



DÜĞÜM GRUPLARININ SU(2) TEMSİLLERİ

Doktora Tezi

Mehmet ERGEN

Eskişehir 2018

DÜĞÜM GRUPLARININ SU(2) TEMSİLLERİ

Mehmet ERGEN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Nisan 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mehmet ERGEN'in "Düğüm Gruplarının SU(2) Temsilleri" başlıklı tezi 12/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN
Üye	: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR
Üye	: Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Üye	: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK
Üye	: Doç. Dr. İlker AKÇA

Prof. Dr. Ersin YÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

DÜĞÜM GRUPLARININ $SU(2)$ TEMSİLLERİ

Mehmet ERGEN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Nisan 2018

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN

Bu tez tamsayı düğüm ve tamsayı link gruplarının $SU(2)$ temsilleri uzayı, G tamsayı düğüm ya da link grubu olmak üzere, $R(G) = \text{Hom}(G, SU(2))$ uzayının topolojik yapısı hakkındadır. Köşegen bir temsille eşlenik olan temsile indirgenebilir denir. Köşegen temsiller abelyen temsiller olarak da alınabilir ve bunun tersi de doğrudur. Bu çalışmanın amacı tamsayı düğüm ve tamsayı link gruplarının $SU(2)$ temsillerini $SO(3)$ denklik altında sınıflandırmaktır. Bilindiği üzere $SO(3) = S^3 / \{\pm I\}$ 'nin S^3 üzerine eşlenik ile verilen bir etkisi vardır. Bu etki $R(G)$ üzerine doğal bir şekilde genişler ve indirgenemez temsiller kümesi $R^*(G)$ 'ye kısıtlandığında serbest bir etki olduğundan $[R^*(G)] = R^*(G) / (SO(3)$ 'ün etkisi) tanımlanabilir. Çalışma boyunca $SU(2)$ ve S^3 izomorf Lie grupları olarak ve S^3 , $d(x, y) = \cos^{-1} \langle x, y \rangle \in [0, \pi]$ metriğiyle bir metrik uzay olarak göz önüne alınmıştır. Kompleks sayılarda olduğu gibi bir Q birim kuaterniyonu $Q = \cos \alpha + \sin \alpha q = e^{\alpha q}$ kutupsal formda kullanılmıştır. Wirtinger gösterimiyle verilen bir düğüm grubunun üreteçleri meridyenlerin homotopi sınıfları olduğundan grubun bir $SU(2)$ temsili, gruptaki karşılık gelen ilişkileri sağlayan kuaterniyonların bir kümesi olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bir temsil $SU(2)$ 'da düğüm grubunun üreteç sayısı olan n noktanın bir konfigürasyonu olarak göz önüne alınabilir. O halde $(SU(2))^n$ 'nin bir alt kümesi olarak; temsil uzayı, $(SU(2))^n$ 'den bir altuzay topolojisi devralır. Bu altküme kompakt-açık topoloji ile donatılabilir ancak denk olmalarına rağmen altuzay topolojisi bir şekilde daha kanoniktir. Anlaşılabilirlik bakımından öncelikle düğüm durumu daha sonra link durumu incelenmiştir. Tamsayı düğüm ve tamsayı link gruplarının çember temsillerinin sınıflandırılması daha önce çalışılmış ve bu tezde bu çalışma baz alınarak G grubunun bir çember temsili ile bir $SU(2)$ temsili ilişkilendirilmiştir. Bir tamsayı düğüm ya da link grubu G 'nin herhangi bir $SU(2)$ temsili bir çember temsili indirger ve tersine bir çember temsil bir $SU(2)$ temsile kaldırılabilir. Sonuç olarak G 'nin temsil uzayı $SO(3)$ denklik altında karakterize edilmiş olur.

Anahtar Sözcükler: Düğüm grubu, Link, Eşlenik, Alexander polinomu, Temsil

ABSTRACT

REPRESENTATIONS OF KNOT GROUPS IN $SU(2)$

Mehmet ERGEN

Anadolu University, Graduate School of Sciences, April 2018

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin AZCAN

This thesis is a study of the structure of the space $R(G) = \text{Hom}(G, SU(2))$ of representations of integer knot and integer link groups into $SU(2)$, where G is integer knot or integer link group. A representation is said to be a reducible representation if it is conjugate to a diagonal representation. The diagonal representations can be taken as the abelian representations and vice versa. Purpose of this work is to classify $SU(2)$ representations of integer knot and link groups up to $SO(3)$ equivalence. It is known that $SO(3) = S^3 / \{\pm I\}$ acts on S^3 by conjugation. This action naturally extends on $R(G)$ and since it is a free action when restricted to irreducible representations $R^*(G)$ one can define $[R^*(G)] = R^*(G) / \text{action by } SO(3)$. Throughout the thesis $SU(2)$ and S^3 are regarded as isomorphic Lie groups and S^3 is a metric space with the metric $d(x, y) = \cos^{-1} \langle x, y \rangle \in [0, \pi]$. As in the complex numbers a unit quaternion Q is used in polar form $Q = \cos \alpha + \sin \alpha q = e^{\alpha q}$. A $SU(2)$ representation of the group can be thought of as a set of quaternions which satisfy corresponding relations in the group since generators of a knot group with Wirtinger presentation are the homotopy classes of meridians. Hence a representation can be regarded as a configuration of n points, number of generators of the knot group, in $SU(2)$. So, being a subset of $(SU(2))^n$, the representation space inherits a (subspace) topology from $(SU(2))^n$. The compact-open topology can be assigned to this subset but subspace topology somehow more canonical although they are equivalent. For clarity it was discussed the knot case first and link is latter. The circle representations of integer knot and link groups have been classified before and taking this classification as a fundamental idea any $SU(2)$ representation has been identified with a circle representation. Any $SU(2)$ representation of integer knot or link group G induces a circle representation of G and conversely a circle representation can be lifted to an $SU(2)$ representation. As a result the topology of representation space of G modulo $SO(3)$ have been characterized.

Keywords: Knot group, Link, Conjugate, Alexander polynomial, Representation

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya ıkmasındaki uzun srete sabrından ve birikimlerini paylaŐmasından dolayı danıŐmanım Prof. Dr. Hüseyin AZCAN'a teŐekkr ederim. Her an desteğini grdĞm ve hissettiğim eŐim Sinem'e, mutluluk kaynağım oğullarım Bora'ya ve Ufuk'a çok ama çok teşekkür ederim.

Mehmet ERGEN



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

12/04/2018

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mehmet ERGEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1 GİRİŞ	1
2 S^3 VE KUATERNİYONLAR	2
2.1 Kuaterniyonlar	2
2.2 Kuaterniyon Çarpımının Geometrisi	6
2.3 S^3 'te Eşlenik Sınıfları	9
2.4 $SO(3)$ ve S^3 Üzerine Etkisi	16
3 DÜĞÜMLER VE DÜĞÜM GRUPLARI	19
3.1 Düğüm, Düğümün Regüler İzdüşümü, Düğüm Grubu ve Wirtinger Gösterimi	19
3.2 Bir Düğümün Alexander Matrisi ve Polinomu	22
3.3 Tamsayı Düğümleri ve Grupları	28
4 TAMSAYI LİNK VE DÜĞÜM GRUPLARININ $SU(2)$ TEMSİLLERİ	29
4.1 Bir Grubun $SU(2)$ Temsili	29
4.2 Düğüm Gruplarının Çember Temsili	31
4.3 Tamsayı Düğüm Gruplarının $SU(2)$ Temsilleri Uzayı	40
4.4 Tamsayı Link Gruplarının $SU(2)$ Temsilleri Uzayı	47
5 SONUÇ	59
KAYNAKÇA	62
ÖZGEÇMİŞ	63

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	i, j, k kuaterniyonlarının çarpımı	3
Şekil 2.2	$e^{-\gamma q} e^{\alpha y} e^{\gamma q} = e^{\alpha x}$ denkleminin çözümü	11
Şekil 2.3	QXQ^{-1} ve $Q^{-1}XQ$ çarpımlarının geometrik yorumu	15
Şekil 3.1	Üç yapraklı yonca ve sekiz-şekli düğümü	19
Şekil 3.2	Alttan geçiş tipleri	20
Şekil 3.3	Yönlendirilmiş üç yapraklı yonca düğümü	21
Şekil 3.4	Yönlendirilmiş sekiz-şekli düğümü	21
Şekil 3.5	Tamsayı düğümünün izdüşümü	28
Şekil 4.1	Alttan geçiş tipleri ve karşılık gelen üreteç ilişkileri	31
Şekil 4.2	$S^2_{\pi/2}$ küresinde $x_{i+1} = 2 < x_i, x_k > x_k - x_i$ ilişkisi	33
Şekil 4.3	$x_{i+1} = 2 < x_i, x_k > x_k - x_i$ bağıntısı	33
Şekil 4.4	$x_{i+1} = x_k^e x_i x_k^{-e}$ ilişkisinin açı yorumu	34
Şekil 4.5	Üç yapraklı yonca düğümünün grubunun çember temsili	36
Şekil 4.6	Yönlendirilmiş 5 alttan geçişli bir düğüm	36
Şekil 4.7	5_1 düğümünün çember temsilleri	38
Şekil 4.8	Çember temsillerinin sayısı	40
Şekil 4.9	Bir tamsayı düğümü olarak üç yapraklı yonca düğümü	41
Şekil 4.10	x_1, x_2 ve x_3 'ün küre üzerindeki yerleşimi	41
Şekil 4.11	$x_1 x_2 x_3$ eşkenar üçgeni	42
Şekil 4.12	Trefoilin çember temsilinin elde edilişi	42
Şekil 4.13	Trefoilin çember temsili	43
Şekil 4.14	Trefoilin $SU(2)$ temsili	44
Şekil 4.15	K_n tamsayı düğümünün yönlendirilmiş diyagramı	44
Şekil 4.16	G_n grubunun üreteçlerinin görüntüsünün küreye yerleşimi	45
Şekil 4.17	$x_1 x_2 \dots x_n$ çokgeninin orta dikme doğruları bir noktada kesişir	45
Şekil 4.18	$\xi y_i y_k$ üçgeni	46
Şekil 4.19	$[\frac{n}{2}]$ sayıda açık aralığın ayrık birleşimi	46
Şekil 4.20	K_n linkinin yönlendirilmiş diyagramı	47

Şekil 4.21	K_6 linkinin diyagramı	48
Şekil 4.22	x_1, y_1, y_2 'nin küreye yerleşimi	48
Şekil 4.23	G_6 'nın bir $SU(2)$ temsili	49
Şekil 4.24	$x_1 x_2 x_3$ ve $y_1 y_2 y_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri	49
Şekil 4.25	G_6 'nın çember temsilinin elde edilişi	50
Şekil 4.26	G_6 'nın çember temsilleri	52
Şekil 4.27	$s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3$ çokgeni	53
Şekil 4.28	G_6 'nın açık diske homeomorf olan temsil uzayı	53
Şekil 4.29	$x_1 x_2 x_3$ eşkenar üçgeni	54
Şekil 4.30	x_i ve y_i noktalarının $S_{\pi/2}^2$ 'deki konfigürasyonu	54
Şekil 4.31	G_n grubunun $SU(2)$ temsillerinin elde edilişi	55
Şekil 4.32	G_n 'nin açık diske homeomorf olan temsil uzayı	55
Şekil 4.33	G_8 'in çember temsilleri	56
Şekil 4.34	(devam) G_{10} 'un çember temsilleri	58

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{Z}	: Tamsayılar
\mathbb{R}	: Reel sayılar
\mathbb{H}	: Kuaterniyonlar
$\text{Re}(Q)$: Q kuaterniyonunun reel kısmı
$\text{Im}(Q)$: Q kuaterniyonunun imajiner kısmı
\overline{Q}	: Q kuaterniyonunun eşleniği
$ Q $: Q kuaterniyonunun normu
$Z(G)$: G grubunun merkezi
S^3	: 3 boyutlu küre
$\langle X, Y \rangle$: X ve Y 'nin iç çarpımı
$d(x, y)$: x ile y arasındaki uzaklık
$[X]$: X 'in denklik sınıfı
\widehat{xy}	: x ve y 'yi birleştiren küresel doğru parçası
\overrightarrow{AB}	: A ve B noktasından geçen küresel doğru
$\sphericalangle xyz$: xyz küresel üçgeninin y köşesinin açısı
$\Delta(t)$: Alexander polinomu

1. GİRİŞ

Düğümelerin matematiksel açıdan çalışılması C. F. Gauss ile başlamıştır. Onun elektrodinamik üzerine araştırması (1833), düğüm teorisinde ve topolojinin diğer dallarında temel bir araç olan “geçişme sayısı”nın (“linking number”) analitik bir formülasyonunu içeriyordu.

