

**T.C.  
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÖNLÜ ÇİZGELERİN DÖNGÜSÜZLÜK KOMPLEKSLERİNİN  
TOPOLOJİSİ, RENKLENDİRME VE DÖNGÜ-KIRAN SAYILARI**

**Zakir DENİZ**

**Danışman  
Prof. Dr. Yusuf CİVAN**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ISPARTA - 2018**



© 2018 [Zakir DENİZ]

## TEZ ONAYI

Zakir DENİZ tarafından hazırlanan "Yönlü Çizgelerin Döngüsüzlük Komplekslerinin Topolojisi, Renklendirme ve Döngü-kıran Sayıları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman**

**Prof. Dr. Yusuf CİVAN**  
Süleyman Demirel Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU**  
Adnan Menderes Üniversitesi



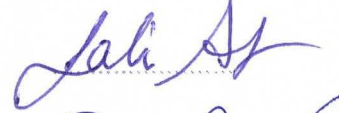
**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ**  
Süleyman Demirel Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Salih AYTAZ**  
Süleyman Demirel Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Bekir TANAY**  
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi



**Enstitü Müdürü**

**Prof. Dr. Yasin TUNCER**

.....

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Zakir DENİZ**

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT .....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
TERMİNOLOJİ DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. BAZI ÖN BİLGİLER.....	5
2.1. Çizge Teori.....	5
2.2. Simpleksel Kompleksler .....	8
2.3. Homotopi ve Temel Grup.....	10
2.3.1. Homotopi.....	10
2.3.2. Temel Grup .....	12
2.4. Simpleksel Kompleksler Üzerinde Bazı Temel İndirgeme Yöntemleri.....	13
3. TURNUVALAR VE DÖNGÜSÜZLÜK KOMPLEKSLERİ.....	16
3.1. Turnuvaların Döngüsüzlük Kompleksleri .....	18
3.2. Üçbölünebilir Turnuvaların Homotopik Yapısı.....	24
4. TURNUVALARDA RENKLENDİRME VE DÖNGÜ-KIRAN KÜMELER.	29
4.1. Turnuvalarda Köşe Renklendirme.....	29
4.2. Turnuvalarda Döngü-Kıran Kümeler .....	33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR .....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	42

# ÖZET

Doktora Tezi

## YÖNLÜ ÇİZGELERİN DÖNGÜSÜZLÜK KOMPLEKSLERİNİN TOPOLOJİSİ, RENKLENDİRME VE DÖNGÜ-KIRAN SAYILARI

Zakir DENİZ

Süleyman Demirel Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf CİVAN

Bu tez çalışmasında basit bağlantısız turnuvaların bir alt sınıfı olan üçbölünebilir turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin topolojik yapıları incelenmiştir. Buradan elde edilen bilgiler ile böyle turnuvaların kromatik sayısı ve döngü-kıran sayısı gibi kombinatoriyal yapısı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır; ilk iki bölümde çalışma motivasyonu açık bir şekilde ifade edilmiş ve kullanılan terminoloji ile beraber çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak temel kavramlar ve araçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde (Burzio ve Demaria, 1987a,b) makalelerinde tanımlanan basit bağlantısız turnuvaların kombinatoriyal yapısı yardımıyla bu turnuvalara ilişkilendirilen döngüsüzlük komplekslerinin topolojik yapısı araştırılmıştır.  $T = R_3(P, R, K)$  formundaki kalıtsal turnuvalar üçbölünebilir olarak adlandırılmış ve bu bölümünün ana sonucu olarak bu turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin kürelerin kama toplamına homotopik olduğu ispatlanmıştır. Bu yapıdaki en büyük kürenin boyutu  $\text{der}(T)$  olarak tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde elde edilen üçbölünebilir turnuvaların topolojik yapısındaki  $\text{der}(T)$  parametresi ile turnuvanın kombinatoriyal yapısı arasındaki ilişki incelenmiştir. İlk olarak turnuvaların köşe renklendirmesi için; eğer  $T$  üçbölünebilir bir turnuva ise,  $\chi_a(T) \leq c(\text{der}(T) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1$  olacak şekilde  $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  ve  $1.62 < c \leq 2$  sayılarının varlığı kanıtlanmıştır. Ayrıca turnuvaların diğer bir kombinatoriyal parametresi olan döngü-kıran sayısı ele alınmış ve  $n$  köşeli bir  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $\text{dk}(T) = n - \text{der}(T) - 1$  eşitliği kanıtlanmıştır.

Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Turnuva, döngüsüzlük kompleksi, döngüsüz renklendirme, döngü-kıran sayısı.

2018, 42 sayfa

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### TOPOLOGY OF ACYCLIC COMPLEXES OF DIGRAPHS, COLORING AND FEEDBACK NUMBERS

Zakir DENİZ

Süleyman Demirel University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf CİVAN

In this thesis, the topological structure of acyclic complexes of “trisectionable tournaments” which is a subclass of simply disconnected tournaments is studied. We also investigate the relation between topological results and the combinatorial structure such as their chromatic and feedback numbers of the tournaments.

This study consists of five chapters; in the first two chapters, we explicitly describe our motivation for the studied problems, and provide the basic notations and tools that are needed throughout the dissertation including the necessary terminology. In chapter three, we study the topological structure of acyclic complexes associated to simply disconnected tournaments which is introduced in (Burzio ve Demaria, 1987a,b) with the help of its combinatorial structure. We call trisectionable the tournaments of the form  $T = R_3(P, R, K)$  and prove the main result of this chapter, states that the acyclic complexes of such tournaments is homotopy equivalent to a wedge of spheres where  $\text{der}(T)$  is defined as the highest dimension of a sphere occurring in such a wedge of sphere decomposition.

In chapter four, we investigate the relation between the combinatorial structure of tournaments and the invariant  $\text{der}(T)$ , related to topological structure of trisectionable tournaments obtained in the previous chapter. Firstly, we deal with the vertex coloring of tournaments and obtain the following result; for trisectionable tournament  $T$  there exists a fix number  $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  satisfies  $\chi_a(T) \leq c(\text{der}(T) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1$  for some  $1.62 < c \leq 2$ . In the rest of this chapter, we study the feedback number of tournaments and we proved that  $\text{dk}(T) = n - \text{der}(T) - 1$  for trisectionable tournament  $T$ .

The concluding chapter reviews the overall results of this thesis.

**Keywords:** Tournament, acyclic complex, acyclic coloring, feedback number.

**2018, 42 pages**

## TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle yanımda olan, karşılaşılan problemlerde desteğini esirgemeyen, her fırsatta kendi ayaklarımız üzerinde durabilmemiz için emek sarfeden, değerli bir bilim insanı olmasının yanında bilime olan merakı ve çalışma isteğiyle öğrencilerine matematiği ve matematik yapmayı sevdiren danışmanım Prof. Dr. Yusuf CİVAN'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez jürisinde yer alarak değerli vakitlerini ayıran ve yorumlarıyla tezin daha anlaşılabilir olmasını sağlayan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU, Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ, Prof. Dr. Salih AYTAR ve Doç. Dr. Bekir TANAY'a teşekkürlerimi sunarım.

Çizge Teori ve Topoloji üzerinde fikir alışverişinde bulunduğum, birbirimize her konuda destek olduğumuz meslektaşım sevgili Mehmet Akif YETİM'e teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca düzenli finansal desteğinden dolayı TÜBİTAK-BİDEB'e özel teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca TÜBİTAK-2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı kapsamında 2017 yılında İsviçre'nin Fribourg Üniversitesinde "Decision Support & Operations Research" grubunda araştırmacı olarak bulundum. Bu bağlamda sağladığı desteklerden dolayı TÜBİTAK'a ve Fribourg Üniversitesine teşekkürlerimi sunuyorum.

Süleyman Demirel Üniversitesi ÖYP Kurum ve Koordinasyon Birimi'ne ÖYP05688-DR-13 Nolu Proje ile tezimi maddi olarak desteklediği için teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca yanımda olan sevgisi ve yardımlarıyla bana destekte bulunan bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Zakir DENİZ  
ISPARTA, 2018

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2, \dots, e_6\})$ çizgesi. ....	5
Şekil 2.2. $K_4$ tam çizgesi (a); $\vec{P}_4$ yönlü yol çizgesi (b); $\vec{C}_5$ yönlü döngü çizgesi (c); $T_4$ turnuvası (d). ....	7
Şekil 2.3. $D = (\{v_1, v_2, \dots, v_5\}, \{v_1v_4, v_2v_1, v_2v_3, v_4v_2, v_5v_3, v_5v_4\})$ yönlü çizgesi. ....	8
Şekil 2.4. Örnek 2.9'da verilen $\Delta$ simpleksel kompleksi. ....	9
Şekil 2.5. Sırasıyla $\Delta$ ve $\Delta // uv$ simpleksel kompleksleri. ....	15
Şekil 3.1. Sırasıyla $R_3, R_5$ ve $R_7$ hayli regüler çizgeleri. ....	16
Şekil 3.2. Sırasıyla $P$ ve $R$ turnuvaları. ....	17
Şekil 3.3. Hayli parçalanabilir bir $T$ turnuvası ve bileşenleri. ....	18
Şekil 3.4. Bir $T$ turnuvası ve karşılık gelen $\text{dön}(T)$ döngüsüzlük kompleksi. ....	18
Şekil 3.5. Sırasıyla $R$ ve $S$ turnuvaları. ....	20
Şekil 3.6. $G_x$ çizgesinin üçgenselliği. ....	24
Şekil 3.7. Üçbölünebilir bir turnuva. ....	25
Şekil 4.1. Döngü kıran sayısı $\text{dk}(G) = 1$ olan bir $G$ turnuvası. ....	33

## SİMGELER DİZİNİ

$\text{bağ}_\Delta(\sigma)$	$\sigma$ yüzünün $\Delta$ simpleksel kompleksindeki bağı
$\text{boy}(\Delta)$	$\Delta$ simpleksel kompleksinin boyutu
$C_n$	$n$ -köşeli döngü çizge
$C\Delta$	$\Delta$ simpleksel kompleksinin konisi
$D^n$	$n$ -disk
$\text{deg}_G(x)$ veya $d(x)$	$x$ köşesinin $G$ çizgesindeki derecesi
$\text{der}(T)$	$T$ turnuvasının derinliği
$\text{dk}(T)$	$T$ turnuvasının döngü-kıran sayısı
$\text{dön}(D)$	$D$ yönlü çizgesinin döngüsüzlük kompleksi
$E(G)$	$G$ çizgelerin kenarlarının kümesi
$G = (V, E)$	Köşe kümesi $V$ , kenar kümesi $E$ olan bir $G$ çizgesi
$G[A]$	$A$ köşe kümesinin $G$ çizgesinde indirgediği çizge
$h(T)$	$T$ turnuvasının yüksekliği
$\text{Ind}(G)$	$G$ çizgesinin bağımsızlık kompleksi
$K_n$	$n$ -köşeli tam çizge
$N_G(x)$ veya $N(x)$	$x$ köşesinin $G$ çizgesindeki komşuluğu
$N_G[x]$ veya $N[x]$	$x$ köşesinin $G$ çizgesindeki kapalı komşuluğu
$P_n$	$n$ -köşeli yol çizge
$S^n$	$n$ -küre
$\text{sil}_\Delta(\sigma)$	$\sigma$ yüzünün $\Delta$ simpleksel kompleksindeki silinimi
$V(G)$	$G$ çizgesinin köşelerinin kümesi
$X \simeq Y$	$X$ ve $Y$ uzayları homotopik olarak denktir
$X \cong Y$	$X$ ve $Y$ uzayları izomorfiktir
$\ell(T, P)$	$T$ turnuvasının $P$ bölümüne göre uzunluğu
$\mathcal{P}(A)$	$A$ kümesinin kuvvet kümesi
$\chi(G)$	$G$ çizgesinin kromatik sayısı
$\chi_a(D)$	$D$ yönlü çizgesinin (döngüsüz) kromatik sayısı
$\Delta_1 \uplus \Delta_2$	$\Delta_1$ ve $\Delta_2$ simpleksel komplekslerinin ayrık birleşimi
$\Delta_1 * \Delta_2$	$\Delta_1$ ve $\Delta_2$ simpleksel komplekslerinin simpleksel toplamı
$\Delta_1 \vee \Delta_2$	$\Delta_1$ ve $\Delta_2$ simpleksel komplekslerinin kama toplamı
$\Sigma\Delta$	$D$ simpleksel kompleksinin genişmesi
$[n]$	$\{1, 2, \dots, n\}$
$\mathbb{1}$	Birim fonksiyon
$ G $	$G$ çizgesinin köşe sayısı
$\ G\ $	$G$ çizgesinin kenar sayısı

## TERMİNOLOJİ DİZİNİ

a cone with apex $x$	tepe noktası $x$ olan bir koni
(acyclic) chromatic number	(döngüsüz) kromatik sayı
acyclic complex	döngüsüzlük kompleksi
chord	kiriş
chordal graph	üçgensel çizge
circuit (minimal non-face)	minimal gayri-yüz
clique	tamsal
closed neighbourhood	kapalı komşuluk
complete graph	tam çizge
component	bileşen
composition	bileşim
cone	koni
coned	konik
connected graph	bağlantılı çizge
contractible	büzülebilir
cycle graph	döngü çizgesi
decomposition	parçalanma
deletion of a face	bir yüzün silinimi
depth	derinlik
dicycle	yönlü döngü
directed graph (digraph)	yönlü çizge
disjoint union	ayrık birleşim
equivalent set (of vertices)	denk köşeli
$F$ -free	$F$ -yoksun
face	yüz
facet	maksimal yüz
feedback number	döngü-kıran sayı
feedback vertex set	döngü-kıran küme
flag (complex)	bayrak
graph	çizge
graph colouring	çizge renklendirme
hero tournament	kahraman turnuva
highly decomposable	hayli parçalanabilir
highly regular tournament	hayli regüler turnuva
homotopy equivalence	homotopi denklik
independent set	bağımsız küme
induced subgraph	indirgenmiş alt çizge
irreducible tournament	indirgenemez turnuva
join (simplicial complex)	simpleksel toplam
link of a face	bir yüzün bağı
multiplicity	kathlık
neighbourhood complex	komşuluk kompleksi
non-coned	gayri-konik
non-face	gayri-yüz

non-transitive	gayri-geçişmeli
non-trivial	gayri-aşık
path graph	yol çizgesi
power set of a set $A$	$A$ kümesinin kuvvet kümesi
quotient map	bölüm fonksiyonu
reducible tournament	indirgenebilir turnuva
regular	regüler
saturated	doymuş
shrinkable	daraltılabilir
simple graph	basit çizge
simplicial complex	simpleksel kompleks
simplex	simpleks
sink vertex	hedef köşe
source vertex	kaynak köşe
subtournament	alt turnuva
suspension	genleşme
tournament	tam yönlü çizge (turnuva)
transitive (acyclic)	geçişmeli (döngüsüz)
trisection tournament	üçbölme turnuvası
trisectionable tournament	üçbölünebilir turnuva
trivial	aşık
unsaturated	doymamış
unshrinkable	daraltılamaz
wedge sum (of simplicial complexes)	kama toplamı

## 1. GİRİŞ

Bilim insanları yüzyıllardır, karşılaşılan problemleri farklı alanlara taşıyarak çözümlene yoluna gitmişlerdir. Problemin doğasını koruyacak şekilde gerçekleşen disiplinlerarası bu geçiş, bir kavramın başka parametreler cinsinden ifade edilerek farklı bakış açıları sayesinde çözümlenmesini sağlamaktadır. “Topolojik Kombinatorik” bu etkileşimin en güzel örneklerinden biridir. Çift yönlü çalışmasıyla, birbiri içerisinde kayda değer yaklaşımlarda bulunarak etkinliğini kabul ettirmiştir.

Basit anlamda topoloji, sürekli deformasyonlar altında uzayların koruduğu temel özellikleri inceleyerek verilen uzayların birbirinden ayırt edilmesini sağlamaktadır. Diğer bir deyişle iki uzayın birbirine ne kadar benzer olduğunu, yani benzerlik oranını tespit etmektedir. Verilen iki uzayın homeomorfik olması bu benzerliğin en yalın hali olup, ardından homotopi denkliği ve homoloji gruplarının denkliğinden bahsedilebilir. Uzayları sınıflandırarak temel yapılarını inceleyen topolojinin kombinatorikteki etkinliği ise Kneser sanısının (Kneser, 1955), Lovász (1978) tarafından gerçekleştirilen ispatı ile başlamaktadır. Topolojik kombinatorik olarak ortaya çıkan bu alan için birçok çalışma yapılmış ve farklı disiplinlerdeki etkinliği çalışılmıştır (Daneshpajouh, 2018; Merrifield ve Simmons, 1989; Chari, 1997; Arnold ve Khesin, 1999; Regge ve Zecchina, 2000). Özellikle son yıllarda, çeşitli türdeki büyük verilerin (big data) analiz ederek yapısal özelliklerin incelendiği Topolojik Veri Analizi (Topological Data Analysis) de bu etkileşimin en güzel örneklerinden biridir (Edelsbrunner vd., 2000; Zomorodian ve Carlsson, 2005; Carlsson, 2009).

