



**LİNEER OLMAYAN BERNSTEIN TİP MAKSİMUM-ÇARPIM
OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM**

Şule Yüksel GÜNGÖR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2018

Şule Yüksel GÜNGÖR tarafından hazırlanan “LİNEER OLMAYAN BERNSTEIN TİP MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 24/04/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Şule Yüksel GÜNGÖR

24/04/2018

LİNEER OLMAYAN BERNSTEIN TİP MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

(Doktora Tezi)

Şule Yüksel GÜNGÖR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2018

ÖZET

Yaklaşım teorisinde, Korovkin tip teoremler lineer pozitif yaklaşım operatörleri üzerine kurulur. Bu çalışmada, lineer olmayan (maksimum-çarpım tip) pozitif operatörlerin Chlodowsky tip genelleştirmeleri tanımlanmış ve lineer olmayan operatörlerle verilen yaklaşım derecelerinin, lineer operatörlerle verilenler kadar iyi olabileceği gösterilmiştir. Sırasıyla maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri, maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri ve maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörleri tanımlanmış ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım dereceleri elde edilmiştir. Bununla birlikte, sınırlı, azalmayan, konkav fonksiyonlar gibi bazı fonksiyon sınıfları için daha iyi yaklaşım oranları verilmiştir. Ayrıca bu operatörler için bazı biçim koruma özellikleri incelenmiştir. Son olarak operatörlerin belirli fonksiyonlara yakınsaklık oranı grafikler yardımıyla resmedilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Lineer olmayan operatörler, maksimum-çarpım tip operatörler, yaklaşım derecesi, biçim koruma özellikleri

Sayfa Adedi : 76

Danışman : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION BY NONLINEAR BERNSTEIN TYPE MAXIMUM-PRODUCT
OPERATORS

(Ph. D. Thesis)

Şule Yüksel GÜNGÖR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2018

ABSTRACT

In the approximation theory, Korovkin type theorems are constructed on linear positive approximating operators. In this study, Chlodowsky type generalizations of nonlinear (maximum-product type) positive operators are defined and it is shown that the approximation errors given by nonlinear operators can be as good as given by linear operators. Maximum-product type Bernstein-Chlodowsky operators, maximum-product type generalized Bleimann-Butzer-Hahn operators and maximum-product type generalized Szász operators are defined and their order of approximations by modulus of continuity is obtained respectively. However, for some classes of functions, for example bounded, nondecreasing and concave functions; the better order of approximations are given. Also, some shape preserving properties are investigated for these operators. Finally, the rate of convergence of the operators to certain functions is illustrated with the help of graphics.

Science Code : 20404

Key Words : Nonlinear operators, maximum-product type operators, degree of approximation, shape preserving properties

Page Number : 76

Supervisor : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

İlk olarak, bu tezi hazırlarken problemin belirlenmesinden tezin yazımına kadar her aşamada bilgi birikimi, deneyimleri, sabrı ve motivasyonu ile yanımda olan ve bana rehberlik eden değerli danışman hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e teşekkür ederim.

Ayrıca önemli tavsiyeleriyle beni yönlendiren diğer Tez İzleme Komitesi üyelerim Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ve Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e teşekkürü borç bilirim.

Maple ile ilgili sorularımı yanıtlayarak grafik çizimlerinde yardımcı olan kıymetli hocam Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya, takıldığım adımlarda sabırla çözüm üreten sevgili arkadaşım Çetin Cemal ÖZEKEN'e, değerli çalışma arkadaşlarıma, tüm dostlarıma ve bu uzun yolculukta her zaman yanımda olan değerli dostum Hatice ÇOBAN'a minnettarım.

Bu çalışmayı Yurt İçi Doktora Bursu ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son ve en özel teşekkürümü hayatım boyunca destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili aileme sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Tanımlar	3
2.2. Yardımcı Teoremler	4
3. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ.....	7
3.1. Yardımcı Sonuçlar	8
3.2. Yaklaşım Derecesi	13
3.3. Bazı Fonksiyon Sınıfları İçin Daha İyi Hata Oranları	17
3.4. Biçim Koruma Özellikleri	24
4. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ BLEIMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRLERİ.....	29
4.1. Yardımcı Sonuçlar	29
4.2. Yaklaşım Derecesi	33
4.3. Bazı Fonksiyon Sınıfları İçin Daha İyi Hata Oranları	38
4.4. Biçim Koruma Özellikleri	42
5. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ OPERATÖRLERİ	47

	Sayfa
5.1. Yardımcı Sonuçlar	48
5.2. Yaklaşım Derecesi	51
5.3. Bazı Fonksiyon Sınıfları İçin Daha İyi Hata Oranları	55
5.4. Biçim Koruma Özellikleri	58
6. GRAFİKLER İLE YAKLAŞIM	63
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	69
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	75

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 6.1. $n = 30$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı	63
Şekil 6.2. $n = 50$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı	63
Şekil 6.3. $n = 30$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması.....	64
Şekil 6.4. $n = 50$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması.....	64
Şekil 6.5. $n = 5$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı.....	65
Şekil 6.6. $n = 10$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı	65
Şekil 6.7. $n = 30$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması.....	66
Şekil 6.8. $n = 100$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması	66
Şekil 6.9. $n = 100$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı	67
Şekil 6.10. $n = 200$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı	67
Şekil 6.11. $n = 50$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması.....	68
Şekil 6.12. $n = 100$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}_0^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
I	Reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir alt aralığı
$CB_+(I)$	I dan $\mathbb{R}_0^+$ ya sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$\vee$	Maksimum işlemi
$C_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri
$B_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri
$S_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörleri
$\omega_1(f; \delta)_I$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Korovkin tip yaklaşım teorisinde herhangi bir sürekli fonksiyona düzgün yakınsama problemi operatör dizileri yardımıyla incelenir. Bu problemin incelenmesinde kullanılan operatör dizileri genellikle lineer ve pozitifdir. Klasik yaklaşım teorisinden elde edilen lineer yaklaşım operatörlerinde, reel sayıların lineer uzay yapısındaki cebirsel işlemler olan toplama ve çarpma işlemi kullanılır. Buradaki temel teoremler Weierstrass tip düzgün yaklaşım teoremleridir ve hata oranı genellikle süreklilik modülü yardımı ile verilir.

[2] ve [3]'te ve [21]'de verilen açık problemde (324-326, open problem 5.5.4) şu iki soru sorulmuştur:

- Lineer yapı yaklaşım operatörleri oluşturmamıza izin veren tek yapı mıdır yani kullanabileceğimiz işlemler sadece toplama ve çarpma işlemleri midir?
- Bütün yaklaşım operatörleri lineer olmak zorunda mıdır?

Her iki sorunun yanıtı da olumsuzdur. Bu probleme çözüm olarak lineer operatör dizilerinde toplama işlemi yerine maksimum alma işlemi kullanılarak maksimum-çarpım tip yaklaşım operatörleri tanımlanmıştır. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir.

Yukarıdaki problem önce Shepard operatörleri için incelenmiş ve lineer yapının yanında lineer olmayan yapıların da kullanılabileceği görülmüştür. Ayrıca Shepard operatörleri için Weierstrass tip düzgün yaklaşım teoremi elde edilmiştir [2,3].

Daha sonra yaklaşım teorisinde iyi bilinen Bernstein ve Favard-Szász-Mirakyan operatörlerinin maksimum-çarpım biçimi tanımlanıp süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranları elde edilmiştir [5]; fakat bu çalışmada kullanılan yöntemin, anlaşılması güç olması ve elde edilen hata oranlarındaki sabitlerin net olmaması üzerine daha basit ve sabiti kesin veren bir yöntemle, yine süreklilik modülü yardımıyla, sırasıyla Bernstein, Bleimann-Butzer-Hahn, Favard-Szász-Mirakyan, Meyer-König ve Zeller, Baskakov, truncated Favard-Szász-Mirakyan, truncated Baskakov operatörlerinin maksimum-çarpım tipi tanımlanıp yaklaşım ve bazı biçim koruma özellikleri incelenmiştir [4, 6-11]. Buradaki amaç lineer olmayan maksimum-çarpım tip operatör dizileri ile elde edilen yaklaşım oranlarının bilinen lineer operatör dizilerinin yaklaşım oranlarından daha iyi olabileceğini göstermektir. Elde edilen bu sonuçlar [12]'de ayrıntılı olarak bir araya toplanmıştır.

Bu tezde amaç, yukarıda bahsedilen maksimum-çarpım tip operatörlerden Bernstein, Bleimann-Butzer-Hahn ve Szász operatörlerinin Chlodowsky tip genelleştirmelerini tanımlayarak yaklaşım derecelerine ilişkin sonuçları elde etmektir.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde lineer olmayan maksimum-çarpım tip operatörler için temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri, maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri ve maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörleri tanımlanmış, bu operatör dizileri için süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım oranları elde edilmiş, sürekli fonksiyonların bazı alt sınıflarında yaklaşım oranlarının iyileştirilebileceği gösterilmiş, aynı zamanda biçim koruma özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde bu tezde tanımlanan operatörler ile onların literatürde mevcut lineer karşılıklarının belirli fonksiyonlara yaklaşımları grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde maksimum-çarpım tip operatörlerin özellikleri ve yaklaşım oranı bulmak için kullanılan teoremler verilecektir.

2.1. Tanımlar

Negatif olmayan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde $\vee$ (maksimum) ve $\cdot$ (çarpma) işlemlerini göz önüne alalım. $(\mathbb{R}_0^+, \vee, \cdot)$ bir yarı halka yapısına sahiptir ve bu yapıya bir maksimum-çarpım cebiri denir.

$I \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve

$$CB_+(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : f, I \text{ üzerinde sürekli ve sınırlı}\}$$

olsun. $n \in \mathbb{N}$, $f \in CB_+(I)$, $K_n(\cdot, x_i) \in CB_+(I)$ ve $x_i \in I$ olmak üzere genel olarak bir $L_n : CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$ maksimum-çarpım tip operatör dizisi,

$$L_n(f)(x) = \bigvee_{i=0}^n K_n(x, x_i) \cdot f(x_i) \quad \text{veya} \quad L_n(f)(x) = \bigvee_{i=0}^{\infty} K_n(x, x_i) \cdot f(x_i)$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörler lineer olmayan ve pozitif operatörlerdir.

Ayrıca her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$L_n(\alpha f \vee \beta g)(x) = \alpha L_n(f)(x) \vee \beta L_n(g)(x) \quad (\textit{pseudo-lineerlik})$$

ve her $\lambda \geq 0$ için

$$L_n(\lambda f)(x) = \lambda L_n(f)(x) \quad (\textit{pozitif homojenlik})$$

özelliklerini sağlarlar [5].

2.1.1. Lemma

$I \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık, $f, g \in CB_+(I)$ olsun. $L_n : CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$

lineer olmayan operatör dizisi için

(i) $f \leq g$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f) \leq L_n(g)$ (*monotonluk*)

(ii) $L_n(f + g) \leq L_n(f) + L_n(g)$ (*alt lineerlik*)

özellikleri sağlansın. Bu durumda her $f, g \in CB_+(I)$ ve $x \in I$ için

$$|L_n(f)(x) - L_n(g)(x)| \leq L_n(|f - g|)(x) \text{ dir [5].}$$

İspat

$f, g \in CB_+(I)$ olsun. $f = f - g + g \leq |f - g| + g$ yazılabilir. Monotonluk ve alt lineerlik özellikleri kullanılarak $L_n(f)(x) \leq L_n(|f - g|)(x) + L_n(g)(x)$ eşitsizliği ve buradan $L_n(f)(x) - L_n(g)(x) \leq L_n(|f - g|)(x)$ ifadesi elde edilir. Benzer şekilde $g = g - f + f \leq |f - g| + f$ olup $L_n(g)(x) - L_n(f)(x) \leq L_n(|f - g|)(x)$ dir. Bu iki ifadeden istenen $|L_n(f)(x) - L_n(g)(x)| \leq L_n(|f - g|)(x)$ eşitsizliği bulunmuş olur.

Not

Lemma 2.1.1 lineer pozitif operatörler için bilinen eşitsizliğin genelleştirmesidir; çünkü pozitiflik ve lineerlik özellikleri, pozitiflik, alt lineerlik, pozitif homojenlik ve monotonluk özelliklerini gerektirir fakat bu ifadenin karşıtı genelde doğru değildir. Örneğin maksimum-çarpım operatörleri için ters gerektirme sağlanmaz [22].

2.2. Yardımcı Teoremler

Aşağıda verilecek lemma ve sonuç operatörlerin yaklaşım oranını bulmada kullanılacaktır:

2.2.1. Lemma

$L_n : CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$ monotonluk, alt lineerlik ve pozitif homojenlik özelliklerini sağlayan bir operatör dizisi olsun. Bu durumda her $f \in CB_+(I)$ ve $x \in I$ için

$$|L_n(f)(x) - f(x)| \leq \left[\frac{1}{\delta} L_n(\varphi_x)(x) + L_n(e_0)(x) \right] \omega_1(f; \delta)_I + f(x) \cdot |L_n(e_0)(x) - 1|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta > 0$, her $t \in I$, $x \in I$ için $e_0(t) = 1$, $\varphi_x(t) = |t - x|$ ve $\omega_1(f; \delta)_I = \sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in I, |x - y| \leq \delta\}$ bilinen süreklilik modülüdür [5].

İspat

İspat tıpkı lineer pozitif operatörlerde olduğu gibidir.

$$L_n(f)(x) - f(x) = [L_n(f)(x) - f(x) \cdot L_n(e_0)(x)] + f(x) [L_n(e_0)(x) - 1]$$

eşitliğinde Lemma 2.1.1 ve pozitif homojenlik özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |L_n(f)(x) - f(x)| &\leq |L_n(f(x))(x) - L_n(f(t))(x)| + |f(x)| \cdot |L_n(e_0)(x) - 1| \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x)|)(x) + |f(x)| \cdot |L_n(e_0)(x) - 1| \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer yandan, her $t, x \in I$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega_1(f; |t - x|)_I \leq \left[\frac{1}{\delta} |t - x| + 1 \right] \omega_1(f; \delta)_I$$

eşitsizliğinin yukarıda kullanılmasıyla istenen sonuç elde edilir.

2.2.2. Sonuç

Lemma 2.2.1'deki koşullara ek olarak her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I$ için $L_n(e_0) = e_0$ olsun. Bu durumda

$$|L_n(f)(x) - f(x)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta} L_n(\varphi_x)(x) \right] \omega_1(f; \delta)_I$$

olur [5].



3. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ

Bernstein polinomlarının bir genelleştirmesi olan Bernstein-Chlodowsky polinomları $0 \leq x \leq b_n$ ve (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{kb_n}{n}\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri tek değişkenli ve iki değişkenli sürekli fonksiyonlar için incelenmiştir [1, 17, 18, 20, 28, 32, 37]. Ayrıca, Bernstein-Chlodowsky polinomlarının q -genellemesi [16]'da, bu polinomlar için Voronoskaja-tip teoremler [15] ve [29]'da ve Bézier varyantları [34]'te çalışılmıştır.

Bu bölümde [4], [5] ve [19]'da maksimum-çarpım tip Bernstein operatörleri için sonlu aralıkta elde edilen yaklaşım oranı, sınırsız bir aralıkta tanımlı maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri için elde edilecek ve bazı biçim koruma özellikleri verilecektir.

Maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörlerini, $f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon, $0 \leq x \leq b_n$ ve (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^n h_{n,k}(x) f\left(\frac{kb_n}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^n h_{n,k}(x)} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlıyoruz. Burada $h_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$ dir. $C_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri, lineer Bernstein-Chlodowsky operatörlerinde, toplama işlemi yerine maksimum alma işlemi kullanılarak elde edilmiştir. Sürekli bir $f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $C_n^{(M)}(f)(x)$ pozitif ve $[0, b_n]$ aralığı üzerinde sürekli'dir.

Bu bölümde yapılan çalışmalar [26] referanslı makalede yayımlanmıştır.

