

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ

Gökşen BACAK TURAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03

Sunuş Tarihi: 28.01.2010

Bornova-İZMİR

2010

Gökşen BACAK TURAN tarafından DOKTORA TEZİ olarak sunulan "**GRAFLARDA ZEDELENEİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesinin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 28.01.2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ
Raportör Üye	: Prof. Dr. Urfat NURİYEY
Üye	: Prof. Dr. Fevzi ÜNLÜ
Üye	: Prof. Dr. Yalçın ÇEBİ
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

ÖZET

GRAFLARDA ZEDELENEİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ

BACAK TURAN, Gökşen

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Ocak 2010, 62 sayfa

Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücünün ölçümüne, zedelenebilirlik değeri denir. Bir iletişim ağı, zedelenebilirlik değerinin belirlenebilmesi için, merkezleri bir grafin tepelerine, bağlantıları grafin ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde bir graf ile modellenir.

Merkezlerinin bozulmasıyla zarar gören bir iletişim ağını modelleyen bir G grafinin zedelenebilirliğini ölçmek için, tepe bağlantılılık sayısı, tepe bütünlük değeri, toughness değeri, scattering sayısı, tenacity değeri, rupture derecesi gibi ölçümler tanımlanmıştır. Bu ölçümlerin her biri, bir G grafinin tepelerinin atılması sonucunda elde edilen zedelenebilirlik değerini vermekte olup, ayrıca bu ölçümlerin bazılarının ayrıt uyarlaması da tanımlanmıştır. Ancak bir iletişim ağının bazı merkezlerinin bozulması sonucunda, bu merkezlere bitişik olan merkezlerin de işlevini yitirdiği ağlar ele alınca bu ölçümlerin komşuluk uyarlaması ortaya çıkmıştır. Böylece bir G grafinin komşu bağlantılılık sayısı, komşu bütünlük değeri ve komşu scattering sayısı tanımlanmıştır.

Bu tezde, G^{---} , G^{--+} , G^{-+-} , G^{-++} , G^{+--} , G^{+-+} , G^{++-} ve G^{+++} transformasyon grafları hakkında bilgi verilmiş ve bu grafların komşu bütünlük değerleri incelenmiştir. Ayrıca rupture derecesi ele alınarak bu parametrenin çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler incelenmiş ve k -ary tam ağaçlar ve bu ağaçlara uygulanan çeşitli graf işlemleri sonucunda elde edilen grafların rupture dereceleri bulunmuştur. Son olarak, yeni bir zedelenebilirlik ölçümü olan komşu rupture derecesi tanımlanmış, bazı özel grafların komşu rupture dereceleri elde edilmiş ve bu ölçüm için bazı alt ve üst sınırlar bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: Zedelenebilirlik, komşu bütünlük değeri, rupture derecesi, komşu rupture derecesi, k -ary tam ağaçlar, transformasyon graflar.

ABSTRACT

VULNERABILITY PARAMETERS IN GRAPHS

BACAĞ TURAN, Gökşen

PhD in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

January 2010, 62 pages

In a communication network, the vulnerability measures the resistance of the network to disruption of operation after the failure of certain stations or communication links. A communication network is modelled by a graph to measure the vulnerability as stations corresponding to the vertices and communication links corresponding to the edges.

Some parameters are defined such as connectivity, integrity, toughness, scattering number, tenacity and rupture degree, to measure the vulnerability of a graph G modelling a network which is disrupted after the failure of certain stations. Each parameter measures the vulnerability of a graph after the removal of some vertices, and also some edge analogues of the parameters are defined. However, regarding the adjacent stations that lose their function, as a consequence of the failure of the certain stations of network, the neighbor concepts of these parameters are emerged. Hence, the neighbor connectivity, neighbor integrity and neighbor scattering are defined.

In this thesis, the information about the transformation graphs G^{---} , G^{--+} , G^{-+-} , G^{-++} , G^{+--} , G^{+-+} , G^{++-} and G^{+++} are given and neighbor integrity of these graphs are obtained. In addition, rupture degree is covered, the relationships between rupture degree and other vulnerability parameters are analyzed and the rupture degree of complete k -ary trees and the graphs obtained by some graph operations on these trees are examined. Finally, neighbor rupture degree is defined as a new vulnerability parameter, the neighbor rupture degree of some graph families are attained and some lower and upper bounds for this parameter are given.

Key Words: Vulnerability, neighbor integrity, rupture degree, neighbor rupture degree, k -ary trees, transformation graphs.

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıőması boyunca bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen danıőmanım Sayın Prof. Dr. Alpay Kırılancı'a, çalıőmamda yardım ve önerilerini her zaman benimle paylaşan arkadaşım Ersin Aslan'a, yaőantım boyunca desteklerini her zaman sÖrdüren aileme ve bana her konuda gÖç veren sevgili eőim M. Erkan Turan'a sonsuz teőekkÖrlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
SİMGELER DİZİNİ	xvii
1 GİRİŞ	1
2 TRANSFORMASYON GRAFLARIN KOMŞU BÜTÜNLÜK DEĞERİ	7
2.1 Komşu Bütünlük Değeri	7
2.2 Temel Sonuçlar	8
2.3 Transformasyon Grafları	9
2.4 G^{-+-} Transformasyon Grafi	9
2.5 G^{+--} Transformasyon Grafi	12
2.6 G^{++-} Transformasyon Grafi	14
2.7 G^{---} Transformasyon Grafi	15
2.8 G^{-++} , G^{+++} , G^{+-+} ve G^{--+} Transformasyon Grafları	17
3 RUPTURE DERECEŚİ	19
3.1 Rupture Derecesi	19
3.2 Temel Sonuçlar	20
3.3 Rupture Derecesi için Bazı Alt ve Üst Sınırlar	21
3.4 k -ary Tam Ağaçların Rupture Derecesi	23
3.4.1 Kartezyen çarpımı işlemi	25
3.4.2 Kuvvet işlemi	27
3.4.3 Bileşke işlemi	28
3.5 Grafların Kartezyen Çarpımının Rupture Derecesi	30

4 KOMŞU RUPTURE DERECEŚİ	33
4.1 Komşu Rupture Derecesi	33
4.2 Temel Sonuçlar	35
4.3 Komşu Rupture Derecesi için Bazı Alt ve Üst Sınırlar	39
4.4 k -ary Tam Ağaçların Komşu Rupture Derecesi	41
5 SONUÇ	49
KAYNAKLAR DİZİNİ	50

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 8 tepeli iki graf	2
1.2 8 tepeli iki graf	3
1.3 13 tepeli iki graf	4
2.1 4 tepeli P_4 yol grafi	7
2.2 C_6 çevre grafi	9
2.3 C_6^{-+-} transformasyon grafi	10
2.4 C_6^{+--} transformasyon grafi	12
2.5 C_6^{+++} transformasyon grafi	15
2.6 C_6^{---} transformasyon grafi	16
3.1 4 tepeli bir G grafi	19
3.2 $T_{2,4}$, 4 seviyeli, 2-ary tam ağacı	23
4.1 5 tepeli bir G grafi	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 P_n yol grafinin komşu rupture derecesi	36
4.2 C_n çevre grafinin komşu rupture derecesi	38

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
-----------------	-----------------

$\delta(G)$	minimum tepe derecesi
$\Delta(G)$	maksimum tepe derecesi
$L(G)$	line graf
\overline{G}	tümleyen graf
$\chi(G)$	kromatik sayı
$\beta(G)$	örtü sayısı
$\alpha(G)$	bağımsızlık sayısı
$\gamma(G)$	baskınlık sayısı
$\gamma_i(G)$	bağımsız baskınlık sayısı
$\gamma'(G)$	ayrıt baskınlık sayısı
$\kappa(G)$	bağlantılılık sayısı
$K(G)$	komşu bağlantılılık sayısı
$I(G)$	tepe bütünlük değeri
$NI(G)$	komşu bütünlük değeri
$t(G)$	toughness değeri
$T(G)$	tenacity değeri
$sc(G)$	scattering sayısı
$S(G)$	komşu scattering sayısı
$r(G)$	rupture derecesi
$Nr(G)$	komşu rupture derecesi

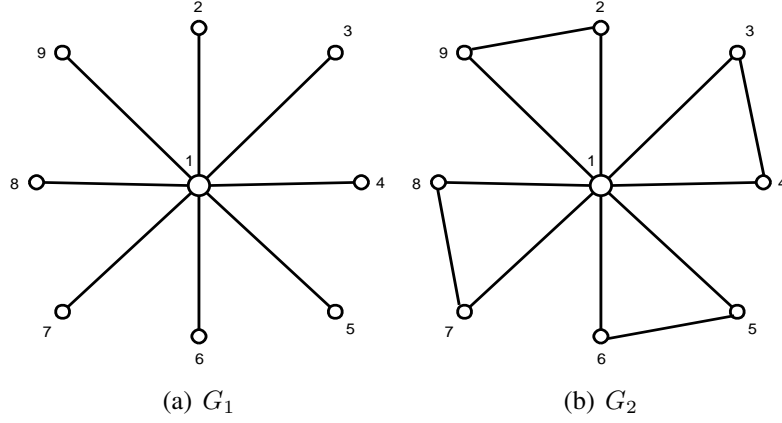
1. GİRİŞ

Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir. Bir iletişim ağı, çeşitli nedenlerle zarara uğradığında, oluşan zararın belirlenmesi için yanıtlanması istenen sorular, aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Zarar gören merkezlerin sayısı,
2. Zarar gören bağlantıların sayısı,
3. Ağın kaç parçaya ayrıldığı,
4. İletişimin devam ettiği bağlantılı alt ağların sayısı,
5. İletişimin devam ettiği en çok merkeze sahip alt ağın merkez sayısı,
6. İletişimin devam ettiği en çok bağlantıya sahip alt ağın bağlantı sayısı,
7. Zarar gören merkezlere komşu olan merkezlerin sayısı,
8. Zarar gören merkezler ve komşuları çıkarıldıktan sonra, iletişimin devam ettiği bağlantılı alt ağların sayısı,
9. Zarar gören merkezler ve komşuları çıkarıldıktan sonra, iletişimin devam ettiği en çok merkeze sahip alt ağın merkez sayısı.

Bu soruların yanıtları, bir iletişim ağının uğradığı zararlarla ilgili bilgiler vermektedir. Elbette yanıtlanması istenen sorular sadece bunlarla sınırlı değildir; başka sorular da olabilir. Bu soruların yanıtlarını araştırabilmek için bir iletişim ağı, merkezleri bir grafın tepelerine, bağlantıları grafın ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde bir graf ile modellenir. Bir grafın zedelenebilirliğini ölçmek için çeşitli ölçümler tanımlanmıştır. Bilinen en eski ölçüm, yukarıda verilen ilk sorunun yanıtını araştıran tepe bağlantılılık sayısıdır.

Tanım 1.0.1. (Harary, 1972) Bağlantılı bir G grafını, bağlantısız bir graf ya da sadece tek bir izole tepeden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılması gereken minimum tepe sayısına grafın tepe bağlantılılık sayısı (connectivity) denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir.



Şekil 1.1: 8 tepeli iki graf

Ancak bu ölçüm, zedelenebilirlik değerini belirlerken yukarıdaki diğer soruların hiçbirine yanıt vermemektedir. Diğer bir deyişle, grafın bileşenlerine ayrıldığı bilgisi dışında, geriye kalan graf hakkında bilgi vermemektedir. Ayrıca birden fazla graf için tepe bağlantılılık sayısı verildiğinde, bu grafların tepe bağlantılılık değerlerine bakılarak, bu ölçümün, graflar arasında her zaman ayırt edici olduğu söylenemez. Örneğin, Şekil 1.1’de verilen G_1 ve G_2 graflarından, 1 nolu tepeler atıldığında, graflar bağlantısız ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline gelmektedir. Yani, G_1 ve G_2 graflarının tepe bağlantılılık sayısı 1’dir. Dolayısıyla sadece tepe bağlantılılık değerlerine bakarak, bu ölçümün grafların farklı olduğunu belirttiğini, yani graflar arasında ayırt edici olduğunu söyleyemeyiz. Görüldüğü gibi, tepe bağlantılılık sayısı, sadece bir grafın bileşenlere ayrılması için, atılması gereken en az tepe sayısı hakkında bilgi vermektedir. İletişim ağı zarar gördükten sonra geriye kalan ağın bileşen sayısı ya da iletişime devam eden en çok elemana sahip alt ağın eleman sayısı hakkında herhangi bir bilgi vermemektedir. Bu durumda, yukarıdaki sorulara biraz daha yanıt aramak için çeşitli ölçümler ortaya konmuştur. Yukarıdaki sorulardan 1 ve 5 ile ilgilenen bir ölçüm olan tepe bütünlük değeri, Barefoot ve Entringer tarafından 1987 yılında tanımlanmıştır (Barefoot and Entringer, 1987).

Tanım 1.0.2. (Barefoot and Entringer, 1987) Herhangi bir G grafından, bir $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesi atıldığında, geriye kalan $G - S$ grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, G grafının tepe bütünlük değeri (integrity),

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\} \text{ 'dir.}$$

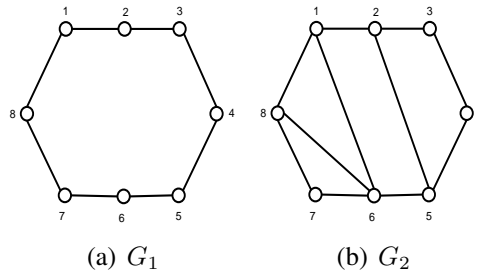
Şekil 1.1’de verilen G_1 ve G_2 graflarının tepe bağlantılılık değerleri birbirine eşit olmasına rağmen, tepe bütünlük değerleri birbirinden farklıdır. $I(G_1) = 2$ ve $I(G_2) = 3$ ’dir. Görüldüğü gibi, tepe bağlantılılık sayısı bazı graflar için ayırt edici olmazken, tepe bütünlük değeri bu graflar için ayırt edici bir ölçüm olabilmektedir.

Tepe bağlantılılık sayısı ve tepe bütünlük değeri, bir ağa karşılık gelen grafların zedelenebilirlik değerini ölçmektedir. Ancak bu ölçümler, atılan tepelerin komşuları üzerindeki etkileriyle ilgilenmemektedir. Bir ağdaki merkezlerin bozulması sonucunda, bu merkezlerin komşularının da etkilendiği ağ, bir casus ağı (spy network) olarak isimlendirilir. Çünkü, bir casus ele geçirildiğinde, onunla iletişimde olan kişilerin de güvenliği artık söz konusu değildir. Bu nedenle, bu ağı temsil eden grafta, sadece tepeler yerine, tepelerle beraber tüm komşu tepeler de graftan atılır. Bu bağlamda, komşu bütünlük kavramı, Cozzens ve Wu tarafından 1996 yılında tanımlanmıştır (Cozzens and Wu, 1996).

Tanım için öncelikle aşağıdaki bilgiye gereksinim vardır. G grafinin herhangi bir u tepesinin açık komşuluğu, $N(u) = \{v \in V(G) | v \neq u, v \text{ ve } u \text{ komşu}\}$ ve kapalı komşuluğu, $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ şeklinde tanımlanır. $N[u]$ kapalı komşuluğu graftan atılan u tepesine subverted tepe denir. Tüm tepeleri subverted olan $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ kümesine, G grafinin subversion stratejisi denir. G/S , S kümesinin tüm tepeleri graftan atıldıktan sonra geriye kalan grafi, $c(G/S)$ ise geriye kalan bu graftaki en büyük bileşenin tepe sayısını ifade eder. S kümesindeki tüm tepeler, graftan subverted edildiğinde geriye kalan graf, bağlantısız bir graf, bir klik ya da boş graf olabilir.

Tanım 1.0.3. (Cozzens and Wu, 1996) Bir G grafinin komşu bütünlük değeri, herhangi bir tepe subversion stratejisi S ve G/S grafindaki en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(G/S)$ olmak üzere,

$$NI(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + c(G/S)\} \text{ 'dir.}$$



Şekil 1.2: 8 tepeli iki graf

Şekil 1.2'de verilen, G_1 ve G_2 graflarının tepe bağlantılılık değerleri ve tepe bütünlük değerleri hesaplandığında her iki ölçümün de bu graflar için ayırt edici bir özellik taşımadığı görülmektedir.

$$\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 2,$$

$$I(G_1) = I(G_2) = 5.$$

Ancak, komşu bütünlük değerleri incelendiğinde

$$NI(G_1) = 2, NI(G_2) = 3$$

olduğundan, komşu bütünlük değerinin bu graflar için ayırt edici olduğu görülür.

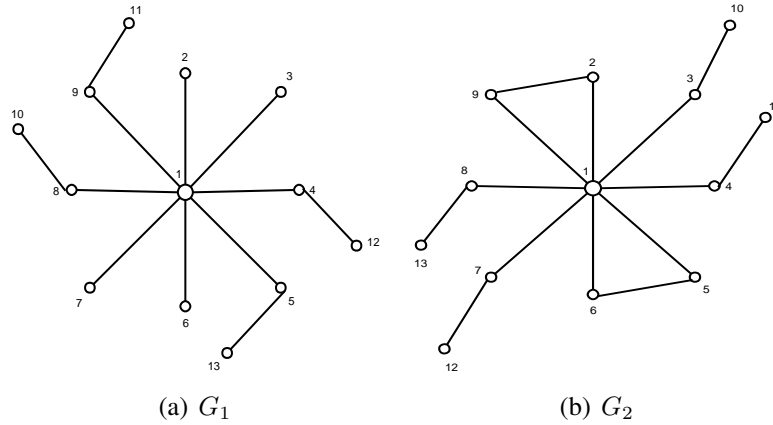
Yukarıda bahsedilen tepe bütünlük ve komşu bütünlük ölçümleri, başta verilen sorulardan sadece iki tanesini aynı anda incelemektedir. Zarar gören bir iletişim ağı hakkında daha fazla bilgi edinmek için bu sorulardan üçünü veya daha fazlasını aynı anda ele almak gerekebilir. Bu bağlamda, 1, 4 ve 5 nolu soruları ele alan bir ölçüm, Li ve arkadaşları tarafından 2005 yılında rupture derecesi adıyla tanımlanmıştır (Li and Li, 2005).