Topolojik kombinatorik alanındaki çalışmaların başlamasına neden olan Kneser sanısı şu şekilde ifade edilebilir. Her  $n, k$  pozitif tamsayıları için  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin  $k$  elemanlı alt kümelerinin birer köşeye karşılık geldiği ve ayrık herhangi iki kümeye karşılık gelen köşelerin arasında kenar bulunduğu çizge *Kneser çizgesi* ( $K(n, k)$ ) olarak adlandırılır ve Kneser savı;  $K(n, k)$  çizgelerin kromatik sayısının  $n - 2k + 2$  olduğunu iddia eder (Kneser, 1955). Kromatik sayının  $n - 2k + 2$  sayısından küçük olduğu kolaylıkla görülebilirken diğer kısım uzun süre çözülememiştir. Lovász, herhangi bir  $G$  çizgesine komşuluk kompleksi ( $\mathcal{N}(G)$ ) karşılık getirip bu kompleksin bağlantılılığının

başlangıçtaki çizgenin kromatik sayısı tarafından sınırlandırıldığını göstererek aşağıdaki ilişkiyi ortaya çıkarmıştır ve bunun bir sonucu olarak Kneser sanısını kanıtlamıştır.

**Teorem 1.1.** (Lovász, 1978) *Bir  $G$  çizgesi için eğer  $\mathcal{N}(G)$  komşuluk kompleksi  $k$ -bağlantılı ise  $\chi(G) \geq k + 3$  eşitsizliği sağlanır.*

Lovász, çalışmasında  $\mathcal{N}(K(n, k))$  kompleksinin bağlantılılığının  $n - 2k - 1$  olduğunu da ispatlayarak Kneser sanısının kanıtını tamamlamıştır. Böylece basit çizgeler üzerinde inşa edilen bir (komşuluk) kompleksin topolojisinin çizgenin kromatik sayısı ile doğrudan ilişkili olduğu ortaya konulmuştur. Bu, bir çizgenin önemli parametrelerinden biri olan kromatik sayıyı topolojik bir değişmeyle sınırlamaktır ki, kombinatoryal bir problem için topolojik yaklaşım sunması bakımından ciddi önem arz eden bir sonuçtur.

Lovász'ın yaptığı çalışmada basit çizgelerin ele alınmış olması, yönlü çizgeler için de benzer bir bağıntının varlığını sorgulatmaktadır. Çalışmanın temel motivasyonunu oluşturan bu düşünce ile yönlü çizgelerin kombinatoryal özelliklerinin olası topolojik parametrelerle kontrol edilmesi amaçlanmıştır.

Basit çizgelerdeki renklendirme kavramı, bağımsız kümeler ile döngüsüz kümelerin yer değişiminin doğal bir sonucu olarak yönlü çizgelere genişletilebilir. Yönlü çizgelerdeki bu renklendirme, basit çizgelere farklı olarak yeni problemleri de beraberinde getirmektedir. Örneğin, tam çizgelerin yönlendirilmiş hali olan turnuvaların renklendirilmesi düşünüldüğünde,  $H$  bir turnuva olmak üzere,  $H$ -yoksun turnuvaların kromatik sayıları sınırlandırılmıştır. Berger vd. (2013), böyle turnuvaları kahraman turnuva olarak isimlendirmiş olup, detaylı bir karakterizasyonunu vermişlerdir. Topolojik açıdan bakıldığında, basit çizgeler ile ilintilendirilen bağımsızlık kompleksi, yönlü çizgeler üzerinde yüzleri döngüsüz kümeler olan döngüsüzlük kompleksine doğal olarak genişletilebilir. Bağımsızlık kompleksinden farklı olarak, döngüsüzlük kompleksi bayrak olmak zorunda değildir. Döngüsüzlük kompleksleri üzerindeki bu çalışma en azından turnuvalar için yeni değildir. Burzio ve Demaria (1987a), döngüsüzlük komplekslerinin temel grubu gayri-aşık olan turnuvalar için kombinatoryal karakterizasyon belirlemiştir (bu turnuvalar *basit bağlantısız* olarak adlandırılmıştır).

Bu çalışmanın amacı şu şekilde özetlenebilir: Simpleksel kompleksler için temel indirgeme yöntemleri kullanılarak, içerdiği her köşe çifti arasında yönlü bir kenar bulduran turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin topolojik yapısının belirlenmesi için bir genellemeye varmak ve bu sayede kromatik sayı ve döngü-kıran sayı gibi bazı çizge parametreleriyle olan ilişkilerini ortaya çıkarmaktır. Öncelikle turnuvalara bir topolojik bir yapı olan simpleksel kompleksler karşılık getirilmiştir. *Döngüsüzlük kompleksi* ( $\text{dön}(T)$ ) olarak adlandırılan bu kompleksin köşeleri turnuvaların köşeleri ile aynı olup, yüzleri de turnuvaların geçişmeli (döngüsüz) köşe kümelerinden oluşmaktadır. Turnuvaların kombinatoriyal özellikleri detaylı bir şekilde Burzio ve Demaria (1987a,b) tarafından incelenmiş ve bu çalışmanın altyapısını oluşturmaktadır. Burzio ve Demaria (1987b), çalışmasında  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$  şeklinde bir köşe sıralamasının olduğu ve her bir köşeden ardışık  $k$  köşeye yönlü kenarların olduğu turnuvaları *hayli regüler* olarak tanımlamıştır. Ardından  $R_m$  hayli regüler turnuvası için  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  formunda yazılabilen turnuvaları *hayli parçalanabilir* olarak ifade etmiş ve bu çalışma için temel araç olan şu sonucu vermişlerdir: “*Bir  $T$  turnuvası için  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi basit bağlantısızdır ancak ve ancak  $T$  hayli parçalanabilirdir*”. Bu sayede basit bağlantısız turnuvaların, yani döngüsüzlük komplekslerinin temel grubu gayri-aşık olan turnuvaların kombinatoriyal yapısı hakkında fikir edinilebilmektedir. Bu kapsamda öncelikle döngüsüzlük komplekslerinin homotopi yapısının belirlenmesi amaçlanmış ve Ehrenborg ve Hetyei (2006), Marietti ve Testa (2008) tarafından geliştirilen bazı temel indirgeme yöntemleri (Önerme 2.23 ve Teorem 2.25) baz alınarak basit bağlantısız turnuvaların topolojik yapısı Bölüm 3’te araştırılmıştır. Bu bölümün temel sonucu olarak, turnuvaların kombinatoriyal özellikleri kullanılarak üçbölünebilir turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin kürelerin kama toplamına homotopik olduğu gösterilmiştir. Bu homotopi denkliğindeki en yüksek kürenin boyutu *derinlik* ( $\text{der}(T)$ ) olarak tanımlanmıştır.

Bölüm 3’te topolojik yapısı belirlenen üçbölünebilir turnuvaların, Bölüm 4’te topolojik yapısı ve turnuvaların kombinatoriyal özellikleri arasındaki ilişkisi incelenmiştir. Bu bölümde ilk olarak turnuvaların köşe renklendirmesi ele alınmış ve çalışmanın temel sonuçlarından biri ortaya konulmuştur:  $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  olmak üzere eğer  $T$  üçbölünebilir turnuva ise  $\chi_a(T) \leq c(\text{der}(T) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1$  olacak şekilde  $1.62 < c \leq 2$  sayısı vardır. Bu

ise  $\text{der}(T)$  parametresinin turnuvarın kromatik sayısı  $\chi_a(T)$  ile doğrudan ilişkili olduğu belirtmekte ve bu ilişkinin (eşitsizliğin) sıkı olduğu ayrıca örneklerle gösterilmiştir. Elde edilen sonuç, herhangi bir  $H$  turnuvasını içermeyen turnuvaların kromatik sayısının sınırlandırılması üzerine yapılan (Berger vd., 2013) çalışması ile aynı doğrultudadır. (Choromanski ve Jebara, 2015; Harutyunyan vd., 2017) turnuvaların kromatik sayısının kontrol altında tutulabilmesi için yapılan diğer çalışmalardır.

Bu bölümdeki diğer sonuç ise döngü-kıran sayıları ile ilgilidir ve  $n$  köşeli bir  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $\text{dk}(T) = n - \text{der}(T) - 1$  eşitliği kanıtlanmıştır. Oldukça keskin olan bu sonuç ile  $n$  köşeli bir turnuvarın döngü-kıran sayısının yalnızca turnuvarın derinliğinin bilinmesi ile hesaplanabildiği, diğer bir deyişle  $\text{dk}(T)$  ve  $\text{der}(T)$  ikilisinin doğrusal bir bağıntıya sahip olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Bu tez çalışmasının üç temel sonucu aşağıdaki şekilde listelenebilir;

- (a) üçbölünebilir turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin topolojik yapısının belirlenmesi (Teorem 3.19),
- (b) elde edilen üçbölünebilir turnuvaların topolojik yapısındaki  $\text{der}(T)$  değişmezinin çizgenin (döngüsüz) kromatik sayısı ile olan ilişkisinin ortaya çıkarılması (Teorem 4.2),
- (c)  $\text{der}(T)$ 'nin çizgenin bir kombinatoryal parametresi olan döngü-kıran sayı ( $\text{dk}(T)$ ) ile olan doğrusal bağıntısının tespit edilmesi (Teorem 4.5).

Bölüm 3 ve Bölüm 4.1'de yer alan çalışmalar Deniz (2015) makalesine dayanmaktadır.

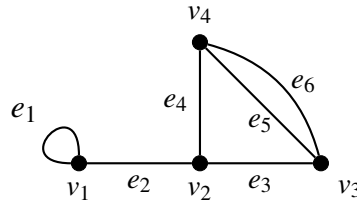
## 2. BAZI ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak bazı tanım ve temel kavramlara yer verilmiştir. İlk olarak yapılan çalışmanın kombinatoryal kısmı ile ilgili olan çizge teori kuramından bazı kavramlara yer verilecektir, daha geniş bilgi için West (2001); Bondy ve Murty (2008) incelenebilir. Bu bölümün geriye kalan kısmında ise simpleksel kompleksler ve temel indirgeme yöntemleri ele alınacaktır (Hatcher, 2002; Kozlov, 2007; Jonsson, 2008).

### 2.1. Çizge Teori

$V$  sonlu bir küme ve  $E \subseteq V \times V$  olmak üzere,  $G = (V, E)$  ikilisine bir *çizge* denir. Burada  $V$  ye  $G$  nin *köşelerinin kümesi* ve  $E$  ye de  $G$  nin *kenarlarının kümesi* denir. Herhangi bir  $G$  çizgesinde  $u$  ve  $v$  birer köşe olmak üzere  $uu = \{u, u\}$  formunda tanımlanan her bir kenara bir *düğüm* denir ve  $\{uv, uv, \dots\}$  formunda tanımlanan yapıya da,  $u$  ve  $v$  köşeleri arasındaki *katlı kenar* denir. Eğer bir  $G$  çizgesinde hiçbir düğüm ve katlı kenar yoksa bu çizgeye *basit çizge* denir.

**Örnek 2.1.** Şekil 2.1'de köşe kümesi  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ve  $e_1 = v_1v_1$ ,  $e_2 = v_1v_2$ ,  $e_3 = v_2v_3$ ,  $e_4 = v_2v_4$ ,  $e_5 = v_3v_4$ ,  $e_6 = v_3v_4$  olmak üzere kenar kümesi  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  olan bir  $G = (V, E)$  çizge örneği gösterilmektedir. Buradan görüleceği üzere  $e_1$  bir düğümdür ve  $v_3, v_4$  köşeleri arasında iki katlı kenar bulunmaktadır.



Şekil 2.1.  $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2, \dots, e_6\})$  çizgesi.

Köşe kümesi  $V \neq \emptyset$ , kenar kümesi  $V$  nin sıralı ikililerinden oluşan çizgeye *yönlü çizge* denir ve  $D = (V, A)$  ile gösterilir (bknz. Şekil 2.3). Yönlü bir çizgedeki kenarlar *yönlü kenar* olarak tanımlanır. Burada  $(u, v)$  yönlü kenarı  $u$  dan  $v$  köşesine bir yönlü kenar

belirtir ve  $\vec{uv}$  veya kısaca  $uv$  şeklinde gösterilir. Bir  $\vec{uv}$  yönlü kenarında  $u, v$  köşelerine *uç köşeler* denir ve özel olarak  $u$  köşesine *kuyruk köşe*,  $v$  ye de *baş köşe* denir.

Bu çalışma boyunca yönlü çizgeler ele alınacak olup,  $D$  ile ifade edilen çizge bir yönlü çizge belirtecektir.

Yönlü bir  $D$  çizgesinde  $v \in V(D)$  köşesi ile arasında kenar bulunan köşelere  $v$  nin *komşuları* denir ve bu köşelerden oluşan küme  $N_D(v)$  (veya  $N(v)$ ) ile gösterilir. Kenarların yönlü olmasından dolayı  $v$  köşesinin komşuları  $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$  şeklinde iki kısma ayrılır. Burada  $N_D^+(v), N_D^-(v)$  kümeleri sırasıyla  $\vec{vu}, \vec{uv}$  şeklindeki  $u$  köşelerinden oluşur.  $|N_D(v)|$  sayısına  $v$  nin *derecesi* denir ve  $d_D(v)$  ile gösterilir. Diğer taraftan,  $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$  (sırasıyla  $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ ) sayısına ise  $v$  köşesinin *dış-derecesi* (sırasıyla *iç-derecesi*) denir.

**Tanım 2.2.**  $D_1 = (V_1, A_1)$  ve  $D_2 = (V_2, A_2)$  birer yönlü çizge olmak üzere

$$uv \in A_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in A_2$$

olacak şekildeki  $f: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  birebir ve örten fonksiyonuna (yönlü çizge) *izomorfizma* denir. Eğer  $D_1$  ve  $D_2$  çizgeleri arasında bir izomorfizma mevcut ise  $D_1$  ve  $D_2$  çizgelerine *izomorfiktir* denir ve  $D_1 \cong D_2$  şeklinde yazılır.

**Tanım 2.3.** Bir  $D = (V, A)$  çizgesinde  $V' \subseteq V$  ve  $A' \subseteq A$  olacak şekildeki  $H = (V', A')$  çizgesine  $D$  çizgesinin bir *alt çizgesi* denir ve  $H \subseteq D$  ile gösterilir.

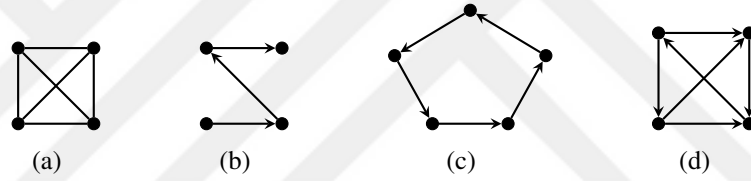
Herhangi bir  $S \subseteq V(D)$  için,  $D[S] = (S, A \cap (S \times S))$  çizgesine  $D$  çizgesinin  $S$  tarafından *indirgenmiş bir alt çizgesi* denir. Eğer  $H$  çizgesi  $D$  çizgesinin bir indirgenmiş alt çizgesi ise  $H \leq D$  ile gösterilir.

$D = (V, A)$  bir çizge ve  $S \subseteq V$  olmak üzere  $D - S \cong D[V - S]$  dir. Ayrıca  $D$  ve  $H$  birer çizge olmak üzere, eğer  $H$  çizgesi,  $G$  nin bir indirgenmiş alt çizgesi değilse,  $G$  ye *H-yoksun çizge* denir.

**Tanım 2.4.** Bazı özel çizgeler;

- (i)  $n$  köşeli bir basit çizgede tüm köşe çiftleri arasında bir kenar varsa bu çizgeye  $n$ -tam çizge denir ve  $K_n$  ile gösterilir.
- (ii)  $D = (V, A)$  yönlü çizgesi için eğer  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  ve  $A = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$  ise  $D$  çizgesine *yönlü  $v_1, v_k$ -yol çizgesi* (veya kısaca *yönlü  $k$ -yol çizgesi*) denir ve  $\vec{P}_k$  ile gösterilir.
- (iii)  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  köşe kümesi üzerinde tanımlanan yönlü  $v_1, v_k$ -yol çizgesi için eğer  $v_kv_1 \in A$  ise  $D = (V, A)$  çizgesine *yönlü  $k$ -döngü çizgesi* denir ve  $\vec{C}_n$  ile gösterilir.
- (iv)  $D = (V, A)$  yönlü çizgesinde her  $u, v \in V$  çifti için  $uv$  ve  $vu$  yönlü kenarlarından bir ve yalnız bir tanesi mevcut ise bu çizgeye  $n$ -tam yönlü çizge (veya turnuva) denir ve  $n$  köşeli bir turnuva  $T_n$  ile gösterilir.

