



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BİNOM KATSAYILARI İLE TANIMLI
CİRCULANT MATRİSLER

Şeyda DALKILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2018
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Şeyda Dalkılıç tarafından hazırlanan “ q – Binom Katsayıları ile Tanımlı Circulant Matrisler ” adlı tez çalışması 22/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

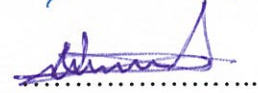
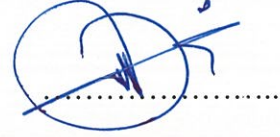
Danışman

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARALI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Şeyda DALKILIÇ

25.06.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q – BİNOM KATSAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER

Şeyda DALKILIÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2018 , 37 Sayfa

Jüri

Danışman Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, circulant matrisler ve q – Binom katsayıları ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde, circulant matrisler tanıtılmış, üçüncü bölümde q – Binom katsayıları ve özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise q – Binom katsayıları ile circulant matrisler tanımlanarak, bu matrislerin özdeğer, determinant ve normları incelenmiştir. Beşinci bölümde ise bu çalışma ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Determinant, Norm, Özdeğer, q – Binom Katsayılar.

ABSTRACT

MS THESIS

CIRCULANT MATRICES WITH q – BINOMIAL COEFFICIENTS

Seyda DALKILIC

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTIN ERBAKAN UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Emine Gokcen KOCER

2018, 37 Pages

Jury

Advisor Prof. Dr. Emine Gokcen KOCER

Prof. Dr. Ayse Dilek MADEN

Assist. Prof. Dr. Nihat AKGUNES

This study consist of five sections. In the first section, some studies related to circulant matrices and q – Binomial coefficients were given. In the second section, some properties connected with circulant matrices were given. In the third section, definitions and some properties of q – Binomial coefficients were given. In the fourth section, circulant matrices with q – Binomial coefficients were defined and investigated eigenvalues, determinants and norms. In the fifth section, some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Determinants, Eigenvalues, Norms, q – Binomial coefficients .

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, fikirleriyle bakış açımı genişletip zenginleştiren ve çalışmam süresince sabırla desteğini sürdüren Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER hocama saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; bu çalışma süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme ve değerli meslektaşım Meltem ŞALCI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şeyda DALKILIÇ
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. CİRCULANT MATRİSLER.....	3
3. q – BİNOM KATSAYILARI.....	7
4. q – BİNOM KATSAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER.....	17
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

1. GİRİŞ

Circulant matrislerin ve q -Binom katsayılarının çok geniş bir uygulama alanı vardır. Bu nedenle literatürde bu konular ile ilgili birçok çalışma vardır. Bu bölümde bu konular ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmını göz önüne alacağız.

Ernst (2003), q -analizin tarihi gelişimini ele almış ve bazı özel q -fonksiyonların hesaplanması için yeni bir metod vermiştir.

Carciono (2008), q -Binom katsayılarının daha genel hali olan p, q -Binom katsayılarını tanımlamış ve bu katsayıların bazı özelliklerini incelemiştir.

Good (1986), Ters circulant matrisleri diğer bir adıyla negacyclic matrisleri tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir.

Gould (1967), q -Binom katsayılarının özelliklerini kullanarak Stirling sayıları için yeni formüller elde etmiştir.

Gould (1969), 1915 yılında Georges Fontené tarafından ortaya atılan binom katsayılarının bir genellemesini göz önüne almıştır. Bu genelleştirilmiş *Fontené-Ward Binom katsayılarının* Fibonomial ve q -Binom katsayıları ile ilişkisi ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Geller, Kra, Popescu ve Simanca (2004), circulant matrislerin determinantını ve karakteristik polinomunu, birimin n -inci dereceden primitif kökünü kullanarak elde etmişlerdir. Circulant matrislerin oluşturduğu uzayın sonlu boyutlu değişmeli bir cebir yapısında olduğunu göstermişlerdir. Circulant matrislerin tersinir olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Kac ve Cheung (2002), Quantum Calculus isimli kitabında birçok fonksiyonun q -benzerlerini ele almış ve bu q -benzerlerin birçok özelliğine değinmiştir.

Koçer (2007), *Modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları* ile tanımlı circulant, negacyclic ve semicirculant matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normlarını elde etmiştir.

Koçer, Mansour ve Tuğlu (2007), *Horadam sayıları* ile circulant ve semicirculant matrisleri tanımlayıp bu matrislerin özdeğerlerini, spektral normlarını ve Euclidean normunu elde etmişlerdir.

Koçer ve Özmen (2017), *Binom katsayıları* ile r -circulant matrisleri tanımlamış ve bu matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normlarını elde etmiştir.

Rabago (2012), *Binom katsayıları* ile circulant matrisleri tanımlayarak bu matrislerin özdeğer ve normlarını incelemiştir.

Rabago (2013), *Binom katsayıları* ile tanımlı circulant matrislerin determinant dizilerini göz önüne almış ve bazı özelliklerini vermiştir.

Radicic (2016), geometrik dizilerle k – circulant matrisleri tanımlamış ve bu matrislerin; özdeğerlerini, determinantlarını ve Euclidean normlarını hesaplamıştır.

Solak (2005), *Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları* ile circulant matrisleri tanımlayarak, bu matrisin normlarını incelemiştir.

Zhou (2014), elemanları *Fibonacci ve Lucas sayıları* ile *Binom katsayılarının* çarpımı olan circulant matrisleri göz önüne almış ve bu matrislerin spektral normlarını hesaplamıştır.



2. CİRCULANT MATRİSLER

Bu bölümde çok geniş bir uygulama alanına sahip olan circulant matrisler ile ilgili geniş bir bilgi vereceğiz.

Tanım 2.1. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ olsun. $n \times n$ tipindeki circulant matris $C(a)$ ile gösterilir ve

$$C(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Davis, 1979).