Tanım 1.0.4. (Li and Li, 2005) Tam graf olmayan bağlantılı bir G grafının rupture derecesi

$$r(G) = \max_{S \subset V(G)} \{w(G - S) - |S| - m(G - S); w(G - S) > 1\}$$

şeklinde tanımlanır ve $r(G)$ ile gösterilir.

Bir G grafının bazı tepelerini graftan çıkardığımızda grafın bileşenlerinin sayısı artıyorsa, bu kümeye grafın kesim kümesi denir. Dolayısıyla, $w(G - S) > 1$ şartını sağlayan S kümesi, bir kesim kümedir.



Şekil 1.3: 13 tepeli iki graf

Şekil 1.3'de verilen G_1 ve G_2 graflarının tepe bağlantılılık değerleri, tepe bütünlük değerleri ve komşu tepe bütünlük değerleri hesaplandığında, birbirlerine eşit oldukları ve graflar için ayırt edici olmadıkları görülür.

$$\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1$$

$$I(G_1) = I(G_2) = 3$$

$$NI(G_1) = NI(G_2) = 2$$

$$r(G_1) = 5, r(G_2) = 3$$

Ancak, bu grafların rupture dereceleri birbirlerinden farklıdır ve rupture derecesi, bu graflar için ayırt edicidir.

Buraya kadar verilen ölçümlerin dışında, başka ölçümler de yukarıdaki sorulara yanıt bulmak amacıyla tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.0.5. (Chvatal, 1973) Bir G grafinin toughness değeri, S herhangi bir kesim küme ve S kümesi graftan atıldıktan sonra geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere,

$$t(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S|}{w(G - S)} \right\} \text{ 'dir.}$$

Tanım 1.0.6. (Jung, 1978) Bir G grafi için scattering sayısı, S bir kesim küme ve S kümesi graftan atıldıktan sonra geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere,

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S|\} \text{ 'dir.}$$

Tanım 1.0.7. (Cozzens et al., 1995) Bir G grafinin tenacity değeri, S herhangi bir kesim küme, $G - S$ grafinin bileşen sayısı $w(G - S)$ ve en büyük elemanlı bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere,

$$T(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S| + m(G - S)}{w(G - S)} \right\} \text{ 'dir.}$$

Bu tezde çeşitli grafların komşu bütünlük değerleri ve rupture dereceleri araştırılırken kullanılan tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.0.8. (Harary, 1972) Bir G grafinde, bir tepeden diğer bir tepeye daima ulaşılabilirse, bu grafa bağlantılı graf denir.

Tanım 1.0.9. (Buckley and Harary, 1989) Bir grafin tepe dereceleri içinde en küçüğüne grafin minimum tepe derecesi, en büyüğüne de maksimum tepe derecesi denir ve sırasıyla $\delta(G)$ ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.10. (Gross and Yellen, 1999) Bir G grafinin $S \subseteq V(G)$ kümesindeki her iki tepe çifti, G grafinde bir ayrıtla birleştirilmemiş ise bu kümeye bağımsız küme, bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına da grafin bağımsızlık sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.11. (Gross and Yellen, 1999) $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, G grafindeki her bir ayrıtın en az bir uç tepesi, S kümesinin elemanı ise bu kümeye örtü kümesi, bu kümeler içinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına da grafin örtü sayısı denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.12. (Allan and Laskar, 1978) $S \subset V(G)$ olmak üzere, $V(G) - S$ kümesindeki her tepe, G grafindaki bazı tepelerle komşu ise S kümesi baskın küme olarak adlandırılır. Baskınlık sayısı, en az elemana sahip baskın kümenin eleman sayısıdır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir. Bir S baskın kümesi, S bağımsız bir küme ise bağımsız baskın küme olarak adlandırılır. En az elemanlı bağımsız baskın kümenin eleman sayısına da bağımsız baskınlık sayısı denir ve $\gamma_i(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.13. (Mitchell and Hedetniemi, 1977) Her $e \in E(G) - F$ için, e ayrıtı ile ortak uç tepeye sahip olacak şekilde bir $f \in F$ ayrıtı varsa, F ayrıtlar kümesine ayrıt baskın kümesi denir. En az elemanlı ayrıt baskın kümenin eleman sayısına, ayrıt baskınlık sayısı denir ve $\gamma'(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.14. (Bondy and Murty, 1976) Bir G grafindaki herhangi iki u, v tepesi arasındaki uzaklık, bu iki tepeyi birleştiren en kısa yolu oluşturan ayrıtların sayısına eşittir ve $d_G(u, v)$ ile gösterilir. Bir G grafinin tüm tepe ikilileri arasındaki uzaklıkların maksimumuna, o grafin çapı denir ve $diam(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.15. (Harary, 1972) Tepeler kümesi, G grafinin $E(G)$ ayrıtlar kümesinden ve ayrıtlar kümesi de, G grafinda komşu olan ayrıtlara karşılık gelen tepeleri birleştiren ayrıtlardan oluşan grafa, G grafinin line grafi denir ve $L(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.0.16. (Chartrand and Lesniak, 1996) Bir G grafinin tümleyen grafi \overline{G} , G grafi ile aynı tepeler kümesine sahiptir ve G grafinda komşu olmayan iki tepe \overline{G} grafinda komşu iken, G grafinda komşu olan iki tepe \overline{G} grafinda komşu değildir.

İkinci bölümde G^{---} , G^{--+} , G^{-+-} , G^{-++} , G^{+--} , G^{+++} , G^{++-} ve G^{+++} transformasyon grafları hakkında bilgi verilmiş ve bu grafların komşu bütünlük değerleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde rupture derecesi ele alınmış ve çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Ayrıca k -ary tam ağaçlar ve bunlar üzerinde yapılan çeşitli işlemler sonucunda elde edilen grafların rupture dereceleri araştırılmıştır. Son bölümde ise ikinci ve üçüncü bölümlerdeki parametrelerin ışığı altında, yeni bir zedelenebilirlik ölçümü olan komşu rupture derecesi tanımlanmıştır. Özel grafların komşu rupture derecesi hesaplandıktan sonra, bu ölçüm için bazı alt ve üst sınırlar verilmiştir. Bu çalışmada son olarak, k -ary ağaçların komşu rupture derecesi ele alınmıştır.

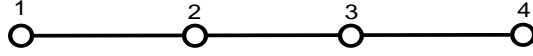
2. TRANSFORMASYON GRAFLARIN KOMŞU BÜTÜNLÜK DEĞERİ

Bu bölümde, bir G grafinin 8 farklı transformasyon grafi ele alınmıştır. Öncelikle G^{-+-} , G^{+--} , G^{++-} ve G^{---} graflarının komşu bütünlük değerleri hesaplanmış, ardından G^{+-+} , G^{-++} , G^{--+} ve G^{+++} graflarının komşu bütünlük değerleri için üst sınırlar elde edilmiştir.

2.1 Komşu Bütünlük Değeri

Bu kısımda, komşu bütünlük değeri bir örnek üzerinde ele alınmıştır.

Örnek 2.1.1. Şekil 2.1'de verilen G grafinin komşu bütünlük değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:



Şekil 2.1: 4 tepeli P_4 yol grafi

$S \subseteq V(G)$ kümesi, G grafinin bir subversion stratejisi olsun.

- $S = \{1\}$ ve $S = \{4\}$ için $c(G/S) = 2$ olduğundan $NI_1(G) = 1 + 2 = 3$,
- $S = \{2\}$ ve $S = \{3\}$ için $c(G/S) = 1$ olduğundan $NI_2(G) = 1 + 1 = 2$,
- $S = \{1, 2\}$ ve $S = \{3, 4\}$ için $c(G/S) = 1$ olduğundan $NI_3(G) = 2 + 1 = 3$,
- $S = \{1, 3\}$, $S = \{1, 4\}$, $S = \{2, 3\}$ ve $S = \{2, 4\}$ için $c(G/S) = 0$ olduğundan $NI_4(G) = 2 + 0 = 2$,
- $S = \{1, 2, 3\}$, $S = \{1, 2, 4\}$, $S = \{1, 3, 4\}$ ve $S = \{2, 3, 4\}$ için $c(G/S) = 0$ olduğundan $NI_5(G) = 3 + 0 = 3$ elde edilir.

Tanım gereği, bulunan sonuçların minimumu alındığında, P_4 grafinin komşu bütünlük değeri, $NI(G) = \min\{NI_1(G), NI_2(G), NI_3(G), NI_4(G), NI_5(G)\} = 2$ bulunur.

2.2 Temel Sonuçlar

Bu kısımda bilinen bazı graf ailelerinin komşu bütünlük değerleri ve komşu bütünlük değeri için bazı alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 2.2.1. (Cozzens and Wu, 1996, 1998)

(a) $NI(K_n) = 1.$

(b) $NI(P_n) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{n+3} \rceil - 4, & n \geq 2 \text{ ise;} \\ 1, & n = 1. \end{cases}$

(c) $NI(C_n) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 3, & n \geq 5 \text{ ise;} \\ 2, & n = 4 \text{ ise;} \\ 1, & n = 3 \text{ ise.} \end{cases}$

Teorem 2.2.2. (Kirlangic and Ozan, 2000)

(a) $T(P_n)$, $n \geq 11$ tepeli, P_n yol grafinin total grafi olmak üzere,

$$NI(T(P_n)) = \lceil 2\sqrt{2n+4} \rceil - 6.$$

(b) $T(C_n)$, $n \geq 18$ tepeli, C_n yol grafinin total grafi olmak üzere,

$$NI(T(C_n)) = \lceil 2\sqrt{2n} \rceil - 5.$$

Teorem 2.2.3. (Kirlangic, 2004) G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere,

$$NI(G_1 + G_2) = \begin{cases} 1, & \beta(G_1) = 1 \text{ ya da } \beta(G_2) = 1 \text{ ise;} \\ 2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

Teorem 2.2.4. (Cozzens, 1994)

(a) Bir G grafinin maksimum eşleme sayısı, o grafin komşu bütünlük değeri için bir üst sınırdır.

(b) $NI(G) \leq \alpha(G)$ 'dir.

(c) $NI(G) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul, G grafinin dallanmış alt grafinin bir yıldız graf ya da G grafinin sadece izole tepelerden oluşan bir graf olmasıdır.

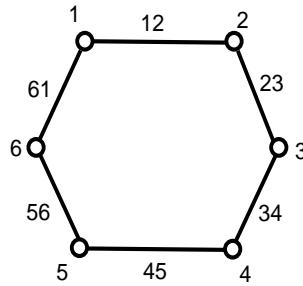
2.3 Transformasyon Grafları

a ve b , $V(G) \cup E(G)$ kümesinin iki elemanı olsun. a ve b , G grafında komşu iki tepe ya da ayrıt ise, ya da biri tepe biri ayrıt olmak üzere, tepe ayrıtın uç tepesi (ilişkili) ise “+” sembolü ile, ilişkili değil ise “-” sembolü ile gösterilir. xyz , $\{+, -\}$ sembollerinin 3 elemanlı permütasyonları olsun. a ve b , ikisi de $V(G)$ 'nin elemanı ise (sırasıyla, a ve b , $E(G)$ 'nin elemanı ise ya da a ve b 'den biri $V(G)$ 'nin elemanı iken, diğeri $E(G)$ 'nin elemanı ise), xyz 'nin birinci terimi x 'e (sırasıyla, ikinci terimi y 'ye ya da üçüncü terimi z 'ye) karşılık gelir. G grafının G^{xyz} transformasyon grafi, $V(G) \cup E(G)$ tepeler kümesinde tanımlıdır. G^{xyz} grafının iki tepesi a ve b , xyz 'de karşılık gelen terimin sembolüne göre bir ayrıtla birleştirilir ya da birleştirilmez (Wu et al., 2005; Xu and Wu, 2008). $\{+, -\}$ sembollerinin 3 elemanlı permütasyonlarının sayısı 8 olduğundan, G grafından 8 farklı transformasyon grafi elde edilir. G^{+++} grafi, G grafının total grafına ve G^{---} grafi, bu total grafın tümleyen grafına karşılık gelmektedir. Ayrıca, G^{++-} ve G^{--+} , G^{+-+} ve G^{-+-} , G^{-++} ve G^{+--} transformasyon grafları, birbirinin tümleyen graflarıdır.

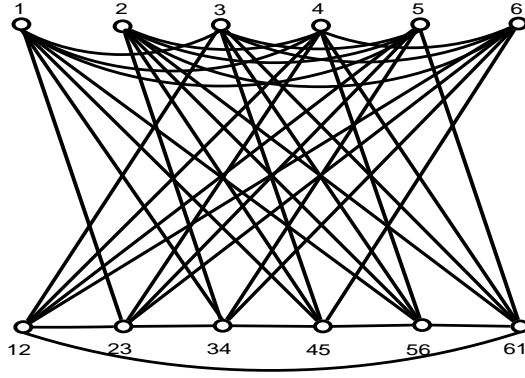
Bundan sonraki teoremlerde, transformasyon grafların komşu bütünlük değerleri araştırılırken, grafların bağlantılı olduğu kabul edilmiştir. Teorem 2.2.4'e göre, incelenen transformasyon grafları bağlantılı olduğundan ve yıldız grafa izomorf bir dallanmış alt graf içermediğinden, bu grafların komşu bütünlük değerleri daima 1'den büyüktür.

2.4 G^{-+-} Transformasyon Grafi

G^{-+-} transformasyon grafi, $V(G) \cup E(G)$ tepeler kümesine sahiptir ve ayrıtlar kümesi, G grafının tümleyeninin ayrıtlarını, G 'nin line grafının ayrıtlarını ve \bar{G} ile $L(G)$ grafının G 'de ilişkili olmayan elemanlarını birleştiren ayrıtları içerir. Şekil 2.2'de verilen, C_6 grafının transformasyon grafi C_6^{-+-} , Şekil 2.3'de verilmiştir.



Şekil 2.2: C_6 çevre grafi

Şekil 2.3: C_6^{-+-} transformasyon grafi

Teorem 2.4.1. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) = 1$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere,

$$NI(G^{-+-}) = 2 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. S , G^{-+-} grafının, bir subversion stratejisi olsun ve sadece 1 dereceli bir tepe içersin, $S = \{u | u \in V(G) \text{ ve } deg_G(u) = 1\}$. u tepesi, G grafında sadece tek bir v tepesine komşu olduğundan, G^{-+-} grafında, bu tepe dışındaki diğer tüm tepelere ve uç tepesi olduğu $e = uv$ ayrıtı dışındaki diğer tüm ayrıtlara karşılık gelen tepelere komşudur. Bu durumda, $N[S] = (E(G) \setminus \{e\}) \cup (V(G) \setminus \{v\})$ 'dir. Geriye kalan v ve e tepeleri, G^{-+-} grafında bağımsız tepeler olduğundan, $c(G^{-+-}/S) = 1$ 'dir ve böylece,

$$NI(G^{-+-}/S) = |S| + c(G^{-+-}/S) = 1 + 1 = 2 \text{ elde edilir.}$$

Teorem 2.4.2. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) \geq 2$ ve çapı $diam(G) \leq 2$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere,

$$NI(G^{-+-}) = \begin{cases} 2, & \gamma'(G) \leq 2; \\ 3, & \gamma'(G) > 2. \end{cases}$$

Kanıt. S , G^{-+-} grafının, $|S| + c(G^{-+-}/S) = NI(G^{-+-})$ ifadesini sağlayan bir subversion stratejisi olsun. G 'nin ayrıt baskınlık sayısına bağlı olarak ortaya çıkan iki durum vardır:

Durum 1: G grafının ayrıt baskınlık sayısı $\gamma'(G) \leq 2$ olsun.

(i) $\gamma'(G) = 2$ ise G grafının minimum ayrıt baskın kümesi, G^{-+-} grafının S subversion stratejisi olarak alınabilir. $u, x, v, y \in V(G)$ olmak üzere, u ile x , v ile y komşu olsun. $e = ux$, u ile x arasındaki ayrıtı ve $f = vy$, v ile y arasındaki ayrıtı gösterebilir. G^{-+-} grafının tepelerine karşılık gelen G

grafının ayrıtları, G 'de birbirine komşu değilse, bu ayrıtlara karşılık gelen tepeler de G^{-+-} grafında birbirlerine komşu değildir. Ayrıca bu tepeler, G^{-+-} grafında ayrıtlın uç tepelerine de komşu değildir. $S = \{e, f | e = ux, f = vy \in E(G) \text{ ve } e \text{ ile } f \text{ komşu olmamak üzere}\}$, G grafının minimum ayrıtlı baskın kümesi olsun. Bu durumda, S 'nin kapalı komşuluğu $N[S] = E(G) \cup V(G)$ elde edilir. Kısaca, G^{-+-} grafının tepelerine karşılık gelen, G grafının tepelerinin ve ayrıtlarının her biri, S kümesindeki tepelerden en az birine komşudur. O halde, geriye kalan G^{-+-}/S grafi boştur ve geriye kalan graftaki bağlantılı bileşenlerden en büyüğünün tepe sayısı $c(G^{-+-}/S) = 0$ 'dır ve böylece,

$$NI(G^{-+-}/S) = |S| + c(G^{-+-}/S) = 2 + 0 = 2 \quad (2.2.4.1)$$

elde edilir.