3.1. Yardımcı Sonuçlar

Bu kısımda maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri için süreklilik modülü yardımıyla bir yaklaşım oranı elde edilecektir. Bunun için aşağıda verilen notasyon ve lemmalar kullanılacaktır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n^{(M)}(f)(0) - f(0) = 0$ olduğundan bu bölüm boyunca $0 < x \leq b_n$ olarak göz önüne alınacaktır.

Her bir $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{n} - x \right|}{h_{n,j}(x)}, \quad m_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x)}{h_{n,j}(x)} \quad (3.2)$$

olsun. Eğer $k \geq j + 1$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x) \left(\frac{kb_n}{n} - x \right)}{h_{n,j}(x)} \quad (3.3)$$

ve eğer $k \leq j - 1$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x) \left(x - \frac{kb_n}{n} \right)}{h_{n,j}(x)} \quad (3.4)$$

dir.

Ayrıca her bir $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \geq j + 2$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için

$$\bar{M}_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x) \left(\frac{kb_n}{n+1} - x \right)}{h_{n,j}(x)} \quad (3.5)$$

ve her bir $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \leq j - 2$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için

$$\hat{M}_{k,n,j}(x) = \frac{h_{n,k}(x) \left(x - \frac{kb_n}{n+1} \right)}{h_{n,j}(x)} \quad (3.6)$$

olsun.

3.1.1. Lemma

$x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olmak üzere

(i) Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \geq j + 2$ için

$$\bar{M}_{k,n,j}(x) \leq M_{k,n,j}(x) \leq 3\bar{M}_{k,n,j}(x) \quad (3.7)$$

(ii) Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \leq j - 2$ için

$$M_{k,n,j}(x) \leq \hat{M}_{k,n,j}(x) \leq 6M_{k,n,j}(x) \quad (3.8)$$

dir.

İspat

(i) Eş. 3.3 ve Eş. 3.5'ten $\bar{M}_{k,n,j}(x) \leq M_{k,n,j}(x)$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{M_{k,n,j}(x)}{\bar{M}_{k,n,j}(x)} &= \frac{\frac{kb_n}{n} - x}{\frac{kb_n}{n+1} - x} \leq \frac{\frac{kb_n}{n} - \frac{jb_n}{n+1}}{\frac{kb_n}{n+1} - \frac{(j+1)b_n}{n+1}} \\ &= \frac{(kn + k - nj)b_n}{(k - j - 1)nb_n} = \frac{k - j}{k - j - 1} + \frac{k}{n(k - j - 1)} \leq 3 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden (i) elde edilir.

(ii) Benzer şekilde Eş. 3.4 ve Eş. 3.6'dan $M_{k,n,j}(x) \leq \hat{M}_{k,n,j}(x)$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_{k,n,j}(x)}{M_{k,n,j}(x)} &= \frac{x - \frac{kb_n}{n+1}}{x - \frac{kb_n}{n}} \leq \frac{\frac{(j+1)b_n}{n+1} - \frac{kb_n}{n+1}}{\frac{jb_n}{n+1} - \frac{kb_n}{n}} \\ &= \frac{(j+1-k)nb_n}{(nj - nk - k)b_n} \leq \frac{(n+1)(j+1-k)}{nj - nk - n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{j+1-k}{j-k-1} \\ &\leq 2 \cdot \frac{j+1-k}{j-k-1} = 2 \left(1 + \frac{2}{j-k-1} \right) \leq 6 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden (ii) elde edilir.

3.1.2. Lemma

Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için $m_{k,n,j}(x) \leq 1$ dir.

İspat

İki durum söz konusudur: $k \geq j$ ve $k \leq j$.

$k \geq j$ olsun. $g(x) = \frac{b_n - x}{x}$ fonksiyonu $\left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ üzerinde artmayan olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{b_n - x}{x} \geq \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{(n-j)b_n}{(j+1)b_n} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{n-j}{j+1} \geq 1$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j+1,n,j}(x) \geq m_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{n,n,j}(x)$$

elde edilir. Şimdi $k \leq j$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{x}{b_n - x} \geq \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{\frac{jb_n}{n+1}}{b_n - \frac{jb_n}{n+1}} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{j}{n+1-j} \geq 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j-1,n,j}(x) \geq m_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{0,n,j}(x)$$

dir. $m_{j,n,j}(x) = 1$ olduğundan istenen elde edilir.

3.1.3. Lemma

$x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $k - \sqrt{k+1} \geq j$ olacak biçimde $k \in \{j+2, j+3, \dots, n-1\}$ ise $\bar{M}_{k,n,j}(x) \geq \bar{M}_{k+1,n,j}(x)$ dir.

(ii) Eğer $k + \sqrt{k} \leq j$ olacak biçimde $k \in \{1, 2, \dots, j-2\}$ ise $\hat{M}_{k,n,j}(x) \geq \hat{M}_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

İspatın ilk kısmı için

$$\frac{\bar{M}_{k,n,j}(x)}{\bar{M}_{k+1,n,j}(x)} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{b_n - x}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{n+1} - x}{\frac{(k+1)b_n}{n+1} - x}$$

olup $\mu_{n,k}(x) = \frac{b_n - x}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{n+1} - x}{\frac{(k+1)b_n}{n+1} - x}$ fonksiyonu artmayan olduğundan her $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için $\mu_{n,k}(x) \geq \mu_{n,k}\left(\frac{(j+1)b_n}{n+1}\right) = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{k-j-1}{k-j}$ dir. Bu durumda hipotezdeki $k - \sqrt{k+1} \geq j$ koşulu $(k+1)(k-j-1) \geq (j+1)(k-j)$ olmasını gerektirir ki, buradan

$$\frac{\bar{M}_{k,n,j}(x)}{\bar{M}_{k+1,n,j}(x)} \geq \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{k-j-1}{k-j} \geq 1$$

elde edilir.

İspatın ikinci kısmı için ise

$$\frac{\hat{M}_{k,n,j}(x)}{\hat{M}_{k-1,n,j}(x)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{x}{b_n - x} \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{n+1}}{x - \frac{(k-1)b_n}{n+1}}$$

olup $\eta_{n,k}(x) = \frac{x}{b_n - x} \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{n+1}}{x - \frac{(k-1)b_n}{n+1}}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan, her $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için $\eta_{n,k}(x) \geq \eta_{n,k}\left(\frac{jb_n}{n+1}\right) = \frac{j}{n+1-j} \cdot \frac{j-k}{j-k+1}$ olur. Hipotezdeki $k + \sqrt{k} \leq j$ koşulu $j(j-k) \geq k(j-k+1)$ olmasını gerektirdiğinden

$$\frac{\hat{M}_{k,n,j}(x)}{\hat{M}_{k-1,n,j}(x)} \geq \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{j}{n+1-j} \cdot \frac{j-k}{j-k+1} \geq 1$$

olur ki, bu ispatı tamamlar.

3.1.4. Lemma

$h_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$ olmak üzere, her $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ ve $j = 0, 1, \dots, n$

için

$$\bigvee_{k=0}^n h_{n,k}(x) = h_{n,j}(x)$$

dir.

İspat

Sabit bir $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k < k+1 \leq n$ olmak üzere, $0 \leq h_{n,k+1}(x) \leq h_{n,k}(x)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $x \in [0, b_n (k+1) / (n+1)]$ olmasıdır.

$$0 \leq \binom{n}{k+1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \leq \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$0 \leq \frac{x}{b_n} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right] \leq \binom{n}{k}$$

elde edilir.

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \text{ olduğundan } 0 \leq x \leq \frac{(k+1)b_n}{n+1} \text{ bulunur.}$$

Bu eşitsizlikte $k = 0, 1, \dots, n$ alırsak,

$$h_{n,1}(x) \leq h_{n,0}(x) \iff x \in [0, b_n / (n+1)],$$

$$h_{n,2}(x) \leq h_{n,1}(x) \iff x \in [0, 2b_n / (n+1)],$$

$$h_{n,3}(x) \leq h_{n,2}(x) \iff x \in [0, 3b_n / (n+1)],$$

yani,

$$h_{n,k+1}(x) \leq h_{n,k}(x) \iff x \in [0, b_n (k+1) / (n+1)]$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} h_{n,n-2}(x) &\leq h_{n,n-3}(x) \iff x \in [0, b_n(n-2)/(n+1)], \\ h_{n,n-1}(x) &\leq h_{n,n-2}(x) \iff x \in [0, b_n(n-1)/(n+1)], \\ h_{n,n}(x) &\leq h_{n,n-1}(x) \iff x \in [0, b_n n/(n+1)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden,

$$\begin{aligned} x &\in [0, b_n/(n+1)] \text{ ise } k = 0, 1, \dots, n \text{ için } h_{n,k}(x) \leq h_{n,0}(x) \\ x &\in [b_n/(n+1), 2b_n/(n+1)] \text{ ise } k = 0, 1, \dots, n \text{ için } h_{n,k}(x) \leq h_{n,1}(x) \\ x &\in [2b_n/(n+1), 3b_n/(n+1)] \text{ ise } k = 0, 1, \dots, n \text{ için } h_{n,k}(x) \leq h_{n,2}(x) \end{aligned}$$

yani genel olarak,

$$x \in [b_n n/(n+1), b_n] \text{ ise } k = 0, 1, \dots, n \text{ için } h_{n,k}(x) \leq h_{n,n}(x)$$

bulunur.

3.2. Yaklaşım Derecesi

3.2.1. Teorem

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli bir fonksiyon ve $C_n^{(M)}(f)(x)$, Eş. 3.1'de tanımlanan maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri olmak üzere,

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq 12\omega_1\left(f; \frac{b_n}{\sqrt{n+1}}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, b_n]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\omega_1(f; \delta) = \sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, b_n], |x - y| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür.

İspat

Maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri Sonuç 2.2.2'nin hipotezlerini sağladığı için $\varphi_x(t) = |t - x|$ olmak üzere

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} C_n^{(M)}(\varphi_x)(x)\right) \omega_1(f; \delta_n) \quad (3.9)$$

dir. O halde

$$E_n(x) := C_n^{(M)}(\varphi_x)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^n h_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{n} - x \right|}{\bigvee_{k=0}^n h_{n,k}(x)}$$

teriminin hesaplanması yeterli olacaktır.

$x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ ve keyfi $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sabit olsun. Lemma 3.1.4'ten

$$E_n(x) = \bigvee_{k=0}^n M_{k,n,j}(x)$$

dir. $x \in \left[0, \frac{b_n}{n+1}\right]$ olmak üzere $j = 0$ için $E_n(x) \leq \frac{b_n}{n}$ dir. O halde $j \in \{1, \dots, n\}$ olarak göz önüne alınabilir. Sabit bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $M_{k,n,j}(x)$ için bir üst tahmin bulunacaktır. $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ ve $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ olsun.

İspat üç kısma ayrılmıştır: 1) $k \in \{j-1, j, j+1\}$, 2) $k \geq j+2$ ve 3) $k \leq j-2$.

1. Durum

Eğer $k = j$ ise $M_{j,n,j}(x) = \left| \frac{jb_n}{n} - x \right|$ dir. $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olduğundan $M_{j,n,j}(x) \leq \frac{b_n}{n+1}$ dir.

Eğer $k = j+1$ ise $M_{j+1,n,j}(x) = m_{j+1,n,j}(x) \left(\frac{(j+1)b_n}{n} - x \right)$ dir. Lemma 3.1.2'den $m_{j+1,n,j}(x) \leq 1$ olduğundan

$$M_{j+1,n,j}(x) \leq \frac{(j+1)b_n}{n} - x \leq \frac{(j+1)b_n}{n} - \frac{jb_n}{n+1} = \frac{(j+n+1)b_n}{n(n+1)} \leq \frac{3b_n}{(n+1)} \quad \text{dir.}$$

Eğer $k = j - 1$ ise $M_{j-1,n,j}(x) = m_{j-1,n,j}(x) \left(x - \frac{(j-1)b_n}{n} \right)$ dir. Yine Lemma 3.1.2'den $m_{j-1,n,j}(x) \leq 1$ olduğundan

$$M_{j-1,n,j}(x) \leq x - \frac{(j-1)b_n}{n} \leq \frac{(j+1)b_n}{n+1} - \frac{(j-1)b_n}{n} = \frac{(2n - (j-1))b_n}{n(n+1)} \leq \frac{2b_n}{(n+1)}$$

dir.

2. Durum

Alt durum a) $k - \sqrt{k+1} < j$ olsun.

$$\begin{aligned} \bar{M}_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(\frac{kb_n}{n+1} - x \right) \leq \frac{kb_n}{n+1} - x \leq \frac{kb_n}{n+1} - \frac{jb_n}{n+1} \\ &\leq \frac{kb_n}{n+1} - \frac{(k - \sqrt{k+1})b_n}{n+1} = \frac{b_n\sqrt{k+1}}{n+1} \leq \frac{b_n}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alt durum b) $k - \sqrt{k+1} \geq j$ olsun. $g(x) = x - \sqrt{x+1}$ fonksiyonu $[0, b_n]$ üzerinde azalmayan olduğundan $\bar{k} - \sqrt{\bar{k}+1} < j$ olacak biçimde bir $\bar{k} \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ maksimum değeri vardır. Bu durumda $k_1 = \bar{k} + 1$ için $k_1 - \sqrt{k_1+1} \geq j$ ve

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\bar{k}+1,n,j}(x) &= m_{\bar{k}+1,n,j}(x) \left(\frac{(\bar{k}+1)b_n}{n+1} - x \right) \leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{n+1} - x \\ &\leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{n+1} - \frac{jb_n}{n+1} \leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{n+1} - \frac{(\bar{k} - \sqrt{\bar{k}+1})b_n}{n+1} \\ &= \frac{(\sqrt{\bar{k}+1} + 1)b_n}{n+1} \leq \frac{2b_n}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca g fonksiyonu azalmayan olduğundan $k_1 \geq j + 2$ dir ve $g(j + 1) < j$ dir. Lemma 3.1.3, (i)'den $\bar{M}_{\bar{k}+1,n,j}(x) \geq \bar{M}_{\bar{k}+2,n,j}(x) \geq \dots \geq \bar{M}_{n,n,j}(x)$ dir. Böylece her $k \in \{\bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, n\}$ için $\bar{M}_{k,n,j}(x) \leq \frac{2b_n}{\sqrt{n+1}}$ olur. O halde bu iki alt durumdan ve Lemma 3.1.1, (i)'den $M_{k,n,j}(x) \leq \frac{6b_n}{\sqrt{n+1}}$ elde edilir.

3. Durum

Alt durum a) $k + \sqrt{k} \geq j$ olsun.

$$\begin{aligned} \hat{M}_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(x - \frac{kb_n}{n+1} \right) \\ &\leq \frac{(j+1)b_n}{n+1} - \frac{kb_n}{n+1} \leq \frac{(k + \sqrt{k} + 1)b_n}{n+1} - \frac{kb_n}{n+1} \\ &= \frac{(\sqrt{k} + 1)b_n}{n+1} \leq \frac{(\sqrt{n} + 1)b_n}{n+1} \leq \frac{2b_n}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

olur.

Alt durum b) $k + \sqrt{k} < j$ olsun.

$\tilde{k} \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}} \geq j$ olacak biçimdeki minimum değer olsun. Bu durumda $k_2 = \tilde{k} - 1$, $k_2 + \sqrt{k_2} < j$ eşitsizliğin sağlar ve

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\tilde{k}-1,n,j}(x) &= m_{\tilde{k}-1,n,j}(x) \left(x - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{n+1} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{n+1} - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{n+1} \\ &\leq \frac{(\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}} + 1)b_n}{n+1} - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{n+1} = \frac{(\sqrt{\tilde{k}} + 2)b_n}{n+1} \leq \frac{3b_n}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca bu durumda $j \geq 2$ olduğundan, $k_2 \leq j - 2$ dir. Lemma 3.1.3, (ii)'den $\hat{M}_{\tilde{k}-1,n,j}(x) \geq \hat{M}_{\tilde{k}-2,n,j}(x) \geq \dots \geq \hat{M}_{0,n,j}(x)$ dir. Böylece her $k \leq j - 2$ ve her $x \in \left[\frac{j b_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için $\hat{M}_{k,n,j}(x) \leq \frac{3b_n}{\sqrt{n+1}}$ elde edilir.

