının alınması ile kısıtlı durumda da yakınsama hızının arttığı görülmüştür.

Lineer olmayan kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin yakınsaması ele alınmış ve bunun üstel gözlemci olduğu ile ilgili bilgi verilmiştir. Bu bilgi kullanılarak kısıtlı durum lineer olmayan stokastik durum-uzay modelleri için Kısıtlı İlerletilmiş Kalman Filtresi tahmininin üstel gözlemci olduğu gösterilmiştir.

Kesikli zaman stokastik durum-uzay modellerinde bilinmeyen parametrelerin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ve tahminin elde edilmiş adımları ve parametre tahminlerinin standart hatalarının nasıl hesaplanacağı anlatılmıştır. Durum-uzay modelleri için optimal kontrol problemi ve bu kontrol probleminin çözümü verilmiştir, Optimal kontrol problemi çözülürken kontrolle ilgili bilinmeyen parametrelerin (ekonomik parametreler) tahmininin en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilmesi anlatılmıştır.

Uygulanan kontrol bilinirken durum-uzay modellerinin parametrelerinin tahmini problemi üzerinde durulmuş ve bu problemin çözümü için kullanılacak yöntem önerilmiştir. Bu yöntem en çok olabilirlik tahmini elde edilirken de işin içine katılmıştır.

Çalışmanın son bölümü uygulama çalışmalarına ayrılmıştır. İlk uygulama, tıp alanında uygulama olanağı olan kompartman modelleri için İlerletilmiş Kalman Filtresi kullanılarak fare tümörleri verileri üzerinde yapılmıştır. İkinci ve üçüncü uygulama çalışması ekonomi alanında yapılmıştır. Ekonomiyle ilgili ilk uygulama çalışmasında, durum-uzay modeli ve kontrol kullanılarak istenilen parametre tahminleri, kısıtlı ve kısıtsız durum için en çok olabilirlik yöntemiyle ve İlerletilmiş Kalman Filtresiyle hesaplanmıştır. Ekonomiyle ilgili yapılan ikinci uygulama çalışması merkez bankalarının tercih parametrelerini belirlemekle ilgilidir ve ABD ekonomisiyle ilgili gerçek veriler kullanılarak da tahminler hesaplanmıştır.

## KAYNAKLAR

- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. 1979. Optimal Filtering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Anderson, E. W., Hansen, P. L., McGrattan, Sargent, T. J. 1995. Mechanics of Forming and Estimating Dynamic Linear Economies, unpublished manuscript, Stanford University, Hoover Institution.
- Agniel, R. G. and Jury, E. I. 1971. Almost Sure Boundedness of Randomly Sampled Systems. SIAM J. Contr., vol. 9, pp. 372-384.
- Bacchetta, P. and Gerlach, S. 1997. Consumption and Credit Constraints: International Evidence, Journal of Monetary Economics, 40, 207-238.
- Bernanke, B. S., Laubach, T., Mishkin, F. S. and Posen, A. 1999. Inflation Targeting : Lessons from the International Experience, Princeton University Press, Princeton N. J.
- Bostman, K., Tickle, K. and Smith, J. D. 1997. A Bayesian Formulation of the Kalman Filter Applied to the Estimation of Individual Pharmacokinetic Parameters. Comput. Biomed. Res. 30: 83-93.
- Boutayeb, M., Rafaralahy, H. and Darouach, M. 1997. Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter Used as an Observer for Nonlinear Deterministic Discrete Time Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (4), 581-586.
- Boutayeb, M. and Aubry, D. 1999. A Strong Tracking Extended Kalman Observer for Nonlinear Discrete-Time Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (8), 1550-1556.
- Cecchetti, S.G. and Ehrmann, M. 2000. Does Inflation Targeting Increase Output Volatility? An International Comparison of Policymakers Preferences and Outcomes. NBER Working Paper, No.7426.
- Chen, G. 1993. Approximate Kalman Filtering. World Scientific.
- Chen, Yuan-Hwang and Chiang, Ching-Tai. 1993. Adaptive Beamforming Using the Constrained Kalman Filter. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 41, NO. 11, November.
- Chui, C. K. and Chen, G. 1991. Kalman Filtering with Real-time Applications. Springer-Verlag.
- Clarida, R., Gali, J. and Getler, M. 1999. The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective. Journal of Economic Literature, 1661-1707.

- Cuccia, D.,J., Bevilacqua, F., Durkin, J.,Merritt, S., Tromberg, J., Gulsen, G., Yu, H. and Nalcioğlu, O. 2003. In Vivo Quantification of Optical Contrast Agent Dynamics in Rat Tumors by Use of Diffuse Optical Spectroscopy With Magnetic Resonance Imaging Coregistration, *Applied Optics*, 42(16), 2940-2950.
- Curtain, R. F. 1972. Boundedness Properties for Stochastic Systems, Stability of Stochastic Systems, Lecture Notes in Mathematics 294, Ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Davis, M. H. A. And Vinter, R. B. 1985. Stochastic modeling and control. Chapman and Hall.
- Durrant-Whyte, H. 1988. Integration, Coordination and Control of Multi- Sensor Robot Systems. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Fagin, S. L. 1964. Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis Optimal Systemn IEEE Int. Conv. Rec., 12, 216-240.
- Favero, C. A. And Rovelli, R. 2003. Modeling and Identifying central bank preferences , *Journal of Money, Credit and Banking*, 35, 545- 556.
- Gelb, A. 1984. Ed., Applied Optmal Estimation, Cambridge, MA: MIT Press.
- Gard, T. C. 1988. Introduction to Stochastic Differential Equations. New York: Marcel Dekker.
- Goodwin, G.C. and Sin, K. S. 1984. AdaptiveFiltering, Prediction and Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Greval, M. S. and Andrews, A. P. 1984. Kalman Filtering Theory and Practice. Prentice Hall.
- Grillenzoni, C. 1993. ARIMA Processes with ARIMA Parameters, *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 235-250.
- Guo, L.Z. and Zhu, M,Q. 2002. A Fast Convergent Extended Kalman Observer for Nonlinear Discrete-Time Systems, *International Journal of Systems Science*,33(13),1051-1058.
- Gustafsson, F. 1992. Estimation of Discrete Parameters in Linear Systems. Phd. Thesis. Department of Electrical Engineering. Linkoping University, Sweden.
- Hooker, M. A. 1994. Analytic First and Second Derivatives for the Recursive Prediction Error Algorithm's Log Likelihood Function. *IEEE Transactions on Automatic Contro*, Vol. 39, No. 3.
- Jazwinski, A. H. 1970. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press.

- Kalman, R. E. 1960. A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering, Vol. 82; 35-45.
- Kalman, R. E. and Bucy, R. S. 1961. New Result in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering, Vol. 83; 95-108.
- Köksal, E. ve Öztürk, F. 2004. ARMAX Modellerinde Parametre Tahmini ve Kontrol. İstatistik Araştırma Sempozyumu 2003,10-12 Aralık 2003, Ankara, Özel Basım, Volume 03, Sayı 02, 73-87, Ağustos(2004).
- Köksal, E. , Özbek, L. ve Öztürk, F 2005a. İlerletilmiş Kalman Filtresi ve Sistem Belirleme Üzerine Bir Çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 25, 9-18, Konya.
- Köksal, E., Özbek, L. ve Öztürk, F. 2005b. İlerletilmiş Kalman Filtresi ve Bir Düzenlemesi, 4. İstatistik Kongresi, 8-12 Mayıs 2005,Antalya.
- Köksal, E. ve Özbek, L. 2006a. Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması. 5. İstatistik Günleri Sempozyumu 2006, 24-27 Mayıs Antalya.
- Köksal, E. ve Özbek , L. 2006b. Kısıtlı Durum Kalman Filtresi. 5. İstatistik Günleri Sempozyumu 2006, 24-27 Mayıs, Antalya.
- Köksal Babacan, E. , Özbek, L. and Efe, M. 2008. Stability of the Extended Kalman Filter When the States are Constrained. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 11, December 2008.
- Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1998. Theory of difference equations. New York: Academic. p. 88.
- La Scala, B. F., Bitmead, R. and Quinn, B. G. 1996. An Extended Kalman Filter Frequency Tracker for High-Noise Environments. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, pp. 41-434.
- Lewis, F. L. 1986. Optimal Estimation. New York: Wiley.
- Liang, D. F. 1983. Comparisons of Nonlinear Recursive Filters for Systems with Nonnegligible Nonlinearities in Control and Dynamic Systems, Volume 20: Nonlinear and Kalman Filtering, C. T. Leondes, Ed. NewYork; Academic, pp. 341-401.
- Ljung, L and Söderström, T. 1985. Theory and Practice of Recursive Identification. The MIT Pres, Cambridge, MA.
- Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. 2000. Recursive Macroeconomic Theory, The MIT Press, Cambridge, MA.