Şekil 2.2'de bazı özel çizgeler görsel olarak belirtilmiştir.

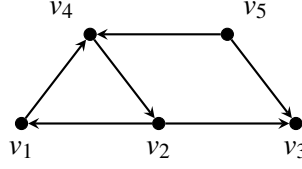


Şekil 2.2.  $K_4$  tam çizgesi (a);  $\vec{P}_4$  yönlü yol çizgesi (b);  $\vec{C}_5$  yönlü döngü çizgesi (c);  $T_4$  turnuvası (d).

Eğer  $\vec{P}_k, \vec{C}_n$  çizgelerinde yön dikkate alınmaz ise yönsüz kenarlardan oluşan sırasıyla  $k$ -yol çizge ( $P_k$ ),  $k$ -döngü çizge ( $C_k$ ) tanımlanır.

Yönlü döngü içermeyen çizgelere *döngüsüz (geçişmeli) çizge* denir. Yönlü bir  $D$  çizgesi ve  $v \in V(D)$  köşesi için eğer  $d_D^-(v) = 0$  ise  $v$  ye *kaynak köşe*, eğer  $d_D^+(v) = 0$  ise  $v$  ye *hedef köşe* denir.

**Örnek 2.5.** Şekil 2.3'de verilen  $D$  çizgesi bir yönlü çizge olup burada  $\vec{C}_4$  indirgenmiş alt çizge olarak bulunmadığından  $\vec{C}_4$ -yoksun çizgedir. Bu çizgede  $\{v_1, v_2, v_3\}$  köşe dizisi bir  $\vec{C}_3$  yönlü 3-döngü oluşturduğundan  $D$  çizgesi geçişmeli değildir. Ayrıca  $v_4$  köşesi için  $N^+(v_4) = \{v_2\}$ ,  $N^-(v_4) = \{v_1, v_5\}$  dir. Özel olarak  $v_5$  bir kaynak köşe ve  $v_3$  bir hedef köşedir.



Şekil 2.3.  $D = (\{v_1, v_2, \dots, v_5\}, \{v_1v_4, v_2v_1, v_2v_3, v_4v_2, v_5v_3, v_5v_4\})$  yönlü çizgesi.

Döngüsüz çizgeler için temel bir özellik olan aşağıdaki ifadeye yer verilecektir.

**Önerme 2.6.** (Bang-Jensen ve Gutin, 2008) Eğer  $D = (V, A)$  yönlü çizgesinde yönlü bir döngü mevcut değilse  $D$  çizgesi en az bir kaynak ve en az bir hedef köşe içerir.

$k \geq 4$  için basit bir  $k$ -döngü çizgesinde komşu olmayan iki köşeyi birbirine bağlayan kenara *kiriş* denir. Eğer bir  $G$  basit çizgesinde  $k \geq 4$  için her  $k$ -döngü çizgesi kirişli ise  $G$  ye *üçgensel çizge* denir.

## 2.2. Simpleksel Kompleksler

Bir  $A$  kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan  $\mathcal{P}(A)$  ailesine  $A$  kümesinin *güç kümesi* denir.

**Tanım 2.7.** Sonlu bir  $V$  kümesinin alt kümelerinden oluşan ve aşağıdaki iki koşulu sağlayan  $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$  küme ailesine *simpleksel kompleks* denir.

- (i) Her  $v \in V$  için  $\{v\} \in \Delta$ .
- (ii) Eğer  $F \in \Delta$  ve  $H \subset F$  ise  $H \in \Delta$  dir.

$\Delta$  nın elemanlarına  $\Delta$  nın *yüzleri* ve  $\mathcal{P}(V) \setminus \Delta$  elemanlarına da  $\Delta$  nın *gayri-yüzleri* denir. Bir  $F$  yüzünün boyutu  $\text{boy}(F) := |F| - 1$  olup  $\Delta$  nın boyutu  $\text{boy}(\Delta) := \max\{\text{boy}(F) : F \in \Delta\}$  dir.  $\Delta$  simpleksel kompleksinin 0 ve 1 boyutlu yüzlerine sırasıyla *köşeler* ve *kenarlar* denir. Başka bir yüz tarafından içerilmeyen yüzlere *maksimal yüz* denir ve  $\Delta$  nın maksimal yüzlerinin ailesi de  $\mathcal{F}(\Delta)$  ile gösterilir. Bir  $\Delta$  simpleksel kompleksinde bir  $C$  gayri-yüzünün bütün özalt kümeleri  $\Delta$  nın yüzleri ise  $C$  ye *minimal gayri-yüz* denir.

$\Delta_1, \Delta_2$  birer simpleksel kompleks olmak üzere eğer her  $\sigma \in \Delta_1$  için  $\sigma \in \Delta_2$  oluyorsa  $\Delta_1$  simpleksel kompleksine  $\Delta_2$  nin bir *alt simpleksel kompleksi* denir.

**Tanım 2.8.**  $\Delta$  bir simpleksel kompleks ve  $\sigma \in \Delta$  olsun. Bu takdirde  $\sigma$  nın bağı;  $\text{bağ}_\Delta(\sigma)$  ve silinimi;  $\text{sil}_\Delta(\sigma)$  sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{bağ}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta : \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ ve } \tau \cup \sigma \in \Delta\}$$

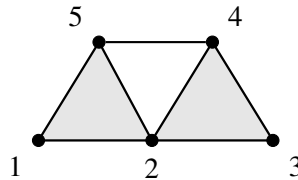
$$\text{sil}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta : \sigma \not\subseteq \tau\}$$

Eğer  $\sigma = \{x\}$  olacak şekilde tek bir elemandan oluşuyorsa, kısaca  $\text{bağ}_\Delta(x)$  ve  $\text{sil}_\Delta(x)$  şeklinde yazılır.

**Örnek 2.9.**  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  köşe kümesi üzerinde tanımlı

$$\Delta = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\} \right\}.$$

simpleksel kompleksi Şekil 2.4'te görsel olarak çizilmiştir. Bu simpleksel komplekste maksimal yüzler  $\{4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}$  tür ve dolayısıyla boyut 2 dir. Örneğin,  $\{1, 2, 4, 5\}$  kümesi bir gayri-yüzdür, ancak minimal değildir;  $\{2, 4, 5\}$  kümesi ise bir minimal gayri-yüzdür.  $\Delta$  kompleksinin diğer minimal gayri-yüzleri ise  $\{1, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}$  dir. Özel olarak  $\{4\}$  yüzü için silinim ve bağ alt kompleksleri sırasıyla  $\text{sil}_\Delta(4) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 5\}\}$  ve  $\text{bağ}_\Delta(4) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}\}$  şeklindedir.



Şekil 2.4. Örnek 2.9'da verilen  $\Delta$  simpleksel kompleksi.

$G = (V, E)$  bir basit çizge olsun, eğer  $F \subseteq V$  için  $G[F]$  indirgenmiş çizgesi bir tam çizgeye izomorfik ise,  $F$  ye  $G$  nin *tamı* denir.  $V$  köşe kümesi üzerinde inşa edilen, yüzleri  $G$  nin tamı olan simpleksel komplekse  $G$  nin *tamsal kompleksi* denir.

$n \geq 0$  için  $S^n, D^n$  sırasıyla  $n$ -boyutlu küre ve  $n$ -boyutlu disk ifade etsin. Özel olarak  $S^1$  çember,  $D^2$  daire belirtmektedir.

**Tanım 2.10.**  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  birer simpleksel kompleks olsun.  $\Delta_1 * \Delta_2 = \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$  şekilde tanımlanan  $\Delta_1 * \Delta_2$  küme ailesine  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  nin *simpleksel toplamı* denir.

Özel olarak  $\Delta$  simpleksel kompleksi ile 0-boyutlu küre  $S^0 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$  in simpleksel toplamına  $\Delta$  nin *genleşmesi* denir ve  $\Sigma\Delta = S^0 * \Delta$  şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $\Delta$  ile  $\{\emptyset, \{v\}\}$  nin simpleksel toplamına tepe noktası  $v$  olan *koni* denir ve  $C\Delta$  ile gösterilir. Tanım gereği  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ ,  $CS^n \cong D^{n+1}$  ve  $CD^n \cong D^{n+1}$  sağlanır.

**Tanım 2.11.**  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  simpleksel kompleksler ve  $x_1 \in V(\Delta_1), x_2 \in V(\Delta_2)$  olsun.

- (i)  $\Delta_1 \uplus \Delta_2 = \{\sigma \mid \sigma \in \Delta_1 \text{ veya } \sigma \in \Delta_2\}$  şekilde tanımlanan  $\Delta_1 \uplus \Delta_2$  küme ailesine  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  nin *ayrık birleşimi* denir.
- (ii)  $\Delta_1 \uplus \Delta_2$  ayrık birleşimde  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarının eşlenmesiyle oluşan simpleksel komplekse  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  nin *kama toplamı* denir ve  $\Delta_1 \vee \Delta_2$  ile gösterilir.

## 2.3. Homotopi ve Temel Grup

### 2.3.1. Homotopi

**Tanım 2.12.**  $X$  bir topolojik uzay ve  $a, b \in X$  olsun.  $f(0) = a$  ve  $f(1) = b$  olacak şekildeki sürekli  $f : [0, 1] \rightarrow X$  fonksiyonuna  $X$  de  $a$  dan  $b$  ye bir *eğri* denir.

**Tanım 2.13.**  $X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay ve  $f, g : X \rightarrow Y$  bu uzaylar üzerinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere eğer  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  sürekli fonksiyonu mevcut ve aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa  $F$  ye  $f$  ve  $g$  fonksiyonları arasında bir *homotopi* ve  $f, g$  fonksiyonlarına *homotopik* denir,  $f \simeq g$  ile gösterilir.

- (i) Her  $x \in X$  için  $F(x, 0) = f(x)$ .
- (ii) Her  $x \in X$  için  $F(x, 1) = g(x)$ .

Bir  $f$  fonksiyonuna homotopi altında denk olan fonksiyonların denklik sınıfına  $f$  nin *homotopi sınıfı* denir ve  $[f]$  ile gösterilir.

**Teorem 2.14.**  $X$  bir topolojik uzay ve  $x, y \in X$  olsun.  $x$  den  $y$  ye olan tüm eğriler ailesi homotopi bağıntısı altında bir denklik bağıntısıdır.

*İspat.* Her  $t \in [0, 1]$  için  $F(x, t) = f(x)$  olacak şekildeki  $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$  fonksiyonu  $f$  den kendisine bir homotopi belirtir, dolayısıyla  $f \simeq f$  olup, yansıma özelliği sağlanır. Simetri özelliği için de  $f \simeq g$  olsun, o halde  $F(x, 0) = f(x)$  ve  $F(x, 1) = g(x)$  olacak şekilde  $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$  homotopisi mevcuttur. Buradan  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$  olarak tanımlanan  $\bar{F}: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  fonksiyonu için  $G(x, 0) = g(x)$  ve  $G(x, 1) = f(x)$  sağlandığından  $G$  fonksiyonu  $g$  den  $f$  ye bir homotopi belirtir. Dolayısıyla  $g \simeq f$  olup, simetri özelliği sağlanır. Kabul edelim ki  $f \simeq g$  ve  $g \simeq k$  olsun. O halde  $F(x, 0) = f(x)$  ve  $F(x, 1) = g(x)$  olacak şekilde  $F: X \times [0, 1] \rightarrow X$  homotopisi ve  $G(x, 0) = g(x)$  ve  $F(x, 1) = k(x)$  olacak şekilde  $G: X \times [0, 1] \rightarrow X$  homotopisi mevcuttur. Bu takdirde

$$(F * G)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu  $f$  den  $k$  ya bir homotopi belirtir ve böylece geçişme özelliği sağlanır.  $\square$

Bir  $X$  kümesi üzerindeki birim fonksiyon  $\mathbb{1}_X$  ile ifade edilsin. O halde iki topolojik uzayın homotopik anlamda denk olması aşağıdaki şekilde verilir.

**Tanım 2.15.**  $X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay olmak üzere eğer  $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$  ve  $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$  olacak şekilde sürekli  $f: X \rightarrow Y$  ve  $g: Y \rightarrow X$  fonksiyonları mevcut ise  $f$  ye *homotopi denkliği* ve  $X, Y$  uzaylarına da *homotopik olarak denktir* denir,  $X \simeq Y$  ile gösterilir.

**Tanım 2.16.**  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere, eğer  $X$  uzayının birim fonksiyonu bir sabit fonksiyona homotopik ise  $X$  uzayına *büzülebilir* denir. Büzülebilir olan bir topolojik uzay bir nokta ile aynı homotopi tipine sahiptir ve bu homotopi denklik  $X \simeq *$  şeklinde gösterilir.

### 2.3.2. Temel Grup

**Tanım 2.17.**  $X$  bir topolojik uzay,  $x_0 \in X$  ve  $f : [0, 1] \rightarrow X$  bir eğri olsun. Eğer  $f(0) = f(1) = x_0$  ise  $f$  ye bir *kapalı eğri* denir.  $f$  kapalı eğrisinin başlangıç ve bitiş noktası olan  $x_0$  noktasına *taban-noktası* denir.

**Tanım 2.18.**  $f(1) = g(0)$  olacak şekilde iki  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  eğri verilsin. O halde *eğri çarpımı* ( $f.g$ ) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Yukarıda tanımlanan eğri çarpımı altında  $x_0$  taban noktasındaki  $f$  eğrisinin homotopi sınıfı  $[f]$  grup özelliklerini sağlar, şimdi bu teoremi ifade edelim.

**Teorem 2.19.** (Hatcher, 2002)  $X$  bir topolojik uzay ve  $x_0$  taban noktasındaki  $f : [0, 1] \rightarrow X$  eğrisinin homotopi sınıfı  $[f]$  olmak üzere  $[f].[g] = [f.g]$  çarpımı altında  $[f]$  bir gruptur.

Yukarıda belirtilen gruba  $X$  topolojik uzayının  $x_0$  taban-noktasındaki *temel grubu* denir ve  $\pi_1(X, x_0)$  ile gösterilir. Dikkat edileceği üzere bu grup özel olarak  $x_0$  taban-noktasına bağımlıdır. Sıradaki teorem sayesinde  $X$  uzayı eğrisel-bağlantılı olduğunda  $X$  uzayının temel grubu  $x_0$  noktasından bağımsız hale dönüşecektir.

$X$  bir topolojik uzay olmak üzere her  $x, y \in X$  noktası için eğer  $f(0) = x$  ve  $f(1) = y$  olacak şekilde sürekli bir yol fonksiyonu mevcut ise  $X$  uzayına *eğrisel-bağlantılı* denir.

**Teorem 2.20.** (Hatcher, 2002)  $X$  eğrisel-bağlantılı bir topolojik uzay ve  $x_0, x_1 \in X$  olsun. O halde  $\pi_1(X, x_0)$  ve  $\pi_1(X, x_1)$  grupları arasında bir izomorfizma vardır.

Teorem 2.20 gereğince eğrisel-bağlantılı bir  $X$  uzayında temel grup taban-noktasından bağımsız şekilde düşünülür. O yüzden eğrisel-bağlantılı uzaylar için temel grup artık kısaca  $\pi_1(X)$  ile ifade edilebilir.

Bilindiği üzere tek bir elemana sahip gruplar *aşık* (*trivial*) olarak ifade edilir.

**Tanım 2.21.** Eğrisel-bağlantılı ve temel grubu *aşık* olan topolojik uzaylara *basit-bağlantılı* denir. Aksi durumda *basit-bağlantısız* olarak tanımlanır.

#### 2.4. Simpleksel Kompleksler Üzerinde Bazı Temel İndirgeme Yöntemleri

**Önerme 2.22.**  $\Delta_1, \Delta_2$  ve  $\Delta_3$  ayrık köşe kümeleri üzerinde simpleksel kompleksler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- (i)  $\Delta_1 * \Delta_2 \cong \Delta_2 * \Delta_1,$
- (ii)  $\Delta_1 * (\Delta_2 * \Delta_3) \cong (\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3,$
- (iii)  $\Delta_1 * (\Delta_2 \vee \Delta_3) \cong (\Delta_1 * \Delta_2) \vee (\Delta_1 * \Delta_3),$
- (iv)  $\Sigma(\Delta_1 \uplus \Delta_2) \simeq \Sigma\Delta_1 \vee S^1 \vee \Sigma\Delta_2,$

*İspat.* Simpleksel toplam tanım gereği değişmelidir. Ayrıca  $\Delta_1 * (\Delta_2 * \Delta_3)$  ve  $(\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3$  simpleksel kompleksleri izomorfik olup birleşme özelliği sağlanır, bu yüzden (i) ve (ii) açıktır. (iii) ve (iv) özellikleri de sırasıyla Bukh (2015) ve Matoušek (2003) den görülür. □

Simpleksel kompleksler üzerinde oldukça kullanışlı olan yukarıdaki denklemlerin yanı sıra Önerme 2.22 gereğince  $S^n * S^m \cong S^{n+m+1}$ ,  $\Sigma(\Delta_1 * \Delta_2) \simeq (\Sigma\Delta_1) * \Delta_2$  ve  $\Delta * S^n \simeq \Sigma^{n+1}\Delta$  homotopi denklikleri sağlanır. Ayrıca  $k \geq 2$  için  $(S^0)^{*k} = S^0 * S^0 * \dots * S^0$  ifadesinin  $S^{k-1}$  uzayına homoemorfik olduğu görülür.