Düğüm tiplerinin sınıflandırılmasına yönelik ilk çalışma 50 yıl kadar sonra bir İngiliz grup tarafından yapıldı. Tait, Kirkman ve Little’ın çalışması “on katlı düğümlenme” (“tenfold knottiness”) bakımından düğümelerin çok güzel diyagramlarda listelenmesi ile sonuçlanmıştır. Bu grubun başlangıçtaki yöntemleri kombinatoryal ve deneyseldi. Düğümelerin ve linklerin sahip olduğu özelliklerin anlaşılması, H. Poincaré’nin topoloji ve cebirsel topoloji alanında yaptığı devrimsel gelişmelerle hız kazanmıştır. Düğüm teorisi, cebirsel topoloji, grup teorisi ve diğer pek çok alanda önemli fikirlerin gelişmesine neden olmuştur.

Klasik düğüm teorisinin gelişmesine M. Dehn, J. W. Alexander, W. Burau, O. Schreier, E. Artin, K. Reidemeister, E. R. Van Kampen, H. Seifert, J. H. C. Whitehead, H. Tietze, R. H. Fox katkıda bulunmuştur. \mathbb{R}^3 ’te çokgensel bir eğri olarak göz önüne alınan düğüm kavramı, S^1 ’in \mathbb{R}^3 ’e (hatta S^n ’nin S^m ’ye) gömülmelerinin denklik sınıfları olan düğüm kavramına modernize edilmiştir. Düğüm teorisi surgery ve singularity theory kullanılarak yüksek boyutlarda da çalışılmaktadır [5].

Bugün düğüm teorisi matematikçilerin yanı sıra biyologlar, kimyagerler ve fizikçiler tarafından da çalışılmaktadır [1].

2. S^3 VE KUATERNİYONLAR

2.1. Kuaterniyonlar

Düzlemin kompleks sayılar yardımıyla bir cebirsel yapıya (cesime) dönüştürülmesinde olduğu gibi dört boyutlu uzay da kuaterniyonlar ya da süper kompleks sayılar yardımıyla bir cebirsel yapıya (bölümlü halkaya) dönüştürülür. \mathbb{R}^4 'ün bir elemanı

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

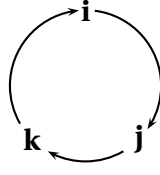
sıralı dördlüsü olarak göz önüne alınıp bu sıralı dördlü $x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ kuaterniyonu ile ilişkilendirilir. Bilindiği gibi

$$\mathbb{H} = \{x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

şeklinde tanımlanan kuaterniyonlar bir bölümlü halkadır. Burada $(\mathbb{H}, +)$ bir değişmeli gruptur ve yukarıdaki kuralla verilen ve dağılmalı olan çarpmaya göre de \mathbb{H} kümesi değişmeli olmayan bir gruptur.

- $ijk = -1$ denkleminin her iki tarafı k ile çarpılırsa $ijk^2 = -k$ ve $k^2 = -1$ olduğundan $-ij = -k$, buradan da $ij = k$ sonucuna ulaşılır.
- $ijk = -1$ denkleminin her iki tarafı i ile çarpılırsa $i^2jk = -i$ ve $i^2 = -1$ olduğundan $-jk = -i$, buradan da $jk = i$ sonucuna ulaşılır.
- $ijk = -1$ denkleminin her iki tarafı soldan ji ile ve sağdan i ile çarpılırsa $ji^2jki = -ji^2$ ve $i^2 = -1, j^2 = -1$ olduğundan $ki = j$ sonucuna ulaşılır.
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ olduğundan $i^{-1} = -i, j^{-1} = -j$ ve $k^{-1} = -k$. Buradan $ij = k$ ise $(ij)^{-1} = j^{-1}i^{-1} = k^{-1}$ ve böylece $(-j)(-i) = -k$ yani $ji = -k$ sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $kj = -i$ ve $ik = -j$ elde edilir.

Şekil (2.1)'de i, j, k kuaterniyonlarının çarpımları şöyle de özetlenebilir; çember üzerindeki herhangi iki elemanın çarpımı eğer ok yönünde yapılıyorsa bu çarpım üçüncü elemanın + işaretlisine, diğer durumda üçüncü elemanın - (eksi) işaretlisine eşittir. \mathbb{H}



Şekil 2.1: i, j, k kuaterniyonlarının çarpımı

kümesi, kompleks sayılar kullanılarak

$$\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}, j^2 = -1, jw = \bar{w}j\}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Bir $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ kuaterniyonunun **eşleniği**

$$\bar{x} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$$

ve **normu**

$$|x| = \sqrt{x\bar{x}}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $\sqrt{x\bar{x}}$ negatif olmayan bir reel sayıdır;

$$\begin{aligned} x\bar{x} &= (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)(x_1 - x_2i - x_3j - x_4k) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + i(-x_1x_2 + x_2x_1 - x_3x_4 + x_4x_3) + j(-x_1x_3 + x_3x_1 + x_2x_4 - x_4x_2) \\ &\quad + k(-x_1x_4 + x_4x_1 - x_2x_3 + x_3x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Normu 1 olan kuaterniyona **birim** kuaterniyon denir. Yukarıda tanımlanan norm \mathbb{R}^4 'te bilinen norm ile çakıştığından birim kuaterniyonlar kümesi 3-boyutlu küredir, yani

$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}.$$

Bir $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ kuaterniyonundaki x_1 'e x 'in **reel kısmı** denir ve $\text{Re}(x)$ ile gösterilir. Reel kısmı sıfır olan kuaterniyona **pür-imaginer** kuaterniyon denir. Ayrıca bir x kuaterniyonunun imajiner kısmı $x_2i + x_3j + x_4k$ kuaterniyonudur ve $\text{Im}(x)$ ile gösterilir. Bir u pür-imaginer kuaterniyonunun eşleniği $\bar{u} = -u$ ve normunun karesi

$|u|^2 = u\bar{u} = u(-u) = -u^2$ 'dir. Eğer u pür-imaginer kuaterniyonu birim kuaterniyon ise $u^2 = -1$ sonucuna ulaşılır. Bunun tersi de doğrudur, yani $u^2 = -1$ ve $|u| = 1$ ise u bir pür-imaginer kuaterniyondur. $u = u_1 + u_2i + u_3j + u_4k$ olmak üzere $u^2 = -1 \Leftrightarrow u^{-1} = -u$ ve $|u|^2 = u\bar{u} = 1$ ise $\bar{u} = u^{-1}$ olduğundan $\bar{u} = -u$ elde edilir ve bu da

$$u_1 - u_2i - u_3j - u_4k = -u_1 - u_2i - u_3j - u_4k$$

denklemini ve $u_1 = 0$ sonucunu verir. Böylece aşağıdaki önerme ispatlanmış olur.

Önerme 2.1.

Bir birim kuaterniyonun pür-imaginer olması için gerekli ve yeterli koşul karesinin -1 olmasıdır.

Tıpkı kompleks sayılarda olduğu gibi kuaterniyonların da bir kutupsal formundan bahsetmek mümkündür. Hatırlanacak olursa $z = x + yi \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayısı

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} i \right)$$

şeklinde yazılabilir. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1$ olduğundan uygun bir $\alpha \in [0, 2\pi)$ için

$$\cos \alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \quad \text{ve} \quad \sin \alpha = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2$$

şeklinde seçilebilir. (Buradaki seçim keyfidir fakat geometrik nedenlerden dolayı yukarıdaki gibi seçilir, $\cos \alpha = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2$ ve $\sin \alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2$ seçimi de yanlış olmaz.) Bu durumda z kompleks sayısı

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan kuaterniyonlara bir anoloji yapılarak bir kuaterniyonun da kutupsal formundan bahsedilebilir. Bir $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ birim kuaterniyonu

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \\ &= x_1 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} i + \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} j + \frac{x_4}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} k \right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$x_1^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \right)^2 = 1$$

olduğundan uygun bir $\alpha \in [0, 2\pi)$ için $x_1 = \cos \alpha$, $\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sin \alpha$ yazılabilir. Bu durumda q bir pür-imaginer kuaterniyon olmak üzere Q birim kuaterniyonu

$$Q = \cos \alpha + \sin \alpha q$$

formundadır ve tamamen kompleks sayılardan esinlenerek $Q = e^{\alpha q}$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$Q = e^{\alpha q} = \cos \alpha + \sin \alpha q$$

gösterimiyle iki kuaterniyonun çarpımı daha kolay bir şekilde yapılır. Örneğin,

$$Q_1 = e^{\alpha q_1} \quad \text{ve} \quad Q_2 = e^{\beta q_2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (\cos \alpha + \sin \alpha q_1)(\cos \beta + \sin \beta q_2) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta q_2 + \sin \alpha \cos \beta q_1 + \sin \alpha \sin \beta q_1 \otimes q_2, \end{aligned}$$

burada $q_1 \otimes q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \times q_2$ ve $q_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ ile $q_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ pür-imaginer kuaterniyonları sırasıyla (x_1, y_1, z_1) ve (x_2, y_2, z_2) sıralı üçlülükleri ile eşlenip bilinen iç çarpımla vektörel çarpım kullanılmıştır.

Kuaterniyon çarpımı açıkça değişmeli değildir ve bu altbölüm iki birim kuaterniyonun hangi koşullarda değişmeli olduğu ile sonlandırılacaktır.