- Massicotte, D., Morawski, R. and Barwicz, A. 1995. Incorporation of positivity constraint into a Kalman Filter based algorithm for correction of spectrometric data, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 44, 1 , pp 2-7.
- Mendel, J. M. 1986. Lessons in Digital Estimation Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Morozan, T. 1968. Stability of Stochastic Discrete Systems, J. Math. Anal. Appl., vol. 23, pp. 1-9.
- Özbek, L. 1998. Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İndirgemeli Tahmin ve Yakınsama Problemleri, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yayınlanmamış Doktora Tezi.
- Özbek, L. And Aliev. F. 1998. Comments on Adaptive Fading Kalman Filter with an Application. Automatica, Vol. 34, No:12, pp=1663-1664.
- Özbek, L and Efe, M. 2004. An Adaptive Extended Kalman Filter with Application to Compartment Models, Communication in Statistics-Simulation and Computation, 3,145-158.
- Özbek, L., Özlale, Ü. and Öztürk, F. 2003. Employing Extended Kalman Filter in a Simple Macroeconomic Model, Central Bank Review1, 53-65.
- Özbek, L. and Özlale, Ü. 2005. Employing the Extended Kalman Filter in Measuring the Output Gap, Journal of Economic Dynamics and Control, 29, 1611-1622.
- Özbek, L. ve Öztürk, F. 2003. Lineer Olmayan Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İlerletilmiş Kalman Filtresi Üzerine Bir Çalışma, VI. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, Mayıs 2003, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Özbek, L. ; Efe, M.; Köksal Babacan, E., Yazıhan, N. 2009. Online Estimation of Capillary Permeability and Contrast Agent Concentration in Rat Tumors. Submitted for publication Hacettepe Journal of Mathematics And Statistics.
- Özlale, Ü. 2003. Price Stability vs. output stability : tales of federal reserve administrations, Journal of Economic Dynamics and Control ,27, 1595-1610.
- Özlale, Ü , Özbek, L. and Köksal Babacan, E. 2008. Simultaneous Estimation of Time Varying Parameters in an Optimal Control Problem With Quadratic Objective Function and Linear Constraints. Submitted for publication Computational Economics.
- Reif , K., Günther, S., Yaz, and Unbehauen, R. 1996. Modification of the Extended Kalman Filter with an Additive Term of Instability, in Proc. 35 th IEEE Conf. Dec. Contr., pp. 4058-4059.

- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. and Unbehauen, R. 1997. An Observer for Nonlinear Systems Based on  $H_{\infty}$ -Filtering Techniques, in Proc. American Control Conf. Pp. 2379-2380.
- Reif, K. and Unbehauen, R. 1999. The Extended Kalman Filter as an Exponential Observer for Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 47, No. 8.
- Reif, K., Sonnemann, F. and Unbehauen, R. 1998. An EKF-Based Nonlinear Observer with a Prescribed Degree of Stability, Automatica, 34(9), 1119-1123.
- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. and Unbehauen, R. 1999. Stochastic Stability of the Discrete-Time Extended Kalman Filter, IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (4), 714-728.
- Rudebusch, G., D. and Svensson, L. E. O. 1998. Policy Rules for Inflation Targeting, NBER Working Paper, No: 6512.
- Rudebusch, G., D. and Svensson, L. E. O. 1999. Eurosystem Monetary Targeting: Lessons from U.S. data, NBER Working Paper, No: 7179.
- Salemi, M. 1995. Revealed preference of the federal reserve: using inverse control theory to interpret the policy equation of a vector autoregression, Journal of Business and Economic Statistics, 13, 419-433.
- Simon, D. and Chia, T. 2002. Kalman Filtering With State Equality Constraints, <http://academic.csuohio.edu/simond/kalmanconstrained>
- Sorenson, H. W. 1974. On the Development of Practical Nonlinear Filters, Inform. Sci., vol. 7, pp. 253-271.
- Tarn, T. J. and Rasis, Y. 1976. Observers for Nonlinear Stochastic Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-21, pp. 441-448.
- Xia, Q., Rao, M., Ying, Y. and Shen, X. 1994. Adaptive Fading Kalman Filter with an Applications. Automatica, Vol. 30, No: 8;1333-1338.
- Wilson, D., A. and Kumar, A. 1982. Derivative Computations for the Log Likelihood Function, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 1.
- Wishner, R. P., Tabaczynski, J. A. and Athans, M. 1969. A Comparison of Three Nonlinear Filters, Automatica, vol. 5, pp. 487-496.
- Yared, K. L. 1979. On Maximum Likelihood Identification of Linear State Space Models. Lab. Inform Decision Syst. Mass. Inst. Of Technol. Cambridge, MA. Rep. LIDS-TH-920.

## **EKLER**

EK 1 Fare Tumorleri için Kesikli Durum-Uzay Modelinin Elde EdiliŖi

EK 2 Fare Tumorleri için geçirgenlik parametresi tahmini programı

EK 3 Ekonomi Orneđi 1 için Matlab Programları

EK 4 Ekonomi Orneđi 2 için Matlab Programları

## EK 1 Fare Tümörleri için Kesikli Durum-Uzay Modelinin Elde Edilişi

(10.1) ve (10.2) ile verilen diferansiyel denklemler göz önüne alınsın,

$$\begin{aligned}\frac{dx_2(t)}{dt} &= k_1x_1(t) - k_2x_2(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= -k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \\ x_1(0), \quad x_2(0)\end{aligned}$$

olmak üzere  $\Delta t$  küçük bir zaman aralığı olsun. Durum denklemi,

$$\begin{aligned}x_2(t + \Delta t) &= x_2(t) + k_1x_1(t)\Delta t - k_2x_2(t)\Delta t \\ x_1(t + \Delta t) &= x_1(t) - k_1x_1(t)\Delta t + k_2x_2(t)\Delta t\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.  $t$  yerine  $t = n\Delta t$  alınırsa  $t + \Delta t = (n + 1)\Delta t$  olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned}x_1(t + \Delta t) &= x_1((n + 1)\Delta t) \\ x_2(t + \Delta t) &= x_2((n + 1)\Delta t)\end{aligned}$$

$$\text{ve } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ olup, } x_t = \begin{bmatrix} x_1(n\Delta t) \\ x_2(n\Delta t) \end{bmatrix}$$

gösterimi altında,

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - k_1\Delta t & k_2\Delta t \\ k_1\Delta t & 1 - k_2\Delta t \end{bmatrix} x_n \text{ ve gözlem denklemi}$$

$$y_n = [0 \quad 1]x_n$$

olur.

## EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı

```
%x(k+1)=Ax(k)+v1(k)
%y(k)=Hx(k)+v2(k)
clc
clear
close all
load tumorveri.txt
z1=tumorveri(:,2);
n=length(z1);
h=[0 1 0 0]';
hh=[0 1];
x0=[5;0;.2;.1];
xinit=x0;
p0=eye(4)*.1;
q=eye(4);
var1=.025;
var2=.075;
q(1,1)=var1*var1;
q(2,2)=var1*var1;
q(3,3)=.005*.005;
q(4,4)=.001*.001;
gozlemr=var2*var2;
lamda=1.0;
dt=.01;
y=z1';
for i=1:n;
x1=x0(1,1);
x2=x0(2,1);
x3=x0(3,1);
x4=x0(4,1);
A=[1-x3*dt x4*dt -dt*x1 x2*dt;
x3*dt 1-x4*dt dt*x1 -dt*x2;
```

## EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı(devam)

```
    0 0 1 0;  
    0 0 0 1];  
a1=1-x3*dt;  
a2=x4*dt;  
a3=x3*dt;  
a4=1-x4*dt;  
a5=x1*dt;  
a6=x2*dt;  
p=lamda*(A*p0*A'+q);  
k=p*h*inv(h'*p*h+gozlemr);  
p0=(eye(4)-k*h')*p;  
x0=[a1*x1+a2*x2-a5*x3+a6*x4;  
    a3*x1+a4*x2+a5*x3-a6*x4;  
    x3;  
    x4];  
x1=x0(1,1);  
x2=x0(2,1);  
xx=[x1;x2];  
x=x0+k*(y(i)-hh*xx);  
x0=x;  
t1(i)=x(1,1);  
t2(i)=x(2,1);  
t3(i)=x(3,1);  
t4(i)=x(4,1);  
end  
i=1:n;  
c1tahmin=mean(t3)  
c2tahmin=mean(t4)  
figure  
subplot(2,1,1)
```

## EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı(devam)

```
plot(i,t1,'b-')
xlabel('Zaman t')
ylabel('x1 Tahmini')
title('Plasma, 1. Kompartman')
subplot(2,1,2)
plot(i,t2,'b-')
xlabel('Zaman t')
ylabel('x2 Tahmini')
title('Extravascular space, 2. Kompartman')
figure
subplot(2,1,1)
plot(i,t3,'b-')
xlabel('Zaman t')
ylabel('k1 Tahmini')
title('1. Kompartman')
subplot(2,1,2)
plot(i,t4,'b-')
xlabel('Zaman t')
ylabel('k2 Tahmini')
title('2. Kompartman')
figure
plot(z1)
title('ICG konsantrasyonu, Farmokinetik Uyum')
hold on
plot(t2,'r')
xlabel('Zaman t')
%Kısıtlı Durum
clear all
close all
clc
load tumorveri.txt
```

## EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı(devam)

```
z1=tumorveri(:,2);
n=length(z1);
h=[0 1 0 0]';
hh=[0 1];
x0=[5;0;.2;.1];
xinit=x0;
p0=eye(4)*.1;
q=eye(4);
var1=.025;
var2=.075;
q(1,1)=var1*var1;
q(2,2)=var1*var1;
q(3,3)=.005*.005;
q(4,4)=.001*.001;
gozlemr=var2*var2;
lamda=1.0;
dt=.01;
y=z1';
D=[0 0 1 1 ];
d=.4;
for i=1:n;
x1=x0(1,1);
x2=x0(2,1);
x3=x0(3,1);
x4=x0(4,1);
A=[1-x3*dt x4*dt -dt*x1 x2*dt;
    x3*dt 1-x4*dt dt*x1 -dt*x2;
    0 0 1 0;
    0 0 0 1];
a1=1-x3*dt;
```

## EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı(devam)

```
a2=x4*dt;
a3=x3*dt;
a4=1-x4*dt;
a5=x1*dt;
a6=x2*dt;
p=lamda*(A*p0*A'+q);
k=p*h*inv(h'*p*h+gozlemr);
p0=(eye(4)-k*h')*p;
x0=[a1*x1+a2*x2-a5*x3+a6*x4;
     a3*x1+a4*x2+a5*x3-a6*x4;
     x3;
     x4];
x1=x0(1,1);
x2=x0(2,1);
xx=[x1;x2];
x=x0+k*(y(i)-hh*xx);
xsi=x-D'*inv(D*D')*(D*x-d);
x0=x;
t1(i)=x(1,1);
t2(i)=x(2,1);
t3(i)=x(3,1);
t4(i)=x(4,1);
xsi1(i)=xsi(1);
xsi2(i)=xsi(2);
xsi3(i)=xsi(3);
xsi4(i)=xsi(4);
end
figure
subplot(2,1,1)
plot(t1,'b-')
```

## **EK 2 Fare Tümörleri İçin Geçirgenlik Parametresi Tahmini Programı(devam)**

```
xlabel('Zaman t')
ylabel('x1 Tahmini')
title('Plasma, 1. Kompartman')
subplot(2,1,2)
plot(t2,'b-')
xlabel('Zaman t')
ylabel('x2 Tahmini')
title('Extravascular space, 2. Kompartman')
figure
subplot(2,1,1)
plot(t3,'b-')
hold on
plot(xsi3,'r')
xlabel('Zaman t')
title('1. Kompartman')
subplot(2,1,2)
plot(t4,'b-')
hold on
plot(xsi4,'r')
xlabel('Zaman t')
title('2. Kompartman')
figure
plot(z1)
title('ICG konsantrasyonu, Farmokinetik Uyum')
hold on
plot(t2,'r')
xlabel('Zaman t')
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları

```
%Modelden veri üretme
clc
clear all
close all
%x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+G*w(k)
%y(k)=H*x(k)+C*v(k)
randn('seed',0)
n=500;
beta=1;
ro1=1.2;
ro2=-.3;
r=-0.0526;
b=30;
gama=1;
A=[1 0 0 0
   0 ro1 ro2 0
   0 1 0 0
   0 0 0 1];
B=[1 0 0 0]';
R=[r^2 r 0 -r*b
   r 1 0 -b
   0 0 0 0
   -r*b -b 0 b^2];
Q=1+gama;
W=[-r -1 0 b]';
H=[1 0 0 0
   0 1 0 0];
G=[1 0 0 0;0 1 0 0; 0 0 0 0;0 0 0 0];
x(1,1)=1;
x(2,1)=1;
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
x(3,1)=1;
x(4,1)=1;
P=eye(4)*.1;
for k=1:n
for j=1:100
P1=R+beta*A'*P*A-(W+beta*A'*P*B)*(inv(Q+beta*B'*P*B))*(beta*B'*P*A+W');
P=P1;
end
F=(inv(Q+beta*B'*P1*B))*(beta*B'*P1*A+W');
u(:,k)=-F*x(:,k);
x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(:,k)+G*randn(4,1)*.1;
y(:,k)=H*x(:,k)+randn(2,1)*.1;
P=P1;
end
dosya=[y' u'];
save kontrolveri.txt dosya -ascii
figure
subplot(4,1,1)
plot(y(1,:))
xlabel('a(t) gozlem 1')
subplot(4,1,2)
plot(y(2,:))
xlabel('y(t) gozlem 2')
subplot(4,1,3)
plot(u)
subplot(4,1,4)
plot(ttop,'b')
xlabel('tahminden elde edilen maliyet')
%kalman Filtresi
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
Xtah(1:3,:)=zeros(3,1)+.1;
Xtah(4,1)=1;
PP=eye(4)*.1;
RR=eye(2)*.01;
QQ=eye(4)*.01;
lamda=1;
P=zeros(4)*.01;
for k= 1:n
P1=R+beta*A'*P*A-(W+beta*A'*P*B)*(inv(Q+beta*B'*P*B))*(beta*B'*P*A+W');
F=inv(Q+beta*B'*P1*B)*(beta*B'*P1*A+W');
uopt(:,k)=-F*Xtah(:,k);
P=P1;
X_ong=A*Xtah(:,k)+B*uopt(k);
Z_ong=H*X_ong;
MR=y(:,k)-Z_ong;
P_ong=lamda*(A*PP*A'+G*QQ*G');
S=RR+H*P_ong*H';
K=P_ong*H'*inv(S);
Xtah(:,k+1)=X_ong+K*MR;
PP=(eye(4)-K*H)*P_ong;
end
subplot(3,1,1)
plot(x(1,:))
hold on
plot(Xtah(1,:), 'r')
xlabel('a(t)')
subplot(3,1,2)
plot(x(2,:))
hold on
plot(Xtah(2,:), 'r')
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
xlabel('y(t)')
subplot(3,1,3)
plot(x(3,:))
hold on
plot(Xtah(3,:), 'r')
xlabel('y(t-1)')
figure
plot(u)
hold on
plot(uopt, 'r')
xlabel('gerçek kontrol mavi(optimal kontrol kırmızı)')
%R,Q,W matrislerindeki parametreler bilinmedğinde
%uygulanan kontrol bilindiğinde tahmin
%x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+G*v1(k)
%y(k)=H*x(k)+v2(k),cov(v1)=R1,cov(v2)=R2
clc
clear all
close all
beta=1;
r=-0.08;
b=30.05;
gama=.9;
ro1=1.1;
ro2=-.4;
G=[1 0
   0 1
   0 0
   0 0];
H=[1 0 0 0
   0 1 0 0];
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
qqq=[1 0 0 0;0 1 0 0; 0 0 0 0;0 0 0 0];
R1=eye(2)*.1;
R2(1,1)=90.37025994179932^2;
R2(2,2)=0.32975403885667^2;
load kontrolveri.txt
u=kontrolveri(:,3);
zz=[kontrolveri(:,1) kontrolveri(:,2)];
n=length(u);
%ilerletilmiş Kalman Filtresi
Xtah=zeros(4,1)+1;
test(1,1)=ro1;
test(2,1)=ro2;
test(3,1)=r;
test(4,1)=b;
test(5,1)=gama;
P10=eye(4)*.1;
P30=eye(5)*.01;
P20=zeros(4,5)+.001;
P=eye(4)*.02;
R1=G*R1*G';
olbfn=n*log(2*pi);
for k=1:n
x1=Xtah(1,k);x2=Xtah(2,k);
x3=Xtah(3,k);x4=Xtah(4,k);
ro1=test(1,k);
ro2=test(2,k);
r=test(3,k);
b=test(4,k);
gama=test(5,k);
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

