T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY CESARO MATRİSİNİN c_0 ve c ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU, FİNE SPEKTRUMU VE AYRIK OLMAYAN SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çağla DOĞAN
(201592171108)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

SİVAS
MART 2018

Çağla DOĞAN'ın hazırladığı ve **"Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 ve c üzerindeki spektrumu, fine spektrumu ve ayrık olmayan spektrumu"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM** Cumhuriyet Üniversitesi	………………
Jüri Üyelesi :	**Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM** Sütçü İmam Üniversitesi	………………
Jüri Üyelesi :	**Yrd. Doç. Dr. Nuh DURNA** Cumhuriyet Üniversitesi	………………

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından F-523 Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

01.03.2018

Çağla DOĞAN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY CESARO MATRİSİNİN c_0 VE c ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU, FİNE SPEKTRUMU VE AYRIK OLMAYAN SPEKTRUMU

Çağla DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

2018, 50+xi sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Banach uzayları üzerinde sınırlı lineer operatörlerin spektrumu ve çeşitli spektral ayrışımlarından bahsedilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümler orijinal bölümlerdir.

İkinci bölümde Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki Sınırlı ve kompakt olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Bu matrisin c_0 üzerindeki spektrumu belirlenmiş ve çeşitli spektral ayrışımları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki Sınırlı ve kompakt olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Bu matrisin c_0 üzerindeki spektrumu belirlenmiş ve çeşitli spektral ayrışımları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki Sınırlı ve kompakt olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu matrisin ℓ_2 üzerindeki spektrumu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cesaro operatörü, p-Cesaro operatörü, Rhaly operatörü, Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro operatörü, Spectrum ve Fine spektrum.

ABSTRACT

SPECTRUM, FINE SPECTRUM AND DISJOINT SPECTRUM OF THE GENERALIZED RHALY CESARO MATRIX ON c_0 AND c

Çağla DOĞAN

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

2018, 50+xi pages

This thesis consists of three parts.

In the first part, basic definitions and theorems used in the thesis are given. The spectrum and various spectral separations of bounded linear operators are mentioned on Banach spaces.

The second and third chapters are the original parts.

The second chapter shows that the Generalized Rhaly Cesaro Matrix is bounded and compact on c_0. Furthermore, the spectrum of this matrix over c_0 was determined and various spectral decompositions were obtained.

The third chapter shows that the Generalized Rhaly Cesaro Matrix is bounded and compact on c. Furthermore, the spectrum of this matrix over c_0 was determined and various spectral decompositions were obtained.

In the fourth chapter, it is shown that the Generalized Rhaly Cesaro Matrix is bounded and compact on the ℓ_2 Hilbert space. In addition, the spectrum of this matrix over ℓ_2 has been determined.

Keywords: Cesaro operator, p-Cesaro operator, Rhaly operator, Generalized Rhaly Cesaro operator, Spectrum and Fine spectrum.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç Dr. Mustafa YILDIRIM'a, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan tüm aileme minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

$\mathbf{B(X,Y)}$	X uzayından Y uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathbf{B(X)}$	X uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\dim(\mathbf{X})$	X uzayının boyutu
$\mathrm{Ran}(\mathbf{T})$	T operatörünün değer kümesi
$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{T})$	T operatörünün rezolvent kümesi
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{T})$	T operatörünün spekturumu
$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{T})$	$(\lambda I - T)^{-1}$ operatörü
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}}(\mathbf{T})$	T operatörünün özdeğerlerinin kümesi (T operatörünün point spektrumu)
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{c}}(\mathbf{T})$	T operatörünün sürekli spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{r}}(\mathbf{T})$	T operatörünün rezidü spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ap}}(\mathbf{T})$	T nin apporoximate point spektrumu
$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{T})$	T nin defect (eksik) spektrumu
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{co}}(\mathbf{T})$	T nin compression (sıkıştırma) spektrumu

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sınırlı lineer operatörlerin Banach cebiri içindeki bir elemanın spektrumu ve ince spektrumu kavramları ile ilerideki bölümlerde kullanılacak olan kompakt operatör kavramı ve kompakt operatörlerin bazı özellikleri verilmiştir.

1.1 Sınırlı Lineer Operatörlerin Banach Cebiri

Tanım 1.1 (Lineer Operatör) *X ve Y vektör uzayları olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) için*

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

özelliğini gerçekleyen $T : X \to Y$ fonksiyonuna Lineer Operatör (veya Lineer dönüşüm) denir. X uzayından Y uzayı içine tanımlı bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. ([27] , Kreyzing, 1978)

Tanım 1.2 (Sınırlı Lineer Operatör) *X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için;*

$$\|Tx\| \leq C \|x\|$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı varsa T operatörüne X uzayından Y uzayı içine tanımlı bir Sınırlı Lineer Operatör denir. X uzayından Y uzayı içine bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $X = Y$ ise $B(X, X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.
Eğer T sınırlı lineer operatör ise

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.1}$$

sayısına T nin normu denir. Dolayısı ile, T sınırlı ise

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

dir.

Teorem 1.1 *X ve Y normlu uzaylar ise $B(X,Y)$ toplama ve skaler çarpma işlemleri ile bir vektör uzayıdır ve (1.1) ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır ve ayrıca Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. ([9] , Brown and Page 1970, sh.105)*

Tanım 1.3 (Dual Uzay) *X herhangi bir normlu uzay ise X den $\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin cümlesine X in sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir. Yani $X^* = B(X,\mathbb{C})$ dir. ([27] , Kreyzing, 1978)*

Şimdi de bir X normlu uzayı üzerindeki bir operatörün adjointini tanımlayalım.

Tanım 1.4 (Lineer Operatörün Adjointi) *X ve Y normlu uzaylar $T \in B(X,Y)$ olsun.*

$$\begin{array}{ccccccc} T^x & : & Y' & \longrightarrow & X' & & \\ & & g & \longrightarrow & f & = & T^x g & = & g \circ T \end{array} , \; f(x) = g(Tx) \tag{4}$$

oparatörüne T nin adjoint oparatörü denir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

Tanım 1.5 (yansımalı uzay) *X bir normlu uzay olmak üzere*

$$\begin{array}{ccccc} C & : & X & \rightarrow & X'' \\ & & x & \mapsto & C(x) & = g_x \end{array} , \; g_x(f) = f(x),$$

f değişken, X sabit dönüşümü kanonik örten ise X e ***yansımalı uzay*** *denir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)*

1.2 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Bu bölümde, bazı dizi uzayları ve bu dizi uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

- Kompleks ya da reel terimli tüm dizilerin uzayını: s

- sınırlı diziler uzayını:

$$\ell_\infty := \{x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty\}$$

- yakınsak diziler uzayını:

$$c := \{x = (x_n) : \lim_n x_n = c_x, \text{ mevcut}\}$$

- sıfıra yakınsak diziler uzayını:

$$c_0 := \{x = (x_n) : \lim_n x_n = 0\}$$

ile gösteceğiz.

- c, c_0 ve ℓ_∞ uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar.

- $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p.inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayını

$$\ell_p := \{x = (x_n) : \sum_n |x_n|^p < \infty\}$$

ile göstereceğiz.

- ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı,

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

$$c^* = c_0^* \cong \ell_1, \ell_1^* \cong \ell_\infty \text{ ve } \ell_p^* \cong \ell_q, \ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

dir.

Ayrıca ℓ_1, c, c_0 yansımalı uzay değildir fakat $p > 1$ için ℓ_p bir yansımalı uzaydır.

- $A = (a_{nk}), (n, k = 0, 1, 2, ...)$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$y_n := A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k, \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

mevcut ise $Ax = (A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer X ve Y, s nin iki altcümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut

ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X, Y, p) ile gösterilir.
Eğer $A \in (c, c)$ ise A ya $konservatif$, $A \in (c, c; p)$ ise A ya *regüler matris* denir.
(1.2) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır.

Şimdi toplanabilme teorisinde büyük öneme sahip iki matris örneği verelim.

Örnek 1.1 *Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan*

$$y = y_n = \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C, 1)$ veya C_1 ile gösterilir. Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilir. Diğer önemli matris ise

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$p-$Cesàro matrisidir $(p \geq 1)$.

Teorem 1.2 $A = (a_{nk}) \in B(\ell_\infty) \Longleftrightarrow$

$$\|A\|_\infty := \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

dir. ([30] , *Maddox 1970, sh.174*)

Teorem 1.3 $A = (a_{nk}) \in B(\ell_1) \Longleftrightarrow$

$$\|A\|_{\ell_1} := \sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$$

dir. ([30] , *Maddox, 1970, sh.167*)

Teorem 1.4 $A = (a_{nk}) \in B(c_0) \Longleftrightarrow$

i)

$$\|A\|_\infty := \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

ii) $\lim_n a_{nk} = 0$ *(her sabit* k *için)*

özelliklerinin gerçeklenmesidir. ([30] , *Maddox, 1970, sh.220*)

Teorem 1.5 (Kojima-Schur) $A = (a_{nk}) \in B(c) \Longleftrightarrow$

i)

$$\|A\|_\infty := \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{1.3}$$

ii)

$$\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p \text{ (her sabit } p \text{ için)}$$

özelliklerinin gerçeklenmesidir. ([30] , *Maddox, 1970, sh.170*)

Teorem 1.6 $A \in B(c)$ *olsun. Eğer* A *(1.3) özelliğini gerçekleyen bir* A^{-1} *inverse sahip ise* $A^{-1} \in B(c)$ *dir.* ([47] , *Wilansky 1984, sh.92*)

Lemma 1.1 $X (= c_0, c, \ell_p, \ell_\infty)$ *ve* $Y (= c_0, c, \ell_p, \ell_\infty)$ *olmak üzere her sınırlı* $T : X \longrightarrow Y$ *lineer operatörü kompleks terimli bir sonsuz matris ile verilebilir.* ([40] , *Taylor 1980, sh.221-223*)

Lemma 1.2 $T : c_0 \longmapsto c_0$ *bir lineer dönüşüm ve* $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, $T^*g = g \circ T$, $g \in c_0^* \cong \ell_1$ *ise bu durumda* T *ve* T^* *Lemma 1.1 den bir matris gösterimine sahiptir ve ayrıca* $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, T *nin transpozudur.* ([47] , *Wilansky 1984, sh.266*)

Lemma 1.3 $T : c \longmapsto c$ *bir lineer dönüşüm ve* $T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$, $T^*g = g \circ T$, $g \in c^* \cong \ell_1$ *ise* T *ve* T^* *Lemma 1.1 den birer matris gösterimine sahiptirler. Ayrıca*

$T^* : \ell_1 \longmapsto \ell_1$ dönüşümü,

$$T^* = A^* \;\; = \begin{pmatrix} \chi(\lim_A) & (\vartheta_n)_{n=0}^{\infty} \\ (a_k)_{k=0}^{\infty} & M^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \chi\left(\lim_A\right) & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots \\ a_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots \\ a_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_2 & a_{02} & a_{12} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

ile verilir. Burada

$$\chi(\lim_A) = \lim_A e - \sum_{k=0}^{\infty} \lim_A e_k,$$

$$\vartheta_n = \chi(P_n \circ T),$$

$$a_{nk} = P_n(T(e_k)) = (T(e_k))_n$$

([47] , Wilansky 1984, sh.267)

Tanım 1.6 *X ve Y normlu uzaylar $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer T nin*

$$G(T) := \{(x, y) : x \in D(T), \, y = Tx\}$$

şeklinde tanımlanan grafiği, $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T ye kapalı lineer operatör denir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

Teorem 1.7 (Kapalı Grafik Teoremi) *X ve Y normlu uzaylar $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ kapalı lineer bir operatör olsun. Eğer $D(T)$ tanım kümesi X de kapalı ise T operatörü sınırlıdır. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)*

1.3 Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektrumları

Spektral teori, modern fonksiyonel analizin ana dallarından birisi olup, belirli ters operatörlerle bunların genel özelliklerine ve esas operatörle olan bağıntılarıyla ilişkilidir. Operatörlerin spektral teorisi, operatörlerin kendilerini anlayabilmemiz açısından çok önemlidir.

Tanım 1.7 *X aşikar olmayan kompleks normlu bir uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \longrightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks bir sayı ve I, $D(T)$ üzerindeki özdeşlik operatör olmak üzere, T operatör ile,*

$$T_\lambda := T - \lambda I \tag{1.5}$$

operatörünü eşleyelim.
T_λ nın bir tersi varsa, bunu $R(\lambda; T)$, yani,

$$R(\lambda; T) := T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \tag{1.6}$$

ile gösterip, buna T nin resolvent operatörü ya da kısaca T nin resolventi diyeceğiz. T operatörünün belirli olması halinde, yazmada kolaylık sağlamak üzere $R(\lambda; T)$ yerine R_λ yazacağız. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

- $R(\lambda; T)$, $T_\lambda x = y$ denklemini çözmemize yardımcı olduğundan, kullanılan " resolvent " sözcüğünün uygunluğu ortaya çıkmaktadır. Buna göre, $R(\lambda; T)$ mevcut olmak üzere, $x = T_\lambda^{-1} y = R(\lambda; T)\, y$ yazabiliriz.

- Daha da önemlisi, R_λ nın özelliklerinin incelenmesi, T operatörünün kendisinin anlaşılması için esas olmaktadır.

- Doğal olarak, T_λ ve R_λ nın bir çok özellikleri λ ya bağlı olmaktadır. Ve spektral teori bu özelliklerle ilgilenen bir daldır.

- Bunların yanı sıra, $R(\lambda; T)$ nin lineer bir operatör olduğunu belirtip, T, T_λ ve R_λ nın incelenmesinde gereksinim duyacağımız, bazı temel kavramları tanımlayarak konumuza devam edeceğiz.

