

**T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BİR UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYTEN AKIN

HAZİRAN, 2009

**MUĞLA
T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BİR UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYTEN AKIN

MUĞLA, 2009

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Doç. Dr. Mustafa GÜLSU danışmanlığında Ayten AKIN tarafından hazırlanan Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin İntegro-Diferansiyel Denklemler İçin Bir Uygulaması başlıklı tez, 17/09/2009 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mehmet SEZER

İmza : 

Danışman : Doç. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

İmza : 

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın yürütülmesinde bana yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen, kaynak ve fikirlerinden daima istifade ettiğim, gerek ders aşamasında, gerek tez aşamasında verdiği bilgiler açısından, kazandırdığı araştırma azmi ve çalışma gayreti bakımından tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Mustafa Gülsu'ya, Muğla Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve ders arkadaşlarıma, bana verdiği destek ve yardımları bakımından değerli arkadaşım Berna Bülbül'e, öğrenimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen annem, babam ve kardeşime, tezimin hazırlanmasında her zaman yanımda olan sevgili nişanlım Öner Bilge'ye teşekkürlerimi bir borç biliyorum.

Ayten AKIN

Muğla, Haziran 2009

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
TABLolar DİZİNİ	VIII
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
1.1. İntegral Denklemler	3
1.1.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	3
1.1.1.1. Lineer olan veya Lineer olmayan İntegral Denklemler	3
1.1.1.2. Tekil olan veya Tekil olmayan İntegral Denklemler	4
1.1.1.3. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması	4
1.1.1.4. Homojen olan veya Homojen olmayan İntegral Denklemler	6
1.1.1.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri	7
1.1.2. İntegro-Diferansiyel Denklemler	8
1.1.3. Parametrel İntegral Denklemler	9
2. KAYNAK ÖZETLERİ	10
2.1. Enterpolasyon	10
2.1.1. Polinom Enterpolasyonu	13
2.1.1.1. Lineer Enterpolasyon	13
2.1.1.2. Kuadratik Enterpolasyon	14
2.1.1.3. İleri Enterpolasyon için Newton Formülü	15
2.1.1.4. Geriye Enterpolasyon için Newton Formülü	18
2.1.1.5. Lagrange Enterpolasyon	18
2.1.2. Enterpolasyon İçin Hata Hesabı	19
2.1.3. Spline Enterpolasyonu	20
2.1.3.1. Lineer Spline Fonksiyonları	21
2.1.3.2. İkinci Derece Spline Fonksiyonları	22
2.1.3.3. Kübik Spline Fonksiyonları	24

3. MATERYAL ve YÖNTEM	28
3.1. Yüksek Mertebeden Başlangıç Değer Problemleri için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi	28
3.2. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri	42
4. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	66

**“DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BİR UYGULAMASI”**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayten AKIN

**MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

2009

ÖZET

Bu çalışmada; etkili bir yöntem olan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Karşılaşılan integraller için yeni teoremler, ispatları ile birlikte verilmiştir. Literatürde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemler örnek olarak çözülmüştür.

Bu yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar daha önceki araştırmaların sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Taylor Serisi, İntegro-Diferansiyel Denklemler,
Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Sayfa Adedi :

Tez Yöneticisi : Doç.Dr. Mustafa GÜLSU

**“AN APPLICATION OF DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD
FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS”**

(M.Sc.Thesis)

MUGLA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

2009

ABSTRACT

In this study; efficient technique named Differential Transform Method extended to solve the integro-differential equations. New theorems for the transformation of integrals are introduced and proved. The commonly encountered linear and nonlinear integro-differential equations are solved as an illustration for the efficiency of the method.

The numerical results obtained by present method are compared with the the earlier authors.

Key Words : Taylor series, Integro-Differential Equations,
Differential Transform Method

Page Number:

Adviser : Dr. Mustafa GÜLSU

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa No</u>
Şekil 1	Problem-1'in farklı N değerleri için yaklaşık çözümlerinin grafiği	35
Şekil 2	Problem-1'in farklı N değerleri için hata grafiği	37
Şekil 3	Problem-2'nin farklı N değerleri için yaklaşık çözümlerinin grafiği	40
Şekil 4	Problem-2'nin farklı N değerleri için hata grafiği	41
Şekil 5	Farklı yöntemlerin karşılaştırılmasına ait grafik	61

TABLolar DİZİNİ

<u>Tablo No</u>	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1 Fonksiyonların diferansiyel dönüşüm formları	30
Tablo 2 Problem-1'in farklı N değerleri için nümerik çözümleri	35
Tablo 3 Problem-1'in RKM ve DTM ile verilen hata değerleri	36
Tablo 4 Problem-2'nin farklı N değerleri için nümerik çözümleri	39
Tablo 5 Problem-2'nin RKM ve DTM ile verilen hata değerleri	40
Tablo 6 Problem-5'e ait sayısal sonuçlar	59

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

RKM : Runge Kutta Method

DTM : Differential Transformation Method (Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi)

ADM : Adomian Decomposition Method (Adomian'ın Ayrışma Yöntemi)

WGM : Wavelet-Galerkin Method

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler genel olarak, sürekli, zamana bağlı fiziksel problemleri tanımlamak için kullanılırlar. Bir çok kez bu tür problemler analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşıktır. Alternatif olarak bu tip fiziksel problemler için analitik çözüm yerine nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Literatüre bakıldığında Euler yöntemi, Taylor yöntemi ve Runge-Kutta yöntemleri başlangıç değer problemlerinin çözüm yöntemlerinin temelini oluştururlar. Yüksek mertebeden Taylor yöntemi de başlangıç değer problemlerinin çözümlerinde kullanılırlar. Bununla birlikte Taylor yöntemi yüksek mertebeden türevlerin hesabına gereksinim duyar.

Bu çalışmada Diferansiyel dönüşüm yönteminin integro-diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmıştır. Diferansiyel dönüşüm yöntemi, yaklaşık çözümleri sonlu Taylor serisi ile ifade etmektedir. Bu yöntem, Taylor yöntemlerinde olduğu gibi türevleri sembolik olarak hesaplama yerine, diferansiyel dönüşüm formüllerini kullanarak orijinal denklemden iteratif olarak bulmaktadır. Bu yöntem problemin tanımlı olduğu bölgede birbirinden farklı grid noktalarında Taylor seri açılımı ile çözümü verir.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi integro-diferansiyel denklemleri nümerik çözümlerini hızlı yakınsaklık oranı ve küçük hatalar ile veren önemli çözüm tekniklerinden biridir. Bu yöntemin avantajlarından biri lineer ve lineer olmayan sınır değer ve başlangıç değer problemlerine uygulanabilir olmasıdır.

M.J.Jang, diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak non-lineer diferansiyel denklem sistemini çözme konusunda çalışmalar yapmıştır.

[Jang, M.J., 1997]

C.L.Chen ve Y.C.Lui, diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak iki nokta sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini iteratif olarak vermiştir. Bu şekilde sınır değer problemlerinin analitik çözümü Taylor serisi açılımı ile verilmiştir. [Chen, C.L., v.d., 1998]

Literatürde ayrıca yapılan çalışmalar olarak Wavelet-Galerkin yöntemi [Avudainayagam, A., 2000], Lagrange interpolasyon yöntemi, Tau yöntemi,

Adomian ayrıştırma yöntemi, Taylor polinomlar yöntemi ve Haar fonksiyonlar yöntemi gibi yarı analitik sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Burada, diferansiyel dönüşüm yöntemi, integro diferansiyel denklemler için, başlangıç değer problemlerine genişletilmiş ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir. Ayrıca yöntemin hassasiyeti farklı örnekler üzerinde deneyerek bulunan yaklaşık çözümler diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Sonuçlar tablo ve şekillerle desteklenmiştir. Bulunan çözümlerin yeteri kadar doğrulukta olduğu gözlenmiştir.

1.1. İNTEGRAL DENKLEMLER

1.1.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

1.1.1.1. Lineer Olan Veya Lineer Olmayan İntegral Denklemler:

İntegral denklemler çeşitli şekillerde sınıflandırılmışlardır. Temel kavramlar açısından öncelikle, lineer integral denklemler ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılırlar.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.1)$$

yapısında bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklem de Lineer İntegral Denklem adını almaktadır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \quad (1.2)$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n . kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır.

Genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \Phi[x,t,u(t)]dt \quad (1.3)$$

integral denklemini de lineer olmayan integral denklem olmaktadır.

Bunların dışında, birden çok sayıda değişkeni bulunan,

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d K(x, y; t_1, t_2)u(t_1, t_2)dt_1 dt_2 \quad (1.4)$$

şeklinde integral denklemlerin de lineer olanı veya lineer olmayanı bulunmaktadır. Lineer olmayan integral denklemler teorisinin temel prensipleri A.M.Ljapunow, E.Schmidt, P.S.Urysohn ve A.Hammerstein tarafından bulunmuş ve geliştirilmiştir.

1.1.1.2. Tekil Olan Veya Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. (1.1) denklemi ile verilen $K(x,t)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$; $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem Tekil (Singüler) olmayan bir integral denklemdir. $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem Tekil (Singüler) İntegral Denklem sınıfına girecektir.

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} \quad (1.5)$$

şeklinde bir integral denklem, tekil integral denkleme bir örnektir. Ayrıca, integral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^\infty \sin xt.u(t)dt \quad (1.6)$$

ve

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}.u(t)dt \quad (1.7)$$

denklemleri bu türün birer örneğini oluşturmaktadırlar. Bunlardan ilkinde, denklemin ikinci yanı ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, $u(x)$ 'in Fourier Sinüs Transformasyonu, ikincisinde ise $u(x)$ 'in Laplace Transformasyonu olarak kullanılır.

1.1.1.3. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler yapılarına göre üç sınıfa ayrılırlar. Bilinmeyen fonksiyonun $u(x)$, çekirdek fonksiyonun $K(x,t)$ olduğu,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.8)$$

şeklinde bir integral denkleme I. Cins İntegral Denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu, verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.9)$$

şeklinde bir integral denklem de yine I. Cins İntegral Denklem'dir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ verilmiş olan fonksiyonlardır. Ancak bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere,

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek, (1.8) denklemi yapısında yazılabilirler.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t).u(t)dt$$

ve

$$e^x = x - \int_0^{1/2} x^2 t.u(t)dt$$

gibi denklemler, bu cins için birer örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.10)$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.11)$$

şeklindeki integral denklemler ise II.Cins İntegral Denklem'ler sınıfını oluşturmaktadır. Burada, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu, denklemin hem içinde hem dışında bulunmaktadır.

$$u(x) = \int_0^x e^{x+t}.u(t)dt$$

ve

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin(x+t)u(t)dt$$

bu tür denklemlere birer örnektir.

Bu iki cins integral denklemden başka, $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinmesi halinde

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.12)$$

şeklindeki integral denklemlere III.Cins İntegral Denklem denilmektedir. Örneğin,

$$x.u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt$$

denklemini, III.cins bir integral denklemdir.

Özel olarak, $\phi(x)=0$ ise (1.12) denklemini I.cins bir integral denkleme; $\phi(x)=1$ ise aynı denklem II.cins bir integral denkleme dönüşmektedir. Buradan, I. ve II.cins integral denklemlerin, III.cins integral denklemin birer özel hali olarak göz önüne alınabilmektedir.