A=[1 0 0 0

0 ro1 ro2 0

0 1 0 0

0 0 0 1];

B=[1 0 0 0]';

R=[r^2 0 r -r\*b

0 0 0 0

r 0 1 -b

-r\*b 0 -b b^2];

Q=gama+(r+1)^2;

W=[-r-r^2 0 -1-r b+r\*b]';

P1=R+beta\*A'\*P\*A-(W+beta\*A'\*P\*B)\*(inv(Q+beta\*B'\*P\*B))\*(beta\*B'\*P\*A+W');

P=P1;

F=(inv(Q+beta\*B'\*P\*B))\*(beta\*B'\*P\*A+W');

f=A-B\*F;

c=beta/((gama^2+(r+1)^2)+beta\*P1(1,1));

c11 =-beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*P1(1,2)\*x2;

c12 =-beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*P1(1,2)\*x3;

c13 =(beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(P1(1,1)-r^2-r)\*(2\*r+2)-

beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*(-2\*r-

1))\*x1+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(ro1\*P1(1,2)+P1(1,3))\*x2\*(2\*r+2)+beta/

((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(P1(1,2)\*ro2+1-

r)\*x3\*(2\*r+2)+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*x3+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,

1))^2\*(P1(1,4)-b-r\*b)\*x4\*(2\*r+2)+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*b\*x4;

c14 =-beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))\*(-1-r)\*x4;

c15 =beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(P1(1,1)-r^2-

r)\*x1+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(ro1\*P1(1,2)+P1(1,3))\*x2+beta/((r+1)^2+

gama+beta\*P1(1,1))^2\*(P1(1,2)\*ro2+1-

r)\*x3+beta/((r+1)^2+gama+beta\*P1(1,1))^2\*(P1(1,4)-b-r\*b)\*x4;