(ii) $\gamma'(G) = 1$ ise G grafının minimum ayrıtlı baskın kümesi, G^{-+-} grafının S subversion stratejisi olarak alınabilir, $S = \{e | e = uv \in E(G)\}$. $e = uv$ ayrıtlının uç tepeleri olan u ve v tepeleri G^{-+-} grafında birbirlerine komşu değildir ve S kümesinin kapalı komşuluğunda yer almazlar. Bu durumda $N[S] = E(G) \cup (V(G) \setminus \{u, v\})$ ve $c(G^{-+-}/S) = 1$ 'dir ve böylece,

$$NI(G^{-+-}/S) = |S| + c(G^{-+-}/S) = 2 + 0 = 2 \quad (2.2.4.2)$$

elde edilir.

(2.2.4.1) ve (2.2.4.2)'den

$$NI(G^{-+-}/S) = 2 \quad (2.2.4.3)$$

bulunur.

Durum 2: G grafının ayrıtlı baskınlık sayısı $\gamma'(G) > 2$ olsun. S , G^{-+-} grafının S_1 ve S_2 kümelerinin birleşiminden oluşan bir subversion stratejisi olsun. S_1 , G grafının bir tepesini içeren bir küme ve S_2 , S_1 kümesinin elemanı olan tepeyle ilişkili olan bir ayrıtlı içersin. O halde, $S_1 = \{u | u \in V(G)\}$, $S_2 = \{e | e = ux \in E(G) \text{ öyle ki } u \in S_1\}$ ve $S = S_1 \cup S_2$ 'dir. S_1 ve S_2 kümelerinin elemanları, G^{-+-} grafında, S_2 kümesinde bulunan $e = ux$ ayrıtlının uç tepesi olan x tepesine komşu olmadıklarından, S kümesinin kapalı komşuluğu, bu x tepesi hariç, G grafının tüm tepelerini ve ayrıtlarını içermektedir. Dolayısıyla, $G^{-+-}/S = \{x\}$ ve $c(G^{-+-}/S) = 1$ bulunur ve sonuç olarak,

$$NI(G^{-+-}) = |S| + c(G^{-+-}/S) = 2 + 1 = 3 \text{ 'dir.} \quad (2.2.4.4)$$

(2.2.4.3) ve (2.2.4.4)'den ispat tamamlanır. \square

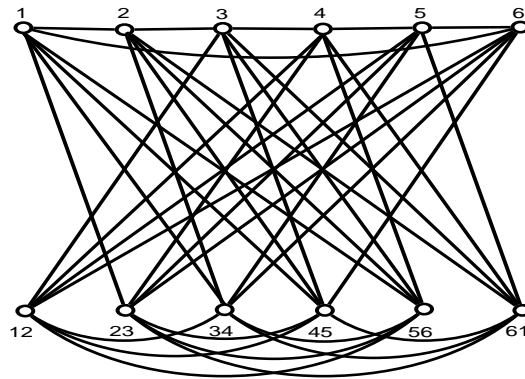
Teorem 2.4.3. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) \geq 2$ ve çapı $diam(G) > 2$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere

$$NI(G^{-+-}) = 2 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. S , G^{-+-} grafının bir subversion stratejisi olsun. $diam(G) > 2$ olduğundan, G 'de birbirine komşu olmayan ve ortak komşuları bulunmayan, u ve v gibi en azından iki tepe vardır. S kümesi, bu u ve v tepelerinden oluşan bir küme olsun, $S = \{u, v | u, v \in V(G) \text{ öyle ki } d(u, v) > 2\}$. u ve v tepeleri G grafında komşu olmadığından ve ortak komşuları bulunmadığından, G grafının tüm ayrıtları ya u tepesiyle ya da v tepesiyle ilişkilidir. Ancak ikisiyle aynı anda ilişkili değildir. Kısaca, G grafının ayrıtlarına karşılık gelen G^{-+-} grafının tepeleri, ya u tepesine ya da v tepesine komşudur. Ayrıca, bu tepelerden birisi, varsayalım u tepesi olsun, G grafındaki komşuları hariç, diğer tüm tepelerine karşılık gelen G^{-+-} grafındaki tepelere komşudur. Fakat diğer v tepesi, bu tepelere G grafında komşu olmadığından, G^{-+-} grafında komşudur. Dolayısıyla, $N[S] = V(G) \cup E(G)$ 'dir. O halde, G^{-+-}/S boş kümedir ve $c(G^{-+-}/S) = 0$ 'dır. Bunun sonucu olarak, $NI(G^{-+-}) = |S| + c(G^{-+-}/S) = 2 + 0 = 2$ elde edilir. \square

2.5 G^{+--} Transformasyon Grafı

G^{+--} tranformasyon grafı, $V(G) \cup E(G)$ tepeler kümesine sahiptir ve ayrıtlar kümesi G grafının ayrıtlarını, G 'nin line grafının tümleyeninin ayrıtlarını ve G ile $\overline{L(G)}$ grafının G 'de ilişkili olmayan elemanlarını birleştiren ayrıtları içerir. Şekil 2.2'de verilen C_6 grafının transformasyon grafı C_6^{+--} Şekil 2.4'de verilmiştir.



Şekil 2.4: C_6^{+--} transformasyon grafı

Teorem 2.5.1. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) = 1$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere,

$$NI(G^{+--}) = 2 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. İspat, Teorem 2.4.1'e benzer şekilde yapılır

Teorem 2.5.2. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) \geq 2$ ve çapı $\text{diam}(G) < 4$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere

$$NI(G^{+--}) = \begin{cases} 3, & \gamma_i(G) > 2; \\ 2, & \gamma_i(G) \leq 2. \end{cases}$$

Kanıt. S , G^{+--} grafının bir subversion stratejisi olsun. G 'nin bağımsız baskınlık sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1: G grafının bağımsız baskınlık sayısı $\gamma_i(G) > 2$ olsun. S kümesinin eleman sayısına göre üç durumda incelenir.

(i) S , G^{+--} grafının sadece bir tepesini içerirse, geriye kalan graftaki en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(G^{+--}/S)$ en azından ikidir. Buradan da,

$$NI(G^{+--}) \geq 3. \quad (2.2.5.1)$$

(ii) S , G^{+--} grafının iki tepesini içerirse, geriye kalan graftaki en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(G^{+--}/S)$ en azından birdir. O halde,

$$NI(G^{+--}) \geq 3. \quad (2.2.5.2)$$

(iii) S , S_1 ve S_2 kümelerinin birleşimi olsun. S_1 kümesinin G grafının u tepesini içerdiğini ve S_2 kümesinin de G grafının u tepesiyle ilişkili $e = uv$ ayrıtını içerdiğini kabul edelim. $S_1 = \{u | u \in V(G)\}$, $S_2 = \{e | e = uv \in E(G) \text{ ve } u \in S_1\}$ ve $S = S_1 \cup S_2$. u ve v tepeleri, G grafının $e = uv$ ayrıtının uç tepeleri olduğundan, bu e ayrıtına G^{+--} grafında karşılık gelen tepeye komşu değildir. Bu durumda, e tepesinin kapalı komşuluğu, G grafının u ve v tepeleri dışındaki tüm tepelerini ve e ayrıtına komşu olan ayrıtlar dışındaki tüm ayrıtlarını içermektedir. Buna ek olarak, u tepesinin kapalı komşuluğu da, G grafının u tepesi ile ilişkili ayrıtlarına karşılık gelen tepeler hariç, G^{+--} grafının tüm tepelerini ve v tepesini içermektedir. Böylece, S kümesinin kapalı komşuluğu, G grafının u tepesiyle ilişkili ayrıtları dışındaki tüm tepelerini ve ayrıtlarını içerir. Bu ayrıtlara karşılık gelen G^{+--} grafının tepeleri, birbirleriyle komşu olmadığından, geriye kalan graf izole tepelerden oluşur. Bu durumda, $c(G^{+--}/S) = 1$ 'dir ve

$$NI(G^{+--}) = |S| + c(G^{+--}/S) = 2 + 1 = 3. \quad (2.2.5.3)$$

(2.2.5.1), (2.2.5.2) ve (2.2.5.3)'den

$$NI(G^{+--}) = 3 \text{ elde edilir.} \quad (2.2.5.4)$$

Durum 2: G grafının bağımsız baskınlık sayısı $\gamma_i(G) \leq 2$ olsun.

(i) $\gamma_i(G) = 1$ ise, S subversion stratejisinin sadece minimum bağımsız baskınlık kümesindeki elemanı içerdiğini düşünelim, $S = \{u | u \in V(G)\}$. u ile ilişkili olan ayrıtlara karşılık gelen G^{+--} grafının tepeleri, u tepesine ve birbirlerine komşu değildirler. Bu yüzden, u tepesinin kapalı komşuluğunda yer almazlar ve geriye kalan graf, sadece izole tepelerden oluşur. Dolayısıyla, $c(G^{+--}/S) = 1$ 'dir ve

$$NI(G^{+--}) = 2. \quad (2.2.5.5)$$

(ii) $\gamma_i(G) = 2$ ise, S subversion stratejisi sadece minimum bağımsız baskınlık kümesindeki elemanları içersin, $S = \{u, v | u, v \in V(G) \text{ ve } d(u, v) > 1\}$. u ve v tepeleri, G grafında komşu olmadıklarından, G grafının ayrıtlarına karşılık gelen G^{+--} grafının tepeleri, ya u tepesine ya da v tepesine komşudur. Bu durumda, $N[S] = V(G) \cup E(G)$ ve $c(G^{+--}/S) = 0$ 'dır. O halde,

$$NI(G^{+--}) = 2. \quad (2.2.5.6)$$

(2.2.5.5) ve (2.2.5.6)'den

$$NI(G^{+--}) = 2 \quad (2.2.5.7)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (2.2.5.4) ve (2.2.5.7)'dan ispat tamamlanır. \square

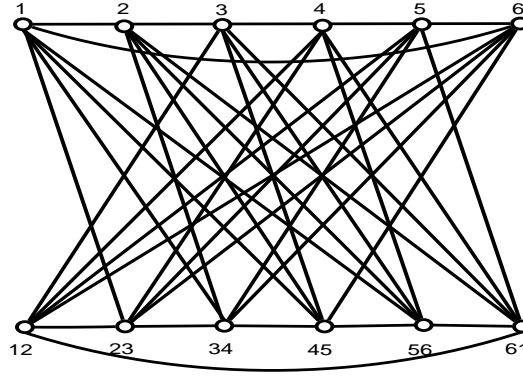
Teorem 2.5.3. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) \geq 2$ ve çapı $diam(G) \geq 4$ olan bağlantılı bir graf ise

$$NI(G^{+--}) = 2 \text{ dir.}$$

Kanıt. $diam(G) \geq 4$ olduğundan, G grafında u ile v tepelerini bağlayan $u, x, z, y, v \in V(G)$ olacak şekilde dört uzunluklu bir $uxzyv$ yolu vardır. S , G^{+--} grafının bir subversion stratejisi olsun ve G grafındaki bu yolun $e = ux$ ve $f = vy$ ayrıtlarına karşılık gelen tepeleri içersin. Bu tepelere karşılık gelen iki ayrıt, ortak bir uç tepeye sahip olmadığından, bu tepelerden birinin komşuluğunda yer almayan tepeler, diğer tepenin komşuluğundadır. O halde, $N[S] = V(G) \cup E(G)$ ve $c(G^{+--}/S) = 0$ 'dır. Buradan da, $NI(G^{+--}) = 2$ elde edilir. \square

2.6 G^{++-} Transformasyon Grafı

G^{++-} tranformasyon grafı, $V(G) \cup E(G)$ tepeler kümesine sahiptir ve ayrıtlar kümesi, G grafının ayrıtlarını, G 'nin line grafının ayrıtlarını ve G ile $L(G)$ grafının G 'de ilişkili olmayan elemanlarını birleştiren ayrıtları içerir. Şekil 2.2'de verilen C_6 grafının transformasyon grafı C_6^{++-} Şekil 2.5'de verilmiştir.



Şekil 2.5: C_6^{++-} transformasyon grafi

Teorem 2.6.1. *Bağlantılı bir G grafi için $NI(G^{++-}) = 2$ 'dir.*

Kanıt. S , G^{++-} grafinin S_1 ve S_2 kümelerinin birleşiminden oluşan bir subversion stratejisi olsun. S_1 'in sadece G grafinin u tepesini ve S_2 'nin de sadece G grafinin bu u tepesiyle ilişkili $e = uv$ ayrıtını içerdiğini kabul edelim. $S_1 = \{u | u \in V(G)\}$ ve $S_2 = \{e | e = uv \in E(G) \text{ öyle ki } u \in S_1\}$ olsun. e ayrıtı, G grafinde u ve v tepeleri ile ilişkili olduğundan, bu ayrıtı karşılık gelen G^{++-} grafinin e tepesi, G grafinin u ve v tepeleri dışındaki tüm tepelerine komşudur. u ve v tepeleri G grafinde birbirlerine komşu olduklarından, G^{++-} grafinde de komşudurlar ve bu yüzden, u 'nun kapalı komşuluğunda yer alırlar. G grafinin ayrıtılarına karşılık gelen tepeler, G^{++-} grafinde, u tepesine komşu değilse, mutlaka e tepesine komşudurlar. Kısaca, G grafinin tüm tepeleri ve ayrıtıları S 'nin kapalı komşuluğunda yer alır. Böylece, geriye kalan graf boştur ve $c(G^{++-}/S) = 0$ 'dır. Sonuç olarak, $NI(G^{++-}) = |S| + c(G^{++-}/S) = 2$ elde edilir. \square

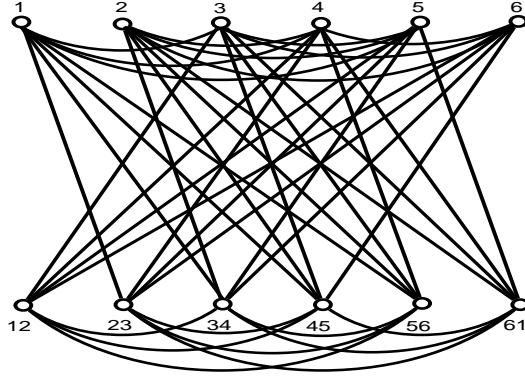
2.7 G^{---} Transformasyon Grafi

G^{---} transformasyon grafi, $V(G) \cup E(G)$ tepeler kümesine sahiptir ve ayrıtılar kümesi, G 'nin tümleyen grafinin ayrıtılarını, G 'nin line grafinin tümleyeninin ayrıtılarını ve \overline{G} ile $\overline{L(G)}$ grafinin G 'de ilişkili olmayan elemanlarını birleştiren ayrıtıları içerir. Şekil 2.2'de verilen C_6 grafinin transformasyon grafi C_6^{---} Şekil 2.6'de verilmiştir.

Teorem 2.7.1. *G , minimum tepe derecesi $\delta(G) = 1$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere,*

$$NI(G^{---}) = 2 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. İspat, Teorem 2.4.1'e benzer şekilde yapılır.



Şekil 2.6: C_6^{---} transformasyon grafi

Teorem 2.7.2. G , minimum tepe derecesi $\delta(G) \geq 2$ olan bağlantılı bir graf olmak üzere,

$$NI(G^{---}) = \begin{cases} 2, & \text{diam}(G) \geq 3; \\ 3, & \text{diam}(G) < 3 \text{ 'dir.} \end{cases}$$

Kanıt. G grafının çapına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1: $\text{diam}(G) \geq 3$ ise, G grafında, u ve v tepelerini bağlayan $u, x, y, v \in V(G)$ olmak üzere üç uzunluklu bir $uxyv$ yolu vardır. S , G^{---} grafının S_1 ve S_2 kümelerinin birleşiminden oluşan bir subversion stratejisi olsun. S_1 , sadece $uxyv$ yolunun ilk ayrıtı $e = ux$ 'yi ve S_2 , sadece bu yolun son tepesi v 'yi içersin. e tepesine karşılık gelen ayrıtı, G grafında u ve x tepeleri ile ilişkili olduğundan, bu tepe G^{---} grafında, u ve x tepelerine komşu değildir. Ayrıca, bu tepe, e ayrıtına komşu olan ayrıtlara karşılık gelen tepelere de komşu değildir. v tepesi G grafında, ne u tepesine ne de x tepesine komşu olmadığından, G^{---} grafında iki tepeye de komşudur. O halde $N[S] = V(G) \cup E(G)$ ve $c(G^{---}/S) = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$NI(G^{---}) = 2 \quad (2.2.7.1)$$

elde edilir.

Durum 2: $\text{diam}(G) < 3$ ise, S subversion stratejisi, G^{---} grafının sadece bir tepesini içerirse, geriye kalan graftaki en büyük bileşenin tepe sayısı, en azından 2'dir. Bu durumda $NI(G^{---}) \geq 3$ olduğu kolayca görülür. Eğer S iki tepe içerirse, $c(G^{---}/S) \geq 1$ olacağından, $NI(G^{---}) \geq 3$ elde edilir. Buradan da görülüyor ki, G^{---} grafının komşu bütünlüğü en azından 3'tür. Eğer S 'nin elemanları aşağıdaki şekilde seçilirse, eşitlik elde edilir. S , S_1 ve S_2 şeklinde iki kümenin birleşimi olsun. S_1 , sadece G grafının $e = uv$ ayrıtını ve S_2 de bu e ayrıtının uç tepeleri olan

u ve v tepelerini içersin. Bu durumda, S 'nin kapalı komşuluğu, G^{---} grafının tüm tepelerini içerir. $|S| = 3$ ve $c(G^{---}/S) = 0$ olduğundan,

$$NI(G^{---}) = 3 \quad (2.2.7.2)$$

elde edilir.

(2.2.7.1) ve (2.2.7.2)'den ispat tamamlanır. \square

2.8 G^{-++} , G^{+++} , G^{+-+} ve G^{--+} Transformasyon Grafları

Bu kısımda, G^{-++} , G^{+++} , G^{+-+} ve G^{--+} transformasyon graflarının komşu bütünlük değerleri için üst sınırlar bulunmuştur.