$Q_1 = \cos \alpha + \sin \alpha q_1$ ve $Q_2 = \cos \beta + \sin \beta q_2$ iki birim kuaterniyon olsun ve

$$Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$$

olsun. Bu durumda

$$Q_1 Q_2 = \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta q_2 + \sin \alpha \cos \beta q_1 + \sin \alpha \sin \beta q_1 \otimes q_2$$

$$Q_2 Q_1 = \cos \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha q_1 + \sin \beta \cos \alpha q_2 + \sin \beta \sin \alpha q_2 \otimes q_1$$

denklemlerinden

$$Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 \Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta q_1 \otimes q_2 = \sin \beta \sin \alpha q_2 \otimes q_1$$

elde edilir. Vektörel çarpımın $q_1 \times q_2 = -q_2 \times q_1$ özelliği hatırlanacak olursa

$$Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 \Leftrightarrow 2 \sin \alpha \sin \beta q_1 \times q_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi \text{ veya } \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya } q_1 = \pm q_2$$

elde edilir. Özetle bir q pür-imaginer birim kuaterniyonu için

$$S_q^1 = \{e^{\alpha q} \mid \alpha \in [0, 2\pi)\} \quad (2.1)$$

kümesindeki kuaterniyonlar değişmelidir hatta bu küme bilinen birim çembere homeomorftur ve **Cartan altgrubu** olarak adlandırılır. Sonuç olarak iki birim kuaterniyon çarpımına göre değişmeli ise ya bu ikisinden biri ± 1 'dir ya da her ikisi de aynı Cartan alt grubunun elemanıdır. Ayrıca birim kuaterniyonların çarpım grubunun merkezi de $Z(S^3) = \pm 1$ olarak belirlidir.

2.2. Kuaterniyon Çarpımının Geometrisi

Ötelemeler haricindeki \mathbb{R}^3 'ün izometrisi (yani orjini sabit bırakan izometrisi) dönmelerdir. Bilindiği üzere \mathbb{R}^n 'nin bir izometrisi bir lineer dönüşümdür. \mathbb{R}^3 'ün dönme izometrisinin, dolayısıyla lineer dönüşümünün matrisi A olsun. A , 3×3 tipinde bir matris olduğundan karakteristik polinomu kübiktir ve kübik polinomun en az bir gerçel kökü vardır. Bu gerçel kök λ olmak üzere ve matrisi A ile verilen lineer dönüşüm için v vektörü λ 'ya karşılık gelen özvektör olmak üzere $A(v) = \lambda v$ 'dir. Dolayısıyla A , v 'nin belirttiği doğruyu küme olarak sabit bırakan ve bunun ortogonal düzleminde verilen bir dönmedir.

\mathbb{R} 'de tüm izometrisi ya bir öteleme ya da bir noktaya göre yansımadır. \mathbb{R}^2 'de ise izometrisi ya öteleme ya bir nokta etrafında dönme ya da bir doğruda yansımadır. Benzer izometrisi aslında \mathbb{R}^3 'te de vardır, düzlemden farklı olarak \mathbb{R}^3 'te bir eksen

etrafında dönmeler vardır. Bununla kastedilen, $v \in \mathbb{R}^3$ vektörünün ortogonal düzlemindeki dönmeler ve dönmenin her paralel doğruya aynı şekilde genişlemeleridir. \mathbb{R}^4 'te durum biraz farklıdır, orda yeni bir izometri sınıfı gelir, bunlar da **burgu** hareketidir. Bir $Q = e^{\alpha q} \in S^3$ için

$$R_Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad R_Q(X) = QX$$

dönüşümü açıkça lineerdir. u vektörü q vektörüne dik bir birim vektör ve

$$v = qu = -\langle q, u \rangle + q \times u = q \times u$$

vektörü olmak üzere R_Q dönüşümü altında $\{1, q, u, v\}$ tabanının görüntüsü sırasıyla

$$R_Q(1) = Q \cdot 1 = \cos \alpha \cdot 1 + \sin \alpha \cdot q$$

$$R_Q(q) = Qq = \cos \alpha q + \sin \alpha q^2 = -\sin \alpha \cdot 1 + \cos \alpha \cdot q$$

$$R_Q(u) = Qu = \cos \alpha u + \sin \alpha qu = \cos \alpha \cdot u + \sin \alpha \cdot v$$

$$R_Q(v) = Qv = \cos \alpha v + \sin \alpha qv = \cos \alpha \cdot v - \sin \alpha \cdot u = -\sin \alpha \cdot u + \cos \alpha \cdot v$$

şeklindedir. Bu durumda R_Q dönüşümünün belirtilen tabana göre matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

matrisidir. Buradan açıkça görülür ki bu dönüşüm $\{1, q\}$ düzleminde α -lık dönme ile $\{u, v\}$ düzleminde α -lık dönme olan iki dönmenin bileşkesidir. Benzer bir şekilde

$$L_Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad L_Q(X) = XQ$$

dönüşümü de açıkça bir lineer dönüşümdür ve L_Q dönüşümü altında $\{1, q, u, v\}$ ta-

banının görüntüsü sırasıyla

$$L_Q(1) = 1 \cdot Q = \cos \alpha \cdot 1 + \sin \alpha \cdot q$$

$$L_Q(q) = qQ = \cos \alpha q + \sin \alpha q^2 = -\sin \alpha \cdot 1 + \cos \alpha \cdot q$$

$$L_Q(u) = uQ = \cos \alpha u + \sin \alpha uq = \cos \alpha \cdot u - \sin \alpha \cdot v$$

$$L_Q(v) = vQ = \cos \alpha v + \sin \alpha vq = \cos \alpha \cdot v + \sin \alpha \cdot u = \sin \alpha \cdot u + \cos \alpha \cdot v$$

olduğundan L_Q dönüşümünün matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

matrisidir. L_Q dönüşümünün matrisinden görüldüğü üzere L_Q dönüşümü $\{1, q\}$ düzleminde α -lık dönme ile $\{u, v\}$ düzleminde $(-\alpha)$ -lık dönmenin bileşkesidir.

Şimdi bu iki dönüşümden hareketle $R_{Q^{-1}} \circ L_Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü göz önüne alındığında

$$R_{Q^{-1}} \circ L_Q(X) = R_Q^{-1}(XQ) = Q^{-1}XQ$$

dönüşümüne ulaşılır. $Q = e^{\alpha q}$ ise $Q^{-1} = e^{-\alpha q}$ olduğundan $R_{Q^{-1}}$ dönüşümünün matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ 0 & 0 & \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda $R_{Q^{-1}} \circ L_Q$ dönüşümünün matrisi ise

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\{1, q\}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki herhangi bir $a \cdot 1 + b \cdot q$ vektörü ile $\{u, v\}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki herhangi bir $c \cdot u + d \cdot v$ vektörü için

$$\langle a \cdot 1 + b \cdot q, c \cdot u + d \cdot v \rangle = ac \langle 1, u \rangle + ad \langle 1, v \rangle + bc \langle q, u \rangle + bd \langle q, v \rangle = 0$$

olduğundan bu düzlemler birbirine diktir, yani $\Pi_{\{1, q\}} \perp \Pi_{\{u, v\}}$.

Ayrıca (yukarıdaki matristen de görüldüğü gibi) $\Pi_{\{1, q\}}$ düzlemi sabit kalırken $\Pi_{\{u, v\}}$ düzlemi 2α kadar döner.

R_Q ve L_Q dönüşümleri q eksenini boyunca burğu hareketleridir ve bu dönüşümler birer izometridir. \mathbb{R}^4 'ün sıralı dördlülere ile eşlenen X ve Y kuaterniyonları için X ve Y 'nin iç-çarpımı $\langle X, Y \rangle = \text{Re}(X\bar{Y})$ ile hesaplanabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle R_Q(X), R_Q(Y) \rangle &= \langle QX, QY \rangle = \text{Re}(QX\overline{QY}) = \text{Re}(QX\bar{Y}\bar{Q}) \\ &= \text{Re}(\bar{Y}\bar{Q}QX) = \text{Re}(X\bar{Y}) \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Benzer şekilde L_Q dönüşümü de \mathbb{R}^4 'ün bilinen iç çarpımını korur.

$R_{Q^{-1}} \circ L_Q$ dönüşümü S^3 'e kısıtlandığında S^3 'ün kendi üzerine bir etkisini verir. Açıkça, $R_{Q^{-1}} \circ L_Q(X) = Q^{-1}XQ$ dönüşümü q 'nin dik olduğu düzlemde dönmeye karşılık gelir. Benzer şekilde $R_Q \circ L_{Q^{-1}}(X) = QXQ^{-1}$ dönüşümü de q 'nin dik olduğu düzlemde dönmeye karşılık gelir. Bu dönüşümler kullanılarak S^3 'ün eşlenik sınıfları belirlenebilir.

2.3. S^3 'te Eşlenik Sınıfları

Bir grupta eşlenik olmak önemli bir kavramdır. G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. Eğer $x = g^{-1}yg$ olacak şekilde $g \in G$ varsa x ve y **eşleniktir** denir. Bir grubun elemanları arasında tanımlanan eşlenik olma bağıntısı açıkça bir denklik bağıntısıdır. Birim

kuaterniyonlar olarak göz önüne alınan S^3 , kuaterniyon çarpımına göre bir gruptur. Çalışmanın bu kısmında S^3 grubundaki eşlenik sınıfları incelenecektir. Bunun için de aşağıdaki önermeyle verilen eşlenik olmanın geometrik özelliğinden faydalanılmıştır. Bir $Q = e^{\alpha q} = \cos \alpha + \sin \alpha q \in S^3$ kuaterniyonunda q 'ya Q 'nun vektörü ve α 'ya Q 'nun açısı denir.

Lemma 2.2.

$Q = e^{\alpha q} \in S^3$ ve x bir pür-imaginer kuaterniyon olmak üzere $Q^{-1}xQ$ çarpımı (ya da QxQ^{-1} çarpımı) geometrik olarak x vektörünü Q 'nun vektörü q etrafında Q 'nun açısının iki katı kadar, yani 2α kadar negatif yönde (ya da pozitif yönde) döndürmeye karşılık gelir.

İspat.

$\epsilon = 1$ ya da $\epsilon = -1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}(Q^\epsilon x Q^{-\epsilon}) = \operatorname{Re}(x Q^{-\epsilon} Q^\epsilon) = \operatorname{Re}(x) = 0$$

olduğundan $Q^\epsilon x Q^{-\epsilon}$ bir pür imajiner kuaterniyondur. Bu durumda $T_\epsilon(x) = Q^\epsilon x Q^{-\epsilon}$ fonksiyonları $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ birer fonksiyon olarak göz önüne alınabilir. x, y pür-imaginer kuaterniyonlarının \mathbb{R}^3 'teki bilinen iç çarpımı $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x\bar{y})$ ile belirlidir. Bu durumda $T_\epsilon(x)$ fonksiyonları açıkça lineerdir ve bilinen iç çarpımı korurlar, dolayısıyla birer izometridir.

$\{q, \frac{q \times x}{|q \times x|}, q \times \frac{q \times x}{|q \times x|}\}$ vektör kümesi ortonormal bir vektör kümesi olduğundan \mathbb{R}^3 için bir tabandır ve

$$T_\epsilon(x) = \cos 2\alpha x + 2 \sin^2 \alpha \langle x, q \rangle q + \epsilon \sin 2\alpha q \times x$$

izometrilerinin bu tabana göre matrisleri ise

$$\begin{aligned} T_\epsilon(q) &= q \\ T_\epsilon\left(\frac{q \times x}{|q \times x|}\right) &= \cos 2\alpha \frac{q \times x}{|q \times x|} + \epsilon \sin 2\alpha q \times \frac{q \times x}{|q \times x|} \\ T_\epsilon\left(q \times \frac{q \times x}{|q \times x|}\right) &= \cos 2\alpha q \times \frac{q \times x}{|q \times x|} - \epsilon \sin 2\alpha \frac{q \times x}{|q \times x|} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\epsilon \sin 2\alpha \\ 0 & \epsilon \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

şeklindedir. □

Lemma 2.3.