Aşağıdaki önerme simpleksel kompleksler için temel indirgeme yöntemlerinden biri olup detaylı bir ispat için (Taylan, 2016) çalışması incelenebilir.

**Önerme 2.23.** (Marietti ve Testa, 2008)  $\Delta$  bir simpleksel kompleks ve  $x \in V(D)$  olsun. Eğer  $\text{bağ}_\Delta(x)$  alt kompleksi  $\text{sil}_\Delta(x)$  alt kompleksinde büzülebilir ise,

$$\Delta \simeq \text{sil}_\Delta(x) \vee \Sigma \text{bağ}_\Delta(x)$$

homotopi denkliği sağlanır.

Bir topolojik uzayın büzülebilir olmasının yanında  $\Delta$  simpleksel kompleksinde homotopi yapısı korunarak bazı indirgemeler yapmak mümkündür.

**Tanım 2.24** (Kenar Büzme). Bir  $\{x, y\} \in \Delta$  kenarı için *kenar büzme* operasyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $f: V \rightarrow (V \setminus \{x, y\}) \cup \{w_{xy}\}$  dönüşümü olarak tanımlanır.

$$f(v) := \begin{cases} v & , v \notin \{x, y\}, \\ w_{xy} & , v \in \{x, y\}. \end{cases}$$

$f$  dönüşümü benzer şekilde

$$f(F) := \{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k)\}$$

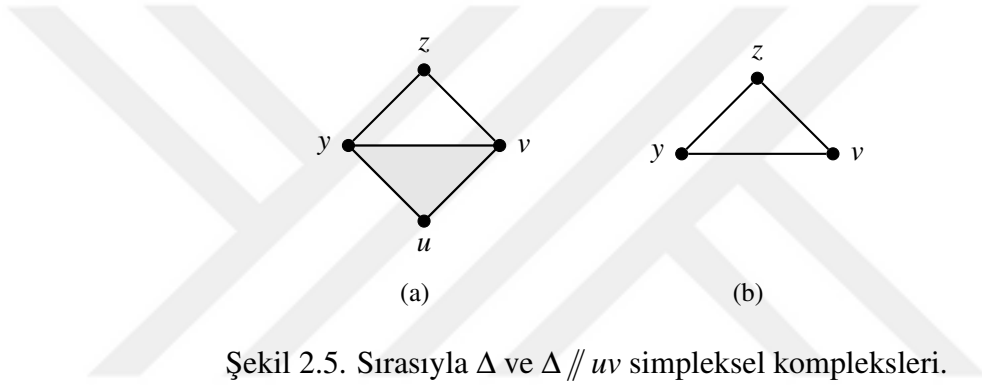
alınarak  $\Delta$  nın tüm  $F = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  simplekslerine uygulanabilir. Böylelikle  $\{x, y\}$  kenarına göre  $\Delta$  simpleksel kompleksinin büzülmesi olan  $\Delta //_{uv} := \{f(F) : F \in \Delta\}$  kompleksi oluşturulur.

$\Delta, V$  köşe kümesi üzerinde bir simpleksel kompleks ve  $\{x, y\} \in \Delta$  bir kenarı olsun. Eğer  $\sigma \cup \{x\} \in \Delta$  ve  $\sigma \cup \{y\} \in \Delta$  koşulunu sağlayan her  $\sigma \in \Delta$  yüzü için aynı zamanda  $\sigma \cup \{x, y\} \in \Delta$  ise  $\{x, y\}$  kenarına  $\Delta$  simpleksel kompleksi içinde büzülebilir denir. Diğer bir deyişle eğer  $\{x, y\}$  kenarı  $\Delta$  kompleksinin hiçbir minimal gayri-yüzü tarafından içerilmiyorsa  $\{x, y\}$  kenarı  $\Delta$  simpleksel kompleksinde büzülebilirdir.

Simpleksel kompleksler üzerindeki kenar-büzme kavramına ilk olarak Hoppe (1996) makalesinde rastlanmaktadır ve ardından (Ehrenborg ve Hetyei, 2006; Attali vd., 2012) çalışmalarında bağımsızlık komplekslerin yapısı üzerinde detaylıca incelenmiştir.

**Teorem 2.25.** (Ehrenborg ve Hetyei, 2006)  $\Delta$  bir simpleksel kompleks ve  $\{x, y\} \in \Delta$  bir kenar olsun. Eğer  $\{x, y\}$  kenarı  $\Delta$  kompleksinde büzülebilir ise  $\Delta$  ve  $\Delta //_{xy}$  simpleksel kompleksleri homotopik olarak denktir.

Gözlemleneceği üzere simpleksel komplekslerde herhangi bir kenarın büzülmesi genel anlamda homotopi yapısını korumak zorunda değildir. Bu durum ele alınan kenarın büzülebilir olmasına bağlıdır. Örneğin Şekil 2.5(a) ile belirtilen  $\Delta$  simpleksel kompleksinde  $\{v, y\}$  kenarının büzülmesi durumunda  $\{v, y, z\}$  gayri-yüzü yok olmaktadır ve açıkça görüleceği üzere ortaya çıkan bu simpleksel kompleks  $\Delta$  ya homotopik değildir. Fakat, Teorem 2.25 den görüleceği üzere herhangi bir kenarın  $\Delta$  kompleksinde büzülebilir olması durumunda homotopik yapısı korunmaktadır. Bu yüzden Şekil 2.5(a)'da büzülebilir olma koşulunu sağlayan yalnızca  $\{u, v\}$  ve  $\{u, y\}$  olup,  $\Delta \simeq \Delta // uv \simeq \Delta // uy$  sağlanır. Bu büzme işlemi sonucunda Şekil 2.5(b)'de yer alan simpleksel kompleks elde edilir ve bu kompleks  $S^1$  ile homotopik olarak denktir.



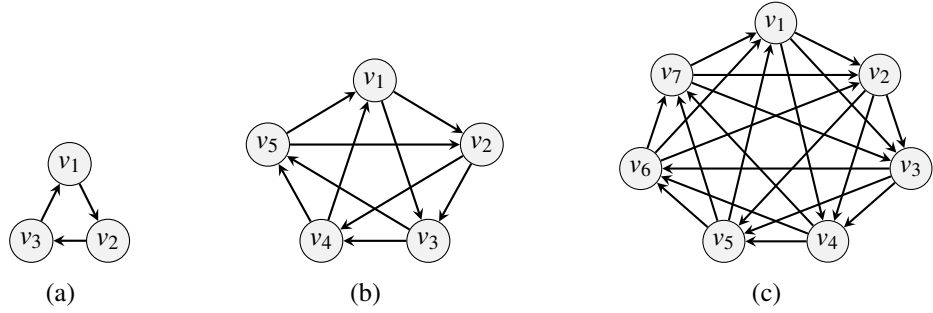
### 3. TURNUVALAR VE DÖNGÜSÜZLÜK KOMPLEKSLERİ

Kombinatorikteki ayrık yapılardan biri olan turnuvalara bu bölümde simpleksel kompleks (döngüsüzlük kompleksi) karşılık getirilerek topolojiye doğal bir dönüşümü sağlanacaktır. Ardından bazı temel indirgeme yöntemleri kullanılarak bu topolojik uzayın homotopik yapısı belirlenecektir. Böylelikle simpleksel kompleksin homotopik yapısı ile başlangıçtaki turnuvanın kombinatoriyal özelliklerinin arasındaki ilişkinin ortaya çıkması sağlanacaktır.

$D = (V, E)$  yönlü çizgesinde her  $u, v \in V$  çifti için  $uv$  ve  $vu$  yönlü kenarlarından tam olarak bir tanesi mevcut ise bu çizgeye *turnuva* denir ve  $T$  ile gösterilir. Genel olarak  $n$  köşeli bir turnuva  $T_n$  şeklinde yazılır. Her  $v \in V(T)$  için  $d^+(v) = d^-(v)$  ise  $T$  ye *regüler turnuva* denir. Ayrıca  $k \geq 1$  ve  $n = 2k + 1$  için  $n$  köşeli bir regüler  $T$  turnuvasında eğer

$$v_i v_j \in E(T_n), \quad i \in [n] \Leftrightarrow j \equiv i + \ell \pmod{n}, \quad \ell \in [k]$$

koşulunu sağlayan  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$  sıralaması varsa  $T$  ye *hayli regüler turnuva* denir. Bu çalışma boyunca  $n$  köşeli hayli regüler bir turnuva  $R_n$  ile gösterilecektir. Şekil 3.1'de  $R_3, R_5$  ve  $R_7$  hayli regüler turnuvaları yer almaktadır.

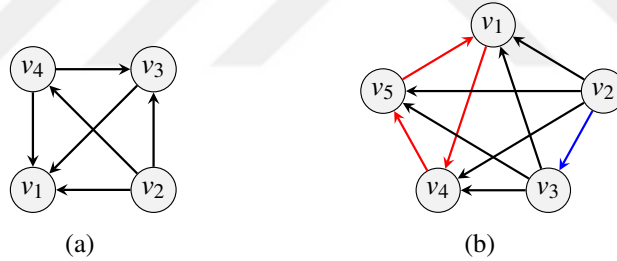


Şekil 3.1. Sırasıyla  $R_3, R_5$  ve  $R_7$  hayli regüler çizgeleri.

$k \geq 3$  olmak üzere köşe kümesi  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  olan yönlü bir çizgede, eğer kenarlar her  $i \in [k]$  için  $u_i u_{i+1} \in E \pmod{k}$  formunda ise çizgeye *yönlü döngü* denir ve  $C_k$  ile gösterilir. Bir  $T$  turnuvasında  $k \geq 3$  için  $C \cong C_k$  olacak şekilde bir  $C$  alt çizgesi mevcut ise  $C$  ye  $T$  nin yönlü döngüsü denir.

$T$ , köşe kümesi  $V$  olan bir turnuva olsun. Herhangi bir  $S \subseteq V$  alt kümesi, eğer  $T[S]$  yönlü döngü içermiyorsa,  $T$  nin bir *döngüsüz (geçişmeli) kümesi* olarak adlandırılır. Özellikle,  $V$  geçişmeli ise  $T$  ye *geçişmeli turnuva* denir; aksi durumda  $T$  ye *gayri-geçişmeli* denir.  $A, B \subseteq V$  köşe kümeleri verilsin. Eğer her  $a \in A$  ve  $b \in B$  için  $ab \in E(T)$  oluyorsa  $A \Rightarrow B$  yazılır. Bir  $T$  turnuvasında  $V = A \cup B$  için  $A \Rightarrow B$  veya  $B \Rightarrow A$  olacak şekilde  $A, B \subseteq V$  köşe kümeleri varsa  $T$  ye *indirgenbilir turnuva* denir; aksi durumda *indirgenemez turnuva* olarak adlandırılır.  $P \subset V$  alt kümesi için eğer her  $q \in V \setminus P$  için  $q \Rightarrow P$  veya  $P \Rightarrow q$  sağlanıyorsa  $P$  ye *denk köşeli* denir.

Şekil 3.2’de gösterilen  $P$  ve  $R$  turnuvalarını dikkate alalım. Açıkça görüldüğü üzere  $P$  turnuvası yönlü bir döngü içermez bu yüzden geçişmelidir.  $R$  turnuvasında ise  $v_1, v_4, v_5$  köşeleri bir yönlü 3-döngü indirger; bu yüzden geçişmeli turnuva değildir.  $R$  için  $A = \{v_2, v_3\}$  ve  $B = \{v_1, v_4, v_5\}$  olmak üzere  $A \Rightarrow B$  sağlanır, aynı zamanda  $V(R) = A \cup B$  olduğundan  $R$  bir indirgenebilir turnuvadır. Ayrıca bu  $A$  ve  $B$  kümeleri denk köşeli kümelerdir.



Şekil 3.2. Sırasıyla  $P$  ve  $R$  turnuvaları.

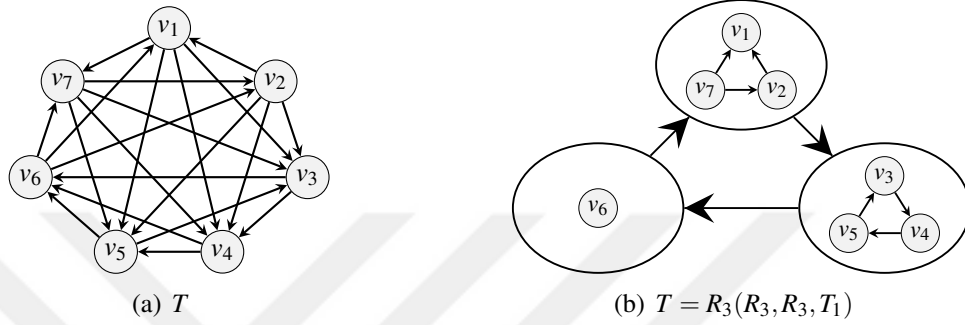
Eğer bir  $T$  turnuvasının köşeleri her biri denk köşeli olan  $P^1, P^2, \dots, P^m$  alt turnuvalarına parçalanabiliyor ve köşe kümesi  $w_1, w_2, \dots, w_m$  olan  $Q_m$  turnuvasında

$$w_i w_j \in E(Q_m) \text{ ancak ve ancak } P^i \Rightarrow P^j$$

sağlanıyorsa  $T = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  şeklinde yazılır. Burada  $T$  turnuvasına  $Q_m$  bölümüyle  $P^1, P^2, \dots, P^m$  turnuvalarının *bileşimi* denir. Özel olarak,  $T_n = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  koşulunu sağlayan bir  $T_n$  turnuvasında eğer  $m = 1$  veya  $m = n$  ise  $T$  ye *basit turnuva* denir. (Demaria ve Kühn, 1991) makalesinde de belirtildiği üzere gayri-aşık her turnuva için bir ve yalnız bir tane gayri-aşık basit bölüm turnuvası

vardır. Diğer bir yandan, eğer  $T = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  ise  $i \in [m]$  için  $\Gamma_{T,Q}(P^i) = w_i$  şeklinde tanımlanan  $\Gamma_{T,Q}: T \rightarrow Q$  yönlü çizge homomorfizması mevcuttur.

Bir  $T$  turnuvasının gayri-aşık basit bölüm turnuvası hayli regüler ise, yani  $m \geq 3$  ve  $R_m$  hayli regüler turnuvası için  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  ise  $T$  turnuvasına *hayli parçalanabilir* denir (bknz. Şekil 3.3).

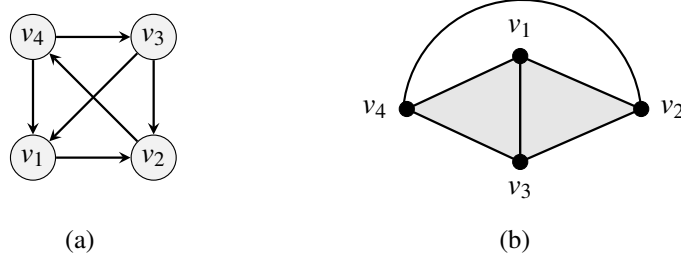


Şekil 3.3. Hayli parçalanabilir bir  $T$  turnuvası ve bileşenleri.

### 3.1. Turnuvaların Döngüsüzlük Kompleksleri

**Tanım 3.1.** Herhangi bir  $T$  turnuvasının *döngüsüzlük kompleksi*  $\text{dön}(T)$ , köşe kümesi  $V(T)$  ve yüzleri  $T$  nin geçişmeli alt kümeleri olan bir simpleksel komplekstir.

Şekil 3.4'te 4 köşeli bir  $T$  turnuvası ve karşılık gelen  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi çizilmiştir. Burada, görüleceği üzere,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  geçişmeli bir alt çizge indirgediğinden  $\text{dön}(T)$  simpleksel kompleksinde bir yüz belirtir; ancak  $\{v_1, v_2, v_4\}$  bir yönlü 3-döngü olup  $\text{dön}(T)$  kompleksinde bir gayri-yüzdür.



Şekil 3.4. Bir  $T$  turnuvası ve karşılık gelen  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi.