1.1.1.4. Homojen ve Homojen olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları açısından sınıflandırılmaktadırlar. II.cins denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırmada, (1.10) ile verilen,

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemini, Homojen İntegral Denklem olarak adlandırılacaktır. Homojenliği bozucu bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu (1.11) ile verilen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere Homojen olmayan İntegral Denklem'ler denilmektedir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen integral denkleminin, kolayca görülebileceği gibi $u(x) = 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşık çözüm veya trivial çözüm denir.

Homojen integral denklemler, daha genel olarak

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin, $f(x) = 0$ olması haline uyan özel bir durumu olarak da göz önüne alınabilirler.

1.1.1.5. Volterra Ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Lineer veya homojen olduklarına bakılmaksızın,

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.13)$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.14)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.15)$$

$$\phi(x).u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.16)$$

şeklindeki denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır.

x değişkenin, $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.17)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.18)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.19)$$

$$\phi(x).u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.20)$$

şeklindeki denklemlere ise Fredholm İntegral Denklemleri denilmektedir.

Volterra ve Fredholm denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır.

1.1.2. İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu ile birlikte, bu bilinmeyen fonksiyonun türevlerini de barındıran integral denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir. $u(x)$ 'in sadece birinci mertebeden türevinin bulunduğu,

$$u'(x) = F\left\{x, u(x), \int_0^x K(x,t, u(t), u'(t))dt\right\} \quad (1.21)$$

şeklindeki bir denklem, birinci mertebeden integro-diferansiyel denkleme bir örnektir. Genel olarak bir integro-diferansiyel denklem,

$$u^{(n)}(x) = F\left\{x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right\} + \int_0^x K\left\{x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)\right\}dt \quad (1.22)$$

şeklinde verilir.

1.1.2. Parametrelİ İntegral Denklemler

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ bir parametre olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.23)$$

veya

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.24)$$

integral denklemleri parametrelİ integral denklemler olarak adlandırılır. Burada λ parametresi reel veya kompleks olabilir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Enterpolasyon

Katı bir cismin bir sıvı içerisinde erimesi olayını, söz gelimi bir miktar şeker içerisine su dökerek düzgün aralıklarla suda eriyen şeker miktarını gözleyelim. İlk anda erimenin çabuk olacağı ve sonra yavaşlayarak tamamıyla duracağı açıktır. Bu durum bir eğri ile ifade edilmek istendiğinde kullanılacak yöntemler tamamıyla yaklaşık yöntemlerdir.

Bilim ve teknikte kullanılan eğriler, verilen bir fonksiyona göre çizilen veya deney sonucunda elde edilen eğriler olmak üzere iki kısma ayrılır. Fonksiyonlara ait formüllerin belli olduğu durumlarda söz konusu eğrileri çizmek için bilindiği gibi özel noktalar, tepe noktaları, varsa asimptotlar bulunarak değişim tabloları hazırlanır. Deney ya da olay sonucunda elde edilen deneysel eğrilerin formülü olmadığından yukarıda anlatıldığı şekliyle eğrileri çizmek mümkün olamaz. Bunun yerine, deney veya olay sırasında ölçülerin verdikleri değerlerden bir tablo yapıp dik koordinat sisteminde bu noktalar apsisi ve ordinat olarak kabul edilir ve sonra bu noktalar birleştirilerek deneysel eğriler veya diyagramlar çizilirler. Deney sonunda elde edilen bu eğri veya diyagramların bazıları bir fonksiyonla ifade edilebilir, bazıları ise edilemezler.

Şayet deneysel eğriler bir fonksiyonla ifade edilebiliyorsa bu fonksiyonlara Empirik Fonksiyon adı verilir. Bu tür empirik fonksiyonları bulmak için kullanılan yöntemlerden biri de Enterpolasyon yöntemidir.

Enterpolasyon kelimesi, elemanter anlamda bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemidir. Aynı deyim geniş anlamda, verilmiş bir fonksiyonunun daha basit bir $p(x)$ polinomu ile gösterilmesi veya onun yerine kullanılması işlemi için de kullanılır. O halde polinomlarla işlem yapmak kolay olduğundan ve polinomların birçok özellikleri bilindiğinden, fonksiyonların yerine onları temsil edebilecek polinomları araştırıp kullanmak büyük kolaylıklar sağlar.

Bir aralıkta, bir $f(x)$ fonksiyonu ile bir $p(x)$ polinomunun aldığı değerler farkı istenildiği kadar küçük olabiliyorsa, $p(x)$ polinomuna $f(x)$ fonksiyonunun bir Yaklaşma Polinomu denir. Böyle durumlarda $f(x)$ fonksiyonu yerine $p(x)$ polinomunu incelemek yeterli olabilir

Verilen bir noktadaki değeri ile türevleri $f(x)$ fonksiyonu ile aynı olan polinoma Uyumlu Polinomlar adı verilir.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$f'(x) = e^x$$

olacağından

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1$$

dir. Bu fonksiyonun yerine $y = ax + b$ tipinde birinci dereceden bir uyumlu polinom alınırsa a ve b katsayıları aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$p'(x) = a$$

olduğundan

$$p(0) = b, \quad p'(0) = a$$

olacağından,

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$b = 1, \quad a = 1$$

elde edilir. Böylece aranan polinom

$$p(x) = x + 1$$

olarak bulunur. İkinci dereceden bir $Q(x)$ polinomu ile $f(x)$ 'e yaklaşmak isteniyorsa; verilen bir noktadaki $f(x)$ 'in değeri, birinci ve ikinci türevleri, aynı noktada $Q(x)$ 'in değeri birinci ve ikinci türevlerine eşitlenir.

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad Q'(x) = 2ax + b, \quad Q''(x) = 2a$$

olduğundan,

$$Q(0) = c, \quad Q'(0) = b, \quad Q''(0) = 2a$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x$$

olduğundan,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1$$

bulunur. Böylece,

$$f(0) = Q(0), \quad f'(0) = Q'(0), \quad f''(0) = Q''(0)$$

göz önüne alınarak,

$$c = 1, \quad b = 1, \quad a = 1/2$$

elde edilir. Böylece,

$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

olarak bulunur. Bulunan yaklaşım polinomu $A(0,1)$ noktası komşuluğunda, $f(x)$ fonksiyonuna $p(x)$ polinomundan daha yakın olur. Genel olarak n . dereceden bir polinom alınması halinde, $f(x)$ fonksiyonuna daha çok yaklaşacağı açıktır.

Bu halde,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

dır.

$$p(0) = f(0) = a_0$$

$$p'(0) = f'(0) = a_1$$

$$p''(0) = f''(0) = 2a_2$$

$$p'''(0) = f'''(0) = 3!.a_3$$

.....

$$p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) = n!.a_n$$

eşitliklerinden,

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0); \quad k=0,1,2,\dots,n$$

elde edilir. Böylece,

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

elde edilir. Bu sonuç Maclaurin formülünden başka bir şey değildir.

$x=0$ yerine $x=a$ noktası alınırsa,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \cong f(x)$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun her mertebeden türevleri belli ise, n. dereceden bir polinom ile bu fonksiyona yaklaşım yapılabilir.

Fonksiyonun bir noktadaki değeri ve n. mertebeye kadarki türevleri belli olmayıp, sadece çeşitli noktadaki değerleri belli ise bu durumda kullanılacak yaklaşım yöntemleri Enterpolasyon yöntemleridir. Bu durumda verilen (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , noktalarına Enterpolasyon noktaları adı verilir.

$p(x)$ 'in polinom olması durumunda, $f(x)$ 'in $p(x)$ yardımıyla, Enterpolasyon yapılarak ifade edilmesi işlemine Polinom Enterpolasyon denir. $p(x)$ bir sonlu trigonometrik seri olduğunda ise Trigonometrik Enterpolasyon söz konusu olur. Bunun gibi $p(x)$ Enterpolasyon fonksiyonu üstel fonksiyonların bir kombinasyonu, bir kuvvet serisi, Hermite polinomu veya Legendre polinomu da olabilir.

2.1.1 Polinom Enterpolasyonu

2.1.1.1 Lineer Enterpolasyon:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x_k, x_{k+1} gibi farklı iki noktadaki değeri biliniyorsa, bu durumda $x \in [x_k, x_{k+1}]$ noktasındaki değerinin hesaplanması, bu iki noktadan geçen birinci dereceden bir polinom yardımıyla yapılabilir.

$$A[x_k, f(x_k)], \quad B[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$$

noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

dır. O halde bu iki noktadan geçen doğru denklemi;

$$y - f(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k)$$

olur.

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta y_k, \quad x_{k+1} - x_k = h$$

denirse

$$y - y_k = \frac{\Delta y_k}{h} (x - x_k)$$

olduğundan,

$$y = y_k + \frac{\Delta y_k}{h} (x - x_k)$$

elde edilir.

Örnek: $\ln 1 = 0$, $\ln 6 = 1.7917595$ değerleri biliniyorken $\ln 2$ değerini Lineer Enterpolasyon yardımıyla hesaplayalım.:

$$y = y_k + \frac{\Delta y_k}{h} (x - x_k)$$

formülünden,

$$\ln 2 = \ln 1 + \frac{\ln 6 - \ln 1}{6 - 1} (2 - 1) = 0.35835190$$

elde edilir. Oysa $\ln 2$ 'nin gerçek değeri bilindiği gibi 0.69314718 dir. Dikkat edilecek olursa böyle bir yaklaşımda bilinen iki noktanın apsisleri arasındaki fark fazla olduğunda sonuç gerçekçi olmamaktadır. Şimdi $\ln 6$ yerine $\ln 4 = 1.3862944$ değerini alalım. Bu durumda,

$$\ln 2 = \ln 1 + \frac{\ln 4 - \ln 1}{4 - 1} (2 - 1) = 0.46209813$$

bulunur ki bu gerçek $\ln 2$ değerine daha yakın bir sonuçtur.

2.1.1.2. Kuadratik Enterpolasyon

$f(x)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) , (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) gibi üç noktası belli ise $[x_0, x_2]$ aralığındaki herhangi bir x noktasındaki fonksiyon değeri, bu üç noktadan

geçen parabolü, yaklaşım polinomu seçerek bulunabilir.

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

kabul edelim.

$$p(x_0) = y(x_0), \quad p(x_1) = y(x_1), \quad p(x_2) = y(x_2)$$

olacak şekilde a_0 , a_1 , a_2 katsayıları belirlenecektir.

$$p(x_0) = a_0$$

olduğundan

$$a_0 = y_0$$

bulunur.

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) = y_1$$

ifadesinden

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

elde edilir.

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

eşitliğinde a_0 ve a_1 yerine yukarıda hesaplanan değerler yazılarak,

$$a_2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) / (x_2 - x_0)$$

elde edilir. Böylece $p(x)$ polinomu

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)}$$

şeklinde hesaplanır.

2.1.1.3. İleri Enterpolasyon İçin Newton Formülü

Eşit aralıklı $(n+1)$ noktada fonksiyon değerlerinin bilindiğini varsayalım.

Enterpolasyon polinomu,

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

şeklinde n. dereceden bir polinom olsun. Burada a_0, a_1, \dots, a_n katsayıları,

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$$

konularak hesaplanır.

$$P_n(x_0) = a_0 = y_0 \text{ ve } P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

ifadelerinden

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

bulunur.

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

denkleminde a_0 ve a_1 değerleri yerlerine yazılarak,

$$y_2 - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

elde edilir. Son denklemden a_2 çekilerek,

$$a_2 = \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

elde edilir. Bölünmüş farklar cinsinden ifade edilecek olursa,

$$a_2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) / (x_2 - x_0) = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0]$$

yazılabilir. Benzer şekilde devam edilerek,

$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0]$$

elde edilir. n=3 olması halinde,

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) \\ + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

yazılabilir. Burada,

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

ve

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

dır.