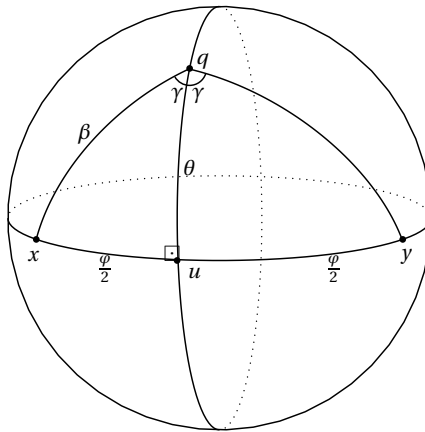
$X, Y \in S^3$ birim kuaterniyonların eşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul $\text{Re}(X) = \text{Re}(Y)$ olmasıdır.

İspat.

$X, Y \in S^3$ kuaterniyonları eşlenik ise $X = Q^{-1}YQ$ olacak şekilde $Q \in S^3$ vardır. Bu durumda

$$\text{Re}(X) = \text{Re}(Q^{-1}YQ) = \text{Re}(YQQ^{-1}) = \text{Re}(Y).$$

Tersine $\text{Re}(X) = \text{Re}(Y)$ olsun. Bu durumda $X = e^{\alpha x}$, $Y = e^{\alpha y}$ olmak üzere x ve y pür-imaginer birim kuaterniyonlarının $S^2_{\pi/2}$ küresinde Şekil (2.2)'deki gibi yerleştiği göz önüne alınabilir. \widehat{xy} doğru parçasının orta dikmesi üzerinden seçilen herhangi bir q noktası ve $2\gamma = \angle xqy$ açısı için $Q = e^{\gamma q} \in S^3$ kuaterniyonu $X = e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q}$ denkleminin bir çözümüdür, çünkü $e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q}$ çarpımının vektörü y vektörünün 2γ kadar döndürmesiyle elde edilen vektördür. Burada bu iddianın ayrıntılı ispatı verilmiştir.



Şekil 2.2: $e^{-\gamma q} e^{\alpha y} e^{\gamma q} = e^{\alpha x}$ denkleminin çözümü

$\langle x, y \rangle = \cos \varphi$ olmak üzere \widehat{xy} doğru parçasının orta noktası u ,

$$l(t) = \frac{\cos tx + \sin ty}{\|\cos tx + \sin ty\|}$$

doğrusu üzerinde $u = l(\frac{\pi}{4})$ olarak belirlidir, bu durumda

$$u = \frac{x + y}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$$

$\triangle x\hat{q}y$ küresel üçgeninde kosinüs formülünden

$$\cos 2\gamma = \frac{\cos \varphi - \cos \beta \cos \beta}{\sin \beta \sin \beta} = \frac{\cos \varphi - \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta}$$

$\triangle x\hat{u}q$ dik üçgeninde kosinüs formülünden

$$\cos \pi/2 = \frac{\cos \beta - \cos \frac{\varphi}{2} \cos \theta}{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \theta} \Rightarrow \cos \beta = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \theta$$

$\triangle x\hat{q}u$ üçgeninde kosinüs formülünden

$$\cos \gamma = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \beta \cos \theta}{\sin \beta \sin \theta}$$

Son olarak $\triangle x\hat{u}q$ dik üçgeninde sinüs teoreminden

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q} &= (\cos \gamma - \sin \gamma q)(\cos \alpha + \sin \alpha y)(\cos \gamma + \sin \gamma q) \\ &= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\cos^2 \gamma y + \cos \gamma \sin \gamma (y \otimes q - q \otimes y) - \sin^2 \gamma (q \otimes y) \otimes q \right) \end{aligned}$$

$$y \otimes q - q \otimes y = -\langle y, q \rangle + y \times q + \langle q, y \rangle - q \times y = 2y \times q$$

$$(q \otimes y) \otimes q = (-\langle q, y \rangle + q \times y) \otimes q = y - 2\langle y, q \rangle q$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q} &= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\cos^2 \gamma y + \sin 2\gamma y \times q - \sin^2 \gamma (y - 2 \langle y, q \rangle) \right) \\ &= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\cos 2\gamma y + 2 \sin^2 \gamma \langle y, q \rangle + \sin 2\gamma y \times q \right), \end{aligned}$$

$e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q}$ 'in eşitini hesaplamaya devam edebilmek için bilinmeyenlerin bilinenler cinsinden hesaplanması gerekir.

\vec{xy} doğrusunun orta dikme doğrusu parametrik olarak $l(t) = \cos t u + \sin t \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$ şeklinde ifade edilir, $q = l(\theta)$ olsun. Bu durumda

$$q = \cos \theta u + \sin \theta \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$$

olmak üzere q 'nin x, y, φ cinsinden eşiti aşağıdaki gibidir:

$$q = \cos \theta \frac{x + y}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} + \sin \theta \frac{x \times y}{\|x\| \|y\| \sin \varphi} = \frac{\cos \theta (x + y)}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin \theta x \times y}{\sin \varphi}.$$

$\triangle q u y$ üçgeninde kosinüs formülünden

$$\langle y, q \rangle = \cos \theta \cos \frac{\varphi}{2}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$y \times q = \frac{\cos \theta (y \times x)}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin \theta y \times (x \times y)}{\sin \varphi} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} x - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \cos \varphi y - \frac{\cos \theta}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} x \times y.$$

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q} &= (\cos \gamma - \sin \gamma q)(\cos \alpha + \sin \alpha y)(\cos \gamma + \sin \gamma q) \\
&= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\cos 2\gamma y + 2 \sin^2 \gamma < y, q > q + \sin 2\gamma y \times q \right) \\
&= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\cos 2\gamma y + 2 \sin^2 \gamma \cos \theta \cos \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\cos \theta (x+y)}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin \theta x \times y}{\sin \varphi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sin 2\gamma \left(\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} x - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \cos \varphi y - \frac{\cos \theta}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} x \times y \right) \right) \\
&= \cos \alpha + \sin \alpha \left(\left(\sin^2 \gamma \cos^2 \theta + \frac{\sin 2\gamma \sin \theta}{\sin \varphi} \right) x \right. \\
&\quad \left. + \left(\cos 2\gamma + \sin^2 \gamma \cos^2 \theta - \frac{\sin 2\gamma \sin \theta}{\sin \varphi} \cos \varphi \right) y \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sin^2 \gamma \sin 2\theta \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \varphi} - \frac{\sin 2\gamma \cos \theta}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right) x \times y \right)
\end{aligned}$$

x'in katsayısı

$$\begin{aligned}
\sin^2 \gamma \cos^2 \theta + \frac{\sin 2\gamma \sin \theta}{\sin \varphi} &= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \beta} \cos^2 \theta + \frac{2 \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \beta} \left(\frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \beta \cos \theta}{\sin \beta \sin \theta} \right) \sin \theta}{\sin \varphi} \\
&= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \theta}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \beta \cos \theta}{\sin^2 \beta \sin \varphi} \\
&= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \theta}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \beta \sin \varphi} \\
&= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \theta}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin \varphi (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \beta \sin \varphi} \\
&= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \beta} \\
&= \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \beta} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Benzer hesaplamalarla

y'in katsayısı

$$\cos 2\gamma + \sin^2 \gamma \cos^2 \theta - \frac{\sin 2\gamma \sin \theta}{\sin \varphi} \cos \varphi = 0$$

ve

$x \times y$ 'in katsayısı

$$\frac{\sin^2 \gamma \sin 2\theta \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \varphi} - \frac{\sin 2\gamma \cos \theta}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak

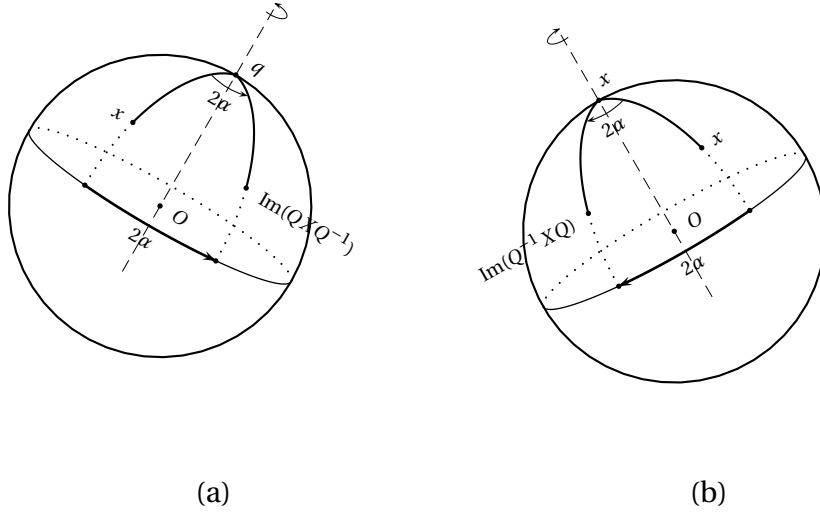
$$e^{-\gamma q} Y e^{\gamma q} = \cos \alpha + \sin \alpha x = X$$

elde edilir ve böylece S^3 'te eşlenik sınıfları karakterize edilmiş olur. Bir $X \in S^3$ elemanın eşlenik sınıfı

$$[X] = \{Y \in S^3 \mid \text{Re}(X) = \text{Re}(Y)\}$$

kümesidir. □

Bu durumda $X = e^{\beta x} \in S^3$ ile QXQ^{-1} ve $Q^{-1}XQ$ kuaterniyonları eşlenik olduklarından QXQ^{-1} çarpımı X 'in reel kısmını değiştirmeyip imajiner kısmını q ekseninde 2α kadar pozitif yönde döndürür. Benzer şekilde $Q^{-1}XQ$ çarpımı X 'in reel kısmını değiştirmeyip imajiner kısmını q ekseninde 2α kadar negatif yönde döndürür.



Şekil 2.3: QXQ^{-1} ve $Q^{-1}XQ$ çarpımlarının geometrik yorumu

3-küre S^3 üzerindeki küresel metrik

$$d(P, Q) = \cos^{-1} \langle P, Q \rangle \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda bir $X = e^{\alpha x} \in S^3$ kuaterniyonunun eşlenik sınıfındaki

kuaterniyonlar +1'e eşit uzaklıktadır; çünkü herhangi bir $Y \in [X]$ için

$$d(1, Y) = \cos^{-1} \operatorname{Re}(Y) = \cos^{-1} \operatorname{Re}(X) = \alpha.$$

Benzer şekilde X 'in eşlenik sınıfındaki kuaterniyonlar -1 'e de eşit uzaklıktadır ve

$$d(-1, Y) = \pi - \alpha.$$

Bu sebeple S^3 'ün eşlenik sınıflarını +1 (ya da -1) merkezli ve $\cos^{-1} \operatorname{Re}(X)$ (ya da $\pi - \cos^{-1} \operatorname{Re}(X)$) yarıçaplı 2-küreler olarak ifade etmek mümkündür. O halde S^2_α , reel kısmı $\cos \alpha$ olan birim kuaterniyonları göstermek üzere S^3 'ün

$$S^3 = \bigcup_{\alpha=0}^{\pi} S^2_\alpha$$

şeklinde bir ayrışımı verilebilir.