Circulant matrislerin her bir satırının elemanları aynıdır. Satırlar arasındaki tek fark sağa doğru bir adım kaymalarıdır. Bu nedenle bütün circulant matrisler ilk satır ya da sütunları tarafından tanımlanabilirler. Dolayısıyla circulant matrisleri kısaca $C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ile gösterebiliriz.

Teorem 2.1. $\pi = \text{circ}(0, 1, \dots, 0)$ permütasyon matrisi olmak üzere, bir $C(a)$ matrisi $C(a) = a_0 I + a_1 \pi + \dots + a_{n-1} \pi^{n-1}$ şeklinde yazılabiliyorsa $C(a)$ matrisi circulant matristir (Davis, 1979).

Teorem 2.2. $\pi = \text{circ}(0, 1, \dots, 0)$ permütasyon matrisi ve A $n \times n$ bir matris olsun. A matrisinin circulant matris olması için gerek ve yeter şart $A\pi = \pi A$ olmasıdır (Davis, 1979).

İspat: $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ deviri ve $A = (a_{ij})$ olsun. Bu taktirde $P_\sigma A P_\sigma^* = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ dir. Bu eşitlikte $P_\sigma = \pi$ yazılırsa $\pi A \pi^* = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ elde edilir. A matrisinin circulant matris olması için gerek ve yeter şart, $a_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ olmasıdır. Bu ise $\pi A \pi^* = A$ olması ile mümkündür. Ayrıca $\pi^T = \pi^* = \pi^{-1} = \pi^{n-1}$ olduğundan $A\pi = \pi A$ elde edilir.

Sonuç 2.1. A matrisinin circulant matris olması için gerek ve yeter şart A^* matrisinin de circulant matris olmasıdır (Davis, 1979).

Tanım 2.2. n bileşenli $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ile ilgili polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$ olsun. $\pi = \text{circ}(0, 1, \dots, 0)$ permütasyon matrisi olmak üzere, $C(a) = p(\pi)$ olup, $p(z)$ polinomuna $C(a)$ circulant matrisini temsil eden polinom denir (Kra ve Simanca, 2012).

Tanım 2.3. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ olsun. $n \times n$ tipindeki

$$S(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

matrisine semicirculant matris denir (Davis, 1979).

Tanım 2.4. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ olsun. $n \times n$ tipindeki

$$N(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

matrisine negacyclic ya da ters circulant matris denir (Good, 1986).

Teorem 2.3. $n \times n$ tipinde bir A matrisinin negacyclic matris olması için gerek ve yeter şart

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -I_1 & 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} -I_1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\eta A = A \eta$ sağlanmasıdır (Davis, 1979).

Circulant matris ve çeşitlerinden bahsettikten sonra şimdi de circulant matrislerin normları ve özdeğerlerinin nasıl bulunacağını inceleyeceğiz.

$C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ circulant matrisini temsil eden

polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$ olmak üzere $C(a) = p(\pi)$ olduğunu biliyoruz. π permütasyon matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^n - 1$ olup bu polinomun kökleri birimin n -inci primitif kökleridir. Circulant matrisin özdeğerleri $j = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$\lambda_j(C(a)) = p(w^j) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j w^j \quad (2.4)$$

dir (Kra ve Simanca, 2012).

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörü ise

$$x = n^{-1/2} (1, w, w^2, \dots, w^{n-1}) \quad (2.5)$$

dir. $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olduğundan circulant matrisin özdeğerleri

$$\lambda_j(C(a)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{2\pi i j / n} \quad (2.6)$$

ve özvektörleri ise

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, e^{2\pi i / n}, \dots, e^{2\pi i (n-1) / n}) \quad (2.7)$$

şeklindedir (Wyn- Jones, 2013).

Teorem 2.4. η matrisinin karakteristik polinomu $(-1)^n (\pi^n + 1)$ dir ve w birimin n -inci primitif kökü olmak üzere η matrisinin özdeğerleri $\mu_j = w^{\frac{2j+1}{2}}$ dir (Davis, 1979).

Benzer şekilde Teorem 2.4 kullanılırsa $N(a) = p(\eta)$ olduğundan $N(a)$ negacyclic matrisin özdeğerleri

$$\lambda_j(N(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{\frac{2j+1}{2}} \quad (2.8)$$

dir (Davis, 1979).

Teorem 2.5. A ve B $n \times n$ tipinde circulant matrisler ve α_k lar skaler olmak üzere,

$A^T, A^*, \alpha_1 A + \alpha_2 B, AB$ ve $\sum_{k=0}^r \alpha_k A^k$ circulant matristir. Ayrıca A ve B circulant

matrisleri değişmelidir ve A tersinir bir matris ise tersi de circulant matristir (Davis, 1979).

Teorem 2.6. $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ için ve $C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ $n \times n$ circulant matrisin determinanı w birimin n – inci primitif kökü ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere

$$\det C(a) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j w^{ij} \right) \quad (2.9)$$

dir (Davis, 1979).

Şimdi çalışmamızın esas kısmında kullanacağımız bazı matris normu çeşitlerini verelim.

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ bir matris olsun. A matrisinin satır ve sütun normu sırasıyla

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.10)$$

ve

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (2.11)$$

dir. A matrisinin Euclidean normu ise

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

ile ifade edilir. Son olarak A matrisinin spektral normu

$$\|A\|_2 = \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i(A^*A) \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Şimdide normal bir matrisin singüler değerleri ile ilgili olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.7. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. A matrisinin normal matris olması için gerek ve yeter şart AA^* matrisinin özdeğerlerinin $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2$ olmasıdır (Horn ve Johnson, 1991).

3. q -BİNOM KATSAYILARI

Bu bölümde, binom katsayısının q -benzeri olarak bilinen q -Binom katsayılarının tanım ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1. n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \dots + 1$$

olsun. Buradan q -faktöriyel

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n][n-1]\dots[1], & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

dir (Ernst, 2012).