O halde bu iki alt durumdan ve Lemma 3.1.1, (ii)'den $M_{k,n,j}(x) \leq \frac{3b_n}{\sqrt{n+1}}$ dir.

Yukarıda elde edilen tüm değerlerden

$$M_{k,n,j}(x) \leq \frac{6b_n}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

olur ki, bu da

$$E_n(x) \leq \frac{6b_n}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall x \in [0, b_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

eşitsizliğini verir. Eş. 3.9'da $\delta_n = \frac{6b_n}{\sqrt{n+1}}$ alınarak

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq 12\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, b_n]$$

bulunur.

3.3. Bazı Fonksiyon Sınıfları İçin Daha İyi Hata Oranları

Bazı fonksiyon sınıfları için daha iyi bir yaklaşım oranı elde etmek amacıyla aşağıdaki tanım ve lemmalar kullanılacaktır.

Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{b_n j}{n+1}, \frac{b_n(j+1)}{n+1} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_{k,n,j}(x) = m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{b_n k}{n}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \left(\frac{x}{b_n - x}\right)^{k-j} f\left(\frac{b_n k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Böylece, her $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$

yazılabilir.

3.3.1. Lemma

$f : [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$$

ise

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n} \right)$$

sağlanır.

İspat

İki durum söz konusudur:

(i) $C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x)$ olacak biçimde sabit $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olsun.

$-\frac{b_n}{n+1} \leq x - \frac{jb_n}{n} \leq \frac{b_n}{n+1}$ ve $f_{j,n,j}(x) = f\left(\frac{jb_n}{n}\right)$ olduğu için

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| = \left| f\left(\frac{jb_n}{n}\right) - f(x) \right| \leq \omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n+1} \right)$$

bulunur.

(ii) $C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+1,n,j}(x)$ olacak biçimde sabit $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olsun.

İki alt durumda inceleme yapılabilir:

Alt durum a) Eğer $C_n^{(M)}(f)(x) \leq f(x)$ ise, $f_{j,n,j}(x) \leq f_{j+1,n,j}(x) \leq f(x)$ olup

$$\begin{aligned} |C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= |f_{j+1,n,j}(x) - f(x)| = f(x) - f_{j+1,n,j}(x) \\ &\leq f(x) - f_{j,n,j}(x) = f(x) - f\left(\frac{jb_n}{n}\right) \\ &\leq \omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Alt durum b) Eğer $C_n^{(M)}(f)(x) > f(x)$ ise,

$$\begin{aligned} |C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= f_{j+1,n,j}(x) - f(x) = m_{j+1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(j+1)b_n}{n}\right) - f(x) \\ &\leq f\left(\frac{(j+1)b_n}{n}\right) - f(x) \end{aligned}$$

olur. $0 \leq \frac{(j+1)b_n}{n} - x \leq \frac{b_n(j+1)}{n} - \frac{jb_n}{n+1} = \frac{jb_n}{n(n+1)} + \frac{b_n}{n} < \frac{2b_n}{n}$ olduğundan $f\left(\frac{(j+1)b_n}{n}\right) - f(x) \leq 2\omega_1\left(f; \frac{b_n}{n}\right)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3.3.2. Lemma

$f : [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için,

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j-1,n,j}(x)\}, \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right] \text{ ise}$$

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f; \frac{b_n}{n}\right)$$

sağlanır.

İspat

İki durum söz konusudur:

(i) $C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x)$ ise, Lemma 3.3.1'deki yol izlenerek

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f; \frac{b_n}{n+1}\right)$$

elde edilir.

(ii) $C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j-1,n,j}(x)$ olacak biçimde sabit $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ olsun.

Alt durum a) $C_n^{(M)}(f)(x) \leq f(x)$ ise, yine Lemma 3.3.1'deki yol izlenerek

$$C_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \leq \omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n+1} \right)$$

elde edilir.

Alt durum b) $C_n^{(M)}(f)(x) > f(x)$ ise,

$$\begin{aligned} |C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= f_{j-1,n,j}(x) - f(x) = m_{j-1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(j-1)b_n}{n}\right) - f(x) \\ &\leq f\left(\frac{(j-1)b_n}{n}\right) - f(x) \end{aligned}$$

olur.

$$0 \leq x - \frac{(j-1)b_n}{n} \leq \frac{(j+1)b_n}{n+1} - \frac{(j-1)b_n}{n} = \frac{-jb_n}{n(n+1)} + \frac{b_n}{n+1} < \frac{2b_n}{n} \text{ olduğundan } f\left(\frac{(j-1)b_n}{n}\right) - f(x) \leq 2\omega_1\left(f; \frac{b_n}{n}\right) \text{ olur ki bu da ispatı tamamlar.}$$

3.3.3. Lemma

$f : [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için,

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j-1,n,j}(x), f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$$

ise

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n} \right)$$

sağlanır.

İspat

$$C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x) \text{ veya } C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+1,n,j}(x) \text{ olacak biçimde sabit } x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right] \text{ olsun.}$$

Bu ise $C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}$ olduğunu gösterir ki Lemma 3.3.1'den

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n}\right)$$

elde edilir. $C_n^{(M)}(f)(x) = f_{j-1,n,j}(x)$ ise $C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j-1,n,j}(x)\}$ dir ve Lemma 3.3.2'den

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n}\right)$$

elde edilir.

3.3.4. Lemma

$f : [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ konkav fonksiyon olsun. Aşağıdaki iki özellik sağlanır:

(i) $g : (0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır.

(ii) $h : [0, b_n) \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = \frac{f(x)}{b_n - x}$ fonksiyonu azalmayandır.

İspat

(i) $x, y \in (0, b_n]$ için $x \leq y$ olsun. f konkav olduğundan

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y + \frac{y-x}{y} \cdot 0\right) \geq \frac{x}{y} f(y) + \frac{y-x}{y} f(0) \geq \frac{x}{y} f(y),$$

olur ki bu da $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$ olmasını gerektirir.

(ii) $x, y \in [0, b_n)$ için $x \geq y$ olsun. f konkav olduğundan

$$f(x) = f\left(\frac{b_n - x}{b_n - y} \cdot y + \frac{x - y}{b_n - y} \cdot b_n\right) \geq \frac{b_n - x}{b_n - y} f(y) + \frac{x - y}{b_n - y} f(b_n) \geq \frac{b_n - x}{b_n - y} f(y)$$

olup $\frac{f(x)}{b_n - x} \geq \frac{f(y)}{b_n - y}$ eşitsizliği elde edilir.

3.3.5. Sonuç

$f : [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ konkav fonksiyon olsun. Her $x \in [0, b_n]$ için

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f; \frac{b_n}{n} \right)$$

dir.

İspat

$x \in [0, b_n]$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ olsun. $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $k \geq j$ ise,

$$\begin{aligned} f_{k+1,n,j}(x) &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{j}} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k+1-j} f \left(\frac{(k+1)b_n}{n} \right) \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \frac{n-k}{k+1} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k-j} \frac{x}{b_n - x} f \left(\frac{(k+1)b_n}{n} \right) \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.3.4, (i)'den $\frac{f\left(\frac{(k+1)b_n}{n}\right)}{\frac{(k+1)b_n}{n}} \leq \frac{f\left(\frac{kb_n}{n}\right)}{\frac{kb_n}{n}}$ olduğundan $f\left(\frac{(k+1)b_n}{n}\right) \leq \left(\frac{k+1}{k}\right) f\left(\frac{kb_n}{n}\right)$ dir ve $\frac{x}{b_n - x} \leq \frac{j+1}{n-j}$ olup

$$\begin{aligned} f_{k+1,n,j}(x) &\leq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \frac{n-k}{k+1} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k-j} \frac{j+1}{n-j} \frac{k+1}{k} f \left(\frac{kb_n}{n} \right) \\ &= f_{k,n,j}(x) \frac{j+1}{k} \frac{n-k}{n-j} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikte $k \geq j+1$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ olur ki bu da

$$f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x) \quad (3.10)$$

eşitsizliğini verir.

$k \leq j$ ise,

$$\begin{aligned} f_{k-1,n,j}(x) &= \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{j}} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k-1-j} f\left(\frac{(k-1)b_n}{n}\right) \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \frac{k}{n-k+1} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k-j} \left(\frac{b_n - x}{x} \right) f\left(\frac{b_n(k-1)}{n}\right) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Lemma 3.3.4, (ii)'den $\frac{f\left(\frac{kb_n}{n}\right)}{b_n - \frac{kb_n}{n}} \geq \frac{f\left(\frac{(k-1)b_n}{n}\right)}{b_n - \frac{(k-1)b_n}{n}}$ olduğundan $f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \geq \left(\frac{n-k}{n-k+1}\right) f\left(\frac{(k-1)b_n}{n}\right)$ dir ve $\frac{b_n - x}{x} \leq \frac{n+1-j}{j}$ olup

$$\begin{aligned} f_{k-1,n,j}(x) &\leq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \frac{k}{n-k+1} \left(\frac{x}{b_n - x} \right)^{k-j} \frac{n+1-j}{j} \frac{n-k+1}{n-k} f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \\ &= f_{k,n,j}(x) \frac{k}{j} \frac{n+1-j}{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \leq j-1$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ dir. Böylece

$$f_{j-1,n,j}(x) \geq f_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{0,n,j}(x) \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.10 ve Eş. 3.11'den

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j-1,n,j}(x), f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}$$

ve Lemma 3.3.3'ten

$$|C_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f; \frac{b_n}{n}\right)$$

bulunur ki bu da istenen sonucu verir.

Not

Sonuç 3.3.5'ten, konkav fonksiyonlar için, maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin hata oranı $\omega_1\left(f; \frac{b_n}{n}\right)$, lineer Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin hata oranı $\omega_1\left(f; \frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)$ 'den daha iyidir.

3.4. Biçim Koruma Özellikleri

Bu bölümde maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin monotonluk ve quasikonvekslik özelliklerini koruduğu gösterilecektir.

$f_{k,n,j} : \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_{k,n,j}(x) = m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{kb_n}{n}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{j}} \left(\frac{x}{b_n - x}\right)^{k-j} f\left(\frac{kb_n}{n}\right), k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

olsun. Her $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için Eş. 3.1'den,

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x) \text{ yazılabilir.}$$

3.4.1. Lemma

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

Lemma 3.1.2'nin ispatındaki ikinci durumdan, $k \leq j$ için $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k-1,n,j}(x)$ olduğu biliniyor. f azalmayan olduğundan $f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \geq f\left(\frac{b_n(k-1)}{n}\right)$ dir. Buradan

$$m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \geq m_{k-1,n,j}(x) f\left(\frac{(k-1)b_n}{n}\right)$$

olur ki, bu da $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ eşitsizliğini verir.

3.4.2. Sonuç

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ artmayan bir fonksiyon olmak üzere her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $k \geq j$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1} \right]$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ dir.

İspat

Lemma 3.1.2'nin ispatındaki birinci durumdan ve Eş. 3.2'den, $k \geq j$ için $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k+1,n,j}(x)$ olduğu biliniyor. f artmayan olduğundan $f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \geq f\left(\frac{(k+1)b_n}{n}\right)$ dir. Buradan

$$m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \geq m_{k+1,n,j}(x) f\left(\frac{(k+1)b_n}{n}\right)$$

olur ki, bu da $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ eşitsizliğini verir.

3.4.3. Teorem

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan bir fonksiyon ise, $C_n^{(M)}(f)(x)$ de azalmayandır.

İspat

$C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde sürekli olduğundan, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $\left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ alt aralıklarında $C_n^{(M)}(f)(x)$ 'in azalmayan olduğunu göstermek yeterlidir.

$j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ olsun. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan, Lemma 3.4.1'den

$$f_{j,n,j}(x) \geq f_{j-1,n,j}(x) \geq f_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{0,n,j}(x)$$

olur.

Buradan her $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^n f_{k,n,j}(x)$$

yazılabilir. $k \geq j$ için, $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonu azalmayan fonksiyondur ve $C_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayan fonksiyonların maksimumu olarak yazılabildiği için, $C_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayandır.

3.4.4. Sonuç

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ artmayan bir fonksiyon ise, $C_n^{(M)}(f)(x)$ de artmayandır.

İspat

$C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde sürekli olduğundan, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $\left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ alt aralıklarında $C_n^{(M)}(f)(x)$ 'in artmayan olduğunu göstermek yeterlidir.

$j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ olsun. f artmayan bir fonksiyon olduğundan, Sonuç 3.4.2'den

$$f_{j,n,j}(x) \geq f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x)$$

olur. Buradan her $x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$ için

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^j f_{k,n,j}(x)$$

yazılabilir. $k \leq j$ için, $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonu artmayan fonksiyondur ve $C_n^{(M)}(f)(x)$ artmayan fonksiyonların maksimumu olarak yazılabildiği için, $C_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır.

3.4.5. Tanım

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b_n]$, $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $[0, b_n]$ üzerinde quasikonveks fonksiyon denir [21].

Not

f sürekli fonksiyonunun $[0, b_n]$ üzerinde quasikonveks olması demek, bir $c \in [0, b_n]$ noktası için f fonksiyonunun $[0, c]$ aralığında artmayan ve $[c, b_n]$ aralığında azalmayan olması demektir. Quasikonveks fonksiyonlar sınıfı, artmayan fonksiyonlar sınıfını,

azalmayan fonksiyonlar sınıfını ve konveks fonksiyonlar sınıfını içerir. [33].

3.4.6. Sonuç

$f : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli ve quasikonveks bir fonksiyon ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde quasikonvektir.

İspat

f fonksiyonu $[0, b_n]$ üzerinde artmayan (ya da azalmayan) bir fonksiyonsa (yani quasikonveks fonksiyon için bulunanc noktası $c = b_n$ (ya da $c = 0$) ise Sonuç 3.4.2'den (ya da Teorem 3.4.3'ten) her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde artmayandır (ya da azalmayandır).

Kabul edelim ki bir $c \in (0, b_n)$ noktası için f fonksiyonu $[0, c]$ aralığında artmayan ve $[c, b_n]$ aralığında azalmayan olsun. Her $x \in [0, c]$ için $F(x) = f(x)$; her $x \in [c, b_n]$ için $F(x) = f(c)$ ve her $x \in [0, c]$ için $G(x) = f(c)$; her $x \in [c, b_n]$ için $G(x) = f(x)$ olacak biçimde $F, G : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

F fonksiyonu $[0, b_n]$ üzerinde artmayan ve sürekli bir fonksiyon ve G fonksiyonu $[0, b_n]$ üzerinde azalmayan ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca her $x \in [0, b_n]$ için $f(x) = \max \{F(x), G(x)\}$ dir.

Bunun yanı sıra $C_n^{(M)}(f)(x)$ operatörünün pseudo-lineerlik özelliğinden her $x \in [0, b_n]$ için

$$C_n^{(M)}(f)(x) = \max \{C_n^{(M)}(F)(x), C_n^{(M)}(G)(x)\}$$

yazılabilir. Böylece Sonuç 3.4.4 ve Teorem 3.4.3'ten, $C_n^{(M)}(F)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde artmayan ve süreklidir ve $C_n^{(M)}(G)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde azalmayan ve süreklidir.

Burada iki durum söz konusudur: 1) $C_n^{(M)}(F)(x)$ ve $C_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini kesmezler. 2) $C_n^{(M)}(F)(x)$ ve $C_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini keserler.

1) Her $x \in [0, b_n]$ için $\max \{C_n^{(M)}(F)(x), C_n^{(M)}(G)(x)\} = C_n^{(M)}(F)(x)$ veya her $x \in [0, b_n]$ için $\max \{C_n^{(M)}(F)(x), C_n^{(M)}(G)(x)\} = C_n^{(M)}(G)(x)$ dir. Quasikonveks fonksiyonlar sınıfı, artmayan fonksiyonlar sınıfını ve azalmayan fonksiyonlar sınıfını

içerdiğinden $C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ üzerinde quasikonvektir.