Tanım 1.8 (Regüler Değer, Resolvent Cümle, Spektrum) *$X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay ve $T : D(T) \longrightarrow X$, $D(T) \subset X$ olmak üzere, lineer bir operatör olsun. T nin bir λ regüler değeri,*
(R1) $R(\lambda; T)$ mevcut,
(R2) $R(\lambda; T)$ sınırlı,
(R3) $R(\lambda; T)$ X de yoğun bir cümle üzerinde tanımlı
olacak şekilde kompleks bir sayıdır. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

T nin bütün regüler değerleri olan λ ların oluşturduğu $\rho(T,X)$ cümlesine ise, T nin resolvent kümesi denir.

$$\sigma(T,X) = \mathbb{C}\backslash\rho(T,X) \tag{1.7}$$

cümlesine de T nin spektrumu denir ve bir $\lambda \in \sigma(T,X)$ sayısına da T nin spektral değeri denir. Eğer $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ (yani $Tx = \lambda x$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir x vektörü varsa, bu durumda λ ya T nin bir öz değeri ve x e de λ ya karşılık gelen bir öz vektör denir. $D(T)$ nin, T nin λ öz-değerine karşılık gelen bütün öz-vektörleriyle, 0 dan oluşan altuzayına, T nin, λ öz-değerine karşılık gelen öz-uzayı denir. T nin tüm öz değerlerinin cümlesine T nin point spektrumu denir ve $\sigma_p(T,X)$ ile gösterilir. $\sigma_p(T,X) \subseteq \sigma(T,X)$ olduğu açıktır.

Bazı dizi uzayları üzerinde çeşitli matris dönüşümlerinin spektrumu belirlenmiştir. Bunlardan bazılarına kaynaklar kısmında yer verilmiştir: [2] ,[10] ,[11] ,[15] ,[31] ,[32] ,[32] ,[33] ,[41] .

1.3.1 Sınırlı Lineer Operatörlerin Doğal Spektral Ayrışımı

Böylece $\sigma(T,X) = \mathbf{C} - \rho(T,X)$ olduğundan, eğer $\lambda \in \sigma(T,X)$ ise

(1) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut,

(2) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı,

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$ X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı

özelliklerinden en az biri gerçeklenmez.

Eğer X bir Banach uzayı ise $\rho(T,X)$, $\mathbb{C}$ nin açık bir altcümlesi ve dolayısıyla $\sigma(T,X)$, $\mathbb{C}$ nin kapalı bir altkümesidir.

Şimdi bu ayrışımın ilkini verelim.

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $\sigma(T)$ spektrumu aşağıdaki şekilde tanımlanan ayrık üç cümleye parçalanabilir:

♣ $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki cümleye **nokta spektrum** ya da **diskret spektrum** adı verilir, ve $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Tanım gereği, $\lambda \in \sigma_p(T)$ ise λ, T nin öz-değeri olur. Yani

$$\sigma_p(T) = \sigma_p(T,X) := \{\lambda \in \mathbb{K} : Tx = \lambda x,\ x \neq 0\} \tag{1.8}$$

dir.

♣ $\sigma_c(T)$ **sürekli spektrumu** ise, $R_\lambda(T)$ mevcut olup (R3) ü sağlayacak ancak (R2) yi sağlamayacak, yani $R_\lambda(T)$ sınırsız olacak şekilde bir cümledir.

♣ $\sigma_r(T)$ **rezüdü spektrumu** da, $R_\lambda(T)$ mevcut olup (sınırlı ya da sınırsız), (R3) gerçeklemeyecek şekilde bir cümledir. Yani eğer $R_\lambda(T)$ resolvent operatörü mevcut, fakat onun $R(T_\lambda) = R(\lambda I - T)$ tanım bölgesi (sınırlı ya da sınırsız olarak) X de yoğun değilse, bu durumda $\lambda \in \mathbb{K}$ ya T nin $\sigma_r(T)$ rezüdü spektrumuna aittir denir. Burada adı geçen bazı cümleler boş olabilir. Aşağıdaki Teoremden de görüleceği gibi, sonlu boyutlu hallerde, $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$ dir, yani spektrum sadece nokta spektrumdan oluşur.

Teorem 1.8 *$X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Bu durumda $\sigma_p(T, X) = \sigma(T, X)$ dir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)*

Eğer X sonsuz boyutlu uzay ve $T \in B(X)$ ise $\sigma_p(T, X) \subset \sigma(T, X)$ bağıntısı genellikle kesin bir bağıntıdır.

Açık olarak $\lambda \in \sigma_p(T, X) \Longleftrightarrow \lambda I - T$ dönüşümü 1-1 değildir. ([9] , Brown and Page 1970, sh.230)

Bu kavramları daha iyi anlayabilmek için, bazı genel uyarılar vereceğiz.

İlk olarak, yukardaki tabloda adı geçen dört cümlenin ayrık olduğunu ve bunların bileşiminin bütün kompleks düzlemi oluşturduğunu söylemeliyiz, yani

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T),\ \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C} \tag{1.9}$$

$$\sigma_p(T) \cap \sigma_c(T) = \emptyset,\ \sigma_p(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset,\ \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \emptyset \tag{1.10}$$

dir. Ayrca, eğer, $R(\lambda; T)$ resolventi mevcut ise, daha önce de söylediğimiz gibi lineerdir. Ayrıca $R(\lambda; T) : R(T_\lambda) \longrightarrow D(T_\lambda)$ nın mevcut olması için gerek ve yeterli koşulun, $T_\lambda x = 0$ ın $x = 0$ sonucunu, yani; T_λ nın sıfır uzayının $\{0\}$ olduğunu gerektirmesi olduğunu da biliyoruz. Burada $R(T_\lambda)$, T_λ nın değer bölgesidir.

Hilbert uzaylarındaki self-adjoint operatörler için $\sigma_r(T) = \emptyset$ dır. Dolayısı ile bu ayrışım yalnızca $\sigma_p(T)$ ve $\sigma_c(T)$ den oluşur.

- Yukarıdaki kavramları daha iyi anlamamıza yardımcı olacak bazı ifadeler aşağıdadır:

Lemma 1.4 (R_λ nın tanım bölgesi) *X kompleks bir Banach uzayı, $T : X \longrightarrow X$ lineer bir operatör ve $\lambda \in \rho(T)$ olsun.*
(a) T nin kapalı, ya da,
(b) T nin sınırlı
olduğunu varsayalım. Bu durumda, $R(\lambda;T)$, X uzayının tümü üzerinde tanımlı olup sınırlıdır. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

Tanım 1.8 de verdiğimiz koşullar aşağıdaki tablo ile özetleyebiliriz:

	$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırlı	$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırsız	$R(\lambda;T)$ mevcut değil
$R(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	–	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$R(\lambda I - T) \neq X$, $\overline{R(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Tablo 1 Spektrumun Ayrışımı

Tablo 1 de "–" ile gösterilen kısım imkansızdır. Çünkü X bir Banach Uzayı olduğundan Teorem 1.7 (**Kapalı Grafik Teoremi**) dan,

$$R(\lambda I - T) = X \Rightarrow \overline{R(\lambda I - T)} = \overline{X} = X = R(\lambda I - T) \text{ kapalı } \Rightarrow \lambda I - T \text{ sınırlıdır.}$$

Sonuç olarak, kapalı grafik teoreminden

$$R(\lambda;T) := (\lambda I - T)^{-1} \qquad (\lambda \in \rho(T)) \tag{1.11}$$

ters operatörü $\rho(T)$ rezolvent kümesi üzerinde daima sınırlıdır.

- Tablo 1 de verilen ayrışıma spektrumun doğal ayrışımı denir.

Teorem 1.9 *$X \neq \{\theta\}$ bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*, X^*) \subseteq \sigma(T, X)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*, X^*) = \sigma(T, X)$ dir. ([9] , Brown ve Page 1970, sh.242)*

[6] de, $D(r,0,0,s)$ operatörünün ℓ_p ve bv_p üzerindeki spektrumu belirlenmiş ve point, rezidü ve sürekli spekral ayrışımı yapılmıştır. [3] de, Alt üçgensel double-bant matrislerinin ℓ_p üzerindeki spektrumu belirlenmiş ve point, rezidü ve sürekli spekral ayrışımı yapılmıştır. Dizi uzayları üzerindeki operatörlerin bu spektral ayrışım birçok yazar tarafından yapılmış olup, halen yapılmaya devam etmektedir.

1.3.2 Sınırlı Lineer Operatörün İnce Spektrumu (Goldberg Sınıflandırması)

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T nin görüntü uzayı $R(T)$ ve $R(T)$ nin X içindeki kapanışını $\overline{R(T)}$ ile gösterelim. Bu durumda $R(T)$ için:
(I) $R(T) = X$
(II) $\overline{R(T)} = X$, fakat $R(T) \neq X$,
(III) $\overline{R(T)} \neq X$
ve $R(T)$ üzerinde göz önüne alınan T^{-1} için:
(1) T^{-1} mevcut ve sürekli,
(2) T^{-1} mevcut fakat sürekli değil,
(3) T^{-1} mevcut değil.
durumları vardır. ([22] , Goldberg 1966, sh.58)
Mümkün olan bütün olasılıklar düşünüldüğünde dokuz farklı durum oluşur. Bunları,

$$I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$$

ile numaralandırılacağız.
Örneğin, eğer bir operatör III_2 durumunda ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1} mevcut fakat sürekli değildir. Ayrıca kapalı grafik teoreminden $I_2 = \emptyset$ dir.
Şimdi Goldberg in bu sınıflandırmasını $T \in B(X)$ olmak üzere $T_\lambda := \lambda I - T$ operatörü için tekrar yazarsak, $R(T_\lambda = \lambda I - T)$ için:
(I) $(\lambda I - T)^{-1}$ örtendir.
(II) $\overline{R(\lambda I - T)} = X$, fakat $R(\lambda I - T) \neq X$,
(III) $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$
ve $R(\lambda I - T)$ üzerinde göz önüne alınan $(\lambda I - T)^{-1}$ için:
(1) $\lambda I - T$ dönüşümü 1-1 ve $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı

(2) $\lambda I - T$ dönüşümü 1-1 fakat $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırsız

(3) $\lambda I - T$ dönüşümü 1-1 değil.

dir. ([35] , Rhoades, 1989)

Buna göre λ, $T_\lambda = \lambda I - T \in I_1$ veya II_1 olacak şekilde bir kompleks sayı ise açıkça $\lambda \in \rho(T, X)$ ve $II_1 = \emptyset$ ve diğer durumlarda $\lambda \in \sigma(T, X)$ dir. Dolayısıyla T operatörünün spektrumunu altı parçaya ayırabiliriz. Örneğin $T_\lambda = \lambda I - T \in II_2$ ise $\lambda \in II_2\sigma(T, X)$ yazarız. Böylece $\sigma(T, X)$ cümlesini;

$$I_3\sigma(T, X), II_2\sigma(T, X), II_3\sigma(T, X), III_1\sigma(T, X), III_2\sigma(T, X), III_3\sigma(T, X)$$

şeklinde parçalara ayırabiliriz. Bu ayrışıma T operatörünün *ince Spektrumu* denir. Örneğin, eğer $T_\lambda = \lambda I - T \in III_2$ ise $\lambda \in III_2\sigma\,(T, X)$ yazacağız.

		(1)	(2)	(3)
		$R\,(\lambda; T)$ mevcut ve sınırlı	$R\,(\lambda; T)$ mevcut ve sınırsız	$R\,(\lambda; T)$ mevcut değil
(I)	$R\,(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho\,(T)$	–	$\lambda \in \sigma_p\,(T)$
(II)	$R\,(\lambda I - T) \neq X$ $\overline{R\,(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho\,(T)$	$\lambda \in \sigma_c\,(T)$	$\lambda \in \sigma_p\,(T)$
(III)	$\overline{R\,(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r\,(T)$	$\lambda \in \sigma_r\,(T)$	$\lambda \in \sigma_p\,(T)$

Tablo 2 Spektrumun Goldberg Sınıflandırması

Şimdi bu spektral ayrıştırmada çok faydalı olan aşağıdaki Teoremleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 1.10 *Eğer T^* dönüşümü sınırlı bir inverse sahip ise $R(T^*)$ kapalıdır.* ([22] *, Goldberg 1966, sh.58)*

Teorem 1.11 *i)* $R(T^*)^{\perp} \supset N(T)$

ii) Eğer $D(T^*)$ *total ise, bu durumda* $N(T) = R(T^*)^{\perp} \cap D(T)$ *dir.*

iii) $\overline{R(T^*)} \subset N(T)^{\perp}$ *dir.*

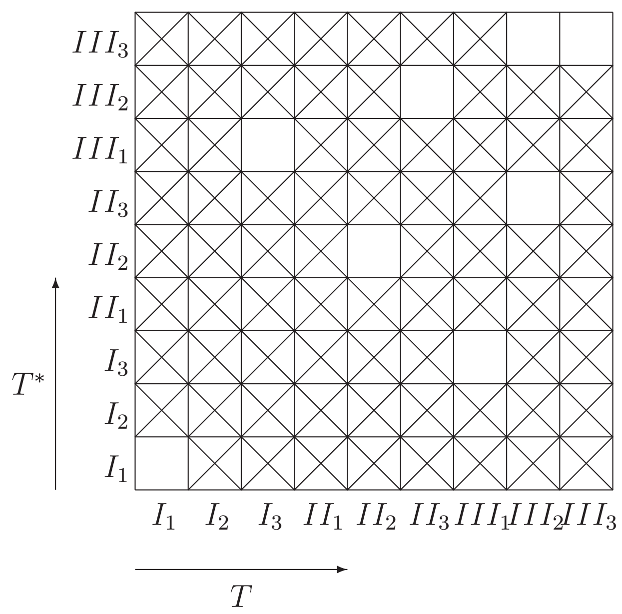
Özellikle, T *nin yoğun görüntüye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul* T^* *dönüşümünün 1-1 olmasıdır. ([22] , Goldberg 1966, sh.59)*

Teorem 1.12 *Eğer* T *ve* T^* *ın her ikisi de birer inverse sahip iseler* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ *dir. ([22] , Goldberg, 1966, sh.60)*

Teorem 1.13 $R(T^*) = X^*$ *olması için gerekli ve yeterli koşul* T *nin sınırlı bir inverse sahip olmasıdır. ([22] , Goldberg, 1966, sh.60)*

Teorem 1.14 $\overline{R(T)} = X$ *ve* T *nin bir sınırlı inverse sahip olması için gerekli ve yeterli koşul* $\overline{R(T^*)} = X^*$ *ve* T^* *ın sınırlı bir inverse sahip olmasıdır. ([22] , Goldberg, 1966, sh.60)*

X Banach uzayı yansımalı değil ise $B(X)$ ve $B(X^*)$ için aşağıdaki diyagram Wenger tarafından 1975 yılında verilmiştir.