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
M=[ c11 c12 c13 c14 c15
    x2 x3 0 0 0
    0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0];
S=H*P10*H'+R2;
L=P20'*H'*inv(S);
K=(f*P10*H'+M*P20'*H')*inv(S);
P1=f*P10*f+f*P20*M'+M*P20'*f+M*P30*M'-K*S*K'+R1;
L=P20'*H'*inv(S);
P2=f*P20+M*P30-K*S*L';
P3=P30-L*S*L';
ee(k)=-F*Xtah(:,k);
Xtah(:,k+1)=f*Xtah(:,k)-B*u(k)+K*(zz(k,:)'-H*Xtah(:,k));
test(:,k+1)=test(:,k)+L*(zz(k,:)'-H*Xtah(:,k));
olbfn=olbfn+(1/2)*log(det(H* P1*H'+R2))+(1/2)*(zz(k,:)'-H*Xtah(:,k))'*inv(H*
P1*H'+R2)*(zz(k,:)'-H*Xtah(:,k));
P20=P2;
P10=P1;
P30=P3;
end
figure
subplot(2,1,1)
plot(zz(:,1))
xlabel('a')
subplot(2,1,2)
plot(zz(:,2))
xlabel('y')
figure
Xtah=Xtah';
subplot(2,1,1)
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
plot(Xtah(:,1),'r-')
hold on
plot(zz(:,1))
xlabel('x1')
subplot(2,1,2)
plot(Xtah(:,2),'r-')
hold on
plot(zz(:,2))
xlabel('x2')
test=test';
figure
plot(ee,'r')
xlabel('optimal control-kirmizi (gerçek kontrol-mavi)')
hold on
plot(u)
figure
subplot(2,1,1)
plot(test(:,1))
xlabel('ro1')
subplot(2,1,2)
plot(test(:,2))
xlabel('ro2')
figure
subplot(2,1,1)
plot(test(:,3))
xlabel('r')
subplot(2,1,2)
plot(test(:,4))
xlabel('b')
figure
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
plot(test(:,5))
xlabel('gama')
corrcoef(ee(35:n),u(35:n))
%Kısıtlı Tahmin
% R,Q,W matrislerindeki parametreler bilinmedğinde
%uygulanan kontrol bilindiğinde tahmin
% $x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+G*v1(k)$ 
% $y(k)=H*x(k)+v2(k)$ 
%cov(v1)=R1,cov(v2)=R2
clc
clear all
close all
beta=1;
r=-0.08;
b=30.05;
gama=.9;
ro1=1.1;
ro2=-.4;
G=[1 0
   0 1
   0 0
   0 0];
H=[1 0 0 0
   0 1 0 0];
qqq=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
R1=eye(2)*.1;
R2(1,1)=130.6573^2;
R2(2,2)=.3863^2;
load kontrolveri.txt
u=kontrolveri(:,3);
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
zz=[kontrolveri(:,1) kontrolveri(:,2)];
n=length(u);
d=[.9
    2.2];
D=[1 1 0 0 0
    1 0 0 0 1];
%ilerletilmiş Kalman Filtresi
Xtah=zeros(4,1)+1;
test(1,1)=ro1;
test(2,1)=ro2;
test(3,1)=r;
test(4,1)=b;
test(5,1)=gama;
tests(1,1)=ro1;
tests(2,1)=ro2;
tests(3,1)=r;
tests(4,1)=b;
tests(5,1)=gama;
P10=eye(4)*.1;
P30=eye(5)*.01;
P20=zeros(4,5)+.001;
P=eye(4)*.02;
R1=G*R1*G';
olbfn=n*log(2*pi);
for k=1:n
x1=Xtah(1,k);
x2=Xtah(2,k);
x3=Xtah(3,k);
x4=Xtah(4,k);
ro1=test(1,k);
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
ro2=test(2,k);
r=test(3,k);
b=test(4,k);
gama=test(5,k);
A=[1 0 0 0
    0 ro1 ro2 0
    0 1 0 0
    0 0 0 1];
B=[1 0 0 0]';
R=[r^2 0 r -r*b
    0 0 0 0
    r 0 1 -b
    -r*b 0 -b b^2];
Q=gama+(r+1)^2;
W=[-r-r^2 0 -1-r b+r*b]';
P1=R+beta*A'*P*A-(W+beta*A'*P*B)*(inv(Q+beta*B'*P*B))*(beta*B'*P*A+W');
P=P1;
F=(inv(Q+beta*B'*P1*B))*(beta*B'*P1*A+W');
f=A-B*F;
c=beta/((gama^2+(r+1)^2)+beta*P1(1,1));
c11 =-beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*P1(1,2)*x2;
c12 =-beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*P1(1,2)*x3;
c13 =(beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(P1(1,1)-r^2-r)*(2*r+2)-
beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*(-2*r-
1))*x1+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(ro1*P1(1,2)+P1(1,3))*x2*(2*r+2)+beta/
((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(P1(1,2)*ro2+1-
r)*x3*(2*r+2)+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*x3+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,
1))^2*(P1(1,4)-b-r*b)*x4*(2*r+2)+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*b*x4;
c14 =-beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))*(-1-r)*x4;
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
c15 =beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(P1(1,1)-r^2-
r)*x1+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(ro1*P1(1,2)+P1(1,3))*x2+beta/((r+1)^2+
gama+beta*P1(1,1))^2*(P1(1,2)*ro2+1-
r)*x3+beta/((r+1)^2+gama+beta*P1(1,1))^2*(P1(1,4)-b-r*b)*x4;
M=[ c11 c12 c13 c14 c15
    x2 x3 0 0 0
    0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0];
S=H*P10*H'+R2;
L=P20'*H'*inv(S);
K=(f*P10*H'+M*P20'*H')*inv(S);
P1=f*P10*f+f*P20*M'+M*P20*f+M*P30*M'-K*S*K'+R1;
L=P20'*H'*inv(S);
P2=f*P20+M*P30-K*S*L';
P3=P30-L*S*L';
ee(k)=-F*Xtah(:,k);
Xtah(:,k+1)=f*Xtah(:,k)-B*u(k)+K*(zz(k,:)-H*Xtah(:,k));
test(:,k+1)=test(:,k)+L*(zz(k,:)-H*Xtah(:,k));
tests(:,k+1)=test(:,k)-D'*inv(D*D')*(D*test(:,k)-d);
olbfn=olbfn+(1/2)*log(det(H* P1*H'+R2))+(1/2)*(zz(k,:)-H*Xtah(:,k))'*inv(H*
P1*H'+R2)*(zz(k,:)-H*Xtah(:,k));
P20=P2;
P10=P1;
P30=P3;
end
figure
Xtah=Xtah';
subplot(2,1,1)
plot(Xtah(:,1),'r-')
hold on
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
plot(zz(:,1))
xlabel('x1')
subplot(2,1,2)
plot(Xtah(:,2),'r-')
hold on
plot(zz(:,2))
xlabel('x2')
test=test';
tests=tests';
figure
plot(ee,'r')
xlabel('optimal kontrol kirmizi (mavi gercek kontrol)')
hold on
plot(u)
figure
subplot(2,1,1)
plot(tests(:,1))
xlabel('ro1')
subplot(2,1,2)
plot(tests(:,2))
xlabel('ro2')
figure
subplot(2,1,1)
plot(test(:,3))
xlabel('r')
subplot(2,1,2)
plot(tests(:,5))
xlabel('gama')
figure
plot(test(:,4))
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
xlabel('b')
corrcoef(ee(35:n),u(35:n))
%Ençok Olabilirlik yöntemiyle tahmin
function olbfm=hanlog(teta)
global y u
n=length(y);
beta=1;
ro1=teta(1);
ro2=teta(2);
r=teta(3);
b=teta(4);
gama=teta(5);
A=[1 0 0 0
    0 ro1 ro2 0
    0 1 0 0
    0 0 0 1];
B=[1 0 0 0]';
R=[r^2 r 0 -r*b
    r 1 0 -b
    0 0 0 0
    -r*b -b 0 b^2];
Q=1+gama;
W=[-r -1 0 b]';
H=[1 0 0 0
    0 1 0 0];
G=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
%kalman Filtresi
Xtah(1:3,:)=zeros(3,1)+.1;
Xtah(4,1)=1;
PP=eye(4)*.1;
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
RR=eye(2)*.01;
QQ=eye(4)*.01;
lamda=1;
P=eye(4)*.01;
olbfn=n*log(2*pi);
for k= 1:n
P1=R+beta*A'*P*A-(W+beta*A'*P*B)*(inv(Q+beta*B'*P*B))*(beta*B'*P*A+W');
F=inv(Q+beta*B'*P1*B)*(beta*B'*P1*A+W');
uopt(:,k)=-F*Xtah(:,k);
P1=P;
X_ong=(A-B*F)*Xtah(:,k)-B*u(k);
Z_ong=H*X_ong;
MR=y(k,:)-Z_ong;
P_ong=lamda*((A-B*F)*P*(A-B*F)'+G*QQ*G');
olbfn=olbfn+(1/2)*log(det(H* P_ong*H'+RR))+(1/2)*(MR)'*inv(H* P_ong*H'+RR)*(MR);
S=RR+H*P_ong*H';
K=P_ong*H'*inv(S);
Xtah(:,k+1)=X_ong+K*MR;
P=(eye(4)-K*H)*P_ong;
end
global y u
clc
%Modelden veri üretme
%x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+w(k)
%y(k)=H*x(k)+v(k)
randn('seed',0)
load kontrolveri.txt
beta=1;
u=kontrolveri(:,3);
y=[kontrolveri(:,1) kontrolveri(:,2)];
```

### EK 3 Ekonomi Örneği 1 için Matlab Programları (devam)