Eşit aralıklı noktalarda fonksiyon değerlerinin belli olması halinde yukarıdaki formüller biraz daha basitleşir.

$$x_0, x_1 = x_0 + h$$

gibi iki noktanın verilmesi durumunda,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$$

yazılabilir.

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$$

gibi üç noktanın verilmesi durumunda,

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

olur. Genel olarak,

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$$

gibi $(n + 1)$ adet noktanın verilmesi durumunda,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

dir.

2.1.1.4. Geriye Enterpolasyon İçin Newton Formülü

Eşit aralıklı $(n+1)$ adet noktada fonksiyon değerleri verilmiş olsun.

Enterpolasyon polinomu olarak,

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\ + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)$$

şeklinde polinomu göz önüne alalım. Burada da yine a_0, a_1, \dots, a_n katsayılarını,

$$P_n(x_n) = y_n, \quad P_n(x_{n-1}) = y_{n-1}, \quad \dots, \quad P_n(x_0) = y_0$$

eşitliklerinden elde edilir.

$$p(x_n) = a_0 = y_n \quad \text{ve} \quad p(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1}$$

den,

$$y_n + a_1(-h) = y_{n-1}$$

veya

$$a_1 = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla y_n}{h}$$

elde edilir.

$$p(x_{n-2}) = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_{n-2}$$

den

$$y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h}(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_{n-2}$$

elde edilir. Buradan da,

$$a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2!h^2} = \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2}$$

bulunur. Benzer şekilde devam ederek,

$$a_k = \frac{\nabla^k y_n}{k!h^k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

elde edilir.

2.1.1.5. Lagrange Enterpolasyonu

Bağımsız değişken değerlerinin eşit aralıklı olması halinde Newton

türevleri sürekli olmak üzere eğer bir $p(x)$ polinomu aynı x_0, x_1, \dots, x_n noktalarından geçen ve n . dereceden bir Enterpolasyon polinomu ise (x_0, x_n) aralığındaki bir x değeri için hata, $x_0 \leq x \leq x_n$ olmak üzere,

$$H_n(x) = f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

formülü ile verilir. Eğer ayırık noktalar eşit aralıklı olup, noktalar arasındaki fark h ise, $x_0 \leq x \leq x_n$ için,

$$M_{n+1} = \text{Max} |f^{(n+1)}(x)|$$

olmak üzere,

$$|f(x) - p(x)| < \frac{h^{n+1}}{4(n + 1)!} M_{n+1}(\alpha, \beta); \quad \alpha < x < \beta$$

yazılabilir.

M_{n+1} değeri her zaman kolay hesaplanamayabilir. Ancak $f(x)$, $(n+1)$. dereceden polinom ise,

$$f(x) = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + \dots + A_n$$

$$f^{(n+1)}(x) = (n + 1)! A_0$$

olacağından,

$$\nabla^{n+1} f(x) = h^{n+1} A_0 (n + 1)!$$

konularak,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1}}$$

şeklinde bulunur.

2.1.3. Spline Enterpolasyonu

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange Enterpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu

nedenlerden dolayı, peşpeşe gelen iki veri arasında birinci, ikinci yada üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı Spline Enterpolasyon yöntemi geliştirilmiştir. Spline Enterpolasyonu veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek, her bir aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım esasına dayanır.

2.1.3.1 Lineer Spline Fonksiyonları

Veri noktalarını çeşitli noktalara bölerek her bir aralıkta doğrusal fonksiyonlar kullanma esasına dayanan yöntem kullanım kolaylığı bakımından tercih edilmektedir.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + m_0(x - x_0) & ; & \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x) &= f(x_1) + m_1(x - x_1) & ; & \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ & \dots\dots\dots & ; & \quad \dots\dots\dots \\ f(x) &= f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & ; & \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned}$$

Burada m_i ler doğruların eğimleri olup,

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dir. Bu şekilde tanımlamadan sonra $[x_0, x_n]$ aralığındaki herhangi bir $x = x_i$ noktasında fonksiyon değeri hesaplanabilir.

Örnek:

x	3.0	4.5	7.0	9.0
f(x)	2.5	1.0	2.5	0.5

tablosu veriliyor. Lineer Enterpolasyon yöntemi ile en uygun yaklaşımı bulalım.

$$m_0 = \frac{1 - 2.5}{4.5 - 3} = -1 \quad m_1 = \frac{2.5 - 1}{7 - 4.5} = 0.6 \quad m_2 = \frac{0.5 - 2.5}{9 - 7} = -1$$

olduğundan,

$$f_1(x) = 2.5 - 1(x - 3) = -x + 5.5$$

$$f_2(x) = 1 + 0.6(x - 4.5) = 0.6x - 1.7$$

$$f_3(x) = 2.5 - 1(x - 9) = -x + 11.5$$

bulunur. Böylece,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & ; 3 \leq x \leq 4.5 \\ 0.6x - 1.7 & ; 4.5 \leq x \leq 7 \\ -x + 11.5 & ; 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

elde edilir.

2.1.3.2. İkinci Derece Spline Fonksiyonları (Kuadratik Spline Fonksiyonları)

Bu yöntemde, her bir aralık için seçilen fonksiyonlar, (n+1) adet nokta için,

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i ; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

şeklinde dir. Bu durumda 3n tane bilinmeyen belirlenmesi gerekmektedir.

Bu halde n adet aralıkta tanımlanacak olan n tane ikinci derece polinomun katsayılarını hesaplamak için gerekli olan 3n adet koşul aşağıdaki kabuller sonucunda elde edilir.

i. İç noktalarda fonksiyon değerleri eşittir. Yani,

$$\begin{aligned} a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} &= f(x_{i-1}) \\ a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned} ; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dir.

ii. İlk ve son fonksiyonlar uç noktalardan geçer. Yani,

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

dir.

iii. İç noktalarda birinci türevler eşittir. Yani,

$$f_i'(x) = 2a_i x + b_i$$

olduğundan

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i ; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

olur.

Böylece toplam $3n-1$ adet bağıntıyı elde etmiş oluruz. O halde bir bağıntıya daha gerek vardır. Bunu da ilk noktada ikinci türevin sıfır olduğu varsayımını koyarak oluşturabiliriz. Bu ise ilk iki noktanın doğru ile birleştirileceği yani $a_1 = 0$ olması anlamını taşır.

Örnek:

x	3.0	4.5	7.0	9.0
f(x)	2.5	1.0	2.5	0.5

tablosu veriliyor. İkinci dereceden Spline Enterpolasyonu uygulayalım. Önce (i) koşulundan,

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 &= f(x_1) & \text{ve} & & a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2 &= f(x_2) \\ a_2 x_1^2 + b_2 x_1 + c_2 &= f(x_1) & & & a_3 x_2^2 + b_3 x_2 + c_3 &= f(x_2) \end{aligned}$$

göz önüne alınarak,

$$20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1.0$$

$$20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1.0$$

$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5$$

$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5$$

bağıntıları elde edilir.

Şimdi de (ii) şartı yani başlangıç ve son noktadan ilk ve son polinomun geçtiği varsayımı kullanılırsa

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5$$

$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

elde edilir.

(iii) şartı yani türevlerin sürekliliği varsayımından da,

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

$$2a_2x_2 + b_2 = 2a_3x_2 + b_3$$

elde edilir. Son olarak $a_1 = 0$ alınmasıyla da,

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20.25 & 4.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 49.0 & 7.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 49.0 & 7.0 & 1.0 \\ 3.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 81.0 & 81.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & -9.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 14.0 & 1.0 & 0.0 & -14.0 & -14.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözümlenerek,

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & b_1 = 1 & c_1 = 5.5 \\ a_2 = 0.64 & b_2 = -6.76 & c_2 = 18.46 \\ a_3 = -1.6 & b_3 = 24.6 & c_3 = -91.3 \end{array}$$

katsayıları bulunur. Sonuç olarak,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & ; & 3.0 \leq x \leq 4.5 \\ 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & ; & 4.5 \leq x \leq 7.0 \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & ; & 7.0 \leq x \leq 9.0 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu elde edilir.

2.1.3.3. Kübik Spline Fonksiyonları

Spline Fonksiyonları kendisi ve türevlerinin, süreklilikle ilgili olarak, bazı özel şartları sağlaması gereken m. dereceden polinomlar olup, verilen her bir aralıkta farklı katsayılar içerirler. Bu şartların en önemlisi; Spline Fonksiyonu ve onun 1., 2., ... , (m-1). mertebeden türevlerinin veri aralığında

sürekli olmasıdır.

Matematiksel olarak her $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında $f_k(x)$ kubik fonksiyonları kurmak mümkündür. Ancak bu fonksiyonların kendileri ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_0, x_n]$ aralığı üzerinde sürekli olacaktır. $f_k'(x)$ 'nin sürekliliğinin geometrik anlamı; $y = f_k(x)$ 'e eşit grafiğin sivri köşeleri içermemesi şeklindedir.

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ şeklinde sıralanmış apsislere karşılık ölçülmüş, y_0, y_1, \dots, y_n noktaları verilmiş olsun. Şayet aşağıdaki şartları sağlayan n tane $f_k(x)$ kübik polinomu varsa $f(x)$ 'e kübik spline fonksiyonu denir.

Her aralık için üçüncü dereceden,

$$f_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

şeklinde polinomlar kullanılarak yaklaşım yapılacaktır. $(n+1)$ tane nokta için n adet aralık olduğundan $4n$ tane bilinmeyen sabitin hesabı için $4n$ tane şarta gerek vardır. Bunlar;

- i. İç noktalarda fonksiyon değerleri eşit olmalıdır. (2n-2 bağıntı)
- ii. Baştaki ve sondaki fonksiyonlar uç noktalardan geçmelidir. (2 bağıntı)
- iii. İç noktalarda birinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. (n-1 bağıntı)
- iv. İç noktalarda ikinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. (n-1 bağıntı)
- v. İlk ve son noktada ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. (2 bağıntı)

şeklindedir.

Beşinci şart, uç noktalarda fonksiyonların doğrusal olacağı anlamını taşır. Bu tür spline fonksiyonlarına Tabii Spline Fonksiyonları adı verilmektedir.

Herhangi bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında $f_k(x)$ 'in ikinci türevi doğrusal olacağından, Lagrange Enterpolasyon formülüne göre,

$$f_k''(x) = f''(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f''(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse $[x_k, x_{k+1}]$ aralığındaki ikinci türev, uç noktalardaki türev değerleri cinsinden ifade edilir. Son bağıntıda ard arda iki kez integral alınarak,

$$f_k'(x) = f''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)}{2(x_{k-1} - x_k)} + f''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^2}{2(x_k - x_{k-1})} + C_1$$

$$f_k(x) = f''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + f''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + C_1 x + C_2$$

bulunur. Diğer yandan bu fonksiyonun her bir aralığın uç noktalarından geçmesi gerektiği şartını kullanırsak C_1 ve C_2 sabitleri belirlenmiş olur. Yani x_{k-1} için $f(x_{k-1})$ ve x_k için $f(x_k)$ olacağından,

$$f_k(x_{k-1}) = f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + C_1 x_{k-1}$$

$$f_k(x_k) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + C_1 x_k$$

yazılabilir. Son iki denklem taraf tarafa çıkartılırsa,

$$f_k(x) - f_k(x_{k-1}) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{6} - f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{6} + C_1 (x_k - x_{k-1})$$

bulunur. Buradan C_1 çekilerek,

$$C_1 = \frac{f_k(x_k) - f_k(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_k) - f''(x_{k-1})}{6} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

elde edilir. Bu değer yerine konularak da,

$$C_2 = \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)}{x_k - x_{k-1}} - \left[\frac{x_k f''(x_{k-1}) - x_{k-1} f''(x_k)}{6} \right] \cdot (x_k - x_{k-1})$$

bulunur.