Teorem 2.8.1. G , bağlantılı bir graf ve grafın ayrıt baskınlık sayısı $\gamma'(G)$ olmak üzere,

$$NI(G^{-++}) \leq \gamma'(G) + 1 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $S \subseteq V(G^{-++})$ kümesi, G^{-++} grafının S_1 ve S_2 kümelerinin birleşiminden oluşan bir subversion stratejisi olsun. S_1 kümesi, G grafının minimum ayrıt baskınlık kümesindeki ayrıtlara karşılık gelen G^{-++} grafının tepelerini ve S_2 kümesi de, S_1 kümesindeki tepelere karşılık gelen ayrıtlarla ilişkili olmayan herhangi bir tepelyi içersin. Bu durumda, $S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{\gamma'(G)} \mid e_i = u_i v_i \in E(G) \text{ öyle ki } u_i, v_i \in V(G) \text{ ve } 1 \leq i \leq \gamma'(G)\}$ ve $S_2 = \{x \mid x \in V(G), e_i = u_i v_i \in S_1 \text{ olacak şekilde } x \neq u_i \text{ ve } x \neq v_i\}$ 'dir. S_1 kümesinin kapalı komşuluğu, G grafının tüm ayrıtlarına karşılık gelen G^{-++} grafının tepelerini içerir. Geriye kalan tepeler, G grafında bağımsızdır ve G^{-++} grafında bir klik oluştururlar. Bu kliği oluşturan tüm tepeler, S_2 kümesinin kapalı komşuluğundadır. O halde, $N[S] = V(G) \cup E(G)$ ve $c(G^{-++}/S) = 0$ 'dır. Komşu bütünlük değeri tanımından,

$$NI(G^{-++}) \leq \gamma'(G) + 1$$

elde edilir. \square

Teorem 2.8.2. G , bağlantılı bir graf ve $\gamma'(G)$, grafın ayrıt baskınlık sayısı olmak üzere,

$$NI(G^{+++}) \leq \gamma'(G) + 1 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. Teorem 2.8.1'e benzer şekilde yapılır. \square

Teorem 2.8.3. G , bağlantılı bir graf ve grafın örtü sayısı $\beta(G)$ olmak üzere,

$$NI(G^{+-+}) \leq \beta(G) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. S , G grafinin minimum örtü kümesi olsun. S kümesi, G^{+-+} grafinin subversion stratejisi olarak seçilirse, $|S| = \beta(G)$ ve $c(G^{+-+}/S) = 0$ elde edilir. Komşu bütünlük değeri tanımından

$$NI(G^{+-+}) \leq \beta(G)$$

olduğu görülür. □

Teorem 2.8.4. G , bağlantılı bir graf, grafin örtü sayısı $\beta(G)$ ve grafin ayrıt örtü sayısı $\beta'(G)$ olmak üzere,

$$NI(G^{-++}) \leq \beta(G) + \beta'(G) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. G^{-++} grafinin subversion stratejisi S , G grafinin minimum örtü kümesinin ve minimum ayrıt örtü kümesinin elemanlarını içersin. Bu durumda $|S| = \beta'(G) + \beta(G)$ ve $c(G^{-++}/S) = 0$ elde edilir. Komşu bütünlük değeri tanımından

$$NI(G^{-++}) \leq \beta(G) + \beta'(G) \text{ 'dir.}$$

□

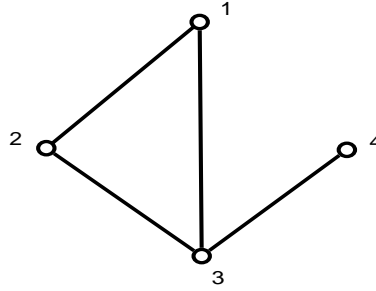
3. RUPTURE DERECESESİ

Bu bölümde, rupture derecesi ve çeşitli graf parametreleri arasındaki ilişkiler verilmiş, ardından k -ary tam ağaç grafların ve bu graflara çeşitli graf işlemleri uygulanarak elde edilen grafların rupture dereceleri hesaplanmıştır.

3.1 Rupture Derecesi

Bu kısımda, rupture derecesi bir örnek üzerinde ele alınmıştır.

Örnek 3.1.1. Şekil 3.1'de verilen grafın rupture derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır:



Şekil 3.1: 4 tepeli bir G grafi

$S \subseteq V(G)$, G grafının bir kesim kümesi olsun. Görüldüğü gibi, G grafının 3 kesim kümesi vardır.

- $S = \{3\}$ için $w(G - S) = 2$ ve $m(G - S) = 2$ olduğundan
 $r_1(G) = 2 - 1 - 2 = -1$,
- $S = \{1, 3\}$ için $w(G - S) = 2$ ve $m(G - S) = 1$ olduğundan
 $r_2(G) = 2 - 2 - 1 = -1$
- $S = \{2, 3\}$ için $w(G - S) = 2$ ve $m(G - S) = 1$ olduğundan
 $r_3(G) = 2 - 2 - 1 = -1$

Tanım gereği bulunan sonuçların maksimumu alındığında G grafının rupture derecesi, $r(G) = \max\{r_1(G), r_2(G), r_3(G)\} = -1$ bulunur.

3.2 Temel Sonuçlar

Bu kısımda bilinen bazı graf ailelerinin ruptüre dereceleri ve ruptüre derecesi için bazı alt ve üst sınırlar verilmiştir. n tepeli K_n grafının ruptüre derecesi $(1 - n)$ 'dir.

Teorem 3.2.1. (Li and Li, 2005)

(a) $n \geq 3$ olmak üzere n tepeli P_n yol grafi için

$$r(P_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise,} \\ 0, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

(b) C_n çevre grafi için

$$r(C_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise,} \\ -2, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

(c) k -parçalı K_{n_1, n_2, \dots, n_k} grafi için

$$r(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 2 \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - \sum_{i=1}^k n_i - 1.$$

Teorem 3.2.2. (Li and Li, 2005) G , n tepeli, tam olmayan bir graf olsun.

(a) $r(G) \leq n - 2\delta - 1$,

(b) $3 - n \leq r(G) \leq n - 3$,

(c) $2\alpha(G) - n - 1 \leq r(G) \leq \frac{[\alpha(G)]^2 - \kappa(G)[\alpha(G) - 1] - n}{\alpha(G)}$.

Teorem 3.2.3. (Li and Li, 2004) G , tenacity değeri $T(G)$ olan, tam olmayan bağlantılı bir graf olsun. O halde,

$$r(G) \leq \alpha(G)(1 - T(G)) \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.2.4. (Kirlangic, 2009)

(a) G , tenacity değeri $T(G)$ olan bir graf ise,

$$r(G) \leq n \left(\frac{1}{T(G)} - 1 \right) \text{ 'dir.}$$

(b) G , toughness değeri $t(G)$ olan bir graf ise,

$$r(G) \leq \frac{\beta(G)}{t(G)} - \kappa(G) - 1 \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.2.5. (Li and Li, 2004) $n \geq m > 1$ için

$$r(K_m \times K_n) = n - mn + m - \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.2.6. (Li and Li, 2004) G , k -regüler ve k -bağlantılı iki parçalı bir graf olmak üzere, ruptüre derecesi -1 'dir.

Teorem 3.2.7. (Li and Li, 2004) G_1 , n -regüler, n -bağlantılı ve G_2 , m -regüler, m -bağlantılı iki parçalı iki graf olmak üzere, $r(G_1 \times G_2) = -1$ 'dir.

3.3 Ruptüre Derecesi için Bazı Alt ve Üst Sınırlar

Bu kısımda, ruptüre derecesi ve çeşitli graf parametreleri arasındaki ilişkileri gösteren sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.3.1. G , n tepeli, tam olmayan bağlantılı bir graf olsun.

$$r(G) \leq \alpha(G) - \delta(G) - 1.$$

Kanıt. S , G grafının bir kesim kümesi olsun. Tepe bütünlük değeri tanımından $I(G) \leq |S| + m(G - S)$ olduğu görülür. Ayrıca her G grafı için $I(G) \geq \delta(G) + 1$ olduğundan (Barefoot and Entringer, 1987),

$$|S| + m(G - S) \geq \delta(G) + 1 \text{ elde edilir.}$$

Her iki taraf da $w(G - S)$ 'den çıkarıldığında,

$$w(G - S) - |S| - m(G - S) \leq w(G - S) - \delta(G) - 1$$

bulunur. Her G grafı için $w(G - S) \leq \alpha(G)$ her zaman sağlanacağından,

$$r(G) \leq \alpha(G) - \delta(G) - 1$$

elde edilir. □

Hatırlatma 3.3.2. Her G grafı için $\delta(G) \leq \beta(G)$ sağlandığından,

$$\alpha(G) - \delta(G) - 1 \leq n - 2\delta(G) - 1$$

olduğu görülür. O halde, Teorem 3.3.1'de elde edilen sonuç, Teorem 3.2.2(a)'da verilen sonuçtan daha iyi bir sonuçtur.

Teorem 3.3.3. G , n tepeli, bağlantılı, tam olmayan bir graf olsun.

$$r(G) \leq n + 1 - \frac{2n}{\alpha(G)}.$$

Kanıt. S , G grafının bir kesim kümesi olsun. Tepe bütünlük değeri tanımından, $I(G) \leq |S| + m(G - S)$ olduğu görülmektedir. Ayrıca, her G grafı için $I(G) \geq \chi(G)$ olduğundan (Bagga et al., 1992), $\chi(G) \leq |S| + m(G - S)$ elde edilir.

Diğer taraftan her G grafi için $w(G - S) \leq n - |S| - m(G - S) + 1$ ifadesi sağlandığından,

$$\begin{aligned} w(G - S) - |S| - m(G - S) &\leq n + 1 - 2(|S| + m(G - S)) \\ &\leq n + 1 - 2\chi(G) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

n tepeli her G grafi için $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ olduğundan (Bondy and Murty, 1976),

$$\begin{aligned} w(G - S) - |S| - m(G - S) &\leq n + 1 - \frac{2n}{\alpha(G)} \\ r(G) &\leq n + 1 - \frac{2n}{\alpha(G)} \text{ elde edilir.} \quad \square \end{aligned}$$

Hatırlatma 3.3.4. Herhangi bir G grafi için $\alpha(G) \leq \beta(G)$ ise Teorem 3.3.3'deki sonuç, Teorem 3.2.2(b)'de verilen sonuçtan daha iyi bir sonuçtur. $n + 1 \leq m$ olmak üzere, $G = K_1 + (K_m \cup nK_1)$ grafi bu duruma örnek verilebilir.

Aşağıdaki teoremde, diğer zedelenebilirlik ölçümü olan toughness değeri ile ruptüre derecesi arasındaki ilişki incelenmiştir.

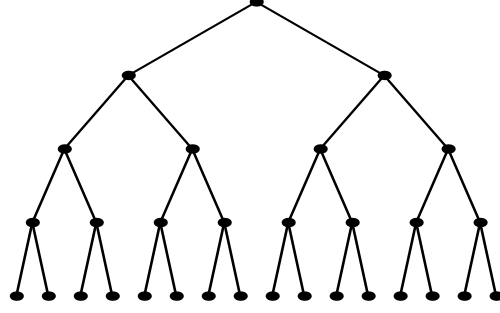
Teorem 3.3.5. *Toughness değeri $t(G) > 1$ olan bir G grafi için,*

$$r(G) \leq t(G) - 2\sqrt{n(t(G) - 1)} \text{ 'dir.}$$

Kant. S , G grafinin bir kesim kümesi olsun. Toughness tanımından, $t(G)w(G - S) \leq |S|$ olduğu görülür. Her G grafi için $m(G - S) \geq \frac{n - |S|}{w(G - S)}$ sağlanacağından, $m(G - S) \geq \frac{nt(G)}{|S|} - t(G)$ ifadesi elde edilir. O halde,

$$w(G - S) - |S| - m(G - S) \leq \frac{|S|}{t(G)} - |S| - \frac{nt(G)}{|S|} + t(G).$$

İfadenin maksimumunu almak için $f(x) = \frac{x}{t(G)} - x - \frac{nt(G)}{x} + t(G)$ olsun ve $f'(x) = \frac{1}{t(G)} - 1 + \frac{nt(G)}{x^2} = 0$ olduğundan $t(G) > 1$ için kritik nokta $x_0 = t(G)\sqrt{\frac{n}{t(G) - 1}}$ bulunur. $f''(x_0) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu x_0 noktasında maksimum değere sahiptir ve buradan da, $r(G) \leq t(G) - 2\sqrt{n(t(G) - 1)}$ elde edilir. \square



Şekil 3.2: $T_{2,4}$, 4 seviyeli, 2-ary tam ağacı

3.4 k -ary Tam Ağaçların Rupture Derecesi

Bu kısımda öncelikle, k -ary tam ağaçların rupture derecesi elde edilmiş, daha sonra k -ary tam ağaçlara çeşitli graf işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilen grafların rupture dereceleri hesaplanmıştır.

Tanım 3.4.1. d seviyeli, k -ary tam ağaç, $T_{k,d}$, $d - 1$ ve daha alt seviyelerindeki tüm tepeleri k çocuğa sahip ve d . seviyedeki tüm tepeleri yaprak (leaf) olan bir köklü ağaçtır.

Şekil 3.2’de, 4-seviyeli 2-ary bir tam ağaç olan $T_{2,4}$ görülmektedir.

Teorem 3.4.2. $T_{k,d}$, d seviyeli, k -ary bir tam ağaç olsun. $k \geq 2$ olmak üzere,

$$r(T_{k,d}) = \frac{(-1)^d}{1+k} (1 - (-k)^{d+1}) - 1 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. d seviyeli, k -ary bir tam ağaç, $0, 1, \dots, d$. seviyelerinde sırasıyla k^0, k^1, \dots, k^d tepe içermektedir. S , $V(T_{k,d})$ ’nin bir alt kümesi olmak üzere, $w(T_{k,d} - S) - |S| - m(T_{k,d} - S) = r(T_{k,d})$ olsun.

d -seviyeli k -ary bir tam ağacın $\frac{k^{d+1}-1}{k-1}$ tepesi vardır ve örtü sayısı d ’nin tek veya çift olması durumuna göre aşağıdaki şekildedir.

$$\beta(T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+1} - 1}{k^2 - 1}, & d \text{ tek ise;} \\ \frac{k(k^d - 1)}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases}$$

S , $T_{k,d}$ ’nin bir kesim kümesi ve $|S| = x$, $T_{k,d}$ ’den atılan tepe sayısı olsun. Bu durumda, S için iki durum söz konusudur:

Durum 1. $S, T_{k,d}$ 'nin minimum örtü kümesi olsun. Bu durumda $|S| = \beta(T_{k,d})$, $m(T_{k,d} - S) = 1$ ve d tek için $w(T_{k,d} - S) = \frac{k(k^{d+1}-1)}{k^2-1}$, d çift için $w(T_{k,d} - S) = \frac{k^{d+2}-1}{k^2-1}$ elde edilir. O halde,

$$r(T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+1} - k - 2}{k + 1}, & d \text{ tek ise;} \\ \frac{k^{d+1} - k}{k + 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (3.3.4.1)$$

Durum 2. $S, T_{k,d}$ 'nin minimum örtü kümesi olmasın. O halde, S için iki durum vardır:

(i) $1 \leq x \leq \beta(T_{k,d}) - 1$ için, $w(T_{k,d} - S) \leq kx + 1$ ve $m(T_{k,d} - S) \geq 1$ 'dir. Bu durumda, $r(T_{k,d}) \leq \max_x \{kx + 1 - x - 1\} = \max_x \{(k - 1)x\}$ elde edilir. $f(x) = (k - 1)x$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve maksimum değerini $x = \beta(T_{k,d}) - 1$ 'de alır. O halde,

$$r(T_{k,d}) \leq \begin{cases} \frac{k^{d+1} - k^2}{k + 1}, & d \text{ tek ise;} \\ \frac{k^{d+1} - k^2 - k + 1}{k + 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (3.3.4.2)$$

(ii) $\beta(T_{k,d}) \leq x \leq \frac{k^{d+1}-1}{k+1}$ için, $w(T_{k,d} - S) \leq \frac{k^{d+1}-1}{k-1} - x$ ve $m(T_{k,d} - S) \geq 1$ 'dir. Buradan $r(T_{k,d}) \leq \max_x \left\{ \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - x - x - 1 \right\} = \max_x \left\{ \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - 2x - 1 \right\}$ elde edilir. $f(x) = \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - 2x - 1$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur ve maksimum değerini $x = \beta(T_{k,d})$ 'de alır. Bu durumda,

$$r(T_{k,d}) \leq \begin{cases} \frac{k^{d+1} - k - 2}{k + 1}, & d \text{ tek ise;} \\ \frac{k^{d+1} - k}{k + 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (3.3.4.3)$$

(3.3.4.1), (3.3.4.2) ve (3.3.4.3) ifadelerinden

$$r(T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+1} - k - 2}{k + 1}, & d \text{ tek ise;} \\ \frac{k^{d+1} - k}{k + 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases}$$

elde edilir. d 'nin tek olduğu durumlarda,

$$\frac{k^{d+1} - k - 2}{k + 1} = \frac{k^{d+1} - 1}{k + 1} - 1 = \frac{-1}{k + 1}(1 - k^{d+1}) - 1 = \frac{(-1)^d}{k + 1}(1 - (-k)^{d+1}) - 1$$

ve d 'nin çift olduğu durumlarda,

$$\frac{k^{d+1} - k}{k + 1} = \frac{k^{d+1} + 1}{k + 1} - 1 = \frac{1}{k + 1}(1 + k^{d+1}) - 1 = \frac{(-1)^d}{k + 1}(1 - (-k)^{d+1}) - 1$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. \square

3.4.1 Kartezyen çarpımı işlemi

Bu kısımda, graf işlemlerinden kartezyen çarpımı işleminin k -ary tam ağaçlara uygulanmasıyla elde edilen grafların rupture dereceleri incelenmiştir.