Bir  $T$  turnuvası,  $T = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  şeklinde yazılabiliyorsa,  $\Gamma_{T,Q}: T \rightarrow Q$  homomorfizma dönüşümü  $\text{dön}(T)$  ve  $\text{dön}(Q)$  arasındaki simpleksel dönüşüme genişletilebilir.

**Önerme 3.2.** *Eğer  $T = Q_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  ise  $F \in \mathcal{F}(\text{dön}(T))$  için  $\Gamma_{T,Q}(F) \in \mathcal{F}(\text{dön}(Q))$  dir. Ayrıca  $\text{dön}(Q)$  nin her bir maksimal yüzü bu formdadır.*

*İspat.* Aksini kabul edelim, o halde  $\Gamma_{T,Q}(F) \notin \mathcal{F}(\text{dön}(Q))$  olacak şekilde  $F \in \mathcal{F}(\text{dön}(T))$  vardır. Böylece  $\Gamma_{T,Q}(F) \cup \{w_i\} \in \text{dön}(Q)$  olacak şekilde  $w_i \in V(Q) \setminus \Gamma_{T,Q}(F)$  olduğu söylenebilir. Fakat bu durum  $F' \in \text{dön}(P^i)$  için  $F' \cup F \in \text{dön}(T)$  olduğunu ifade eder, bu ise kabul ile çelişki oluşturur.

Şimdi kabul edelim ki  $D = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_t}\} \in \mathcal{F}(\text{dön}(Q))$  olsun. Her bir  $j \in [t]$  için  $D_{i_j} \in \mathcal{F}(\text{dön}(P^{i_j}))$  alınır ve  $D' := D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_t}$  olarak tanımlanırsa, o halde  $D' \in \mathcal{F}(\text{dön}(T))$  ve  $\Gamma_{T,Q}(D') = D$  elde edilir.  $\square$

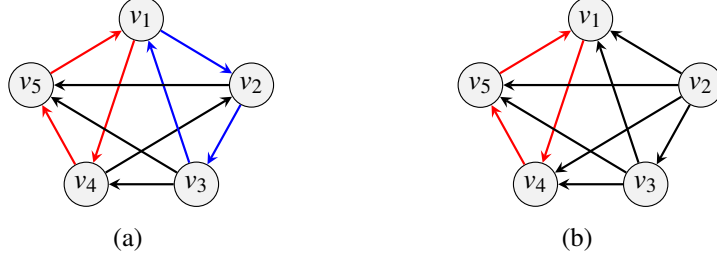
**Tanım 3.3.**  $C, T$  turnuvasının yönlü bir döngüsü ve  $v \in V \setminus V(C)$  olsun.

- (i) Eğer  $T$  turnuvasında  $v \Rightarrow C$  veya  $C \Rightarrow v$  sağlanırsa  $C$  ye  $v$  köşesiyle *koniktir* denir. Aksi durumda  $C$  ye *gayri-konik* yönlü döngü denir.
- (ii) Eğer  $T$  turnuvasında her bir  $q \in V \setminus V(C)$  için  $q \Rightarrow C$  veya  $C \Rightarrow q$  sağlanırsa  $C$  ye *daraltılabilir* denir. Aksi durumda  $C$  *daraltılamaz* denir.

Tanımdan gözlemleneceği üzere bir  $C$  yönlü döngüsünün daraltılabilir olması,  $T$  de denk köşeli olması demektir. Ayrıca her bir daraltılabilir yönlü döngü koniktir.

Bir  $T$  turnuvasında herhangi bir kenarı içeren yönlü 3-döngü varsa o kenara *doymuş kenar* denir, aksi takdirde *doymamış* denir. Eğer bir  $T$  turnuvasının tüm kenarları doymuş ise  $T$  ye *doymuş turnuva* denir.

**Örnek 3.4.** Şekil 3.5'te gösterilen  $R$  ve  $S$  turnuvalarını dikkate alalım.  $R$  turnuvasında  $\{v_1, v_4, v_5\}$  yönlü 3-döngüsü  $v_3$  köşesi ile koniktir; ancak  $\{v_1, v_2, v_3\}$  yönlü 3-döngüsü gayri-koniktir. Ayrıca  $R$  turnuvasında  $\{v_1, v_4, v_5\}$  yönlü 3-döngüsü daraltılamazdır. Diğer yandan  $S$  turnuvasında  $C = \{v_1, v_4, v_5\}$  yönlü 3-döngüsü için  $v_2 \Rightarrow C$  ve  $v_3 \Rightarrow C$  olduğundan  $C$  daraltılabilir yönlü 3-döngüdür.  $S$  turnuvasındaki doymuş kenarlar ise yalnızca  $v_1v_4, v_4v_5, v_5v_1$  dir.



Şekil 3.5. Sırasıyla  $R$  ve  $S$  turnuvaları

Burzio ve Demaria (1987a,b) makalelerinde basit bağlantısız turnuvaların kombinatoriyal karakterizasyonunu elde etmişlerdir. Bu çalışmalardan, bizim için gerekli olan bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

**Önerme 3.5.** (Burzio ve Demaria, 1987a) *Hayli regüler turnuvalardaki her bir yönlü 3-döngü gayri-koniktir.*

(Burzio ve Demaria, 1987a) makalesinin ana sonucu olan aşağıdaki teorem yönlü 3-döngüler kullanılarak basit bağlantısız turnuvaların kombinatoriyal karakterizasyonunu vermektedir.

**Teorem 3.6.** (Burzio ve Demaria, 1987a) *Bir  $T$  turnuvası için  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi basit bağlantısızdır ancak ve ancak  $T$  de gayri-konik yönlü 3-döngü vardır ve tüm konik yönlü 3-döngüler daraltılabilir.*

Basit bağlantısız turnuvaların aşağıdaki kombinatoriyal karakterizasyonu, bu turnuvaların topolojik yapısının belirlenmesinde etkin rol oynamaktadır. Bu teorem sayesinde basit bağlantısız turnuvaların hayli parçalanabilir formda olduğu ifade edilmektedir.

**Teorem 3.7.** (Burzio ve Demaria, 1987b) *Bir  $T$  turnuvası için  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi basit bağlantısızdır ancak ve ancak  $T$  hayli parçalanabilir.*

Sıradaki hedefimiz bir simpleksel kompleksteki en basit indirgeme yöntemi olan kenar büzme işleminin turnuvaların döngüsüzlük kompleksleri üzerindeki etkisi incelemek olacaktır. Bu sayede verilen bir turnuvaların döngüsüzlük kompleksi üzerinde

homotopi yapısı korunacak şekilde indirgemeler yaparak daha basit formda döngüsüzlük kompleksine ulaşılması amaçlanmaktadır.

**Özellik 3.8.** *T* turnuvasındaki her bir doymamış  $uv$  kenarı için  $\text{dön}(T) \simeq \text{dön}(T) // uv$  sağlanır.

*İspat.*  $uv$  kenarı doymamış olduğundan,  $\text{dön}(T)$  de  $\{u, v\}$  yi içeren hiçbir minimal gayri-yüz yoktur. O halde Teorem 2.25 gereğince iddia sağlanır.  $\square$

**Önerme 3.9.** *Hayli regüler turnuvalar doymuş birer turnuvadır.*

*İspat.*  $R = R_{2k+1}$  hayli regüler bir turnuva ve  $v_i v_j$  de  $R$  nin bir kenarı olsun. Eğer  $r = j + k \pmod{2k+1}$  alınırsa,  $\{v_i, v_j, v_r\}$  kümesi  $v_i v_j$  kenarını içeren bir yönlü 3-döngüdür.  $v_i v_j$  keyfi olduğundan diğer tüm kenarlar için de bu özellik sağlanır, dolayısıyla  $R$  doymuş bir turnuvadır.  $\square$

**Önerme 3.10.**  *$R_m$  hayli regüler bir turnuva olsun. O halde öyle bir  $v \in V(R_m)$  vardır ki,  $R_m - v$  turnuvasında bir ve yalnız bir tane doymamış kenar vardır.*

*İspat.*  $m = 2k + 1$  ve kabul edelim ki  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ ,  $R_m$ 'nin yönlü döngü sıralaması olsun, ayrıca  $v := v_{k+1}$  ve  $R' := R_m - v$  olarak tanımlansın. Dikkat edileceği üzere  $v_{2k+1} v_1$  kenarı  $R'$  turnuvasında doymamıştır. Aksi takdirde eğer  $v_1 v_j \in E(R')$  olsaydı  $j \leq k$  ve  $v_j v_{2k+1} \notin E(R')$  olması gerekirdi, bu ise çelişkidir.  $v_{2k+1} v_1$  kenarının tekliği de Önerme 3.9 gereğince sağlanır.  $\square$

Hatırlanacağı üzere bir  $T$  turnuvasında herhangi bir  $uv$  kenarının doymamış olması o kenarın hiçbir yönlü 3-döngü tarafından içerilmediği anlamına gelmektedir. Bu ifadenin  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi tarafındaki karşılığı ise bu kenarın hiçbir minimal gayri-yüz tarafından içerilmediğidir, diğer bir deyişle bu kenarın kompleks üzerinde büzülebilir olması demektir. Dolayısıyla Teorem 2.25'teki ön koşul sağlandığından  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksinde homotopi yapısı korunarak kenar büzme işleminin yapılabilmesi mümkündür. Bunun için öncelikle kompleks üzerindeki kenar büzmenin turnuva açısından karşılığı aşağıdaki tanım ile ele alınacaktır.

**Tanım 3.11.**  $T$  bir turnuva ve  $uv$  de bu turnuvanın bir doymamış kenarı olsun. Bu durumda,  $(V \setminus \{u, v\}) \cup \{w_{uv}\}$  köşe kümesi üzerinde yeni bir  $T_{uv}$  turnuvası tanımlanabilir. Bu turnuvanın kenar kümesi  $E(T[V \setminus \{u, v\}])$  olmak üzere her bir  $x \in (V \setminus \{u, v\})$  için aşağıdaki kenarlardan oluşur;

- (i) eğer  $xu \in E(T)$  ve  $xv \in E(T)$  ise  $xw_{uv} \in E(T_{uv})$ ,
- (ii) eğer  $ux \in E(T)$  ve  $vx \in E(T)$  ise  $w_{uv}x \in E(T_{uv})$ ,
- (iii) eğer  $ux$  bir doymamış kenar veya  $ux, xv$  kenarları  $T$  de doymuş ise  $w_{uv}x \in E(T_{uv})$ ,
- (iv) eğer  $xu$  bir doymamış kenar veya  $xu, vx$  kenarları  $T$  de doymuş ise  $xw_{uv} \in E(T_{uv})$ ,
- (v) eğer  $T$  de  $xv$  kenarı doymamış iken  $ux$  kenarı doymuş ise  $xw_{uv} \in E(T_{uv})$ ,
- (vi) eğer  $T$  de  $vx$  kenarı doymamış iken  $xu$  kenarı doymuş ise  $w_{uv}x \in E(T_{uv})$  dir.

**Önerme 3.12.** Bir  $T$  turnuvasındaki her bir doymamış  $uv$  kenarı için  $\text{dön}(T) // uv \cong \text{dön}(T_{uv})$  sağlanır.

*İspat.*  $F \in \text{dön}(T) // uv$  olsun. Eğer  $w_{uv} \notin F$  ise  $F \in \text{dön}(T)$  ve böylece  $F \in \text{dön}(T_{uv})$ . Bu yüzden  $w_{uv} \in F$  olduğunu kabul edelim, yani  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k, w_{uv}\}$  olsun.  $uv$  doymamış bir kenar olduğundan  $uv$  yi içeren hiçbir yönlü 3-döngü yoktur. Dolayısıyla  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, u, v\} \in \text{dön}(T)$  dir ve ayrıca  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \text{dön}(T_{uv})$  olduğu açıktır. Her  $x_i \in F \setminus \{w_{uv}\}$  için,  $x_i w_{uv} \in E(T_{uv})$  veya  $w_{uv} x_i \in E(T_{uv})$  olduğundan  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k, w_{uv}\} \in \text{dön}(T_{uv})$  dir.

Şimdi de  $F \in \text{dön}(T_{uv})$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $w_{uv} \notin F$  ise  $F \in \text{dön}(T) // uv$  dir. Bu yüzden  $w_{uv} \in F$ , yani  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k, w_{uv}\}$  olsun.  $F \setminus w_{uv} \in \text{dön}(T) // uv$  olduğu açıktır. Diğer taraftan,  $T_{uv}$  turnuvasının tanımı gereği herhangi bir  $x \in V(T) \setminus \{u, v\}$  için eğer  $xu, xv$  (sırasıyla  $ux, vx$ ) kenarlarından biri  $T$  de doymamış ise buna karşılık  $xw_{uv}$  (sırasıyla  $w_{uv}x$ ) kenarı da  $T_{uv}$  de doymamıştır. Dolayısıyla,  $\sigma \in \text{dön}(T)$  için eğer  $\sigma \cup \{u\} \in \text{dön}(T)$  veya  $\sigma \cup \{v\} \in \text{dön}(T)$  ise  $\sigma \cup \{w_{uv}\} \in \text{dön}(T_{uv})$  olur. Bu ise  $F \in \text{dön}(T) // uv$  olduğunu belirtir.  $\square$

**Önerme 3.13.**  $R = R_{2k+1}$  hayli regüler bir turnuva olsun. O halde  $(R - x)_{uv}$  hayli regüler turnuva olacak şekilde  $R$  de  $x, u, v$  köşeleri vardır.

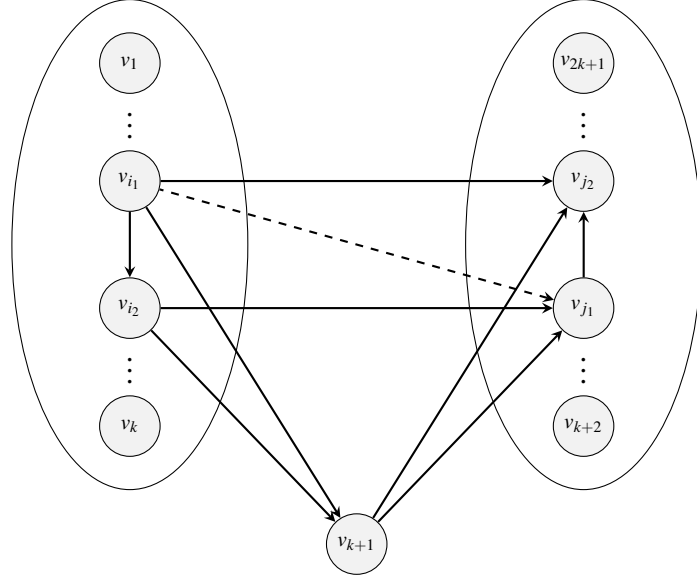
*İspat.* Önerme 3.10'da, eğer  $x = v_{k+1}$ ,  $u = v_1$  ve  $v = v_{2k+1}$  olarak seçilirse  $uv$  kenarı  $R' = R - x$  turnuvasında doymamış olup  $(R')_{uv}$  iyi tanımlıdır. Böylece

$w_{uv}, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_{2k}$  sıralaması  $(R')_{uv}$  turnuvasının hayli regüler turnuva olmasını sağlayan döngü sıralamasıdır.  $\square$

**Teorem 3.14.**  $R_m$  hayli regüler tunuvası için  $\text{dön}(R_m) \simeq S^1$  sağlanır.

*İspat.* Eğer  $m = 3$  ise,  $\text{dön}(R) \simeq S^1$  olması açık olup,  $m > 3$  olduğunu kabul edelim.  $x = v_{k+1}$  olsun ve  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$  alt kompleksini ele alalım. Dikkat edileceği üzere, Önerme 3.5 gereğince hayli regüler turnuvalardaki her yönlü 3-döngü gayri-konik olduğundan  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$  alt kompleksinin herhangi bir gayri-yüzü tam olarak iki elemana sahiptir, diğer bir deyişle  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$ ,  $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_{2k+1}\}$  üzerindeki  $G_x$  çizgesinin  $\Delta(G_x)$  tamsal kompleksidir, yani  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x) = \Delta(G_x)$  dir. (Bıyıkoğlu ve Civan, 2012, Özellik 4.5) gereğince üçgensel çizgelerin tamsal kompleksi büzülebilirdir. O halde  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$  kompleksinin büzülebilir olduğunu göstermek için  $G_x$  çizgesinin üçgensel olduğu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla  $G_x$  çizgesinin üçgensel olduğunu iddia edelim. Hayli regüler turnuva tanımından kolay bir şekilde görüleceği üzere  $N^-(x) = \{v_1, \dots, v_k\}$  ve  $N^+(x) = \{v_{k+2}, \dots, v_{2k+1}\}$  köşe kümeleri  $G_x$  çizgesinde birer tamsal çizge belirtir, yani  $G_x$  çizgesi yalnızca indirgenmiş 4-döngü içerebilir (bknz. Şekil 3.6). Kabul edelim ki,  $1 \leq i_1 < i_2 \leq k$  ve  $k+2 \leq j_1 < j_2 \leq 2k+1$  için  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}\}$  köşe kümesi  $v_{i_1}v_{i_2}, v_{j_1}v_{j_2}, v_{i_1}v_{j_2}$  ve  $v_{i_2}v_{j_1}$  kenarları ile birlikte böyle bir 4-döngü indirgesin.  $v_{i_1}, v_{i_2} \in N^-(x)$  ve  $v_{j_1}, v_{j_2} \in N^+(x)$  olduğu için  $v_{i_1}v_{j_2}$  ve  $v_{i_2}v_{j_1}$  kenarları  $R$  ye ait olmalıdır. Ancak bu durum,  $v_{i_1}v_{j_1} \in E(R)$  olmasını belirtir, dolayısıyla  $v_{i_1}v_{j_1} \in E(G_x)$  olup, bu 4-döngü bir giriş içermek zorunda kalır. Bu ise kabul ile çelişmekte olup,  $G_x$  çizgesinin üçgensel olduğunu ifade eder. Böylece  $\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$  kompleksi, üçgensel bir çizgenin tamsal kompleksi olduğundan büzülebilirdir.