Böylece,

$$f_k(x) = \frac{f''(x_{k-1})}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3 - \frac{f''(x_k)}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3$$

$$+ \left[\frac{f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x_k - x) + \left[\frac{f(x_k)}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_k)(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x - x_{k-1})$$

elde edilir.

Bu ifade başlangıçta verileden çok daha karmaşık olsa da sadece iki bilinmeyen içermektedir. Yani aralığın uç noktalarında ikinci türevler belli iseler, bu aralıkta söz konusu Spline Fonksiyonu elde edilmiş olur.

İkinci türevleri, birinci türevlerin düğüm noktalarındaki sürekliliği şartını kullanarak hesaplayabiliriz. Yani, $f_k'(x_k) = f_k''(x_k)$ şartı kullanılırsa, bağıntısı elde edilir. Tüm (n-1) tane iç nokta için bu bağıntı yazılırsa (n+1) tane bilinmeyen ikinci türev içeren (n-1) denklem elde edilmiş olur. Bununla birlikte şayet Tabii Kübik Spline Enterpolasyonu söz konusu ise uç noktalarda ikinci türevler sıfır olacağından, problem (n-1) bilinmeyenli (n-1) lineer denklemden ibaret bir sistemin çözümüne dönüşür. Ancak, uç noktalarda ikinci türevlerin sıfır olmadığı kübik spline enterpolasyonunda iki uç şarta daha gerek olacaktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Yüksek mertebeden Başlangıç Değer Problemleri İçin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Birinci mertebeden bir başlangıç değer problemi en genel halde

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \quad (3.1)$$

$$y(a) = \alpha \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Genel olarak, m. mertebeden bir başlangıç değer problemi,

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a \leq t \leq b \quad (3.3)$$

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad y''(a) = \alpha_3, \dots, \quad y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \quad (3.4)$$

şeklinde verilir. Bu tip problemlerin çözüm yöntemlerinden biri, denklemin sisteme dönüştürülüp çözülmesidir.

$$u_1(t) = y(t), \quad u_2(t) = y'(t), \dots, \quad u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$$

denirse,

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} = u_2(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= \frac{dy'(t)}{dt} = u_3(t), \\ &\vdots \\ \frac{du_{m-1}(t)}{dt} &= \frac{dy^{(m-2)}(t)}{dt} = u_m(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{du_m(t)}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}(t)}{dt} = y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}),$$

sistemi elde edilir. Başlangıç koşulları ise

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, \quad u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \quad (3.6)$$

biçimini alır.

Tanım 3.1. $f(t)$, T aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin k . mertebeden türevi $\phi(t, k)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k} = \phi(t, k) \quad \forall t \in T \quad (3.7)$$

$$t = t_i \text{ için } \phi(t, k) = \phi(t_i, k)$$

ve

$$F(k) = \phi(t_i, k) = \left[\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_i} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2. $f(t)$ fonksiyonun Taylor serisine açılımı

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!} \right] F(k) \quad \text{dır.} \quad (3.9)$$

olmak üzere,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!} \right] X(k) \equiv D^{-1} X(k) \quad (3.10)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!} \right] X(k) + R_{n+1}(t) \quad (3.11)$$

şeklinde verilir.

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Diferansiyel Dönüşüm Fonksiyonları

	Fonksiyon	Diferansiyel Dönüşüm Fonksiyonu
1	$z(t) = x(t) \pm y(t)$	$Z(k) = X(k) \pm Y(k)$
2	$z(t) = \alpha x(t)$	$Z(k) = \alpha X(k)$
3	$z(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$Z(k) = (k+1)X(k+1)$
4	$z(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	$Z(k) = (k+1)(k+2)X(k+2)$
5	$z(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}$	$Z(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+m)X(k+m)$
6	$z(t) = x(t) \cdot y(t)$	$Z(k) = \sum_{r=0}^k X(r)Y(k-r)$
7	$z(t) = 1$	$Z(k) = \delta(k)$
8	$z(t) = t$	$Z(k) = \delta(k-1)$
9	$z(t) = t^m$	$Z(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$
10	$z(t) = \exp(\lambda t)$	$Z(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
11	$z(t) = (1+t)^m$	$Z(k) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$
12	$z(t) = \sin(\omega t + \alpha)$	$Z(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2!} + \alpha\right)$
13	$z(t) = \cos(\omega t + \alpha)$	$Z(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2!} + \alpha\right)$

Yukarıda tanımlanan diferansiyel dönüşümler aşağıdaki koşulları gerçekleştirir.

1. $X(k) = D[x(t)]$, $Y(k) = D[y(t)]$ ve c_1 , c_2 sabitleri t ve k dan bağımsız iseler,

$$D[c_1x(t) + c_2y(t)] = c_1X(k) + c_2Y(k) \quad (3.12)$$

2. $z(t) = x(t)y(t)$, $x(t) = D^{-1}[X(k)]$, $y(t) = D^{-1}[Y(k)]$,

$$D[z(t)] = D[x(t)y(t)] = X(k) \otimes Y(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)X(k-l) \quad (3.13)$$

$x^m(t)$ nin dönüşümü, m pozitif tamsayı olmak üzere,

$$D[x^m(t)] = X^m(k) = X^{m-1}(k) \otimes X(k) = \sum_{l=0}^k X^{m-1}(l)X(k-l) \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Burada,

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad y''(a) = \alpha_3, \dots, \quad y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

ile verilen yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin çözümü araştırılacaktır. Bu amaçla grid noktaları t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere,

$$\forall i = 0, 1, 2, \dots, N \quad \text{ve} \quad h = \frac{b-a}{N} \quad \text{için} \quad t_i = a + ih \quad (3.15)$$

şeklinde alınsın. $[a, b]$ aralığı N tane alt aralığa bölünsün ve alt aralıktaki fonksiyonlar u_i olarak tanımlansınlar. ($i = 0, 1, 2, \dots, N$)

(3.5) sisteminin diferansiyel dönüşüm formu,

$$U_1(k+1) = \frac{1}{k+1} U_2(k),$$

$$\begin{aligned}
U_2(k+1) &= \frac{1}{k+1} U_3(k), \\
U_3(k+1) &= \frac{1}{k+1} U_4(k), \\
&\vdots \\
&\vdots \\
U_{m-1}(k+1) &= \frac{1}{k+1} U_m(k),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$U_m(k+1) = F(Y(k)),$$

şeklindedir. Burada F , $f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ nin dönüşüm fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

(3.6) başlangıç koşulları ise,

$$U_1(0) = y(a) = \alpha_1, \quad U_2(0) = y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad U_m(0) = y^{(m-1)} = \alpha_m \tag{3.17}$$

şeklinde yazılabilir. Bunların yardımı ile

$$y_{\tau}(t) = U_{1i}(0) + U_{1i}(1)(t-a) + U_{1i}(2)(t-a)^2 + \dots + U_{1i}(n)(t-a)^n \tag{3.18}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$y(t_1) \cong y_0(t_1) = \sum_{j=0}^n U_{10}(j)h^j, \quad h = (t_1 - t_0) \tag{3.19}$$

$$y(t_2) \cong y_1(t_2) = \sum_{j=0}^n U_{11}(j)h^j, \quad h = (t_2 - t_1) \tag{3.20}$$

$$y(t_3) \cong y_2(t_3) = \sum_{j=0}^n U_{12}(j)h^j, \quad h = (t_3 - t_2) \tag{3.21}$$

ve benzer şekilde genel olarak t_{i+1} grid noktalarında çözüm,

$$y(t_{i+1}) \cong y_i(t_{i+1}) = \sum_{j=0}^n U_{li}(j)h^j, \quad h = (t_{i+1} - t_i), \quad i = 0,1,2,\dots, N-1. \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilir.

Sayısal Örnekler

Problem 1.

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \exp(2t) \sin(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.23)$$

ikinci mertebeden başlangıç değer problemi,

$$y(0) = -0.4 \quad (3.24)$$

$$y'(0) = -0.6 \quad (3.25)$$

başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alınsın. Burada,

$$u_1(t) = y(t) \text{ ve } u_2(t) = y'(t)$$

olmak üzere ikinci mertebeden diferansiyel denklem, birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$u_1'(t) = u_2(t) \quad (3.26)$$

$$u_2'(t) = \exp(2t) \sin(t) - 2u_1(t) + 2u_2(t) \quad (3.27)$$

başlangıç koşulları ise

$$u_1(0) = -0.4 \quad (3.28)$$

$$u_2(0) = -0.6 \quad (3.29)$$

biçimini alır. Problemin çözümünde,

$$h = 0.1 \text{ ve } N = 10$$

alınsın. (3.26) ve (3.27) sistemlerinin belirttiği diferansiyel denklem, t_i ve t_{i+1} arasında

$$u_1'(t^*) = u_2(t^*) \quad (3.30)$$

$$u_2'(t^*) = \exp(2t^* + 2t_i) \sin(t^* + t_i) - 2u_1(t^*) + 2u_2(t^*) \quad (3.31)$$

olarak gösterilebilir. Burada $t^* = t - t_i$ dir. (3.30) ve (3.31)' un diferansiyel dönüşümü sırasıyla,

$$U_{1i}(k+1) = \frac{1}{k+1} U_{2i}(k), \quad (3.32)$$

ve

$$U_{2i}(k+1) = \left\{ \frac{1}{k+1} \exp(2t_i) \cos(t_i) \sum_{l=0}^k \frac{2^l}{(l!)(k-l)!} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) (k-l) \right. \\ \left. + \exp(2t_i) \sin(t_i) \sum_{l=0}^k \frac{2^l}{(l!)(k-l)!} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) (k-l) \right. \\ \left. - 2U_{1i}(k) + 2U_{2i}(k) \right\} \quad (3.33)$$

dir. Burada,

$$U_{10}(0) = -0.4, \quad U_{20}(0) = -0.6 \quad (3.34)$$

değerlerini alır.

