



**ZAMFIRESCU DÖNÜŞÜMÜNÜN
BAZI GENELLEŞTİRMELERİ**

Hakan ERGÜL

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
2018
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMFIRESCU DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Hakan ERGÜL

**Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2018**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
TEZ ONAY FORMU



ZAMFİRESCU DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR danışmanlığında, Hakan ERGÜL tarafından hazırlanan bu çalışma, 26/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun **10.05/2018** tarih ve **...19.../...14.....** nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMFIRESCU DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Bu tezde, $\psi - \phi$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü ilk olarak verilmiş ve bu dönüşümünün tam metrik ve kuvvetli b -metrik uzaylarda bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ψ ve ϕ uzaklık değiştiren fonksiyonlarına konvekslik şartı eklenerek $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına Mann ve Ishikawa iterasyonu ile yaklaşmıştır.

2018, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Uzaklık değiştiren fonksiyon, zayıf daraltan dönüşüm, Zamfirescu dönüşümü, b -metrik uzay, kuvvetli b -metrik uzay, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonu.

ABSTRACT

MS Thesis

SOME GENERALIZATIONS OF ZAMFIRESCU MAPPING

Hakan ERGÜL

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

In this thesis, it is for the first time introduced $\psi - \phi$ -weak Zamfirescu mapping and it is showed that $\psi - \phi$ -weak Zamfirescu mapping has a unique fixed point in complete metric and complete strong b -metric spaces. Also by adding convexity condition to the altering distance functions ψ and ϕ , it is approximated to fixed points of $\psi - \phi$ -weak contraction mapping with the Mann and Ishikawa iterations.

2018, 50 pages

Keywords: Altering distance function, weak contraction mapping, zamfirescu mapping, b -metric, strong b -metric, Mann iteration, Ishikawa iteration.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıŐtır.

Bu tezi hazırlarken her türlü görüŐ, öneri, bilgi ve engin tecrübesini benimle paylaşan ve tezin nihai haline gelmesini kendisine borçlu olduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüŐ olduğum destekten dolayı aileme, özellikle tez aşamasında bana sabırla katlandıkları için canım eŐim Gonca ERGÜL ve küçük kızım Ezgi Nihal ERGÜL'e teşekkür ederim.

Hakan ERGÜL

Nisan 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Genel Kavramlar	3
2.2. Sabit Nokta Kavramı	9
2.3. Sabit Nokta Teoremleri	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
3.1. İterasyon Yöntemleri.....	23
3.2. b -metrik Uzay Kavramı ve Genel Özellikleri	25
3.3. Zayıf Daraltan ve $\psi - \phi$ –Zayıf Daraltan Dönüşümler	29
3.4. Zamfirescu Dönüşümü	30
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1 $\psi - \phi$ –zayıf Zamfirescu Dönüşümü.....	33
4.2. $\psi - \phi$ -zayıf Daraltan Dönüşümün Sabit Noktalarına Mann ve Ishikawa İterasyonlarıyla Yaklaşma	45
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER DİZİNİ

$B_d(x_0; r)$	(X, d) metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$B'_d(x_0; r)$	(X, d) metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş yuvar
$D_d(x_0; r)$	(X, d) metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$S_d(x_0; r)$	(X, d) metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$d(A)$	(X, d) metrik uzayında A kümesinin çapı
A°	A kümesinin içi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}_+	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
\mathbb{Q}	Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
$(N, \ \cdot\)$	Normlu lineer uzay
$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	İç çarpım uzayı
$F(f)$	f dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$f^n x$	x noktasının f dönüşümü altındaki n -inci iterasyonu
f'	f fonksiyonunun türevi
$L(X, Y)$	Tanım kümesi X değer kümesi Y olan lineer dönüşümlerin kümesi
$C(X, Y)$	Tanım kümesi X değer kümesi Y olan sürekli lineer dönüşümlerin kümesi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. İlk 8 adımda Picard iterasyonunun aldığı değerler	10
Çizelge 4.1. 0.5 ve 6 başlangıç değerli Picard iterasyonu	40



1. GİRİŞ

Sabit Nokta Teorisi, belirli uzaylarda verilen fonksiyonların hangi şartlar altında sabit noktaya yani $f(x) = x$ şartını sağlayan bir x noktasına sahip olduğu konusuna odaklanır. Başta uygulamalı matematik, mühendislik ve ekonomi olmak üzere sayısal görüntü işleme, popülasyon biyolojisi, oyun teorisi, internet arama motorları gibi birçok farklı alanda uygulaması bulunan sabit nokta teoremleri, bu alanlarda karşılaşılan diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği probleminde sıkça kullanılan araçlardır. Diğer yandan bazı sabit nokta teoremlerinin metrik tamlığı karakterize etmek gibi işlevleri de vardır (Subrahmanyam 1975).

Sabit nokta teoremleri arasında Banach Daralma İlkesi özel bir önemi haizdir. Esasında bu teorem 1922 yılında S. Banach'ın doktora tezindeki haliyle tam normlu lineer uzaylarda ifade edilmiştir. Aynı yıllarda F. Hausdorff tarafından metrik uzay kavramının ortaya atılmasıyla ilk kez 1930'da R. Caccioppoli, bu teoremi metrik uzaylara uygulamıştır.

Daha çok metrik uzaylardaki ifadesiyle bilinen Banach Daralma İlkesi, kullanışlılığı ve basitliği nedeniyle çokça kullanılmış ve birçok genelleştirmesi yapılmıştır. Edelstein (1961), Rakotch (1962), Chu and Diaz (1965), Boyd and Wong (1969) bu teoremin ilk genelleştirmelerinden bazılarıdır. Bu konuda daha fazla bilgi için 149 tane daralma şartının karşılaştırıldığı Rhoades (1977) çalışmasına bakılabilir.

Daralma şartı üzerinde yapılan bazı değişikliklerle elde edilen bu çalışmaların yanında çalışılan metrik uzay yapısı değiştirilerek elde edilmiş birçok genelleştirme de mevcuttur. Yarım metrik, b -metrik, kuvvetli b -metrik, fuzzy, sıralı metrik uzaylar bunlardan sadece birkaçıdır.

Sunulan tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, ikinci bölüm olan Kuramsal Temeller bölümünde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer

verilmiştir. Yine bu bölümde sabit nokta kavramı ve örneklerine yer verilmiş ve daraltan, genişlemeyen ve kesin daraltan dönüşümler tanımlanmıştır. Ayrıca metrik sabit nokta teorisinde sıkça karşılaşılan bazı sabit nokta teoremleri ve ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde öncelikle tezde kullanılacak olan iterasyon yöntemlerinden Picard, Krasneselskij, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemleri tanıtılmıştır. Ayrıca metrik uzayların bir genelleştirmesi olan b -metrik ve kuvvetli b -metrik uzay kavramları verilmiş, yine tezin ana konusu olan zayıf daraltan dönüşüm sınıfları ve Zamfirescu sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölüm olan Araştırma Bulguları bölümünün birinci kısmında $\psi - \phi$ -zayıf Zamfirescu dönüşümünün tam metrik uzaylarda ve tam kuvvetli b -metrik uzaylarda bir tek sabit noktası olduğu gösterilmiş, ikinci kısmında ise $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşümün verilen bazı şartlar altında Mann ve Ishikawa iterasyonları ile sabit noktasına yaklaşılmıştır.

Beşinci bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir (Kolmogorov and Fomin 1963).

Tanım 2.1.2 : (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$B_d(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$B'_d(x_0; r) = \{x \in X : 0 < d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş yuvar,

$$D_d(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$S_d(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.3: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ boş olmayan bir küme olmak üzere A kümesinin çapı

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Şayet $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.4: (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ boş olmayan iki küme olsun. A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

olarak tanımlanır. Eğer A kümesi bir tek noktadan oluşuyorsa bu $x \in X$ noktasının B kümesine uzaklığı

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $A \subset X$ altkümesi verilsin. Bir $x \in A$ için $B_d(x; r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa x noktasına A kümesinin iç noktası denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesine A nin içi denir ve A° ile gösterilir (Kolmogorov and Fomin 1963).