Tablo 3. Eğer X Banach uzayı yansımalıdeğil ise $B(X)$ ve $B(X^*)$ için tablo

Örneğin T nin sınırlı bir inverse sahip olması için gerek ve yeterli koşul $R(T^*) = X^*$ olması gerektiği tablodan izlenebilir.

Yildirim [42] ,[43] ,[44] ve birkaç makalede daha Rhaly operatörünün çeşitli dizi uzayları üzerindeki spektrumu ve fine spektrumunu belirlemiştir, örneğin bunların bazıları [4] , [8] , [12] ,[13] ,[16] ,[20] ,[23] ,[24] ,[26] ,[29] ,[34] ,[35] ,[37] ,[42] ,[46] referanslar kısmında yer almaktadır. Bu konuda bir çok makale bulunmaktadır ve bu konuda çalışmalar halen devam etmektedir.

1.3.3 Apporoximate point spektrum, defect spektrum ve compression spektrum

Tanım 1.9 *a) X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $(x_n) \subset X$ dizisi için eğer, $n \to \infty$ iken $\|Tx_n\| \to 0$ ve $\|x_n\| = 1$ ise (x_n) ye T için bir Weyl dizisi denir.*

Örneğin, ℓ_p deki $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) = \delta_{jk}$ olmak üzere $\{e_k\}$ taban elemanları $(Tx_n)_n = \left(\frac{x_n}{n}\right)$ operatörü için bir Weyl dizisidir.

b)

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ için bir Weyl dizisi mevcuttur}\} \tag{1.12}$$

kümesine T nin apporoximate point spektrumu denir.

c)

$$\sigma_{\delta}(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ örten değil}\} \tag{1.13}$$

alt spekturumuna T nin defect (eksik) spektrumu denir.

Tanımdan eğer $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ ise $\forall x \in X$ için $\|\lambda x - Tx\| \geq c\|x\|$ dir. Denk olarak bu,

$$\inf\{\|\lambda e - Te\| : e \in S_1(X)\} > 0 \ (\lambda \notin \sigma_{ap}(T)) \tag{1.14}$$

biçiminde ifade edilebilir.

(1.12) ve (1.13) altspektrumları

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{\delta}(T) \tag{1.15}$$

spektrumunun (ayrık olması gerekmeyen) bir ayrışımıdır.

d)

$$\sigma_{co}(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\right\} \tag{1.16}$$

kümesine de T nin compression (sıkıştırma) spektrumu denir. ([5] , Appell ve ark, 2004)

$\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{\delta}(T)$, $\sigma_{co}(T)$ alt spektrumları

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{\delta}(T) \\ \sigma(T) &= \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{co}(T) \end{aligned} \tag{1.17}$$

spektrumun ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımıdır. $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ ve $\sigma_{co}(T) \subseteq \sigma_{\delta}(T)$ olduğu açıktır. Ayrıca $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ eşitliği ile bu alt spektrumları kıyaslarsak

$$\begin{aligned} \sigma_r(T) &= \sigma_{co}(L) \backslash \sigma_p(T) \\ \sigma_c(T) &= \sigma(T) \setminus [\sigma_p(T) \cup \sigma_{co}(T)] \end{aligned} \tag{1.18}$$

elde ederiz.

Bazen bir sınırlı lineer operatörün spektrumunu hesaplamak için onun adjoint operatörü faydalı olabilir. Bunun için aşağıdaki teorem çok kullanışlıdır.

Teorem 1.15 *Bir $T \in B(X)$ operatörünün ve onun $T^* \in B(X^*)$ adjointinin spektrumu ve alt spektrumu için aşağıdaki ilişkiler doğrudur.*

a) $\sigma(T^*) = \sigma(T)$

b) $\sigma_c(T^*) \subseteq \sigma_{ap}(T)$

c) $\sigma_{ap}(T^*) = \sigma_{\delta}(T)$

d) $\sigma_{\delta}(T^*) = \sigma_{ap}(T)$

e) $\sigma_p(T^*) = \sigma_{co}(T)$

f) $\sigma_{co}(T^*) \supseteq \sigma_p(T)$

g) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ap}(T^*)$. *([5] , Appell ve ark, 2004)*

Biz bu kısmı approximate point spektrumun önemli bir topolojik özelliği ile kapatacağız.

Teorem 1.16 *Aşağıdakiler doğrudur*

a) $T \in B(X)$ *için* $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$

b) $T \in K(X)$ *için* $\partial\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$ *dir. ([5] , Appell ve ark, 2004)*

Şimdi, bunları aşağıdaki tablada özetleyelim.

		(1)	(2)	(3)
		$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırlı	$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırsız	$R(\lambda;T)$ mevcut değil
(I)	$R(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	–	$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$
(II)	$R(\lambda I - T) \neq X$ $\overline{R(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ $\lambda \in \sigma_{\delta}(T)$	$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ $\lambda \in \sigma_{\delta}(T)$
(III)	$\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_{\delta}(T)$ $\lambda \in \sigma_{co}(T)$	$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ $\lambda \in \sigma_{\delta}(T)$ $\lambda \in \sigma_{co}(T)$	$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ $\lambda \in \sigma_{\delta}(T)$ $\lambda \in \sigma_{co}(T)$

Tablo 4. Spektrumun Altbölümü

Tablo 4 ilk kez Başar-Durna-Yildirim tarafından 2010 yılında [7] bildiri olarak sunulmuştur. Sonra Amirov-Durna-Yildirim tarafından 2011 yılında[1] de Cesàro, Rhaly ve ağırlıklı ortalama operatörünün c_0, c ve ℓ_p üzerinde daha önce belirlenmiş olan spektrumunun bu ayrışımı verilmiştir. Bu tablo birçok yazar tarafından kullanılmıştır, örneğin [17] , [18] ,[19] , [45] , [21] makalelerden bazılarıdır.

Şimdiye kadar verilen tanımlar yardımıyla, spektrumun bu ayrışımları arasındaki ilişkiyi veren Tablo 1.1 ve Tablo 1.2 yi birlikte düşünürsek aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

		(1)	(2)	(3)
		$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırlı	$R(\lambda;T)$ mevcut ve sınırsız	$R(\lambda;T)$ mevcut değil
(I)	$R(\lambda I-T)=X$	$\lambda\in\rho(T)$	–	$\lambda\in\sigma_p(T)$ $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$
(II)	$R(\lambda I-T)\neq X$ $\overline{R(\lambda I-T)}=X$	$\lambda\in\rho(T)$	$\lambda\in\sigma_c(T)$ $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$ $\lambda\in\sigma_\delta(T)$	$\lambda\in\sigma_p(T)$ $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$ $\lambda\in\sigma_\delta(T)$
(III)	$\overline{R(\lambda I-T)}\neq X$	$\lambda\in\sigma_r(T)$ $\lambda\in\sigma_\delta(T)$ $\lambda\in\sigma_{co}(T)$	$\lambda\in\sigma_r(T)$ $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$ $\lambda\in\sigma_\delta(T)$ $\lambda\in\sigma_{co}(T)$	$\lambda\in\sigma_p(T)$ $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$ $\lambda\in\sigma_\delta(T)$ $\lambda\in\sigma_{co}(T)$

Tablo 5. Spektrumun tüm ayrışımları

1.4 Kompakt lineer operatörler

Kompakt lineer operatörleri kısaca hatırlatayım.

Tanım 1.10 (Kompakt lineer operatörler) *X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \longrightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda X in her M sınırlı alt kümesi için $T(M)$ rölatif kompakt, yani $\overline{T(M)}$ kompakt ise T ye kompakt lineer operatör (yada tümüyle sürekli lineer operatör) denir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)*

Bir kümenin kompaktlığı tanımından operatörlere ilişkin yararlı bir kriter elde ederiz:

Teorem 1.17 (Kompaktlık Kriteri) *X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda,*
T kompakt operatördür $\Longleftrightarrow$ X deki her sınırlı (x_n) dizisinin T altındaki (Tx_n) görüntüsü Y de yakınsak bir alt diziye sahiptir. ([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)

Şimdi de bir operatörün kompaktlığını göstermekte kullanışlı olan iki teorem verelim.

Teorem 1.18 (Sonlu Boyutlu Tanım ya da Değer Kümesi) *X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda,*

a) *T sınırlı ve $\dim R(T) < \infty$ ise T operatörü kompakttır.*

b) *$\dim X < \infty$ ise T operatörü kompakttır.([27] , Kreyzing, 1978) ve ([14] , Çakar, 1993)*

Teorem 1.19 *X ve Y Banach uzayları ve $T \in B(X, Y)$ olsun. Bu durumda T nin bir kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T^* operatörünün kompakt olmasıdır. ([38] , Rudin 1973, sh.99)*

Bir T operatörün kompaktlığı, T ye düzgün operatör yakınsak olan bir (T_n) kompakt lineer operatörlerin bir dizisini bulmakla aşağıdaki teorem ile gösterilebilir.

Teorem 1.20 (Kompakt Lineer Operatörlerin Dizisi) *X ve Y birer Banach uzayı, $T \in B(X, Y)$ ve her n için $T_n \in B(X, Y)$ ve $\dim R(T_n) < \infty$ olsun. Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$$

ise T bir kompakt operatördür.([38] , Rudin 1973, sh.106)

1.4.1 Kompakt lineer operatörün Spektrumu

Teorem 1.21 *Eğer X bir Banach uzayı, boy$X = \infty$, $T \in B(X)$ ve T kompakt operatör ise $0 \in \sigma(T)$ dir. ([38] , Rudin, 1973, sh.99)*

Teorem 1.22 (Eigen-değerler) *X bir Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve T kompakt operatör olsun. Bu durumda eğer $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ, T ve T^* operatörlerinin bir özdeğeridir. ([38] , Rudin, 1973, sh.99)*

Teorem 1.23 *Eğer X bir Banach uzayı, $T \in B(X)$, T bir kompakt operatör ve $\lambda \neq 0$ ise $T - \lambda I$ kapalı görüntüye sahiptir. ([38] , Rudin 1973, sh.101)*

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY CESARO MATRİSİNİN C_0 ÜZERINDEKİ SPEKTRUMU, FINE SPEKTRUMU VE AYRıK OLMAYAN SPEKTRUMU (APPOROXIMATE POINT SPEKTRUMU, DEFECT SPEKTRUMU VE COMPRESSION SPEKTRUMU)

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Cesaro matrisini c_0 üzerindeki spektrumu Reade tarafından 1985 [32] de aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

- Cesaro operatörü regülerdir, yani $C_1 \in (c, c; p)$ dir.
- c_0^* uzayına izometrik olarak izomorf olan ℓ_1 üzerinde göz önüne alınan C_1^* adjoint operatörü (2.1) ile verilen $C = (c_{nk})$ matrisinin transpozu, yani

$$c_{nk}^* = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & 0 \le n \le k \\ 0, & k < n \end{cases} \tag{2.2}$$

  olmak üzere $C^* = (c_{nk}^*)$ ile verilir. ([31] , Okutoyi 1986).
- $\sigma_p(C, c_0) = \emptyset$ dır.
- $\sigma_p(C^*, \ell_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$ dir.
- $\sigma(C, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}\right\}$ dir.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha^3}{4} & \frac{\alpha^2}{4} & \frac{\alpha}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisine Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisi denir. $\alpha = 1$ alındığında yukarıdaki C_1 Cesaro matrisi elde edilir ve bunun c_0 üzerindeki spektrumu yukarıdaki gibi belirlenmiştir.

Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro operatorsününün ℓ^p üzerinde alt sınırı [36] tarafından belirlenmişir.

Ayrıca bazı yazarlar tarafından kompakt olan bazı matrislerin c_0 dizi uzayı üzerindeki spektrumları belirlenmiştir. Şimdi aşağıda buna ilişkin örnekler verelim.

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$p-$Cesàro $(p \geq 1)$ matrisinin c_0 üzerindeki spektrumu Coşkun tarafından 1997 yılında [13] de aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

- $C_p \in B(c_0)$ ve $\|C_p\| = 1$ dir.
- C_p, c_0 üzerinde kompakt lineer operatördür.
- $\sigma_p(C_p, c_0) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dir.
- $\sigma_p\left(C_p', (c_0)' \simeq \ell_1\right) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dir.
- $\sigma(C_p, c_0) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.
- $0 \in II_2\sigma(C_p, c_0)$ dır.
- $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p} \in III_3\sigma(C_p, c_0)$ dır.

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindeki sonsuz matrise Rhaly matrisi denir. Eğer $a_n = \frac{1}{n+1}$ alınırsa Cesaro matrisi ve $a_n = \frac{1}{(n+1)^p}$, $p > 1$ alınırsa $p-$Cesaro matrisi elde edilir. $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ olduğu durumda, bu matrisin c_0 üzerinde kompakt lineer bir operatör olduğu 1996 yılında [42] de Yıldırım tarafından gösterilmiş ve aşağıdakiler elde edilmiştir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow M$ Rhaly matrisi c_0 üzerinde sınırlı lineer bir operatördür.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow M$, c_0 üzerinde kompakt bir operatördür.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma_p(M, c_0) = S$ dir .