2.4. $SO(3)$ ve S^3 Üzerine Etkisi

Bir Lie grubu olan S^3 'ün bir bölüm uzayı olarak da ortaya çıkan $SO(3)$ grubu bir diğer önemli Lie grubudur. Genel olarak $SO(n)$ grubu

$$SO(n) = \{T \mid T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ ve } \det T > 0\}$$

şeklinde tanımlıdır. $\{f_1, f_2, f_3\}$, \mathbb{R}^3 'ün ortonormal bir tabanı ve $\det(f_1 \ f_2 \ f_3) = 1$ olsun, burada $(f_1 \ f_2 \ f_3)$, f_1, f_2 ve f_3 'ü sütun kabul eden matrisi göstermektedir. \mathbb{R}^3 'ün $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ve $e_3 = (0, 0, 1)$ standart tabanı için

$$T(e_1) = f_1, T(e_2) = f_2, T(e_3) = f_3$$

olacak şekilde \mathbb{R}^3 'e tek türlü belirli genişletilen $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü $SO(3)$ 'ün bir elemanıdır.

Tersine $T \in SO(3)$ ise T bir izometri olduğundan $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ vektör kümesi \mathbb{R}^3 için ortonormal bir tabandır. Bu durumda $\det T = \pm 1$ 'dir. Diğer taraftan $\det T > 0$

olması $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ tabanının $\{e_1, e_2, e_3\}$ tabanı gibi yönlendirildiği anlamına gelir. O halde $SO(3)$ grubu \mathbb{R}^3 'ün $\{e_1, e_2, e_3\}$ ile aynı yönlendirmeye sahip ortonormal tabanlarının kümesi olarak göz önüne alınabilir.

Lemma 2.4.

$$S^3 / \{\pm 1\} \cong SO(3).$$

İspat.

$$T: S^3 \longrightarrow SO(3)$$

$$Q = e^{\alpha q} \longmapsto T_Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \longmapsto QuQ^{-1}$$

fonksiyonu düşünüldüğünde $Q_1, Q_2 \in S^3$ için

$$T(Q_1 Q_2) = T_{Q_1 Q_2}$$

ve

$$T_{Q_1 Q_2}(u) = (Q_1 Q_2)u(Q_1 Q_2)^{-1} = Q_1 Q_2 u Q_2^{-1} Q_1^{-1} = Q_1 T_{Q_2}(u) Q_1^{-1} = T_{Q_1}(T_{Q_2}(u))$$

olduğundan T bir homomorfizmdir. $f \in SO(3)$ için Π_q , $f(q) = q$ özvektörünün dik olduğu düzlemi göstermek üzere $f|_{\Pi_q}: \Pi_q \longrightarrow \Pi_q$ dönüşümü Π_q düzleminin bir izometrisidir. Düzlem izometriyi ya bir ötelemedir ya da bir dönmedir. f izometrisi, dolayısıyla $f|_{\Pi_q}$ izometrisi orijini sabit bıraktığından $f|_{\Pi_q}$ bir dönmedir. Bu dönme açısı α olmak üzere

$$Q := e^{\frac{\alpha}{2}q}$$

şeklinde tanımlanan $Q \in S^3$ için açıkça $T(Q) = f$ 'dir. Dolayısıyla T homomorfizmi ortendir.

$\forall u \in \text{Im} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ için $T_Q(u) = QuQ^{-1} = u$ ise $Q \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ 'dir ve $\|Q\| = 1$ olduğundan $Q = \pm 1$ ve bunun sonucu olarak

$$\text{Ker}(T) = \{Q \in S^3 \mid T(Q) = T_Q = I \in SO(3)\} = \{\pm 1\}$$

elde edilir. Böylece gruplar için verilen Birinci İzomorfizm teoreminden

$$S^3/\{\pm 1\} \cong SO(3)$$

sonucuna ulaşılır. □

$SO(3)$ grubunun S^3 üzerinde eşlenik ile verilen doğal bir etkisi vardır.

$$\sigma : SO(3) \times S^3 \longrightarrow S^3, \quad \sigma(g, Q) = gQg^{-1}$$

fonksiyonu açıkça $SO(3)$ 'ün S^3 üzerine bir **(sol) etkisidir**, burada $g \in SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\}$ olduğundan yukarıdaki çarpma anlamlıdır. Bu etki S^3 -lerin k tanesinin çarpımına da aşağıda verildiği gibi doğal bir şekilde genişler

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : SO(3) \times (S^3)^k &\longrightarrow (S^3)^k \\ \tilde{\sigma}(g, (Q_1, Q_2, \dots, Q_k)) &= (gQ_1g^{-1}, gQ_2g^{-1}, \dots, gQ_kg^{-1}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. DÜĞÜMLER VE DÜĞÜM GRUPLARI

3.1. Düğüm, Düğümün Regüler İzdüşümü, Düğüm Grubu ve Wirtinger Gösterimi

Tanım 3.1.

Bir X topolojik uzayının p -küre S^p 'ye homeomorf olan bir K altkümesine bir düğüm denir.

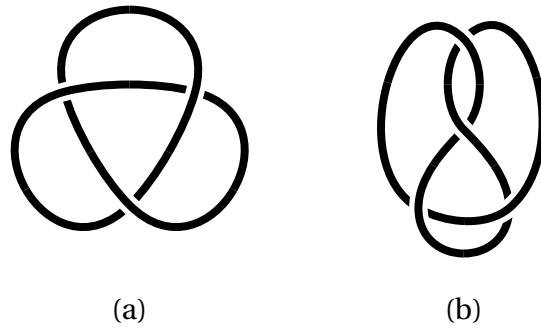
Bu çalışmada $X = \mathbb{R}^3$ veya $X = S^3$ olacaktır ve $p = 1$ alınacaktır.

Tanım 3.2. (Regular projection)

K , \mathbb{R}^3 'te çokgensel bir düğüm, Π herhangi bir düzlem ve $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ dik izdüşüm olsun. $x \in \Pi$ olmak üzere $\pi^{-1}(x)$ ile K düğümü 0,1 veya 2 noktada kesişiyorsa ve 2 noktada kesiştiğinde bu noktalar K 'nın köşe noktaları değilse, π (ya da $\pi(K)$) izdüşümüne regüler denir.

Bu çalışmada daima düğümlerin regüler izdüşümleri gösterilecektir. Aşağıda üç yapraklı yonca düğümünün (trefoil) ve sekiz-şekli düğümünün (figure-eight) birer regüler izdüşümü verilmiştir.

Örnek 3.3.



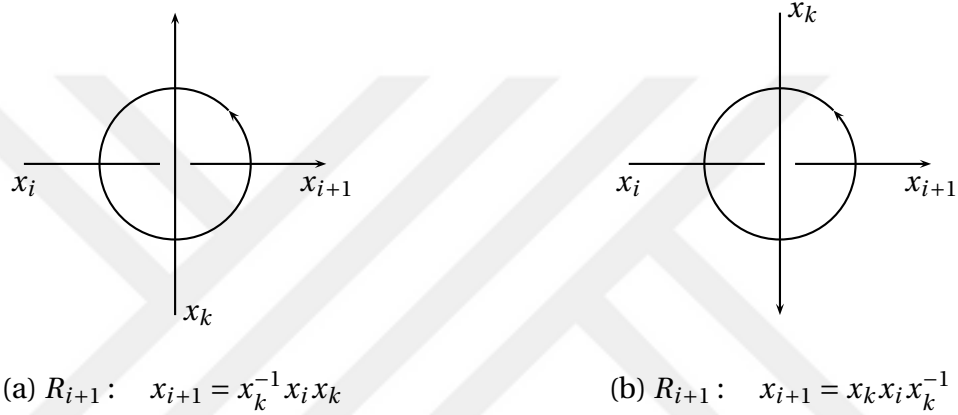
Şekil 3.1: Üç yapraklı yonca ve sekiz-şekli düğümü

Tanım 3.4.

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ grubuna, yani K düğümünün tümleyeninin temel grubuna K düğümünün grubu denir.

Tanım 3.5. (Wirtinger gösterimi)

- Öncelikle verilen K düğümünün regüler izdüşümü alınır. İzdüşüm alındığında ortaya çıkan düğüm diyagramında bir yönlendirmeye birlikte düğüm diyagramındaki yaylar x_1, x_2, \dots, x_n şeklinde etiketlenir.
- Düğüm diyagramındaki her bir alttan geçiş için, yönlendirmeye bağlı olarak aşağıdaki iki durumdan birisi mevcuttur.



Şekil 3.2: Altan geçiş tipleri

Bu durumda $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ düğümü

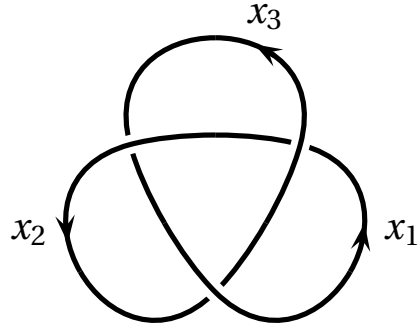
$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

gösterimine sahiptir ve G grubundaki üreteçlerin sağlaması gereken ilişki, her bir alttan geçiş için yukarıdaki iki ilişkiden biridir. K düğümünün grubunun bu şekilde verilen gösterimine **Wirtinger gösterimi** denir.

Örnek 3.6.

Üç-yapraklı yonca düğümünün (Trefoil) grubunun Wirtinger gösteriminde üreteçler x_1, x_2 ve x_3 olmak üzere üreteçler arasında ilişkiler

- $R_1 : x_1^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} = 1$
- $R_2 : x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} = 1$
- $R_3 : x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} = 1$



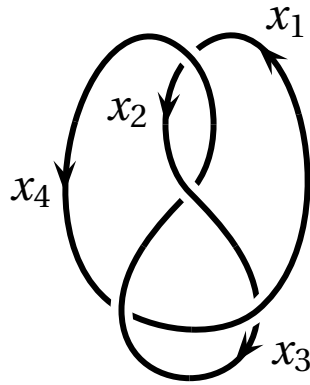
Şekil 3.3: Yönlendirilmiş üç yapraklı yonca düğümü

şeklindedir. Bu durumda üç yapraklı yonca düğümünün grubu aşağıdaki Wirtinger gösterimine sahiptir

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \text{Trefoil}) = G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}, x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1}, x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1} \rangle. \quad (3.1)$$

Örnek 3.7. (Figure-Eight)

Sekiz-şekli düğümünün (figure-eight) grubunun Wirtinger gösteriminde üreteçler x_1 , x_2 , x_3 ve x_4 olmak üzere üreteçler arasında ilişkiler



Şekil 3.4: Yönlendirilmiş sekiz-şekli düğümü

- $R_1 : x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 = 1$
- $R_2 : x_2^{-1} x_4 x_1 x_4^{-1} = 1$
- $R_3 : x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 = 1$
- $R_4 : x_4^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} = 1$

şeklinindedir. Bu durumda sekiz-şekli düğümünün grubu aşağıdaki Wirtinger gösterimine sahiptir

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 = 1, x_2^{-1} x_4 x_1 x_4^{-1} = 1, x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 = 1, x_4^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} = 1 \rangle. \quad (3.2)$$

3.2. Bir Düğümün Alexander Matrisi ve Polinomu

Tanım 3.8.

R birimli değişmeli bir halka olsun ve A , girdileri R halkasından olan $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Negatif olmayan herhangi bir k tamsayısı için A 'nın k . elementary ideali $E_k(A)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlıdır:

- $0 < n - k \leq m$ ise $E_k(A)$, A 'nın $(n - k) \times (n - k)$ tipindeki tüm alt matrislerinin determinantlarının ürettiği idealdir.
- $n - k > m$ ise $E_k(A) = 0$.
- $n - k \leq 0$ ise $E_k(A) = R$.