Tanım 2.1.6: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $A \subset X$ altkümesi verilsin. $A^\circ = A$ ise A kümesine açık küme denir. Tümleyeni açık olan kümeye de kapalı küme denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > N_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak, x e de bu dizinin limiti denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.8: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.9: (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa X uzayına tam metrik uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.10: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{n_k\}$ dizisi $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ olacak şekilde bir pozitif terimli dizi olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir altdizisi denir (Rudin 1976).

Tanım 2.1.11: (X, d) metrik uzayında her dizi yakınsak bir altdiziye sahipse bu uzaya (dizisel) kompakt metrik uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.12: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$d(x, y) < \delta \text{ olduğunda } \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

veya denk bir ifadeyle

$$f(B_d(x_0; \delta)) \subset B_\rho(f(x_0); \varepsilon)$$

şartını sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir. Şayet f dönüşümü X in her noktasında sürekli ise f dönüşümü X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.13: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Şayet X uzayındaki $x_n \rightarrow x$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ oluyorsa f dönüşümü dizisel süreklidir denir.

Tanım 2.1.14: V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+$: $V \times V \rightarrow V$ ve \cdot : $F \times V \rightarrow V$ şeklinde ikili işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir vektör uzay denir.

I. $(V, +)$ değişmeli gruptur. Yani her $x, y, z \in V$ için

- i.** $x + y \in V$ (kapalılık özelliği)
- ii.** $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)
- iii.** $x + y = y + x$ (değişme özelliği)
- iv.** $x + \theta = x$ (birim özelliği)
- v.** $x + (-x) = 0$ olacak şekilde $-x \in V$ elemanı vardır. (ters eleman özelliği)

II. Her $\alpha, \beta \in F$ ve her $x, y \in V$ için

- a.** $\alpha \cdot x \in V$
- b.** $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- c.** $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- d.** $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
- e.** $1 \cdot x = x$

Burada $F = \mathbb{R}$ ise V ye reel vektör uzay, $F = \mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.15: V bir vektör uzay ve $A \subseteq V$, bu uzayın boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $x, y \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks küme denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.16: V bir F cismi üzerinde vektör uzay ve $\Omega \subset V$ olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ ve $\alpha, \beta \in F$ için $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \Omega$ oluyorsa Ω uzayına V vektör uzayının altuzayıdır denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.17: V_1 ve V_2 , F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T: V_1 \rightarrow V_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in V_1$ ve $\alpha \in K$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer dönüşüm (veya lineer operatör) denir. Tanım kümesi X , değer kümesi Y olan tüm lineer dönüşümlerin kümesi $L(X, Y)$ ile, sürekli lineer dönüşümlerin kümesi ise $C(X, Y)$ ile gösterilir. Değer kümesi F cismi olan lineer dönüşümlere ise lineer fonksiyonel denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.18: V bir reel vektör uzayı, $M \subseteq V$ konveks bir küme ve $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. Her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

şartını sağlayan f dönüşümüne konveks dönüşüm denir (Reed and Simon 1980).

Teorem 2.1.19: $I \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu I° kümesinde süreklidir (Papadopoulos 2005).

Tanım 2.1.20: N , bir F cismi üzerinde vektör uzay ve $\|\cdot\| : N \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\|x\|$, fonksiyonun x noktasındaki değerini göstermek üzere her $x, y \in N$ için

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- ii. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$, ($\alpha \in F$)
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.21: $(N_1, \|\cdot\|_1)$, $(N_2, \|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay ve $T: N_1 \rightarrow N_2$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $v \in N_1$ için

$$\|Tv\|_2 \leq M \|v\|_1$$

olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa T ye sınırlı lineer dönüşüm denir (Reed and Simon 1980).

Tanım 2.1.22: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

$(N, \|\cdot\|)$ normlu uzayı olmak üzere $\|x - y\| = d(x, y)$ olarak tanımlanırsa bu durumda N bir metrik uzay olur. Buradaki d metriğine norm metriği denir.

Tanım 2.1.23: $(N, \|\cdot\|)$ normlu uzay $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan norm metriğine göre tam ise N uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.24: H bir reel vektör uzay ve $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in H$ ve her $\alpha \in F$ için

- i. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ii. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii. $\langle x, x \rangle \geq 0$
- iv. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- v. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

şartlarını sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna H üzerinde bir iç çarpım ve $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.25: H bir iç çarpım uzayı olmak üzere $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ şeklinde tanımlanırsa d dönüşümü bir metriktir. Eğer H bu metriğe göre tam ise H uzayına Hilbert uzayı denir (Kreyszig 1978).

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1: X boş olmayan bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Şayet $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa bu noktaya f dönüşümünün sabit noktası denir. f nin sabit noktalarının kümesi $F(f)$ ile gösterilir.

Aşağıda bazı dönüşümlerin sabit noktalarına ait örnekler verilmiştir.

Örnek 2.2.2: 1) $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $F(f) = \{0, 1\}$ dir.

2) X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $f : X \rightarrow X$ özdeş dönüşümü için $F(f) = X$ tir.

3) $f : (0,1] \rightarrow (0,1]$, $f(x) = \frac{x}{2}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur, yani $F(f) = \emptyset$ dir.

4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{2} + x$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

5) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ dönüşümü de sabit noktası olmayan bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.3: (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x \in X$ için $f^0(x) = x$ ve $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ olarak tanımlanan $f^n(x)$ e, x noktasının f dönüşümü altındaki n -inci iterasyonu denir.

Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde elde ettiğimiz $\{x_n\}$ dizisine x_0 başlangıç değerli ardışık yaklaşımlar dizisi denir. Bu dizi aynı zamanda x_0 noktasında başlayan Picard iterasyonu olarak da adlandırılır (Berinde 2007).

Örnek 2.2.4: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü $f(x) = x^2$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun $x_0 = 0,99$ başlangıç değerli Picard iterasyon dizisinin ilk 8 terimi aşağıdaki gibidir:

Çizelge 2.1. İlk 8 adımda Picard iterasyonunun aldığı değerler

	Picard İterasyonu
x_0	0,99
x_1	0,9801
x_2	0,96059601
x_3	0,92274469442792
x_4	0,851457771094875
x_5	0,724980335957853
x_6	0,525596487525562
x_7	0,276251667699208
x_8	0,0763149839065936

Bundan sonra f dönüşümünün x deki değerini $f(x)$ yerine fx sembolü ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.5: $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

- i. Sürekli ve azalmayan,
- ii. $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona uzaklık değiştiren fonksiyon (altering distance function) denir (Khan, Swaleh and Sessa 1984).

Tanım 2.2.6: (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve f^n bu fonksiyonun n -inci iterasyonu olmak üzere bir $x_0 \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) = 0$$

oluyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında asimptotik regülerdir denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ için bu şartı sağlıyorsa f fonksiyonu asimptotik regülerdir denir (Browder and Petryshyn 1966).

Tanım 2.2.7: (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

şartını sağlayan f dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm ve bu şartı sağlayan en küçük α sayısına da Lipschitz sabiti denir (Ansari 2010).

Tanım 2.2.8: (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü Lipschitz sabiti $\alpha < 1$ olan bir Lipschitzian dönüşüm yani $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüme daraltan veya büzülme dönüşümü denir (Ansari 2010).

Örnek 2.2.9: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $fx = \frac{2x}{3}$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu daraltan bir dönüşümdür. Gerçekten

$$|fx - fy| = \left| \frac{2x}{3} - \frac{2y}{3} \right| \leq \frac{2}{3} |x - y|$$

olduğundan $\alpha = \frac{2}{3}$ için f bir daraltan dönüşümdür.

Önerme 2.2.10: $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f nin daraltan dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a, b)$ için $|f'(x)| \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha < 1$ sayısının olmasıdır (Ansari 2010).

İspat: f bir daraltan dönüşüm olsun. O halde her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

olacak şekilde bir $\alpha < 1$ vardır. Buradan her $x, x + h \in [a, b]$ için

$$|f(x + h) - f(x)| \leq \alpha |h|$$

olup $h \neq 0$ için

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| \leq \alpha$$

olur. Böylece

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \alpha$$

elde edilir.

Tersine her $x \in (a, b)$ için $|f'(x)| \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha < 1$ olduğunu kabul edelim. Ortalama Değer Teoremi'nden $x \neq y$ şartını sağlayan her $x, y \in [a, b]$ için

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. Ayrıca $|f'(x)| \leq \alpha$ olduğu için

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq \alpha$$

yani

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

olup buradan f nin daraltan olduğu görülür.