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma_p(M^*, c_0^* \cong \ell_1) = S$ dir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma(M, c_0) = S \cup \{0\}$ dır.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow 0 \in II_2\sigma(M, c_0)$ dir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \lambda = a_m, (m = 0, 1, 2, ...)$ için $\lambda \in III_3\sigma(M, c_0)$ dır.

Şimdi $0 < \alpha < 1$ için A_α Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki Spektrumu ve çeşitli spektral ayrışımlarını elde edelim.

2.1 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki Sınırlılığı

Şimdi Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olduğunu gösterip normunu bulalım. Bu tez boyunca

$$0 < \alpha < 1$$

alınacaktır.

Teorem 2.1 *$A_\alpha \in B(c_0)$ ve $\|A_\alpha\|_{B(c_0)} = 1$ dir.*

İspat. Teorem 1.4 den,

$$A_\alpha \in B(c_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \|A_\alpha\| = \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty \\ \text{ii) } \lim\limits_n a_{nk} = 0 \end{cases}$$

özellikleri gerçeklenmelidir.

i) $\|A_\alpha\| = \sup\limits_n \sum_k |a_{nk}| = \sup\limits_n \sum_{k=0}^n \left|\frac{\alpha^{n-k}}{n+1}\right| \leq \sup\limits_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1$

ii) $\lim\limits_{n} a_{nk} = \lim\limits_{n} \frac{\alpha^{n-k}}{n+1} \overset{0<\alpha<1}{=} 0$ dır.

yani; $\|A_\alpha\| \leq 1$ dir. Böylece $A_\alpha \in B(c_0)$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|A_\alpha\| &= \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|_{c_0}}{\|x\|_{c_0}} = \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\|\left(x_0, \frac{\alpha x_0+x_1}{2}, \frac{\alpha^2 x_0+\alpha x_1+x_2}{3}, \frac{\alpha^3 x_0+\alpha^2 x_1+\alpha x_2+x_3}{4}, \ldots\right)\right\|}{\|x\|_{c_0}} \\ &\overset{x=(1,0,0,\ldots)\in c_0}{\geq} \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\|\left(1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha^2}{3}, \ldots\right)\right\|_{c_0}}{1} = \sup_{n} \left|\frac{\alpha^n}{n+1}\right| = 1\end{aligned}$$

olacağından $\|A_\alpha\|_{B(c_0)} = 1$ dir. ■

2.2 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki Kompaktlığı

Şimdi Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde Kompakt lineer bir operatör olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2 *A_α, c_0 üzerinde kompakt bir operatördür.*

İspat.

$$A_\alpha^{(r)}(x) = \left(x_0, \frac{1}{2}(\alpha x_0 + x_1), \frac{1}{3}(\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2), \ldots, \frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{r} \alpha^{n-r} x_k, 0, 0, \ldots\right)$$

olsun. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\dim(A_\alpha^r(c_0)) = r+1 < \infty$ dur. Teorem 1.18-b den $\forall r \in \mathbb{N}$ için A_α^r, c_0 üzerinde kompakt operatördür. $\forall x \in c_0$ için

$$\begin{aligned}\left\|\left(A_\alpha - A_\alpha^{(r)}\right)(x)\right\|_{c_0} &= \left\|\left(0, 0, ..., \frac{1}{r+2}\sum_{k=0}^{r+1} \alpha^{n-r-1} x_k, \frac{1}{r+3}\sum_{k=0}^{r+1} \alpha^{n-r-2} x_k, ...\right)\right\|_{c_0} \\ &= \sup_{n\geq r}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r} \alpha^{n-r} x_k\right| \leq \left(\sup_{n\geq r} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r} \alpha^{n-r}\right)\|x\|_{C_0} \\ &= \sup_{n\geq r} \frac{1}{n+1}\left(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha + 1\right)\|x\|_{C_0} \\ &= \|x\| \sup_{n\geq r} \frac{1}{n+1} \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} = \frac{\|x\|}{1-\alpha} \sup_{n\geq r}\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1}\right) \\ &\leq \frac{\|x\|}{1-\alpha} \frac{1}{r+1} \longrightarrow 0, \quad (r \to \infty \text{ iken})\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\|A_\alpha - A_\alpha^{(r)}\right\| \leq \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\|\left(A_\alpha - A_\alpha^{(r)}\right)(x)\right\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{1-\alpha} \sup_{n\geq r} \frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0, \quad (r \to \infty \text{ iken})$$

dir. Buradan Teorem 1.20 den,

$$\Longrightarrow A_\alpha^{(r)} \longrightarrow A_\alpha \ (D.O.Y) \Longrightarrow A_\alpha \text{ kompakt operatördür.}$$

■

2.3 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki Spektrumu

Şimdi Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde spektrumunu belirleyelim.

Teorem 2.3 $\sigma_p(A_\alpha, c_0) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} =: S$ *dir.*

İspat.

$$A_\alpha x = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 & = \lambda x_0 \\ \frac{1}{2}(\alpha x_0 + x_1) & = \lambda x_1 \\ \frac{1}{3}(\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2) & = \lambda x_2 \\ \frac{1}{4}(\alpha^3 x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3) & = \lambda x_3 \\ & \vdots \\ \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} x_k\right) & = \lambda x_n \\ & \vdots \end{cases} \tag{2.4}$$

olsun.

i) 1. denklemden $(1-\lambda)x_0 = 0$ dır. Eğer $x_0 \neq 0$ ise bu durumda $\lambda = 1$ dir.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \tfrac{1}{2}(\alpha x_0 + x_1) = x_1 && \Rightarrow \tfrac{1}{2}\alpha x_0 = \tfrac{1}{2}x_1 && \Rightarrow x_1 = \alpha x_0 \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{3}(\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2) = x_2 && \Rightarrow \tfrac{2}{3}\alpha^2 x_0 = \tfrac{2}{3}x_2 && \Rightarrow x_2 = \alpha^2 x_0 \\ &\quad \vdots \\ &\Rightarrow && && x_n = \alpha^n x_0,\ x_0 \neq 0,\ 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n) = (\alpha^n x_0)$, $x_0 = 1$ alırsak, $\alpha \in (0,1)$ için $(x_n) = (\alpha^n) \longrightarrow 0$ dır. Böylece $0 \neq x = (x_n) \in c_0$ dır. Dolayısı ile $\lambda = 1 \in \sigma_p(c_0)$ dir.

ii) Şimdi de $x_0 = 0$ olsun.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 = \lambda x_1 \Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \tfrac{1}{3}(\alpha x_1 + x_2) = \lambda x_2 && \Rightarrow \tfrac{1}{3}\alpha x_1 = \tfrac{1}{6}x_2 && \Rightarrow x_2 = 2\alpha x_1 \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{4}(\alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3) = \lambda x_3 && \Rightarrow \tfrac{4}{3}\alpha^2 x_1 = \tfrac{1}{4}x_3 && \Rightarrow x_3 = 3\alpha^2 x_1 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_n = n\alpha^{n-1}x_1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ \alpha \in (0,1)$$

$$\sum_n |x_n|\,,\ \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{n+1}{n},\ \frac{\alpha^{n-1+1}}{\alpha^{n-1}} \to |\alpha| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_n |x_n| < \infty \Rightarrow x_n \longrightarrow 0 \Rightarrow x = (x_n) \in c_0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \in \sigma_p\,(c_0)$$

Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\frac{1}{m+1}\left(\sum_{n=0}^{m} \alpha^{m-k}x_k\right) = \lambda x_m$ denkleminde $x_0 = x_1 = \cdots = x_{m-1} = 0$ olacağından

$$\frac{1}{m+1}x_m = \lambda x_m \Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{m+1}\right)x_m = 0,\ x_m \neq 0 \text{ iken } \lambda = \frac{1}{m+1}$$

dir. Böylece (2.4) denkleminden

$$\text{Her } n > m \text{ için } \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=m}^{n} \alpha^{m+1-k}x_k\right) = \frac{1}{m+1}x_n$$

denklemleri gerçeklenir.

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{m+2}\left(\alpha x_m + x_{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}x_{m+1} & \Longrightarrow x_{m+1} = (m+1)\,\alpha x_m \\
\frac{1}{m+3}\left(\sum_{k=m}^{m+2} \alpha^{m+2-k}x_k\right) = \frac{1}{m+1}x_{m+2} & \Longrightarrow x_{m+2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2!}\alpha^2 x_m \\
\frac{1}{m+4}\left(\sum_{k=m}^{m+3} \alpha^{m+3-k}x_k\right) = \frac{1}{m+1}x_{m+3} & \Longrightarrow x_{m+3} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!}\alpha^3 x_m \\
\frac{1}{m+5}\left(\sum_{k=m}^{m+4} \alpha^{m+4-k}x_k\right) = \frac{1}{m+1}x_{m+4} & \Longrightarrow x_{m+4} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{4!}\alpha^4 x_m \\
& \vdots
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1 \text{ için } x_{m+n} = \frac{(m+1)\,(m+2)\cdots(m+n)}{n!}\alpha^n x_m$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\frac{x_{m+n+1}}{x_{m+n}}\right| = \frac{(m+1)\,(m+2)\cdots(m+n)\,(m+n+1)}{(m+1)\,(m+2)\cdots(m+n)}\,|\alpha| \to |\alpha| < 1$$

olduğundan $\sum_n |x_{m+n}| < \infty$ ve böylece $(x_{m+n}) \in c_0$ dır. Böylece

$$\lambda = \frac{1}{m+1} \in \sigma_p\,(A_\alpha, c_0)$$

dir. Böylece $\forall m$ için öz değerler basittir ve $\frac{1}{m} \in \sigma_p\,(A_\alpha, c_0)$ dır. Yani $\sigma_p\,(A_\alpha, c_0) = \left\{\frac{1}{m} : m = 1, 2, ...\right\} = S$ dır. ■

Lemma 2.1 *$c_0^* \cong \ell_1$ üzerinde göz önüne alınan A_α Genelleştirilmiş-Rhaly-Cesaro matrisinin $(A_\alpha)^*$ adjoint operatörü A_α matrisinin transpozudur, yani*

$$a_{nk}^* = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-n}}{k+1} & , 0 \leq n \leq k \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 1.2 dan açıktır. ■

Teorem 2.4 *$\sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0^* \cong \ell_1\right) = S$ dir.*

İspat. Lenmma 3.1 dan, A_α^*, A nın transpozudur. $A_\alpha^* x = \lambda x$ olsun. $x \neq 0$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{\alpha}{2}x_1 + \frac{\alpha^2}{3}x_2 + \frac{\alpha^3}{4}x_3 + \cdots &= \lambda x_0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{3}x_2 + \frac{\alpha^2}{4}x_3 + \cdots &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{\alpha}{4}x_3 + \cdots &= \lambda x_2 \\ \frac{1}{4}x_3 + \cdots &= \lambda x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklemleri geçerlidir.

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 + \frac{\alpha}{2}x_1 + \frac{\alpha^2}{3}x_2 + \frac{\alpha^3}{4}x_3 + \cdots & = \lambda x_0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{3}x_2 + \frac{\alpha^2}{4}x_3 + \cdots & = \lambda x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda - 1}{\alpha\lambda}x_0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{3}x_2 + \frac{\alpha^2}{4}x_3 + \cdots & = \lambda x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{\alpha}{4}x_3 + \cdots & = \lambda x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - 1\right)}{\left(\alpha\lambda\right)^2}x_0$$

$$\vdots$$

$$\text{Her } n \text{ için } x_n = \frac{1}{\alpha^n}\frac{\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)\left(\lambda - \frac{1}{n-1}\right)...\left(\lambda - 1\right)}{\lambda^n}x_0 \tag{2.5}$$

denklemleri geçerlidir.

$\lambda = 1$ e karşılık gelen öz vektör $x = (1, 0, 0, ...) \in \ell_1$ olmak üzere $\lambda = 1 \in \sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0^* \cong \ell_1\right)$ dır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ e karşılık gelen öz vektör $x = \left(1, \frac{-1}{\alpha}, 0, 0, ...\right) \in \ell_1$ olmak üzere $\lambda = \frac{1}{2} \in$

$\sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right)$ dir.

$\lambda = \frac{1}{3}$ e karşılık gelen öz vektör $x = \left(1, \frac{-2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha^2}, 0, 0, ...\right) \in \ell_1$ olmak üzere $\lambda = \frac{1}{3} \in \sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right)$ dir. Benzer şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda = \frac{1}{n} \in \sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right)$ dir. Yani $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0^* \cong \ell_1\right)$ dir. (2.5) dan

$$x_n = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)$$

dır.

Acaba başka öz değer var mı? $Ax = \lambda x$ iken $\sum_n |x_n| < \infty$ olacak şekilde $\theta \neq x \in X$ var mı?

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{\alpha}\left|1 - \frac{1}{\lambda(n+1)}\right| \to \frac{1}{\alpha} > 1, (n \to \infty)$$

olduğundan $\sum\limits_n |x_n| < \infty$ olan başka $\lambda \in \mathbb{C}$ yoktur. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right) = S = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, ...\right\}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.5 $\sigma\left(A_\alpha, c_0\right) = S \cup \{0\}$ *dır.*

İspat. $\dim c_0 = \infty$ olduğundan, Teorem 1.21 den $0 \in \sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ dır ve A_α kompakt lineer operatör olduğundan Teorem 1.22 den $\forall\lambda \in \sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ iken $\lambda \in \sigma_p\left(A_\alpha, c_0\right)$ dır. Dolayısıyla $\sigma\left(A_\alpha, c_0\right) = S \cup \{0\}$ elde edilir. ■

2.4 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki fine Spektrumu

Bu kısımda, Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde fine (ayrık) spektrumunu belirleyelim.