A ve A' , R üzerinde iki matris olsun. Eğer aşağıdaki 5 işlem sonlu adımda uygulanarak A matrisinden A' matrisine ulaşılabiliyorsa A ile A' bağıntılı olsun ve $A \sim A'$ ile gösterilsin:

- (1) satırların yerini değiştirmek veya sütunların yerini değiştirmek
- (2) matrise bir sıfır satırı eklemek ya da silmek, yani $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$
- (3) bazı satırların bir lineer toplamını diğer bir satıra eklemek

(4) bazı sütunların lineer toplamını diğer sütuna eklemek

(5) yeni satır ve sütunun kesişimi 1 olacak ve diğer girdiler 0 olacak şekilde matrise yeni satır ve sütun eklemek ya da böyle bir satır ve sütun varsa silmek, yani $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Yukarıdaki bağıntı açıkça bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 3.9.

Denk matrisler aynı elementary ideal zincirini belirler, yani, $A \sim A'$ ise $E_k(A) = E_k(A')$.

Teoremin detaylı ispatı [2]'de bulunabilir.

Bir düğüm diyagramındaki her bir alttan geçiş için yönlendirmeye bağlı olarak Şekil (3.2)'teki iki durumdan birisi söz konusudur. Bu durumda üreteçler arasındaki ilişki-den hareketle

(a) R_{i+1} : $x_{i+1} = x_k^{-1} x_i x_k$ ise $x_{i+1} = (1 - t)x_k + t x_i$ denklemi

(b) R_{i+1} : $x_{i+1} = x_k x_i x_k^{-1}$ ise $t x_{i+1} = (t - 1)x_k + x_i$ ya da $x_{i+1} = (1 - t^{-1})x_k + t^{-1} x_i$ denklemi

yazıldığında, yani K düğümünün Wirtinger gösterimiyle verilen

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

grubundaki üreteçler arasında

$$x_{i+1} = x_k^\epsilon x_i x_k^{-\epsilon}, \quad \epsilon \in \{-1, +1\}$$

ilişisine karşılık

$$x_{i+1} = (1 - t^\epsilon)x_k + t^\epsilon x_i \tag{3.3}$$

denklemini yazıldığında katsayıları sonlu Laurent polinomları olan bir denklem sistemi elde edilir.

Tanım 3.10.

$x_{i+1} = (1 - t^\epsilon)x_k + t^\epsilon x_i$, $i, k, i + 1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ denklem sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere A 'nın 1. temel idealine ($E_1(A)$), yani A matrisinin tüm $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki alt matrislerinin determinantlarının ürettiği ideale A 'nın Alexander ideali denir. Alexander idealinin üreticisine Alexander polinomu denir.

Bir düğüm grubunun 1. temel ideali bir tek üreteçli idealdir ([2], sayfa 123, (3.8)). Alexander polinomu $\Delta(t)$ ile gösterilir. $\Delta(t)$ 'yi bulmak için öncelikle yukarıda anlatılan katsayılar matrisi yazılır:

$$A(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k & \dots & x_{n-1} & x_n \\ t^\epsilon & -1 & \dots & & & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & t^\epsilon & -1 & \dots & 1-t^\epsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & & \dots & t^\epsilon & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Sistemin katsayılar matrisi yazıldıktan sonra bu matrisin aşağıdaki teoremle varlığı verilen (teoremin ispatı [3]'de bulunabilir) Smith normal formu elde edilir.

Teorem 3.11.

R bir tek üreteçli idealler bölgesi ve A , R üzerinde $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda R üzerinde sırasıyla $m \times m$ ve $n \times n$ tipinde ters çevrilebilir P ve Q matrisleri vardır öyle ki

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ve $i = 1, 2, \dots, r-1$ için $d_i | d_{i+1}$.

Girdileri sonlu Laurent polinomları olan $n \times n$ tipindeki A matrisinin Smith normal formundaki matrisin sıfır satırı silindikten sonra kalan $(n-1) \times n$ tipindeki A' matrisinin $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki alt matrislerinden determinantı sıfırdan farklı olan alt matrisin determinantı K düğümünün Alexander polinomudur.

Örnek 3.12.

Üç yapraklı yonca düğümünün grubu

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_2^{-1} x_3 x_2 = 1, x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3 = 1, x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 = 1 \rangle$$

olduğundan aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır:

$$x_1 = (1 - t^{-1})x_2 + t^{-1}x_3 \quad \text{ya da} \quad tx_1 = (t-1)x_2 + x_3$$

$$x_2 = (1 - t^{-1})x_3 + t^{-1}x_1 \quad \text{ya da} \quad tx_2 = (t-1)x_3 + x_1$$

$$x_3 = (1 - t^{-1})x_1 + t^{-1}x_2 \quad \text{ya da} \quad tx_3 = (t-1)x_1 + x_2$$

Böylece

$$-tx_1 + (t-1)x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - tx_2 + (t-1)x_3 = 0$$

$$(t-1)x_1 + x_2 - tx_3 = 0.$$

denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -t & t-1 & 1 \\ 1 & -t & t-1 \\ t-1 & 1 & -t \end{bmatrix}$$

elde edilir. A 'nın Smith normal formu ise elementer satır-sütun işlemleri ile

$$A = \begin{bmatrix} -t & t-1 & 1 \\ 1 & -t & t-1 \\ t-1 & 1 & -t \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -t & t-1 \\ -t & t-1 & 1 \\ t-1 & 1 & -t \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & t-1 \\ -t & t-1 & 1 \\ -1 & t & 1-t \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & t-1 \\ -t & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 + C_3 \rightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & -t & -1 \\ 0 & -t^2 + t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tC_1 + C_2 \rightarrow C_2, C_1 + C_3 \rightarrow C_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t^2 + t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t^2 + t - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine denk olduğundan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinanı dolayısıyla üç yapraklı yonca düğümünün Alexander polinomu

$$\Delta(t) = -t^2 + t - 1 \equiv -t + 1 - t^{-1} = 1 - (t + t^{-1})$$

olarak bulunur.

Örnek 3.13.

Sekiz-şekli düğümünün grubu

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 = 1, x_2^{-1} x_4 x_1 x_4^{-1} = 1, x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 = 1, x_4^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} = 1 \rangle$$

olmak üzere

$$\begin{cases} -tx_1 + (t-1)x_3 + x_4 = 0 \\ tx_1 - x_2 + (1-t)x_4 = 0 \\ (t-1)x_1 + x_2 - tx_3 = 0 \\ (1-t)x_2 + tx_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & t-1 & 1 \\ t & -1 & 0 & 1-t \\ t-1 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 1-t & t & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda A matrisinin Smith normal formu

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & t-1 & 1 \\ t & -1 & 0 & 1-t \\ t-1 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 1-t & t & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \begin{bmatrix} -t & 0 & t-1 & 1 \\ 0 & -1 & t-1 & 2-t \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-t & t & -1 \end{bmatrix} \sim \dots$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+3t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu son matris

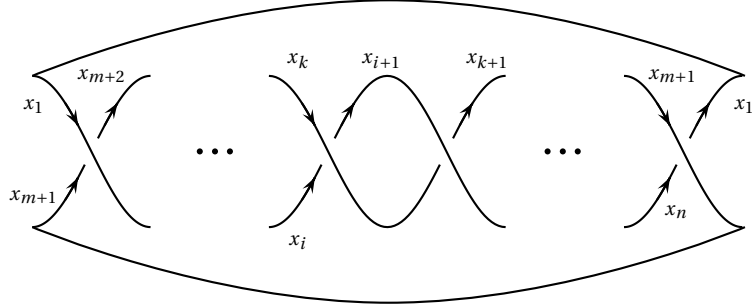
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+3t-1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine denktir ve dolayısıyla sekiz-şekli düğümünün Alexander polinomu

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+3t-1 \end{vmatrix} = -t^2+3t-1 \equiv 3-(t+t^{-1})$$

bulunur.

3.3. Tamsayı Düğümleri ve Grupları



Şekil 3.5: Tamsayı düğümünün izdüşümü

Diyagramı Şekil 3.5'teki gibi olan bir düğüme bir tamsayı düğümü denir. Daha açık olarak eğer n bir tek tamsayı ise bu bir düğüm diyagramıdır. Bu diyagramın şekildeki gibi etiklendiği göz önüne alınırsa düğümün grubu

$$G_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n = x_{2m+1} \mid x_1 = x_{m+1} x_n x_{m+1}^{-1}, x_{i+1} = x_k x_i x_k^{-1}, x_{k+1} = x_{i+1} x_k x_{i+1}^{-1} \rangle \quad (3.5)$$

ile verilen Wirtinger gösterimine sahiptir. Eğer n bir çift tamsayı ise elde edilen diyagram bir link diyagramıdır.

4. TAMSAYI LİNK VE DÜĞÜM GRUPLARININ $SU(2)$ TEMSİLLERİ

4.1. Bir Grubun $SU(2)$ Temsili

Tanım 4.1.

V (gerçel ya da kompleks) bir vektör uzayı ve G bir grup olsun. G 'nin bir V temsili G 'nin V üzerine bir $\rho : G \times V \rightarrow V$ etkisidir öyle ki her $g \in G$ için

$l_g : V \rightarrow V$, $l_g(v) = \rho(g, v)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir.

$g^{-1} \in G$ için $l_{g^{-1}}(v) = \rho(g^{-1}, v)$ olduğundan

$$l_g \circ l_{g^{-1}}(v) = l_g(\rho(g^{-1}, v)) = \rho(g, \rho(g^{-1}, v)) = \rho(gg^{-1}, v) = \rho(e_G, v) = v$$

elde edilir, dolayısıyla $l_{g^{-1}} = (l_g)^{-1}$ 'dir. O halde l_g dönüşümü V 'nin bir izomorfizmidir. Bu da $l_g \in GL(V)$ anlamına gelir.

$$\begin{aligned} l : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto l_g \end{aligned}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir. Tersine herhangi bir $l : G \rightarrow GL(V)$ homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{aligned} \rho : G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto l_g(v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir etkidir. O halde bir G grubunun V temsilleri, $G \rightarrow GL(V)$ homomorfizmler olarak göz önüne alınabilir.

$l_g : V \rightarrow V$ dönüşümü üzerine ekstra koşullar konularak daha özel temsiller elde edilebilir. Örneğin bir grubun $O(n)$ temsillerini bulmak için $V = \mathbb{R}^n$ ve l_g üzerine ortogonal olma koşulu konur.

Tanım 4.2.

G bir grup ve ρ , G 'nin \mathbb{C}^2 üzerine bir etkisi olsun. Her $g \in G$ için

$$l_g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad l_g(v) = \rho(g, v)$$

dönüşümü bir Hermitian dönüşüm ise ve \mathbb{C}^2 'nin bir $\{e, f\}$ tabanı için $\{l_g(e), l_g(f)\}$ ta-

banı \mathbb{C}^2 'nin $\{e, f\}$ tabanı ile aynı yönlendirmeye sahip ise böyle bir temsile G 'nin $SU(2)$ temsili denir.