Örnek 2.2.11: $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \frac{2x^2}{5}$ dönüşümü verilsin. Her $x \in [0,1]$ için

$$f'(x) = \frac{4x}{5} \leq \frac{4}{5} < 1$$

olup f dönüşümü Lipschitz sabiti $\alpha = \frac{4}{5}$ olan bir daraltan dönüşümdür.

Örnek 2.2.12: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm daraltan dönüşüm değildir. Yani $|\cos x - \cos y| \leq \alpha |x - y|$ olacak şekilde bir $\alpha \in (0,1)$ bulamayız. Gerçekten bu şekilde bir α sayısı olsaydı $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \right| \leq \alpha$$

ifadesinde $y \rightarrow x$ için limit alınır

$$|\sin x| \leq \alpha$$

elde edilir. Bu da $x = \frac{\pi}{2}$ değeri için yanlış olur.

Tanım 2.2.13: (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) < d(x, y)$$

şartını sağlayan f dönüşümüne kesin daraltan (contractive, strict contraction, shrinking) dönüşüm denir (Edelstein 1962).

Örnek 2.2.14: $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ dönüşümü $fx = x + \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon kesin daraltandır. Gerçekten birbirinden farklı her $x, y \in [1, \infty)$ için $1 - \frac{1}{xy} \in (0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} |fx - fy| &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &\leq |x - y| \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

olur. Üstelik f nin hiçbir sabit noktası yoktur.

Tanım 2.2.15: (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq d(x, y)$$

şartını sağlayan f dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Edelstein 1964).

Örnek 2.2.16: $f : X \rightarrow X$, $fx = x + 1$ şeklinde verilen f dönüşümü, sabit noktası olmayan ve genişlemeyen bir dönüşümdür.

Not: Yukarıda tanımladığımız bazı dönüşüm sınıfları arasındaki ilişkiyi şöyle gösterebiliriz:

$$\text{kesin daraltan} \Rightarrow \text{daraltan} \Rightarrow \text{genişlemeyen} \Rightarrow \text{Lipschitzian}$$

2.3. Sabit Nokta Teoremleri

Bu başlık altında öncelikle Banach Daralma İlkesi, Kannan ve Chatterjea sabit nokta teoremleri ve diğer bazı sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

Teorem 2.3.1: $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli fonksiyonu en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $f(a), f(b) \in [a, b]$ olduğu için $f(a) \geq a$ ve $f(b) \leq b$ dir. Dolayısıyla $f(a) - a \geq 0$ ve $f(b) - b \leq 0$ dır. Diğer yandan $g(x) = f(x) - x$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu g fonksiyonu da $[a, b]$ aralığında süreklidir ve $g(b) \leq 0 \leq g(a)$ dir. Ara Değer Teoremi gereği bir $c \in (a, b)$ vardır öyle ki $g(c) = 0$ dir. Buradan

$$g(c) = f(c) - c = 0$$

olup $f(c) = c$ dir.

Teorem 2.3.2 (Banach Daralma İlkesi): (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow X$ daraltan dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisi bu dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Banach 1922).

İspat: f dönüşümü için daralma sabiti $\alpha \in [0,1)$ olsun. Keyfi bir $x \in X$ elemanı için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Öncelikle $n = 0,1,2, \dots$ için

$$d(f^n x, f^{n+1} x) \leq \alpha d(f^{n-1} x, f^n x) \leq \dots \leq \alpha^n d(x, f x)$$

elde edilir. Buradan $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^m x) &\leq d(f^n x, f^{n+1} x) + d(f^{n+1} x, f^{n+2} x) + \dots + d(f^{m-1} x, f^m x) \\ &\leq \alpha^n d(x, f x) + \alpha^{n+1} d(x, f x) + \dots + \alpha^{m-1} d(x, f x) \\ &\leq \alpha^n d(x, f x) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}] \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x, f x) \end{aligned}$$

olup $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(f^n x, f^m x) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu bize $\{f^n x\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Ayrıca X metrik uzayı tam olduğu için bu dizi $x_0 \in X$ gibi bir noktaya yakınsar. f dönüşümü sürekli olduğu için

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1} x = f \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f^n x \right] = f x_0$$

olur. Böylece x_0 noktası, f dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki x_0 ve \bar{x} , f dönüşümünün iki farklı sabit noktası olsun. Buradan

$$d(x_0, \bar{x}) = d(f x_0, f \bar{x}) \leq \alpha d(x_0, \bar{x})$$

eşitsizliğini elde edilir. Bu eşitsizlikte $d(x_0, \bar{x}) \neq 0$ olması halinde $1 \leq \alpha$ çelişkisi elde edilir. Demekki $d(x_0, \bar{x}) = 0$ olmalıdır. Yani $x_0 = \bar{x}$ olup sabit nokta tektir.

Not: i. Tam olmayan bir metrik uzayda bir daraltan dönüşümün sabit noktası olmayabilir. Örneğin $f : \left(0, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right)$ fonksiyonu $f x = x^2$ şeklinde tanımlansın. Bu

fonksiyon $\alpha = \frac{2}{3}$ için daraltan bir dönüşümdür. Fakat sabit noktası olabilecek 0 ve 1 elemanları $(0, \frac{1}{3})$ kümesinde olmadığından sabit noktası yoktur.

ii. Tam metrik uzayda, daraltan olmayan bir dönüşümün sabit noktası olmayabilir. Örneğin $f: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x \in (1,2] \end{cases}$$

şeklinde verilsin. f dönüşümü daraltan bir dönüşüm değildir ve sabit noktası da yoktur.

Önerme 2.3.3: (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow X$ daraltan dönüşümünün daralma sabiti α ise f^n dönüşümü de daraltan dönüşümdür ve daralma sabiti α^n dir. Dahası f dönüşümünün sabit noktası f^n dönüşümünün de sabit noktasıdır. Dolayısıyla $F(f) \subset F(f^n)$ dir (Berinde 2007).

Not: i. Daraltan dönüşümler, sürekli dönüşümlerdir. Bu nedenle sürekli olmayan bir dönüşüm, daraltan da olamaz.

ii. f dönüşümü daraltan ise f^n de daraltandır, fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.3.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm sürekli değildir dolayısıyla daraltan da değildir. Fakat $f^2x = 1$ olup sabit fonksiyon olduğundan f^2 dönüşümü daraltandır.

Önerme 2.3.5: (X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve bir $n \in \mathbb{N}$ için f^n bir daraltan dönüşüm ise f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Chu and Diaz 1965).

İspat: Banach Daralma İlkesi gereği f^n dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bu sabit noktaya a diyelim. Buradan

$$fa = f(f^n a) = f^n(fa)$$

olup fa da f^n dönüşümünün bir sabit noktası olur. f^n dönüşümünün sabit noktası tek olduğu için $fa = a$ olup a noktası f dönüşümünün bir sabit noktası olur. f dönüşümünün sabit noktası aynı zamanda f^n dönüşümünün de sabit noktası olduğundan f dönüşümünün sabit noktasının tekliği aşikardır.

Teorem 2.3.6: (X, d) kompakt metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve keyfi bir x noktası için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisi bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar (Edelstein 1962).

İspat: $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ dönüşümü

$$\psi(x) = d(x, fx)$$

şeklinde tanımlansın. ψ dönüşümü kompakt kümede sürekli bir dönüşüm olduğundan bu kümede minimum değerini alır. Diyelim ki $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alsın. Ayrıca kabul edelim ki $fx_0 \neq x_0$ dir. Buradan

$$\psi(fx_0) = d(fx_0, f^2x_0) < d(x_0, fx_0) = \psi(x_0)$$

olup $\psi(fx_0) < \psi(x_0)$ elde edilir. Bu ise ψ dönüşümünün x_0 noktasında minimum değerini almasıyla çelişir. Demekki $fx_0 = x_0$ olmalıdır yani x_0 noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstereyim. Kabul edelim ki x ve y noktaları f dönüşümünün iki farklı sabit noktasıdır. Bu durumda

$$d(x, y) = d(fx, fy) < d(x, y)$$

çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlış olup f dönüşümünün sabit noktası tektir.