Bu ifadeler göz önünde bulundurularak, q -Binom katsayıları

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{[n][n-1]\dots[n-k+1]}{[k][k-1]\dots 1} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \rightarrow 1^-$ yaklaştığında

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} [n] = \lim_{q \rightarrow 1^-} (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = n$$

olur. Buradan

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$$

elde edilir bu da standart binom katsayısıdır.

Örnek 3.1. $n=3$ ve $k=1$ için

$$\begin{aligned} \binom{3}{1}_q &= \frac{[3]!}{[2]![1]!} = \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)} \\ &= q^2 + q + 1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $n=4$ ve $k=2$

$$\begin{aligned} \binom{4}{2}_q &= \frac{[4]!}{[2]![2]!} = \frac{(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)} \\ &= (q^2+1)(q^2+q+1) \end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.1. q – Binom katsayıları simetriktir. Yani

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q \quad (3.2)$$

dir (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: $\binom{n}{k}_q$ k yerine $n-k$ yazılırsa q – Binom katsayılarının tanımından

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \binom{n}{n-k}_q$$

eşitliği elde edilir.

Klasik binom katsayıları ile verilen Pascal üçgenine benzer olarak q – Binom katsayıları kullanılarak elde edilen Pascal üçgenini aşağıdaki gibi verebiliriz. q – Binom katsayıları, Pascal üçgeninde görüldüğü gibi simetri özelliğine sahiptir. Fakat Pascal özdeşliğinin standart formunu sağlamazlar. q – Binom katsayıları için Pascal özdeşliğini Önerme 3.2. ile verebiliriz.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1+q & & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & 1 \\ & & & & & & \\ 1 & & 1+q+q^2+q^3 & & (1+q+q^2)(1+q^2) & & 1+q+q^2+q^3 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & \vdots & & \end{array}$$

Önerme 3.2. $1 \leq j \leq n-1$ için q – Binom katsayıları için Pascal kuralları

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

ve

$$\binom{n}{k}_q = q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q \quad (3.3)$$

dir (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: $1 \leq j \leq n-1$ için

$$\begin{aligned}
 [n] &= q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1 \\
 &= q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^{k+1} + q^k + \dots + 1 \\
 &= (q^{n-k-1} + q^{n-k-2} + \dots + q + 1)q^k + (q^{k-1} + \dots + q + 1) \\
 &= q^k [n-k] + [k]
 \end{aligned}$$

dir. Bu ifade (3.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k}_q &= \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{[n-1]![n]}{[n-k]![k]!} = \frac{[n-1]!([k] + q^k [n-k])}{[n-k]![k]!} \\
 &= \frac{[n-1]!}{[n-k]![k-1]!} + \frac{q^k [n-1]!}{[n-k-1]![k]!} \\
 &= \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q
 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliklerden birincisi ispatlanmış olur. İkinci eşitlik ise

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k}_q &= \binom{n}{n-k}_q = \binom{n-1}{n-k-1}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{n-k}_q \\
 &= \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1. Her q – Binom katsayısı q nun $k(n-k)$ –inci dereceden bir polinomudur (Kac ve Cheung, 2002) .

İspat: Negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$$

Bu derecesi sıfır olan sabit bir polinomdur.

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{[n][n-1]\dots[n-k+1]}{[k][k-1]\dots 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^n - 1}{q - 1} \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdots \frac{q^{n-k+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{q^k - 1}{q - 1} \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \cdots 1 \\
&= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots 1}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.4), payı ve paydası katsayıları 1 olan q nun bir polinomudur. Bu polinomun derecesi ise pay ve paydada yer alan polinomların dereceleri farkıdır. Yani

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1) - (k + (k-1) + (k-2) + \dots + 1) = k(n-k)$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Tanım 3.2. $n \geq 1$ için

$$(x + y)_q^n = (x + y)(x + qy) \cdots (x + q^{n-1}y)$$

ve

$$(x + y)_q^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} x^{n-k} y^k \tag{3.5}$$

dir. Buradan

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} x^{n-k} y^k = \prod_{r=0}^{n-1} (x + q^r y) \tag{3.6}$$

dir (Kac ve Cheung, 2002).

$$q \rightarrow 1^- \text{ için } \lim_{q \rightarrow 1^-} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k} \text{ olduğunu ifade etmiştik. Buradan}$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

standart binom açılımına dönüştüğünü görürüz.

Tanım 3.3. $\binom{n}{k}_q$, q – Binom katsayısı olmak üzere,

$$G_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine *Galois Sayıları dizisi* denir. Bu sayılar,

$$G_{n+1} = 2G_n + (q^n - 1)G_{n-1}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Kac ve Cheung, 2002).

Teorem 3.1. q, x ve y ile komütatif ve $yx = qxy$ ise

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}$$

dir (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n=1$ için eşitlik doğrudur. q, x ve y ile komütatif ve $yx = qxy$ olduğundan $y^k x = qy^{k-1}xy = q^2 y^{k-2}xy^2 = \dots = q^k xy^k$ elde edilir.

Eşitliğin n için doğru olduğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} \right) (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} x + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k (q^{n-k} xy^{n-k}) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} q^{n-k+1} \binom{n}{k-1}_q x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1} \\ &= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} q^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1}_q + \binom{n}{k}_q \right) x^k y^{n-k+1} + x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}_q x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2. n, m ve k pozitif tamsayıları için

$$\binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q = \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q$$

dir (Charalambides, 2002).