Teorem 2.6 $0 \in II_2\sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$.

İspat. Teorem 2.3 den, $\sigma_p\left(A_\alpha, c_0\right) = S$, $0 \notin \sigma_p\left(A_\alpha, c_0\right)$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $\left(A_\alpha\right)^{-1}$ vardır. Bu nedenle, $A_\alpha \in (1) \cup (2)$ dir. Şimdi $A_\alpha \in II$, yani, $\overline{R(A_\alpha)} = c_0$ ve $R(A_\alpha) \neq c_0$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 2.4 den, $\sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0^* \cong \ell_1\right) = S$ olduğundan ve $0 \notin \sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right)$ dır. Dolayısı ile A_α^* operatörü 1-1 dir. Böylece, Teorem 1.11 den, $\overline{R(A_\alpha)} = c_0$ elde ederiz. Şimdi $R(A_\alpha) \neq c_0$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $A_\alpha x = y$ ise bu durumda

$$y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} x_k$$

olur. Böylece,

$$x_0 = y_0 \text{ ve } x_n = (n+1)\, y_n - \alpha n y_{n-1}$$

denklemlerden

$$\begin{aligned} (n+1)\, y_n &= \alpha^n x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \cdots + \alpha x_{n-1} + x_n \\ \alpha n y_{n-1} &= \alpha\left(\alpha^{n-1} x_0 + \alpha^{n-2} x_1 + \cdots + x_{n-1}\right). \end{aligned}$$

elde ederiz. Bundan dolayı, $A_\alpha^{-1} = (b_{nk})$ matrisi

$$b_{nk} = \begin{cases} n+1 & , k = n \\ -\alpha n & , k = n-1 \\ 0 & , \text{bunun dışında} \end{cases} .$$

şeklinde verilir. $y = (y_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) \in c_0$ alırsak, her n için

$$(x_n) = \left((n+1)\frac{(-1)^n}{n+1} - (-1)^{n-1}\frac{n\alpha}{n}\right) = \left((-1)^n (1+\alpha)\right).$$

olur. Bu nedenle, $x \notin c_0$ dir. Dolayısı ile, $y = (y_n) \in c_0$ dır, fakat $x = (x_n) \notin c_0$ dır; yani A_α örten değil. Sonuç olarak $R(A_\alpha) \neq c_0$ dır. Böylece $A_\alpha \in II$ dir. Buradan, $A_\alpha \in II_1$ veya $A_\alpha \in II_2$ dir. $0 \in \sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ olduğunda, $A_\alpha \notin II_1$ olur. Böylece $A_\alpha \in II_2$ bulunur, yani, $0 \in II_2\sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ dır. ■

Teorem 2.7 *Her $\lambda = \frac{1}{m}$, $m = (1, 2, ...)$ için, $\lambda \in III_3\sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ dır.*

İspat. Her m için $\lambda = \frac{1}{m} \in \sigma_p\left(A_\alpha, c_0\right) = S$ olduğunda, $\sigma_p\left(A_\alpha, c_0\right) = S$ dir. Dolayısı ile, $T_\lambda = (\lambda I - A_\alpha)$ nın tersi yoktur; buradan $T \in (3)$ tür. $\lambda = \frac{1}{m} \in \sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0\right)$ olduğundan, $\lambda = \frac{1}{m}$ için $T^* = \lambda I - A_\alpha^*$ adjoint operatörü 1-1 değildir. Teorem 1.11 den, $T_\lambda = \lambda I - A_\alpha$ yoğun bir görüntüye sahip değildir. Bu nedenle, $\overline{R(T)} \neq c_0$; yani, $T_\lambda \in III$ elde edilir. Buradan, $T_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} I - A_\alpha \in III_3$ ve $\lambda = \frac{1}{m} \in III_3\sigma\left(A_\alpha, c_0\right)$ bulunur. ■

2.5 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c_0 üzerindeki ayrık olmayan Spektrumu (Apporoximate point spektrumu, defect spektrumu ve compression spektrumu)

Bu bölümün son kısmında da, Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde ayrık olmayan spektrumu (Apporoximate point spektrumu, defect spektrumu ve compression spektrumu) belirleyelim.

Teorem 2.8 *A_α için,*
a) $\sigma_{ap}(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}$,
b) $\sigma_\delta(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}$,
c) $\sigma_{co}(A_\alpha, c_0) = S$ *dır.*

İspat. a) Teorem 2.5 den $\sigma(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}$, Teorem 3.7 den $III_3\sigma(A_\alpha, c_0) = S$ den ve Teorem 3.6 den $II_2\sigma(A_\alpha, c_0) = \{0\}$ olduğundan, Tablo 5 den $III_1\sigma(A_\alpha, c_0) = \emptyset$ olduğunu görürüz. Bu nedenle, yine tablo 5 den

$$\sigma_{ap}(A_\alpha, c_0) = \sigma(A_\alpha, c_0) \diagdown III_1\sigma(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}$$

olur.
b) Tablo 2 den $I_3\sigma(A_\alpha, c_0) = \emptyset$ bulunur, çünkü sırasıyla Teorem 2.5, 3.7 ve 3.6 den

$$\sigma(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}, \ III_3\sigma(A_\alpha, c_0) = S \text{ ve } II_2\sigma(A_\alpha, c_0) = \{0\}$$

dır. Bu nedenle, Tablo 5 den

$$\sigma_\delta(A_\alpha, c_0) = \sigma(A_\alpha, c_0) \diagdown I_3\sigma(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}$$

elde edilir.
c) Sırasıyla Teorem 2.5, 3.7 ve 3.6 den

$$\sigma(A_\alpha, c_0) = S \cup \{0\}, \ III_3\sigma(A_\alpha, c_0) = S \text{ ve } II_2\sigma(A_\alpha, c_0) = \{0\}$$

için, Tablo 2 den $III_1\sigma(A_\alpha, c_0) = \emptyset$ dır. Sonuç olarak, Tablo 5 den

$$\sigma_{co}(A_\alpha, c_0) = III_1\sigma(A_\alpha, c_0) \cup III_2\sigma(A_\alpha, c_0) \cup III_3\sigma(A_\alpha, c_0) = S$$

dir. ■

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY CESARO MATRİSİNİN C ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU, FINE SPEKTRUMU VE AYRIK OLMAYAN SPEKTRUMU (APPOROXIMATE POINT SPEKTRUMU, DEFECT SPEKTRUMU VE COMPRESSION SPEKTRUMU)

C_1 Cesaro matrisini c üzerindeki spektrumu Okutayi tarafından 1985 [31] de aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

- Cesaro operatörü regülerdir, yani $C_1 \in (c, c; p)$ dir.
- c^* uzayına izometrik olarak izomorf olan ℓ_1 üzerinde göz önüne alınan C_1^* adjoint operatörü

$$c^*_{nk} = \begin{cases} 1 & , n = k = 0 \\ 0 & , n = 0, n < k \\ \frac{1}{k} & , 1 \leq n \leq k \\ 0 & , 0 < k < n \end{cases} \tag{3.1}$$

  ile verilir.
- $\sigma_p(C, c) = \{1\}$ dır.
- $\sigma_p(C^*, \ell_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$ dir.
- $\sigma(C, c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ dir.

A_α Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinde $\alpha = 1$ alındığında yukarıdaki C_1 Cesaro matrisi elde edilir ve bunun c üzerindeki spektrumu yukarıdaki gibi belirlenmiştir. Ayrıca bazı yazarlar tarafından kompakt olan bazı matrislerin c dizi uzayı üzerindeki spektrumları belirlenmiştir. Şimdi aşağıda buna ilişkin örnekler verelim.

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$p-$Cesàro $(p \geq 1)$ matrisinin c üzerindeki spektrumu Coşkun tarafından 1992 [12] de aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

- $C_p \in B(c)$ ve $\|C_p\| = 1$ dir.

- C_p, c üzerinde kompakt lineer operatördür.

- $\sigma_p(C_p, c) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dir.

- $\sigma_p\left(C_p', (c)' \simeq \ell_1\right) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dir.

- $\sigma(C_p, c) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

- $0 \in II_2\sigma(C_p, c)$ dır.

- $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p} \in III_3\sigma(C_p, c)$ dır.

$L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ olduğu durumda, Rhaly matrisinin c üzerinde kompakt lineer bir operatör olduğu 1996 yılında [42] de Yıldırım tarafından gösterilmiş ve aşağıdakiler elde edilmiştir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow M$ Rhaly matrisi c üzerinde sınırlı lineer bir operatördür.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow M$, c üzerinde kompakt bir operatördür.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma_p(M, c) = S$ dir .

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma_p(M^*, c^* \cong \ell_1) = S$ dir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \sigma(M, c) = S \cup \{0\}$ dır.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow 0 \in II_2\sigma(M, c)$ dir.

- $L = \lim_n (n+1)a_n = 0 \Longrightarrow \lambda = a_m, (m = 0, 1, 2, ...)$ için $\lambda \in III_3\sigma(M, c)$ dır.

Şimdi $0 < \alpha < 1$ için A_α Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki Spektrumu ve çeşitli spektral ayrışımlarını elde edelim.

3.1 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki Sınırlılığı

Şimdi Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c dizi uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olduğunu gösterip normunu bulalım.

Teorem 3.1 $A_\alpha \in B(c)$ *ve* $\|A_\alpha\|_{B(c)} = 1$ *dir.*

İspat. $A_\alpha \in B(c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul
i) $\|A_\alpha\|_\infty := \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$
ii) $\lim\limits_n \sum\limits_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$, (her sabit p için),
yani; Teorem 1.5 in özellikleri gerçeklenmelidir.

$$\|A_\alpha\|_\infty = \sup_n \sum_k |a_{nk}| = \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\alpha^{n-k}}{n+1} \right| \overset{|\alpha|=1}{\leq} \sup_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = 1,$$

yani; $\|A_\alpha\| \leq 1$ ve $\lim\limits_{n\to n_0} \frac{\alpha^{n-k}}{n+1} \overset{|\alpha|<1}{=} 0$ sağlanır. Böylece $A \in B(c)$ dir.

$$\begin{aligned} \|A_\alpha\| &= \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|_c}{\|x\|_c} \\ &= \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\| \left(x_0, \frac{\alpha x_0 + x_1}{2}, \frac{\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2}{3}, \frac{\alpha^3 x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3}{4}, \ldots \right) \right\|_c}{\|x\|_x} \\ &\overset{x=e_1}{\geq} \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\| \left(1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha^2}{3}, \ldots \right) \right\|_c}{1} = \sup_n \left| \frac{\alpha^n}{n} \right| = 1 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|A_\alpha\|_{B(c)} = 1$ dir. ■

3.2 Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c üzerindeki Kompaktlığı

Şimdi Teorem 1.18 ve 1.20 i kullanarak A_α operatörünün c üzerinde kompaktlığını gösterelim.

Teorem 3.2 A_α*, c üzerinde kompakt bir operatördür.*

İspat. Kompakt operatörlerin bir dizisini aşağıdaki şekilde,

$$A_\alpha^r(x) := \left(x_0, \frac{1}{2}(\alpha x_0 + x_1), \frac{1}{3}\left(\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2\right), \ldots, \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \alpha^{n-r} x_k, 0, 0, \ldots \right)$$

olarak tanımlayalım. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\dim\left(A_\alpha^r(c)\right) = r+1 < \infty$ olduğundan, Teorem 1.18 den, $\forall r \in \mathbb{N}$ için A_α^r, c üzerinde kompakt operatördür. $\forall x \in c$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(A_\alpha - A_\alpha^r\right)(x)\right\|_c &= \left\|\left(0,0,\ldots,\frac{1}{r+2}\sum_{k=0}^{r+1}\alpha^{n-r-1}x_k, \frac{1}{r+3}\sum_{k=0}^{r+1}\alpha^{n-r-2}x_k,\ldots\right)\right\|_c \\
&= \sup_{n\geq r}\left|\tfrac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{r}\alpha^{n-r}x_k\right| \leq \left(\sup_{n\geq r}\tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r}\alpha^{n-r}\right)\|x\|_c \\
&= \sup_{n\geq r}\tfrac{1}{n+1}\left(\alpha^n+\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha+1\right)\|x\|_c \\
&= \|x\| \sup_{n\geq r}\tfrac{1}{n+1}\tfrac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} = \tfrac{\|x\|}{1-\alpha}\sup_{n\geq r}\left(\tfrac{1-\alpha^{n+1}}{n+1}\right) \\
\Longrightarrow \left\|A_\alpha - A_\alpha^{(r)}\right\| &\leq \sup_{x\neq\theta}\frac{\left\|\left(A_\alpha - A_\alpha^{(r)}\right)(x)\right\|}{\|x\|} \\
&\leq \tfrac{1}{1-\alpha}\sup_{n\geq r}\tfrac{1-\alpha^{n+1}}{n+1} = \tfrac{1}{1-\alpha}\tfrac{1}{r+1} \longrightarrow 0, \ \ (r\to\infty \text{ iken})
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow A_\alpha^{(r)} \longrightarrow A_\alpha \ \ (D.O.Y) \Longrightarrow \text{ Teorem 1.20 den } A_\alpha \text{ kompakt operatördür.}$$

■

3.3 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki Spektrumu

Şimdi Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c dizi uzayı üzerinde spektrumunu belirleyelim.

Teorem 3.3 $\sigma_p(A_\alpha, c) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} =: S \cup \{0\}$ *dir.*

İspat. Teorem in ispatına benzerdir. ■

Lemma 3.1 $c_0^* \cong \ell_1$ *üzerinde göz önüne alınan A_α Genelleştirilmiş-Rhaly-Cesaro matrisinin $(A_\alpha)^*$ adjoint operatörü A_α matrisinin transpozudur, yani*

$$a_{nk}^* = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-n}}{k+1} & , 0 \leq n \leq k \\ 0 & , n > k \end{cases}$$

şeklindedir, yani; c üzerinde A_α nın adjointi,

$$A_\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha^3}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha^2}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\alpha}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilir.