Örnek 2.3.7: $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü $fx = \frac{1}{x+1}$ şeklinde tanımlansın. Birbirinden farklı her $x, y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= |fx - fy| \\ &= |x - y| \left| \frac{1}{(x+1)(1+y)} \right| \\ &< |x - y| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan f kesin daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $[0,1]$ kümesi kompakt olduğundan Teorem 2.3.6 gereğince bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit nokta $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir.

Teorem 2.3.8: (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü bir $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha [d(x, fx) + d(y, fy)]$$

şartını sağlıyorsa f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisi bu fonksiyonun sabit noktasına yakınsar (Kannan 1969).

İspat: Öncelikle keyfi bir $x_0 \in X$ elemanı için $x_n = f^n x_0 = f x_{n-1}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Buna göre $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(fx_{n-1}, fx_n) \\ &\leq \alpha [d(x_{n-1}, fx_{n-1}) + d(x_n, fx_n)] \\ &\leq \alpha [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\lambda := \frac{\alpha}{1-\alpha}$ denirse

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \\
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\vdots \\
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^n d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq [\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}]d(x_0, x_1) \\
&= \lambda^n \frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Burada $\lambda \in [0, 1)$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olup $\{x_n\}$ iterasyon dizisi Cauchy dizisi olur. Dolayısıyla X tam olduğu için $x_n \rightarrow p$ olacak şekilde bir $p \in X$ elemanı vardır. Buradan hareketle

$$d(x_n, fp) = d(fx_{n-1}, fp) \leq \alpha[d(x_{n-1}, fx_{n-1}) + d(p, fp)]$$

ifadesinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(p, fp) \leq \alpha[0 + d(p, fp)] \leq \alpha d(p, fp)$$

elde edilir. Sonuç olarak $d(p, fp) = 0$ yani $fp = p$ olduğundan p noktasının, f dönüşümünün bir sabit noktası olduğu görülür.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstereyim. Kabul edelim ki p ve x^* , f dönüşümünün farklı sabit noktalarıdır. O halde

$$\begin{aligned}
d(p, x^*) &= d(fp, fx^*) \\
&\leq \alpha[d(p, fp) + d(x^*, fx^*)] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

olur ki bu $p = x^*$ olmasını gerektirir. Bu sonuç baştaki kabulümüzle çeliştiği için sabit nokta tektir.

Not: Kannan dönüşümü sürekli olmak zorunda değildir ve Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi de değildir.

Örnek 2.3.9: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu

$$fx = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{x}{5}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde verilsin. f fonksiyonu süreksizdir dolayısıyla daraltan dönüşüm değildir fakat Kannan dönüşümüdür. Bir tek sabit noktası vardır ve sabit noktası 0 dir.

Örnek 2.3.10: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $fx = \frac{x}{3}$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu daraltan dönüşümdür fakat Kannan dönüşümü değildir.

Teorem 2.3.11: (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü bir $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha [d(x, fy) + d(y, fx)]$$

şartını sağlıyorsa f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisi bu fonksiyonun sabit noktasına yakınsar (Chatterjea 1972).

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $x_n = f^n x_0 = f x_{n-1}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(fx_{n-1}, fx_n) \\ &\leq \alpha [d(x_{n-1}, fx_n) + d(x_n, fx_{n-1})] \\ &\leq \alpha [d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_2)$$

elde edilir. Böylece $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}]d(x_0, x_2) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_2) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Burada $\alpha \in [0, 1)$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olup $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla X tam olduğu için $x_n \rightarrow p$ olacak şekilde bir $p \in X$ elemanı vardır. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} d(x_n, fp) &= d(fx_{n-1}, fp) \\ &\leq \alpha[d(x_{n-1}, fp) + d(p, fx_{n-1})] \\ &\leq \alpha[d(x_{n-1}, fp) + d(p, x_n)] \end{aligned}$$

ifadesinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(p, fp) \leq \alpha[d(p, fp) + d(p, p)] \leq \alpha d(p, fp)$$

elde edilir. Sonuç olarak $d(p, fp) = 0$ yani $fp = p$ olduğundan p noktasının, f dönüşümünün bir sabit noktası olduğu görülür.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki p ve x^* , f dönüşümünün farklı sabit noktalarıdır. O halde

$$\begin{aligned} d(p, x^*) &= d(fp, fx^*) \\ &\leq \alpha[d(p, fx^*) + d(x^*, fp)] \\ &\leq \alpha[d(p, x^*) + d(x^*, p)] \\ &\leq 2\alpha d(p, x^*) \end{aligned}$$

olur ki bu $p = x^*$ olmasını gerektirir. Aksi halde $\alpha \geq \frac{1}{2}$ olur. Bu sonuç baştaki kabulümüzle çeliştiği için sabit nokta tektir.

Not: Chatterjea dönüşümü, sürekli olmak zorunda değildir ve Banach sabit nokta teoreminden ve Kannan dönüşümünden bağımsızdır.

Örnek 2.3.12: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $fx = -\frac{x}{2}$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu Kannan dönüşümü olup Chatterjea dönüşümü değildir.

Örnek 2.3.13: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu

$$fx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu Chatterjea dönüşümü olup Kannan dönüşümü değildir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde b -metrik uzaylar, zayıf daraltanlık, $\psi - \phi$ -zayıf daraltanlık, Zamfirescu dönüşümü ve bazı iterasyon yöntemleri ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları, Picard iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonudur.

Picard İterasyonu: (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere Picard iterasyonu,

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f x_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu literatürde ardışık yaklaşıklıklar dizisi olarak da adlandırılır.

Daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına tam metrik uzaylarda yaklaşmak için kullanılan iterasyon yöntemlerinden biri de Picard iterasyonudur. Ancak daraltan dönüşüm yerine başka bir dönüşüm sınıfı alındığında, o dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.1: $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü $f x = 1 - x$ biçiminde tanımlansın. f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu da $\frac{1}{2}$ noktasıdır. Picard iterasyonu için başlangıç değeri olarak $x_0 \neq \frac{1}{2}$ alındığında Picard iterasyon dizisi

$$\{x_n\} = \{x_0, 1 - x_0, x_0, 1 - x_0, \dots\}$$

şeklinde olup yakınsak bir dizi değildir. Dolayısıyla bu dönüşümün sabit noktasına Picard iterasyonu ile yaklaşamayacağımız için başka iterasyon yöntemlerini göz önüne almamız gerekir.

Krasnoselskij İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay ve $f : N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $\lambda \in (0,1)$ ve $x_0 \in N$ keyfi bir nokta olmak üzere Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Krasnoselskij iterasyonu, ilk olarak $\lambda = \frac{1}{2}$ için Krasnoselskij (1955) tarafından ortaya atılmış, yukarıda verdiğimiz şekline ise Schaefer (1957) genelleştirmiştir.

Mann İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir küme ve $f : N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n f x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır ve $M(x_0, a_n, f)$ ile gösterilir. Burada $\{a_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığındadır (Mann 1953).

Mann iterasyonu $a_n = \lambda$ şeklinde sabit dizi olarak alındığında Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir.

Ishikawa İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir küme ve $f : N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n f y_n \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_n f x_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $I(x_0, a_n, b_n, f)$ ile gösterilir. Burada $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığındadır (Ishikawa 1974).

Ishikawa iterasyonu, $b_n = 0$ şeklinde sabit dizi olarak alındığında Mann iterasyonuna indirgenir.

3.2. b -metrik Uzay Kavramı ve Genel Özellikleri

b -metrik kavramı, 1993 yılında Czerwik tarafından Banach Daralma İlkesi' nin metrik uzaylardan daha genel uzaylara taşınması amacıyla ortaya atılmıştır. Esasında üçgen eşitsizliği üzerinde yapılan değişiklik ile daha genel bir uzaklık fonksiyonu elde edilmiştir. Optimal taşıma güzergâhı (Xia 2009), SAR (sentetik aralıklı radar) görüntülerinden buz kütleleri analizi (McConnell, Kwok, Curlander, Kober and Pang 1991) ve ticari marka amblemleri (Cortelazzo, Mian, Vezzi and Zamperoni 1994) gibi birçok farklı alanda uygulaması vardır.

Tanım 3.2.1: X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ bir reel sayı olsun. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın.