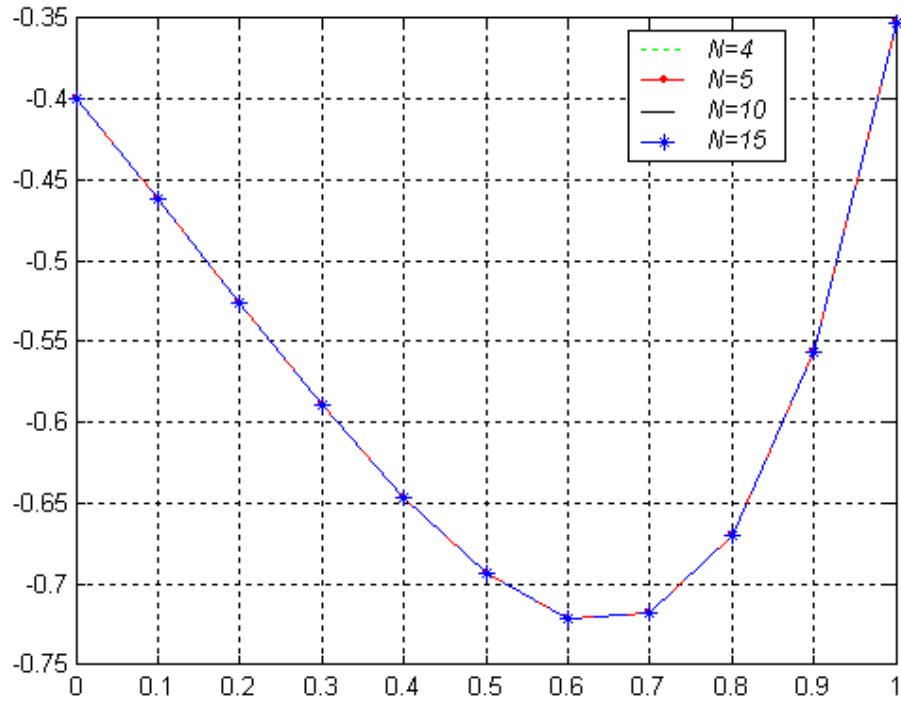
(3.23), (3.24) ve (3.25) ile verilen başlangıç değer probleminin analitik çözümü

$$y(t) = u_1(t) = 0.2 \exp(2t) (\sin(t) - 2 \cos(t)). \quad (3.35)$$

şeklindedir. Probleme ait nümerik sonuçlar, farklı N değerleri için Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2. Problem-1'in farklı N değerleri için nümerik çözümleri

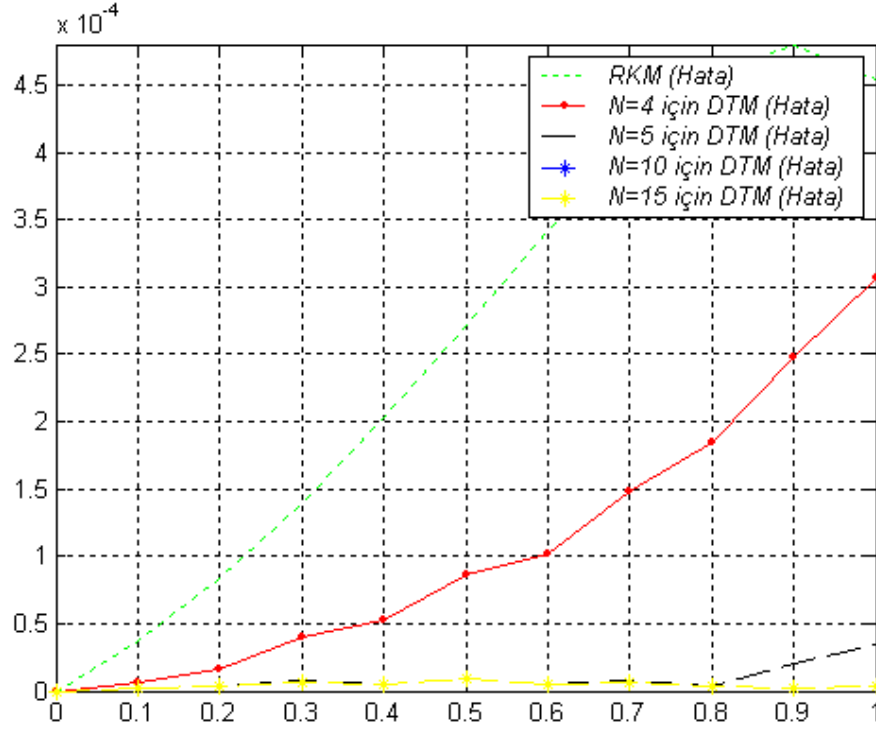
t_i	N = 4	N = 5	N = 10	N = 15
0.0	-0.400000000	-0.400000000	-0.400000000	-0.400000000
0.1	-0.461733059	-0.461732981	-0.461732979	-0.461732979
0.2	-0.525559267	-0.525559066	-0.525559063	-0.525559063
0.3	-0.588600399	-0.588600073	-0.588600070	-0.588600070
0.4	-0.646610831	-0.646610347	-0.646610344	-0.646610344
0.5	-0.693564763	-0.693563995	-0.693563992	-0.693563992
0.6	-0.721149613	-0.721148557	-0.721148554	-0.721148554
0.7	-0.718150376	-0.718148972	-0.718148969	-0.718148969
0.8	-0.669708650	-0.669706840	-0.669706837	-0.669706837
0.9	-0.556440473	-0.556438203	-0.556438201	-0.556438201
1.0	-0.353397162	-0.353394446	-0.353394444	-0.353394444

**Şekil 1.** Problem-1'in farklı N değerlerindeki yaklaşımlarına ait grafikleri

Yukarıda tanımlanan problemin RKM ile verilen çözümleri, burada tanımlanan diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) ile karşılaştırmalı olarak aşağıdaki tabloda verilmiş ve hata oranları tablo ve grafikte belirtilmiştir. Burada $y(t_i)$ analitik çözüm olmak üzere hatalar $Hata = |Analitik \text{ Çözüm} - Nümerik \text{ Çözüm}|$ şeklinde alınmıştır.

Tablo 3. Problem-1'in RKM ve DTM ile verilen hata değerleri

t_i	Hata				
	$ y(t_i) - RKM $	$ y(t_i) - DT4 $	$ y(t_i) - DT5 $	$ y(t_i) - DT10 $	$ y(t_i) - DT15 $
0.0	0.0000000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	3.7332754e-5	5.900e-6	1.90e-6	2.10e-6	2.10e-6
0.2	8.3926639e-5	1.670e-5	3.40e-6	3.70e-6	3.70e-6
0.3	1.3955412e-4	3.990e-5	7.40e-6	7.00e-6	7.00e-6
0.4	2.0308873e-4	5.310e-5	4.70e-6	4.40e-6	4.40e-6
0.5	2.7212788e-4	8.630e-5	9.50e-6	9.20e-6	9.20e-6
0.6	3.4251283e-4	1.013e-4	4.30e-6	4.60e-6	4.60e-6
0.7	4.0772521e-4	1.476e-4	7.30e-6	6.90e-6	6.90e-6
0.8	4.5813778e-4	1.850e-4	4.00e-6	3.70e-6	3.70e-6
0.9	4.8009448e-4	2.473e-4	2.03e-5	2.01e-6	2.01e-6
1.0	4.5479347e-4	3.062e-4	3.46e-5	3.44e-6	3.44e-6



Şekil 2. Problem-1'in hata grafiği

Problem 2.

$$y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \exp(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (3.36)$$

üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem,

$$y(0) = 1 \quad (3.37)$$

$$y'(0) = 2 \quad (3.38)$$

$$y''(0) = 0 \quad (3.39)$$

başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alınsın. Bu diferansiyel denklem,

$$u_1(t) = y(t), \quad u_2(t) = y'(t) \quad \text{ve} \quad u_3(t) = y''(t)$$

olmak üzere,

$$u_1'(t) = u_2(t), \quad (3.40)$$

$$u_2'(t) = u_3(t), \quad (3.41)$$

$$u_3'(t) = -2u_3(t) + u_2(t) + 2u_1(t) + \exp(t) \quad (3.42)$$

şeklinde birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

Başlangıç koşulları

$$u_1(0) = 1 \quad (3.43)$$

$$u_2(0) = 2 \quad (3.44)$$

$$u_3(0) = 0 \quad (3.45)$$

biçimini alır. Problemin çözümünde,

$h = 0.2$ ve $N = 15$ olarak alınır (3.40), (3.41) ve (3.42) sistemlerinin belirttiği

diferansiyel denklem, t_i ve t_{i+1} arasında

$$u_1'(t^*) = u_2(t^*), \quad (3.46)$$

$$u_2'(t^*) = u_3(t^*), \quad (3.47)$$

$$u_3'(t^*) = -2u_3(t^*) + u_2(t^*) + 2u_1(t^*) + \exp(t^* + t_i), \quad (3.48)$$

biçimini alır. Burada $t^* = t - t_i$ dir. (3.46), (3.47) ve (3.48)' in diferansiyel

dönüşümü sırasıyla,

$$U_{1i}(k+1) = \frac{1}{k+1} U_{2i}(k) \quad (3.49)$$

$$U_{2i}(k+1) = \frac{1}{k+1} U_{3i}(k) \quad (3.50)$$

ve

$$U_{3i}(k+1) = \frac{1}{k+1} \left\{ -2U_{3i}(k) + U_{2i}(k) + 2U_{1i}(k) + \frac{1}{k!} \exp(t_i) \right\} \quad (3.51)$$

dır. Başlangıç koşulları ise

$$\begin{aligned}
U_{10}(0) &= 1 \\
U_{20}(0) &= 2 \\
U_{30}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklindedir.

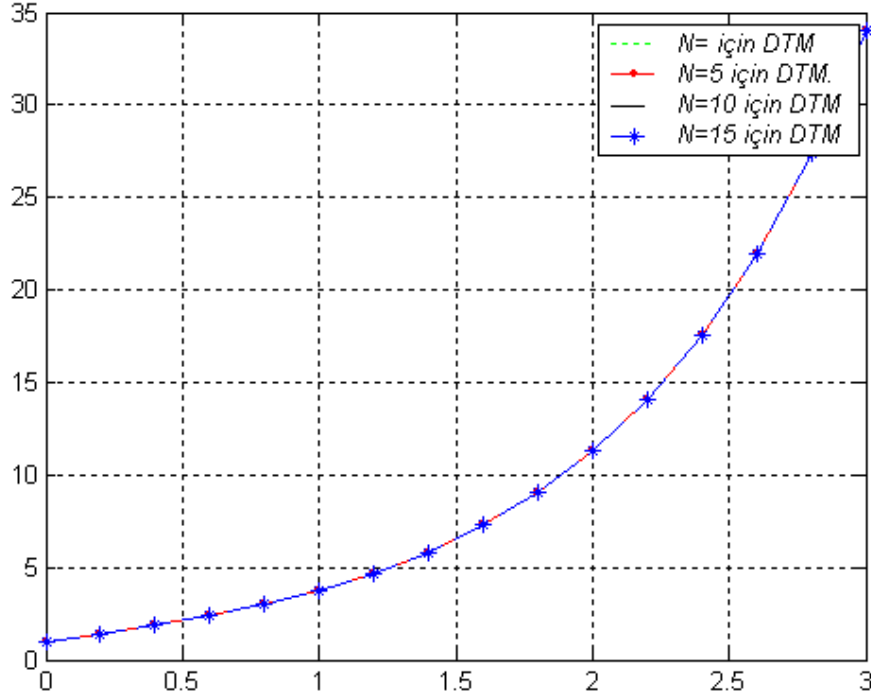
(3.36), (3.37), (3.38) ve (3.39)' in analitik çözümü,

$$y(t) = u_1(t) = \frac{43}{36} \exp(t) + \frac{1}{4} \exp(-t) - \frac{4}{9} \exp(-2t) + \frac{1}{6} [t \exp(t)] \tag{3.53}$$

biçimindedir. Probleme ait nümerik sonuçlar, farklı N değerleri için Tablo 4' de verilmiştir.