2) $C_n^{(M)}(F)(x)$ ve $C_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini keserse, bir $c' \in [0, b_n]$ noktası için, $C_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, c']$ aralığında artmayan ve $[c', b_n]$ aralığında azalmayan olacaktır ki bu da $C_n^{(M)}(f)(x)$ 'in $[0, b_n]$ üzerinde quasikonveks olduğunu gösterir.



4. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ BLEIMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRLERİ

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $0 \leq x < \infty$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere lineer Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri

$$L_n(f)(x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+1-k}\right)$$

şeklinde, sınırsız $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sonlu toplam kullanılarak tanımlanmıştır [14]. Bu operatör dizisi yardımıyla lineer olmayan maksimum-çarpım tip Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir [6]. Bu çalışmadan ilham alarak maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerini $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon, $0 \leq x < \infty$ ve (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n)^{3/2}}{(n)^{1/2}} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^n s_{n,k}(x) f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right)}{\bigvee_{k=0}^n s_{n,k}(x)} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlıyoruz. Burada $s_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$ dir. Sürekli ve sınırlı bir $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu için $B_n^{(M)}(f)(x)$ pozitif, sınırlı ve $[0, \infty)$ aralığı üzerinde süreklidir. Ayrıca her n için $B_n^{(M)}(f)(0) - f(0) = 0$ dir.

4.1. Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri için süreklilik modülü yardımıyla bir yaklaşım oranı elde edilecektir. Bunun için aşağıdaki notasyon ve lemmalar gereklidir.

Her bir $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ için veya $j = n$ ve $x \in [nb_n, \infty)$ için

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{s_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{n+1-k} - x \right|}{s_{n,j}(x)}, \quad m_{k,n,j}(x) = \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} \quad (4.2)$$

olsun.

Eğer $k \geq j + 1$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{s_{n,k}(x) \left(\frac{kb_n}{n+1-k} - x \right)}{s_{n,j}(x)} \quad (4.3)$$

ve eğer $k \leq j$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{s_{n,k}(x) \left(x - \frac{kb_n}{n+1-k} \right)}{s_{n,j}(x)} \quad (4.4)$$

dir.

4.1.1. Lemma

Her $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ için veya $j = n$ ve $x \in [nb_n, \infty)$ için $m_{k,n,j}(x) \leq 1$ dir.

İspat

İki durum söz konusudur: $k \geq j$ ve $k \leq j$.

$k \geq j$ olsun. $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $\left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ üzerinde artmayan olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{1}{x} \geq \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{n-j}{(j+1)b_n} = \frac{k+1}{j+1} \cdot \frac{n-j}{n-k} \geq 1$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j+1,n,j}(x) \geq m_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{n,n,j}(x)$$

elde edilir. Şimdi $k \leq j$ olsun.

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} = \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot x \geq \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{n-j+1} = \frac{n-k+1}{n-j+1} \cdot \frac{j}{k} \geq 1$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j-1,n,j}(x) \geq m_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{0,n,j}(x)$$

bulunur. $m_{j,n,j}(x) = 1$ olduğundan istenen elde edilir.

4.1.2. Lemma

(i) $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ olsun. Bu durumda eğer $k - \sqrt{k+1} \geq j$ olacak biçimde $k \in \{j+1, j+2, \dots, n-1\}$ ise $M_{k,n,j}(x) \geq M_{k+1,n,j}(x)$ dir.

(ii) $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ olsun. Bu durumda eğer $k + \sqrt{k} \leq j$ olacak biçimde $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ ise $M_{k,n,j}(x) \geq M_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

İlk olarak

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{n+1-k} - x}{\frac{(k+1)b_n}{n-k} - x}$$

oranı ele alınırsa $\mu_{n,k}(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{n+1-k} - x}{\frac{(k+1)b_n}{n-k} - x}$ fonksiyonu artmayan olduğundan her $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ için $\mu_{n,k}(x) \geq \mu_{n,k}\left(\frac{(j+1)b_n}{n-j}\right)$ dir.

Buradan

$$\begin{aligned} \frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} &\geq \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{(n-j)}{(j+1)b_n} \cdot \frac{\frac{kb_n}{n+1-k} - \frac{(j+1)b_n}{n-j}}{\frac{(k+1)b_n}{n-k} - \frac{(j+1)b_n}{n-j}} \\ &= \frac{k+1}{j+1} \cdot \frac{\frac{n-j}{n+1-k}k - (j+1)}{k+1 - \frac{n-k}{n-j}(j+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. $h(n) = \frac{\frac{n-j}{n+1-k}k - (j+1)}{k+1 - \frac{n-k}{n-j}(j+1)}$ fonksiyonu için $h'(n) = \frac{-1}{k-j} \cdot \frac{(-j+k+1)^2}{(n-k+1)^2} < 0$ olduğundan h fonksiyonu artmayandır ve

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{j+1} \cdot \frac{\frac{n-j}{n+1-k}k - (j+1)}{k+1 - \frac{n-k}{n-j}(j+1)} = \frac{(k+1)(k-j-1)}{(j+1)(k-j)}$$

olur. Bu durumda hipotezdeki $k - \sqrt{k+1} \geq j$ koşulu $(k+1)(k-j-1) \geq (j+1)(k-j)$ olmasını gerektirir ki, bu da isteneni verir.

Ayrıca

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} = \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot x \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{n+1-k}}{x - \frac{(k-1)b_n}{n+2-k}}$$

olup $\eta_{n,k}(x) = x \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{n+1-k}}{x - \frac{(k-1)b_n}{n+2-k}}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan, her $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ için $\eta_{n,k}(x) \geq \eta_{n,k}\left(\frac{jb_n}{n-j+1}\right) = \frac{jb_n}{n-j+1} \cdot \frac{\frac{jb_n}{n-j+1} - \frac{kb_n}{n+1-k}}{\frac{jb_n}{n-j+1} - \frac{(k-1)b_n}{n+2-k}}$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} &\geq \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{n-j+1} \cdot \frac{\frac{jb_n}{n-j+1} - \frac{kb_n}{n+1-k}}{\frac{jb_n}{n-j+1} - \frac{(k-1)b_n}{n+2-k}} \\ &= \frac{j}{k} \cdot \frac{\frac{n-k+1}{n-j+1}j - k}{j - \frac{n-j+1}{n-k+2}(k-1)} \end{aligned}$$

olur. $\nu(n) = \frac{\frac{n-k+1}{n-j+1}j - k}{j - \frac{n-j+1}{n-k+2}(k-1)}$ fonksiyonu için $\nu'(n) = -\frac{j-k}{(n-j+1)^2} < 0$ olduğundan $h_{n,k}$ fonksiyonu artmayandır ve

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j}{k} \cdot \frac{\frac{n-k+1}{n-j+1}j - k}{j - \frac{n-j+1}{n-k+2}(k-1)} = \frac{j(j-k)}{k(j-k+1)}$$

olur. Hipotezdeki $k + \sqrt{k} \leq j$ koşulu $j(j-k) \geq k(j-k+1)$ olmasını gerektirir ki bu da ispatı tamamlar.

4.1.3. Lemma

$s_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$ olmak üzere

$$\bigvee_{k=0}^n s_{n,k}(x) = \begin{cases} s_{n,j}(x), & x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right], j = 0, 1, \dots, n-1 \\ s_{n,n}(x), & x \in [nb_n, \infty) \end{cases}$$

dir.

İspat

$s_{n,k-1}(x) \leq s_{n,k}(x)$ ve $s_{n,k}(x) \geq s_{n,k+1}(x)$ eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter

koşulun $x \in \left[\frac{kb_n}{n-k+1}, \frac{(k+1)b_n}{n-k} \right]$ olduğu gösterilmelidir. Burada $n \in \mathbb{N}$ sabittir.

$$\binom{n}{k-1} \left(\frac{x}{b_n} \right)^{k-1} \leq \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \text{ ve } \binom{n}{k+1} \left(\frac{x}{b_n} \right)^{k+1} \leq \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k$$

ifadelerinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\frac{kb_n}{n-k+1} \leq x \text{ ve } x \leq \frac{(k+1)b_n}{n-k}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $x \in \left[\frac{kb_n}{n-k+1}, \frac{(k+1)b_n}{n-k} \right]$ bulunur.

4.2. Yaklaşım Derecesi

4.2.1. Teorem

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ düzgün sürekli bir fonksiyon ve $B_n^{(M)}(f)(x)$, Eş. 4.1'de tanımlanan maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri olmak üzere,

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq \omega_1 \left(f; \frac{(b_n + x)^{3/2} \sqrt{x}}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\omega_1(f; \delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta \}$$

süreklilik modülüdür.

İspat

Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri Sonuç 2.2.2'nin hipotezlerini sağladığı için $\varphi_x(t) = |t - x|$ olmak üzere

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} B_n^{(M)}(\varphi_x)(x) \right) \omega_1(f; \delta_n) \quad (4.5)$$

dir.

O halde

$$E_n(x) := B_n^{(M)}(\varphi_x)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n s_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{n+1-k} - x \right|}{\sum_{k=0}^n s_{n,k}(x)}$$

teriminin hesaplanması yeterli olacaktır.

$x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ ve keyfi $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sabit olsun. Lemma 4.1.3'ten

$$E_n(x) = \max_{k=0,1,\dots,n} \{M_{k,n,j}(x)\}$$

dir. $x \in [0, \frac{b_n}{n}]$ olmak üzere $j = 0$ için her bir belirli n için, $E_n(x) \leq e\sqrt{\frac{xb_n}{n}}$ dir. $j = 0$ durumunda $M_{k,n,0}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left| \frac{kb_n}{n+1-k} - x \right|$ dir. $k = 0$ için bu değer $M_{k,n,0}(x) = x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ bulunur. $k \geq 1$ içinse

$$\begin{aligned} M_{k,n,0}(x) &= \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(\frac{kb_n}{n+1-k} - x \right) \leq \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \frac{kb_n}{n+1-k} \\ &= \binom{n}{k-1} \frac{x^k}{b_n^{k-1}} = \binom{n}{k-1} \left(\frac{x}{b_n} \right)^{k-1} x = \left(1 + \frac{x}{b_n} \right)^n x \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n x \leq e\sqrt{\frac{xb_n}{n}} \end{aligned}$$

dir. Şimdi, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ olarak göz önüne alınabilir. Sabit bir $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $M_{k,n,j}(x)$ için bir üst tahmin bulunmalıdır.

$x \in \left[\frac{b_n j}{n-j+1}, \frac{b_n(j+1)}{n-j} \right]$ ve $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ olsun.

İspatı 2 kısımda yapılabilir: 1) $k \geq j+1$ ve 2) $k \leq j$.

1. Durum

Alt durum a)

$k - \sqrt{k+1} \leq j$ olsun.

$\frac{(n+1)b_n}{n-j+1} \leq b_n + x$ eşitsizliği göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(\frac{kb_n}{n+1-k} - x \right) \\
&\leq \frac{kb_n}{n+1-k} - \frac{jb_n}{n-j+1} \\
&\leq \frac{b_n(n+1)\sqrt{k+1}}{(n-k+1)(n-j+1)} \\
&\leq \frac{b_n(n+1)\sqrt{k+1}}{(n-j+1-\sqrt{k+1})(n-j+1)} \\
&\leq (b_n+x) \frac{\sqrt{k+1}}{(n-j+1-\sqrt{k+1})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu alt durumda $k+1 \leq 4j$ dir. Olmayana ergi yöntemi ile $k > 4j$ olsun. Buradan $4j-1-2\sqrt{j} < k-\sqrt{k+1} \leq j$ yani $3j-1 < 2\sqrt{j}$ dir. Bu eşitsizlik ise $j \geq 1$ için sağlanamaz, çelişki elde edilir. Ayrıca $\frac{jb_n}{n-j+1} \leq x$ olduğundan $j \leq \frac{(n+1)x}{b_n+x}$ dir ve $n+1 > j+2\sqrt{j}$ için

$$M_{k,n,j}(x) \leq (b_n+x) \frac{2\sqrt{j}}{(n-j+1-2\sqrt{j})} \leq 2(b_n+x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1-2\sqrt{(n+1)x(b_n+x)}}$$

elde edilir. Burada $n+1 \geq 16x(b_n+x)$ için $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1-2\sqrt{(n+1)x(1+x)}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ dir ve bu koşul aynı zamanda $n+1 > j+2\sqrt{j}$ olmasını garantiler.

Sonuç olarak $n+1 \geq 16x(b_n+x)$ için

$$M_{k,n,j}(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

eşitsizliği bulunmuş olur.

Alt durum b)

$k - \sqrt{k+1} > j$ olsun.

$g(x) = x - \sqrt{x+1}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan olduğundan $\bar{k} - \sqrt{\bar{k}+1} \leq j$ olacak biçimde bir $\bar{k} \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ maksimum değeri vardır. Bu durumda $k_1 = \bar{k} + 1$ için $k_1 - \sqrt{k_1+1} > j$ dir.

Böylece

$$M_{\bar{k}+1,n,j}(x) = m_{\bar{k}+1,n,j}(x) \left(\frac{(\bar{k}+1)b_n}{n-\bar{k}} - x \right) \leq 4(b_n+x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

olur. Burada g fonksiyonunun azalmayan ve $g(j) < j$ olması $k_1 \geq j+1$ olmasını gerektirdiğinden son eşitsizlik elde edilir. Ayrıca bir önceki duruma benzer olarak $k_1 \leq 4j$ dir. Lemma 4.1.2, (i)'den $M_{\bar{k}+1,n,j}(x) \geq M_{\bar{k}+2,n,j}(x) \geq \dots \geq M_{n,n,j}(x)$ dir. Böylece her $k \in \{\bar{k}+1, \bar{k}+2, \dots, n\}$ i için $M_{k,n,j}(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ olur.

2. Durum

Alt durum a)

$k + \sqrt{k} > j$ olmak üzere $k \neq j$ için

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(x - \frac{kb_n}{n+1-k} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j} - \frac{kb_n}{n+1-k} \\ &\leq \frac{(n+1)(j-k)b_n + (n+1)(j-k)b_n}{(n-j)(n+1-k)} \leq \frac{2b_n(n+1)\sqrt{j}}{(n-j)(n+1-j)} \end{aligned}$$

dir. $j \leq \frac{(n+1)x}{b_n+x}$ eşitsizliğini kullanarak

$$M_{k,n,j}(x) \leq \frac{2b_n(n+1)\sqrt{\frac{(n+1)x}{b_n+x}}}{\left(n - \frac{(n+1)x}{b_n+x}\right) \left(n+1 - \frac{(n+1)x}{b_n+x}\right)} = \frac{2b_n\sqrt{n+1}\sqrt{x}(1+x)^{3/2}}{n-x}$$

olur. $n \geq 1+2x$ için $\frac{\sqrt{n+1}}{n-x} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ dir. Böylece $n \geq 1+2x$ için

$$M_{k,n,j}(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dir. Şimdi $k = j$ alınarak

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= M_{j,n,j}(x) = m_{j,n,j}(x) \left(x - \frac{j b_n}{n+1-j} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j} - \frac{j b_n}{n+1-j} \\ &\leq \frac{(n+1)b_n}{(n-j)(n+1-j)} \leq \frac{2b_n(n+1)\sqrt{j}}{(n-j)(n+1-j)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu durum $k < j$ durumuna dönüşür.

Alt durum b) $k + \sqrt{k} \leq j$ olsun.