Tanım 3.4.3. V_1 ve V_2 ayrık tepeler kümesi ile E_1 ve E_2 ayrıtlar kümesine sahip, G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı olan $G = G_1 \times G_2$ grafinin tepeler kümesi, $V_1 \times V_2$ 'dir. $u_1 = v_1$ iken u_2 ile v_2 bitişik ise, ya da $u_2 = v_2$ iken u_1 ile v_1 bitişik ise, $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepelerini birleştiren ayrıtlar, $G_1 \times G_2$ grafinin ayrıtlar kümesini oluşturur.

Teorem 3.4.4. $T_{k,d}$, d -seviyeli k -ary bir tam ağaç ve K_n , n tepeli bir tam graf olsun. O halde,

$$r(K_n \times T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}{k^2 - 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + kn + n - 1}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Kanıt. K_n ve $T_{k,d}$ graflarının kartezyen çarpımı $K_n \times T_{k,d}$, $T_{k,d}$ grafinin n adet kopyasını içerir. Her bir $T_{k,d}$ grafi, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\{1^i, 2^i, \dots, (\frac{k^{d+1}-1}{k-1})^i\}$ şeklinde etiketlenir ve her kopyanın aynı numaralandırılmış tepeleri, bir K_n tam grafini oluşturur. $K_n \times T_{k,d}$ grafi, $0, 1, \dots, d$. seviyelerinde sırasıyla k^0n, k^1n, \dots, k^dn tepe içerir. $S \subseteq V(K_n \times T_{k,d})$ kümesi, $K_n \times T_{k,d}$ grafinin bir kesim kümesi ve $|S| = x$, $K_n \times T_{k,d}$ grafindan atılan tepe sayısı olmak üzere,

$$w((K_p \times T_{k,n}) - S) - |S| - m((K_p \times T_{k,n}) - S) = r(K_p \times T_{k,n}) \text{ 'dir.}$$

S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $1 \leq x \leq n\beta(T_{k,d}) - 1$ olsun. Bu durumda, bileşen sayısı

$$w((K_n \times T_{k,d}) - S) \leq \frac{kx}{n} + 1 \text{ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı}$$

$$m((K_n \times T_{k,d}) - S) > n \text{ bulunur. O halde,}$$

$$r(K_n \times T_{k,d}) < \max_x \left\{ \frac{kx}{n} + 1 - x - n \right\} = \max_x \left\{ x \left(\frac{k}{n} - 1 \right) + 1 - n \right\} \text{ elde edilir.}$$

$f(x) = x \left(\frac{k}{n} - 1 \right) + 1 - n$ fonksiyonu bu aralıkta artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = n\beta(T_{k,d}) - 1$ 'de alır. Böylece,

$$r(K_n \times T_{k,d}) < \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k - k^3/n + 2k^2 + k/n - 2}{k^2 - 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + n + nk - k^3/n + k^2 + k/n - 2}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.3.4.4)$$

elde edilir.

Durum 2. $n\beta(T_{k,d}) \leq x \leq n \frac{k^{d+1}-1}{k-1}$ olsun. Bu durumda,

$$m((K_n \times T_{k,d}) - S) \geq n - \lfloor \frac{x - n\beta(T_{k,d})}{\alpha(T_{k,d})} \rfloor \text{ elde edilir.}$$

(i) d tek ise, $w((K_n \times T_{k,d}) - S) \leq \frac{k^{d+2} - k}{k^2 - 1}$, dir ve tanımdan,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \max_x \left\{ \frac{k^{d+2} - k}{k^2 - 1} - x - \left(n - \frac{x - n\beta(T_{k,d})}{\alpha(T_{k,d})} \right) \right\} \text{ elde edilir.}$$

$f(x) = \frac{k^{d+2} - k}{k^2 - 1} - x - \left(n - \frac{x - n\beta(T_{k,d})}{\alpha(T_{k,d})} \right)$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon

olduğundan maksimum değerini $x = n\beta(T_{k,d})$ 'de alır ve buradan,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}{k^2 - 1} \quad (3.3.4.5)$$

elde edilir.

(ii) d çift ise, $w((K_n \times T_{k,d}) - S) \leq \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 - 1}$, dir ve tanımdan,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \max_x \left\{ \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 - 1} - x - \left(n - \frac{x - n\beta(T_{k,d})}{\alpha(T_{k,d})} \right) \right\} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda, $f(x) = \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 - 1} - x - \left(n - \frac{x - n\beta(T_{k,d})}{\alpha(T_{k,d})} \right)$ fonksiyonu da

azalan bir fonksiyon olduğundan, maksimum değerini $x = n\beta(T_{k,d})$ 'da alır ve buradan,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + kn + n - 1}{k^2 - 1} \quad (3.3.4.6)$$

elde edilir.

O halde, (3.3.4.5) ve (3.3.4.6)'dan, d 'nin tek veya çift olmasına göre,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}{k^2 - 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + kn + n - 1}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.3.4.7)$$

elde edilir.

(3.3.4.4) ve (3.3.4.7)'dan,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \leq \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}{k^2 - 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + kn + n - 1}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.3.4.8)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $S^* \subseteq V(K_n \times T_{k,d})$ olmak üzere, graftan çıkarıldığında en büyük elemanlı bileşenin tepe sayısı $m((K_n \times T_{k,d}) - S^*) = n$, ve bileşen sayısı, d 'nin tek olduğu durumlarda $w((K_n \times T_{k,d}) - S^*) = \frac{k^{d+2} - k}{k^2 - 1}$, çift olduğu durumlarda

$w((K_n \times T_{k,d}) - S^*) = \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 - 1}$ olacak şekilde $n\beta(T_{k,d})$ elemana sahip, bir S^*

kesim kümesi seçilebilir ve böylece,

$$r(K_n \times T_{k,d}) \geq \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + 2n - k}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+2} - k^{d+1}n - k^2n + kn + n - 1}{k^2 - 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (3.3.4.9)$$

elde edilir.

(3.3.4.8) ve (3.3.4.9)'den ispat tamamlanır. \square

3.4.2 Kuvvet işlemi

Bu kısımda, bir 2-ary tam ağaç olan H_d ikili tam ağacı ele alınmış ve rupture derecesi için genel bir sonuç bulunmuştur.

Tanım 3.4.5. Bir G grafının a . kuvveti, G ile aynı tepeler kümesinden ve aralarında en çok a uzunluğunda yol bulunan tepeleri birleştiren ayrıtlardan oluşan bir graftır.

Teorem 3.4.6. H_d^2 , seviyesi d olan bir ikili tam ağacın ikinci kuvveti olsun. O halde,

$$r(H_d^2) = \begin{cases} 3 - 3 \times 2^{\frac{d-1}{2}}, & d \text{ tek ise} \\ 2 - 2^{\frac{d}{2}+1}, & d \text{ çift ise} \end{cases}$$

Kanıt. Seviyesi d olan bir tam ağacın ikinci kuvveti olan graf, $0, 1, \dots, d$. seviyelerinde sırasıyla $2^0, 2^1, \dots, 2^d$ tepe içerir. $S \subseteq V(H_d^2)$ kümesi, $w(H_d^2 - S) - |S| - m(H_d^2 - S) = r(H_d^2)$ eşitliğini sağlayan bir kesim küme olsun.

d için iki durum vardır:

Durum 1. d , bir tek tam sayı olsun. Bu durumda S kümesi, $1 \leq x \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olmak üzere, x . ve $(x+1)$. seviyelerdeki tüm tepeleri içermelidir. Bu sebeple,

$1 \leq x \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğunda $|S| = 2^x + 2^{x+1}$ elde edilir. Buradan da,

$$w(H_d^2 - S) = 2^{x+1} + 1 \text{ ve } m(H_d^2 - S) = \sum_{t=1}^{d-(x+1)} 2^t = 2^{d-x} - 2 \text{ bulunur. Böylece}$$

$$r(H_d^2) = \max_{1 \leq x \leq \frac{d}{2}} \{(2^{x+1} + 1) - (2^x + 2^{x+1}) - (2^{d-x} - 2)\} = \max_{1 \leq x \leq \frac{d}{2}} \{3 - 2^x - 2^{d-x}\}$$

elde edilir. $3 - 2^x - 2^{d-x}$ fonksiyonu d 'nin tek olduğu durumlarda $x = \frac{d-1}{2}$ için maksimum değerini alır. O halde,

$$r(H_d^2) = 3 - 3 \times 2^{\frac{d-1}{2}} \text{ dir.} \quad (3.3.4.10)$$

Durum 2. d , bir çift tam sayı olsun. *Durum 1*'e ek olarak, S kümesi 0. seviyedeki tepeli de içermelidir. Bu durumda, $1 \leq x \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ için $|S| = 2^{x+1} + 2^x + 2^0$ elde edilir. O halde, $w(H_d^2 - S) = 2^{x+1} + 1$ ve $m(H_d^2 - S) = 2^x - 2$ bulunur ve böylece,

$$r(H_d^2) = \max_{1 \leq x \leq \frac{d}{2}} \{(2^{x+1} + 1) - (2^{x+1} + 2^x + 1) - (2^x - 2)\} = \max_{1 \leq x \leq \frac{d}{2}} \{2 - 2^{x+1}\}$$

elde edilir. $2 - 2^{x+1}$ fonksiyonu $1 \leq x \leq \frac{d}{2}$ aralığında azalan bir fonksiyon olduğundan, d 'nin çift olduğu durumlarda $x = \frac{d}{2}$ için maksimum değerini alır. Fonksiyonu maksimum yapan noktayı, $2 - 2^{x+1}$ fonksiyonunda yerine koyduğumuzda,

$$r(H_d^2) = 2 - 2^{\frac{d}{2}+1} \quad (3.3.4.11)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.3.4.10) ve (3.3.4.11)'ten ispat tamamlanır. \square

3.4.3 Bileşke işlemi

Bu kısımda, ikili tam ağaçlara bileşke işlemi uygulanarak elde edilen grafların rupture dereceleri bulunmuştur.

Tanım 3.4.7. Tepeler kümesi, ayrık V_1 ve V_2 kümeleri ve ayrıtlar kümesi, E_1 ve E_2 olan G_1 ve G_2 graflarının bileşkesi olan $G_1[G_2]$ grafi, $V_1 \times V_2$ tepeler kümesine sahiptir. u_1 ile v_1 tepeleri bitişik olduğunda, ya da $u_1 = v_1$ iken u_2 ile v_2 tepeleri bitişik olduğunda, $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepelerini birleştiren ayrıtlar, $G_1[G_2]$ grafinin ayrıtlarını oluşturur. Bu çarpım lexicographic çarpım olarak da adlandırılır.

Teorem 3.4.8. H_{d_1} ve H_{d_2} , sırasıyla d_1 ve d_2 seviyeli birer ikili tam ağaç olmak üzere,

$$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) = \begin{cases} -1/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 1, & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ -2/9(8 - 5 \cdot 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 5 \cdot 2^{d_1} - 2^{d_2} - 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} - 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ çift ve } d_2 \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Kanıt. H_{d_1} ve H_{d_2} graflarının bileşke grafi olan $H_{d_1}[H_{d_2}]$ grafinin tepe sayısı, $(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1)$ ve örtü sayısı,

$$\beta(H_{d_1}[H_{d_2}]) = \begin{cases} 5/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ 2/9(4 - 7 \cdot 2^{d_1} - 7 \cdot 2^{d_2} + 5 \cdot 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 1/9(2^{d_1+1} - 1)(5 \cdot 2^{d_2+1} - 7), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 1/9(2^{d_2+1} - 1)(5 \cdot 2^{d_1+1} - 7), & d_1 \text{ çift ve } d_2 \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. $S \subseteq V(H_{d_1}[H_{d_2}])$ kümesi, $H_{d_1}[H_{d_2}]$ grafinin bir kesim kümesi olsun ve $|S| = x$ graftan atılan tepe sayısını gösterebiliriz. Bu durumda, S kümesinin minimum örtü kümesi olup olmamasına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $S, H_{d_1}[H_{d_2}]$ grafinin bir minimum örtü kümesi olsun. Bu durumda $|S| = \beta(H_{d_1}[H_{d_2}])$, $m(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) = 1$ ve

$$w(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) = \begin{cases} 4/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ 1/9(2^{d_1+2} - 1)(2^{d_2+2} - 1), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 2/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+2} - 1), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 2/9(2^{d_1+2} - 1)(2^{d_2+1} - 1), & d_1 \text{ çift ve } d_2 \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. O halde,

$$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) = \begin{cases} -1/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 1, & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ -2/9(8 - 5 \cdot 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 5 \cdot 2^{d_1} - 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ çift ve } d_2 \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.3.4.12)$$

dir.

Durum 2. S kümesi, $H_{d_1}[H_{d_2}]$ grafinin bir minimum örtü kümesi olmasın.

S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

(i) $(2^{d_2+1} - 1) \leq x \leq \beta(H_{d_1}[H_{d_2}]) - 1$ olsun.

Geriye kalan grafin bileşen sayısı $w(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) \leq 2x + 1$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $m(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) \geq 1$ bulunur. Buradan da,

$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) \leq \max_x \{2x + 1 - x - 1\} = \max_x \{x\}$ elde edilir. $f(x) = x$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \beta(H_{d_1}[H_{d_2}]) - 1$ 'de alır ve x değeri fonksiyonda yerine konulduğunda,

$$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) \leq \begin{cases} 5/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 1, & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ 1/9(-1 - 7 \cdot 2^{d_1+1} - 7 \cdot 2^{d_2+1} + 5 \cdot 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 2/9(-1 - 7 \cdot 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 5 \cdot 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ 2/9(-1 - 5 \cdot 2^{d_1} - 7 \cdot 2^{d_2} + 5 \cdot 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ çift ve } d_2 \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.3.4.13)$$

elde edilir.

(ii) $\beta(H_{d_1}[H_{d_2}]) \leq x \leq (2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1)$ olsun.

Geriye kalan grafin bileşen sayısı $w(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) \leq (2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - x$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $m(H_{d_1}[H_{d_2}] - S) \geq 1$ bulunur. Bu durumda,

$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) \leq \max_x \{(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - x - x - 1\} = \max_x \{(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 2x - 1\}$ elde edilir. $f(x) = (2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 2x - 1$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \beta(H_{d_1}[H_{d_2}])$ 'de alır ve x değeri fonksiyonda yerine konduğunda,

$$r(H_{d_1}[H_{d_2}]) \leq \begin{cases} -1/9(2^{d_1+1} - 1)(2^{d_2+1} - 1) - 1, & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ tek ise;} \\ -2/9(8 - 5 \cdot 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 5 \cdot 2^{d_1} - 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise;} \\ -2/9(7 - 2^{d_1} - 5 \cdot 2^{d_2} + 2^{d_1+d_2+1}), & d_1 \text{ tek ve } d_2 \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.3.4.14)$$

elde edilir.

(3.3.4.12), (3.3.4.13) ve (3.3.4.14) ifadelerinden ispat tamamlanır. \square

3.5 Grafların Kartezyen Çarpımının Rupture Derecesi

Bu kısımda, iki özel grafin kartezyen çarpımlarının rupture derecesi araştırılmaktadır. C_n grafi, n tepeli bir çevre graf olmak üzere, n tek ise tek çevre ve n çift ise çift çevre olarak adlandırılır. Li ve arkadaşları, bir çift çevre grafi ile iki tepeli bir tam grafin kartezyen çarpımının rupture derecesinin -1 olduğunu göstermişlerdir (Li and Li, 2004).

Teorem 3.5.1. (Li and Li, 2004) m ve n çift tamsayılar olmak üzere

$$r(C_n \times C_m) = -1 \text{ ve } r(C_n \times K_2) = -1 \text{ 'dir.}$$

Aşağıdaki teoremden ise, C_n tek çevre grafi ile iki tepeli tam grafin kartezyen çarpımının rupture derecesi verilmektedir.

Teorem 3.5.2. C_n grafi, n tepeli bir tek çevre graf ve K_2 , iki tepeli bir tam graf olmak üzere, $r(C_n \times K_2) = -3$ 'dür.

Kanıt. $S \subseteq V(C_n \times K_2)$ kümesi, $C_n \times K_2$ grafinin herhangi bir kesim kümesi ve $|S| = x$ graftan atılan tepe sayısı olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $3 \leq x \leq n$ ise $w((C_n \times K_2) - S) \leq x - 1$ 'dir. Bu durumda, $m((C_n \times K_2) - S) \geq \lceil \frac{2n-x}{x-1} \rceil$ bulunur ve böylece,

$$\begin{aligned} w((C_n \times K_2) - S) - |S| - m((C_n \times K_2) - S) &\leq x - 1 - x - \lceil \frac{2n-x}{x-1} \rceil \\ &\leq -1 - \lceil \frac{2n-n}{n-1} \rceil \\ &\leq -3 \end{aligned} \quad (3.3.5.1)$$

elde edilir.

Durum 2. $x \geq n + 1$ ise $w((C_n \times K_2) - S) \leq 2n - x$ ve $m((C_n \times K_2) - S) \geq 1$ dir. Buradan da,

$$\begin{aligned} w((C_n \times K_2) - S) - |S| - m((C_n \times K_2) - S) &\leq 2n - x - x - 1 \\ &\leq 2n - 2(n + 1) - 1 \\ &\leq -3 \end{aligned} \quad (3.3.5.2)$$

elde edilir.