- i. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iii. $\rho(x, z) \leq s [\rho(x, y) + \rho(y, z)]$

Bu durumda ρ fonksiyonuna b -metrik (bazı kaynaklarda metric-type veya quasi-distance) denir. Bu fonksiyonla birlikte X e b -metrik uzay denir ve (X, ρ, s) ile gösterilir (Macias and Segovia 1979), (Bakhtin 1989), (Czerwik 1993).

Not: i. b -metrik uzay, metrik uzayın bir genelleştirmesidir. Gerçekten $s = 1$ alınırsa iii. şartı $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ şartına dönüşür. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

ii. b -metrik uzaylarda dizilerin limiti tektir.

iii. b -metrik fonksiyonu her zaman sürekli değildir. Dolayısıyla $\{q_n\}$ dizisi q sayısına yakınsamak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(p, q_n) = d(p, q)$$

olması durumu $s \neq 1$ için genelde doğru olmaz.

Örnek 3.2.2: $\rho : [0,6] \times [0,6] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\rho(x, y) = |x - y|^2$ şeklinde tanımlansın. Metrik ve aynı zamanda b -metrik şartlarından i ve ii sağlanır. Fakat metriğin iii şartı $x = 2, y = 4$ ve $z = 6$ için sağlanmadığından ρ fonksiyonu bir metrik değildir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} |x - z|^2 &\leq (|x - y| + |y - z|)^2 \\ &= |x - y|^2 + |y - z|^2 + 2|x - y||y - z| \end{aligned}$$

olup $2|x - y||y - z| \leq |x - y|^2 + |y - z|^2$ olduğundan

$$|x - z|^2 \leq 2(|x - y|^2 + |y - z|^2)$$

yani

$$\rho(x, z) \leq 2(\rho(x, y) + \rho(y, z))$$

elde edilir. O halde $s = 2$ için b -metriğin iii şartı sağlanır.

Örnek 3.2.3 : $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ kümesi üzerinde

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \in \{0, 1\} \\ |x - y|, & x \neq y \in \{0\} \cup \{\frac{1}{2n} : n = 1, 2, \dots\} \\ 4, & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu, $s = \frac{8}{3}$ için bir b -metriktir fakat sürekli değildir.

Gerçekten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(0, \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{1}{2n}\right| = 0$$

olup $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ dizisi 0 sayısına yakınsar. Diğer yandan 1 sayısına yakınsadığına bildiğimiz $\{1\}$ sabit dizisini alalım. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(1, \frac{1}{2n}\right) = 4 \neq 1 = \rho(1, 0)$$

elde edilir. Bu bize ρ fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterir (Van An, Tuyen and Van Dung 2015).

b -metrik uzaylarda verilen birçok sabit nokta teoreminde b -metrik dönüşümünün sürekli olmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle b -metriğin her zaman sürekli olmaması durumunu ortadan kaldırmak için 2014 yılında Kirk ve Shahzad kuvvetli b -metrik kavramını ortaya atmıştır.

Tanım 3.2.4: X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ bir reel sayı olsun. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

- i. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iii. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + s\rho(y, z)$

Bu durumda ρ fonksiyonuna kuvvetli b -metrik veya sb -metrik denir. Bu fonksiyonla birlikte X kümesine kuvvetli b -metrik uzay veya sb -metrik uzay denir (Kirk and Shahzad 2014).

Not: i. Her kuvvetli metrik aynı zamanda b -metriktir. Gerçekten kuvvetli metriğin ii ve iii şartı gereği

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + s\rho(y, z)$$

ve

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + s\rho(y, x)$$

olup

$$\rho(x, z) \leq \frac{s+1}{2}(\rho(x, y) + \rho(y, z))$$

elde edilir. Burada $\frac{s+1}{2} \geq 1$ olduğundan ρ aynı zamanda bir b -metrik olur.

ii. Kuvvetli metrik dönüşümü süreklidir. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ sırasıyla x ve y sayılarına yakınsayan iki dizi olsun. d bir kuvvetli metrik dönüşümü olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, y_n) + sd(y_n, y) \\ &\leq sd(x, x_n) + d(x_n, y_n) + sd(y_n, y) \end{aligned}$$

olup

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq sd(x, x_n) + sd(y_n, y)$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, y) + sd(y, y_n) \\ &\leq sd(x_n, x) + d(x, y) + sd(y, y_n) \end{aligned}$$

ifadesinden

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq sd(x, x_n) + sd(y_n, y)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq sd(x, x_n) + sd(y_n, y)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifadede $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

bulunur. Bu bize d dönüşümünün (dizisel) sürekli olduğunu gösterir.

b -metrik ve kuvvetli metrik uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.2.5: (X, ρ, s) bir b -metrik(veya kuvvetli metrik) uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\}$ bu uzayda keyfi iki dizi olsun.

- a) $n \rightarrow \infty$ iken $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine b -yakınsak dizi denir.
- b) $m, n \rightarrow \infty$ iken $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine b -Cauchy dizisi denir.
- c) (X, ρ, s) b -metrik uzayında her b -Cauchy dizisi, b -yakınsak ise bu uzay tamdır (Khamsi ve Hussain 2010).

3.3. Zayıf Daraltan ve $\psi - \phi$ –Zayıf Daraltan Dönüşümler

Rhoades (2001), bir uzaklık değiştiren fonksiyon yardımıyla daraltan dönüşüm sınıfından daha genel olan bir dönüşüm sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Teorem 3.3.1: (X, d) tam metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ϕ bir uzaklık değiştiren fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y))$$

şartını sağlayan f dönüşümüne zayıf daraltan dönüşüm denir. Tam metrik uzayda bir tek sabit noktası vardır (Rhoades 2001).

Not: Teorem 3.3.1’de $k \in (0,1)$ olmak üzere $\phi(t) = kt$ alınır Banach Daralma İlkesi (Teorem 2.3.2) elde edilir.

2008 yılında Dutta ve Choudhury, Rhoades (2001)’ in vermiş olduğu zayıf daraltan dönüşümden daha genel olan $\psi - \phi$ –zayıf daraltan dönüşüm tanımını vermiştir.

Teorem 3.3.2: (X, d) tam metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ϕ ve ψ uzaklık değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa f dönüşümüne $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşüm denir ve tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir (Dutta and Choudhury 2008).

Not: i. Yukarıdaki teoremde geçen ψ sabit fonksiyon alınırsa f , zayıf daraltan dönüşüme (Teorem 3.3.1) indirgenmiş olur.

ii. i. şartına ek olarak $k \in [0, 1)$ olmak üzere $\phi(t) = kt$ alındığında Banach Daralma İlkesi (Teorem 2.3.2) elde edilir.

3.4. Zamfirescu Dönüşümü

1972 yılında T. Zamfirescu, Banach Daralma İlkesi, Kannan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinin bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi vermiştir. Zamfirescu dönüşümünün sabit noktalarına yaklaşırken kullanılan çeşitli iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızları Akbulut ve Özdemir (2012) tarafından çalışılmıştır. Şimdi Zamfirescu tarafından 1972'de ortaya atılan teoremi veriyoruz:

Teorem 3.4.1: (X, d) bir tam metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

- i.** $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$
- ii.** $d(fx, fy) \leq \beta [d(x, fx) + d(y, fy)]$
- iii.** $d(fx, fy) \leq \gamma [d(x, fy) + d(y, fx)]$

şartlarından en az biri sağlanıyorsa f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Dahası her $x \in X$ için $\{f^n x\}$ iterasyon dizisi bu fonksiyonun sabit noktasına yakınsar (Zamfirescu 1972).

İspat: Öncelikle $\{x_n\} = \{f^n x\}$ iterasyon dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

(i) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1})$$

olur. (ii) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{\beta}{1-\beta} d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. (iii) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. $\delta := \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$ dersek $\delta \in [0, 1)$ olup yukarıda elde edilen üç durum sonucunda

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \delta d(x_n, x_{n+1})$$

bulunur. Bu bize $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğu için $x_n \rightarrow x'$ olacak şekilde bir $x' \in X$ vardır. Şimdi bu x' noktasının, f dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz: (i) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_n, fx') = d(fx_{n-1}, fx') \leq \alpha d(x_{n-1}, x')$$

olup bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x' = fx'$ elde edilir. (ii) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_n, fx') = d(fx_{n-1}, fx') \leq \beta [d(x_{n-1}, x_n) + d(x', fx')]$$

olup bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x' = fx'$ elde edilir. (iii) şartı sağlanıyorsa

$$d(x_n, fx') = d(fx_{n-1}, fx') \leq \gamma [d(x_{n-1}, x') + d(x_n, fx')]$$

olup bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $x' = fx'$ elde edilir. O halde her üç şartta da x', f dönüşümünün sabit noktası olur.