$g(x) = x + \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artmayan olduğundan $\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}} > j$ olacak biçimde $\tilde{k} \in \{0, 1, 2, \dots, j\}$ minimum değeri vardır. $k_2 = \tilde{k} - 1$ için $k_2 + \sqrt{k_2} \leq j$ olup $j \leq \frac{(n+1)x}{b_n+x}$ eşitsizliğini ve $\tilde{k} \neq j$ olmasını göz önüne alarak 2. durum alt durum a'ya benzer olarak $n \geq 1 + 2x$ için

$$\begin{aligned} M_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) &= m_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) \left(x - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{n-\tilde{k}+2} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j} - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{n-\tilde{k}+2} \\ &\leq \frac{3(n+1)(j-\tilde{k})b_n}{(n-j)(n-\tilde{k}+2)} \leq \frac{3b_n(n+1)\sqrt{j}}{(n-j)(n-j+2)} \\ &\leq \frac{3b_n(n+1)\sqrt{\frac{(n+1)x}{b_n+x}}}{\left(n - \frac{(n+1)x}{b_n+x}\right)\left(n - \frac{(n+1)x}{b_n+x} + 2\right)} \leq 4(b_n+x)^{3/2}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\tilde{k} = j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) &= M_{j-1,n,j}(x) = m_{j-1,n,j}(x) \left(x - \frac{(j-1)b_n}{n-j+2} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j} - \frac{(j-1)b_n}{n-j+2} \\ &\leq \frac{2(n+1)b_n}{(n-j)(n-j+2)} \leq \frac{3(n+1)b_n\sqrt{j}}{(n-j)(n-j+2)} \end{aligned}$$

eşitsizliği $\tilde{k} \leq j - 1$ durumuna dönüşür.

Lemma 4.1.2, (ii) durumundan $M_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) \geq M_{\tilde{k}-2,n,j}^{\sim}(x) \geq \dots \geq M_{0,n,j}(x)$ olup buradan $k \in \{0, 1, 2, \dots, j\}$ için $M_{k,n,j}(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ yazılabilir.

Tüm bu sonuçlar göz önüne alınarak $n+1 \geq \max\{1+2x, 16x(x+1)\}$ için

$$M_{k,n,j}(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

elde edilir ki buradan $E_n(x) \leq 4(b_n+x)^{3/2}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ olur.

Eş. 4.5'te $\delta_n = 4(b_n + x)^{3/2} \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ alınarak

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq \omega_1 \left(f; \frac{(b_n + x)^{3/2} \sqrt{x}}{\sqrt{n+1}} \right), \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$$

eşitsizliği bulunmuş olur.

4.3. Bazı Fonksiyon Sınıfları İçin Daha İyi Hata Oranları

Her $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_{k,n,n} : [nb_n, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) \\ &= \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) = \frac{j!(n-j)!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Böylece, her $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ veya $j = n$ ve $x \in [nb_n, \infty)$ için

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$

yazılabilir.

4.3.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı fonksiyonu için

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$$

ise, her $nb_n \geq 2x$ için

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f, \frac{(b_n + x)^2}{nb_n} \right), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$$

sağlanır.

İspat

İki durum söz konusudur:

1) Her $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ için $B_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x)$ olsun. $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ olduğundan $0 \leq x - \frac{jb_n}{n-j+1} \leq \frac{(n+1)b_n}{(n-j)(n-j+1)}$ dir.

Ayrıca $j \leq \frac{(n+1)x}{b_n+x}$ olup $\frac{(n+1)b_n}{(n-j)(n-j+1)} \leq \frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x}$ dir.

$f_{j,n,j}(x) = m_{j,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{jb_n}{n-j+1}\right) = f\left(\frac{jb_n}{n-j+1}\right)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= |f_{j,n,j}(x) - f(x)| \\ &= \left| f\left(\frac{jb_n}{n-j+1}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \omega_1\left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $nb_n \geq 2x$ için $\frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x} \leq 2\frac{(b_n+x)^2}{nb_n}$ olacağından

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n}\right)$$

yazılabilir.

2) Her $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ için $B_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+1,n,j}(x)$ olsun. $0 \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j} - x \leq \frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x}$ ve $m_{k,n,j}(x) \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= |f_{j+1,n,j}(x) - f(x)| \\ &= \left| m_{j+1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(j+1)b_n}{n-j}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \left| f\left(\frac{(j+1)b_n}{n-j}\right) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x}\right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca her $nb_n \geq 2x$ için $\frac{(b_n+x)^2}{nb_n-x} \leq 2\frac{(b_n+x)^2}{nb_n}$ olacağından istenen sonuç elde edilir.

4.3.2. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı ve azalmayan fonksiyonu için $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ artmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $nb_n \geq 2x$ için,

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1\left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n}\right), \forall x \in [0, \infty)$$

dir.

İspat

f azalmayan fonksiyon olduğu için

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^n f_{k,n,j}(x), \quad x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$$

yazılabilir. $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $k \geq j+1$ olsun. Bu durumda

$$f_{k+1,n,j}(x) = \frac{j!(n-j)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j+1} \cdot f\left(\frac{(k+1)b_n}{n-k}\right)$$

dir. g fonksiyonunun artmayan olmasından $\frac{f\left(\frac{(k+1)b_n}{n-k}\right)}{\frac{(k+1)b_n}{n-k}} \leq \frac{f\left(\frac{kb_n}{n-k+1}\right)}{\frac{kb_n}{n-k+1}}$ eşitsizliği bulunur ki bu da $f\left(\frac{(k+1)b_n}{n-k}\right) \leq \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{n-k+1}{kb_n} f\left(\frac{kb_n}{n-k+1}\right)$ olmasını gerektirir. $x \leq \frac{(j+1)b_n}{n-j}$ eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} f_{k+1,n,j}(x) &\leq \frac{j!(n-j)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{j+1}{n-j} \cdot \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot f\left(\frac{kb_n}{n-k+1}\right) \\ &= f_{k,n,j}(x) \cdot \frac{j+1}{n-j} \cdot \frac{n-k+1}{k} \leq f_{k,n,j}(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $k \geq j+1$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ bulunur.

Yani $f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x)$ olup

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$$

dir. Lemma 4.3.1'den her $nb_n \geq 2x$ için,

$$|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n} \right), \forall x \in [0, \infty)$$

sonucuna ulaşılır.

4.3.3. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu konkav ise bu durumda $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır.

İspat

$x, y \in (0, \infty)$ ve $x \leq y$ olsun.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}y + \frac{y-x}{y}0\right) \geq \frac{x}{y}f(y) + \frac{y-x}{y}f(0) \geq \frac{x}{y}f(y)$$

yazılabilir ki bu da $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$ eşitsizliğini verir. O halde $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır.

4.3.4. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan ve konkav fonksiyon ise, her $x \in [0, \infty), nb_n \geq 2x$ için $|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1 \left(f, \frac{(b_n+x)^2}{nb_n} \right)$ dir.

İspat

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ konkav fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.3 gereğince $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır. Böylece Sonuç 4.3.2 kullanılarak istenen elde edilir.

4.4. Biçim Koruma Özellikleri

Bu bölümde maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin bazı biçim koruma özellikleri incelenecektir.

Önceki kısımda olduğu gibi her $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_{k,n,n} : [nb_n, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) \\ &= \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) = \frac{j!(n-j)!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın.

4.4.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan bir fonksiyon ise, her $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j} \right]$ veya $j = n$ ve $x \in [nb_n, \infty)$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

$k \leq j$ olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} = \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot x \geq \frac{n-k+1}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{n-j+1} = \frac{n-k+1}{n-j+1} \cdot \frac{j}{k} \geq 1$$

yazılabilir.

Buradan $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k-1,n,j}(x)$ dir.

f azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{n+1-k}\right) \geq m_{k-1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(k-1)b_n}{n+2-k}\right)$$

bulunur.

4.4.2. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ artmayan bir fonksiyon ise, her $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ve $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, k \geq j+1$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ veya $j = n$ ve $x \in [nb_n, \infty)$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ dir.

İspat

$k \geq j+1$ olsun. $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ aralığında artmayan olup

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{1}{x} \geq \frac{(k+1)b_n}{n-k} \cdot \frac{n-j}{(j+1)b_n} = \frac{k+1}{j+1} \cdot \frac{n-j}{n-k} \geq 1$$

dir. Yani $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k+1,n,j}(x)$ dir. f artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{n-k+1}\right) \geq m_{k+1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(k+1)b_n}{n-k}\right) \text{ elde edilir.}$$

4.4.3. Teorem

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon ise $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve sınırlıdır.

İspat

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sınırlı bir fonksiyon ise $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri $[0, \infty)$ üzerinde sınırlı ve süreklidir. Böylece f azalmayan bir fonksiyon iken, $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörlerinin $[0, \infty)$ aralığının her bir alt aralığı üzerinde azalmayan olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Burada alt aralıklar $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $\left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ ve $j = n$ için $[nb_n, \infty)$ tipindedir. O halde $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ ve $j = n$ için $x \in [nb_n, \infty)$ olsun. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan Lemma 4.4.1'den $f_{j,n,j}(x) \geq f_{j-1,n,j}(x) \geq f_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{0,n,j}(x)$ yazılabilir ki bu da

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^n f_{k,n,j}(x), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right] \text{ veya } \forall x \in [nb_n, \infty)$$

olmasını gerektirir. $k \geq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ azalmayan olduğundan ve $B_n^{(M)}(f)(x)$ bu

fonksiyonların maksimumu olarak yazılabildiğinden $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri azalmayandır.

4.4.4. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ artmayan bir fonksiyon ise $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de artmayandır.

İspat

f , $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve pozitif bir fonksiyon olduğu için f bu aralıkta sınırlıdır. Dolayısıyla $B_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli ve sınırlıdır. O halde $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörlerinin $[0, \infty)$ aralığının her bir alt aralığı üzerinde artmayan olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. Burada alt aralıklar $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $\left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ ve $j = n$ için $[nb_n, \infty)$ tipindedir.

$j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için $x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right]$ ve $j = n$ için $x \in [nb_n, \infty)$ olsun. f artmayan fonksiyon olup Sonuç 4.4.2'den, $f_{j,n,j}(x) \geq f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x)$ dir. Buradan

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^j f_{k,n,j}(x), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n-j+1}, \frac{(j+1)b_n}{n-j}\right] \text{ veya } \forall x \in [nb_n, \infty)$$

dir. $k \leq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ artmayan olduğundan ve $B_n^{(M)}(f)(x)$ bu fonksiyonların maksimumu olarak yazılabildiğinden $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de artmayandır.

Not

f sürekli fonksiyonunun $[0, \infty)$ sınırsız aralığı üzerinde quasikonveks olması demek yeterince büyük $a > 0$ için f fonksiyonunun her $[0, a]$ sınırlı aralığı üzerinde quasikonveks olması demektir. $[0, \infty)$ üzerinde quasikonveks olan fonksiyonlar sınıfı, $[0, \infty)$ üzerinde artmayan fonksiyonlar sınıfını, azalmayan fonksiyonlar sınıfını ve konveks fonksiyonlar sınıfını içerir.

4.4.5. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli, sınırlı ve quasikonveks fonksiyon ise, her $n \in \mathbb{N}$ için, $B_n^{(M)}(f)(x)$ de $[0, \infty)$ üzerinde quasikonvekstir.

İspat

f azalmayan veya artmayan bir fonksiyon ise, sırasıyla Teorem 4.4.3 ve Sonuç 4.4.4'den, her $n \in \mathbb{N}$ için, $B_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve artmayandır.

f fonksiyonu $[0, c]$ üzerinde artmayan ve $[c, \infty)$ üzerinde azalmayan olacak biçimde bir $c \in (0, \infty)$ noktasıvar olsun. $F, G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonları, her $x \in [0, c]$ için $F(x) = f(x)$, her $x \in [c, \infty)$ için $F(x) = f(c)$ ve her $x \in [0, c]$ için $G(x) = f(c)$, her $x \in [c, \infty)$ için $G(x) = f(x)$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve sürekli, G fonksiyonu ise $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve sürekli. Ayrıca her $x \in [0, \infty)$ için $f(x) = \max \{F(x), G(x)\}$ yazılabilir.

Bununla birlikte $B_n^{(M)}(f)(x)$ pseudo-linear olduğundan, her $x \in [0, \infty)$ için

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \max \{B_n^{(M)}(F)(x), B_n^{(M)}(G)(x)\}$$

dir. Böylece Teorem 4.4.3 ve Sonuç 4.4.4'ten, $B_n^{(M)}(F)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve sürekli, $B_n^{(M)}(G)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve sürekli.

Burada iki durum söz konusudur: $B_n^{(M)}(F)(x)$ ve $B_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini kesmezler ya da $B_n^{(M)}(F)(x)$ ve $B_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini keserler.

Durum 1) Her $x \in [0, \infty)$ için $\max \{B_n^{(M)}(F)(x), B_n^{(M)}(G)(x)\} = B_n^{(M)}(F)(x)$ veya $\max \{B_n^{(M)}(F)(x), B_n^{(M)}(G)(x)\} = B_n^{(M)}(G)(x)$ olup $B_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde quasikonvektir.

Durum 2) $B_n^{(M)}(F)(x)$ ve $B_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini kesiyorlarsa $B_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, c]$ üzerinde artmayan ve $[c, \infty)$ üzerinde azalmayan olacak biçimde bir $c \in [0, \infty)$ noktası vardır. Bu ise $B_n^{(M)}(f)(x)$ 'in $[0, \infty)$ üzerinde quasikonveks olmasını gerektirir.



5. MAKSİMUM-ÇARPIM TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ OPERATÖRLERİ

Lineer Szász operatörleri [35]'da tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Bu operatörlerin birçok genelleştirmesi reel ve kompleks değişkenli fonksiyonlar için pek çok kişi tarafından incelenmiştir ([13], [23], [27], [30], [38], [40]). Bununla birlikte, lineer Szász-Mirakjan operatörlerinin q-genelleştirmeleri araştırılmıştır ([31], [39]). Ayrıca Szász-Chlodowsky operatörleri, [36]'de

$$C_n(f)(x) = e^{-\frac{nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{b_n}\right)^k \frac{1}{k!} f\left(\frac{b_n k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ koşullarını sağlayan pozitif reel sayıların bir dizisidir.

(a_n) ve (b_n) pozitif reel sayı dizileri için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ ve $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$ olmak üzere, kompleks modifiye Szász-Mirakjan operatörleri,

$$S_n(f; a_n, b_n; z) = e^{-\frac{a_n z}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_n z)^j}{j! b_n^j} f\left(\frac{j b_n}{a_n}\right) \quad z \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanmış ve bu operatörler için kompakt disk üzerinde yaklaşım oranı elde edilmiştir ([13]).

Lineer olmayan maksimum-çarpım tip Favard-Szász-Mirakjan operatörleri [5] ve [7]'de tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörlerini $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon, $0 \leq x < \infty$, (a_n) ve (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların artan ve sınırsız birer dizisi olmak üzere,

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(x) f\left(\frac{k b_n}{a_n}\right)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(x)} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlıyoruz. Burada $c_{n,k}(x) = \frac{(a_n x)^k}{b_n^k k!}$ dir.

Sürekli ve sınırlı bir $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $S_n^{(M)}(f)(x)$ pozitif ve $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli. Ayrıca her n için $S_n^{(M)}(f)(0) - f(0) = 0$ dır.

Bu bölümde yapılan çalışmalar [24] ve [25] referanslı makalelerde yayımlanmıştır.

5.1. Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde ileride kullanılacak olan bazı notasyon ve lemmalar verilecektir. Her bir $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{c_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{a_n} - x \right|}{c_{n,j}(x)}, \quad m_{k,n,j}(x) = \frac{c_{n,k}(x)}{c_{n,j}(x)} \quad (5.2)$$

olsun.

Eğer $k \geq j + 1$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{c_{n,k}(x) \left(\frac{kb_n}{a_n} - x \right)}{c_{n,j}(x)} \quad (5.3)$$

ve eğer $k \leq j - 1$ ise

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{c_{n,k}(x) \left(x - \frac{kb_n}{a_n} \right)}{c_{n,j}(x)} \quad (5.4)$$

dir.

5.1.1. Lemma

Her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ ve $j = 0, 1, \dots$ için

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(x) = c_{n,j}(x)$$

dir.