İspat:

$$\binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-m]![m]!} \frac{[m]!}{[m-k]![k]!}$$

olur. $n \geq k$ olduğundan payı ve paydayı $[n-k]!$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}_q \binom{m}{k}_q &= \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[m-k]![n-m]!} \\ &= \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q \end{aligned}$$

dir. Şimdi $\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[m-k]![n-m]!}$$

$n-m+k \geq 0$ olduğundan eşitliğin payını ve paydasını $[n-m+k]!$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m-k}_q &= \frac{[n]!}{[m-k]![n-m+k]!} \frac{[n-m+k]!}{[k]![n-m]!} \\ &= \binom{n}{m-k}_q \binom{n-m+k}{k}_q \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.3. n , m ve k pozitif tamsayıları için

$$\binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q = \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q$$

dir (Charalambides, 2002).

İspat:

$$\binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-m]![m]!} \frac{[n-m]!}{[n-m-k]![k]!}$$

olur. $n \geq k$ olduğundan payı ve paydayı $[n-k]!$ ile çarparsak

$$\binom{n}{m}_q \binom{n-m}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[n-m-k]![m]!}$$

$$= \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q$$

dir. Şimdi $\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \frac{[n-k]!}{[m]![n-k-m]!}$$

$m+k \geq 0$ olduğundan eşitliğin payını ve paydasını $[m+k]!$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q \binom{n-k}{m}_q &= \frac{[n]!}{[m+k]![n-m-k]!} \frac{[m+k]!}{[k]![m]!} \\ &= \binom{n}{m+k}_q \binom{m+k}{m}_q \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.4. m, n ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere q -Vandermonde formülü

$$\sum_{k=0}^r q^{(m-k)(r-k)} \binom{m}{k}_q \binom{n}{r-k}_q = \binom{m+n}{r}_q \quad (3.7)$$

dir (Ernst, 2012).

Sonuç 3.2. n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n q^{k^2} \binom{n}{k}_q^2 = \binom{2n}{n}_q \quad (3.8)$$

dir.

İspat: Teorem 3.4. de $r = n$ ve $m = n$ yazarsak

$$\sum_{k=0}^n q^{(n-k)(n-k)} \binom{n}{k}_q \binom{n}{n-k}_q = \binom{n+n}{n}_q$$

olur. (3.2) den q -Binom katsayılar simetri özelliğine sahip olduğundan $n-k$ yerine k yazarsak

$$\sum_{k=0}^n q^{k^2} \binom{n}{k}_q^2 = \binom{2n}{n}_q$$

elde edilir.

Teorem 3.5. $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $A_{n,k}$, A_n in k elemanlı alt kümelerinin bir ailesi olsun.

$w(S) = \sum_{s \in S} s$ olmak üzere

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{S \in A_{n,k}} q^{w(S)-k(k+1)/2} \quad (3.9)$$

dir (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: Teoremi tümevarım ile ispatlayalım. İlk olarak $n=1$ $k=0,1$ için doğruluğunu gösterelim.

$k=0$ için $A_{1,0} = \{\emptyset\}$ ve buradan $w(\{\emptyset\}) = 0$ olurki bunda sağ taraf ve sol taraf 1 ve birbirine eşittir.

$k=1$ için $A_{1,1} = \{\{1\}\}$ ve buradan $w(\{1\}) = 1$ olacaktır. (3.5) te yerine yazılırsa

$$\sum_{S \in A_{1,1}} q^{w(S)-1(1+1)/2} = 1 = \binom{1}{1}_q \text{ olur.}$$

$1 \leq n \leq m-1$ ve $m \geq 2$ olsun. $m-1=n$ için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi $n=m$ için doğruluğunu araştıralım. $k=0$ için $A_{m,0} = \{\emptyset\}$ ve buradan $w(\{\emptyset\}) = 0$ olacaktır bu $n=1$ ile aynıdır.

$k \geq 1$ için $A_{m,k} = B \cup B'$, $B = \{S \in A_{m,k} \mid m \notin S\}$ ve $B' = \{S \in A_{m,k} \mid m \in S\}$ olacak şekilde m elemanını bulunduran ve bulundurmeyan k elemanlı alt kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. Buradaki B kümesinin tüm elemanları A_{m-1} in k elemanlı alt kümeleridir. Benzer şekilde B' kümesinin elemanları da, A_{m-1} in $k-1$ elemanlı alt kümeleridir.

Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{S \in A_{m,k}} q^{w(S)-k(k+1)/2} &= \sum_{S \in B} q^{w(S)-k(k+1)/2} + \sum_{S \in B'} q^{w(S)-k(k+1)/2} \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,k}} q^{w(S)-k(k+1)/2} + \sum_{S \in A_{m-1,k-1}} q^{(w(S)+m)-k(k+1)/2} \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,k}} q^{w(S)-k(k+1)/2} + \sum_{S \in A_{m-1,k-1}} q^{w(S)-k(k-1)/2} q^{m-k} \\ &= \binom{m-1}{k}_q + q^{m-k} \binom{m-1}{k-1}_q = \binom{m}{k}_q \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6. q asal bir sayının kuvveti olmak üzere F_q bir cisim ise, $\binom{n}{k}_q$ n -boyutlu F_q^n vektör uzayının k -boyutlu alt uzaylarının sayısıdır (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: F_q^n, F_q üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $k=0$ için

$$\binom{n}{0}_q = 1$$

dir. n -boyutlu vektör uzayının sıfır boyutlu vektör uzayı sayısına eşittir. $k \geq 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

V vektör uzayında k -boyutlu bir alt uzay oluşturabilmek için V vektör uzayında k tane lineer bağımsız vektör seçilmelidir. Bu vektörler $v_1, v_2, \dots, v_k$ olsun. V vektör uzayı olduğundan sıfır vektörünü içermektedir. Her bir baz elemanı da sıfırdan farklı olmalıdır. Bu nedenle v_1 baz vektörü $q^n - 1$ şekilde seçilebilir. v_1 ve v_2 lineer bağımsız olmalıdır. Bu nedenle, v_2 vektörü, v_1 tarafından gerilen alt uzayın elemanı olmamalıdır. v_1 baz vektörünün oluşturduğu alt uzay $V_1 = \{av_1 : v_1 \neq 0, a \in F_q\}$ şeklinde olacağından, v_1 tarafından gerilen alt uzayın q tane elemanı vardır. O halde v_2 vektörü $q^n - q$ farklı şekilde seçilebilir. Benzer şekilde kalan vektörlerde seçilir. Bu durumda n -boyutlu F_q^n vektör uzayından k tane lineer bağımsız baz vektörü

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-1}) \quad (3.10)$$

farklı yolda seçilebilir.