Bu temsil teorisine, özelde $SU(2)$ temsil teorisine şu gözle de bakılabilir: G bir grup olmak üzere G 'nin bir $SU(2)$ temsilinden kastedilen şey G grubundan $SU(2)$ grubuna bir homomorfizm olarak tanımlanabilir. Yani, $R(G)$ kümesi G grubunun $SU(2)$ temsilleri kümesini göstermek üzere

$$R(G) = \{\rho \mid \rho : G \longrightarrow SU(2) \text{ homomorfizm}\}$$

olarak alınabilir. Bu durumda G 'nin $SU(2)$ temsilleri bir anlamda G 'nin $SU(2)$ içindeki oturuş biçimlerinin teorisidir. Bu haliyle $R(G)$, oldukça büyük bir kümedir.

Tanım 4.3.

Bir ρ temsili için ρ 'nun görüntüsü $\text{Gör}(\rho) \subset S_u^1$ ise ρ 'ya indirgenebilir (Abelyen) temsil denir. Daha açık olarak verilen bir temsil köşegen bir temsille eşlenik ise böyle bir temsile indirgenebilir denir. Yani, bir $\rho : G \longrightarrow SU(2)$ temsili için, $A\rho A^{-1}$ matrisi

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

şeklinde köşegen bir matris olacak şekilde $A \in SU(2)$ varsa ρ 'ya indirgenebilir temsil denir. Böyle matrisler ise bilinen çemberden başka birşey değildir. Dolayısıyla indirgenebilir temsillere Abelyen temsil demek denktir.

Bu çalışmanın asıl amacı (tamsayı) düğüm ve (tamsayı) link gruplarının non-Abelyen temsilleri uzayını incelemek ve bunu da (2.3)'de verilen denklik (etki doğal bir denklik bağıntısıdır) altında sınıflandırmaktır. Burada $R(G)$, temsil uzayının kendisini, $R^*(G)$ indirgenemez temsillerin uzayını ve $[R^*(G)]$ de indirgenemez temsillerin (2.3)'deki etkiye göre denklik sınıflarının kümesini göstermektedir. G_n , tamsayı düğüm grubunu ya da tamsayı link grubunu göstermek üzere G_n grubu ayrık topoloji ile göz önüne alınacaktır. $S^3 \cong SU(2)$ ise $d(P, Q) = \cos^{-1} \langle P, Q \rangle$ metriği ile bir metrik uzaydır. Bu durumda $R(G)$ kompakt-açık topoloji ile donatılabilir. Hatırlanacak olursa **kompakt-açık topoloji**, X ve Y topolojik uzayları için $Y^X = \{f : X \longrightarrow Y \text{ sürekli fonksiyonlar}\}$ olmak üzere $\langle K, U \rangle = \{f \in Y^X \mid f(K) \subset U, K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ açık}\}$ kümelerinin alt taban

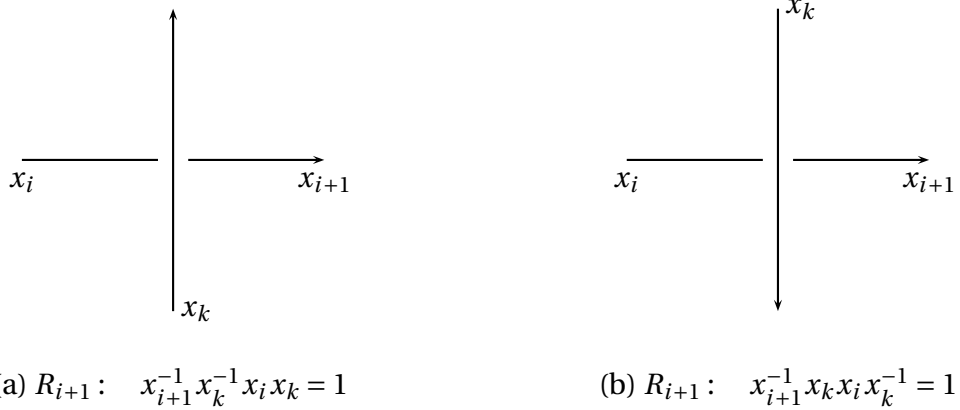
olduğu topolojidir.

4.2. Düğüm Gruplarının Çember Temsili

Genel bir $SU(2)$ temsilin varlığını göstermek ve bunun ne olduğunu bulmak oldukça zor bir iştir. Burada kullanılacak yöntem çember temsili denen bir kısım temsillerin tüm $SU(2)$ üstüne yayılıp yayılmayacağını anlamak olacaktır. G düğüm grubunun Wirtinger gösterimiyle verildiği göz önüne alınırsa, x_1, x_2, \dots, x_n meridyenlerin homotopi sınıfları olmak üzere

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

şeklinindedir. Hatırlanacak olursa düğüm diyagramında i . ve $(i + 1)$. meridyen için Şekil 4.1'deki iki durumdan birisi söz konusudur. R_{i+1} ilişkisinin $R_{i+1} : x_{i+1}^{-1} x_k^{-1} x_i x_k$ ya da $R_{i+1} : x_{i+1}^{-1} x_k x_i x_k^{-1}$ alınması bir tür konvensiyondur, burada meridyenler (üreteçler) arasındaki ilişkiler, geçişi saatin tersi yönünde dönüp kavşağa gelen noktalar pozitif, çıkan noktalar negatif olarak alınmıştır. $R_i = 1$ bağıntısının bir sonucu olarak x_i ve x_{i+1}



Şekil 4.1: Altan geçiş tipleri ve karşılık gelen üreteç ilişkileri

elemanları G grubu içinde eşleniktirler. Diğer yandan bir grup homomorfizmi eşlenik olmayı da korur, dolayısıyla bunların görüntüleri de eşlenik olacaklardır. $SU(2)$ içinde eşlenik sınıfları ise $+1$ merkezli α yarıçaplı küreler ya da -1 merkezli $(\pi - \alpha)$ -yarıçaplı kürelerdir. S_α^2 ve $S_{\pi-\alpha}^2$ bu küreleri göstermek üzere bir $G \rightarrow SU(2)$ homomorfizmi, aslında, uygun bir S_α^2 küresinde $R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1$ bağıntıları sağlanacak şek-

ilde X_1, X_2, \dots, X_n kuaterniyonları bulmaktır. Yani bu durumda bu bir konfigürasyon problemine dönüşür.

Özel olarak $\alpha = \pi/2$ seçildiğinde meridyenlerin homotopi sınıflarının görüntüleri olan kuaterniyonlar pür-imaginer birim kuaterniyonlardır. Bu durumda bir $\sigma : G \rightarrow SU(2)$ homomorfizmi için $\sigma(x_i) = \underline{x}_i$ gösterimiyle $\underline{x}_i \in S_{\pi/2}^2$ 'dir. σ bir homomorfizm olduğundan R_{i+1} ilişkisinin yönüne bağlı olarak ya

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_k \underline{x}_i \underline{x}_k^{-1}$$

ya da

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_k^{-1} \underline{x}_i \underline{x}_k$$

geçerlidir. Diğer yandan $x_k \in S_{\pi/2}^2$ olduğundan $\underline{x}_k^{-1} = -\underline{x}_k$ 'dir ve böylece bu iki bağıntı da aşağıdaki tek bağıntıya dönüşür

$$\underline{x}_{i+1} = -\underline{x}_k \underline{x}_i \underline{x}_k. \quad (4.1)$$

Herhangi iki pür-imaginer p ve q kuaterniyonunun çarpımı

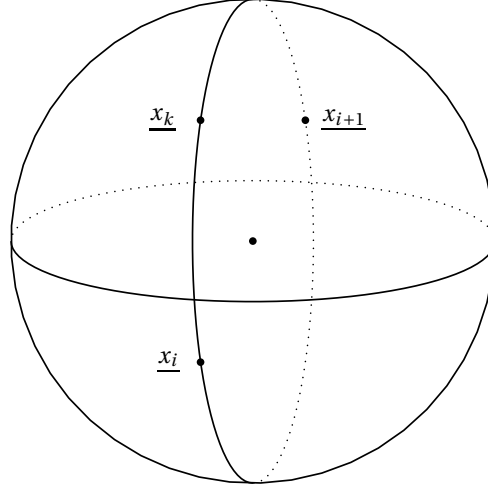
$$p \otimes q = -\langle p, q \rangle + p \times q$$

olduğundan denklem (4.1) daha açık olarak

$$\begin{aligned} \underline{x}_{i+1} &= -\underline{x}_k \underline{x}_i \underline{x}_k \\ &= -(-\langle \underline{x}_k, \underline{x}_i \rangle + \underline{x}_k \times \underline{x}_i) \underline{x}_k \\ &= 2\langle \underline{x}_k, \underline{x}_i \rangle \underline{x}_k - \underline{x}_i \end{aligned}$$

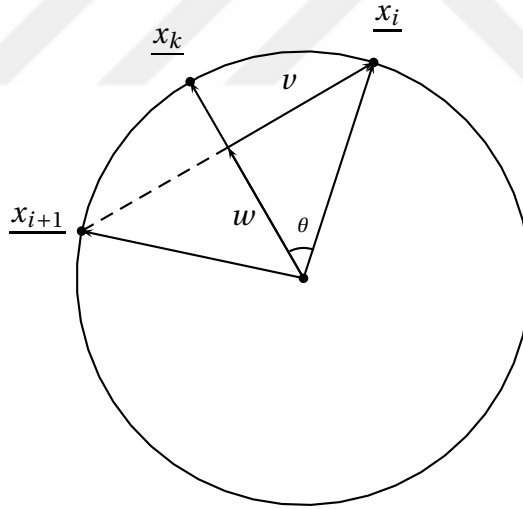
şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan tüm $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, noktaları $S_{\pi/2}^2$ 'dedir ve bu küre \mathbb{R}^3 'te standart birim küre ile bir tutulursa \underline{x}_{i+1} noktasının \underline{x}_i ile \underline{x}_k 'nin gerdiği düzlem üzerinde olduğu sonucuna ulaşılır. O halde $\underline{x}_i, \underline{x}_k$ ve \underline{x}_{i+1} noktaları Şekil 4.2'de gösterildiği gibi aynı büyük çember (jeodezik) üzerindedir.

Bütün jeodezikler standart birim çembere izometrik olduğundan $\underline{x}_i, \underline{x}_k$ ve \underline{x}_{i+1} noktalarını ve $\underline{x}_{i+1} = 2\langle \underline{x}_i, \underline{x}_k \rangle \underline{x}_k - \underline{x}_i$ ilişkisini çember üzerinde incelemek yerinde



Şekil 4.2: $S^2_{\pi/2}$ küresinde $x_{i+1} = 2 \langle x_i, x_k \rangle x_k - x_i$ ilişkisi

olacaktır. w vektörü \underline{x}_k ile aynı yöndeki vektör olmak üzere $w = |w|\underline{x}_k$ yazılabilir. $\langle \underline{x}_i, \underline{x}_k \rangle = \cos \theta$ olmak üzere $\cos \theta = |w|/|\underline{x}_i|$ ve böylece $|w| = |\underline{x}_i| \cos \theta$ buradan da $w = |\underline{x}_i| \cos \theta \underline{x}_k$ elde edilir. $v = \underline{x}_i - w$ olmak üzere



Şekil 4.3: $x_{i+1} = 2 \langle x_i, x_k \rangle x_k - x_i$ bağıntısı

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_{i+1} &= w + (-v) = w - (\underline{x}_i - w) = 2w - \underline{x}_i \\
 &= 2|\underline{x}_i| \cos \theta \underline{x}_k - \underline{x}_i \\
 &= 2 \langle \underline{x}_i, \underline{x}_k \rangle \underline{x}_k - \underline{x}_i
 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani $\underline{x}_{i+1} = 2 \langle \underline{x}_i, \underline{x}_k \rangle \underline{x}_k - \underline{x}_i$ bağıntısı düzlemde Şekil 4.3'te gösterildiği gibi \underline{x}_i vektörünün \underline{x}_k vektörüne göre yansımasıdır. Ortogonal grup diliyle ifade etmek gerekirse ν vektörü, \underline{x}_k vektörüne dik bir vektör olmak üzere \underline{x}_{i+1} vektörü σ_ν (yansıma) dönüşümü altında \underline{x}_i 'nin resmidir. Yani oldukça geometrik bir konfigürasyon vardır. Ayrıca üreteçlerin görüntüleri aynı çember üzerinde alınacağından aşağıdaki gibi bir tanım yapılabilir.