İspat

İlk olarak gösterilmelidir ki, sabit bir $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k$ için $0 \leq c_{n,k+1}(x) \leq c_{n,k}(x)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $x \in \left[0, \frac{(k+1)b_n}{a_n}\right]$ olmasıdır.

$$0 \leq \frac{(a_n x)^{k+1}}{b_n^{k+1} (k+1)!} \leq \frac{(a_n x)^k}{b_n^k k!}$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $0 \leq \frac{a_n x}{(k+1)b_n} \leq 1$ elde edilir. Buradan,

$$0 \leq x \leq \frac{(k+1)b_n}{a_n}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $k = 0, 1, \dots$ alınarak,

$$\begin{aligned} c_{n,1}(x) &\leq c_{n,0}(x) \iff x \in [0, b_n/a_n], \\ c_{n,2}(x) &\leq c_{n,1}(x) \iff x \in [0, 2b_n/a_n], \\ c_{n,3}(x) &\leq c_{n,2}(x) \iff x \in [0, 3b_n/a_n], \end{aligned}$$

yani,

$$c_{n,k+1}(x) \leq c_{n,k}(x) \iff x \in [0, (k+1)b_n/a_n]$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden,

$$\begin{aligned} x &\in [0, b_n/a_n] \text{ ise } k = 0, 1, \dots \text{ için } c_{n,k}(x) \leq c_{n,0}(x) \\ x &\in [b_n/a_n, 2b_n/a_n] \text{ ise } k = 0, 1, \dots \text{ için } c_{n,k}(x) \leq c_{n,1}(x) \\ x &\in [2b_n/a_n, 3b_n/a_n] \text{ ise } k = 0, 1, \dots \text{ için } c_{n,k}(x) \leq c_{n,2}(x) \end{aligned}$$

yani genel olarak,

$$x \in [jb_n/a_n, (j+1)b_n/a_n] \text{ ise } k = 0, 1, \dots \text{ için } c_{n,k}(x) \leq c_{n,j}(x)$$

bulunur.

5.1.2. Lemma

Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ için $m_{k,n,j}(x) \leq 1$ dir.

İspat

İki durum söz konusudur: 1) $k \geq j$ ve 2) $k \leq j$.

$k \geq j$ olsun. $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ üzerinde artmayan olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{x} \geq \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{(j+1)b_n} = \frac{k+1}{j+1} \geq 1$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j+1,n,j}(x) \geq m_{j+2,n,j}(x) \geq \dots$$

yazılabilir.

Şimdi $k \leq j$ olsun.

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} = \frac{xa_n}{kb_n} \geq \frac{a_n}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{a_n} \geq 1$$

olur. Buradan

$$m_{j,n,j}(x) \geq m_{j-1,n,j}(x) \geq m_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{0,n,j}(x)$$

elde edilir. $m_{j,n,j}(x) = 1$ olduğundan istenen sonuç elde edilmiş olur.

5.1.3. Lemma

$x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $k - \sqrt{k+1} \geq j$ olacak biçimde $k \in \{j+1, j+2, \dots\}$ ise $M_{k,n,j}(x) \geq M_{k+1,n,j}(x)$ dir.

(ii) Eğer $k + \sqrt{k} \leq j$ olacak biçimde $k \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ ise $M_{k,n,j}(x) \geq M_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

İlk olarak

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{a_n} - x}{\frac{(k+1)b_n}{a_n} - x}$$

oranına bakılırsa, $\mu_{n,k}(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{kb_n}{a_n} - x}{\frac{(k+1)b_n}{a_n} - x}$ fonksiyonu artmayan olduğundan her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $\mu_{n,k}(x) \geq \mu_{n,k}\left(\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right) = \frac{a_n}{(j+1)b_n} \cdot \frac{k-j-1}{k-j}$ dir. Bu durumda hipotezdeki $k - \sqrt{k+1} \geq j$ koşulu $(k+1)(k-j-1) \geq (j+1)(k-j)$ olmasını gerektirir ki, buradan

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} \geq \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{(j+1)b_n} \cdot \frac{k-j-1}{k-j} \geq 1$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} = \frac{a_n}{kb_n} \cdot x \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{a_n}}{x - \frac{(k-1)b_n}{a_n}}$$

olup $\eta_{n,k}(x) = x \cdot \frac{x - \frac{kb_n}{a_n}}{x - \frac{(k-1)b_n}{a_n}}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan, her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $\eta_{n,k}(x) \geq \eta_{n,k}\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) = \frac{jb_n}{a_n} \cdot \frac{j-k}{j-k+1}$ olur. Hipotezdeki $k + \sqrt{k} \leq j$ koşulu $j(j-k) \geq k(j-k+1)$ olmasını gerektirdiğinden

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} \geq \frac{a_n}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{a_n} \cdot \frac{j-k}{j-k+1} \geq 1$$

olup bu da ispatı tamamlar.

5.2. Yaklaşım Derecesi

5.2.1. Teorem

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon ve $S_n^{(M)}(f)(x)$, Eş. 5.1'de

tanımlanan maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörleri olmak üzere,

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq 8\omega_1 \left(f; \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, \infty)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\omega_1(f; \delta) = \sup \{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür.

İspat

Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörleri Sonuç 2.2.2'nin hipotezlerini sağladığı için $\varphi_x(t) = |t - x|$ olmak üzere

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} S_n^{(M)}(\varphi_x)(x) \right) \omega_1(f; \delta_n) \quad (5.5)$$

dir. O halde

$$E_n(x) := S_n^{(M)}(\varphi_x)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(x) \left| \frac{kb_n}{a_n} - x \right|}{\bigvee_{k=0}^{\infty} c_{n,k}(x)}$$

teriminin hesaplanması yeterli olacaktır.

$x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ ve keyfi $j \in \{0, 1, \dots\}$ sabit olsun. Lemma 5.1.1'den

$E_n(x) = \max_{k=0,1,\dots} \{M_{k,n,j}(x)\}$ dir.

$j = 0$ için $M_{k,n,0}(x) = \frac{(a_n x)^k}{b_n^k k!} \left| \frac{jb_n}{a_n} - x \right|$ olup, bu ifade $k = 0$ için $M_{k,n,0}(x) = x \geq \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ ve her bir $k \geq 1$ için $M_{k,n,0}(x) \leq \frac{(a_n x)^k}{b_n^k k!} \cdot \frac{kb_n}{a_n} = \sqrt{x} \cdot \frac{a_n^{k-1} x^{k-\frac{1}{2}}}{b_n^{k-1} (k-1)!} \leq \sqrt{x} \cdot \frac{a_n^{k-1}}{b_n^{k-1} (k-1)!} \cdot \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{k-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ dir. Böylece $x \in \left[0, \frac{b_n}{a_n} \right]$ olmak üzere $j = 0$ için $E_n(x) \leq \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ dir. O halde $j \in \{1, 2, \dots\}$ olarak göz önüne alınarak $M_{k,n,j}(x)$ için bir üst tahmin bulunmalıdır. $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ ve $k \in \{0, 1, \dots\}$ olsun.

İspat üç kısımda yapılacaktır: $k = j$, $k \geq j + 1$ ve $k \leq j - 1$.

1. Durum

Eğer $k = j$ ise $M_{j,n,j}(x) = \left| \frac{jb_n}{a_n} - x \right|$ dir. $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ olduğundan $M_{j,n,j}(x) \leq \frac{b_n}{a_n}$ dir. $j \geq 1$ olduğundan $x \geq \frac{b_n}{a_n}$ dir ki buradan $\frac{b_n}{a_n} \leq \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ elde edilir.

2. Durum

Alt durum a) $k - \sqrt{k+1} < j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(\frac{kb_n}{a_n} - x \right) \leq \frac{kb_n}{a_n} - x \leq \frac{kb_n}{a_n} - \frac{jb_n}{a_n} \\ &\leq \frac{kb_n}{a_n} - \frac{(k - \sqrt{k+1})b_n}{a_n} = \frac{b_n\sqrt{k+1}}{a_n} \end{aligned}$$

dir. Bu alt durumda $k \leq 3j$ dir. Olmayana ergi yöntemi ile $k > 3j$ olsun. $g(x) = x - \sqrt{x+1}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $j > k - \sqrt{k+1} \geq 3j - \sqrt{3j+1}$ yazılabilir. Bu ise $j > 3j - \sqrt{3j+1}$ çelişmesini verir.

Sonuç olarak $\sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{jb_n}{a_n}}$ olduğundan

$$M_{k,n,j}(x) \leq \frac{b_n\sqrt{k+1}}{a_n} \leq \frac{b_n\sqrt{3j+1}}{a_n} \leq \frac{2b_n\sqrt{j}}{a_n} \leq 2\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$$

elde edilir.

Alt durum b) $k - \sqrt{k+1} \geq j$ olsun. $g(x) = x - \sqrt{x+1}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan olduğundan $\bar{k} - \sqrt{\bar{k}+1} < j$ olacak biçimde bir $\bar{k} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ maksimum değeri vardır. Bu durumda $k_1 = \bar{k} + 1$ için $k_1 - \sqrt{k_1+1} \geq j$ ve

$$\begin{aligned} M_{\bar{k}+1,n,j}(x) &= m_{\bar{k}+1,n,j}(x) \left(\frac{(\bar{k}+1)b_n}{a_n} - x \right) \leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{a_n} - x \leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{a_n} - \frac{jb_n}{a_n} \\ &\leq \frac{(\bar{k}+1)b_n}{a_n} - \frac{(\bar{k} - \sqrt{\bar{k}+1})b_n}{a_n} = \frac{(\sqrt{\bar{k}+1} + 1)b_n}{a_n} \leq 3\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}} \end{aligned}$$

olur. Burada $\bar{k} - \sqrt{\bar{k} + 1} < j$ olması $\bar{k} < 3j$ olmasını gerektirdiğinden son eşitsizlik elde edilir. Ayrıca g fonksiyonu azalmayan olduğundan $k_1 \geq j+1$ dir ve $g(j) < j$ dir. Lemma 5.1.3, (i)'den $M_{\bar{k}+1,n,j}(x) \geq M_{\bar{k}+2,n,j}(x) \geq \dots$ dir. Böylece her $k \in \{\bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots\}$ için $M_{k,n,j}(x) \leq 3\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ olur. O halde bu iki alt durumdan $M_{k,n,j}(x) \leq 3\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ elde edilir.

3. Durum

Alt durum a) $k + \sqrt{k} \geq j$ olsun.

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(x - \frac{kb_n}{a_n} \right) \leq x - \frac{kb_n}{a_n} \leq \frac{(j+1)b_n}{a_n} - \frac{kb_n}{a_n} \\ &\leq \frac{(k + \sqrt{k} + 1)b_n}{a_n} - \frac{kb_n}{a_n} = \frac{(\sqrt{k} + 1)b_n}{a_n} \leq \frac{(\sqrt{j-2} + 1)b_n}{a_n} \\ &\leq \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \cdot \frac{\sqrt{b_n}(\sqrt{j-2} + 1)}{\sqrt{a_n}} \leq 2\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}} \end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{(\sqrt{j-2}+1)\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} \leq \frac{2\sqrt{j}\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} \leq 2\sqrt{x}$ dir.

Alt durum b) $k + \sqrt{k} \leq j$ olsun.

$\tilde{k} \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}} > j$ olacak biçimdeki minimum değer olsun. Bu durumda $k_2 = \tilde{k} - 1$, $k_2 + \sqrt{k_2} \leq j$ eşitsizliğin sağlar ve

$$\begin{aligned} M_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) &= m_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) \left(x - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{a_n} \right) \leq \frac{(j+1)b_n}{a_n} - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{a_n} \\ &\leq \frac{(\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}} + 1)b_n}{a_n} - \frac{(\tilde{k}-1)b_n}{a_n} = \frac{(\sqrt{\tilde{k}} + 2)b_n}{a_n} \leq 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}} \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik için $\tilde{k} - 1 = k_2 \leq k_2 + \sqrt{k_2} \leq j$ bağıntısını kullanıp $\tilde{k} \leq j+1$ ve $\sqrt{\tilde{k}} + 2 \leq \sqrt{j+1} + 2 \leq 4\sqrt{j}$ ifadeleri elde edilir. Ayrıca bu durumda $j \geq 1$ olduğundan $k_2 \leq j-2$ dir. Lemma 5.1.3, (ii)'den $M_{\tilde{k}-1,n,j}^{\sim}(x) \geq M_{\tilde{k}-2,n,j}^{\sim}(x) \geq \dots \geq M_{0,n,j}^{\sim}(x)$ dir.

Böylece her $k \leq j - 1$ ve her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ için $M_{k,n,j}(x) \leq 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ elde edilir. O halde bu iki alt durumdan $M_{k,n,j}(x) \leq 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ elde edilir.

Yukarıda elde edilen tüm değerlerden

$$M_{k,n,j}(x) \leq 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}, \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

olur ki, bu da $E_n(x) \leq 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}, \quad \forall x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}$ eşitsizliğini verir.

Eş. 5.5'te $\delta_n = 4\sqrt{\frac{xb_n}{a_n}}$ alınarak,

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)| \leq 8\omega_1 \left(f; \sqrt{\frac{xb_n}{a_n}} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, \infty)$$

elde edilir.

5.3. Bazı Fonksiyon Alt Sınıflarında Daha İyi Hata Oranları

Bu kısımda bazı fonksiyon sınıflarında hata oranının iyileştirilebileceği gösterilecektir.

Her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_{k,n,j}(x) = m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right) = \frac{c_{n,k}(x)}{c_{n,j}(x)} \cdot f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right) = \frac{j!}{k!} \cdot \left(\frac{a_n x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Böylece, her $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ için

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^{\infty} f_{k,n,j}(x)$$

yazılabilir.

5.3.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı fonksiyonu için

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right],$$

ise

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{a_n} \right), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$$

sağlanır.

İspat

İki durum söz konusudur:

1) Her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ için $S_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x)$ olsun. $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ olduğundan $0 \leq x - \frac{jb_n}{a_n} \leq \frac{b_n}{a_n}$ olup $f_{j,n,j}(x) = m_{j,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) = f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right)$ dir.

Böylece,

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| = |f_{j,n,j}(x) - f(x)| = \left| f\left(\frac{jb_n}{a_n}\right) - f(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{a_n} \right)$$

elde edilir.

2) Her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$ için $S_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+1,n,j}(x)$ olsun. $0 \leq \frac{(j+1)b_n}{a_n} - x \leq \frac{b_n}{a_n}$ ve $m_{k,n,j}(x) \leq 1$ olduğundan, her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için

$$\begin{aligned} |S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| &= |f_{j+1,n,j}(x) - f(x)| \\ &= \left| m_{j+1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \left| f\left(\frac{(j+1)b_n}{a_n}\right) - f(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{a_n} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ise istenen sonucu verir.

5.3.2. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı ve azalmayan fonksiyonu için $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right), \forall x \in [0, \infty)$$

dir.

İspat

f azalmayan fonksiyon olduğu için

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^{\infty} f_{k,n,j}(x), \quad \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$$

dir. $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$, $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $k \geq j$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} f_{k+1,n,j}(x) &= \frac{j!}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{a_n x}{b_n}\right)^{k-j+1} \cdot f\left(\frac{(k+1)b_n}{a_n}\right) \\ &= \left(\frac{a_n x}{b_n}\right) \cdot \frac{j!}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{a_n x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{(k+1)b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

dir. g fonksiyonunun azalmayan olmasından $\frac{f\left(\frac{(k+1)b_n}{a_n}\right)}{\frac{(k+1)b_n}{a_n}} \leq \frac{f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right)}{\frac{kb_n}{a_n}}$ eşitsizliği elde edilir ki bu da $f\left(\frac{(k+1)b_n}{a_n}\right) \leq \frac{k+1}{k} f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right)$ olmasını gerektirir. $x \leq \frac{(j+1)b_n}{a_n}$ eşitsizliğini de kullanarak

$$\begin{aligned} f_{k+1,n,j}(x) &\leq \frac{(j+1)!}{(k+1)!} \cdot \left(\frac{b_n x}{a_n}\right)^{k-j} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right) \\ &= f_{k,n,j}(x) \cdot \frac{j+1}{k} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $k \geq j+1$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ bulunur.

Yani $f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x) \geq \dots$ olup

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \max \{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}, \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right]$$

dir. Lemma 5.3.1'den

$$|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{a_n} \right), \forall x \in [0, \infty)$$

sonucu elde edilir.

5.3.3. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan ve konkav fonksiyon ise, her $x \in [0, \infty)$ için $|S_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{a_n} \right)$ dir.