```
%gercek degerler: ro1=1.2;ro2=-.3;r=-0.0526;b=30;gama=1;;beta=1;
%baslangic degerlerinin verilmesi
ro1=1.3;
ro2=-.4;
r=-0.06;
b=40;
gama=1.5;
tetao=[ro1 ro2 r b gama]';
Deq=[0 0 0 1 1
      1 0 0 0 1
      1 1 0 0 0];
deq=[31
      2.2
      .9];
%olabilirligin maksimize edilmesi(neg.olb.minimizasyonu)
[tetastar,fonk,kontrol,ozellik,grad,hessian]=fminunc('hanlog',tetao,optimset('display','ite
r'))
tetastar
d1=1.2;
d2=-.3;
d3=-.0526;
d4=30;
d5=1;
gercek=[d1 d2 d3 d4 d5]
standarthata=diag(sqrt(inv(hessian)))
% Modelden veri üretme ve kontrol
clc
clear all
close all
%  $x(k+1)=a*x(k)+b*u(k)+w(k)$ ;  $y(k)=h*x(k)+v(k)$ 
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları

```
randn('seed',0)
n=200;
alpha1 = 0.1;
alpha2 = 0.1;
alpha3 = 0.1;
alpha4 = 0.1;
alphay = 0.1;
beta1 = 1.0;
beta2 = 0.1;
betar = 0.1;
lamday=.7;
G=[ 1 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 1 ;
    0 0 ];
H = [ 1 0 0 0 0 0 ;
      0 0 0 0 1 0 ];
A = [ alpha1 alpha2 alpha3 alpha4 alphay 0;
      1 0 0 0 0 0 ;
      0 1 0 0 0 0 ;
      0 0 1 0 0 0 ;
      betar 0 0 0 beta1 beta2;
      0 0 0 0 1 0 ];
B = [ 0
      0
      0
      0
      -betar
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
0];
R=[1-lamday 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 lamday 0 ;
    0 0 0 0 0 0;];
Q=0;
x(1,1)=10;
x(2,1)=10;
x(3,1)=10;
x(4,1)=10;
x(5,1)=10;
x(6,1)=10;
beta=1;
W=0;
p=eye(6)*0.1;
for k=1:n
for jj=1:20
p1=R+beta*A'*p*A-(beta*A'*p*B+W)*inv(Q+beta*B'*p*B)*(beta*B'*p*A+W');
p=p1;
end
f=inv(Q+beta*B'*p1*B)*(beta*B'*p1*A+W');
u(:,k)=-f*x(:,k);
x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(:,k)+randn(6,1)*.2;
y(:,k)=H*x(:,k)+randn(2,1)*.2;
p=p1;
end
dosya=[y' u'];
save kontdata.txt dosya -ascii
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
axis([-100 100 -100 100])
ff1=f;
pp1=p1;
subplot(2,1,1)
plot(y(1,:),'b')
xlabel('y(t) gözlem 1')
subplot(2,1,2)
plot(y(2,:),'b')
xlabel('y(t) gözlem 2')
figure
% kf
Xest=zeros(6,1)+1;
PP=eye(6)*1;
RR=eye(2)*1;
QQ=eye(6)*1;
landa=1.0;
p=eye(6)*0.01;
for k=1:n
p1=R+beta*A'*p*A-(beta*A'*p*B+W)*inv(Q+beta*B'*p*B)*(beta*B'*p*A+W');
f=inv(Q+beta*B'*p1*B)*(beta*B'*p1*A+W');
uu(:,k)=-f*Xest(:,k);
p=p1;
X_pre=A*Xest(:,k)+B*uu(k);
Z_pre=H*X_pre;
MR=y(:,k)-Z_pre;
P_pre=landa*(A*PP*A'+QQ);
S=RR+H*P_pre*H';
K=P_pre*H'*inv(S);
Xest(:,k+1)=X_pre+K*MR;
P=(eye(6)-K*H)*P_pre;
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
end
subplot(3,1,1)
plot(x(1,:), 'b')
hold on
plot(Xest(1,:), 'r')
xlabel('a(t)')
subplot(3,1,2)
plot(x(2,:), 'b')
hold on
plot(Xest(2,:), 'r')
xlabel('y(t)')
subplot(3,1,3)
plot(x(3,:), 'b')
hold on
plot(Xest(3,:), 'r')
xlabel('y(t-1)')
figure
plot(u, 'b')
hold on
plot(uu, 'r')
xlabel('i(t) kontrol')
% bütün parametreler tahmin ediliyor
% ilk olarak kasımt5.m çalıştırılacak
% kasımt5verili.m
% R matrisindeki parametreler bilinmediğinde
% lamdapi+lamday=1
% lamdapi=1-lamday alındı
%  $x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+G*v1(k)$ 
%  $y(k)=H*x(k)+v2(k)$ 
%  $Cov(v1)=R1, Cov(v2)=R2$ 
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
clc
clear
close all
%gercek degerler
%alpha1 = 0.1;alpha2 = 0.1;%alpha3 = 0.1;alpha4 = 0.1;
%alphay = 0.1;beta1 = 1.0;beta2 = 0.1;betar = 0.1; lamday=.7;
alpha1 = 0.15;
alpha2 = 0.15;
alpha3 = 0.15;
alpha4 = 0.12;
alphay = .14;
beta1 = .8;
beta2 = .15;
betar = 0.15;
G=[ 1 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 1 ;
    0 0 ];
H = [ 1 0 0 0 0 0 ;
      0 0 0 0 1 0 ];
R1=eye(2)*.1;
R2(1,1)=.93^2;
R2(2,2)=.786^2;
load kontdata.txt
u=kontdata(:,3);
zz = [ kontdata(:,1) kontdata(:,2) ];
n=length(u);
subplot(2,1,1)
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
plot(zz(:,1),'b')
xlabel('p')
subplot(2,1,2)
plot(zz(:,2),'b')
xlabel('y')
% İlerletilmiş Kalman Filtresi
Xest=zeros(6,1)+.1;
Test(1,1)=alpha1;
Test(2,1)=alpha2;
Test(3,1)=alpha3;
Test(4,1)=alpha4;
Test(5,1)=alphay;
Test(6,1)=beta1;
Test(7,1)=beta2;
Test(8,1)=betar;
Test(9,1)=.8;
P10=eye(6)*1;
P30=eye(9)*.1;
P30(5,5)=.02;
P20=zeros(6,9)+.01;
p=eye(6)*1;
R1=G*R1*G';
for k=1:n
x1=Xest(1,k);
x2=Xest(2,k);
x3=Xest(3,k);
x4=Xest(4,k);
x5=Xest(5,k);
x6=Xest(6,k);
alpha1=Test(1,k);
```

#### EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
alpha2=Test(2,k);
alpha3=Test(3,k);
alpha4=Test(4,k);
alphay=Test(5,k);
beta1=Test(6,k);
beta2=Test(7,k);
betar=Test(8,k);
lamday=Test(9,k);
A = [ alpha1 alpha2 alpha3 alpha4 alphay 0;
      1 0 0 0 0 0 ;
      0 1 0 0 0 0 ;
      0 0 1 0 0 0 ;
      betar 0 0 0 beta1 beta2;
      0 0 0 0 1 0 ] ;
B = [ 0
      0
      0
      0
      -betar
      0] ;
R=[1-lamday 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 lamday 0 ;
   0 0 0 0 0 0];
Q=0;
p1=R+A'*p*A-(A'*p*B)*inv(Q+B'*p*B)*(B'*p*A);
p=p1;
f=inv(Q+B'*p1*B)*(B'*p1*A);
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

$$F=A-B*f;$$

$$c1=[x1, x2, x3, x4, x5, 0, 0, 0, 0];$$

$$c2=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];$$

$$c3=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];$$

$$c4=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];$$

$$c6=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];$$

$$c5(1,1)=(-2*\alpha1*x1-\alpha2*x2-\alpha3*x3-\alpha4*x4-\alpha5*x5)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1);$$

$$c5(1,2)=(-x1-x2*\alpha1)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1);$$

$$c5(1,3)=(-x2-x3*\alpha1)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1);$$

$$c5(1,4)=(-x3-\alpha1*x4)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1);$$

$$c5(1,5)=-\alpha1*x5*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1)+(-x1*\alpha1^2-x1*\alpha2-x2*\alpha1*\alpha2-x2*\alpha3-x3*\alpha1*\alpha3-x3*\alpha4-\alpha1*\alpha4*x4-\alpha1*\alpha*\alpha5)/(\lambda+\alpha*\alpha+1)-(-x1*\alpha1^2-x1*\alpha2-x2*\alpha1*\alpha2-x2*\alpha3-x3*\alpha1*\alpha3-x3*\alpha4-\alpha1*\alpha4*x4-\alpha1*\alpha*\alpha5)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1)^2*\alpha+\alpha;$$

$$c5(1,6)=0;$$

$$c5(1,7)=0;$$

$$c5(1,8)=0;$$

$$c5(1,9)=-(-x1*\alpha1^2-x1*\alpha2-x2*\alpha1*\alpha2-x2*\alpha3-x3*\alpha1*\alpha3-x3*\alpha4-\alpha1*\alpha4*x4-\alpha1*\alpha*\alpha5)*\alpha/(\lambda+\alpha*\alpha+1)^2;$$