(3.3.5.1) ve (3.3.5.2)'den,

$$r(C_n \times K_2) \leq -3 \quad \text{elde edilir.} \quad (3.3.5.3)$$

Diğer yandan, $S^* \subseteq V(C_n \times K_2)$ olmak üzere, graftan çıkarıldığında, bileşen sayısı $w((C_n \times K_2) - S^*) = n - 1$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $m((C_n \times K_2) - S^*) = 1$ olacak şekilde $n + 1$ elemana sahip, bir S^* kesim kümesi seçilebilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} r(C_n \times K_2) &\geq w((C_n \times K_2) - S^*) - |S^*| - m((C_n \times K_2) - S^*) \\ &= n - 1 - (n + 1) - 1 = -3 \\ r(C_n \times K_2) &\geq -3 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned} \quad (3.3.5.4)$$

(3.3.5.3) ve (3.3.5.4)'den ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.5.3. n , bir çift tamsayı ve p , bir tamsayı olsun. $n \geq 4$ ve $p \geq 2$ için,

$$r(C_n \times K_p) \leq -2\sqrt{\frac{n}{2}p(p-2)} + \frac{p}{2} \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $S \subseteq V(C_n \times K_p)$ kümesi, $C_n \times K_p$ grafinin bir kesim kümesi ve graftan atılan tepe sayısı $|S| = x$ olsun. x tepe graftan atıldığında, geriye kalan graf en çok $\frac{2x}{p}$ bileşen içerir. Bu durumda, geriye kalan grafın en büyük bağlantılı bileşeninin

tepe sayısı en az $m(C_n \times K_p) \geq \frac{p(np-x)}{2x}$ 'dir. O halde,

$$\begin{aligned} w((C_n \times K_p) - S) - |S| - m((C_n \times K_p) - S) &\leq \frac{2x}{p} - x - \frac{p(np-x)}{2x} \\ &= \frac{4x^2 - 2x^2p - p^3n + p^2x}{2xp} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{4x^2 - 2x^2p - p^3n + p^2x}{2xp}$ fonksiyonu $x = p\sqrt{\frac{\frac{n}{2}p}{p-2}}$ için maksimum değere sahiptir ve x yerine yazıldığında,

$$r(C_n \times K_p) \leq -2\sqrt{\frac{n}{2}p(p-2)} + \frac{p}{2}$$

elde edilir. \square

Teorem 3.5.4. P_n , $n \geq 2$ tepeli bir yol graf olmak üzere,

$$r(P_n \times K_2) = -1 \text{ 'dir.}$$

Kant. $S \subseteq V(P_n \times K_2)$ kümesi, $P_n \times K_2$ grafının herhangi bir kesim kümesi ve graftan atılan tepe sayısı $|S| = x$ olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $x \leq n$ ise, $w((P_n \times K_2) - S) \leq x$ ve $m((P_n \times K_2) - S) \geq \lceil \frac{2n-x}{x} \rceil$ elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w((P_n \times K_2) - S) - |S| - m((P_n \times K_2) - S) &\leq x - x - \lceil \frac{2n-x}{x} \rceil \\ &\leq -\lceil \frac{2n-n}{n} \rceil \\ &\leq -1 \end{aligned} \quad (3.3.5.5)$$

elde edilir.

Durum 2. $x \geq n$ ise, $w((P_n \times K_2) - S) \leq 2n - x$ ve $m((P_n \times K_2) - S) \geq 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} w((P_n \times K_2) - S) - |S| - m((P_n \times K_2) - S) &\leq 2n - x - x - 1 \\ &\leq 2n - 2n - 1 \\ &\leq -1 \end{aligned} \quad (3.3.5.6)$$

elde edilir.

(3.3.5.5) ve (3.3.5.6)'den,

$$r(P_n \times K_2) \leq -1 \text{ elde edilir.} \quad (3.3.5.7)$$

Diğer yandan, $S^* \subseteq V(P_n \times K_2)$ olmak üzere, graftan çıkarıldığında, bileşen sayısı $w((P_n \times K_2) - S^*) = n$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $m((P_n \times K_2) - S^*) = 1$ olacak şekilde, $|S^*| = n$ elemana sahip bir S^* kesim kümesi seçilebilir ve böylece,

$$\begin{aligned} r(P_n \times K_2) &\geq w((P_n \times K_2) - S^*) - |S^*| - m((P_n \times K_2) - S^*) \\ &= n - n - 1 = -1 \text{ elde edilir.} \end{aligned} \quad (3.3.5.8)$$

(3.3.5.7) ve (3.3.5.8)'den ispat tamamlanır. \square

4. KOMŞU RUPTURE DERECEŚİ

Bu bölümde, öncelikle yeni bir ölçüm olan komşu rupture derecesi tanımlanmıştır. Ardından özel grafların komşu rupture dereceleri hesaplanmış, çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak, k -ary tam ağaçların ve bu ağaçlarla tam grafların kartezyen çarpımı sonucunda elde edilen grafların komşu rupture değerleri bulunmuştur.

4.1 Komşu Rupture Derecesi

Zedelenebilirlik parametrelerinin çoğu, atılan tepelerin komşuları üzerindeki etkileri ile ilgilenmemektedir. Ancak, zedelenebilirlik kavramı incelenirken, atılan tepelerin diğer tepeler üzerindeki etkisi de ele alınmalıdır. Tepelerin komşuluklarıyla ilgilenen sadece birkaç zedelenebilirlik ölçümü bulunmaktadır. Bunlar, komşu bağlantılılık sayısı, komşu scattering sayısı ve komşu bütünlük değeridir.

Tanım 4.1.1. (Gunther, 1985) Bir G grafinin komşu bağlantılılık sayısı, S bir tepe subversion stratejisi olmak üzere,

$$K(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\} \text{ 'dir.}$$

Tanım 4.1.2. (Wei, 2003) Bir G grafinin komşu scattering sayısı, S bir tepe subversion stratejisi olmak üzere,

$$S(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G/S) - |S| : w(G/S) \geq 1\}$$

olarak tanımlanmıştır.

Görüldüğü gibi bu parametreler, zarar gören bir iletişim ağında, atılan tepelerin sayısı, geriye kalan grafin bileşen sayısı ve geriye kalan ağda iletişime devam eden en büyük bileşenin tepe sayısı ile aynı anda ilgilenmemektedir. Bu bağlamda, bu değerlerin hepsini aynı anda ele alan bir ölçüm olan komşu rupture derecesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

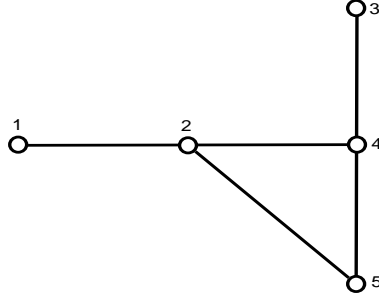
Tanım 4.1.3. Bir G grafinin komşu rupture derecesi, S bir tepe subversion stratejisi, G/S grafindaki bileşen sayısı $w(G/S)$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(G/S)$ olmak üzere,

$$Nr(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G/S) - |S| - c(G/S) : w(G/S) \geq 1\} \text{ 'dir.}$$

ve n tepeli tam grafın komşu rupture derecesi $(1 - n)$ olarak tanımlanır.

$Nr(G) = w(G/S) - |S| - c(G/S)$ ifadesini sağlayan bir $S \subseteq V(G)$ kümesine, G grafının Nr -kümesi denir.

Örnek 4.1.4. Şekil 4.1'de verilen grafın komşu rupture derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır:



Şekil 4.1: 5 tepeli bir G grafi

$S \subseteq V(G)$ kümesi, G grafının bir subversion stratejisi olsun.

- $S = \{1\}$ ve $S = \{3\}$ için $w(G/S) = 1$ ve $c(G/S) = 3$ olduğundan,
 $Nr_1(G) = 1 - 1 - 3 = -3$,
- $S = \{2\}$ ve $S = \{4\}$ için $w(G/S) = 1$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan,
 $Nr_2(G) = 1 - 1 - 1 = -1$,
- $S = \{5\}$ için $w(G/S) = 2$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan,
 $Nr_3(G) = 2 - 1 - 1 = 0$,
- $S = \{1, 2\}$, $S = \{1, 3\}$, $S = \{1, 5\}$, $S = \{2, 5\}$, $S = \{3, 4\}$ ve $S = \{3, 5\}$ için $w(G/S) = 1$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan, $Nr_4(G) = 1 - 2 - 1 = -2$,
- $S = \{1, 2, 5\}$ ve $S = \{3, 4, 5\}$ için $w(G/S) = 1$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan,
 $Nr_5(G) = 1 - 3 - 1 = -3$ 'dür.,

Tanım gereği, bulunan sonuçların maksimumu alındığında, G grafının komşu rupture derecesi, $Nr(G) = \max\{Nr_1(G), Nr_2(G), Nr_3(G), Nr_4(G), Nr_5(G)\} = 0$ bulunur.

Komşu bütünlük değerleri ve rupture dereceleri eşit iki graf için, komşu rupture derecesinin ayırdedici bir ölçüm olduğunu göstermek üzere aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 4.1.5. s ve t birbirinden farklı birer tamsayı olmak üzere,

$$G_1 = K_s \circ [(t-1)K_2 \cup (t+2)K_1] \text{ ve}$$

$$G_2 = K_t \circ [(s-1)K_2 \cup (s+2)K_1]$$

graflarını ele alalım. Bu iki grafin komşu bütünlük değerleri ve ruptüre dereceleri hesaplandığında eşit oldukları görülür.

$$NI(G_1) = NI(G_2) = 3$$

$$r(G_1) = r(G_2) = 2ts - 2$$

Ancak komşu ruptüre dereceleri hesaplandığında, birbirinden farklı sonuçlar bulunur.

$$Nr(G_1) = 2ts + s - 2t - 4$$

$$Nr(G_2) = 2ts + t - 2s - 4$$

Bu durumda, komşu ruptüre derecesi bu iki graf için daha iyi bir ayırtedici parametredir.

4.2 Temel Sonuçlar

Bu kısımda, yol grafların, çevre grafların, k -parçalı tam grafların ve tekerlek grafların komşu ruptüre dereceleri hesaplanmıştır.

Teorem 4.2.1. P_n , n tepeli bir yol graf ve $n \geq 12$ olmak üzere,

$$Nr(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Kanut. $S \subseteq V(P_n)$ kümesi, P_n grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = x$, graftan atılan tepe sayısı olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $x \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$ olsun. Geriye kalan grafin bileşen sayısı $w(P_n/S) \leq x+1$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(P_n/S) \geq \lceil \frac{n-3x}{x+1} \rceil$ olacağından,

$$w(P_n/S) - |S| - c(P_n/S) \leq x+1 - x - \lceil \frac{n-3x}{x+1} \rceil \leq 1 - \frac{n-3x}{x+1}$$

elde edilir. Her iki tarafın maksimumu alındığında, $f(x) = 1 - \frac{n-3x}{x+1}$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan, maksimum değerini $x = \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$ 'te alır. Yerine konulduğunda, $f(\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor) = 4 - \frac{n+3}{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1}$ bulunur. Komşu ruptüre derecesi bir

tamsayı olacağından, $Nr(P_n) \leq \lceil 4 - \frac{n+3}{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1} \rceil$ elde edilir.

$n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$ olduğu durumlarda $Nr(P_n) \leq -1$ ve $n \equiv 1 \pmod{4}$ olduğu durumlarda ise $Nr(P_n) \leq 0$ elde edilir. O halde,

$$Nr(P_n) \leq \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ bulunur.} \quad (4.4.2.1)$$

Durum 2. $x \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ olsun. Geriye kalan grafın bileşen sayısı $w(P_n/S) \leq x$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(P_n/S) \geq 1$ 'dir. Buradan da,

$$w(P_n/S) - |S| - c(P_n/S) \leq x - x - 1 = -1$$

$$Nr(P_n) \leq -1 \text{ elde edilir.} \quad (4.4.2.2)$$

(4.4.2.1) ve (4.4.2.2)'den,

$$Nr(P_n) \leq \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ bulunur.} \quad (4.4.2.3)$$

Diğer taraftan, atılan tepe sayısı $|S^*| = \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$, bileşen sayısı $w(P_n/S^*) = \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$ olduğu durumlarda, $c(P_n/S^*) = 2$ ve $n \equiv 1 \pmod{4}$ olduğu durumda ise, $c(P_n/S^*) = 1$ olacak şekilde bir S^* kümesi seçilebilir ve

$$Nr(P_n) \geq \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ bulunur.} \quad (4.4.2.4)$$

(4.4.2.3) ve (4.4.2.4)'den ispat tamamlanır. \square

Aşağıdaki tabloda, $n < 12$ için P_n yol grafının komşu rupture dereceleri verilmiştir.

Çizelge 4.1: P_n yol grafının komşu rupture derecesi

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Nr(P_n)$	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1

Teorem 4.2.2. n tepeli bir C_n çevre grafi için, $n \geq 15$ olmak üzere,

$$Nr(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $S \subseteq V(C_n)$, C_n grafinin bir subversion stratejisi ve $|S| = x$ graftan atılan tepe sayısı olsun. S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $x \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ olsun. Her C_n grafi için, $w(C_n/S) \leq x$ ve $c(C_n/S) \geq \lceil \frac{n-3x}{x} \rceil$ olduğundan,

$$w(C_n/S) - |S| - c(C_n/S) \leq x - x - \lceil \frac{n-3x}{x} \rceil \leq 3 - \frac{n}{x}$$

elde edilir. $f(x) = 1 - \frac{n}{x}$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan, maksimum değerini $x = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 'te alır. Buradan da, $Nr(C_n) \leq \lceil 3 - \frac{n}{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1} \rceil$ elde edilir.

$n \equiv 0 \pmod{4}$ olduğu durumlarda $Nr(C_n) \leq -1$ ve $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ olduğu durumlarda ise $Nr(C_n) \leq -2$ 'dir. Böylece,

$$Nr(C_n) \leq \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (4.4.2.5)$$

elde edilir.

Durum 2. $x \geq \frac{n}{4}$ olsun. $n \equiv 0 \pmod{4}$ olduğu durumlarda $w(C_n/S) \leq x$ ve $c(C_n/S) \geq 1$ 'dir. Bu durumda, $Nr(C_n) \leq -1$ elde edilir.

$n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ olduğu durumlarda ise, $w(C_n/S) \leq x + 1$ ve $c(C_n/S) \geq 1$ olacağından $Nr(C_n) \leq -2$ elde edilir. Böylece,

$$Nr(C_n) \leq \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (4.4.2.6)$$

bulunur.

Diğer taraftan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ olduğu durumlarda bileşen sayısı

$w(C_n/S^*) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı $c(C_n/S^*) = 1$, $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ olduğu durumlarda ise $w(C_n/S^*) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ ve $c(P_n/S^*) = 2$ olacak şekilde $|S^*| = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ elemanlı bir S^* kümesi seçilebilir ve böylece,

$$Nr(C_n) \geq \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad \text{elde edilir.} \quad (4.4.2.7)$$

(4.4.2.5) ve (4.4.2.6)'dan elde edilen sonuç ve (4.4.2.7)'dan ispat tamamlanır. \square

Aşağıdaki tabloda, $n < 15$ için C_n çevre grafinin komşu rupture dereceleri verilmiştir.

Çizelge 4.2: C_n çevre grafının komşu rupture derecesi

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$Nr(C_n)$	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-2

Teorem 4.2.3. K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , k -parçalı bir tam graf olmak üzere,

$$Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - 3 \text{ 'dir.}$$

Kanıt. $S \subseteq V(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ kümesi, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} grafının bir subversion stratejisi olsun. $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, \dots, |V_k| = n_k$ ve $V(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ bir parçalanış olmak üzere, S kümesi, V_i kümelerinden sadece birinin elemanlarını içerebilir. Aksi halde, $w(G/S) = 0$ elde edilir. O halde, $S \subseteq V_i$ ve $|S| = x$ olsun. Bu durumda, $w(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}/S) = n_i - x$ ve $c(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}/S) = 1$ 'dir. Komşu rupture derecesi tanımından,

$$Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max_x \{n_i - x - 1\}$$

bulunur. $f(x) = n_i - 2x - 1$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon ve $1 \leq x \leq n_i$ olduğundan $Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = n_i - 3$ elde edilir. $n_i = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ olduğundan ispat tamamlanır. \square

Sonuç 4.2.4. $K_{m, n}$, iki parçalı bir tam graf ise,

$$Nr(K_{m, n}) = \max\{m, n\} - 3 \text{ 'dir.}$$

Sonuç 4.2.5. $K_{1, n}$, bir yıldız graf ise,

$$Nr(K_{1, n}) = n - 3 \text{ 'dir.}$$

Teorem 4.2.6. W_n , n tepeli bir tekerlek graf ve $n > 4$ ise,

$$Nr(W_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Kanıt. S , W_n grafının bir subversion stratejisi olsun. Tanım gereği, geriye kalan grafta en az bir bileşen kalması gerektiğinden, S kümesi sadece çevre üzerindeki tepeleri içermektedir. $W_n = K_1 + C_{n-1}$ olduğundan, $v \in V(C_{n-1})$ tepesi graftan atıldığında, $W_n/v = P_{n-4}$ yol grafi elde edileceğinden,

$$Nr(W_n) = Nr(P_{n-4}) - 1$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$Nr(P_{n-4}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

değerleri yerine konulduğunda ispat tamamlanır. \square

4.3 Komşu Rupture Derecesi için Bazı Alt ve Üst Sınırlar

Bu kısımda, komşu rupture derecesi ve diğer bazı zedelenebilirlik parametreleri arasındaki ilişkiler incelenmiş, komşu rupture derecesi için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1. *G , n tepeli bir graf olmak üzere,*

$$Nr(G) \geq 1 - n \text{ 'dir.}$$

Kanut. S , G grafının bir subversion stratejisi olsun. Her S kümesi için $|S| \leq |N[S]|$ ve $w(G/S) \geq 1$ olduğundan,

$$w(G/S) \leq n - |N[S]| - c(G/S) + 1 \leq n - |S| - c(G/S) + 1$$

elde edilir. Her iki tarafa $w(G/S)$ eklendiğinde,

$$2w(G/S) - n - 1 \leq w(G/S) - |S| - c(G/S)$$

bulunur. Böylece, $Nr(G) \geq 1 - n$ elde edilir. \square

Teorem 4.3.2. *G , n tepeli bir graf ve $K(G)$, grafın komşu bağlantılılık sayısı olmak üzere,*

$$Nr(G) \leq n - 2K(G) - 1 \text{ 'dir.}$$

Kanut. S , G grafının bir Nr -kümesi olsun. Her S kümesi için, $w(G/S) \leq n - |N[S]|$, $c(G/S) \geq 1$ ve $K(G) \leq |S| \leq |N[S]|$ olduğundan,

$$w(G/S) - |S| - c(G/S) \leq n - |N[S]| - |S| - c(G/S)$$

elde edilir ve buradan da, $Nr(G) \leq n - 2K(G) - 1$ 'dir. \square

Teorem 4.3.3. *Bir G grafi için,*

$$Nr(G) \leq \alpha(G) - NI(G) \text{ 'dir.}$$

Kanut. S , G grafının bir subversion stratejisi olsun. Komşu bütünlük değeri tanımından, her S kümesi için $NI(G) \leq |S| + c(G/S)$ ifadesi sağlanmaktadır. Eşitsizliğin her iki tarafı $w(G/S)$ 'den çıkarıldığında,

$$w(G/S) - NI(G) \geq w(G/S) - |S| - c(G/S)$$

elde edilir. $w(G/S) \leq \alpha(G)$ olduğundan $Nr(G) \leq \alpha(G) - NI(G)$ bulunur. \square