İspat

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ konkav fonksiyon olduğundan Lemma 4.3.3 gereğince $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır. Böylece Sonuç 5.3.2 kullanılarak istenen elde edilir.

5.4. Biçim Koruma Özellikleri

Bu kısımda maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörlerinin bazı biçim koruma özellikleri incelenecektir.

Önceki kısımda olduğu gibi her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_{k,n,j}(x) = m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right) = \frac{c_{n,k}(x)}{c_{n,j}(x)} \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right) = \frac{j!}{k!} \cdot \left(\frac{a_n x}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

5.4.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan bir fonksiyon ise, her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ dir.

İspat

$k \leq j$ olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} = \frac{a_n x}{kb_n} \geq \frac{a_n}{kb_n} \cdot \frac{jb_n}{a_n} \geq 1$$

olur, buradan $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k-1,n,j}(x)$ dir. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right) \geq m_{k-1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(k-1)b_n}{a_n}\right)$$

bulunur.

5.4.2. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ artmayan bir fonksiyon ise, her $k, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \geq j$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ dir.

İspat

$k \geq j$ olsun. $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ üzerinde artmayan olup

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{x} \geq \frac{(k+1)b_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{(j+1)b_n} = \frac{k+1}{j+1} \geq 1$$

dir. Yani $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k+1,n,j}(x)$ dir. f artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right) \geq m_{k+1,n,j}(x) \cdot f\left(\frac{(k+1)b_n}{a_n}\right)$$

elde edilir.

5.4.3. Teorem

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon ise $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve sınırlıdır.

İspat

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sınırlı bir fonksiyon ise $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri $[0, \infty)$ üzerinde sınırlı ve süreklidir. O halde f azalmayan bir fonksiyonken, $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörlerinin $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

$j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \left[\frac{jn}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ ve f azalmayan bir fonksiyon olsun. Lemma 5.4.1'den $f_{j,n,j}(x) \geq f_{j-1,n,j}(x) \geq f_{j-2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{0,n,j}(x)$ yazılabilir ki bu da

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^{\infty} f_{k,n,j}(x), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$$

olmasını gerektirir. $k \geq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ azalmayan olduğundan ve $S_n^{(M)}(f)(x)$ bu fonksiyonların supremumu olarak yazılabildiğinden $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri azalmayandır.

5.4.4. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ artmayan bir fonksiyon ise $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de artmayandır.

İspat

f , $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve pozitif bir fonksiyon olduğu için f bu aralıkta sınırlıdır. Dolayısıyla $S_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli ve sınırlıdır. O halde $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörlerinin artmayan olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ olsun. f artmayan fonksiyon olup Sonuç 5.4.2'den, $f_{j,n,j}(x) \geq f_{j+1,n,j}(x) \geq f_{j+2,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x) \geq \dots$ dir. Buradan

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^j f_{k,n,j}(x), \forall x \in \left[\frac{jb_n}{n+1}, \frac{(j+1)b_n}{n+1}\right]$$

dir. $k \leq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ artmayan olduğundan ve $S_n^{(M)}(f)(x)$ bu fonksiyonların supremumu olarak yazılabildiğinden $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri de artmayandır.

5.4.5. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli, sınırlı ve quasikonveks fonksiyon ise, her $n \in \mathbb{N}$ için, $S_n^{(M)}(f)(x)$ de $[0, \infty)$ üzerinde quasikonvektir.

İspat

f azalmayan veya artmayan bir fonksiyon ise, sırasıyla Teorem 5.4.3 ve Sonuç 5.4.4'ten, her $n \in \mathbb{N}$ için, $S_n^{(M)}(f)(x)$ operatörleri $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve artmayandır.

f fonksiyonu $[0, c]$ üzerinde artmayan ve $[c, \infty)$ üzerinde azalmayan olacak biçimde bir $c \in (0, \infty)$ noktasının var olsun.

$F, G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonları, her $x \in [0, c]$ için $F(x) = f(x)$, her $x \in [c, \infty)$ için $F(x) = f(c)$ ve her $x \in [0, c]$ için $G(x) = f(c)$, her $x \in [c, \infty)$ için $G(x) = f(x)$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve sürekli, G fonksiyonu ise $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve süreklidir. Ayrıca her $x \in [0, \infty)$ için $f(x) = \max\{F(x), G(x)\}$ yazılabilir. Bununla birlikte $S_n^{(M)}(f)(x)$ pseudo-linear olduğundan, her $x \in [0, \infty)$ için

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \max\{S_n^{(M)}(F)(x), S_n^{(M)}(G)(x)\}$$

dir. Böylece Teorem 5.4.3 ve Sonuç 5.4.4'ten, $S_n^{(M)}(F)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde artmayan ve sürekli, $S_n^{(M)}(G)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve süreklidir.

Burada iki durum söz konusudur: 1) $S_n^{(M)}(F)(x)$ ve $S_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini kesmezler, 2) $S_n^{(M)}(F)(x)$ ve $S_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini keserler.

Durum 1) Her $x \in [0, \infty)$ için $\max\{S_n^{(M)}(F)(x), S_n^{(M)}(G)(x)\} = S_n^{(M)}(F)(x)$ veya $\max\{S_n^{(M)}(F)(x), S_n^{(M)}(G)(x)\} = S_n^{(M)}(G)(x)$ olup $S_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde quasikonvektir.

Durum 2) $S_n^{(M)}(F)(x)$ ve $S_n^{(M)}(G)(x)$ birbirlerini kesiyorlarsa, $S_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, c]$ üzerinde artmayan ve $[c, \infty)$ üzerinde azalmayan olacak biçimde bir $c \in [0, \infty)$ noktası vardır.

Bu ise $S_n^{(M)}(f)(x)$ 'in $[0, \infty)$ üzerinde quasikonveks olmasını gerektirir.

5.4.6. Teorem

Keyfi bir $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için $S_n^{(M)}(f)(x)$, $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right] \subset [0, \infty)$ üzerinde konvektir.

İspat

Her $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^{\infty} f_{k,n,j}(x)$ yazılabildiğinden, sabit bir j için $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonunun $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ üzerinde konveks olduğunu gösterilmesi yeterli olacaktır.

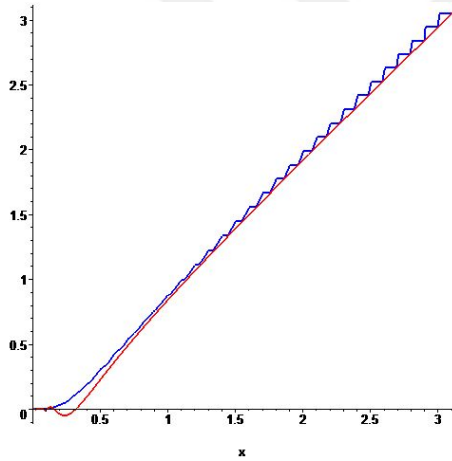
$f \geq 0$, (a_n) ve (b_n) pozitif reel sayıların birer dizisi ve $f_{k,n,j}(x) = \frac{j!}{k!} \cdot \left(\frac{xa_n}{b_n}\right)^{k-j} \cdot f\left(\frac{kb_n}{a_n}\right)$ olduğundan $g_{k,j}(x) = x^{k-j}$ fonksiyonunun $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ üzerinde konveks olduğunun gösterilmesi gereklidir. $k = j$ için $g_{j,j} = 1$ sabit fonksiyon ve dolayısıyla konvektir. $k = j + 1$ için $g_{j+1,j}(x) = x$ fonksiyonu konvektir. $k = j - 1$ için $g_{j-1,j}(x) = \frac{1}{x}$ ve her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $g_{j-1,j}''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ olduğundan bu fonksiyon konvektir. $k > j + 2$ için her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $g_{k,j}''(x) = (k-j)(k-j-1)x^{k-j-2} > 0$ olup bu fonksiyon da konvektir. Benzer şekilde $k < j - 2$ için her $x \in \left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ için $g_{k,j}''(x) = (k-j)(k-j-1)x^{k-j-2} > 0$ olup konvektir. $S_n^{(M)}(f)(x)$ konveks fonksiyoların supremumu olarak yazılabildiğinden $\left[\frac{jb_n}{a_n}, \frac{(j+1)b_n}{a_n}\right]$ üzerinde konvektir.

6. GRAFİKLER İLE YAKLAŞIM

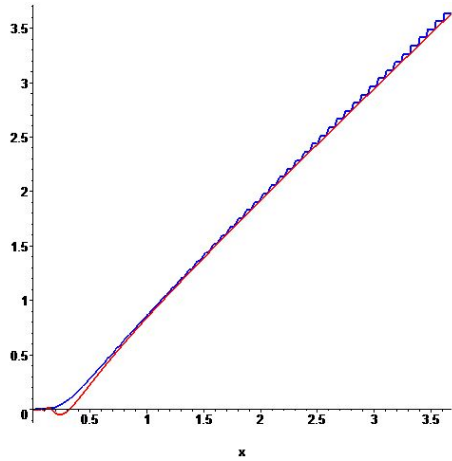
Bu bölümde daha önceki bölümlerde yaklaşım özellikleri elde edilen operatörlerin ve onların lineer karşılıklarının belirli fonksiyonlara yakınsaklıkları Maple kullanılarak elde edilen grafiklerle karşılaştırılacaktır.

Örnek

$(b_n) = (n^{1/3})$ olmak üzere $n = 30$ ve $n = 50$ için maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin (mavi), $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \in (0, b_n] \end{cases}$ fonksiyonuna (kırmızı) yaklaşımı sırasıyla Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de gösterilmiştir. n büyüdükçe yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



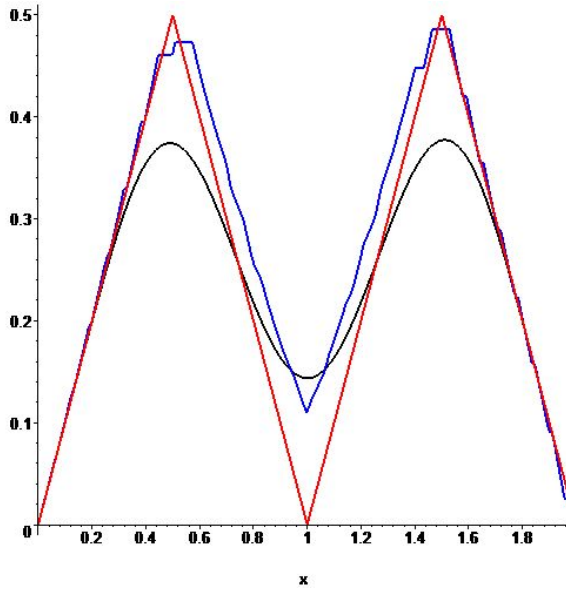
Şekil 6.1. $n = 30$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı



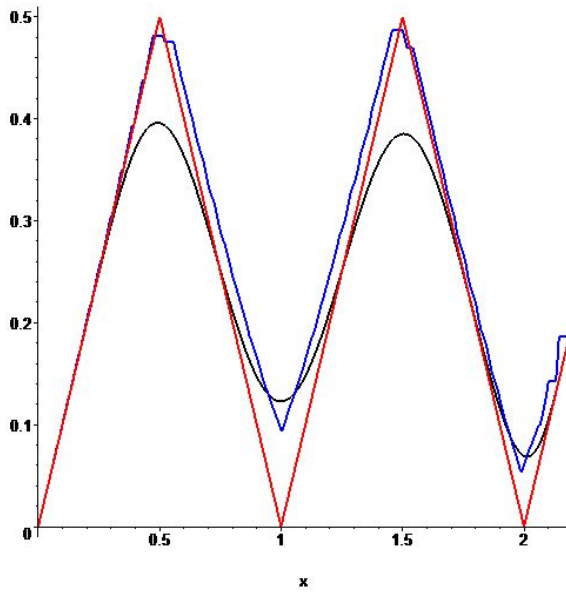
Şekil 6.2. $n = 50$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı

Örnek

Bu örnekte maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri ile lineer Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım oranları n nin farklı değerleri için karşılaştırılmaktadır. $(b_n) = (n^{1/5})$ olmak üzere $n = 30$ ve $n = 50$ için maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin (mavi) ve lineer Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin (siyah), $f(x) = \frac{1}{2} - |x - [x] - \frac{1}{2}|$ fonksiyonuna (kırmızı) yakınsaklıkları Şekil 6.3. ve Şekil 6.4.'te sırasıyla gösterilmiştir.



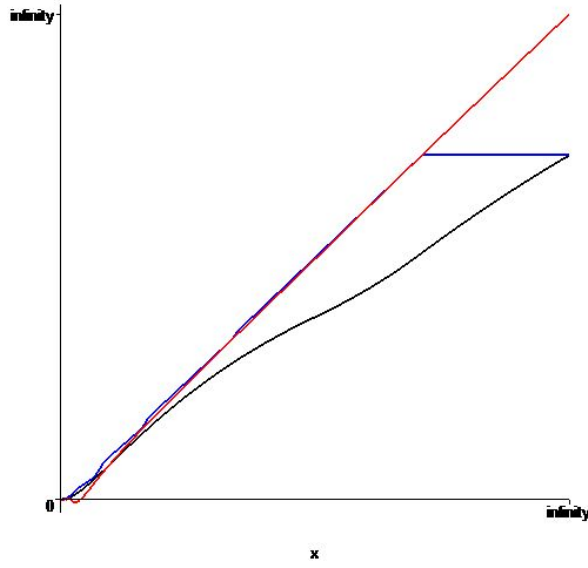
Şekil 6.3. $n = 30$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması



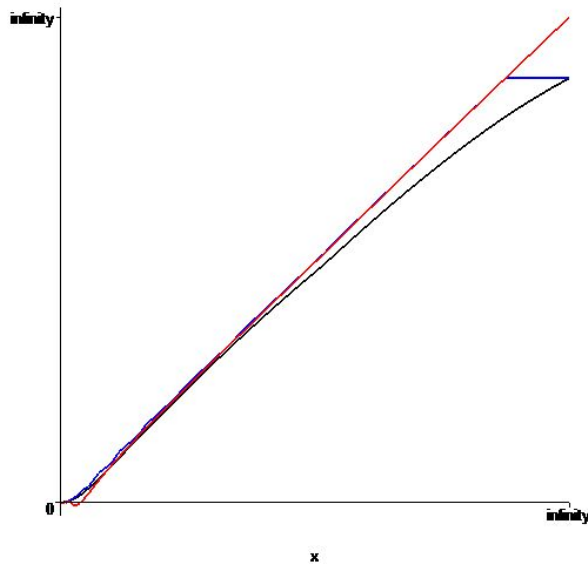
Şekil 6.4. $n = 50$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması

Örnek

$(b_n) = (n^{1/5})$ olsun. Maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin (mavi) ve genelleştirilmiş lineer Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin (siyah), $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \in (0, \infty) \end{cases}$ fonksiyonuna (kırmızı) yakınsama oranları $n = 5$ ve $n = 10$ için Şekil 6.5. ve Şekil 6.6.'da sırasıyla karşılaştırılmıştır.