$$M=[c1; c2; c3; c4; c5; c6];$$

$$S=H*P10*H'+R2;$$

$$L=P20*H'*\text{inv}(S);$$

$$K=(F*P10*H'+M*P20*H')*\text{inv}(S);$$

$$P1=F*P10*F'+F*P20*M'+M*P20*F'+M*P30*M'-K*S*K'+R1;$$

$$L=P20*H'*\text{inv}(S);$$

$$P2=F*P20+M*P30-K*S*L';$$

$$P3=P30-L*S*L';$$

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
ee(k)=-f*Xest(:,k);
Xest(:,k+1)=F*Xest(:,k)-B*u(k)+K*(zz(k,:)-H*Xest(:,k));
Test(:,k+1)=Test(:,k)+L*(zz(k,:)-H*Xest(:,k));
P20=P2;
P10=P1;
P30=P3;
end
figure
Xest=Xest';
subplot(2,1,1)
plot(Xest(:,2),'r-')
xlabel('x1')
subplot(2,1,2)
plot(Xest(:,6),'r-')
xlabel('x5')
Test=Test';
figure
plot(ee,'r')
xlabel('optimal kontrol kirmizi (mavi gercek kontrol)')
hold on
plot(u)
figure
subplot(4,1,1)
plot(Test(:,1))
xlabel('a1')
subplot(4,1,2)
plot(Test(:,2))
xlabel('a2')
subplot(4,1,3)
plot(Test(:,3))
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
xlabel('a3')
subplot(4,1,4)
plot(Test(:,4))
xlabel('a4')
figure
subplot(4,1,1)
plot(Test(:,5))
xlabel('alphay ')
subplot(4,1,2)
plot(Test(:,6))
xlabel('beta1 ')
subplot(4,1,3)
plot(Test(:,7))
xlabel('beta2 ')
subplot(4,1,4)
plot(Test(:,8))
xlabel('betar ')
figure
subplot(2,1,1)
plot(Test(:,9),'-')
xlabel('lamday')
lamdapi=1-Test(:,9);
subplot(2,1,2)
plot(lamdapi,'-')
xlabel('lamdapi')
corrcoef(ee(1:n),u(1:n))
corrcoef(ee(2:n),u(1:n-1))
corrcoef(ee(3:n),u(1:n-2))
% kasım51.m
%önce kasım5.m çalışacak
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
% R matrisindeki parametreler bilinmediğinde
% lamdapi+lamday=1
%  $x(k+1)=A*x(k)+B*u(k)+G*v1(k);y(k)=H*x(k)+v2(k)$ 
% Cov(v1)=R1;Cov(v2)=R2
clc
clear
close all
alpha1 = 0.15;
alpha2 = 0.15;
alpha3 = 0.15;
alpha4 = 0.12;
alphay = .14;
beta1 = .8;
beta2 = .15;
betar = 0.15;
G=[ 1 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 1 ;
    0 0 ];
H = [ 1 0 0 0 0 0 ;
      0 0 0 0 1 0 ];
R1=eye(2)*.1;
R2(1,1)=.93^2;
R2(2,2)=.786^2;
load kontdata.txt
u=kontdata(:,3);
zz = [ kontdata(:,1) kontdata(:,2) ];
n=length(u);
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
subplot(2,1,1)
plot(zz(:,1),'b')
xlabel('p')
subplot(2,1,2)
plot(zz(:,2),'b')
xlabel('y')
D=[1 1 0 0 0 0 0 0
    0 0 1 1 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 1 0 0
    0 0 0 0 0 1 1 0];
d=[.2
    .2
    1.1
    1.1];
% İlerletilmiş.Kalman Filtresi
Xest=zeros(6,1)+.1;
Test(1,1)=alpha1;
Test(2,1)=alpha2;
Test(3,1)=alpha3;
Test(4,1)=alpha4;
Test(5,1)=alphay;
Test(6,1)=beta1;
Test(7,1)=beta2;
Test(8,1)=betar;
Test(9,1)=.8;
Tests(1,1)=alpha1;
Tests(2,1)=alpha2;
Tests(3,1)=alpha3;
Tests(4,1)=alpha4;
Tests(5,1)=alphay;
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
Tests(6,1)=beta1;
Tests(7,1)=beta2;
Tests(8,1)=betar;
Tests(9,1)=.8;
P10=eye(6)*1;
P30=eye(9)*.1;
P30(5,5)=.02;
P20=zeros(6,9)+.01;
p=eye(6)*.1;
R1=G*R1*G';
for k=1:n
x1=Xest(1,k);
x2=Xest(2,k);
x3=Xest(3,k);
x4=Xest(4,k);
x5=Xest(5,k);
x6=Xest(6,k);
alpha1=Test(1,k);
alpha2=Test(2,k);
alpha3=Test(3,k);
alpha4=Test(4,k);
alphay=Test(5,k);
beta1=Test(6,k);
beta2=Test(7,k);
betar=Test(8,k);
lamday=Test(9,k);
A = [ alpha1 alpha2 alpha3 alpha4 alphay 0;
      1 0 0 0 0 0 ;
      0 1 0 0 0 0 ;
      0 0 1 0 0 0 ;
```

#### EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
betar 0 0 0 beta1 beta2;
0 0 0 0 1 0 ] ;
B = [ 0
      0
      0
      0
      -betar
      0] ;
R=[1-lamday 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 lamday 0 ;
   0 0 0 0 0 0];
Q=0;
p1=R+A'*p*A-(A'*p*B)*inv(Q+B'*p*B)*(B'*p*A);
p=p1;
f=inv(Q+B'*p1*B)*(B'*p1*A);
F=A-B*f;
c1=[ x1, x2, x3, x4, x5, 0, 0, 0, 0];
c2=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c3=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c4=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c6=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c5(1,1)=(-2*alpha1*x1-alpha2*x2-alpha3*x3-alpha4*x4-
alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,2)=(-x1-x2*alpha1)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,3)=(-x2-x3*alpha1)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,4)=(-x3-alpha1*x4)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
c5(1,5)=-alpha1*x5*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)+(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-
x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)/(lamday+alphay*alphay+1)-(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-
x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)^2*alphay+alphay;
c5(1,6)=0;
c5(1,7)=0;
c5(1,8)=0;
c5(1,9)=-(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-
x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)^2;
M=[c1; c2; c3; c4; c5; c6];
S=H*P10*H'+R2;
L=P20'*H'*inv(S);
K=(F*P10*H'+M*P20'*H')*inv(S);
P1=F*P10*F'+F*P20*M'+M*P20*F'+M*P30*M'-K*S*K'+R1;
L=P20'*H'*inv(S);
P2=F*P20+M*P30-K*S*L';
P3=P30-L*S*L';
ee(k)=-f*Xest(:,k);
Xest(:,k+1)=F*Xest(:,k)-B*u(k)+K*(zz(k,:)-H*Xest(:,k));
Test(:,k+1)=Test(:,k)+L*(zz(k,:)-H*Xest(:,k));
Tests(:,k+1)=Test(:,k)-D'*inv(D*D')*(D*Test(:,k)-d);
P20=P2;
P10=P1;
P30=P3;
end
figure
Xest=Xest';
subplot(2,1,1)
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
plot(Xest(:,2),'r-')
xlabel('x1')
subplot(2,1,2)
plot(Xest(:,6),'r-')
xlabel('x5')
Test=Test';
Tests=Tests';
figure
plot(ee,'r')
xlabel('optimal kontrol kırmızı (mavi gerçek kontrol)')
hold on
plot(u)
figure
subplot(4,1,1)
%plot(Test(:,1))
%hold on
plot(Tests(:,1),'r')
xlabel('a1')
subplot(4,1,2)
plot(Tests(:,2),'r')
xlabel('a2')
subplot(4,1,3)
%plot(Test(:,3))
%hold on
plot(Tests(:,3),'r')
xlabel('a3')
subplot(4,1,4)
plot(Tests(:,4),'r')
xlabel('a4')
figure
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
subplot(4,1,1)
plot(Tests(:,5),'r')
xlabel('alphay ')
subplot(4,1,2)
plot(Tests(:,6),'r')
xlabel('beta1 ')
subplot(4,1,3)
plot(Tests(:,7),'r')
xlabel('beta2 ')
subplot(4,1,4)
plot(Tests(:,8),'r')
xlabel('betar ')
figure
subplot(2,1,1)
plot(Test(:,9),'-')
xlabel('lamday')
hold on
lamdapi=1-Test(:,9);
subplot(2,1,2)
plot(lamdapi,'-')
hold on
xlabel('lamdapi')
%Gerçek veri kullanarak tahmin
clc
clear
close all
alpha1 = 0.70;
alpha2 = -0.10;
alpha3 = 0.28;
alpha4 = 0.12;
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
alphay = .14;
beta1 = 1.16;
beta2 = -0.25;
betar = -0.1;
G=[ 1 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 0 ;
    0 1 ;
    0 0 ];
H = [ 1 0 0 0 0 0 ;
      0 0 0 0 1 0 ];
R1=eye(2)*.01;
R2(1,1)=1.04^2;
R2(2,2)=1.07^2;
load model2dat1.txt
u=model2dat1(:,1);
zz = [ model2dat1(:,2) model2dat1(:,3) ];
n=length(u);
subplot(2,1,1)
plot(zz(:,1),'b')
xlabel('p')
subplot(2,1,2)
plot(zz(:,2),'b')
xlabel('y')
% E.kalman Filtresi
Xest=zeros(6,1)+.1;
Test(1,1)=alpha1;
Test(2,1)=alpha2;
Test(3,1)=alpha3;
```

#### EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
Test(4,1)=alpha4;
Test(5,1)=alphay;
Test(6,1)=beta1;
Test(7,1)=beta2;
Test(8,1)=betar;
Test(9,1)=.5;
P10=eye(6)*1;
P30=eye(9)*.1;
P30(5,5)=.02;
P20=zeros(6,9)+.01;
p=eye(6)*1;
R1=G*R1*G';
for k=1:n
x1=Xest(1,k);
x2=Xest(2,k);
x3=Xest(3,k);
x4=Xest(4,k);
x5=Xest(5,k);
x6=Xest(6,k);
alpha1=Test(1,k);
alpha2=Test(2,k);
alpha3=Test(3,k);
alpha4=Test(4,k);
alphay=Test(5,k);
beta1=Test(6,k);
beta2=Test(7,k);
betar=Test(8,k);
lamday=Test(9,k);
A = [ alpha1 alpha2 alpha3 alpha4 alphay 0;
      1 0 0 0 0 0 ;
```

#### EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
0 1 0 0 0 0 ;
0 0 1 0 0 0 ;
betar 0 0 0 beta1 beta2;
0 0 0 0 1 0 ] ;
B = [ 0
      0
      0
      0
      -betar
      0] ;
R=[1-lamday 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 lamday 0 ;
   0 0 0 0 0 0];
Q=0;
p1=R+A'*p*A-(A'*p*B)*inv(Q+B'*p*B)*(B'*p*A);
p=p1;
f=inv(Q+B'*p1*B)*(B'*p1*A);
F=A-B*f;
c1=[ x1, x2, x3, x4, x5, 0, 0, 0, 0];
c2=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c3=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c4=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c6=[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
c5(1,1)=(-2*alpha1*x1-alpha2*x2-alpha3*x3-alpha4*x4-
alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,2)=(-x1-x2*alpha1)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,3)=(-x2-x3*alpha1)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
```

#### EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
c5(1,4)=(-x3-alpha1*x4)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1);
c5(1,5)=-alpha1*x5*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)+(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-
x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)/(lamday+alphay*alphay+1)-(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-
x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)^2*alphay+alphay;
c5(1,6)=0;
c5(1,7)=0;
c5(1,8)=0;
c5(1,9)=-(-x1*alpha1^2-x1*alpha2-x2*alpha1*alpha2-x2*alpha3-x3*alpha1*alpha3-
x3*alpha4-alpha1*alpha4*x4-
alpha1*alphay*x5)*alphay/(lamday+alphay*alphay+1)^2;
M=[c1; c2; c3; c4; c5; c6];
S=H*P10*H'+R2;
L=P20'*H'*inv(S);
K=(F*P10*H'+M*P20'*H')*inv(S);
P1=F*P10*F'+F*P20*M'+M*P20*F'+M*P30*M'-K*S*K'+R1;
L=P20'*H'*inv(S);
P2=F*P20+M*P30-K*S*L';
P3=P30-L*S*L';
ee(k)=-f*Xest(:,k);
Xest(:,k+1)=F*Xest(:,k)-B*u(k)+K*(zz(k,:)'-H*Xest(:,k));
Test(:,k+1)=Test(:,k)+L*(zz(k,:)'-H*Xest(:,k));
P20=P2;
P10=P1;
P30=P3;
end
figure
Xest=Xest';
subplot(2,1,1)
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
plot(Xest(:,2),'r-')
xlabel('x1')
subplot(2,1,2)
plot(Xest(:,6),'r-')
xlabel('x5')
Test=Test';
figure
plot(ee,'r')
xlabel('optimal kontrol kırmızı (mavi gerçek kontrol)')
hold on
plot(u)
figure
subplot(4,1,1)
plot(Test(:,1))
xlabel('a1')
subplot(4,1,2)
plot(Test(:,2))
xlabel('a2')
subplot(4,1,3)
plot(Test(:,3))
xlabel('a3')
subplot(4,1,4)
plot(Test(:,4))
xlabel('a4')
figure
subplot(4,1,1)
plot(Test(:,5))
xlabel('alphay ')
subplot(4,1,2)
plot(Test(:,6))
```

## EK 4 Ekonomi Örneği 2 için Matlab Programları (devam)

```
xlabel('beta1 ')
subplot(4,1,3)
plot(Test(:,7))
xlabel('beta2 ')
subplot(4,1,4)
plot(Test(:,8))
xlabel('betar ')
figure
subplot(2,1,1)
plot(Test(:,9),'-')
xlabel('lamday')
lamdapi=1-Test(:,9);
subplot(2,1,2)
plot(lamdapi,'-')
xlabel('lamdapi')
```

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Esin KÖKSAL BABACAN  
Doğum Yeri :Ankara  
Doğum Tarihi :13.12.1978  
Medeni Hali :Evli  
Yabancı Dili :İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise :Kurtuluş Lisesi (1993-1996)  
Lisans :Ankara Üniversitesi (1996-2000)  
Yüksek Lisans :Ankara Üniversitesi (2000-2003)

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2002- )

### Yayımları (SCI ve diğer)

1. Köksal, Esin. Yoğunlaşma ve Seyrelme Fonksiyonları ile Hipotez Testi. VI. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, Gazi Üniversitesi İİBF Ekonometri Bölümü, 29-30 Mayıs 2003, Ankara.
2. Köksal, Esin; Öztürk, Fikri. Armax Modellerinde Parametre Tahmini ve Kontrol. İstatistik Araştırma Dergisi, Özel Sayı, Cilt 03, No 02, 73-87, Ağustos 2004.
3. Köksal, Esin; Özbek, Levent; Öztürk, Fikri. İlerletilmiş Kalman Filtresi ve Sistem Belirleme Üzerine Bir Çalışma. Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 25(2005) 9-18, Konya.
4. Köksal, Esin; Özbek, Levent; Öztürk, Fikri. İlerletilmiş Kalman Filtresi ve Bir Düzenlemesi, 4. İstatistik Kongresi, 8-12 Mayıs 2005, Antalya.
5. Arslan, Fahrettin; Köksal, Esin; Öztürk, Fikri. ARMAX Sistemlerinde Kontrol Problemi Üzerine Bir Çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, basımda.
6. Köksal, Esin; Özbek, Levent 2006. Kesikli Zaman Deterministik Durum-Uzay Modellerinde İlerletilmiş Kalman Filtresinin Yakınsaması 5. İstatistik Günleri Sempozyumu 2006, 24-27 Mayıs 2006, Antalya.

7. Köksal, Esin; Özbek, Levent 2006. Kısıtlı Durum Kalman Filtresi 5. İstatistik Günleri Sempozyumu 2006, 24-27 Mayıs 2006, Antalya.
8. Özbek, Levent; Efe, Murat; Yazıhan, Nuray; Köksal, Esin. Tümör Hücrelerinin Kılcal Damarlardan Geçirgenliğinin Online Tahmini 5. İstatistik Günleri Sempozyumu 2006, 24-27 Mayıs 2006, Antalya.
9. Köksal Babacan, Esin; Özbek, Levent; Efe, Murat. Stability of the Extended Kalman Filter When the States are Constrained. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 11, December 2008.