$\text{bağ}_{\text{dön}(R)}(x)$  büzülebilir olduğundan, Önerme 2.23 gereğince  $\text{dön}(R) \simeq \text{dön}(R-x)$  dir. Eğer  $u = v_1$  ve  $v = v_{2k+1}$  olarak alınırsa,  $uv$  kenarı,  $R-x$  turnuvasında doymamış kenardır ve  $(R-x)_{uv}$  hayli regüler bir turnuvadır. Diğer taraftan, Özellik 3.8 homotopi denkliğinden ve Önerme 3.12 izomorfizmasından  $\text{dön}(R-x) \simeq \text{dön}(R-x) // uv \cong \text{dön}((R-x)_{uv})$  olur. Tümevarım üzerinde hareket edilirse  $\text{dön}((R-x)_{uv}) \simeq S^1$  olup ve böylece  $\text{dön}(R) \simeq \text{dön}(R-x) \simeq \text{dön}((R-x)_{uv}) \simeq S^1$  olarak elde edilir.  $\square$



Şekil 3.6.  $G_x$  çizgesinin üçgenselliği.

**Sonuç 3.15.**  $R_m$  hayli regüler bir turnuva ve her  $i \in [m]$  için  $P^i$  geçişmeli olmak üzere eğer  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  ise  $\text{dön}(T) \simeq S^1$  dir.

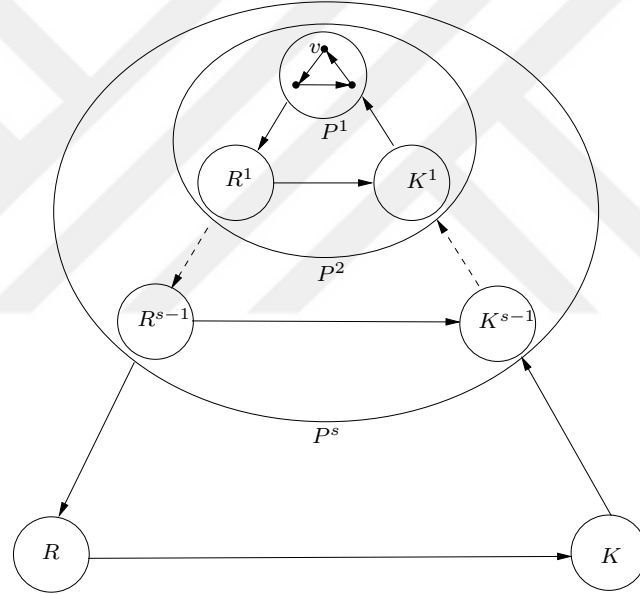
*İspat.* Dikkat edileceği üzere eğer her bir  $P^i$  tek köşeden oluşuyorsa Teorem 3.14 gereğince iddia sağlanır. O yüzden  $|P^1| \geq 2$  olması durumunu ele alalım ve  $u, v \in V(P^1)$  için  $uv \in E(P^1)$  olsun. Kabulden dolayı bu  $uv$  kenarı  $T$  turnuvasında doymamıştır ve Özellik 3.8 gereğince  $\text{dön}(T) \simeq \text{dön}(T) // uv$  dir. Diğer bir yandan Önerme 3.12 gereğince  $\text{dön}(T) // uv \cong \text{dön}(T_{uv})$  dir. Ayrıca  $T_{uv} = R_m(P_{uv}^1, P^2, \dots, P^m)$  olup,  $P_{uv}^1$  turnuvası da aynı zamanda geçişmelidir. Dolayısıyla  $T$  nin köşe sayısı üzerinden tümevarım ile istenen sonuç elde edilir.  $\square$

### 3.2. Üçbölünebilir Turnuvaların Homotopik Yapısı

Bu bölümde hayli parçalanabilir  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  turnuvalarının özel formu olan  $m = 3$  durumu ele alınacak ve bu şekildeki turnuvaların homotopik yapısı belirlenecektir.

**Tanım 3.16.**  $T_n$  bir turnuva olsun. Her bir  $P, R$  ve  $K$  çizgeleri  $T_n$  turnuvasının denk köşeli alt turnuvaları olmak üzere eğer  $T_n = R_3(P, R, K)$  ise  $T_n$  çizgesine üçbölme turnuvası denir. Özel olarak, eğer  $T_n$  geçişmeli ya da  $n \geq 3$  ve üçbölünebilir  $P, R, K$  turnuvaları için  $T_n = R_3(P, R, K)$  şeklinde yazılabiliyorsa  $T_n$  turnuvasına üçbölünebilir denir.

Açık bir şekilde görüleceği üzere  $T = R_3(P, R, K)$  şeklinde yazılan üçbölünebilir bir turnuva geçişmeli olamaz. Ayrıca her bir  $P, R, K$  alt turnuvaları üçbölünebilir olduğundan tümevarımsal bir turnuva ailesi tespit etmek mümkündür. Kabul edelim ki geçişmeli olmayan bir  $P$  turnuvası için  $T_n = R_3(P, R, K)$  üçbölünebilir turnuvası verilsin. O halde  $1 \leq i \leq s$  için  $P^{i+1} = R_3(P^i, R^i, K^i)$  ve  $P = P^s, R = R^s, K = K^s$  ve  $P^1 = R_3$  olacak şekilde  $P^i, R^i, K^i$  üçbölünebilir turnuvalarının bir dizisi vardır. Böyle bir dizide mümkün olabilecek en büyük  $s$  değerine  $P$  ye göre  $T_n$  nin *uzunluğu* denir ve  $\ell(T_n, P)$  ile gösterilir. Dikkat edileceği üzere,  $P$  alt turnuvasının geçişmeli olması durumunda  $\ell(T_n, P) = 0$  dir. Böylelikle,  $T_n$  turnuvasının *yüksekliği*  $h(T_n) := \max\{\ell(T_n, P), \ell(T_n, R), \ell(T_n, K)\} + 1$  olarak tanımlanır (bknz. Şekil 3.7).



Şekil 3.7. Üçbölünebilir bir turnuva.

**Önerme 3.17.**  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olsun. O halde

$$\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(x) \cong \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(x) * (\text{dön}(R) \uplus \text{dön}(K))$$

olacak şekilde  $x \in V(P)$  vardır.

*İspat.*  $\ell(T, P) = s = 1$  durumu açık olduğundan,  $s > 1$  olduğunu kabul edelim. O halde her bir  $i < s$  ve  $P = P^s, R = R^s, K = K^s$  için  $P^{i+1} = R_3(P^i, R^i, K^i)$  olmak üzere  $1 \leq i \leq s$  için  $P^i, R^i, K^i$  üçbölünebilir turnuvaları vardır. Özel olarak  $P^1 = R_3$  olduğunu

kabul edebiliriz.  $x \in V(P^1)$  için iddianın doğru olduğunu gösterelim. İlk olarak  $T$  turnuvasında  $x \Rightarrow R$ ,  $R \Rightarrow K$  ve  $K \Rightarrow x$  olduğundan  $\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(x)$  alt kompleksinin herhangi bir  $F$  yüzü için,  $F \cap R$  ve  $F \cap K$  kesişimlerinden en az biri boş olmak zorundadır. Ayrıca, eğer  $S \in \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(x)$  ise, herhangi bir  $L \in \text{dön}(R)$  (sırasıyla  $H \in \text{dön}(K)$ ) için  $S \cup L \in \text{bağ}_{\text{dön}(T)}(x)$  (sırasıyla  $S \cup H \in \text{bağ}_{\text{dön}(T)}(x)$ ) dir ve dolayısıyla iddia sağlanır.  $\square$

**Önerme 3.18.**  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olsun. O halde aşağıdaki homotopi denkliği sağlanır;

$$\begin{aligned} \text{dön}(T_n) \simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P) * \text{dön}(R)) \\ \vee (\text{dön}(P) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \end{aligned}$$

*İspat.* Öncelikle, eğer  $P, R$  ve  $K$  geçişmeli ise, Sonuç 3.15 gereğince iddia sağlanır. Bu yüzden genelliği bozmadan  $P$  nin gayri-geçişmeli bir turnuva olduğunu kabul edelim. O halde her bir  $1 \leq i \leq s$  ve  $P = P^s$ ,  $R = R^s$ ,  $K = K^s$  için  $P^{i+1} = R_3(P^i, R^i, K^i)$  olacak şekilde  $P^i, R^i, K^i$  üçbölünebilir turnuvaları vardır. Özel olarak  $P^1 = R_3$  ve  $V(P^1) = \{v, u, w\}$  olduğunu kabul edebiliriz.  $\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(v)$  alt kompleksini ele alalım. Öncelikle  $\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(v)$  kompleksinin  $\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v)$  kompleksi içinde büzülebilir olduğu gösterilecektir. Dikkat edileceği üzere  $\{u, w\}$  kenarını içeren  $\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v)$  kompleksinin bir gayri-yüzü yoktur ve böylece  $\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) \simeq \text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) // uw$  dir. Ancak bu durum,  $\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(v)$  alt kompleksinin  $\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) // uw$  kompleksinde  $\{u, w\}$  ikilisinin büzüldüğü köşe olan  $x$  tepesi ile koni oluşturduğunu belirtir. Bu yüzden  $\text{bağ}_{\text{dön}(T)}(v)$ ,  $\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) // uw$  kompleksinde büzülebilirdir. Dolayısıyla, Önerme 2.23 gereğince  $\text{dön}(T) \simeq \text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(T)}(v)$  dir.

$\text{sil}_{\text{dön}(T)}(v) \cong \text{dön}(T - v)$  ve ayrıca  $T - v = R_m(P - v, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olduğundan,  $T$  nin köşe sayısı üzerinden homotopi denkliği için tümevarım uygulayabiliriz. O halde;

$$\begin{aligned} \text{dön}(T - v) \simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P - v) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P - v) * \text{dön}(R)) \\ \vee (\text{dön}(P - v) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \end{aligned}$$

sağlamır. Böylelikle,

$$\begin{aligned} \text{dön}(T) &\simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P - \nu) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(R)) \\ &\quad \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(T)}(\nu). \end{aligned}$$

Önerme 3.17 ve Önerme 2.22 özelliklerini aşağıda belirtildiği şekilde uygulayalım.

$$\begin{aligned} \text{dön}(T) &\simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P - \nu) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(R)) \\ &\quad \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \\ &\quad \vee \Sigma [\text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu) * (\text{dön}(R) \uplus \text{dön}(K))], \quad (\text{Önerme 3.17}) \\ &\simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P - \nu) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(R)) \\ &\quad \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \\ &\quad \vee \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu) * (\Sigma \text{dön}(R) \vee S^1 \vee \Sigma \text{dön}(K)), \quad (\text{Önerme 2.22.}(iv)) \\ &\simeq S^1 \vee \Sigma [\text{dön}(P - \nu) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(R)) \\ &\quad \vee (\text{dön}(P - \nu) * \text{dön}(K)) \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)) \\ &\quad \vee (\Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu) * \text{dön}(R)) \vee (\Sigma^2 \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)) \\ &\quad \vee (\Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu) * \text{dön}(K)), \quad (\text{Önerme 2.22.}(iii)) \\ &\simeq S^1 \vee \Sigma [(\text{dön}(P - \nu) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)) \vee \text{dön}(R) \vee \text{dön}(K)] \\ &\quad \vee ((\text{dön}(P - \nu) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)) * \text{dön}(R)) \\ &\quad \vee ((\text{dön}(P - \nu) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)) * \text{dön}(K)) \\ &\quad \vee (\text{dön}(R) * \text{dön}(K)), \quad (\text{Önerme 2.22.}(iii)) \end{aligned}$$

Son olarak  $\text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)$  alt kompleksi  $\text{dön}(P - \nu) \cong \text{sil}_{\text{dön}(P)}(\nu)$  kompleksinde büzülebilir olduğundan  $\text{dön}(P) \simeq \text{sil}_{\text{dön}(P)}(\nu) \vee \Sigma \text{bağ}_{\text{dön}(P)}(\nu)$  denkliği kullanılarak istenen sonuca ulaşılmış olur.  $\square$

Şimdi yapılan çalışmanın topoloji kısmındaki ana sonucu olan aşağıdaki teorem verilecektir. Bu sonuç gereğince üçbölünebilir turnuvaların homotopi yapısı kürelerin kama toplamı formundadır.

**Teorem 3.19.**  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olsun.  $O$  halde

$$\text{dön}(T) \simeq S^1 \vee \left( \bigvee_{i=1}^{d_2} S^2 \right) \vee \left( \bigvee_{i=1}^{d_3} S^3 \right) \vee \dots \vee \left( \bigvee_{i=1}^{d_k} S^k \right). \quad (3.1)$$

olacak şekilde negatif olmayan  $\{d_2, d_3, \dots, d_k\}$  tamsayı dizisi vardır.

*İspat.* Negatif olmayan  $n$  ve  $m$  tamsayıları için  $S^n * S^m \simeq S^{n+m+1}$  olduğundan  $T$  turnuvasının köşe sayısı üzerinden tümevarım uygulanarak Önerme 3.18 yardımıyla iddia sağlanır.  $\square$

**Tanım 3.20.**  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olsun.  $\text{dön}(T)$  kompleksi için Teorem 3.19’da belirtilen kürelerin kama toplamı şeklindeki homotopi yapısında oluşan en yüksek kürenin boyutuna  $T$  nin *derinliği* denir ve  $\text{der}(T)$  ile gösterilir.

Önerme 3.18’in bir sonucu olarak aşağıdaki eşitlik gerçekleşir.

**Sonuç 3.21.**  $n > 1$  olmak üzere  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olsun.  $O$  halde

$$\text{der}(T) = \max\{\text{der}(P) + \text{der}(R) + 1, \text{der}(P) + \text{der}(K) + 1, \text{der}(R) + \text{der}(K) + 1\}.$$

**Örnek 3.22.** Berger vd. (2013) çalışmasından görüleceği üzere, eğer  $H$  bir kahraman turnuva ve  $S_j$ ,  $j$  köşeli geçişmeli turnuva ise,  $R_3(H, S_1, S_k)$  ve  $R_3(H, S_k, S_1)$  üçbölmeli turnuvaları *kahraman turnuvadır*. Bu bağlamda üçbölünebilir turnuvaların bir tümevarımsal alt sınıfı olan *mükemmel kahraman turnuvalarını* tanımlamak mümkündür.  $R_3(S_1, S_1, S_k)$  ve  $R_3(S_1, S_k, S_1)$  turnuvaları birer mükemmel kahraman turnuvadır ve genel anlamda eğer bir  $T$  turnuvası,  $k \geq 1$  için  $R_3(H, S_1, S_k)$  ve  $R_3(H, S_k, S_1)$  turnuvalarından birine izomorfik olacak şekilde  $H$  mükemmel kahraman turnuvası varsa  $T$  turnuvasına mükemmel kahraman turnuva denir. Böylece Teorem 3.19 gereğince herhangi bir  $T$  mükemmel kahraman turnuvası için  $m = h(T)$  olmak üzere  $\text{dön}(T) \simeq S^1 \vee S^2 \vee \dots \vee S^m$  sağlanır.

## 4. TURNUVALARDA RENKLENDİRME VE DÖNGÜ-KIRAN KÜMELER

Önceki bölümde homotopik yapısı tespit edilen üçbölünebilir turnuvaların bu bölümde renklendirme ve döngü-kıran sayıları ile arasındaki ilişkisi incelenecektir.

### 4.1. Turnuvalarda Köşe Renklendirme

Bu bölümde üçbölünebilir turnuvaların renklendirmesi ele alınacak ve ilk olarak bazı teknik sonuçlara yer verilecektir.