Teorem 4.3.4. *Bir G grafi için,*

$$Nr(G) \leq 2\alpha(G) - 2NI(G) - r(G) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. S, G grafının bir r -kümesi ve S', Nr -kümesi olsun. Bu durumda,

$$w(G - S) - |S| - m(G - S) = r(G) \text{ ve}$$

$$w(G/S') - |S'| - c(G/S') = Nr(G) \text{ 'dir.}$$

Bu eşitlikler alt alta toplandığında,

$$r(G) + Nr(G) = w(G - S) - |S| - m(G - S) + w(G/S') - |S'| - c(G/S')$$

elde edilir. Tepe bütünlük değeri ve komşu bütünlük değeri tanımlarından, her S ve S' kümeleri için, $|S| + m(G - S) \geq I(G)$ ve $|S'| + c(G/S') \geq NI(G)$ 'dir. Her S kümesi için $w(G/S) \leq w(G - S) \leq \alpha(G)$ (Li and Li, 2005) olduğundan $r(G) + Nr(G) \leq 2\alpha(G) - I(G) - NI(G)$ elde edilir. $NI(G) \leq I(G)$ (Cozzens and Wu, 1997) eşitsizliğinden ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.3.5. *Bir G grafi için,*

$$Nr(G) \geq 3 - I(G) - NI(G) - r(G) \text{ 'dir.}$$

Kanıt. S, G grafının bir I -kümesi ve S', NI -kümesi olsun. Bu durumda,

$$|S| + m(G - S) = I(G) \text{ ve } |S'| + c(G/S') = NI(G) \text{ 'dir.}$$

Rupture derecesi ve komşu rupture derecesi tanımlarından,

$$r(G) + Nr(G) \geq w(G - S) - |S| - m(G - S) + w(G/S') - |S'| - c(G/S')$$

elde edilir. Buradan da,

$$r(G) + Nr(G) \geq w(G - S) + w(G/S') - I(G) - NI(G)$$

bulunur. Her S ve S' kümeleri için $w(G - S) \geq 2$ ve $w(G/S') \geq 1$ olduğundan, $r(G) + Nr(G) \geq 3 - I(G) - NI(G)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Sonuç 4.3.6. *Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5'den,*

$$3 - I(G) - NI(G) - r(G) \leq Nr(G) \leq 2\alpha(G) - 2NI(G) - r(G)$$

elde edilir.

4.4 k -ary Tam Ağaçların Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda k -ary tam ağaç grafların komşu rupture dereceleri incelenmiştir.

Teorem 4.4.1. $T_{k,d}$, d seviyeli, k -ary bir tam ağaç olmak üzere,

$$Nr(T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+2} - k^2}{k^2 + 1}, & d \equiv 0 \pmod{4}; \\ \frac{k^{d+2} - k^3 - k^2 - 1}{k^2 + 1}, & d \equiv 1 \pmod{4}; \\ \frac{k^{d+2} - k^2 - 2}{k^2 + 1}, & d \equiv 2 \pmod{4}; \\ \frac{k^{d+2} - k^2 - k - 1}{k^2 + 1}, & d \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Kanıt. S , $T_{k,d}$ grafinin bir Nr -kümesi olsun. O halde,

$$w(T_{k,d}/S) - |S| - c(T_{k,d}/S) = Nr(T_{k,d}) \text{ 'dir.}$$

Durum 1. $d \equiv 0 \pmod{4}$ ise, S , $T_{k,d}$ ağacının $2, 6, 10, \dots, d - 2$ seviyelerindeki tepeleri içermelidir. Bu durumda, $0 \leq x \leq \frac{d-4}{4}$ olmak üzere, $|S| = \sum_{i=0}^x k^{4i+2}$ tepe

graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w(T_{k,d}/S) = \sum_{i=0}^{x+1} k^{4i}$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $c(T_{k,d}/S) = \frac{k^{d+1-4x-4} - 1}{k - 1}$ 'dir. $\sum_{i=0}^x k^{4i+2} = \frac{k^2(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1}$ ve

$\sum_{i=0}^{x+1} k^{4i} = \frac{k^{4x+8} - 1}{k^4 - 1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Nr(T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-4}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+8} - 1}{k^4 - 1} - \frac{k^2(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} - \frac{k^{d+1-4x-4} - 1}{k - 1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-4}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+7} - k^{4x+6} - k^{d-4x-1} - k^{d-4x-3} + k^2 + k}{k^3 - k^2 + k - 1} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. $f(x) = \frac{k^{4x+7} - k^{4x+6} - k^{d-4x-1} - k^{d-4x-3} + k^2 + k}{k^3 - k^2 + k - 1}$ fonksiyonu,

$$f'(x) = \frac{4k^{-4x-3} \ln k (k^d + k^{d+2} - k^{8x+9} + k^{8x+10})}{k^3 - k^2 + k - 1} > 0 \text{ olduğundan, artan bir}$$

fonksiyondur ve maksimum değerini $x = \frac{d-4}{4}$ 'te alır. Bu durumda,

$$d \equiv 0 \pmod{4} \text{ için } Nr(T_{k,d}) = \frac{k^{d+2} - k^2}{k^2 + 1} \text{ elde edilir.} \quad (4.4.4.1)$$

Durum 2. $d \equiv 1 \pmod{4}$ ise, S , $T_{k,d}$ ağacının $3, 7, 11, \dots, d - 2$ seviyelerindeki tepeleri ve ayrıca 1. seviyedeki tepelerden birini içermelidir. O halde, $0 \leq x \leq \frac{d-5}{4}$ olmak üzere, $|S| = \sum_{i=0}^x k^{4i+3} + 1$ tepe graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen

sayısı $w(T_{k,d}/S) = \sum_{i=0}^x k^{4i+5} + 1$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı

$$c(T_{k,d}/S) = \frac{k^{d+1-4x-5} - 1}{k - 1}, \text{dir. } \sum_{i=0}^x k^{4i+5} + 1 = \frac{k^5(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} + 1 \text{ ve}$$

$$\sum_{i=0}^x k^{4i+3} + 1 = \frac{k^3(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} + 1 \text{ olduğundan,}$$

$$Nr(T_{k,d}) = \max_{0 \leq x \leq \frac{d-5}{4}} \left\{ \frac{k^5(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} + 1 - \frac{k^3(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} + 1 - \frac{k^{d+1-4x-5} - 1}{k - 1} \right\}$$

$$= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-5}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+8} - k^{4x+7} - k^{d-4x-2} - k^{d-4x-4} - k^4 + k^3 + k^2 + 1}{k^3 - k^2 + k - 1} \right\}$$

$$\text{elde edilir. } f(x) = \frac{k^{4x+8} - k^{4x+7} - k^{d-4x-2} - k^{d-4x-4} - k^4 + k^3 + k^2 + 1}{k^3 - k^2 + k - 1}$$

$$\text{fonksiyonu, } f'(x) = \frac{4k^{-4x-4} \ln k (k^d + k^{d+2} - k^{8x+11} + k^{8x+12})}{k^3 - k^2 + k - 1} > 0 \text{ olduğundan,}$$

artan bir fonksiyondur ve maksimum değerini $x = \frac{d-5}{4}$, te alır. Böylece,

$$d \equiv 1 \pmod{4} \text{ için } Nr(T_{k,d}) = \frac{k^{d+2} - k^3 - k^2 - 1}{k^2 + 1} \text{ elde edilir. (4.4.4.2)}$$

Durum 3. $d \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $S, T_{k,d}$ ağacının $0, 4, 8, \dots, d-2$ seviyelerindeki tepeleri içermelidir. Buna göre, $0 \leq x \leq \frac{d-2}{4}$ olmak üzere $|S| = \sum_{i=0}^x k^{4i} = \frac{k^{4x+4} - 1}{k^4 - 1}$

tepe graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w(T_{k,d}/S) = \sum_{i=0}^x k^{4i+2} = \frac{k^2(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $c(T_{k,d}/S) = \frac{k^{d+1-4x-2} - 1}{k - 1}$ olduğundan,

$$Nr(T_{k,d}) = \max_{0 \leq x \leq \frac{d-2}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+6} - k^2}{k^4 - 1} - \frac{k^{4x+4} - 1}{k^4 - 1} + 1 - \frac{k^{d+1-4x-2} - 1}{k - 1} \right\}$$

$$= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-2}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+5} - k^{4x+4} - k^{d-4x+1} - k^{d-4x-1} + k^2 - k + 2}{k^3 - k^2 + k - 1} \right\}$$

$$\text{elde edilir. } f(x) = \frac{k^{4x+5} - k^{4x+4} - k^{d-4x+1} - k^{d-4x-1} + k^2 - k + 2}{k^3 - k^2 + k - 1} \text{ fonksiyonu,}$$

$$f'(x) = \frac{4k^{-4x-1} \ln k (k^d + k^{d+2} - k^{8x+5} + k^{8x+6})}{k^3 - k^2 + k - 1} > 0 \text{ olduğundan, artan bir}$$

fonksiyondur ve maksimum değerini $x = \frac{d-2}{4}$, te alır. Bundan dolayı,

$$d \equiv 2 \pmod{4} \text{ için } Nr(T_{k,d}) = \frac{k^{d+2} - k^2 - 2}{k^2 + 1} \text{ elde edilir. (4.4.4.3)}$$

Durum 4. $d \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $S, T_{k,d}$ ağacının $1, 5, 9, \dots, d-2$ seviyelerindeki tepeleri içermelidir. O halde, $0 \leq x \leq \frac{d-3}{4}$ olmak üzere,

$$|S| = \sum_{i=0}^x k^{4i+1} = \frac{k(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} \text{ tepe graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen}$$

sayısı $w(T_{k,d}/S) = \sum_{i=0}^x k^{4i+3} = \frac{k^3(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı

$c(T_{k,d}/S) = \frac{k^{d+1-4x-3} - 1}{k - 1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Nr(T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-3}{4}} \left\{ \frac{k^3(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} - \frac{k(k^{4x+4} - 1)}{k^4 - 1} - \frac{k^{d+1-4x-3} - 1}{k - 1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-3}{4}} \left\{ \frac{k^{4x+6} - k^{4x+5} - k^{d-4x} - k^{d-4x-2} + k + 1}{k^3 - k^2 + k - 1} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $f(x) = \frac{k^{4x+6} - k^{4x+5} - k^{d-4x} - k^{d-4x-2} + k + 1}{k^3 - k^2 + k - 1}$ fonksiyonu,

$f'(x) = \frac{4k^{-4x-2} \ln k (k^d + k^{d+2} - k^{8x+7} + k^{8x+8})}{k^3 - k^2 + k - 1} > 0$ olduğundan, artan bir

fonksiyondur ve maksimum değerini, $x = \frac{d-3}{4}$ 'te alır. Böylece,

$$d \equiv 3 \pmod{4} \text{ için } Nr(T_{k,d}) = \frac{k^{d+2} - k^2 - k - 1}{k^2 + 1} \text{ elde edilir.} \quad (4.4.4.4)$$

(4.4.4.1), (4.4.4.2), (4.4.4.3) ve (4.4.4.4)'den ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.4.2. $T_{k,d}$ d -seviyeli k -ary bir tam ağaç ve K_p , p tepeli bir tam graf olsun. $k > 2$ ve $k > p - 1$ olmak üzere,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+1} + k - kp - p}{k + 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+1} + k - kp - p - 2}{k + 1}, & d \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Kanıt. S , $K_p \times T_{k,d}$ grafının bir subversion stratejisi ve $|S| = x$, $T_{k,d}$ grafından atılan tepe sayısı olsun. Bu durumda, S kümesinin eleman sayısına bağlı olarak iki durum vardır:

Durum 1. $1 \leq x \leq \beta(T_{k,d}) - 1$ olsun. $w((K_p \times T_{k,d})/S) \leq kx + 1$ ve

$c((K_p \times T_{k,d})/S) \leq p - 1$ 'dir. Buradan da,

$Nr(K_p \times T_{k,d}) < \max_x \{kx + 1 - x - p + 1\} = \max_x \{(k - 1)x + 2 - p\}$ elde edilir.

$f(x) = (k - 1)x + 2 - p$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \beta(T_{k,d}) - 1$ 'de alır. O halde,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) < \begin{cases} \frac{k^{d+1} - k^2 + 2k - kp - p + 2}{k + 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+1} - k^2 + k - kp - p + 3}{k + 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.4.4.5)$$

elde edilir.

Durum 2. $\beta(T_{k,d}) \leq x \leq \frac{p(k^{d+1} - 1)}{k - 1}$ olsun. $w((K_p \times T_{k,d})/S) \leq \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - x$ ve $c((K_p \times T_{k,d})/S) \geq p - 1$ 'dir. Buradan da,

$Nr(K_p \times T_{k,d}) < \max_x \left\{ \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - 2x - p + 1 \right\}$ elde edilir.

$f(x) = \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1} - 2x - p + 1$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon olduğundan

maksimum değerini $x = \beta(T_{k,d})$ 'da alır. Bu durumda,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) \leq \begin{cases} \frac{k^{d+1} + k - kp - p}{k + 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+1} + k - kp - p - 2}{k + 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.4.4.6)$$

bulunur.

$K_p \times T_{k,d}$ grafının, $|S^*| = \beta(T_{k,d})$ elemanlı, en büyük bağlantılı bileşenin tepesi sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = p - 1$ ve bileşen sayısı d 'nin tek olduğu durumlarda $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{k(k^{d+1} - 1)}{k^2 - 1}$ ve çift olduğu durumlarda $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 - 1}$ olan bir S^* subversion stratejisi seçildiğinde,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) \geq \begin{cases} \frac{k^{d+1} + k - kp - p}{k + 1}, & d \text{ tek ise} \\ \frac{k^{d+1} + k - kp - p - 2}{k + 1}, & d \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.4.4.7)$$

elde edilir.

(4.4.4.5) ve (4.4.4.6)'dan elde edilen sonuç ile (4.4.4.7)'den ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.4.3. $T_{k,d}$, d -seviyeli k -ary bir tam ağaç ve K_p , p tepeli bir tam graf olsun. $k \leq p - 1$ olmak üzere,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \begin{cases} \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} + k^4 - k^3 - k^2 + k - 2 - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1}, & d \equiv 0 \pmod{5}; \\ \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 - k^3 + k^2 - k - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1}, & d \equiv 1 \pmod{5}; \\ \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 + k^3 - k^2 + k - 2 - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1}, & d \equiv 2 \pmod{5}; \\ \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} + k^4 - k^3 + k^2 - k - k^5(p+1) + p}{k^5 - 1}, & d \equiv 3 \pmod{5}; \\ \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 + k^3 - k^2 - k - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1}, & d \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Kanıt. $S \subseteq V(K_p \times T_{k,d})$ kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafının bir Nr -kümesi olsun. O halde,

$$w((K_p \times T_{k,d})/S) - |S| - c((K_p \times T_{k,d})/S) = Nr(K_p \times T_{k,d}) \text{ 'dir.}$$

Durum 1. $d \equiv 0 \pmod{5}$ ise, S kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafının 1, 4, 6, 9, 11, \dots , $d - 4, d - 1$ seviyelerindeki tepeleri içermektedir. Bu durumda, $0 \leq x \leq \frac{d - 5}{5}$

olmak üzere $|S| = \sum_{i=0}^x k^{5i+1} + \sum_{i=0}^x k^{5i+4} = \frac{k^{5x+9} + k^{5x+6} - k^4 - k}{k^5 - 1}$ tepe graftan

atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \sum_{i=0}^{x+1} k^{5i} + \sum_{i=0}^x k^{5i+2} + \sum_{i=0}^x k^{5i+3} = \frac{k^{5x+10} + k^{5x+8} + k^{5x+7} - k^3 - k^2 - 1}{k^5 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{(k^{d-5x-5} - 1)(p-1)}{k-1}$, dir. O halde,

$$\begin{aligned} Nr(K_p \times T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-5}{5}} \left\{ \frac{k^{5x+10} + k^{5x+8} + k^{5x+7} - k^3 - k^2 - 1}{k^5 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^{5x+9} + k^{5x+6} - k^4 - k}{k^5 - 1} - \frac{(k^{d-5x-5} - 1)(p-1)}{k-1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-5}{5}} \left\{ \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+10} - k^{5x+9} + k^{5x+8} + k^{5x+7} \right. \\ &\quad - k^{5x+6} - k^{d-5x-1}(p-1) - k^{d-5x-2}(p-1) - k^{d-5x-3}(p-1) \\ &\quad - k^{d-5x-4}(p-1) - k^{d-5x-5}(p-1) + k^3(p-2) + k^2(p-2) \\ &\quad \left. + k^4 p + kp + (p-2)) \right\} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1}{k^5-1} (k^{5x+10} - k^{5x+9} + k^{5x+8} + k^{5x+7} - k^{5x+6} - k^{d-5x-1}(p-1) - k^{d-5x-2}(p-1) - k^{d-5x-3}(p-1) - k^{d-5x-4}(p-1) - k^{d-5x-5}(p-1) + k^3(p-2) + k^2(p-2) + k^4 p + kp + (p-2))$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \frac{d-5}{5}$ 'te alır. Böylece,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} + k^4 - k^3 - k^2 + k - 2 - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1} \quad (4.4.4.8)$$

elde edilir.