İspat. Hesaplamaları Lemma 1.3 e göre yapalım.

$$\begin{aligned}
\chi\left(A_\alpha\right)=\lim\nolimits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk} &= \lim\nolimits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=\lim\nolimits_{n}\tfrac{\alpha^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{1}{\alpha^k}\\
&= \lim\nolimits_{n\to\infty}\tfrac{\alpha^n}{n+1}\left(1+\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\alpha^2}+\cdots+\tfrac{1}{\alpha^n}\right)\\
&= \lim\nolimits_{n\to\infty}\tfrac{\alpha^n}{n+1}\tfrac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\alpha}}=\lim\nolimits_{n\to\infty}\tfrac{\alpha^n-\frac{1}{\alpha}}{(n+1)(1-\alpha)}\\
&= \tfrac{1}{\alpha(\alpha-1)}\lim\nolimits_{n\to\infty}\tfrac{1-\alpha^{n+1}}{n+1}=0
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece A_α co-null bir matristir.

Ayrıca

$$a_k=\lim_n a_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-k}}{n+1}=0$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}a_{nk} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{n+1}=\frac{\alpha^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k\\
&= \frac{\alpha^n}{n+1}\left\{1+\frac{1}{\alpha}+\cdots+\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)^n\right\}=\frac{\alpha^n}{n+1}\left\{\frac{1-\frac{1}{\alpha^{n+1}}}{1-\frac{1}{\alpha}}\right\}\\
&= \frac{\alpha^n}{n+1}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left\{1-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right\}\\
&= \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)}\left\{\alpha^{n+1}-1\right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Son olarak

$$\begin{aligned}
\left(P_n\circ A_\alpha\right)e &= \left\{\frac{\alpha^n x_0+\alpha^{n-1}x_1+\cdots+\alpha x_{n-1}+x_n}{n+1}\right\}_e\\
&= \frac{\alpha^n+\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha+1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_n &= \left(P_n\circ A_\alpha\right)e-\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left\{\tfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}-\tfrac{1}{(\alpha-1)}\left(\alpha^{n+1}-1\right)\right\}\\
&= \tfrac{1}{(n+1)(1-\alpha)}\left\{1-\alpha^{n+1}+\alpha^{n+1}-1\right\}=0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da Lemmayı ispatlar. ■

Şimdi aşağıdaki Teoremi ispatlamaya hazırız.

Teorem 3.4 $\sigma_p\left(A_\alpha^*,c^*\cong\ell_1\right)=\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,...\right\}\cup\{0\}$ *dir.*

İspat. $x \neq 0$ ve $A_\alpha^* x = \lambda x$ olsun. Yani

$$A_\alpha^* x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha^3}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha^2}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\alpha}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} \lambda x_0 &= 0 \\ \lambda x_1 &= x_1 + \tfrac{\alpha}{2} x_2 + \tfrac{\alpha^2}{3} x_3 + \cdots \\ \lambda x_2 &= \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{\alpha}{3} x_3 + \tfrac{\alpha^2}{4} x_4 + \cdots \\ \lambda x_3 &= \tfrac{1}{3} x_3 + \tfrac{\alpha}{4} x_4 + \cdots \\ \lambda x_4 &= \tfrac{1}{4} x_4 + \cdots \\ &\vdots \\ \lambda x_n &= \tfrac{1}{n} x_n + \tfrac{\alpha}{n+1} x_{n+1} + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$0 = \lambda x_0$$

$\lambda = 0$ veya $x_0 = 0$ olur. $\lambda = 0$ a karşılık gelen öz vektör $x = (1, 0, 0, \ldots)$ dır.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \tfrac{\alpha}{2} x_2 + \tfrac{\alpha^2}{3} x_3 + \cdots &= \lambda x_1 \\ \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{\alpha}{3} x_3 + \tfrac{\alpha^2}{4} x_4 + \cdots &= \lambda x_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_1 = \lambda x_1 - \alpha \lambda x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda - 1}{\alpha \lambda} x_1$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{\alpha}{3} x_3 + \tfrac{\alpha^2}{4} x_4 + \cdots &= \lambda x_2 \\ \tfrac{1}{3} x_3 + \tfrac{\alpha}{4} x_4 + \cdots &= \lambda x_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_3 = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda - 1)}{(\alpha \lambda)^2} x_1$$

$$\vdots$$

$$\text{Her } n \text{ için } x_n = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \frac{\left(\lambda - \frac{1}{n-1}\right) \ldots (\lambda - 1)}{\lambda^{n-1}} x_1 \tag{3.3}$$

$\lambda = 1$ e karşılık gelen öz vektör $x_0 \neq 0$ için $x = (x_0, x_1, 0, 0, \ldots) \in \ell_1$ olmak üzere $A_\alpha^* x = x$ dır. $\lambda = 1 \in \sigma_p (A_\alpha^*, c^* \cong \ell_1)$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda = \frac{1}{n} \in \sigma_p (A_\alpha^*, \ell_1)$ dir. (3.3) dan

$$x_n = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right) x_1$$

elde edilir. Eğer bir m tamsayısı için $\lambda = a_m$ ise bu durumda her $n \geq 1$ için $x_n = 0$ olacağından $x = (x_n) \in \ell_1$ olacağı açıktır. Yani m tamsayıları için $\lambda = a_m$ ler A_α^* ın birer özdeğeri olmaktadır. Acaba başka öz değer var mı?
$\lambda \neq 0$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda \neq a_m$ ise buradan

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \overset{\lambda \neq \frac{1}{k}}{=} \frac{1}{\alpha}\left|1 - \frac{1}{\lambda n}\right| \to \frac{1}{\alpha} > 1, \ \ (n \to \infty)$$

yani; $\sum\limits_n |x_n| < \infty$ yapan başka $\lambda \in \mathbb{C}$ yoktur. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right) = S = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\} \cup \{0\}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.5 $\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S \cup \{0\}$ *dır.*

İspat. $\dim c = \infty$ olduğundan, Teorem 1.21 ile $0 \in \sigma\left(A_\alpha, c\right)$ dır ve Teorem 3.2 den A_α kompakt lineer operatör olduğundan Teorem 1.22 dan $\forall \lambda \in \sigma\left(A_\alpha, c\right)$ iken $\lambda \in \sigma_p\left(A_\alpha, c\right)$ dır. Dolayısıyla Teorem 3.3 den $\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S \cup \{0\}$ elde edilir. ■

3.4 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki fine Spektrumu

Bu kısımda, Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c dizi uzayı üzerinde fine (ayrık) spektrumunu belirleyelim.

Teorem 3.6 $0 \in III_2\left(A_\alpha, c\right)$ *dır.*

İspat. Teorem 3.3 den, $\sigma_p\left(A_\alpha, c\right) = S$, $0 \notin \sigma_p\left(A_\alpha, c\right)$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $\left(A_\alpha\right)^{-1}$ mevcuttur. Bu nedenle, $A_\alpha \in (1) \cup (2)$ dir. Şimdi $A_\alpha \in II$ olduğunu, yani, $\overline{R(A_\alpha)} = c$ ve $R(A_\alpha) \neq c$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.5 den, $\sigma_p\left(A_\alpha^*, c_0^* \cong \ell_1\right) = S$ olduğundan ve bu yüzden $0 \in \sigma_p\left(A_\alpha^*, \ell_1\right)$ olduğundan, A_α^* operatörü 1-1 dir. Böylece, Teorem 1.11 den, $\overline{R(A_\alpha)} = c$ elde ederiz. Şimdi de $R(A_\alpha) \neq c$ olduğunu gösterelim. Eğer $A_\alpha x = y$ dersek, bu durumda

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} x_k$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned}(n+1)\,y_n &= \alpha^n x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \cdots + \alpha x_{n-1} + x_n \\ \alpha n y_{n-1} &= \alpha\left(\alpha^{n-1}x_0 + \alpha^{n-2}x_1 + \cdots + x_{n-1}\right).\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$x_0 = y_0 \text{ ve } x_n = (n+1)\,y_n - \alpha n y_{n-1}$$

elde edilir. Bundan dolayı, $A_\alpha^{-1} = (b_{nk})$ matrisi şu şekilde verilir:

$$b_{nk} = \begin{cases} n+1 & , k=n \\ -\alpha n & , k=n-1 \\ 0 & , \text{diğer yerde} \end{cases}.$$

Eğer $y = (y_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right) \in c$ alırsak, her n için

$$(x_n) = \left((n+1)\frac{(-1)^n}{n+1} - (-1)^{n-1}\frac{n\alpha}{n}\right) = \left((-1)^n(1+\alpha)\right).$$

olur. Bu nedenle, $x \notin c$ dir. Dolayısı ile, $y = (y_n) \in c$, fakat $x = (x_n) \notin c$ dir. Sonuç olarak A_α örten değil, yani $R(A_\alpha) \neq c$ dır. Buradan, $A_\alpha \in II$ dir. Dolayısı ile, $A_\alpha \in II_1$ veya $A_\alpha \in III_2$ dir. Tablo 2 den $II_1\sigma(A_\alpha, c) = \emptyset$ olacağından ve $0 \in \sigma(A_\alpha, c)$ olduğunda, $A_\alpha \notin II_1$ elde edilir. Buradan $A_\alpha \in III_2$ olur, yani, $0 \in III_2\sigma(A_\alpha, c)$ dır. ■

Teorem 3.7 *Eğer $m = 1, 2, ...$ için $\lambda = \frac{1}{m}$ ise bu durumda, $\lambda \in III_3\sigma(A_\alpha, c)$ dir.*

İspat. Teorem 3.3 den, her m için

$$\lambda = \frac{1}{m} \in \sigma_p(A_\alpha, c) = S$$

dir. Dolayısı ile, $T_\lambda = (\lambda I - A_\alpha)$ nin tersi yoktur; $T \in (3)$ tür. Teorem 3.4 den

$$\lambda = \frac{1}{m} \in \sigma_p(A_\alpha^*, c) = S$$

olduğundan, $\lambda = \frac{1}{m}$ için $T^* = \lambda I - A_\alpha^*$ adjoint operatörü 1-1 değildir. Teorem 1.11 den, $T_\lambda = \lambda I - A_\alpha$ yoğun bir görüntüye sahip değildir. Bu nedenle, $\overline{R(T)} \neq c$; yani, $T_\lambda \in III$ dir.. Buradan, $T_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}I - A_\alpha \in III_3$ ve $\lambda = \frac{1}{m} \in III_3\sigma(A_\alpha, c)$ elde edildir. ■

3.5 Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro Matrisinin c üzerindeki ayrık olmayan Spektrumu (Apporoximate point spektrumu, defect spektrumu ve compression spektrumu)

Bu bölümün son kısmında da, Genelleştirilmiş Rhaly-Cesàro matrisinin c dizi uzayı üzerinde ayrık olmayan spektrumu (Apporoximate point spektrumu, defect spektrumu ve compression spektrumu) belirleyelim.

Teorem 3.8 A_α *için,*
a) $\sigma_{ap}(A_\alpha, c) = S \cup \{0\}$,
b) $\sigma_\delta(A_\alpha, c) = S \cup \{0\}$,
c) $\sigma_{co}(A_\alpha, c) = S \cup \{0\}$ *dır.*

İspat. a) Teorem 3.5 den,

$$\sigma(A_\alpha, c) = S \cup \{0\},$$

Teorem 3.6 den

$$III_3\sigma(A_\alpha, c) = S$$

ve Teorem 3.7 den

$$II_2\sigma(A_\alpha, c) = \{0\}$$

olduğundan, Tablo 2 yardımı ile

$$III_1\sigma(A_\alpha, c) = \emptyset$$

elde ederiz Bu nedenle, Tablo 4 den

$$\sigma_{ap}(A_\alpha, c) = \sigma(A_\alpha, c) \setminus III_1\sigma(A_\alpha, c) = S \cup \{0\}$$

buluruz.
b) Tablo 2 den $I_3\sigma(A_\alpha, c) = \emptyset$ elde ederiz, çünkü sırasıyla Teorem 3.5 dan

$$\sigma(A_\alpha, c) = S \cup \{0\}$$

Teorem 3.6 den

$$III_3\sigma(A_\alpha, c) = S$$

ve Teorem 3.7 den

$$II_2\sigma\left(A_\alpha, c\right) = \{0\}$$

dır. Bu nedenle, Tablo 5 den

$$\sigma_\delta\left(A_\alpha, c\right) = \sigma\left(A_\alpha, c\right) \diagdown I_3\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S \cup \{0\}$$

elde ederiz.

c) Sırasıyla Theorem 3.5 den

$$\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S \cup \{0\},$$

Teorem 3.6 den

$$III_3\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S$$

ve Teorem 3.7 den

$$II_2\sigma\left(A_\alpha, c\right) = \{0\}$$

olduğundan, Tablo 2 den

$$III_1\sigma\left(A_\alpha, c\right) = \emptyset$$

dır. Sonuç olarak, Tablo 5 den

$$\sigma_{co}\left(A_\alpha, c\right) = III_1\sigma\left(A_\alpha, c\right) \cup III_2\sigma\left(A_\alpha, c\right) \cup III_3\sigma\left(A_\alpha, c\right) = S$$

elde ederiz. ■

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ RHALY CESARO MATRİSİNİN ℓ^2 ÜZERINDEKİ SPEKTRUMU

Tanım 4.1 ($H(\mathbb{D})$ lokal konveks uzayı) *$\mathbb{C}$ içinde açık birim daireyi $\mathbb{D}$ ile ve $\mathbb{D}$ nin sınırını $\partial\mathbb{D} := \overline{\mathbb{D}} \backslash \mathbb{D}$ ile göstereceğiz. $H(\mathbb{D})$ ile her $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonların vektör uzayını göstereceğiz. Eğer $f \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonu, f nin Taylor dizisi ile verilirse $H(\mathbb{D})$ lineer bölüm uzayına bir dizi uzayı olarak bakılır. Ayrıca sınırlı fonksiyonların kümesini H^∞ ile göstereceğiz.*

Tanım 4.2 (H^p uzayları) *$0 < p < \infty$ olsun. Bir $f \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonu ve $0 \leq r < 1$ için*

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

tanımlayalım. Bu integral ortalaması yardımıyla

$$\|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f)$$

eşitliği tanımlanır. Bu durumda

$$H^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty \right\}$$

ifadesine H^p Hardy-uzayı denir.