Bu k hıların bazıları aynı alt uzayı oluşturacağından, (3.10) i, k -boyutlu bir uzayın gerebileceği farklı uzay sayısına bölmeliyiz. k -boyutlu herhangi bir uzayı ele alalım. k -boyutlu uzayın q^k tane elemanı vardır. Tanımlanan alt uzay

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k : v_k \neq 0, a_k \in F_q)$$

şeklinde olacaktır.

Her a_k yerine q tane değer yazılabileceğinden, k -boyutlu bir alt uzayın q^k elemanı vardır. k -boyutlu uzaydan k tane lineer bağımsız vektör

$$(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1})$$

şeklinde seçilebilir. Yani k -boyutlu uzay $(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1})$ farklı lineer bağımsız vektörü gerebilir. Sonuç olarak birbirinden farklı k boyutlu alt uzayların sayısı

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2) \dots (q^k - q^{k-1})} = \frac{qq^2q^3 \dots q^{k-1}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)}{q \cdot q^2q^3 \dots q^{k-1}(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)} = \binom{n}{k}_q$$

dir.

4. q -BİNOM KATSAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER

Çalışmamızın esas bölümü olan bu bölümde elemanları q -Binom katsayıları olan circulant ve negacyclic matrisler göz önüne alınacak. Bu matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normları incelenecektir.

Tanım 4.1. $\binom{n}{k}_q$ q -Binom katsayısı olmak üzere ij -inci elemanı $c_{ij} = \binom{n}{|i-j|}_q$

olan $n \times n$ tipindeki $C_{n,q} = (c_{ij})$ matrisine q -Binom katsayıları ile tanımlı circulant matris denir ve

$$C_{n,q} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0}_q & \binom{n}{1}_q & \cdots & \binom{n}{n-1}_q q^{\binom{n-1}{2}} \\ \binom{n}{n-1}_q q^{\binom{n-1}{2}} & \binom{n}{0}_q & \cdots & \binom{n}{n-2}_q q^{\binom{n-1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{1}_q & \binom{n}{2}_q q & \cdots & \binom{n}{0}_q \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Bu matrisi kısaca

$$C_{n,q} = \left(\binom{n}{0}_q, \binom{n}{1}_q, \dots, \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}, \dots, \binom{n}{n-1}_q q^{\binom{n-1}{2}} \right)$$

ile gösterebiliriz.

q -Binom katsayısında $q \rightarrow 1^-$ durumunda binom katsayıları elde edildiğini biliyoruz. Dolayısıyla $C_{n,q}$ matrisinde $q \rightarrow 1^-$ durumunda Rabago tarafından tanımlanan binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisi elde ederiz.

Örneğin, q -Binom katsayıları ile tanımlı 4×4 tipindeki circulant matris

$$C_{4,q} = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2+q^3 & q+q^2+2q^3+q^4+q^5 & q^3+q^4+q^5+q^6 \\ q^3+q^4+q^5+q^6 & 1 & 1+q+q^2+q^3 & q+q^2+2q^3+q^4+q^5 \\ q+q^2+2q^3+q^4+q^5 & q^3+q^4+q^5+q^6 & 1 & 1+q+q^2+q^3 \\ 1+q+q^2+q^3 & q+q^2+2q^3+q^4+q^5 & q^3+q^4+q^5+q^6 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matriste $q \rightarrow 1^-$ için

$$C_{4,1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris ise, binom katsayıları ile tanımlı 4×4 tipindeki circulant matristir.

q -Binom katsayıları ile tanımlı $C_{n,q}$ circulant matrisi tanımladık. Şimdi bu matrisi temsil eden polinomu ve bu polinomu kullanarak tanımladığımız $C_{n,q}$ matrisinin özdeğerlerini ve determinantını ele alacağız.

Tanım 4.2. $n \times n$ tipindeki q -Binom katsayıları ile tanımlı $C_{n,q}$ circulant matrisini temsil eden polinom,

$$p(z) = \binom{n}{0}_q + \binom{n}{1}_q z + \binom{n}{2}_q qz^2 + \dots + \binom{n}{n-1}_q q^{\binom{n-1}{2}} z^{n-1}$$

dir.

q -Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisi temsil eden polinom Tanım

3.2. kullanılarak

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} z^k = (1+z)_q^n - q^{\binom{n}{2}} z^n \quad (4.1)$$

ve

$$p(z) = \prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r z) - q^{\binom{n}{2}} z^n \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 4.1. $C_{n,q}$, q -Binom katsayıları ile tanımlı $n \times n$ tipindeki circulant matris, w birimin n -inci primitif kökü ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere $C_{n,q}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(C_{n,q}) = (1 + w^j)_q^n - q^{\binom{n}{2}} = \prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r w^j) - q^{\binom{n}{2}} \quad (4.3)$$

dir.

İspat: (2.4) eşitiliğinden circulant matrisin özdeğerlerinin $\lambda_j(C(a)) = P(w^j)$ olduğunu biliyoruz. Buradan q -Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisi temsil eden polinom göz önüne alınırsa $C_{n,q}$ matrisinin özdeğerleri

$$P(w^j) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_q q^{\binom{n}{2}} w^j$$

olur. Burada (4.1) ve (4.2) ifadeleri kullanılırsa

$$\lambda_j(C_{n,q}) = (1 + w^j)_q^n - q^{\binom{n}{2}} = \prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r w^j) - q^{\binom{n}{2}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin özdeğerleri $j = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$\lambda_j(C_{n,1}) = (1 + w^j)^n - 1$$

dir.