Sabit noktanın tek olduğunu göstermek için x' noktasından farklı bir z sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}d(fz, fx') &\leq \alpha d(z, x') \\d(fz, fx') &\leq \beta [d(z, fz) + d(x', fx')] \\d(fz, fx') &\leq \gamma [d(z, fx') + d(x', fz)]\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin üçü de $z = x'$ olmadığı sürece çelişki oluşturur. Dolayısıyla f dönüşümünün sabit noktası tektir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer vereceğiz. İlk olarak $\psi - \phi$ –zayıf daraltan dönüşüm şartlarını kullanarak Zamfirescu Sabit Nokta Teoremini (Teorem 3.4.1) genelleştireceğiz. Daha sonra bu genelleştirmenin kuvvetli b -metrik uzaylarda daha genel halini vereceğiz. Aşağıdaki tanımı ilk olarak veriyoruz.

4.1 $\psi - \phi$ –zayıf Zamfirescu Dönüşümü

Tanım 4.1.1: (X, d) bir metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, ψ, ϕ de iki uzaklık değiştiren fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$M_f(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}, \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(M_f(x, y)) - \phi(M_f(x, y)) \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümüne $\psi - \phi$ –zayıf Zamfirescu dönüşümü denir.

Şimdi $\psi - \phi$ –zayıf Zamfirescu dönüşümünün asimptotik regürlüğünü gösterelim.

Lemma 4.1.2: (X, d) bir metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ bir $\psi - \phi$ –zayıf Zamfirescu dönüşümü ise $\{x_n\} = \{fx_n\}$ iterasyon dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} M_f(x_n, x_{n+1}) = 0$ dir.

İspat: $x_n \neq x_{n+1}$ olmak üzere $M_f(x, y)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} M_f(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, fx_n) + d(x_{n+1}, fx_{n+1})}{2}, \frac{d(x_{n+1}, fx_n) + d(x_n, fx_{n+1})}{2} \right\} \\ &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \frac{d(x_{n+1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2})}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2} \right\}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden $\frac{d(x_n, x_{n+2})}{2} \leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}$ olup

$$M_f(x_n, x_{n+1}) = \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum: Eğer $M_f(x_n, x_{n+1}) = \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}$ ise

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \leq d(x_{n+1}, x_{n+2})$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(fx_n, fx_{n+1})) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \leq d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. Dolayısıyla $d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(x_n, x_{n+1})$ olur ki bu da $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisini sabit dizi yapar. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(fx_n, fx_{n+1})) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

olup $\phi(d(x_n, x_{n+1})) = 0$ olur. Bu durum $x_n \neq x_{n+1}$ olmasıyla çelişir.

2. Durum: Eğer $M_f(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ ise

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(fx_n, fx_{n+1})) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

$$\leq \psi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup ψ azalmayan olduğundan $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1})$ elde edilir. Yani $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalan (artmayan) bir dizidir. Dolayısıyla bu dizi bir $r \geq 0$ sayısına yakınsar. Buradan hareketle

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

ifadesinin $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r)$$

bulunur. Bu da $r = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $M_f(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ olduğundan $d(x_n, x_{n+1}) = M_f(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır.

Teorem 4.1.3: (X, d) tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir $\psi - \phi$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olsun. Bu durumda f bir tek sabit noktaya sahiptir ve Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: Öncelikle $\{x_n\} = \{f^n x\}$ şeklinde tanımlanan iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $m(k) > n(k) > k$ şartını sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \epsilon$$

olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Üstelik $m(k)$ sayısı, $n(k)$ sayısından büyük en küçük tam sayı alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \epsilon$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \rightarrow \epsilon \quad (4.2)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + 2d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \epsilon \quad (4.3)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

ifadesinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \rightarrow \epsilon \quad (4.4)$$

elde edilir. Aynı muhakeme ile

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \epsilon \quad (4.5)$$

bulunur. Diğer taraftan ψ azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon) &\leq \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \\ &= \psi(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})) \\ &\leq \psi(M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (4.2), (4.3), (4.4) ve (4.5)' den

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)})]\} \\ &= \max\{\epsilon, 0, \epsilon\} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

olur. Bu sonuç (4.1)' de yerine yazılırsa

$$\psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \phi(\epsilon)$$

çıkar. Buradan $\phi(\epsilon) \leq 0$ olur ki bu da $\epsilon = 0$ olmasını gerektirir. Bu sonuç, $\epsilon > 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır ve $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olmalıdır. X tam metrik uzayında bu dizi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{d(x_n, x^*), \frac{1}{2}[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)], \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})]\} \\ &= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. $x := fx_n$ ve $y := fx^*$ alınarak (4.1)' de yerine yazılırsa

$$\psi(d(fx_n, fx^*)) \leq \psi(M_f(x_n, x^*)) - \phi(M_f(x_n, x^*))$$

olur. (4.6) eşitliği de gözönüne alınarak $n \rightarrow \infty$ için bu ifadenin limiti alınırsa

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right)$$

yani

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*))$$

elde edilir. ψ azalmayan olduğundan $d(x^*, fx^*) \neq 0$ olduğu sürece eşitsizliğin sağ tarafı negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, fx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = fx^*$ dir. Yani x^* noktası f fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

Son olarak sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki x^* ve x^{**} noktaları f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktasıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi(d(x^*, x^{**})) &= \psi(d(fx^{**}, fx^*)) \\ &\leq \psi(M_f(x^*, x^{**})) - \phi(M_f(x^*, x^{**})) \\ &\leq \psi(d(x^*, x^{**})) - \phi(d(x^*, x^{**})) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $\phi(d(x^*, x^{**})) \leq 0$ elde edilir ki bu da $x^* = x^{**}$ olmasını gerektirir.

Örnek 4.1.4: $X = [0, 1] \cup \{2, 3, 4, \dots\}$ kümesi

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ |x - y|, & x \neq y \text{ ve } x, y \in [0, 1], \\ x + y, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde verilen metrik fonksiyonuyla birlikte bir tam metrik uzaydır (Boyd and Wong, 1969). $\psi, \phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ t^2, & t > 1. \end{cases}$$

ve

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}, & t > 1. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler uzaklık değiştiren fonksiyonlardır. Ayrıca $f: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & x \in [0, 1], \\ x - 1, & x \in \{2, 3, \dots\}. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi bu şartlarla verilen f dönüşümünün Teorem 4.1.3' teki şartları sağlayan bir $\psi - \phi$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olduğunu gösterelim. İspatımızda $x > y$ kabul edeceğiz ve 3 durum sözkonusu olacaktır.

1. Durum: $x, y \in [0, 1]$ olması halinde

$$\begin{aligned} \psi(d(fx, fy)) &= x - \frac{x^2}{2} - \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \\ &\leq (x - y) - \frac{1}{2}(x - y)^2 \\ &= d(x, y) - \frac{1}{2}(d(x, y))^2 \\ &= \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum: $x = 2$ ve $y \in [0, 1]$ olması halinde $fx = 1$ ve $d(fx, fy) = \left| 1 - \left(y - \frac{1}{2}y^2 \right) \right| \leq 1$ dir. Buradan

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(1) = 1$$

elde edilir. Ayrıca $d(x, y) = 2 + y$ olduğundan

$$\begin{aligned} \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)) &= (2 + y)^2 - \phi((2 + y)^2) \\ &= (2 + y)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} + 4y + y^2 > 1 \\ &\geq \psi(d(fx, fy)) \end{aligned}$$

bulunur.

3. Durum: $x \in \{3,4, \dots\}$ olması durumunu inceleyelim. Eğer $y \in [0,1]$ ise

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= d\left(x - 1, y - \frac{1}{2}y^2\right) \\ &\leq x + y - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Aksi halde yani $y \in \{2,3, \dots\}$ olursa

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= d(x - 1, y - 1) \\ &< x + y - 1 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \psi(d(fx, fy)) &= (d(fx, fy))^2 \\ &\leq (x + y - 1)^2 \\ &< (x + y)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece f dönüşümü, $\psi - \phi$ -zayıf daraltan bir dönüşümdür. Dolayısıyla bir tek sabit noktası vardır ve sabit noktası 0 dır (Dutta and Choudhury 2008).