Tablo 4. Problem-2'nin farklı N değerleri için nümerik çözümleri

t_i	N = 4	N = 5	N = 10	N = 15
0.0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.2	1.40633333	1.40637600	1.40637383	1.40637383
0.4	1.84917442	1.84923760	1.84923496	1.84923496
0.6	2.36189778	2.36197255	2.36197035	2.36197035
0.8	2.97753987	2.97762545	2.97762430	2.97762430
1.0	3.73160354	3.73170425	3.73170461	3.73170461
1.2	4.66457225	4.66469625	4.66469831	4.66469831
1.4	5.82438402	5.82454315	5.82454695	5.82454695
1.6	7.26907260	7.26928196	7.26928808	7.26928808
1.8	9.06975381	9.07003341	9.07004262	9.07004262
2.0	11.3141407	11.3145155	11.3145290	11.3145290
2.2	14.1107716	14.1112739	14.1112931	14.1112931
2.4	17.5941670	17.5948384	17.5948638	17.5948638
2.6	21.9311637	21.9320567	21.9320896	21.9320896
2.8	27.3287178	27.3298999	27.3299428	27.3299428
3.0	34.0435550	34.0451137	34.0451693	34.0451693

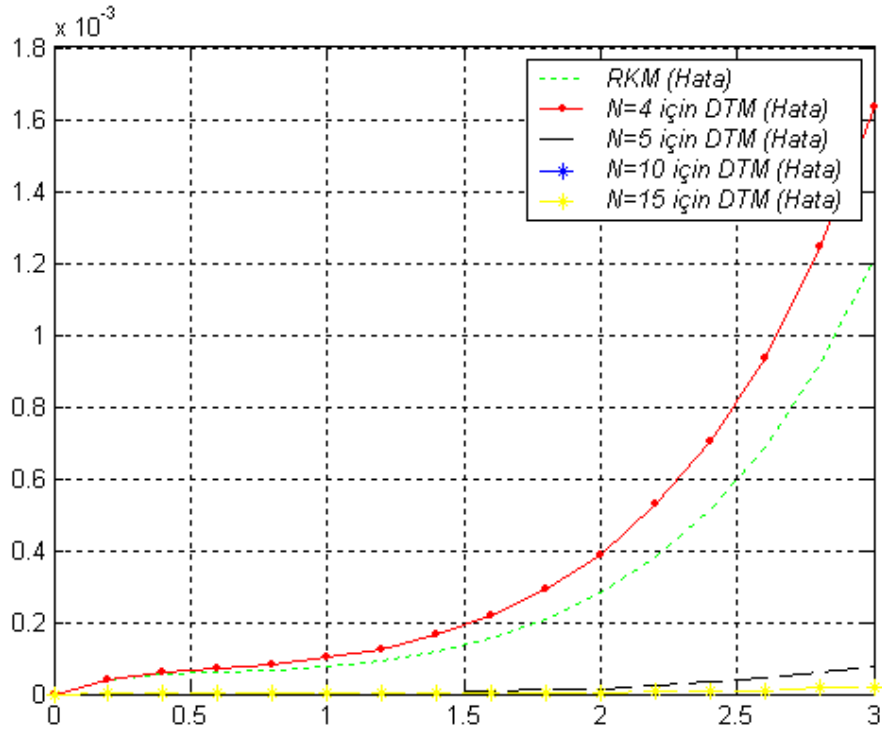


Şekil 3. Problem-2'nin farklı N değerlerindeki yaklaşımlarına ait grafikler

Tablo 5. Problem-2'nin RKM ve DTM ile verilen hata değerleri

t_i	Hata				
	$ y(t_i) - RKM $	$ y(t_i) - DT4 $	$ y(t_i) - DT5 $	$ y(t_i) - DT10 $	$ y(t_i) - DT15 $
0.0	0.0000000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.2	3.7051385e-5	4.0670e-5	2.000e-6	1.700e-7	1.700e-7
0.4	5.3496545e-5	6.0580e-5	2.600e-6	4.000e-8	4.000e-8
0.6	6.1340427e-5	7.2220e-5	2.550e-6	3.500e-7	3.500e-7
0.8	6.7810840e-5	8.4130e-5	1.450e-6	3.000e-7	3.000e-7
1.0	7.7492288e-5	1.0046e-4	2.500e-7	6.100e-7	6.100e-7
1.2	9.3657449e-5	1.2575e-4	1.750e-6	3.100e-7	3.100e-7

1.4	1.1911737e-4	1.6398e-4	4.850e-6	1.050e-6	1.050e-6
1.6	1.5679347e-4	2.1640e-4	7.040e-6	9.200e-7	9.200e-7
1.8	2.1014117e-4	2.9119e-4	1.159e-5	2.380e-6	2.380e-6
2.0	2.8350990e-4	3.8930e-4	1.450e-5	1.000e-7	1.000e-7
2.2	3.8249793e-4	5.2840e-4	2.610e-5	6.900e-6	6.900e-6
2.4	5.1434509e-4	7.0300e-4	3.160e-5	6.200e-6	6.200e-6
2.6	6.8840014e-4	9.3630e-4	4.330e-5	1.040e-5	1.040e-5
2.8	9.1669703e-4	1.2422e-3	6.010e-5	1.720e-5	1.720e-5
3.0	1.2146776e-3	1.6350e-3	7.630e-5	2.070e-5	2.070e-5



Şekil 4. Problem-2'nin hata grafiği

3.2. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri

İntegro-diferansiyel denklemlere olan ilgi, günümüzde gittikçe artmaktadır. Gelişen teknoloji ile birlikte bu konular giderek güncelleşmiş, teknolojiye ve özellikle de bir çok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaya başlanılmış olmasından dolayı ilgi alanı o oranda genişlemiştir. Burada integro-diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle yaklaşık çözümleri araştırılacaktır.

Tek değişkenli bir f fonksiyonun k . mertebeden türevi için

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \quad (3.54)$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda ters dönüşüm,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır.

Fonksiyonların toplamlarının, farklarının dönüşümleri de benzer şekilde tanımlanabilir. Bu amaçla aşağıdaki teoremler verilmiştir.

Teorem 1. $f(x) = g(x) \mp h(x)$ ise $F(k) = G(k) \mp H(k)$ dir.

İspat:

$f(x) = g(x) \mp h(x)$ olarak varsayalım. (3.55) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k \mp \sum_{k=0}^{\infty} H(k)(x - x_0)^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} [G(k) \mp H(k)](x - x_0)^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} [G(k) \mp H(k)](x - x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{[G(k) \mp H(k)] - F(k)\}(x - x_0)^k = 0$$

$$\forall x \in R \text{ için, } [G(k) \mp H(k)] - F(k) = 0$$

$$\Rightarrow F(k) = G(k) \mp H(k)$$

dır.

Teorem 2. $\forall c \in R$ için $f(x) = c.g(x)$ ise $F(k) = c.G(k)$ dir.

İspat:

$$f(x) = c.g(x) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x - x_0)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c.G(k)(x - x_0)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} c.G(k)(x - x_0)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [c.G(k) - F(k)](x - x_0)^k = 0$$

elde edilir.

$\forall x \in R$ için, $[cG(k) - F(k)] = 0$ olduğundan $F(k) = cG(k)$ dir.

Teorem 3. $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ ise $F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$ dir.

İspat: Diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right]_{x=x_0}$$

şeklinde yazılır. Burada $f(x)$, yerine yazılıp n . mertebeden türevine geçilirse,

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \left(\frac{d^n g(x)}{dx^n} \right)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+n} g}{dx^{k+n}}(x) \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{(k+1).(k+2)....(k+n)}{(k+1).(k+2)....(k+n)} \cdot \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+n} g}{dx^{k+n}}(x) \right]_{x=x_0} \\
&= (k+1).(k+2)....(k+n) \cdot \frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n} g}{dx^{k+n}}(x) \right]_{x=x_0}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \cdot G(k+n)$$

dır.

Teorem 4. $f(x) = g(x).h(x)$ ise $F(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1).H(k-k_1)$ dir.

İspat: Bir $f(x)$ fonksiyonu için dönüşüm formülü,

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right]_{x=x_0}$$

şeklinde verilir. Bu ifade de $f(x) = g(x).h(x)$ konulursa,

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (g(x).h(x))}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{k!} \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) + \frac{dh(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cdot h(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{d^2 h(x)}{dx^2} \cdot g(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{d^3 g(x)}{dx^3} \cdot h(x) + \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{d^2 h(x)}{dx^2} \cdot \frac{dg(x)}{dx} + \dots \right\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1).H(k-k_1)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 5. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

dir.

İspat:
$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^n \right]_{x=x_0}$$

diferansiyel dönüşüm formülünden, $k < n$ için $F(k)$ fonksiyonu x cinsinden elde edilir. Türevleri alındıktan sonra, $x = x_0$ için $F(k)$ değerleri

$$k < n \Rightarrow F(k) = 0$$

$$k > n \Rightarrow F(k) = 0$$

$$k = n \Rightarrow F(k) = 1$$

biçimini alır. Gerçekten,

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2 \Rightarrow \frac{d^3}{dx^3}(x^2) = 0$$

olup

$$k > n \Rightarrow F(k) = 0$$

$$k = n \Rightarrow F(k) = 1$$

şeklindedir. Örneğin,

$$\frac{d^5}{dx^5}(x^5) = 5! \Rightarrow F(5) = \frac{1}{5!} \left[\frac{d^5}{dx^5}(x^5) \right]_{x=x_0} = \frac{1}{5!} \cdot 5! = 1$$

dir. Bu ifade genelleştirilirse,

$$F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 6. $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \dots g_{n-1}(x) \cdot g_n(x)$ ise

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) \cdot G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) \cdot G_n(k - k_{n-1})$$

dir.

İspat: (3.54) ile verilen diferansiyel dönüşüm tanımını kullanılsın.

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right]_{x=x_0} \Rightarrow F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x)) \right]_{x=x_0}$$

$$F(0) = \frac{1}{0!} [(g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x))]_{x=x_0} = G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(0)$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} [g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x)]_{x=x_0}$$

$$= \left[\begin{array}{l} g_1'(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + g_1(x) g_2'(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + \dots \\ + g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}'(x) g_n(x) + g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n'(x) \end{array} \right]_{x=x_0}$$

$$= G_1(1) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(0) + G_1(0) G_2(1) \dots G_{n-1}(0) G_n(0) + \dots + G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(1) G_n(0)$$

$$+ G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(1)$$

$$F(2) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} [g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x)]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} [g_1'(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + g_1(x) g_2'(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + \dots$$

$$+ g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}'(x) g_n(x) + g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n'(x)]_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= G_1(1)G_2(1)G_3(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0) + G_1(1)G_2(0)G_3(1)\dots G_{n-1}(0)G_n(0) + \dots \\
&+ G_1(1)G_2(0)G_3(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(1) + G_1(0)G_2(1)G_3(1)\dots G_{n-1}(0)G_n(0) + \dots \\
&+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(1)G_n(1) + \dots + G_1(2)G_2(0)G_3(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0) + \dots \\
&+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada bu ifade genelleştirilirse,

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1).G_2(k_2 - k_1)\dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}).G_n(k - k_{n-1})$$

formu elde edilir.

Teorem 7. $f(x) = g(x+a)$ ise $F(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} .G(h_1)$, $N \rightarrow \infty$ dir.