$T$  bir turnuva olsun. Her  $i \in [k]$  için  $\{v \in V : \mu(v) = i\}$  köşe kümesi  $T$  turnuvasında geçişmeli olacak şekildeki  $\mu : V \rightarrow [k]$  fonksiyonuna  $T$  turnuvasının bir  $k$ -renklendirmesi denir. Böyle bir  $\mu$  fonksiyonunda gayri-geçişmeli her köşe kümesi en az iki renk ile işaretlendiğinden bu fonksiyon  $T$  için bir düzgün renklendirme belirtir.  $T$  turnuvasında  $k$ -renklendirilebilir olacak şekildeki en küçük  $k$  sayısına  $T$  turnuvasının (döngüsüz) kromatik sayısı denir ve  $\chi_a(T)$  ile gösterilir.

**Önerme 4.1.**  $T = R_3(P^1, P^2, P^3)$  üçbölünebilir turnuva olsun. Eğer her  $1 \leq i \leq 3$  için  $\chi_a(P^i) = r_i$  ise,  $\chi_a(T) \leq \max \left\{ \left\lceil \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2} \right\rceil, r_i \right\}$ .

*İspat.* Kabul edelim ki  $P^1, P^2$  ve  $P^3$  sırasıyla  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{r_1}\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_{r_2}\}$ , ve  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{r_3}\}$  ayrık renk kümeleri ile renklendirilsin. Bu takdirde  $r_1, r_2$  ve  $r_3$  arasındaki ilişki analiz edilerek, sırasıyla  $P^1, P^2$  ve  $P^3$  turnuvalarının iddia edildiği kadar renk kullanılarak bir düzgün renklendirmesi elde edilecektir. Genelliği bozmaksızın  $r_1 \geq r_2 \geq r_3$  olduğunu kabul edelim.

1. *Durum:*  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ . Bu durumda  $\{a_1, a_2, \dots, a_{\lfloor r/2 \rfloor}, b_1, b_2, \dots, b_{\lfloor r/2 \rfloor}\}, \{b_1, b_2, \dots, b_{\lfloor r/2 \rfloor}, c_1, c_2, \dots, c_{\lfloor r/2 \rfloor}\}$  ve  $\{a_1, a_2, \dots, a_{\lfloor r/2 \rfloor}, c_1, c_2, \dots, c_{\lfloor r/2 \rfloor}\}$  renk bölmelerini ele alalım. Dikkat edileceği üzere her bir renk tam olarak iki bölmede yer almaktadır ve böylece her bir yönlü 3-döngüde en az iki farklı renk bulunur. Dolayısıyla bu bölmeler  $T$  turnuvası için bir düzgün renklendirme sağlar.

2. *Durum:*  $r_1 \geq r_2 + r_3$ . Bu durumda  $P^1, P^2$  ve  $P^3$  turnuvalarının köşeleri sırasıyla  $A, \{a_1, a_2, \dots, a_{r_2}\}$  and  $\{a_{r_2+1}, a_{r_2+2}, \dots, a_{r_2+r_3}\}$  renk sınıfları ile işaretlenerek  $T$  turnuvası için bir düzgün renklendirme sağlanır.

3. *Durum:*  $r_1 < r_2 + r_3$  ve  $r_2 \leq r_1 + r_3$ . Genelliği bozmaksızın  $r_2 \geq r_3$  olduğunu kabul edelim ve  $w := \left\lceil \frac{r_2 + r_3 - r_1}{2} \right\rceil$  olarak ifade edilsin. Bu durumda  $P^1, P^2$  ve  $P^3$  turnuvalarının köşeleri sırasıyla  $A, \{a_1, a_2, \dots, a_{r_2-w}, b_1, b_2, \dots, b_w\}$  ve  $\{a_{r_2-w+1}, \dots, a_{r_1-(r_2-w)}, b_1, b_2, \dots, b_w\}$  renk sınıflarıyla işaretlenerek  $T$  turnuvası için bir düzgün renklendirme sağlanır.

4. *Durum:*  $r_1 = r_2 > r_3$ . İlk olarak  $w = \left\lceil \frac{r_3}{2} \right\rceil$  şeklinde yazalım. O halde  $A, \{a_1, a_2, \dots, a_{r_1-w}, c_1, c_2, \dots, c_w\}$  ve  $\{c_1, c_2, \dots, c_w, a_{r_1-w+1}, a_{r_1-w+2}, \dots, a_{r_1}\}$  bölmeleri  $T$  turnuvası için bir düzgün renklendirme sağlar.  $\square$

Şimdi bu bölümdeki ana sonuçlardan biri olan Teorem 4.2'ye yer verilecektir. Bu sonuç ile üçbölünebilir turnuvaların kürelerin kama toplamı olan homotopi yapısı ve bu yapıdaki  $\text{der}(T)$  parametresinin turnuvanın  $\chi_a(T)$  kromotik sayısını sınırladığı ispatlanacaktır.

**Teorem 4.2.** Her  $T = R_3(P^1, P^2, P^3)$  üçbölünebilir turnuvası için  $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  olmak üzere,

$$\chi_a(T) \leq c(\text{der}(T) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1$$

olacak şekilde  $1.62 < c \leq 2$  sayısı vardır.

*İspat.*  $\text{der}(T) = d$  ve logaritma tabanı 2 olmak üzere iddia aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\chi_a(T) \leq c \left( \frac{3^{\log(d+1)}}{d+1} \right) - 1 \quad (4.1)$$

$T$  nin köşe sayısı üzerinden tümevarım uygulanarak 4.1 eşitsizliği ispatlanacaktır. İlk olarak eğer  $|V(T)| = 3$  ise  $T \cong C_3$  olup,  $c = 2$  için  $\chi_a(T) = 2 = 2^{\frac{3}{2}} - 1$  bulunur. O halde  $|V(T)| > 3$  ve  $\text{der}(P^i) = d_i$  olduğunu varsayalım ve her  $1 \leq i \leq 3$  için  $\chi_a(P^i) \leq c_i \left( \frac{3^{\log(d_i+1)}}{d_i+1} \right) - 1$  olacak şekilde  $c_i \in (1.62, 2]$  sayısı mevcut olsun. Dikkat edileceği üzere Sonuç 3.21'den  $d = \max\{d_1 + d_2 + 1, d_1 + d_3 + 1, d_2 + d_3 + 1\}$  dir. Buradan

$c := \max\{c_1, c_2, c_3\}$  olsun. Eğer bazı  $i \in [3]$  sayıları için  $\chi_a(T) \leq \chi_a(P^i)$  ise iddia açık bir şekilde görülür. O yüzden her  $i \in [3]$  için  $\chi_a(T) > \chi_a(P^i)$  olsun. Ayrıca genelliği bozmaksızın  $d = d_1 + d_2 + 1$  ve  $d_1 \geq d_2 \geq d_3$  olduğunu kabul edelim.

1. Durum:  $d_1 = d_2$ . Önerme 4.1 uygulanarak

$$\begin{aligned}\chi_a(T) &\leq \left\lfloor \frac{3c \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} - 3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3c \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} - 3 + 1}{2} \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor c \cdot \frac{3^{\log(2d_1+2)}}{2d_1+2} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor c \cdot \frac{3^{\log(d+1)}}{d+1} - 1 \right\rfloor \\ &\leq c \cdot \frac{3^{\log(d+1)}}{d+1} - 1,\end{aligned}$$

elde edilir. Burada son eşitsizlikte  $d = 2d_1 + 1$  bilgisi kullanılmıştır.

2. Durum:  $d_1 \neq d_2$ . Bu durumda  $0 < t_1 < 1$  olmak üzere her  $j = 1, 2$  için  $t_j := \log\left(\frac{d_1+d_2+2}{d_j+1}\right)$  olsun. Yeniden Önerme 4.1 uygulanarak

$$\begin{aligned}\chi_a(T) &\leq \left\lfloor \frac{c_1 \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} + c_2 \cdot \frac{3^{\log(d_2+1)}}{d_2+1} + c_3 \cdot \frac{3^{\log(d_3+1)}}{d_3+1} - 3}{2} \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \frac{c \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} + c \cdot \frac{3^{\log(d_2+1)}}{d_2+1} + c \cdot \frac{3^{\log(d_3+1)}}{d_3+1}}{2} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \frac{c \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} + 2c \cdot \frac{3^{\log(d_2+1)}}{d_2+1}}{2} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \frac{1}{2}c \cdot \frac{3^{\log(d_1+1)}}{d_1+1} + c \cdot \frac{3^{\log(d_2+1)}}{d_2+1} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \frac{1}{2}c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(d_1+1)+t_1-t_1} + c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(d_2+1)+t_2-1} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{t_1} c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(d_1+d_2+2)} + \frac{2}{3}c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(d_1+d_2+2)} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor \left(\frac{2^{t_1-1}+2}{3}\right) c \cdot \frac{3^{\log(d_1+d_2+2)}}{d_1+d_2+2} - 1 \right\rfloor, \\ &\leq \left\lfloor c \cdot \frac{3^{\log(d_1+d_2+2)}}{d_1+d_2+2} - 1 \right\rfloor \leq c \cdot \frac{3^{\log(d+1)}}{d+1} - 1,\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $0 < t_1 < 1$  olduğu için  $\frac{2^{t_1-1}+2}{3} \leq 1$  bilgisi dikkate alınmıştır.  $\square$

İddia edildiği üzere temel teoremimizdeki üst sınır sıkı olup, aşağıda verilen örnek ile bu kanıtlanacaktır.

**Örnek 4.3.**  $T(1) := R_3$  olmak üzere her  $n > 1$  için  $T(n) := R_3(T(n-1), T(n-1), T(n-1))$  şeklinde  $T(n)$  turnuvaları tanımlansın. Her  $n \geq 3$  için  $\chi_a(T(n)) = \lfloor c \cdot (\text{der}(T(n)) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1 \rfloor$  olacak şekilde  $c \in (1.62, 2]$  sayısı mevcuttur. Bu iddia Teorem 4.2'deki üst sınırın sıkı olduğunu kanıtlayacaktır. Dikkat edilecek olursa Önerme 4.1'den  $\chi_a(T(n)) \leq \lceil (\frac{3}{2}) \chi_a(T(n-1)) \rceil$  dir. İlk olarak  $T(n)$  turnuvasının kromatik sayısının bu üst sınıra eşit olduğu ispatlanacaktır. Bunu göstermek için  $\chi_a(T(n-1)) = r$  ve  $k := \lceil \frac{3r}{2} \rceil$  olsun ve iddianın aksini kabul edelim. Diğer bir deyişle,  $T(n)$  turnuvası  $(k-1)$ -düzgün renklendirilebilir olsun ve ayrıca  $\kappa: V(T(n)) \rightarrow [k-1]$  bu renklendirme fonksiyonunu ifade etsin. Her  $i \in [3]$  için  $V_i$  kümesi,  $T(n)$  nin  $i$ . bileşeninde bulunan turnuvanın köşe kümesini temsil etsin. Burada, görüleceği üzere bu küme  $T(n-1)$  indirger. Ayrıca  $B_i := \{\kappa(v) : v \in V_i\}$  olmak üzere  $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3$  olarak alınsın. Kolaylıkla görüleceği üzere  $B$  deki her bir rengin katlılığı en fazla 2 dir; yani bir renk en fazla iki bileşende  $(B_i)$  bulunabilir. Aksi takdirde tek renkli yönlü 3-döngüler oluşacaktır. Böylece katlılık 2 ve  $\chi_a(T(n-1)) = r$  olduğundan  $2(k-1) \geq 3r = |B|$  eşitliği sağlanmak zorunda kalır. Ancak bu ifade  $2 \lceil \frac{r}{2} \rceil - 2 \geq r$  olmasını belirtir ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\chi_a(T(n)) = \lceil (\frac{3}{2}) \chi_a(T(n-1)) \rceil$  dir.

Şimdi ise tümevarımsal olarak ifade edilen  $T(n)$  turnuvasının kromatik sayısının tam değeri hesaplanacaktır. Gözlemleneceği üzere  $\{\chi_a(T(n)) : n \geq 1\}$  tamsayı dizisi Odlyzko ve Wilf (1991) çalışmasında ele alınmış olup A061419 numarasıyla listelenen bir dizidir (Sloane, 2003). Bu dizinin tam formülü  $c_0 \approx 1.62227$  olmak üzere  $\chi_a(T(n)) = \lfloor c_0 \cdot (\frac{3}{2})^n \rfloor$  dir. Diğer bir yandan Sonuç 3.21 yardımıyla  $T(n)$  turnuvasının derinliği  $\text{der}(T(n)) = 2 \text{der}(T(n-1)) + 1 = 2^n - 1$  olarak hesaplanır. Şimdi,  $n \geq 3$  olduğundan, eğer  $c := c_0 + (\frac{2}{3})^n$  olarak alınırsa  $c \in (1.62, 2]$  dir. Bu yüzden  $\lfloor c_0 \cdot (\frac{3}{2})^n \rfloor = \lfloor c \cdot (\frac{3}{2})^n - 1 \rfloor$  olduğu görülür. Dolayısıyla  $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  olmak üzere

$$\left\lfloor c(\text{der}(T(n)) + 1)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right\rfloor = \chi_a(T(n)),$$

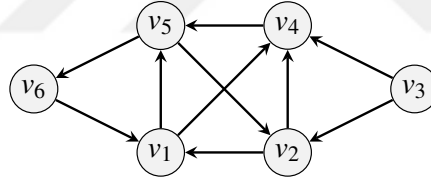
elde edilir. Dolayısıyla her  $n \geq 3$  için Teorem 3.19'daki üst sınırın sıkı olmasını gerçekleyen  $T(n)$  turnuvaları vardır.

## 4.2. Turnuvalarda Döngü-Kıran Kümeler

Önceki bölümde üçbölünebilir turnuvaların kromatik sayısının topolojik bir parametre olan  $der(T)$  ile kontrol altında tutulduğu ispatlanmıştır. Bu bölümde yine benzer şekilde  $der(T)$  parametresinin turnuvaların döngü-kıran sayısı üzerindeki etkisi incelenecek ve Teorem 4.5 ile bu etkileşimin aslında döngü-kıran sayısı için bir eşitlik doğurduğu ispat edilecektir.

**Tanım 4.4.** Yönlü bir  $G$  çizgesinde  $G - A$  döngüsüz (geçişmeli) olacak şekildeki  $A \subseteq V(G)$  kümesine *döngü-kıran küme* denir. Bir  $G$  çizgesinde en az elemanlı döngü-kıran kümenin boyutuna *döngü-kıran sayısı* denir ve  $dk(G)$  ile gösterilir.

Şekil 4.1'deki  $G$  yönlü çizgesinde,  $\{v_1, v_2, v_5\}$ ,  $\{v_1, v_5, v_6\}$ ,  $\{v_2, v_4, v_5\}$  ve  $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$  köşe kümeleri birer yönlü döngü indirger. Bu çizgede  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_6, v_2\}$  ve  $\{v_5\}$  şeklinde birçok döngü-kıran küme bulunabilir, ancak bunlardan en az elemanlı  $\{v_5\}$  olup,  $dk(G) = 1$  dir.



Şekil 4.1. Döngü kıran sayısı  $dk(G) = 1$  olan bir  $G$  turnuvası.

Turnuvaların döngü-kıran sayıları ile ilgili bilinen ilk çalışmalar (Moon, 1971; Lempel ve Cederbaum, 1966) dir. Moon (1971),  $n$  köşeli tüm turnuvalar arasında maksimum  $dk(T)$  sayısını  $M(n) := \max\{dk(T) : T, n \text{ köşeli bir turnuva}\}$  ile tanımlamış ve yeterince büyük  $n$  sayıları için

$$1.4757^n \leq M(n) \leq 1.7170^n$$

eşitsizliğini kanıtlamıştır. Yakın zamanda yapılan (Gaspers ve Mnich, 2013) çalışmasında ise bu sınırlar aşağıdaki şekilde geliştirilmiştir.

$$1.5448^n \leq M(n) \leq 1.6740^n$$

(Fomin vd., 2016; Woeginger, 2008; Mnich ve Teitrine, 2017) çalışmalarında  $M(n)$  değeri için daha keskin sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmamızda ise basit bağlantısız turnuvaların  $dk(T)$  değeri ele alınmıştır. Bu bölümün temel sonucu,  $T$  üçbölünebilir turnuvaları için döngü-kıran sayısı  $dk(T)$  ile  $der(T)$  parametresi arasındaki bağıntıyı ifade edilen aşağıdaki teoremdir: Önerme 4.6 ve Önerme 4.8'in sonucu olarak elde edilmiştir.

**Teorem 4.5.**  $n$  köşeli bir  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $dk(T) = n - der(T) - 1$  eşitliği sağlanır.

Teorem 4.5'in ispatı aşağıdaki önerme dizisiyle yapılacaktır.

**Önerme 4.6.**  $n$  köşeli bir  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $dk(T) \leq n - der(T) - 1$  sağlanır.