Örnek 4.1. q -Binom katsayıları ile tanımlı 3×3 tipindeki circulant matris

$$C_{3,q} = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2 & q+q^2+q^3 \\ q+q^2+q^3 & 1 & 1+q+q^2 \\ 1+q+q^2 & q+q^2+q^3 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini alalım. Teorem 4.1 den $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere, $C_{3,q}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_0(C_{3,q}) = \prod_{k=0}^2 (1 + q^k) - q^3$$

$$\lambda_1(C_{3,q}) = \prod_{k=0}^2 (1 + q^k w) - q^3$$

$$\lambda_2(C_{3,q}) = \prod_{k=0}^2 (1 + q^k w^2) - q^3$$

dir. Buradan $C_{3,q}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_0(C_{3,q}) = 2 + 2q + 2q^2 + q^3$$

$$\lambda_1(C_{3,q}) = -\left(q^2 + \frac{1}{2}q^3 + q - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(1 - q^3)$$

$$\lambda_2(C_{3,q}) = -\left(q^2 + \frac{1}{2}q^3 + q - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(1-q^3)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1. kullanılırsa binom katsayıları ile tanımlı 3×3 tipindeki circulant matrisin özdeğerleri

$$\lambda_0(C_{3,1}) = 7, \lambda_1(C_{3,1}) = \lambda_2(C_{3,1}) = -2$$

şeklinde elde edilir.

Matrisin özdeğerleri ve determinantı arasındaki ilişki kullanılarak q -Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin determinantını aşağıdaki teorem ile ifade edebiliriz.

Teorem 4.2. $C_{n,q}$, q -Binom katsayıları ile tanımlı $n \times n$ tipindeki circulant matrisinin determinantı w birimin n -inci primitif kökü olmak üzere

$$\det(C_{n,q}) = \prod_{j=0}^{n-1} \left((1+w^j)_q^n - q^{\binom{n}{2}} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1+q^k w^j) - q^{\binom{n}{2}} \right) \quad (4.4)$$

dir.

Sonuç 4.2. Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin determinantı

$$\det(C_{n,1}) = \prod_{j=0}^{n-1} ((1+w^j)^n - 1)$$

dir.

Şimdi q -Binom katsayıları ile tanımlı $C_{n,q}$ circulant matrisin maksimum satır(sütun) ve spectral normlarını ele alacağız.

Teorem 4.3. $C_{n,q}$, q -Binom katsayıları ile tanımlı $n \times n$ tipindeki circulant matrisinin spektral normu

$$\|C_{n,q}\|_2 = \prod_{k=0}^{n-1} (1+q^k) - q^{\binom{n}{2}} \quad (4.5)$$

dir.

İspat: Bir matrisin spektral norm tanımından

$$\|C_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} \lambda_j(C_{n,q}^* C_{n,q}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Circulant matrisler normal matrisler olduğundan Teorem 2.7 den

$$\|C_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

olduğunu biliyoruz. $C_{n,q}$ matrisinin özdeğerleri $j = 0$ için maksimum değerini alır.

Böylece q – Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin spektral normu

$$\|C_{n,q}\|_2 = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k) - q^{\binom{n}{2}}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.3. Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin spektral normu

$$\|C_{n,1}\|_2 = 2^n - 1$$

dir.

Teorem 4.4. $C_{n,q}$, q – Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin maksimum satır ve sütun normu sırasıyla

$$\|C_{n,q}\|_1 = \|C_{n,q}\|_\infty = \prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r) - q^{\binom{n}{2}} \quad (4.6)$$

dir.

İspat: Circulant matrisin satır ve sütunları aynı olduğu için maksimum satır ve sütun normu eşit olacaktır. Bir matrisin maksimum satır ve sütun normu tanımından

$$\|C_{n,q}\|_1 = \|C_{n,q}\|_\infty = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}$$

elde edilir. (3.2) denkleminde $x=1$ ve $y=1$ yazılırsa

$$(1+1)_q^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}$$

olur. Her iki taraftan n – inci terimi çıkarırsak

$$\|C_{n,q}\|_1 = \|C_{n,q}\|_\infty = (2)_q^n - q^{\binom{n}{2}}$$

elde edilir. (3.3) ifadesi kullanılırsa

$$\|C_{n,q}\|_1 = \|C_{n,q}\|_\infty = \prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r) - q^{\binom{n}{2}}$$

dir.

Sonuç 4.4. Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisin maksimum satır ve sütun normu

$$\|C_{n,1}\|_1 = \|C_{n,1}\|_\infty = 2^n - 1$$

dir.

Örnek 4.2. $C_{3,q}$ q -Binom katsayıları ile tanımlı 3×3 tipindeki circulant matrisin maksimum satır ve sütun normu

$$\|C_{3,q}\|_1 = \|C_{3,q}\|_\infty = (2)_q^3 - q^{\binom{3}{2}} = \prod_{r=0}^2 (1+q^r) - q^3$$

olduğundan maksimum satır ve sütun normu

$$\|C_{3,q}\|_1 = \|C_{3,q}\|_\infty = 2(1+q)(1+q^2) - q^3 = 2 + 2q + 2q^2 + q^3$$

olur.

Bu bölümde şu ana kadar q -Binom katsayıları ile tanımlı $C_{n,q}$ circulant matrisinin özdeğer, determinant ve normlarını ele aldık. Şimdi ise q -Binom katsayıları ile negacyclic matrisleri tanımlayarak, bu matrisin özdeğerleri, determinantı ve normlarını inceleyeceğiz.