Durum 2. $d \equiv 1 \pmod{5}$ ise, S kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafinin $0, 2, 5, 7, 10, \dots$, $d-4, d-1$ seviyelerindeki tepeleri içermektedir. Bu durumda, $0 \leq x \leq \frac{d-1}{5}$ olmak üzere $|S| = \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+2} + \sum_{i=0}^x k^{5i} = \frac{k^{5x+5} + k^{5x+2} - k^2 - 1}{k^5 - 1}$ tepe graftan atılırsa,

geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \sum_{i=0}^x k^{5i+1} + \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+3} + \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+4} = \frac{k^{5x+6} + k^{5x+4} + k^{5x+3} - k^4 - k^3 - k}{k^5 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe

sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{(k^{d-5x} - 1)(p - 1)}{k - 1}$, dir. O halde,

$$\begin{aligned} Nr(K_p \times T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-1}{5}} \left\{ \frac{k^{5x+6} + k^{5x+4} + k^{5x+3} - k^4 - k^3 - k}{k^5 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^{5x+5} + k^{5x+2} - k^2 - 1}{k^5 - 1} - \frac{(k^{d-5x} - 1)(p - 1)}{k - 1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-1}{5}} \left\{ \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+6} - k^{5x+5} + k^{5x+4} + k^{5x+3} - k^{5x+2} \right. \\ &\quad - k^{d-5x+4}(p - 1) - k^{d-5x+3}(p - 1) - k^{d-5x+2}(p - 1) \\ &\quad - k^{d-5x+1}(p - 1) - k^{d-5x}(p - 1) + k^4(p - 2) + k^3(p - 2) \\ &\quad \left. + k(p - 2) + k^2p + kp) \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$f(x) = \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+6} - k^{5x+5} + k^{5x+4} + k^{5x+3} - k^{5x+2} - k^{d-5x+4}(p - 1) - k^{d-5x+3}(p - 1) - k^{d-5x+2}(p - 1) - k^{d-5x+1}(p - 1) - k^{d-5x}(p - 1) + k^4(p - 2) + k^3(p - 2) + k(p - 2) + k^2p + kp)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan, maksimum değerini $x = \frac{d-1}{5}$ 'te alır. Böylece,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 - k^3 + k^2 - k - k^5(p - 1) + p}{k^5 - 1} \quad (4.4.4.9)$$

elde edilir.

Durum 3. $d \equiv 2 \pmod{5}$ ise, S kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafının 1, 3, 6, 8, 11, 13, \dots , $d - 4, d - 1$ seviyelerindeki tepeleri içermektedir. Bu durumda, $0 \leq x \leq \frac{d-2}{5}$

olmak üzere $|S| = \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+3} + \sum_{i=0}^x k^{5i+1} = \frac{k^{5x+6} + k^{5x+3} - k^3 - k}{k^5 - 1}$ tepe graftan

atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \sum_{i=0}^x k^{5i} + \sum_{i=0}^x k^{5i+2} +$

$\sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+4} = \frac{k^{5x+7} + k^{5x+5} + k^{5x+4} - k^4 - k^2 - 1}{k^5 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe

sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{(k^{d-5x-1} - 1)(p - 1)}{k - 1}$, dir. O halde,

$$\begin{aligned} Nr(K_p \times T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-2}{5}} \left\{ \frac{k^{5x+7} + k^{5x+5} + k^{5x+4} - k^4 - k^2 - 1}{k^5 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^{5x+6} + k^{5x+3} - k^3 - k}{k^5 - 1} - \frac{(k^{d-5x-1} - 1)(p - 1)}{k - 1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-2}{5}} \left\{ \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+7} - k^{5x+6} + k^{5x+5} + k^{5x+4} - k^{5x+3} \right. \\ &\quad - k^{d-5x+3}(p - 1) - k^{d-5x+2}(p - 1) - k^{d-5x+1}(p - 1) \\ &\quad - k^{d-5x}(p - 1) - k^{d-5x-1}(p - 1) + k^4(p - 2) + k^2(p - 2) \\ &\quad \left. + (p - 2) + k^3p + kp) \right\} \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1}{k^5-1}(k^{5x+7} - k^{5x+6} + k^{5x+5} + k^{5x+4} - k^{5x+3} - k^{d-5x+3}(p-1) - k^{d-5x+2}(p-1) - k^{d-5x+1}(p-1) - k^{d-5x}(p-1) - k^{d-5x-1}(p-1) + k^4(p-2) + k^2(p-2) + (p-2) + k^3p + kp)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \frac{d-2}{5}$ 'te alır. Bu durumda,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 + k^3 - k^2 + k - 2 - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1} \quad (4.4.4.10)$$

elde edilir.

Durum 4. $d \equiv 3 \pmod{5}$ ise, S kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafının $0, 2, 4, 7, 9, 12, 14, \dots, d-4, d-1$ seviyelerindeki tepeleri içermektedir. Bu durumda $0 \leq x \leq \frac{d-3}{5}$ olmak üzere $|S| = \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+4} + \sum_{i=0}^x k^{5i+2} + 1 = \frac{k^{5x+7} + k^{5x+4} + k^5 - k^4 - k^2 - 1}{k^5 - 1}$ tepe graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \sum_{i=0}^x k^{5i+1} + \sum_{i=0}^x k^{5i+3} + \sum_{i=0}^{x-1} k^{5i+5} = \frac{k^{5x+8} + k^{5x+6} + k^{5x+5} - k^5 - k^3 - k}{k^5 - 1}$ ve en büyük bileşenin tepe sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{(k^{d-5x-2} - 1)(p-1)}{k-1}$, dir. O halde,

$$\begin{aligned} Nr(K_p \times T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-3}{5}} \left\{ \frac{k^{5x+8} + k^{5x+6} + k^{5x+5} - k^5 - k^3 - k}{k^5 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^{5x+7} + k^{5x+4} + k^5 - k^4 - k^2 - 1}{k^5 - 1} - \frac{(k^{d-5x-2} - 1)(p-1)}{k-1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-3}{5}} \left\{ \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+8} - k^{5x+7} + k^{5x+6} + k^{5x+5} - k^{5x+4} \right. \\ &\quad \left. - k^{d-5x+2}(p-1) - k^{d-5x+1}(p-1) - k^{d-5x}(p-1) \right. \\ &\quad \left. - k^{d-5x-1}(p-1) - k^{d-5x-2}(p-1) + k^3(p-2) + k(p-2) \right. \\ &\quad \left. + k^4p + k^2p - 2k^5 + p) \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$f(x) = \frac{1}{k^5-1}(k^{5x+8} - k^{5x+7} + k^{5x+6} + k^{5x+5} - k^{5x+4} - k^{d-5x+2}(p-1) - k^{d-5x+1}(p-1) - k^{d-5x}(p-1) - k^{d-5x-1}(p-1) - k^{d-5x-2}(p-1) + k^3(p-2) + k(p-2) + k^4p + k^2p - 2k^5 + p)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \frac{d-3}{5}$ 'te alır. Buradan da,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} + k^4 - k^3 + k^2 - k - k^5(p+1) + p}{k^5 - 1} \quad (4.4.4.11)$$

elde edilir.

Durum 5. $d \equiv 4 \pmod{5}$ ise, S kümesi, $K_p \times T_{k,d}$ grafının $0, 3, 5, 8, 10, 13, \dots, d-4, d-1$ seviyelerindeki tepeleri içermektedir. Bu durumda, $0 \leq x \leq \frac{d-4}{5}$

olmak üzere, $|S| = \sum_{i=0}^x k^{5i} + \sum_{i=0}^x k^{5i+3} + 1 = \frac{k^{5x+8} + k^{5x+5} + k^5 - k^3 - 1}{k^5 - 1}$ tepe

graftan atılırsa, geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w((K_p \times T_{k,d})/S) = \sum_{i=0}^x k^{5i+1} +$

$\sum_{i=0}^x k^{5i+2} + \sum_{i=0}^x k^{5i+4} = \frac{k^{5x+9} + k^{5x+7} + k^{5x+6} - k^4 - k^2 - k}{k^5 - 1}$ ve en büyük bileşenin

tepe sayısı $c((K_p \times T_{k,d})/S) = \frac{(k^{d-5x-3} - 1)(p-1)}{k-1}$, dir. O halde,

$$\begin{aligned} Nr(K_p \times T_{k,d}) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-4}{5}} \left\{ \frac{k^{5x+9} + k^{5x+7} + k^{5x+6} - k^4 - k^2 - k}{k^5 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^{5x+8} + k^{5x+5} + k^5 - k^3 - 1}{k^5 - 1} - \frac{(k^{d-5x-3} - 1)(p-1)}{k-1} \right\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{d-4}{5}} \left\{ \frac{1}{k^5 - 1} (k^{5x+9} - k^{5x+8} + k^{5x+7} + k^{5x+6} - k^{5x+5} \right. \\ &\quad - k^{d-5x+1}(p-1) - k^{d-5x}(p-1) - k^{d-5x-1}(p-1) \\ &\quad - k^{d-5x-2}(p-1) - k^{d-5x-3}(p-1) + k^4(p-2) + k^2(p-2) \\ &\quad \left. + k(p-2) + k^3p + p) \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$f(x) = \frac{1}{k^5-1} (k^{5x+9} - k^{5x+8} + k^{5x+7} + k^{5x+6} - k^{5x+5} - k^{d-5x+1}(p-1) - k^{d-5x}(p-1) - k^{d-5x-1}(p-1) - k^{d-5x-2}(p-1) - k^{d-5x-3}(p-1) + k^4(p-2) + k^2(p-2) + k(p-2) + k^3p + p)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan maksimum değerini $x = \frac{d-4}{5}$ 'te alır. Sonuç olarak,

$$Nr(K_p \times T_{k,d}) = \frac{k^{d+5} - k^{d+4} + k^{d+3} + k^{d+2} - k^{d+1} - k^4 + k^3 - k^2 - k - k^5(p-1) + p}{k^5 - 1} \quad (4.4.4.12)$$

bulunur.

(4.4.4.8), (4.4.4.9), (4.4.4.10), (4.4.4.11), ve (4.4.4.12)'den ispat tamamlanmış olur. \square

5. SONUÇ

Bu çalışmada, zedelenebilirlik kavramı ayrıntılı olarak incelenmiş, ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bir ağın genişletilebilmesi için uygulanan transformasyon işlemleri ile elde edilen 8 farklı transformasyon grafinin komşu bütünlük değerleri bulunmuştur. Ayrıca, diğer bir zedelenebilirlik ölçümü olan rupture derecesi ele alınmış ve çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. k -ary tam ağaçların rupture derecesi bulunmuş ve bu ağaçlara bazı graf işlemleri uygulanarak, elde edilen grafların rupture dereceleri ile ilişkisi incelenmiştir. Bu tezde, komşu bütünlük değeri ve rupture derecesi tanımlarından hareketle, yeni bir zedelenebilirlik ölçümü olan komşu rupture derecesi kavramı tanımlanmıştır. Öncelikle, bazı özel grafların komşu rupture değerleri elde edilmiş, ardından diğer parametrelerle arasındaki ilişkiler incelenmiştir. k -ary tam ağaçların komşu rupture değerleri ele alınarak, bu grafların rupture değerleri ile ilişkisi incelenmiştir.

Sonuç olarak, tepe sayısı aynı olan grafların zedelenebilirlik değerleri karşılaştırılırken, ele alınan graflarda komşu rupture derecesi büyük olan grafların daha dayanıklı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, bu çalışmada yeni bir ölçüm olarak tanımlanan komşu rupture parametresinin, komşu bütünlük değeri ve rupture derecesi parameterlerine göre bazı graf tiplerinde daha ayırt edici bir parametre olduğu Örnek 4.1.5’de ortaya konulmuştur. Özellikle, casus ağlar üzerinde çalışırken, komşu rupture parametresinin bu ağlar üzerinde daha ayırt edici olduğu sonucu gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Allan, R.B. and Laskar, R.**, 1978, On domination and independent domination of a graph. *Discrete Mathematics*, 23, 73-76pp.
- Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W.D., Lipman, M.J. and Pippert, R.E.**, 1992, A survey of integrity. *Discrete Applied Mathematics*, 76, 13-28pp.
- Barefoot, C.A. and Entringer, H.R.**, 1987, Vulnerability in graphs: a comparative survey. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 25-33pp.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.**, 1976, *Graph Theory with Applications*. London, Macmillan Press Ltd., 263p.
- Buckley, F. and Harary, F.**, 1989, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley Publishing Company, 335p.
- Chartrand, G. and Lesniak, L.**, 1996, *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, California, 421p.
- Chvatal, V.**, 1973, Tough graphs and hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, 306, 215-228pp.
- Cozzens, M.B.**, 1994, Stability measures and data fusion networks. *Graph Theory of New York*, 26,8-14pp.
- Cozzens, M.B., Moazzami, D. and Stueckle, S.**, 1995, The tenacity of a graph. *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms.*, 1111-1122pp.
- Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y.**, 1996, Vertex-neighbor-integrity of trees. *Ars Combin.*, 43, 169-180pp.
- Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y.**, 1997, Bounds of edge-neighbor-integrity of graphs. *Australian Journal of Combinatorics*, 15, 71-80pp.
- Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y.**, 1998, Vertex-neighbor-integrity of powers of cycles. *Ars Combin.*, 48, 257-270pp.
- Gambrell, M.J.G.**, 2000, Vertex-neighbor-integrity of magnifiers, expanders and hypercubes. *Discrete Math.*, 216,257-266pp.
- Goddard, w.D. and Swart, H.C.**, 1990, On the toughness of a graph. *Quest. Math.*, 13, 217-232pp.
- Gross, J. and Yellen, J.**, 1999, *Graph Theory and Its Applications*, CRC Press LLC, Florida, 585p.

- Gunther,G.**, 1985, Neighbor connectivity in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 11, 233-243pp.
- Harary, F.**, 1972, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 274p.
- Jung, H.**, 1978, On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 1124, 125-133pp.
- Kirlangic, A.**, 2004, Graph operations and neighbor-integrity. *Mathematica Bohemica*, 3, 245-254pp.
- Kirlangic, A.**, 2009, The rupture degree and gear graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 32, 31-36pp.
- Kirlangic, A. and Ozan, A.**, 2000, Neighbor integrity of total graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 23, 73-76pp.
- Li, Y., and Li, X.**, 2004, Computing the rupture degrees of graphs. *7th Internat. Symp. Parallel Architectures, Algorithms and Networks, ISPAN 04*.
- Li, Y., Zhang, S. and Li, X.**, 2005, Rupture degree of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(7), 793-803pp.
- Mitchell, S. and Hedetniemi, S.T.**, 1977, Edge domination in trees. *Congr. Numer.*, 19, 489-509.pp
- Ouyang, K.Y. and Ouyang, K.Z.**, 1993, Relative breaktivity of graphs. *J. Lanzhou University (Natural Science).*, 29(3), 43-49pp.
- Wei, Z.T.**, 2003, On the reliability parameters of networks. *MS Thesis, Northwestern Polytechnical University*, 30-40pp.
- Wu, B., Zhang, L. and Zhang, Z.**, 2005, The transformation graph G^{xyz} when $xyz = - + +$. *Discrete Mathematics*, 296, 263-270pp.
- Xu, L. and Wu, B.**, Transformation graph G^{-+-} . *Discrete Mathematics*, 308, 5144-5148pp.

ÖZGEÇMİŞ

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İngilizce Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 1999 yılında mezun olan Gökşen Bacak Turan, 2000-2002 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak faaliyet gösteren Denizli Çardak Çok Programlı Lisesi'nde görev yaptı. 2002 Ocak ayında İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Bu süreç boyunca, aynı üniversitede araştırma görevlisi olarak çalıştı. 2005 Ocak ayında Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Bilgisayar Bilimleri Ana Bilim Dalı'nda Doktora eğitimine başladı. Aynı yılın ekim ayında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladığı Yaşar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde, 2006 yılında Öğretim Görevlisi kadrosuna atandı. Eylül 2007 ve Nisan 2008 tarihleri arasında, İsveç Enstitüsü'nden aldığı Araştırma Bursu ile Stockholm Royal Institute of Technology'de misafir araştırmacı olarak akademik çalışmalarına devam etti. Halen Yaşar Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

Yayınları

1. Bacak G., Kırlandıç A., "Rupture Degree of Complete k-Ary Trees", Abstract Book of 1st Istanbul Design Theory And Combinatorics Conference, June 2008.
2. Ufuktepe Ü., Bacak G., "Applying Mathematica and webMathematica to Graph Coloring", Elsevier Editorial System for Future Generation Computer Systems, 2007, Volume 23/5, 716-720pp.
3. Ufuktepe Ü., Bacak G., "Applications of Graph Coloring", Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, 2005, Volume 3482, 522-529pp.
4. Ufuktepe Ü., Bacak G., Beseri T., "Graph Coloring with webMathematica", Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, 2004, Volume 3039, 376-381pp.
5. Ufuktepe Ü., Beseri T., Bacak G., "Graph Theory with webMathematica", Proceedings of the 6th International Mathematica Symposium, Canada, 2004.
6. Bacak G., Beseri T., "Çizge Kuramina Genel Bir Bakis." Matematik Dunyasi Dergisi, Eylül 2002.