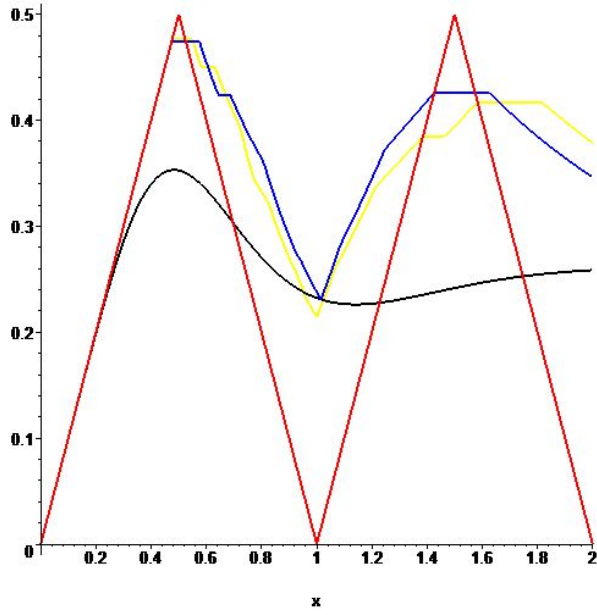
Şekil 6.5. $n = 5$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı



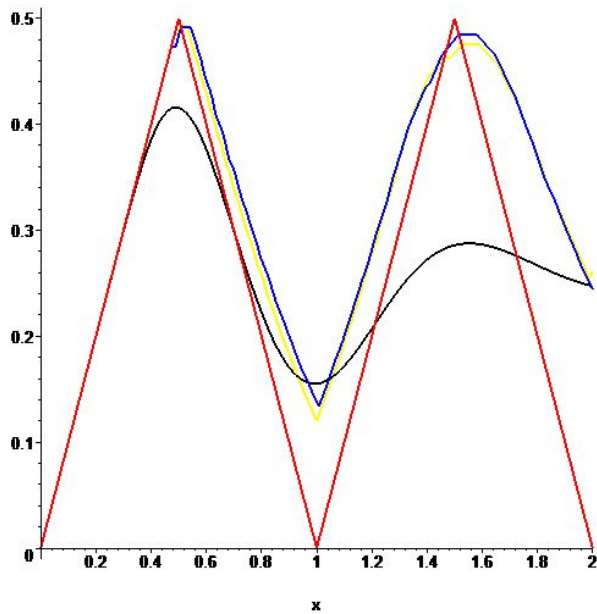
Şekil 6.6. $n = 10$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı

Örnek

$(b_n) = (n^{1/5})$ olmak üzere $n = 30$ ve $n = 100$ için maksimum-çarpım tip Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri (sarı), genelleştirilmiş maksimum-çarpım tip Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri (mavi) ve lineer Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin (siyah), $f(x) = \frac{1}{2} - |x - [x] - \frac{1}{2}|$ fonksiyonuna (kırmızı) yakınsaklık oranlarının bir karşılaştırılması sırasıyla Şekil 6.7. ve Şekil 6.8.'de gösterilmiştir.



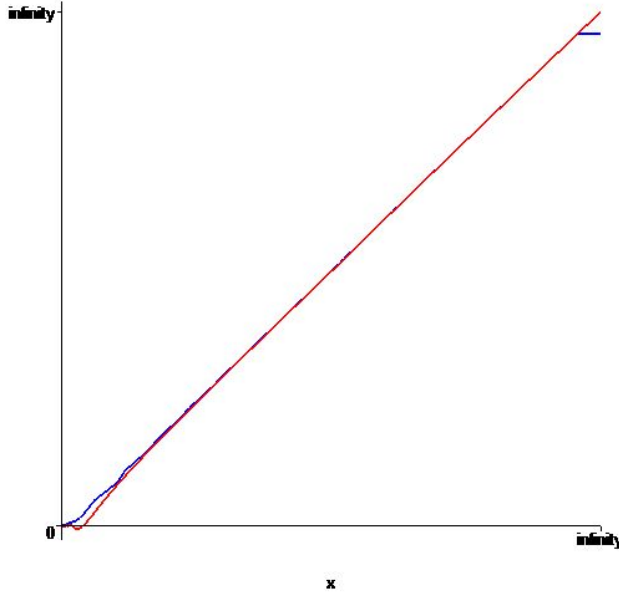
Şekil 6.7. $n = 30$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması



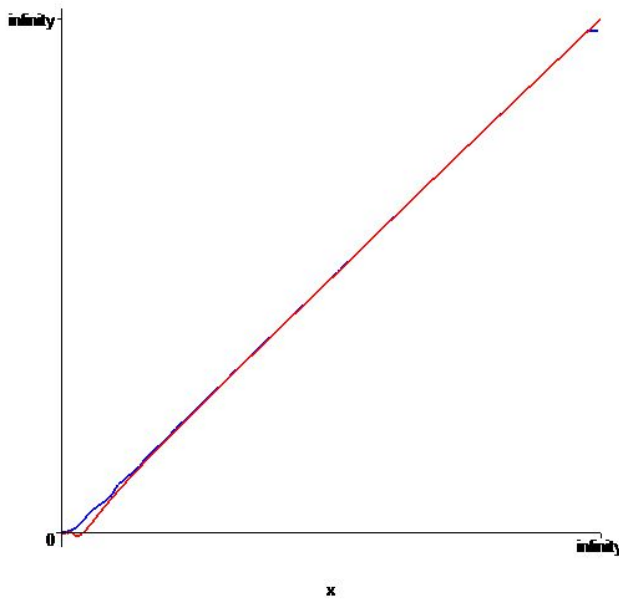
Şekil 6.8. $n = 100$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \in (0, b_n] \end{cases}$ fonksiyonu verilsin ve $(a_n) = (n^{1/2})$ ve $(b_n) = (n^{1/3})$ olsun. Şekil 6.9'da $n = 100$ ve Şekil 6.10.'da $n = 200$ için maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörlerinin (mavi), f fonksiyonuna (kırmızı), yaklaşımları incelenmiştir. n nin büyüyen değerleri için yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



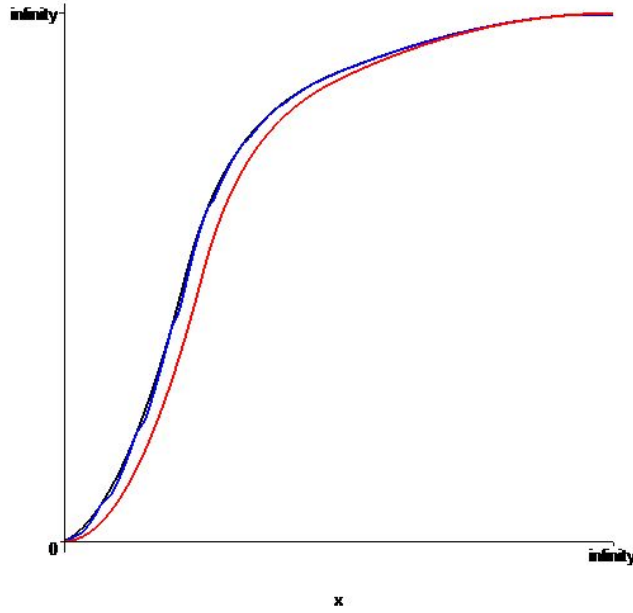
Şekil 6.9. $n = 100$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı



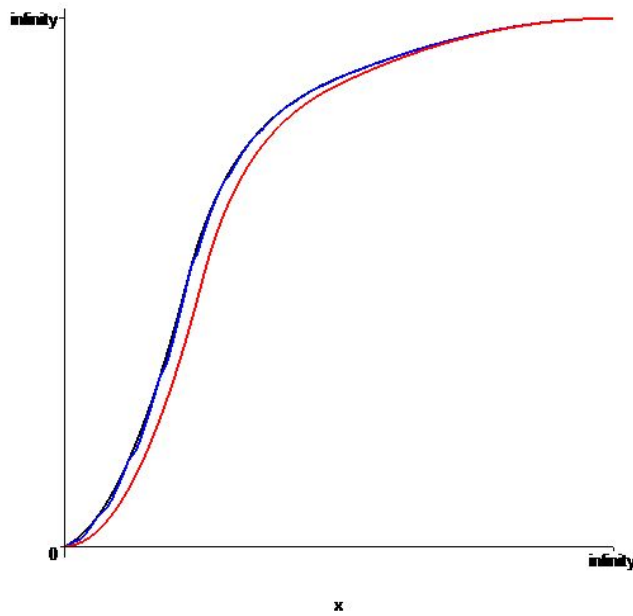
Şekil 6.10. $n = 200$ için operatörlerin fonksiyona yaklaşımı

Örnek

$(a_n) = (n^{1/2})$ ve $(b_n) = (n^{1/3})$ olsun. $n = 50$ için Şekil 6.11.'de ve $n = 100$ için Şekil 6.12.'de maksimum-çarpım tip genelleştirilmiş Szász operatörlerinin (mavi) ve lineer genelleştirilmiş Szász operatörlerinin (siyah), $f(x) = x^2$ fonksiyonuna (kırmızı) yaklaşımları karşılaştırılmaktadır.



Şekil 6.11. $n = 50$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması



Şekil 6.12. $n = 100$ için yaklaşımın lineer operatörler ile karşılaştırılması

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaklaşım teoride operatör dizilerinin yaklaşım fonksiyonuna en iyi yakınsama oranını vermesi önemli bir problemdir. Bu çalışmada ele alınan genelleştirilmiş lineer olmayan operatörlerin fonksiyonlara yaklaşım derecesi (a_n) ve (b_n) dizilerinin seçimi ile [4]- [7]'de incelenen lineer olmayan operatörlerden daha iyidir. Bu durum yakınsaklık oranlarının karşılaştırıldığı grafiklerden gözlemlenebilir.

Yaklaşım teorisinde çalışılan diğer önemli operatörlerin bazı genelleştirmeleri için benzer sonuçlar incelenebilir. Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

Bu çalışma çok değişkenli maksimum-çarpım tip operatörlere genişletilebilir. Bazı maksimum-çarpım tip operatörler için bu tip incelemeler [12]'de verilmiştir. Bu inceleme genelleştirilmiş operatörlere genişletilebilir.



KAYNAKLAR

1. Abdullayeva, A. E. and Mammadova, A. N. (2013). On order of approximation function by generalized Szász operators and Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 38, 3-8.
2. Bede, B., Nobuhara, H., Fodor, J. and Hirota, K. (2006). Max-product shepard approximation operators. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 10(4), 494-497.
3. Bede, B., Nobuhara, H., Daňková, M. and Di Nola, A. (2008). Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 804-820.
4. Bede, B., Coroianu L. and Gal, S. G. (2009). Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2009, Article ID 590589, doi: 10.1155/590589.
5. Bede, B. and Gal, S. G. (2010). Approximation by nonlinear Bernstein and Favard-Szász-Mirakjan operators of max-product kind. *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 8(2), 193-207.
6. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Bleimann-Butzer-Hahn operators of max-product kind. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 51(3), 397-415.
7. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Favard-Szász-Mirakjan operator of max-product kind. *Filomat*, 24(3), 55-72.
8. Bede, B., Coroianu, L. and Gal., S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Meyer-König and Zeller operator of max-product kind. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 31(3), 232-253.
9. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Baskakov operators of max-product kind. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 15(4), 193-218.
10. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2011). Approximation by truncated Favard-Szász-Mirakjan operator of max-product kind. *Demonstratio Mathematica*, 44(1), 105-122.
11. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2011). Approximation and shape preserving properties of the truncated Baskakov operator of max-product kind.

- Revista de la Unión Matemática Argentina*, 52(1), 89-107.
12. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2016). *Approximation by max-product type operators*. New York: Springer International Publishing.
 13. Çetin, N., İspir, N. (2013). Approximation by complex modified Szász-Mirakjan operators. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 50(3), 355-372.
 14. Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L. (1980). A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. *Indagationes Mathematicae*, 42, 255-262.
 15. Butzer, P. L. and Karsli, H. (2009). Voronovskaya-type theorems for derivatives of the Bernstein-Chlodovsky polynomials and the Szász-Mirakjan operator. *Commentationes Mathematicae*, 49 (1), 33-58.
 16. Büyükyazıcı, İ. (2009). On the approximation properties of two-dimensional q -Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Mathematical Communications*, 14(2), 255-269.
 17. Büyükyazıcı, İ. (2010). Approximation by Stancu-Chlodowsky polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (1), 274-282.
 18. Büyükyazıcı, İ. and Sharma, H. (2012). Approximation Properties of Two-Dimensional q -Bernstein-Chlodowsky-Durrmeyer Operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 33(12), 1351-1371.
 19. Coroianu, L. and Gal, S., G. (2011). Classes of functions with improved estimates in approximation by the max-product Bernstein operator. *Analysis and Applications*, 9(3), 249-274.
 20. Gadjiyev, A., D., Efendiev, R., O. and İbikli, E. (1998). Generalized Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 28(4), 1267-1277.
 21. Gal, S. G. (2008). *Shape-preserving approximation by real and complex polynomials*. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser.
 22. Gal, S. G. (2011). Approximation by max-product type nonlinear operators. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 56(2), 341-352.
 23. Gupta, V., Verma, D. K. (2012). Approximation by complex Favard-Szasz-Mirakjan-Stancu operators in compact disks. *Mathematical Sciences*, 6(25), 1-8.
 24. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2016). Quantitative estimates for generalized Szász

- operators of max-product kind. *Results in Mathematics*, 70(3), 447-456.
25. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2016). Shape preserving properties of generalized Szász operators of max-product kind. *General Mathematics*, 24(1-2), 71-79.
 26. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2018). Approximation by Bernstein-Chlodowsky operators of max-product kind. *Mathematical Communications*, 23, 205-225.
 27. İspir, N., Atakut, C. (2002). Approximation by modified Szász-Mirakjan operators on weighted spaces. *Proceedings Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)*, 112(4), 571-578.
 28. İzgi, A., Büyükyazıcı, İ. (2006). On a generalization of Bernstein-Chlodovsky polynomials for two variables. *International Mathematical Forum*, 1(21-24), 1001-1015.
 29. Karsli, H. (2012). A Voronovskaya-type theory for the second derivative of the Bernstein-Chlodovsky polynomials. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 61(1), 9-19.
 30. Lehnhoff, H. G. (1984). On a modified Szász-Mirakjan operator. *Journal of Approximation Theory*. 42, 278-282.
 31. Mahmudov, N. I. (2012). Approximation by the q -Szász-Mirakjan operators. *Abstract and Applied Analysis*. Article ID 754217.
 32. Piriyeva, A. E. (2004). On order of approximation of functions by generalized Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 21, 157-164.
 33. Popoviciu, T. (1938). Deux remarques sur les fonctions convexes. *Bull.Soc. Sci. Acad. Roumanie*, 220, 45-49.
 34. Pych-Taberska, P. and Karsli, H. (2011). On the rates of convergence of Bernstein-Chlodovsky polynomials and their Bézier-type variants. *Applicable Analysis*, 90(3-4), 403-416.
 35. Szasz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
 36. Stypinski, Z. (1974). Theorem of Voronovskaya for Szász-Chlodovsky operators. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 1, 133-137.
 37. Totik, V. (1994). Approximation by Bernstein polynomials. *American Journal of Mathematics*, 116(4), 995-1018.

- 38. Walczak, Z. (2003). On modified Szász-Mirakjan operators. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 33(1), 93-107.
- 39. Wang, H., Pu, F., Wang, K. (2014). Shape-preserving and convergence properties for the q -Szász-Mirakjan operators for fixed $q \in (0, 1)$. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 563613.
- 40. Xiehua, S. (1994). On the convergence of the modified Szász-Mirakjan operator. *Approximation Theory and its Applications*, 10(1), 20-25.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜNGÖR, Şule Yüksel
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 30/01/1987, Kayseri
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 (506) 842 09 75
 e-mail : sulegungor@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	2012
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Böl.	2009
Lise	Ankara Anadolu Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2016). Quantitative estimates for generalized Szász operators of max-product kind. *Results in Mathematics*, 70(3), 447-456.
2. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2016). Shape preserving properties of generalized Szász operators of max-product kind. *General Mathematics*, 24(1-2), 71-79.
3. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2018). Approximation by Bernstein-Chlodowsky operators of max-product kind. *Mathematical Communications*, 23, 205-225.

Uluslararası Bildiriler

1. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2016, 26-29 May). Shape preserving properties of generalized Szász operators of max-product kind. *The 12th International Conference on Approximation Theory and its Applications-ICATA*, Sibiu, Romania.
2. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2017, 14-18 August). Approximation by generalized Bleimann-Butzer-Hahn operators of max-product kind. *The 11th Congress of International Society for Analysis, its Applications and Computations (ISAAC)*, Växjö, Sweden.

Ulusal Bildiriler

1. Güngör, Ş. Y., İspir, N. (2015, 11-12 Haziran). Maksimum-çarpım tip Bernstein-Chlodowsky operatörleri ile yaklaşım. *10. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu*, Ankara.



GAZİ GELECEKTİR..