Tanım 4.3. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q$, q -Binom katsayısı olmak üzere

$$N_{n,q} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}_q & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}_q & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}_q q^{\binom{n-1}{2}} \\ -\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}_q q^{\binom{n-1}{2}} & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}_q & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix}_q q^{\binom{n-1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}_q & -\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}_q q & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}_q \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $N_{n,q}$ matrisine q -Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matris denir ve kısaca

$$N_{n,q} = sc \left(\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}_q, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}_q, \dots, \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}_q q^{\binom{n}{2}} \right)$$

şeklinde gösterilir.

q –Binom katsayıları ile tanımlı $C_{n,q}$ circulant matrisine benzer şekilde $N_{n,q}$ matrisinde de $q \rightarrow 1^-$ durumunda binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matris elde edilir.

Örnek 4.3. $N_{4,q}$, q –Binom katsayıları ile tanımlı 4×4 tipindeki negacyclic matris

$$N_{4,q} = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2+q^3 & q+q^2+2q^3+q^4+q^5 & q^3+q^4+q^5+q^6 \\ -(q^3+q^4+q^5+q^6) & 1 & 1+q+q^2+q^3 & q+q^2+2q^3+q^4+q^5 \\ -(q+q^2+2q^3+q^4+q^5) & -(q^3+q^4+q^5+q^6) & 1 & 1+q+q^2+q^3 \\ -(1+q+q^2+q^3) & -(q+q^2+2q^3+q^4+q^5) & -(q^3+q^4+q^5+q^6) & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.5. $N_{n,q}$ q –Binom katsayıları ile tanımlı bir negacyclic matris, $j=0,1,\dots,n-1$ ve w , birimin n –inci primitif kökü olmak üzere $N_{n,q}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(N_{n,q}) = \left(1 + w^{\frac{2j+1}{2}}\right)_q^n + q^{\binom{n}{2}} = \prod_{r=0}^{n-1} \left(1 + q^r w^{\frac{2j+1}{2}}\right) + q^{\binom{n}{2}} \quad (4.7)$$

dir.

İspat: Teorem 2.4. ten $N_{n,q} = p(\eta)$ olduğundan $N_{n,q}$ negacyclic matrisin özdeğerleri

$p(w^{\frac{2j+1}{2}})$ dir. Negacyclic matrisi temsil eden polinomun

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} z^k = (1+z)_q^n - q^{\binom{n}{2}} z^n \quad \text{olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte}$$

$z = w^{\frac{2j+1}{2}}$ yazarsak

$$\lambda_j(N_{n,q}) = \left(1 + w^{\frac{2j+1}{2}}\right)_q^n + q^{\binom{n}{2}} = \prod_{r=0}^{n-1} \left(1 + q^r w^{\frac{2j+1}{2}}\right) + q^{\binom{n}{2}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.5. Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matrisin özdeğerleri $j = 0, 1, \dots, n-1$ için,

$$\lambda_j(N_{n,1}) = \left(1 + \sqrt[n]{-1} w^j\right)^n + 1$$

dir.

Örnek 4.4. $N_{3,q}$ q -Binom katsayıları ile tanımlı 3×3 tipindeki

$$N_{3,q} = \begin{pmatrix} 1 & 1+q+q^2 & q+q^2+q^3 \\ -(q+q^2+q^3) & 1 & 1+q+q^2 \\ -(1+q+q^2) & -(q+q^2+q^3) & 1 \end{pmatrix}$$

negacyclic matrisini göz önüne alalım. $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere bu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_0(N_{3,q}) = \prod_{r=0}^2 \left(1 + q^r w^{\frac{1}{2}}\right) + q^3$$

$$\lambda_1(N_{3,q}) = \prod_{r=0}^2 \left(1 + q^r w^{\frac{3}{2}}\right) + q^3$$

$$\lambda_2(N_{3,q}) = \prod_{r=0}^2 \left(1 + q^r w^{\frac{5}{2}}\right) + q^3$$

dir. Buradan $N_{3,q}$ nun özdeğerleri,

$$\lambda_0(N_{3,q}) = -\left(\frac{1}{2}q^3 - \frac{3}{2}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(q^3 + 2q^2 + 2q + 1)$$

$$\lambda_1(N_{3,q}) = q^3$$

$$\lambda_2(N_{3,q}) = -\left(\frac{1}{2}q^3 - \frac{3}{2}\right) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(q^3 + 2q^2 + 2q + 1)$$

dir.

q -Binom katsayıları ile tanımlı $N_{n,q}$ negacyclic matrisin determinantını özdeğerleri kullanılarak aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 4.6. $N_{n,q}$ q -Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matris ve w , birimin n -inci primitif kökü olmak üzere $N_{n,q}$ matrisinin determinantı

$$\det(N_{n,q}) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + q^k w^{\frac{2j+1}{2}} \right) + q^{\binom{n}{2}} \right) \quad (4.8)$$

dir.

Sonuç 4.6. Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matrisin determinanı

$$\det(N_{n,1}) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\left(1 + \sqrt[n]{-1} w^j \right)^n + 1 \right)$$

dir.

Örnek 4.5. $N_{3,q}$ q -Binom katsayıları ile tanımlı 3×3 tipindeki negacyclic matrisin determinanı

$$\begin{aligned} \det(N_{3,q}) &= \prod_{j=0}^2 \left(\left(1 + w^{\frac{2j+1}{2}} \right)_q^3 + q^3 \right) = \prod_{j=0}^2 \left(\prod_{k=0}^2 \left(1 + q^k w^{\frac{2j+1}{2}} \right) + q^3 \right) \\ &= q^9 + 3q^8 + 6q^7 + 6q^6 + 6q^5 + 3q^4 + 3q^3 \end{aligned}$$

dir.

q -Binom katsayıları ile tanımlı $N_{n,q}$ negacyclic matrisini özdeğerlerini ve determinantını verdikten sonra son olarak bu matrisin maksimum satır (sütun) ve spektral normlarını ele alacağız.