İspat:

Diferansiyel dönüşüm yönteminde $x \rightarrow x+a$ konur ve seri açık olarak yazılırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(x+a-x_0)^k$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= G(0) + a.G(1) + G(1).(x-x_0) + a^2.G(2) + 2a.G(2).(x-x_0) + G(2).(x-x_0)^2 + \\
&+ a^3.G(3) + 3a^2.G(3).(x-x_0) + 3a.G(3).(x-x_0)^2 + G(3).(x-x_0)^3 + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. $(x-x_0)$ 'ın kuvvetlerine göre bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
f(x) &= [G(0) + a.G(1) + a^2.G(2) + a^3.G(3) + \dots] + [G(1) + 2a.G(2) + 3a^2.G(3) + \dots](x-x_0) + \\
&[G(2) + 3a.G(3) + \dots](x-x_0)^2 + \dots
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{\infty} a^{h_1} G(h_1) + \sum_{h_1=1}^{\infty} \frac{h_1!}{1! \cdot (h_1 - 1)!} a^{h_1-1} G(h_1)(x - x_0) + \sum_{h_1=2}^{\infty} \frac{h_1!}{2! \cdot (h_1 - 2)!} a^{h_1-2} G(h_1)(x - x_0)^2 +$$

$$\sum_{h_1=3}^{\infty} \frac{h_1!}{3! \cdot (h_1 - 3)!} a^{h_1-3} G(h_1)(x - x_0)^3 + \dots + \sum_{h_1=k}^{\infty} \frac{h_1!}{k! \cdot (h_1 - k)!} a^{h_1-k} G(h_1)(x - x_0)^k$$

ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h_1=k}^{\infty} \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} \cdot G(h_1)(x - x_0)^k$$

ifadesi elde edilir.

Ters Dönüşüm Formülünden (3.55),

$$F(k) = \sum_{h_1=k}^{\infty} \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} \cdot G(h_1)(x - x_0)^k$$

ifadesi veya

$$F(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} \cdot G(h_1)(x - x_0)^k, \quad N \rightarrow \infty$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 8. $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ ise $F(x) = \frac{G(k-1)}{k}$, $k \geq 1$ dir.

İspat:

Ters Dönüşüm Formülünden (3.55),

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(t - x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x G(k)(t - x_0)^k dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{G(k)}{k+1} (t - x_0)^{k+1} \Big|_{x_0}^x \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

dir.

$k = 0$ yerine $k = 1$ yazılıp ifade yeniden düzenlenirse,

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(k-1)}{k} (x-x_0)^k$$

elde edilir. Dönüşüm formülü kullanılarak,

$$F(x) = \frac{G(k-1)}{k}, \quad k \geq 1, \quad F(0) = 0$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 9. $f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$ ise

$$F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n), \quad k \geq n$$

dir.

İspat:

Ters Dönüşüm Formülü uyarınca,

$$f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (x-x_0)^k dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} G(k) (x-x_0)^k dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \frac{G(k)}{k+1} (x-x_0)^{k+1} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)} (x-x_0)^{k+2} dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$$

.

.

.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} (x-x_0)^{k+n}$$

ifadesi elde edilir.

$k = 0$ yerine $k = n$ yazılarak ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{G(k-n)}{(k+1-n)(k+2-n)\dots(k)} (x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n) (x-x_0)^{k+n} \end{aligned}$$

elde edilir. Diferansiyel dönüşüm tanımını uyarınca,

$$F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n), \quad k \geq n$$

elde edilir.

Teorem 10. $f(x) = g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt$ ise

$$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} G(k-k_1) H(k_1-1), \quad k \geq 1$$

dir.

İspat:

Diferansiyel dönüşüm formülü kullanılarak,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = \left[g'(x) \int_{x_0}^x h(t) dt + g(x) h(x) \right]_{x=x_0} = G(0) H(0)$$

$$\begin{aligned}
F(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = \\
&= \frac{1}{2!} \left[g''(x) \int_{x_0}^x h(t) dt + 2g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \right]_{x=x_0} \\
&= G(1)H(0) + \frac{1}{2} G(0)H(1) \\
F(3) &= \frac{1}{2!} \frac{d^3}{dx^3} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{3!} \left[g'''(x) \int_{x_0}^x h(t) dt + 3g''(x)h(x) + 3g'(x)h'(x) + g(x)h''(x) \right]_{x=x_0} \\
&= G(2)H(0) + \frac{1}{2} G(1)H(1) + \frac{1}{3} G(0)H(2)
\end{aligned}$$

ifadeleri bulunabilir.

Genel olarak,

$$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} G(k - k_1) H(k_1 - 1), \quad k \geq 1$$

dir.

Teorem 11. $f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt$ ise

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1)G_2(k - k_1 - 1), \quad k \geq 1$$

dir.

İspat:

Diferansiyel dönüşüm formülü kullanılarak, sıra ile $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$ yi ve genel halde $F(k)$ değerleri bulunur.

$$F(0) = \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = [g_1(x)g_2(x)] = G_1(0)G_2(0)$$

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = \frac{1}{2!} [g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x)] \\ &= \frac{1}{2} [G_1(1)G_2(0) + G_1(0)G_2(1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = \frac{1}{3!} [g_1''(x)g_2(x) + 2g_1'(x)g_2'(x) + g_1(x)g_2''(x)] \\ &= \frac{1}{3} [G_1(2)G_2(0) + G_1(1)G_2(1) + G_1(0)G_2(2)] \end{aligned}$$

$$F(4) = \frac{1}{4} [G_1(3)G_2(0) + G_1(2)G_2(1) + G_1(1)G_2(2) + G_1(0)G_2(3)]$$

Genel olarak,

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1)G_2(k-k_1-1), \quad k \geq 1$$

şeklindedir.

Teorem 12. $f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)\dots g_{n-1}(t)g_n(t)dt$ olmak üzere,

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\dots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1}-1)$$

dır.

İspat: Benzer şekilde diferansiyel dönüşüm tanımı kullanılarak, sırasıyla $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$ ve genel halde $F(k)$ değerleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \dots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \dots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right]_{x=x_0} = [g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x)]_{x=x_0}$$

$$F(1) = G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(0)$$

$$F(2) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \dots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{2} \left[g_1'(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + g_1(x) g_2'(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x) + \dots \right]$$

$$+ \left[g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}'(x) g_n(x) + g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n'(x) \right]$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \left[G_1(1) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(0) + G_1(0) G_2(1) \dots G_{n-1}(0) G_n(0) + \dots \right]$$

$$+ \left[G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(1) G_n(0) + G_1(0) G_2(0) \dots G_{n-1}(0) G_n(1) \right]$$

Genel olarak,

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) G_n(k - k_{n-1} - 1)$$

dir.

Teorem 13. $f(x) = [g_1(x) g_2(x) \dots g_{n-1}(x) g_n(x)] \int_{x_0}^x h_1(t) h_2(t) \dots h_{m-1}(t) h_m(t) dt$

olmak üzere,

$$F(k) = \sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_m} H_1(k_1 - 1) H_2(k_2 - k_1) \dots H_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2}) H_m(k_m - k_{m-1}).$$

$$G_1(k_{m+1} - k_m) G_2(k_{m+2} - k_{m+1}) \dots G_{n-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2}) G_n(k - k_{m+n-1})$$

dir.

İspat: Diferansiyel dönüşümün tanımı kullanılarak,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\left[g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[\left[g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \right]_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left[g_1'(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \right. \\ &+ \left[g_1(x)g_2'(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt + \dots \\ &+ \left[g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}'(x)g_n(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \\ &+ \left[g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n'(x) \right] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)\dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \\ &\left. + \left[g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x)h_1(x)h_2(x)\dots h_{m-1}(x)h_m(x) \right] \right\}_{x=x_0} \end{aligned}$$

$$F(1) = G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0)$$

$$F(2) = G_1(1)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0)$$

$$+ G_1(0)G_2(1)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0)$$

$$+ \dots + G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(1)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0)$$

$$+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(1)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0)$$

$$+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(1)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(0) / 2$$

$$+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(1)\dots H_{m-1}(0)H_m(0) / 2$$

$$+ \dots + G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(1)H_m(0) / 2$$

$$+ G_1(0)G_2(0)\dots G_{n-1}(0)G_n(0)H_1(0)H_2(0)\dots H_{m-1}(0)H_m(1) / 2$$

Genel olarak,

$$F(k) = \sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_m} H_1(k_1-1)H_2(k_2-k_1)\dots H_{m-1}(k_{m-1}-k_{m-2})H_m(k_m-k_{m-1}).$$

$$G_1(k_{m+1}-k_m)G_2(k_{m+2}-k_{m+1})\dots G_{n-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2})G_n(k-k_{m+n-1})$$

elde edilir.

3. Sayısal Sonuçlar:

Problem 3.

$$y^{(iv)}(x) = x(1 + e^x) + 3e^x + y(x) - \int_0^x y(t)dt \quad (3.56)$$

lineer integro-diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

Denklemin başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, & y'(0) &= 1, \\ y(1) &= 1 + e, & y'(1) &= 2e \end{aligned} \quad (3.57)$$

olarak alınsın ve $x = 0$ için,

$$y^{(iv)}(0) = 4 \quad (3.58)$$

şeklinde verilmiş olsun.

$x = 0$ için e^x fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $\frac{1}{k!}$ dir. (3.56) ile verilen

problem için dönüşüm ifadesi

$$Y(k+4) = \frac{\delta(k-1) + \sum_{k_1=0}^k \delta(k_1-1) \frac{1}{(k-k_1)!} + \frac{3}{k!} + Y(k) - \frac{1}{k} Y(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \quad (3.59)$$

şeklinde elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$Y(k+4) = \frac{1}{(k+4)!} [k! \delta(k-1) + 3 + k + k!Y(k) - (k-1)!Y(k-1)] \quad (3.60)$$

şeklini alır.

$x=0$ için başlangıç koşulları

$$Y(0)=1, \quad Y(1)=1, \quad Y(2)=a, \quad Y(3)=b, \quad Y(4)=\frac{1}{6}, \quad (3.61)$$

şeklini alır.

$$\begin{aligned} y(x) = & 1 + x + ax^2 + bx^3 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \left(\frac{1}{180} + \frac{a}{360} \right) x^6 \\ & + \left(\frac{1}{840} - \frac{a}{2520} + \frac{b}{840} \right) x^7 + \left(\frac{11}{40320} - \frac{b}{6720} \right) x^8 + \frac{x^9}{40320} \\ & + \left(\frac{1}{453600} + \frac{a}{1814400} \right) x^{10} + O(x^{11}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$x=1$ için verilen başlangıç koşullarına göre $N=10$ alındığında a ve b sabitleri

$$a = 0.999998, \quad b = 0.500003$$

şeklinde bulunurlar. $N=20$ alınması halinde

$$a = 1.0000000000000001, \quad b = 0.4999999999999999$$

ifadeleri bulunur. Bunlar yukarıda yerlerine konursa,

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^7}{6!} + \frac{x^8}{7!} + \frac{x^9}{8!} + \frac{x^{10}}{9!} + \dots$$

çözüm fonksiyonunun seri gösterilişi veya kapalı formda

$$y(x) = 1 + xe^x$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm diğer araştırmacılar tarafından ifade edilen çözüm ile çakışmaktadır. [Wazwaz, 2001]

Problem 4.

$$y^{(iv)} = 1 + \int_0^x e^{-t} y^2 dt \quad (3.63)$$

denklemini göz önüne alalım. Denklemin başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, & y'(0) &= 1, \\ y(1) &= e, & y'(1) &= e \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde verilsin. $x = 0$ için,

$$y^{(iv)}(0) = 1 \quad (3.65)$$

dir..

$$Y(k+4) = \frac{\delta(k) + \frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2 - 1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \quad (3.66)$$

$k \geq 1$ için,

$$Y(k+4) = \frac{(k-1)!}{(k+4)!} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2 - 1) \quad (3.67)$$

biçimini alır. Problemin koşulları $x = 0$ için aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 1, \quad Y(2) = a, \quad Y(3) = b, \quad Y(4) = \frac{1}{4!}, \quad (3.68)$$

Bunlardan yararlanarak problemin çözümü,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + x + ax^2 + bx^3 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \left(\frac{a}{1260} - \frac{1}{5040} \right) x^7 \\ &+ \left(\frac{b}{3360} - \frac{1}{40320} \right) x^8 + \left(\frac{a^2}{15120} - \frac{a}{15120} + \frac{1}{51840} \right) x^9 \\ &+ \left(-\frac{a^2}{30240} + \frac{ab}{15120} + \frac{a}{45360} - \frac{b}{30240} - \frac{1}{403200} \right) x^{10} + O(x^{11}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

şeklinde bulunur.