Bu sabit noktaya $x_0 = 0.5$ ve $x_0 = 6$ başlangıç değerli Picard iterasyonlarıyla yaklaştığımızda elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Çizelge 4.1. 0.5 ve 6 başlangıç değerli Picard iterasyonu

	$x_0 = 0.5$ başlangıç değerli Picard iterasyonu	$x_0 = 6$ başlangıç değerli Picard iterasyonu
x_1	3.750000E-01	5.000000
x_2	3.046875E-01	4.000000
x_3	2.582703E-01	3.000000
x_4	2.249185E-01	2.000000
x_5	1.996243E-01	1.000000

Çizelge 4.1. (devam)

x_6	1.796994E-01	5.000000E-01
x_7	1.635535E-01	3.750000E-01
x_8	1.501786E-01	3.046875E-01
\vdots	\vdots	\vdots
x_{50}	3.521213E-02	3.946050E-02
\vdots	\vdots	\vdots
x_{100}	1.861500E-02	1.972738E-02
\vdots	\vdots	\vdots
x_{1000}	1.980816E-03	1.992669E-03

Şimdi Teorem 4.1.3' ün kuvvetli b -metrik uzaylardaki daha genel halini vereceğiz.

Teorem 4.1.5: (X, d, s) kuvvetli b -metrik uzayı tam bir uzay, $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ψ ve ϕ bir uzaklık değıştiren fonksiyonlar olsun. Her $x, y \in X$ için

$$M_f(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}, \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2s} \right\}$$

olmak üzere

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(M_f(x, y)) - \phi(M_f(x, y)) \quad (4.7)$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: İspatımız iki bölümden oluşacak. Öncelikle $\{M_f(x_n, x_{n+1})\}$ dizisinin 0 sayısına yakınsadığını göstereceğiz. $x_n \neq x_{n+1}$ olmak üzere $M_f(x, y)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} M_f(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, fx_n) + d(x_{n+1}, fx_{n+1})}{2}, \frac{d(x_{n+1}, fx_n) + d(x_n, fx_{n+1})}{2s} \right\} \\ &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \frac{d(x_{n+1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2})}{2s} \right\} \\ &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2s} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Kuvvetli b -metriğin üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{d(x_n, x_{n+2})}{2s} &\leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_{n+2})}{2s} \\ &\leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$M_f(x_n, x_{n+1}) = \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}$$

elde edilir. Lemma 4.1.2 den $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ olup $M_f(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ olduğu için $M_f(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır. Şimdi $\{x_n\} = \{f^n x\}$ iterasyon dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $k < n(k) < m(k)$ şartını sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \epsilon$$

olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Üstelik $m(k)$ sayısı, $n(k)$ sayısından büyük en küçük tam sayı alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \epsilon$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \rightarrow \epsilon \tag{4.8}$$

bulunur. Ayrıca

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + sd(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})$$

$$\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + 2sd(x_{n(k)}, x_{n(k)-1})$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \epsilon \quad (4.9)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + sd(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

ifadesinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \rightarrow \epsilon \quad (4.10)$$

elde edilir. Aynı muhakeme ile

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + sd(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq sd(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + sd(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \epsilon \quad (4.11)$$

bulunur. Diğer taraftan ψ azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon) &\leq \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \\ &= d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1}) \\ &\leq \psi(M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (4.8), (4.9), (4.10) ve (4.11)' den

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} M_f(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], \\ &\quad \frac{1}{2S}[d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)})]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \epsilon, 0, \frac{\epsilon}{s} \right\} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç (4.7)' de yerine yazılırsa

$$\psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \phi(\epsilon)$$

çıkarak. Buradan $\phi(\epsilon) \leq 0$ olur ki bu da $\epsilon = 0$ olmasını gerektirir. Bu sonuç, $\epsilon > 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olmalıdır. X tam kuvvetli b -metrik uzay olup bu dizi bir $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} M_f(x_n, x^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ d(x_n, x^*), \frac{1}{2} [d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, f x^*)], \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2s} [d(x_n, f x^*) + d(x^*, x_{n+1})] \right\} \\
&= \frac{d(x^*, f x^*)}{2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. $x := f x_n$ ve $y := f x^*$ olarak (4.7)' de yerine yazılırsa

$$\psi(d(f x_n, f x^*)) \leq \psi(M_f(x_n, x^*)) - \phi(M_f(x_n, x^*))$$

olur. Burada (4.12) de gözönüne alınarak $n \rightarrow \infty$ için bu ifadenin limiti alınır

$$\psi(d(x^*, f x^*)) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, f x^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, f x^*)}{2}\right)$$

yani

$$\phi\left(\frac{d(x^*, f x^*)}{2}\right) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, f x^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, f x^*))$$

elde edilir. ψ azalmayan olduğundan $d(x^*, f x^*) \neq 0$ olduğu sürece eşitsizliğin sağ tarafı negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, f x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = f x^*$ dir. Yani x^* noktası f fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki x^* ve x^{**} , f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktasıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\psi(d(x^*, x^{**})) &= \psi(d(fx^{**}, fx^*)) \\ &\leq \psi(M_f(x^*, x^{**})) - \phi(M_f(x^*, x^{**})) \\ &\leq \psi(d(x^*, x^{**})) - \phi(d(x^*, x^{**}))\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\phi(d(x^*, x^{**})) \leq 0$ elde edilir ki bu da $x^* = x^{**}$ olmasını gerektirir.

4.2. $\psi - \phi$ -zayıf Daraltan Dönüşümün Sabit Noktalarına Mann ve Ishikawa İterasyonlarıyla Yaklaşma

Bu kısımda Dutta ve Choudhury (2011)' in vermiş olduğu $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşümün bazı şartları değiştirilerek, dönüşümün sabit noktalarına Mann ve Ishikawa iterasyonlarıyla yaklaşılacaktır.

Teorem 4.2.1: X bir reel Banach uzayı, K da bu uzayın kapalı ve konveks bir altkümesi ve $f: K \rightarrow K$ bir $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşüm olsun. $\psi, \phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan fonksiyonları

- i. $\phi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0) = \{0\}$,
- ii. ψ konveks bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = 0$,
- iii. ϕ sürekli fonksiyon

şartlarını sağlasın. Bu durumda f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ şartını sağlayan $M(x_0, a_n, f)$ Mann iterasyonu bu sabit noktaya kuvvetli yakınsar.

İspat: ψ fonksiyonu konveks olduğundan Teorem 2.1.19'den $(0, \infty)$ 'da süreklidir. Ayrıca teoremdeki şartları sağlayan ψ ve ϕ , uzaklık değiştiren fonksiyonlar olup sabit noktanın varlığı ve tekliği Teorem 3.3.2'den dolayı aşıkardır. Bu sabit noktaya p diyelim. O halde $M(x_0, a_n, f)$ Mann iterasyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
\psi(\|x_{n+1} - p\|) &= \psi(\|(1 - a_n)x_n + a_nfx_n - p\|) \\
&\leq \psi((1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\|fx_n - p\|) \\
&\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n\psi(\|fx_n - p\|) \\
&\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n[\psi(\|x_n - p\|) - \phi(\|x_n - p\|)] \\
&\leq \psi(\|x_n - p\|) - a_n\phi(\|x_n - p\|)
\end{aligned}$$

olup $a_n\phi(\|x_n - p\|) \geq 0$ ve ψ azalmayan olduğundan $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ elde ederiz. Yani $\{\|x_n - p\|\}$ alttan sınırlı monoton azalan bir dizi olur. Dolayısıyla bir $r \geq 0$ sayısına yakınsar. Bir an için $r > 0$ kabul edilirse $\phi(r) > 0$ olup herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} a_n\phi(r) &\leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n\phi(\|x_n - p\|) \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} (\psi(\|x_n - p\|) - \psi(\|x_{n+1} - p\|)) \\
&\leq \|x_N - p\|
\end{aligned}$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ olması ile çelişir. Çelişki $r > 0$ olmasından kaynaklandığı için $r = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\|x_{n+1} - p\| \rightarrow 0$ dir.