Teorem 4.1 (H^p nin özellikleri) ***(a)*** *Herhangi bir $f \in H(\mathbb{D})$ için genelleştirilmiş integral ortalaması $p = \infty$ için*

$$M_\infty(r, f) := \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|$$

olarak tanımlanırsa basit bir hesaplama ile

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_\infty(r.f) = \|f\|_\infty$$

elde edilir.

(b) *H^p nin tanımından Hölder eşitsizliği yardımıyla ve (a) ile $\forall f \in H(\mathbb{D})$ ve $0 < p < q \leq \infty$ için $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ elde edilir. Bununla birlikte $H^p \supset H^q$ içermesi* *geçerlidir.*

(c) *$f \in H^p$ fonksiyonunun normu için*

$$\|f\|_p = \lim_{r \longrightarrow 1^-} M_p(r, f)$$

*geçerlidir, çünkü $\forall f \in H(\mathbb{D})$ ve $0 < p \leq \infty$ için $M_p(r, f)$ integral ortalaması $r \in [0, 1]$ için monoton artandır. ([39] , Rudin, 1987, sh.338)***.**

d) *$1 \leq p < \infty$ için $\left(H^p, \|.\|_p\right)$, $\left(L^p[0, 2\pi], \|.\|_p\right)$ nin kapalı bir alt uzayına izometrik izomorftur. Bu*

$$L_+^p := \left\{ f^* \in L^p[0, 2\pi] : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(+) e^{-int} dt = 0, n \in \mathbb{Z}, n < 0 \right\}$$

dır.

$f \in H^p$ nin Taylor katsayıları, gösterilen izometrik izomorfun $f^* \in L_+^p$ fonksiyonunun Fourier katsayıları ile uygun düşer. Bu sonuçlar hakkında daha geniş açıklamalar ([39] , Rudin, 1987, sh.335) de yer alır.

Riemann-Lebesgue teoremi yardımıyla H^p hakkındaki bilgiler bir dizi uzayına indirgenebilir.

e) *$1 \leq p \leq \infty$ için $H^p \subset c_0$ dır. Çünkü; f nin Taylor katsayıları dizisine $(b_n) := (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ dersek $f(z) = \sum_k b_k z^k$ ve $\sum_k b_k z^k$ serisi $k \to \infty$ için $f(z)$ ye yakınsadığından ve yakınsak serilerin genel terimi sıfıra gideceğinden $b_k \to 0$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki düşüncelerden $H^p \subset c_0$ elde edilir.*

Teorem 4.2 (H^2 nin karakterizasyonu) *$b := (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ Taylor katsayıları ile $f \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda*

a) $f \in H^2 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$

b) $\|f\|_2 = \|b\|_2$

geçerlidir.

$|\alpha| \leq 1$ için, H^2 Hardy uzayı üzerinde, A_α^* operatörü formal olarak,

$$(A_\alpha^* f)(z) = -(\alpha - z)^{-1} \int_\alpha^z f(s)\, ds, \ |z| < 1.$$

tanımlanır. $\alpha = 1$ ise, bu durumda A_1 discrete Cesàro operatörü alınarak ℓ^2 ile H^2 özdeş olur. Burada, sınırlılık, spektrum, birimsel denklik, kompaktlık ve A_α operatörleri için altnormallik ile ilgili soruları yanıtlıyoruz.

Karesi toplanabilir kompleks (a_n) dizilerinin ℓ^2 Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan C_1 Cesàro operatörü,

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

olmak üzere

$$C_1 (a_n) = (b_n)$$

ile verilir. Bu operatör, [10] de Brown ve arkadaşları tarafından çalışılmış ve C_1 $\|C_1\| = 2$ ile sınırlı ve spektrumunun

$$\sigma (C_1,\ell_2) = \{z : |1 - z| \leq 1\}$$

olduğunu gösterdiler. Kriete ve Trutt [28] de C_1 ın altnormal bir operator olduğu ispatlandı.

$0 < |\alpha| \leq 1$ için, ℓ^2 üzerinde

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{\alpha}^{n-j} a_j}{n+1}$$

olmak üzere, $A_\alpha (a_n) = (c_n)$ ile A_α operatörü tanımlanır. Aynı zamanda, A_0, $A_0 (a_n) = (a_n/ (n+1))$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ ile verilir. Dikkat edersek $A_1 = C_1$ dır. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ yi $f (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ye göndererek ℓ^2 ile H^2 Hardy uzayı izometrik olarak izomorf olur. Bu durumda A_α, H^2 üzerinde bir operatördür.

A_α^*, aşağıdaki gibi kapalı formda ifade edilebilir. Eğer $f (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ise, bu durumda

$$c_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \alpha^{n-k} / (n+1)$$

olmak üzere

$$(A_\alpha^* f) (z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

dır. İntegrasyon yolu yeterince düzgün olmak üzere

$$\int_\alpha f (s) \, ds$$

yi düşünelim. Eğer $\alpha = 1$ ve yol, biri 1 den 0 a diğeri 0 dan z ye olan iki doğru parçasının birleşimi ise, bu durumda

$$\int_1^z f (s) \, ds = \int_0^z f (s) \, ds - \int_0^1 f (s) \, ds$$

dir, son integral Fejér-Riesz eşitsizliği ile mevcuttur. f için, Taylor serisinden terim terim intagral alarak,

$$\int_{\alpha}^{z} f(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \alpha^{n+1}}{n+1}$$

elde ederiz. $(\alpha - z)(A_{\alpha}^{*} f)(z)$ nın Taylor katsayıları ile Taylor katsayılarını karşılaştırırsak,

$$(\alpha - z)(A_{\alpha}^{*} f)(z) = -\int_{\alpha}^{z} f(s)\,ds, \ |z| < 1$$

olduğunu görürüz. Böylece,

$$(A_{\alpha}^{*} f)(z) = -(\alpha - z)^{-1} \int_{\alpha}^{z} f(s)\,ds$$

olur.

Matris formunda,

$$A_{\alpha}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha^3}{4} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha^2}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\alpha}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

elde ederiz. $\|A_{\alpha} f\| \leq \|C_1(|f|)\|$ olduğundan, A_{α}, $\|A_{\alpha}\| \leq 2$ ile sınırlıdır. Daha fazla bilgi için, bazı lemmalara ihtiyacımız var. Aşağıdaki Lemmanın ispatı [25] de bulunmaktadır.

Lemma 4.1 *Eğer $\alpha_{ij} \geq 0$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$, $p_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots$ ve eğer β ve γ,*

$$\sum_{i} \alpha_{ij} p_j \leq \beta p_j \ \ (j = 0, 1, 2, ..)$$

$$\sum_{j} \alpha_{ij} p_j \leq \gamma p_i \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots)\ ,$$

olacak şekilde pozitif sayılar ise bu durumda $\|A\|^2 \leq \beta\gamma$ ile ℓ^2 üzerinde bir A operatörü ve (uygun bir ortonormal baza göre) (α_{ij}) matrisi vardır. ([33] , Rhaly, 1982)

Lemma 4.2 $0 \leq \alpha \leq 1$ *alalım ve* n *pozitif bir tam sayı olsun.*

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha^{i-j}/(i+1) & , i \geq j+n \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer yerde} \end{cases}$$

ile $B_\alpha(n) = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ *tanımlayalım.* $B_\alpha(n)$ *(*ℓ^2 *üzerinde) sınırlıdır ve* $\|B_\alpha(n)\| \leq 2\alpha^n$ *dir. (* [33] *, Rhaly, 1982)*

İspat. $\alpha > 0$ için, $p_i = \alpha^j/\sqrt{i+1}$ alarak Lemma 4.1 i uygulayalım. ($\alpha = 0$ durumu aşikardır.) $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ için,

$$\sum_j \beta_{ij} p_j = 0 = 0 p_i$$

elde edilir. $j \geq n$ için,

$$\begin{aligned} \sum_j \beta_{ij} p_j &= \sum_{j=0}^{i-n} \frac{\alpha^{i-j}}{i+1} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j+1}} \leq \frac{\alpha^i}{i+1} \int_0^{i-n+\iota} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\alpha^i}{i+1} 2\sqrt{i-n+1} \leq 2\frac{\alpha^i}{\sqrt{i+1}} = 2p_i. \end{aligned}$$

dir. Her j için,

$$\begin{aligned} \sum_i \beta_{ij} p_i &= \sum_{i=j+n}^{\infty} \frac{\alpha^{i-j}}{i+1} \frac{\alpha^i}{\sqrt{i+1}} = \sum_{i=j+n}^{\infty} \frac{\alpha^{2i-j}}{(i+1)^{3/2}} \\ &\leq \alpha^{j+2n} \int_{j+n}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2\alpha^{j+2n}}{\sqrt{j+n}} \leq 2\alpha^{2n} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j+1}} = 2\alpha^{2n} p_j \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\|B_\alpha(n)\|^2 \leq 2\left(2\alpha^{2n}\right) = (2\alpha^n)^2$$

dir. ■

Teorem 4.3 A_α, $|\alpha| \leq 1$ *için* $\|A_\alpha\| \leq 1 + 2|\alpha|$ *ile sınırlıdır. (* [33] *, Rhaly, 1982)*

İspat. $D \equiv A_{|\alpha|} - B_{|\alpha|}(1)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ diyagonali ile diyagonal operatör olduğu görülür. $\|A_\alpha\| \leq \|A_{|\alpha|}$ olduğundan, Lemma 4.2 den

$$\|A_\alpha\| \leq \|B_{|\alpha|}(1) + D\| \leq 2|\alpha| + 1$$

olur. ■

Önerme 4.1 $0 < |\alpha| \leq 1$ *için,* A_α, $A_{|\alpha|}$ *ya üniter olarak denktir. (* [33] *, Rhaly, 1982)*

İspat. $\{(\alpha/|\alpha|)^n\}_{n=0}^{\infty}$ diagonali ile D_α diyagonal operatörünü düşünelim. D_α üniterdir ve $A_{|\alpha|}D_\alpha = D_\alpha A_\alpha$ olduğunu görülür. ■

Bu sonuç bizim çalışmamızı, $0 \leq \alpha \leq 1$ için A_α ya indirger. A_0 diyagonal operatörü kompakttır ve Hermitian ve spektrumu

$$\sigma(A_0, \ell_2) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

dır. A_1 Cesàro operatörü ise [10] ve [28] de incelenmiştir. Şimdi kendimizi $0 < \alpha < 1$ ya kısıtlayalım.

Teorem 4.4 *$0 < \alpha < 1$, A_α nın nokta spektrumu $\left(\frac{1}{n}\right)$ kümesidir. $\frac{1}{n}$ özdeğerine karşılık gelen öz vektör, kapalı*

$$f(z) = z^{n-1}(1-\alpha z)^{-n}$$

dir. A_α nın özvektörleri H^2 yi gerer. ([33] , Rhaly, 1982)

İspat. Eğer $A_a f = g$, $f(0) = g(0)$ için, ve eğer $n \geq 1$ ise bu durumda $f(n) = (n+1)g(n) - \alpha n g(n-1)$ dir. Sonuç olarak, eğer $A_\alpha f = \gamma f$ ise, bu durumda $n \geq 1$ için

$$f(n) = \gamma[(n+1)f(n) - \alpha n f(n-1)]$$

veya

$$[\gamma(n+1) - 1] f(n) = \alpha n \gamma f(n-1)$$

dir. Eğer m, $f(m) \neq 0$ olacak şekilde en küçük tamsayı ise bu durumda $\gamma = 1/(m+1)$ dir; yani $0 < \gamma \leq 1$ dir. Böylece, $n < m$ için $f(n) = 0$ ve $n > m$ için

$$f(n) = \alpha n f(n-1)/(n-m)$$

dir. Bu

$$f(m+n) = \alpha^n \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m}{j}+1\right) f(m), \; n \geq 1 \text{ için} \tag{4.1}$$

olmasını sağlar. Buradan bütün özdeğerlerin basit olduğunu elde ederiz.

$$n \to \infty \text{ iken } \frac{|f(m+n+1)|^2}{|f(m+n)|^2} = \alpha^2\left(\frac{m}{n+1}+1\right)^2 \to \alpha^2$$

olduğundan, oran testinden $f \in \ell^2$ dir. Böylece, $1/(m+1)$ A için basit bir özdeğerdir; (4.1) e karşılık gelen özvektör

$$\begin{aligned} f(z) &= z^m + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \tfrac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!} z^{m+n} \\ &= z^m (1-\alpha z)^{-(m+1)} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $g \in H^2$ varsayalım ve g, A_α nın tüm özvektörlerine dik olsun. Bu durumda, her m için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right) \overline{\left(e^{i\theta}\right)^m \left(1-\alpha e^{i\theta}\right)^{-m-1}} d\theta = 0$$

dir, böylece $\psi_\alpha(z) = z(1-\alpha z)^{-1}$ olmak üzere her m için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} g\left(e^{i\theta}\right) \overline{\psi_\alpha \left(e^{i\theta}\right)^{m+1}} d\theta = 0$$

dir. ψ_α, $D \equiv \{z : |z| < 1\}$ de analitik ve $\overline{D}$ de tekdeğerli olduğundan, herhangi bir negatif olmayan k tamsayısı için, $p_j \circ \psi_a \to z^k$, $\overline{D}$ da düzgün olacak şekilde bir $\{p_j\}$ polinom dizisi vardır; sonuç olarak, $\{\psi_\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$, H^2 yi gerer [28] . Böylece $zg(z)$, H^2 de sabittir. Bundan dolayı $g = 0$ dır. Bu ispatı tamamlar. ∎

Devam etmeden önce, $\alpha < 1$ durumunda, A_a nın aşağıdaki kapalı forma sahip olduğu gösterelim:

$$(A_\alpha f)(z) = z^{-1}\int_0^z (1-\alpha s)^{-1} f(s)\, ds, \ |z| < 1$$

dir.