*İspat.*  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $d = der(T)$  ve  $n = |V(T)|$  olsun. O halde  $T$  turnuvasının döngüsüzlük kompleksinde  $d + 1$  elemanlı bir  $F$  yüzü mevcuttur. Hatırlanacağı üzere döngüsüzlük kompleksindeki yüzler turnuvaların geçişmeli köşe kümelerinde oluşur, dolayısıyla  $F$  yüzünün köşe kümesi  $T$  de geçişmeli bir alt çizge indirger. Böylece  $T$  nin döngü-kıran sayısı en fazla  $n - d - 1$  dir.  $\square$

**Önerme 4.7.**  $T = R_3(P, R, K)$  bir üçbölünebilir turnuva olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$dk(T) = \min \{ |V(P)| + dk(R) + dk(K), |V(R)| + dk(K) + dk(P), |V(K)| + dk(P) + dk(R) \} \quad (4.2)$$

*İspat.* Üçbölünebilir  $T = R_3(P, R, K)$  turnuvalarının yapısından dolayı geçişmeli köşe kümeleri,  $P, R$  ve  $K$  alt turnuvalarından en çok ikisinden eleman içerir. Diğer bir deyişle  $P, R$  ve  $K$  nin her birinden en az bir elemanın olduğu küme geçişmeli olamaz. Bu yüzden  $T - A$  geçişmeli olacak şekildeki  $A$  köşe kümesi,  $P, R$  ve  $K$  alt turnuvalarından en az birinin tüm köşelerini içermek zorunda kalır. Ardından geriye kalan turnuva için her bir bölümden en az sayıda köşenin çıkarılmasıyla geçişmeli alt turnuva elde edilmiş olur ve bu sayı 4.2 eşitliğine karşılık gelir.  $\square$

**Önerme 4.8.**  $n$  köşeli bir  $T$  üçbölünebilir turnuvası için  $dk(T) \geq n - \text{der}(T) - 1$  sağlanır.

*İspat.*  $T = R_m(P^1, P^2, P^3)$  bir üçbölünebilir turnuva,  $|V(P^i)| = n_i$ ,  $\text{der}(P^i) = d_i$  ve  $\text{der}(T) = d$  olsun. Böylece  $|V(T)| = n = n_1 + n_2 + n_3$  olup, Sonuç 3.21 gereğince

$$\text{der}(T) = \max\{d_1 + d_2 + 1, d_1 + d_3 + 1, d_2 + d_3 + 1\} \quad (4.3)$$

sağlanır. Ayrıca Önerme 4.7'den

$$dk(T) = \min\{n_1 + dk(P^2) + dk(P^3), n_2 + dk(P^1) + dk(P^3), n_3 + dk(P^1) + dk(P^2)\} \quad (4.4)$$

eşitliği mevcuttur.

$n$  üzerinden tümevarım uygulayalım. Öncelikle  $n = 3$  için  $T \cong C_3$  olup  $dk(T) = 1 \geq n - \text{der}(T) - 1 = 3 - 1 - 1$  dir. Kabul edelim ki köşe sayısı  $n$  den az olan tüm üçbölünebilir turnuvalar için iddia sağlansın. O halde

$$n_i - d_i - 1 \leq dk(P^i) \quad (4.5)$$

olup ve böylece aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$n - (d_2 + d_3 + 1) - 1 = n_1 + (n_2 - d_2 - 1) + (n_3 - d_3 - 1) \leq n_1 + dk(P^2) + dk(P^3) \quad (4.6)$$

$$n - (d_1 + d_3 + 1) - 1 = n_2 + (n_1 - d_1 - 1) + (n_3 - d_3 - 1) \leq n_2 + dk(P^1) + dk(P^3) \quad (4.7)$$

$$n - (d_1 + d_2 + 1) - 1 = n_3 + (n_1 - d_1 - 1) + (n_2 - d_2 - 1) \leq n_3 + dk(P^1) + dk(P^2) \quad (4.8)$$

4.3 eşitliği gereğince  $d$  için üç farklı durum söz konusudur. İlk olarak  $d = d_1 + d_2 + 1$  olduğunu kabul edelim. 4.8 eşitliğinden,

$$n - d - 1 \leq n_3 + dk(P^1) + dk(P^2)$$

ve ayrıca

$$n - (d_1 + d_2 + 1) - 1 \leq n - (d_1 + d_3 + 1) - 1$$

$$n - (d_1 + d_2 + 1) - 1 \leq n - (d_2 + d_3 + 1) - 1$$

olup

$$n - d - 1 \leq \min \{n_1 + dk(P^2) + dk(P^3), n_2 + dk(P^1) + dk(P^3), n_3 + dk(P^1) + dk(P^2)\}$$

sağlanır. Benzer şekilde diğer durumlar da incelenerek  $dk(T) \geq n - \text{der}(T) - 1$  eşitsizliğinin sağlandığı görülür.  $\square$

Önerme 4.6 ile  $dk(T) \leq n - \text{der}(T) - 1$  eşitsizliği ve Önerme 4.8 ile  $dk(T) \geq n - \text{der}(T) - 1$  eşitsizliği kanıtlanmıştır. Dolayısıyla  $dk(T) = n - \text{der}(T) - 1$  eşitliği sağlanır ve böylece Teorem 4.5'in ispatı tamamlanmış olur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin topolojisi belirlenerek turnuvanın kombinatoriyal parametreleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Çalışmanın temel motivasyonunu uzun süre açık bir problem olarak kalan Kneser sanısının (Kneser, 1955) Lovász (1978) tarafından yapılan ispat metodu oluşturmaktadır. Bu ispat metodu, "Topolojik Kombinatorik" olarak adlandırılan yeni bir alanın ortaya çıkmasını sağlamıştır. Kneser sayısı kısaca,  $K(n, k)$  kneser çizgelerin kromatik sayısının  $n - 2k + 2$  olduğunu belirtmektedir. Lovász, topolojide önemli teoremlerden biri olarak bilinen Borsuk-Ulam teoremini kullanarak çizgeye ilişkilendirilen komşuluk kompleksinin bağlantılılık sayısının çizgenin kromatik sayısını sınırladığını göstermiştir. Bu ilişkinin ortaya çıkarılması ile sanının ispatı yapılabilmektedir. Lovász'ın basit çizgeler için ortaya çıkardığı ilişki, yönlü çizgelerdeki karşılığını da sorgulamakta ve bu tez çalışmasının temel amacını oluşturmuştur.

Turnuvalara, öncelikle her geçişmeli köşe kümesinin bir yüze karşılık geldiği simpleksel kompleksler (döngüsüzlük kompleksi) ilişkilendirilmiştir, bu sayede kombinatorikten topolojiye geçiş sağlanmıştır. İlişkilendirilen bu kompleksin topolojik yapısının belirlenerek turnuvanın kombinatoriyal parametreleri ile arasındaki ilişkinin saptanması amaçlanmıştır.

Basit bağlantısız turnuvaların karakteristik yapıları (Burzio ve Demaria, 1987a,b) çalışmalarında detaylı incelenmiş ve bu çalışmanın alt yapısını oluşturmaktadır. Burzio ve Demaria (1987b),  $R_m$  hayli regüler turnuvası için  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  formunda yazılabilen turnuvaları hayli parçalanabilir olarak tanımlamış ve bu çalışma için temel araç olan şu sonucu vermişlerdir; bir  $T$  turnuvası için  $\text{dön}(T)$  döngüsüzlük kompleksi basit bağlantısızdır ancak ve ancak  $T$  hayli parçalanabilirdir. Bu karakterizasyon sayesinde basit bağlantısız turnuvaların oldukça düzenli bir formda olduğu görülmektedir. Hayli parçalanabilir turnuvaların topolojik yapısının belirlenebilmesi adına ilk olarak bu turnuvaların en yalın hali olan hayli regüler turnuvaları ele alınmış ve topolojideki bazı temel indirgeme yöntemleri kullanılarak homotopik yapılarının  $S^1$  ile denk olduğu kanıtlanmıştır. Ardından bu bilgi ve turnuvanın kombinatoriyal özellikleri (Burzio ve Demaria, 1987a,b) yardımıyla  $T =$

$R_3(P^1, P^2, P^3)$  üçbölünebilir turnuvaların kürelerin kama toplamına homotopik olarak denk olduğu gösterilmiştir. Bu homotopi denkliğindeki en yüksek kürenin boyutu derinlik ( $\text{der}(T)$ ) olarak adlandırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, kürelerin kama toplamına homotopik olarak denk olduğu tespit edilen üçbölünebilir turnuvaların döngüsüzlük kompleksindeki  $\text{der}(T)$  parametresi ile turnuvanın kombinatoriyal özellikleri arasındaki ilişki araştırılmıştır. İlk olarak, üçbölünebilir turnuvaların kromatik sayısının  $\text{der}(T)$  parametresinin bir fonksiyonu cinsinden sınırlandırılabilirdiği ispatlanmıştır. Bu üst sınırın sıkı olduğu ayrıca örnekler ile kanıtlanmıştır. Çalışmanın geriye kalan kısmında  $\text{der}(T)$  ile turnuvanın döngü-kıran sayısı  $\text{dk}(T)$  arasındaki ilişki araştırılmış ve üçbölünebilir bir  $T$  turnuvası için  $\text{dk}(T) = n - \text{der}(T) - 1$  eşitliği kanıtlanmıştır.

Turnuvaların topolojik yapısının tespit edilmesi ve çizgenin kombinatoriyal parametreleri ile arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılmasının amaçlandığı bu çalışmada  $T = R_3(P^1, P^2, P^3)$  formundaki üçbölünebilir turnuvalar için hedeflenen amaçlar gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışma  $T = R_m(P^1, P^2, \dots, P^m)$  formundaki hayli parçalanabilir turnuvalara genişletilerek turnuvaların topolojik yapısının tespit edilmesi sağlanabilir. Böylece tüm basit bağlantısız turnuvaların homotopik yapısının belirlenebilmesi mümkün olabilir. Ancak bu çalışmada kullanılan temel topolojik indirgeme yöntemlerinin hayli parçalanabilir turnuvaların döngüsüzlük komplekslerinin topolojik yapılarının belirlenmesinde yetersiz kalacağı düşünülmektedir. Bu bağlamda yakın zamanda Forman (1998) tarafından ortaya konulan ve topolojik kombinatorikte güçlü bir araç olarak etkinliğini kabul ettirmiş ayrık Morse teori kullanılarak bu komplekslerin topolojik yapılarının belirlenmesi mümkün olabilir. Bu sayede Berger vd. (2013) çalışmasında olduğu gibi kromatik sayı ile ilgili açık bırakılan problemlere yanıt bulunabilir ve kromatik sayının belirlenebilmesi adına farklı yaklaşımlar oluşturulabilir.

## KAYNAKLAR

- Arnold, V.I., Khesin, B.A., 1999. Topological Methods in Hydrodynamics, Volume 125. Springer Science & Business Media.
- Attali, D., Lieutier, A., Salinas, D., 2012. Efficient Data Structure for Representing and Simplifying Simplicial Complexes in High Dimensions. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 22(04), 279–303.
- Bang-Jensen, J., Gutin, G.Z., 2008. Digraphs: Theory, Algorithms and Applications. Springer Science & Business Media.
- Berger, E., Choromanski, K., Chudnovsky, M., Fox, J., Loebl, M., Scott, A., Seymour, P., Thomassé, S., 2013. Tournaments and Colouring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 103(1), 1–20.
- Bıyıkoğlu, T., Civan, Y., 2012. Four-cycled Graphs with Topological Applications. *Annals of Combinatorics*, 16(1), 37–56.
- Bondy, J.A., Murty, U.S.R., 2008. Graph Theory, volume 244 of Graduate Texts in Mathematics.
- Bukh, B., 2015. Topological Methods in Combinatorics: on Wedges and Joins. <http://www.borisbukh.org/TopCombLent12/notes.wedgejoin.pdf>. Erişim Tarihi: 01.01.2015.
- Burzio, M., Demaria, D.C., 1987a. Characterization of Tournaments by Coned 3-cycles. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 28(2), 25–30.
- Burzio, M., Demaria, D.C., 1987b. On Simply Disconnected Tournaments. *Proc. Catania Confer. Ars Combinatoria*, 24, 149–161.
- Carlsson, G., 2009. Topology and Data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2), 255–308.
- Chari, M., 1997. Two Decompositions in Topological Combinatorics with Applications to Matroid Complexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(10), 3925–3943.
- Choromanski, K., Jebara, T., 2015. Coloring Tournaments with Forbidden Substructures. arXiv preprint arXiv:1504.01119.
- Daneshpajouh, H.R., 2018. A Topological Lower Bound for the Chromatic Number of a Special Family of Graphs. *Discrete Mathematics*, 341(2), 508–512.
- Demaria, D.C., Kiihl, J.C.S., 1991. On the Complete Digraphs which are Simply Disconnected. *Publicacions Matemàtiques*, 517–525.
- Deniz, Z., 2015. Topology of Acyclic Complexes of Tournaments and Coloring. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 26(1-2),

213–226.

- Edelsbrunner, H., Letscher, D., Zomorodian, A., 2000. Topological Persistence and Simplification. *Foundations of Computer Science, 2000. Proceedings. 41st Annual Symposium on.* IEEE, (pp. 454–463).
- Ehrenborg, R., Hetyei, G., 2006. The Topology of the Independence Complex. *European Journal of Combinatorics*, 27(6), 906–923.
- Fomin, F.V., Gaspers, S., Lokshtanov, D., Saurabh, S., 2016. Exact Algorithms via Monotone Local Search. *Proceedings of the forty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing.* ACM, (pp. 764–775).
- Forman, R., 1998. Morse Theory for Cell Complexes. *Advances in mathematics*, 134(1), 90–145.
- Gaspers, S., Mnich, M., 2013. Feedback Vertex Sets in Tournaments. *Journal of Graph Theory*, 72(1), 72–89.
- Harutyunyan, A., Le, T.N., Thomassé, S., 2017. Coloring Tournaments: from local to global. *arXiv preprint arXiv:1702.01607*.
- Hatcher, A., 2002. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Hoppe, H., 1996. Progressive Meshes. *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques.* ACM, (pp. 99–108).
- Jonsson, J., 2008. *Simplicial Complexes of Graphs, Volume 3.* Springer.
- Kneser, M., 1955. Aufgabe 300. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 58(2).
- Kozlov, D., 2007. *Combinatorial Algebraic Topology, Volume 21.* Springer Science & Business Media.
- Lempel, A., Cederbaum, I., 1966. Minimum Feedback Arc and Vertex Sets of a Directed Graph. *IEEE Transactions on circuit theory*, 13(4), 399–403.
- Lovász, L., 1978. Kneser’s Conjecture, Chromatic Number, and Homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3), 319–324.
- Marietti, M., Testa, D., 2008. Cores of Simplicial Complexes. *Discrete & Computational Geometry*, 40(3), 444–468.
- Matoušek, J., 2003. *Using the Borsuk-Ulam Theorem, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry.* Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, Universitext.
- Merrifield, R.E., Simmons, H.E., 1989. *Topological Methods in Chemistry.* Wiley New York etc.

- Mnich, M., Teutrine, E., 2017. Improved Bounds for Minimal Feedback Vertex Sets in Tournaments. *Journal of Graph Theory*.
- Moon, J.W., 1971. On Maximal Transitive Subtournaments. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 17(4), 345–349.
- Odlyzko, A.M., Wilf, H.S., 1991. Functional Iteration and the Josephus Problem. *Glasgow Mathematical Journal*, 33(2), 235–240.
- Regge, T., Zecchina, R., 2000. Combinatorial and Topological Approach to the 3D Ising Model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(4), 741.
- Sloane, N.J., 2003. The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org>. Erişim Tarihi: 20.12.2017.
- Taylan, D., 2016. Bazı izgelerin Yoksunluk Komplekslerinin Topolojisi. Suleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 112s, Isparta.
- West, D., 2001. *Introduction to Graph Theory, Volume 2*. Prentice hall Upper Saddle River.
- Woeginger, G.J., 2008. Open Problems around Exact Algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 156(3), 397–405.
- Zomorodian, A., Carlsson, G., 2005. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2), 249–274.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zakir DENİZ  
Doğum Yeri ve Yılı : Kurtalan, 1987  
Yabancı Dili : İngilizce  
Eposta : zakirdeniz@duzce.edu.tr

### Eğitim Durumu

Lise : Bağcılar Mahmutbey Lisesi, 2006.  
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü, 2010.  
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Anabilim Dalı, 2012.

### Mesleki Deneyim

Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Bilimleri Enstitüsü : 2013-2017  
Düzce Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü : 2017-... (halen)

### Yayımları

Deniz, Z., Ekim, T., Hartinger, T. R., Milanič, M. and Shalom, M., 2017. On two extensions of equimatchable graphs. *Discrete Optim.*, 26(4), 112-130.  
Deniz, Z., 2015. Topology of acyclic complexes of tournaments and coloring. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 26(1-2), 213-226.