Teorem 4.2.2: X bir reel Banach uzayı, K da bu uzayın kapalı ve konveks bir altkümesi ve $f: K \rightarrow K$ bir $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşüm olsun. $\psi, \phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan fonksiyonlar ve ψ konveks bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonlar Teorem 4.2.1'deki şartları sağlasın. Bu durumda f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \infty$ şartını sağlayan $I(x_0, a_n, b_n, f)$ Ishikawa iterasyonu bu sabit noktaya kuvvetli yakınsar.

İspat: Teorem 4.4'teki gibi sabit noktanın varlığı ve tekliği aşıkardır. Bu sabit noktaya p denilirse $I(x_0, a_n, b_n, f)$ Ishikawa iterasyonunun tanımından

$$\psi(\|x_{n+1} - p\|) = \psi(\|(1 - a_n)x_n + a_nfy_n - p\|)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \psi((1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\|fy_n - p\|) \\
&\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n\psi(\|fy_n - p\|) \\
&\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n(\psi(\|y_n - p\|) - \phi(\|y_n - p\|)) \\
&\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n(\psi(\|y_n - p\|)) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(\|y_n - p\|) &= \psi(\|(1 - b_n)x_n + b_nfx_n - p\|) \\
&\leq (1 - b_n)\psi(\|x_n - p\|) + b_n\psi(\|fx_n - p\|) \\
&\leq (1 - b_n)\psi(\|x_n - p\|) + b_n(\psi(\|x_n - p\|) - \phi(\|x_n - p\|)) \\
&= \psi(\|x_n - p\|) - b_n\phi(\|x_n - p\|)
\end{aligned}$$

olduğundan (4.13) den

$$\begin{aligned}
\psi(\|x_{n+1} - p\|) &\leq (1 - a_n)\psi(\|x_n - p\|) + a_n(\psi(\|x_n - p\|) - b_n\phi(\|x_n - p\|)) \\
&\leq \psi(\|x_n - p\|) - a_nb_n\phi(\|x_n - p\|)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $a_nb_n\phi(\|x_n - p\|) \geq 0$ ve ψ azalmayan olduğundan $\{\|x_n - p\|\}$ monoton azalan ve terimleri negatif olmayan bir dizi olduğundan $r \geq 0$ sayısına yakınsar. Bir an için $r \neq 0$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} a_nb_n\phi(r) &\leq \sum_{n=N}^{\infty} a_nb_n\phi(\|x_n - p\|) \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} (\psi(\|x_n - p\|) - \psi(\|x_{n+1} - p\|)) \\
&\leq \psi(\|x_N - p\|)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu sonuç $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \infty$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $r \neq 0$ kabulümüz yanlıştır ve $\|x_n - p\| \rightarrow 0$ olup Ishikawa iterasyon dizisi f fonksiyonunun sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak $\psi - \phi$ -zayıf daraltan dönüşüm şartları kullanılarak Zamfirescu dönüşümünden daha genel bir dönüşüm sınıfı elde edilmiştir. $\psi - \phi$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olarak adlandırılan bu dönüşüm sınıfının, Teorem 4.1.3' te tam metrik uzaylarda ve Teorem 4.1.5' te ise tam kuvvetli b -metrik uzaylarda bir tek sabit noktası olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar Teorem 2.3.2, Teorem 2.3.8, Teorem 2.3.11, Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 teoremlerinin birer genelleştirmesidir.

İkinci olarak Teorem 3.3.2'de verilen zayıf daraltan dönüşümün uzaklık değıştiren fonksiyonlarına konvekslik şartı eklenerek, sabit noktalarına Teorem 4.2.1'de Mann iterasyonu ve Teorem 4.2.2'de ise Ishikawa iterasyonu ile yaklaşılmıştır.

KAYNAKLAR

- Akbulut, S., & Özdemir, M. (2012). Picard iteration converges faster than Noor iteration for a class of quasi-contractive operators. *Chiang Mai J. Sci*, 39(4), 688-692.
- Ansari, Q. H. (2010). *Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set-valued Maps*. Oxford: Apha Science International Ltd.
- Ariza-Ruiz, D., Jiménez-Melado, A., & Lopez-Acedo, G. (2011). A fixed point theorem for weakly Zamfirescu mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(5), 1628-1640.
- Bakhtin, I. A. (1989). The contraction mapping principle in almost metric. *Func. An. Ulianowsk Gos. Ped. Ins.*, 30, 26-37.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Publié dans Fund. Math.*, 133-181.
- Berinde, V. (2004). Picard iteration converges faster than noor iteration for a class of Quasi-contractive operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2, 97-105.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points* (2 b.). Romania: Springer.
- Boyd, D. W., & Wong, J. S. (1969). On nonlinear contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20, 458-464.
- Browder, F., & Petryshyn, W. (1966). The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces. *Bull. Am. Math. Soc.*, 72, 571-575.
- Chatterjea, S. K. (1972). Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sei.*, 25, 727-730.
- Chu, S. C., & Diaz, J. B. (1965). Remarks on a generalization of Banach's Principle of Contraction Mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 11, 440-446.
- Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 396-414.
- Cortelazzo, G., Mian, G., Vezzi, G., & Zamperoni, P. (1994). Trademark shapes description by string-matching techniques. *Pattern Recognition*, 27, 1005-1018.
- Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Math. Univ. Ostrav.*, 1, 5-11.
- Dutta, P. N., & Choudhury, B. S. (2008). A generalisation of contraction principle in metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-8.
- Edelstein, M. (1961). An extension of Banach's Contraction Principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12, 7-11.
- Edelstein, M. (1962). On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. London Math. Soc.*, 37, 74-79.
- Edelstein, M. (1964). On nonexpansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 60, 689-695.
- Fagin, R., & Stockmeyer, L. (1998). Relaxing the triangle inequality in pattern matching. *Internation Journal of Computer Vision*, 28, 219-231.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method, *Proc. Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150.
- Jovanovic, M., Kadelburg, Z., & Radenovic, S. (2010). Common fixed point results in metric-type spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-15.
- Kannan, R. (1969). Some results on fixed points-II. *Am. Math. Mon.*, 76, 405-408.
- Khamsi, M., & Hussain, N. (2010). KKM mappings in metric type spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 73, 3123-3129.

- Khan, M. S., Swaleh, M., & Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 30, 1-9.
- Kirk, W., & Shahzad, N. (2014). *Fixed Point Theory in Distance Spaces*. Cham: Springer.
- Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1963). *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Rochester, NY: Graylock Press.
- Krasnoselskij, M. A. (1955). Two remarks on the method of successive approximations. *Uspechi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Macias, R., & Segovia, C. (1979). Lipschitz functions on spaces of homogenous type. *Advances in Mathematics*, 33, 257-270.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-510.
- McConnell, R., Kwok, R., Curlander, J., Kober, W., & Pang, S. (1991). Ψ -S correlation and dynamic time warping: two methods for tracking ice floes in SAR images. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, 29, 1004-1012.
- Papadopoulos, A. (2005). *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. Germany: European Mathematical Society.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *J. Math. Pures Appl.*, 6, 145-210.
- Rakotch, E. (1962). A note on contractive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, 459-465.
- Reed, M., & Simon, B. (1980). *Functional Analysis*. London: Academic Press.
- Rhoades, B. E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 226, 257-290.
- Rhoades, B. E. (2001). Some theorems on weakly contractive mappings. *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, 47, 2683-2693.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd b.). New York: McGraw-Hill.
- Schaefer, H. (1957). Uber die Methode Sukzessiver Approximation. *Jber. Deutsch Math.-Verein*, 59, 131-140.
- Subrahmanyam, V. (1975). Completeness and fixed-points. *Monatsh. Math.*, 80, 325-330.
- Van An, T., Tuyen, L. Q., & Van Dung, N. (2015). Stone-type theorem on b-metric spaces and applications. *Topology and its Applications*, 185, 50-64.
- Xia, Q. (2009). The geodesic problem in quasimetric spaces. *Journal of Geometric Analysis*, 19, 452-479.
- Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Arch. der Math.*, 23, 292-298.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Trabzon'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2014 Güz yarıyılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen yüksek lisans eğitimine devam etmekte ve Trabzon Afet ve Acil Durum Müdürlüğü'nde Enformasyon Memuru olarak görev yapmaktadır.