$x = 1$ için,

$$a = 0.4999997, \quad b = 0.1666669$$

şeklinde hesaplanabilir. Benzer şekilde $N=20$ için

$$a = 0.4999999999999993, \quad b = 0.1666666666666672$$

değerleri elde edilir.

$N \rightarrow \infty$ için $a \rightarrow \frac{1}{2}$, $b \rightarrow \frac{1}{6}$ olur. Bu değerler kullanılarak (3.69) denklemi,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

şeklinde ifade edilir. Bu ise,

$$y(x) = e^x \text{ fonksiyonunun seri açılımıdır.}$$

Problem 5.

$$u'(x) = -1 + \int_0^x u^2(t) dt \quad (3.70)$$

lineer olmayan integro diferansiyel denklemi

$$u(0) = 0 \quad (3.71)$$

$$u'(0) = -1 \quad (3.72)$$

başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alınsın.

(3.70) denklemden,

$$U(k+1) = \frac{1}{k+1} \left(-\delta(k) + \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} U(k_1)U(k-k_1-1) \right) \quad (3.73)$$

elde edilir.

$k \geq 1$ için $\delta(k) = 0$ dır. (3.73) denklemi daha basit olarak

$$U(k+1) = \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} U(k_1)U(k-k_1-1) \quad (3.74)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.71) ve (3.72) başlangıç koşullarının diferansiyel dönüşümü,

$$U(0) = 0, \quad U(1) = -1 \quad (3.75)$$

şeklindedir. Buradan,

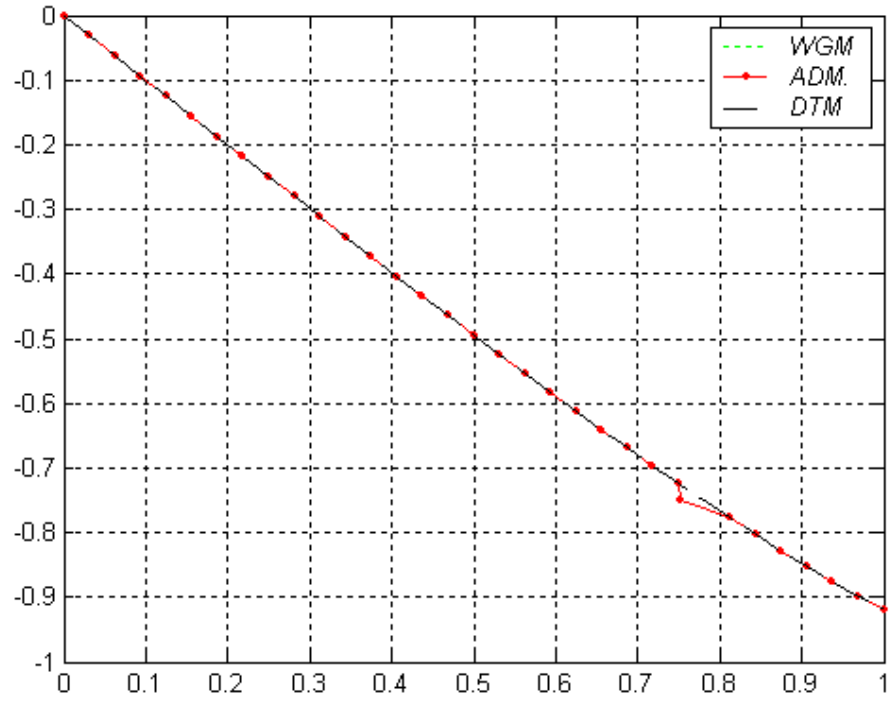
$$\begin{aligned} u(x) = & -x + \frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{252} + \frac{x^{10}}{6048} - \frac{x^{13}}{157248} + \frac{37}{158505984} x^{16} \\ & - \frac{25}{3011613696} x^{19} + \frac{73}{252975550464} x^{22} - \frac{449}{45535599083520} x^{25} \\ & + \frac{16531}{49724874199203840} x^{28} - O(x^{31}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

çözümü elde edilir.

Tablo 6. Problem-5'e ait sayısal sonuçlar

<i>X</i>	<i>WGM</i>	<i>ADM</i>	<i>DTM</i>
0	0	0	0
0.0312	-0.0312	-0.0311999	-0.0311999210
0.0625	-0.0625	-0.0624987	-0.0624987284
0.0938	-0.0937	-0.0937935	-0.0937935492
0.1250	-0.1250	-0.1249800	-0.1249796568
0.1562	-0.1562	-0.1561500	-0.1561504020
0.1875	-0.1874	-0.1873970	-0.1873970355
0.2188	-0.2186	-0.2186090	-0.2186091064
0.2500	-0.2497	-0.2496750	-0.2496747212
0.2812	-0.2807	-0.2806800	-0.2806795005
0.3125	-0.3117	-0.3117060	-0.3117064249
0.3438	-0.3426	-0.3426380	-0.3426380098
0.3750	-0.3734	-0.3733560	-0.3733561800
0.4062	-0.4040	-0.4039390	-0.4039385134
0.4375	-0.4345	-0.4344590	-0.4344591026
0.4688	-0.4648	-0.4647950	-0.4647946327

0.5000	-0.4948	-0.4948230	-0.4948225080
0.5312	-0.5247	-0.5246120	-0.5246119111
0.5625	-0.5542	-0.5542270	-0.5542274424
0.5938	-0.5835	-0.5835420	-0.5835419298
0.6250	-0.6124	-0.6124310	-0.6124306816
0.6562	-0.6410	-0.6409540	-0.6409542266
0.6875	-0.6692	-0.6691670	-0.6691672304
0.7188	-0.6969	-0.6969410	-0.6969414638
0.7500	-0.7242	-0.7241530	-0.7241533481
0.7512	-0.7509	-0.7508550	-0.7251900069
0.8125	-0.7771	-0.7770900	-0.7770901037
0.8438	-0.8027	-0.8027340	-0.8027338637
0.8750	-0.8277	-0.8276670	-0.8276674429
0.9062	-0.8520	-0.8519340	-0.8519341746
0.9375	-0.8756	-0.8755690	-0.8755687314
0.9688	-0.8984	-0.8984520	-0.8984522567
1.0000	-0.9205	-0.9204760	-0.9204757107



Şekil 5. Literatürde yer alan sayısal sonuçların karşılaştırılması

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, öncelikle integral denklemler hakkında bilgi verilmiş ve integro-diferansiyel denklemler tanımlanmıştır. Daha sonra Enterpolasyon kavramı üzerinde durulmuştur. Diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımı yapıp, bununla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Teoremlerin ispatları yapıp, yöntemin yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerine ve integro-diferansiyel denklemlere uygulanışı örneklerle gösterilmiştir. Diferansiyel dönüşüm yönteminin farklı N değerleri için elde edilen çözümler kendi aralarında karşılaştırılmış ve elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki hatalar tablo ve şekil olarak ifade edilmiştir. N değerinin arttığı çözümlerde elde edilen sonuçların analitik çözümlere daha da yakın olduğu belirtilmiştir. Diğer taraftan diferansiyel dönüşüm yönteminden elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış, bu sonuçlar tablo ve şekil olarak incelenmiştir. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanışı ve analitik çözümlere daha yakın oluşu açısından verimli sonuçlar alındığı belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan, I.H., 2002, Different Applications for the differential transformation in the differential equations, *Appl. Math. Comput.*; 129, 183-201.

Aksoy, Y., 1998, *İntegral Denklemler*, Yıldız Üniversitesi Yayınları.

Archer, U.M., Petzold, L.R., 1991, Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*; 28, 1097-1120.

Ascher, U.M., 1989, On symmetric schemes and differential-algebraic equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*; 10, 937-949.

Avudainayagam, A., Vani, C., 2000, Wavelet-Galerkin method for integro-differential equations, *Appl. Numer. Math.*; 32, 247-254.

Ayaz, F., Solutions of the systems of differential equations by differential transform method, *Appl. Math. Comput.* (in press)

Babolian, E., Hosseini, M.M., 2003, Reducing index, and pseudospectral methods for differential-algebraic equations, *Appl. Math. Comput.*; 140, 77-90.

Chen, C.K., Ho, S.H., 1999, Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method, *Appl. Math. Comput.*; 106, 171-179.

Chen, C.L., Lin, S.H., Chen, C.K., 1996, Application of Taylor transformation to nonlinear predictive control problem, *Applied Mathematical Modelling*; 20, 699-710.

Chen, C.L., Liu, Y.C., 1998, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation*; 95, 155-164.

Chen, C.L., Liu, Y.C., 1998, Solution of two point boundary value problems using the differential transformation method, *Journal of Optimization Theory and Applications*; 99, 23-35.

Çelik, E., Bayram, M., 2003, Arbitrary order numerical method, for solving differential-algebraic equations by Pade series. *Appl. Math. Comput.*; 137, 57-65.

Çelik, E., Bayram, M., 2003, On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade series, *Appl. Math. Comput.*; 137, 51-160.

- El-Sayed, S.M., Abdel-Aziz, M.R.,** 2003, A comparison of Adomian's decomposition method and Wavelet-Galerkin method for solving integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.*; 136, 151-159
- Gear, C.W., Petzold, L.R.,** 1984, ODE systems for the solution of differential-algebraic systems, *SIAM J. Numer. Anal.*; 21, 716-728.
- Griepentrog, E., Marz, R.,** 1989, Basic properties of some differential-algebraic equations, *Z. Anal. Anwend.*; 8, 25-40.
- Higueras, I., Gareya-Celayeta, B.,** 1999, Runge-Kutta methods for DAEs. A new approach, *J. Comput. Appl. Math.*; 111, 49-61.
- Hosseini, S.M., Shahmorad, S.,** 2003, Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases, *Appl. Math. Model.*; 27, 145-154
- Jang, M.J., Chen, C.L.,** 1997, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, *Applied Mathematics and Computation*; 88, 137-151.
- Jang, M.J., Chen, C.L., Liy, Y.C.,** 2000, On solving the initial value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*; 115, 145-160.
- Kenwel, Ram. P.,** *Integral Equations, Theory and Application*, Pennsylvania state university.
- Maleknejad, K., Mahmoudi, Y.,** 2003, Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.*; 145, 641-653.
- Maleknejad, K., Mirzaee, F., Abbasbandy, S.,** 2003, Solving linear integro-differential equations system by using rationalized Haar functions method, *Appl. Math. Comput.*
- Malik, M., Dang, H.H.,** 1998, Vibration analysis of continuous system by differential transformation, *Applied Mathematics and Computation*; 96, 17-26.
- Rashed, M.T.,** 2003, Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.*

Wazwaz, A.M., 2001, A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.*; 118, 327-342.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayten AKIN

Doğum Yeri : Muğla

Doğum Tarihi : 1982

Medeni Hali : Bekar

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : Milas Lisesi, Milas/MUĞLA, 1996-2000

Lisans : Pamukkale Üniversitesi (Denizli) Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 2000-2004

Yabancı Dil : İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

Atılım Dershanesi, DENİZLİ

Milas Sınav Dershanesi, Milas/MUĞLA