Theorem 4.7. $N_{n,q}$ q -Binom katsayıları ile tanımlı $n \times n$ tipindeki negacyclic matris ve w , birimin n -inci primitif kökü olmak üzere $N_{n,q}$ matrisinin spektral normu

$$\|N_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k w^{\frac{2j+1}{2}}) + q^{\binom{n}{2}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

İspat: Bir matrisin Spektral norm tanımından

$$\|N_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} \lambda_j(N_{n,q}^* N_{n,q}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Teorem 2.7. den

$$\|N_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece q -Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matrisin spektral normu

$$\|N_{n,q}\|_2 = \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k w^{\frac{2j+1}{2}}) + q^{\binom{n}{2}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.8. $N_{n,q}$ q – Binom katsayıları ile tanımlı negacyclic matrisin maksimum satır ve sütun normu

$$\|N_{n,q}\|_1 = \|N_{n,q}\|_\infty = (2)_q^n - q^{\binom{n}{2}} \quad (4.9)$$

dir.

İspat: Bir matrisin maksimum satır ve sütun normu tanımı kullanılırsa

$$\|N_{n,q}\|_1 = \|N_{n,q}\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \binom{n}{i}_q q^{\binom{i}{2}} \right|$$

olur. Negacyclic matrisin özelliğinden

$$\|N_{n,q}\|_1 = \|N_{n,q}\|_\infty = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}_q q^{\binom{i}{2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|N_{n,q}\|_1 = \|N_{n,q}\|_\infty = (2)_q^n - q^{\binom{n}{2}}$$

dir.

Örnek 4.6. $N_{4,q}$ q – Binom katsayıları ile tanımlı 4×4 tipindeki negacyclic $N_{4,q}$ matrisinin maksimum satır ve sütun normu

$$\begin{aligned} \|N_{4,q}\|_1 = \|N_{4,q}\|_\infty &= (2)_q^4 - q^6 = 2(1+q)(1+q^2)(1+q^3) - q^3 \\ &= 2 + 2q + 2q^2 + 4q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 \end{aligned}$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada q – Binom katsayıları ile tanımlı circulant matrisler göz önüne alınmıştır. Bu matrislerin özdeğerleri, determinantı ve normları elde edilmiştir. Ayrıca ters circulant matris olarakta bilinen negacyclic matrisler q – Binom katsayıları ile göz önüne alınarak bu matrisinde özdeğerleri, determinantı, spektral ve maksimum satır ve sütun normları elde edilmiştir.

Circulant matrislerin genel hali olan r –circulant ve geometrik circulant matrisler q – Binom katsayıları ile tanımlanıp özdeğerleri, determinantları ve normları incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Carciono, R., 2008, On p, q -Binomial Coefficients, *İntegers* 8, A29.
- Charalambides, C. A. , 2002, *Enumerative Combinatorics*, CRC Press.
- Davis, P. J., 1979, *Circulant Matrices*, A Wiley-Interscience Publication.
- Ernst, T., 2003, *A Method for q -Calculus*, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 10(4), 487-525.
- Ernst, T., 2012, *A Comprehensive Treatment of q -Calculus*, Springer.
- Geller, D., Kra, I., Popescu, S., Simanca, S., 2004, On circulant matrices, Preprint, Stony Brook University.
- Good, I. J., 1986, *Skew circulants and the theory of numbers*, *The Fibonacci Quarterly*, 24(2), 47-60.
- Gould, H.W., 1969, "The Bracket Function and Fontené-Ward generalized Binomial Coefficients with application to Fibonomial Coefficient, *Fibonacci Quarterly*, 7, 23-40.
- Gould, H.W., 1967, "The Bracket Function, q -Binomial Coefficients, and Some New Stirling Number Formulas," *Fibonacci Quarterly*, 5, 401-422.
- Horn, R. A., Johnson, C. R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- Kac, V., Cheung, P., 2002, *Quantum Calculus*, Springer.
- Kra, I., & Simanca, S. R., 2012, *On circulant matrices*, *Notices of the AMS*, 59(3), 368-377.
- Kocer, E. G., 2007, *Circulant, Negacyclic and Semicirculant Matrices with the modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers*, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 36(2), 133-142.
- Kocer, E. G., Mansour, T., Tuglu, N., 2007, *Norms of Circulant and Semicirculant Matrices with Horadam's Numbers*, *ARS Combinatoria*, 85, 353-359.
- Kocer, E. G. , Ozmen, S., 2017, On the r -circulant Matrices with the Binomial Coefficients, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*.
- Rabago, J. F. T., 2012, *A Note on Spectral Norms of Circulant Matrices with Binomial Coefficients*, *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, 2(2), 20-22.

Rabago, J. F. T., 2013, *Circulant Determinant Sequences with Binomial Coefficients*, Scientia Magna, 9(1), 33-38.

Radacic, B., 2016, *On k - Circulant Matrices (with geometric sequences)*, Quaestiones Mathematicae, 39(1), 135-144.

Solak, S., 2005, *On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers*, Appl. Math. Comput., 160,125-132.

Wyn-jones, A., 2013, *Circulants* , <http://www.circulants.org/circ/circall.pdf> .

Zhou, J., 2014, *The Identical Estimates of Spectral Norms for Circulant Matrices with Binomial Coefficients Combined with Fibonacci Numbers and Lucas Numbers*, Article ID 518913.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şeyda Dalkılıç
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya/1992
Telefon :
Faks :
e-mail : seyda468@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Karatay SDMP Anadolu Lisesi	2010
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi	2015
Yüksek Lisans:	Necmettin Erbakan Üniversitesi	2018
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2016-halen	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Dalkilic, S., Kocer, E.G., On the Circulant Matrices with the q – Binomial Coefficients, Advances and Applications in Discrete Mathematics, in press.