Teorem 4.5 *$0 < \alpha < 1$ için A_α^* nın nokta spektrumu, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ kümedir. $\frac{1}{n}$ basit özdeğerine karşılık gelen öz vektörler, kapalı*

$$f(z) = (\alpha - z)^{n-1}$$

formuna sahiptir. A_a^* ın özvektörleri H^2 uzayını gerer. ([33] , Rhaly, 1982)

İspat. Öncelikle

$$(A_a^* f)(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^{k-n} f(k)}{k+1}$$

olduğuna bakalım. Eğer $A_\alpha^* f = g$ ise, bu durumda

$$n = 0, 1, 2, \ldots \text{ için } f(n) = (n+1)\left[g(n) - \alpha g(n+1)\right]$$

dır. Sonuç olarak, eğer $A_{\alpha}^{*}f = \gamma f$ ise, bu durumda

$$f\left(n\right) = \gamma\left(n+1\right)\left[f\left(n\right) - \alpha f\left(n+1\right)\right]$$

dir. Bu durumda 0, A_{α}^{*} nin bir özdeğeri değildir (çünkü her n için $\gamma = 0$ ise, $f\left(n\right) = 0$ dır). Böylece

$$f\left(n+1\right) = \alpha^{-1}\left[1 - \frac{1}{\gamma\left(n+1\right)}\right] f\left(n\right)$$

dir. Bu eğer $n \geq 1$ ise bu durumda

$$f\left(n\right) = \alpha^{-n}\prod_{j=1}^{n}\left[1 - \frac{1}{j\gamma}\right] f\left(0\right) \tag{4.2}$$

olmasını sağlar. Buradan, bütün özdeğerler basittir. Kabul edelim ki, $\gamma \notin \left\{\frac{1}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ olsun. Bu durumda

$$n \to \infty \text{ için } \frac{\left|f\left(n+1\right)\right|^{2}}{\left|f\left(n\right)\right|^{2}} \to \alpha^{-2} > 1$$

dir, ve oran testinden $f \notin \ell^{2}$ dir. Şimdi m pozitif bir tam sayı, $\gamma = \frac{1}{m}$ alalım. (4.2) de $f\left(0\right) = \alpha^{m-1}$ alalım; bu durumda

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ k \end{pmatrix}\alpha^{m-1-k}\left(-z\right)^{k} = \left(\alpha - z\right)^{m-1}$$

olur, böylece $f \in H^{2}$ dir. Buradan $\frac{1}{m}$, A_{α}^{*} için bir özdeğerdir. $\frac{1}{n\iota}$ özdeğerine karşılık gelen öz vektör, $\left(m-1\right)$. dereceden bir polinomdur; bu A_{α}^{*} ın özvektörlerinin H^{2} uzayını gerdiğini gösterir. ■

Teorem 4.6 $0 < \alpha < 1$ *için,* A_{α} *kompakt ve*

$$\sigma\left(A_{\alpha}\right) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0\right\}$$

dir. Eğer $0 < \alpha < 1$ *ise* A_{a} *hyponormal değildir (ve böylece altnormal değildir.) (* [33] *, Rhaly, 1982)*

İspat. Lemma 4.2 den bir n pozitif tamsayısı için,

$$\left\|A_{a} - \left(A_{\alpha} - B_{\alpha}\left(n\right)\right)\right\| = \left\|B_{\alpha}\left(n\right)\right\| \leq 2\alpha^{n}$$

olduğunu görürüz. $n \to \infty$ için limit alırsak, A_α, $A_\alpha - B_\alpha(n)$ kompakt operatörlerin düzgün operatör yakınsak limitidir. Dolayısıyla A_α kompakttır. $\sigma(A_\alpha)$ kapalı ve Teorem 4.4 ile $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \sigma(A_\alpha)$ olduğundan $0 \in \sigma(A_\alpha)$ dır. A_α kompakt olduğundan, eğer $\gamma \neq 0$ ve $\gamma \in \sigma(A_\alpha)$ ise, bu durumda Teorem 1.21 dan $\gamma \in \sigma_p(A_\alpha)$ ve $\gamma \in \sigma_p(A_\alpha^*)$ dır. Böylece $\sigma(A_\alpha) = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ elde edilir. Eğer A_α hyponormal ise, bu durumda $\|A_\alpha\| = r(A_\alpha)$ dır (A_α nın spektral yarıçapı) ([25] , Halmos, 1967). Eğer $\alpha < 1$ ise bu durumda $r(A_\alpha) = 1$ dir. $\|A_\alpha\| \geq \|A_\alpha 1\| > 1$ olduğundan, eğer $0 < \alpha < 1$ ise bu durumda A_α nın hyponormal olamayacağı açıktır. ■

KAYNAKLAR

[1] **Amirov, R. Kh, Durna, N. and Yildirim, M.,** (2011) *Subdivisions of the spectra for Cesàro, Rhaly and weighted mean operators on c_0, c and ℓ_p.* IJST A3, 175-183.

[2] **Akhmedov, A. M., and Başar F.**, (2004) *On the fine spectrum of the Cesàro operator in c_0,* Math. J. Ibaraki Univ. 36, 25-32.

[3] **Akhmedov, A. M., and El-Shabrawy**, **S.R.,** (2015) *Spectra and fine spectra of lower triangular double-band matrices as operators on ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$.* Math. Slovaca 65 (5), 1137-1152.

[4] **Altay, B. and Karakuş, M.,** (2012) *On the spectrum and the fine spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces.* Thai J. Math. 3 (2), 153-162.

[5] **Appell, J., Pascale, E. D. and Vignoli, A.** (2004). *Nonlinear Spectral Theory.* New York, Walter de Gruyter Berlin.

[6] **Avinoy, P. and Tripathy, P.C.**, (2014) *The spectrum of the operator $D(r,0,0,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p.* Hacet. J. Math. Stat. 43 (3), 425-434.

[7] **Başar, F, Durna, N and Yildirim, M.,** (2010) *Subdivisions of the Spectra for Generalized Difference Operator Δ_v on the Sequence Space ℓ_1,* American Institute of Physics Conference Series (ICMS) 1309, 254-260.

[8] **Birbonshi, R., and Srivastava, P.D.**, (2016) *On some study of the Fine Spectra of n-th band triangular matrices.* Complex Anal. Oper. Theory, 1-15.

[9] **Brown. A.L, Page. A**. (1970) *Elements of functional analysis.* Van Nostrand Reinhold Comp. London.

[10] **Brown, A., P. R. Halmos and A. L. Shields**, (1965) *Cesàro operators,* Acta Sci. Math. (Szeged) 2f, 125-137.

[11] **Cardlidge, J.M.,** (1978) *Weighted Mean Matrices as Operators on ℓ_p, Ph.D.Thesis.* Indiana University.

[12] **Coşkun, C.**, (1992) *Ağırlıklı ortalama ve p-Cesàro Operatörlerinin Spektrumları,* Dok.Tezi. Ankara Üniversitesi.

[13] **Coşkun, C.**, (1997) *The spectra and fine spectra for $p-$Cesàro operators.* Turkish J. Math. 21 (2), 207–212.

[14] **Çakar, Ö.,** (1993) *Fonksiyonel Analize giriş.* Ankara Üniversitesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.

[15] **Das, R. and Tripathy, B.C.**, (2014) *Spectra of the Rhaly operator on the sequence space* $bv_0 \cap \ell_\infty$ Bol. Soc. Paran. Mat. 3 (2).1263-275.

[16] **Das, R.** (2016) *Spectrum and fine spectrum of the Zweier matrix over the sequence space cs.* Bol. Soc. Paran. Mat 35 (2), 209-221.

[17] **Durna, N,Yildirim, M.,** (2011) *Subdivision of the Spectra for Factorable Matrices on* c_0. Gazi University Journal of Science (2011) 24 (1), 45-49.

[18] **Durna N, Yildirim M.,** (2011) *Subdivision of the spectra for factorable matrices on c and* ℓ^p*,* Math. Commun. 16 (2), 519-530.

[19] **Durna, N., (2016)** *Subdivision of the spectra for the generalized upper triangular double-band matrices* Δ^{uv} *over the sequence spaces c and c.* ADYUSCI 6 (1), 31-43.

[20] **Durna N, Yildirim M and Çağrı Ü.,** (2016) *On The Fine Spectrum of Generalized Lower Triangular Double Band Matrices Over The Sequence Space,* Cumhuriyet Science J. 37 (3), 281-291.

[21] **Durna, N.,** (2017) *Subdivision of the Spectra for the Generalized Difference Operator* $\Delta_{(a,b)}$ *on the Sequence Space* ℓ_p*,* $(1 < p < \infty)$, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 13 (2), 359-364.

[22] **Goldberg, S.,** (1966) *Unbounded Linear Operators,* McGfraw Hill, Mew York.

[23] **González, M.,** (1985) *The fine spectrum of the Cesàro operator in* $\ell_p(1 < p < \infty)$. Arch. Math. (Basel) 44 (4), 355–358.

[24] **Fathi, J. and Lashkaripour R.,** (2012) *On the fine spectra of the generalized difference operator* Δ_{uv} *over the sequence space* c_0. J. Mahani Math. Research Center (JMMRC) 1 (1) 1-12.

[25] **Halmos, P. R. A,** (1967) *Hilbert space problem book,* Van Nostrand, Princeton, N. J.

[26] **Karakaya, V. and Erdoğan, E.,** (2016) *Notes on the spectral properties of the weighted mean difference operator* $G(u, v; \Delta)$ *over the sequence space* ℓ_1. Acta Math. Sci. 36 (2), 477-486.

[27] **Kreyszing, E.,** (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley & Sons Inc., New York Chichester Brisbane Toronto.

[28] **Kriete, T. L. and Trutt, D.,** (1971) *The Cesàro operator in* T^2 *is subnormal,* Amer. J. Math. 93, 215-225.

[29] **Lashkaripour, R., and J. Fathi.**, (2012) *On the fine spectra of the Zweier matrix as an operator over the weighted sequence space* $\ell_p(w)$. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 3 (1), 31-39.

[30] **Maddox, I.J.,** (1970) *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press.

[31] **Okutoyi, J.I**. (1985) *On the spectrum of the Cesàro operator.* Ph.D. Thesis. Birmingham University (1986)

[32] **Reade, J.B.,** *On the spectrum of the Cesàro operator.* Bull. London Math. Soc. 17 (3), 263–267.

[33] **Rhaly, JR H.C.,** (1982) *Discrete Generalized Cesàro Operators,* Proc. Amer. Math. Soc. 86 (3), 405-409.

[34] **Rhoades, B.E.**, (1983) *The fine spectra for weighted mean operators.* Pacific J. Math. 104 (1), 219–230.

[35] **Rhoades, B.E.,** (1989) *The fine spectra for weighted mean operators in* $B(\ell^p)$. Integral Equations Operator Theory 12 (1), 82–98.

[36] **Rhoades, B.E.,** (1990) *Lower bounds for some matrices, II. Linear And Multilinear Algebra* 26 (1-2),49-58.

[37] **Rhoades, B.E. and Yildirim, M.**, (2005) *Spectra and fine spectra for factorable matrices. Integr. Equ. Oper. Theory* , 53 (1), 127–144.

[38] **Rudin, W.,** (1976) *Functional Analysis,* McGraw-Hill, Inc. London.

[39]**Rudin, W.,** (1987) *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 3.th edition.

[40] **Taylor, R.B.**, (1980) *Introduction to functional Analysis.* John Wiley and Sons.

[41] **Tripathy, B.C., Paul, A.,** (2013) *The spectrum of the operator* $D(r,0,0,s)$ *over the sequence space* c_0 *and* c. Kyungpook Math. J. 53 (2), 247–256.

[42] **Yildirim. M., (1996)** *The spectrum and fine spectrum of the compact Rhaly operators,* Indian J. Pure Appl. Math. 27 (8), 779-784.

[43] **Yildirim. M.,** (2001) *The spectrum of Rhaly operators on* ℓ_p, Indian J. Pure Appl. Math. 32 (2), 191-198.

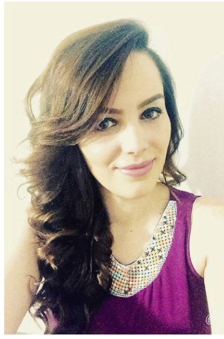
[44] **Yildirim. M.**, (2003) *The spectrum of Rhaly operators on* bv_0, Indian J. Pure Appl. Math. 34 (10), 1443-1452.

[45] **Yıldırım, M , Durna, N., (2017)** The spectrum and some subdivisions of the spectrum of discrete generalized Cesàro operators on ℓ_p $(1 < p < \infty)$, Journal of Inequalities and Applications (1), 193.

[46] **Wenger, R B.,** (1975) *The fine spectra of the Hölder summability operators.* Indian J. Pure Appl. Math. 6 (6), 695–712.

[47] **Wilansky, A.,** (1984) *Summability Through Functional Analysis,* North Holland.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Çağla DOĞAN
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 26.03.1991
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Seyrantepe mah. Ata sitesi2 kat:2 no:3 Sivas merkez
E-posta Adresi	cagglaa.dogan.5727@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Gültepe Anadolu Lisesi, 2009
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2015
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı 2018