Tanım 4.4. (Çember Temsili)

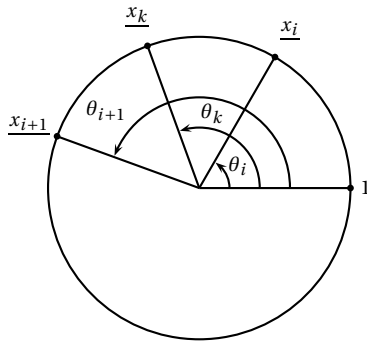
Aşağıdaki iki özelliğin sağlandığı bir $\sigma : G \rightarrow SU(2)$ homomorfizmine G 'nin bir çember temsili denir.

- 1) $\{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)\} \subset S^2_{\pi/2}$
- 2) $\{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)\}$ kümesi $S^2_{\pi/2}$ 'deki aynı büyük çember üzerindedir.

Bu konfigürasyon standart birim çember üzerinde düşünüldüğünde

$$\underline{x}_i = e^{i\theta_i}, \quad \underline{x}_k = e^{i\theta_k}, \quad \underline{x}_{i+1} = e^{i\theta_{i+1}}$$

olmak üzere $\underline{x}_{i+1} = 2 \langle \underline{x}_k, \underline{x}_i \rangle \underline{x}_k - \underline{x}_i$ denklemi Şekil 4.4'te görüldüğü gibi sırf açılar cinsinden bir kongürens dönüşür.



$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + 2(\theta_k - \theta_i) \\ &= \theta_i + 2\theta_k - 2\theta_i \\ &= 2\theta_k - \theta_i \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Şekil 4.4: $x_{i+1} = x_k^\epsilon x_i x_k^{-\epsilon}$ ilişkisinin açılı yorumu

Bu noktada şunu belirtmek gerekir ki bir düğüm grubunun üreteçlerinin görüntüleri $S^2_{\pi/2}$ küresinde ise tüm üreteçler aynı jeodezik üzerinde yer almak zorunda değildir, böyle bir yanlış anlaşılmaya kapılmamak gerekir. (Fakat tamsayı düğüm gruplarının çember temsili vardır.)

Tanım 4.5.

G bir düğüm grubu ve $\sigma : G \rightarrow SU(2)$ bir homomorfizm olsun. Eğer G 'nin üreteçlerinin görüntüleri birim boylu pür-imaginer ve aynı jeodezik üzerinde bulunuyorsa böyle bir temsile geometrik temsil denir. Teknik olarak bir düğüm grubunun gösteriminde üreteçler meridyenlerin homotopi sınıfları ise böyle bir gösterime geometrik gösterim denir.

Bu çalışmada Wirtinger gösterimi kullanıldığından buradaki gösterimler geometrik gösterimdir.

Örnek 4.6.

Üç yapraklı yonca düğümünün grubu

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_2^{-1} x_3 x_2, x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3, x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 \rangle$$

şeklinde idi. Açık yorumu kullanılarak üreteçler arasındaki ilişkilerin verdiği kongürent sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\theta_1 = 2\theta_2 - \theta_3 \quad \text{mod } 2\pi$$

$$\theta_2 = 2\theta_3 - \theta_1 \quad \text{mod } 2\pi$$

$$\theta_3 = 2\theta_1 - \theta_2 \quad \text{mod } 2\pi$$

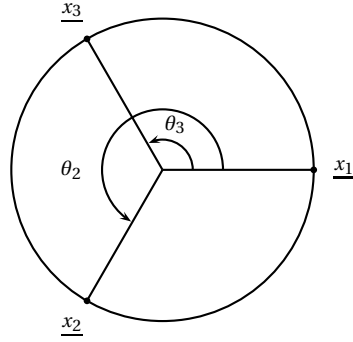
Bu kongürent sisteminde (örneğin) sonuncu denklem ilk iki denklemin sonucudur. Dolayısıyla bu kongürent sisteminden biri atılabilir.

x_1 , çember üzerinde bir noktaya yerleştirilirse, örneğin $\theta_1 = 0$ seçilirse

$$0 = 2\theta_2 - \theta_3 \quad \text{mod } 2\pi$$

$$\theta_2 = 2\theta_3 \quad \text{mod } 2\pi$$

denklem sistemine ulaşılır ve buradan $0 = 2.2\theta_3 - \theta_3 \quad \text{mod } 2\pi$ bulunur. Bu durumda $\theta_3 = 2\pi/3$, dolayısıyla $\theta_2 = 4\pi/3$ bulunur. O halde çember üzerindeki dizilim Şekil 4.5'te gösterildiği gibidir.



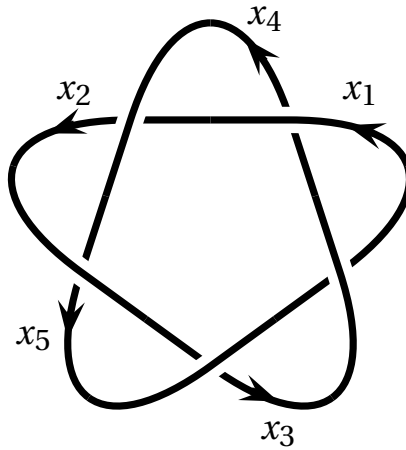
Şekil 4.5: Üç yapraklı yonca düğümünün grubunun çember temsili

Örnek 4.7.

Grubu

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^{-1} x_3^{-1} x_5 x_3 = 1, x_2^{-1} x_4^{-1} x_1 x_4 = 1, x_3^{-1} x_5^{-1} x_2 x_5 = 1, x_4^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 = 1, x_5^{-1} x_2^{-1} x_4 x_2 = 1 \rangle \quad (4.2)$$

olan ve Şekil 4.6'da verilen düğümün çember temsillerini elde edebilmek için aşağıdaki kongürent sistemini çözmek gerekir.



Şekil 4.6: Yönlendirilmiş 5 alttan geçişli bir düğüm

$$\begin{cases} \theta_1 = 2\theta_3 - \theta_5 \\ \theta_2 = 2\theta_4 - \theta_1 \\ \theta_3 = 2\theta_5 - \theta_2 \\ \theta_4 = 2\theta_1 - \theta_3 \\ \theta_5 = 2\theta_2 - \theta_4 \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi)$$

$\theta_1 = 0$ seçilip sistemdeki son denklem atılırsa

$$\begin{cases} 0 = 2\theta_3 - \theta_5 \\ \theta_2 = 2\theta_4 \\ \theta_3 = 2\theta_5 - \theta_2 \\ \theta_4 = -\theta_3 \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi)$$

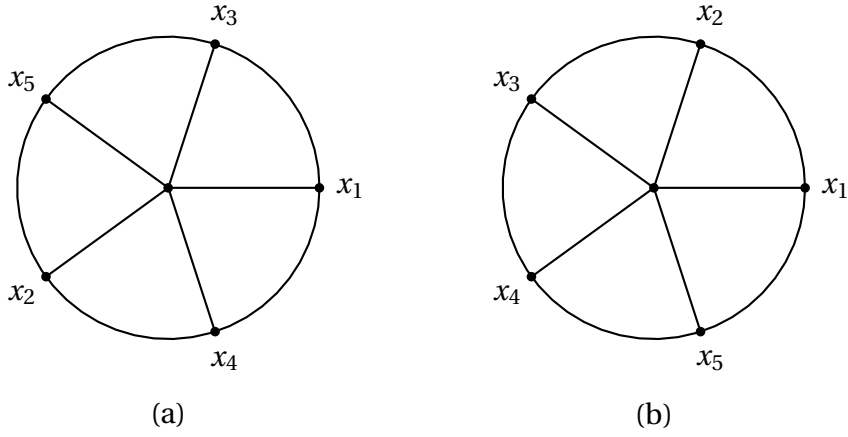
sistemine ulaşılır ve sistemin çözümü

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0 \\ \theta_2 &= 2\theta_4 = -2\theta_3 = -2\frac{2k\pi}{5} = 3\frac{2k\pi}{5} \\ \theta_3 &= \frac{2k\pi}{5} \\ \theta_4 &= -\theta_3 = -\frac{2k\pi}{5} = 4\frac{2k\pi}{5} \\ \theta_5 &= 2\theta_3 = 2\frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$

elde edilir. $k = 1$ ve $k = 2$ için bu düğümün çember temsilleri Şekil 4.7'deki gibidir.

5_1 düğümünün aslında Şekil 4.7'de verilenlerden başka çember temsili yoktur. Aşağıdaki teoremden bir (tamsayı) düğümün çember temsillerinin hangi koşulda var olduğu ve sayısı verilmiştir.

Teorem 4.8. $\Delta(t)$, K düğümünün Alexander polinomu olmak üzere $|\Delta(-1)| \neq 1$ ise K 'nin grubunun apaçık olmayan çember temsilleri vardır. Ayrıca K düğümünün Alex-



Şekil 4.7: 5_1 düğümünün çember temsilleri

ander matrisinin -1 'deki değerinin Smith normal formu

$$S_{A(-1)} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_m & \dots 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi olmak üzere K 'nın çember temsillerinin sayısı

$$\prod_{|d_i| \neq 1} \left[\left| \frac{d_i}{2} \right| \right]$$

formülü ile belirlidir.

İspat.

(3.4) ile verilen K 'nın Alexander matrisinin -1 'deki değeri $A(-1)$ ile, $\underline{x_{i+1}} = \underline{x_k}^\epsilon \underline{x_i} \underline{x_k}^{-\epsilon}$ ilişkisinin açılı yorumundan elde edilen

$$\theta_{i+1} = 2\theta_k - \theta_i \pmod{2\pi}$$

kongrüent sisteminin katsayılar matrisi olan

$$B = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_i & \theta_{i+1} & \dots & \theta_k & \dots & \theta_{n-1} & \theta_n \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi aynıdır. Bu matrisin determinantına **düğümün determinanı** denir. B matrisinin herbir sütunu son sütuna eklenirse son sütunundaki herbir girdisi 0 olan bir matris elde edilir. Bu durumda

$$B \cdot (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T = 0 \pmod{2\pi} \quad (4.3)$$

denkleminin trivial olmayan bir çözümü vardır.

$B \cdot (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T = 0 \pmod{2\pi}$ denklem sisteminde $\theta_1 = 0$ seçilip sistemden son denklem çıkarıldıktan sonra kalan sistemin katsayılar matrisi B_1 olsun. $A(-1) = B$ olduğundan $|\Delta(-1)| = \det B_1$ 'dir. Bu durumda B_1 matrisinin Smith normal formu

$$S_{B_1} = \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $S_{B_1} \cdot (\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)^T = 0 \pmod{2\pi}$ sisteminin trivial olmayan çözümü var demektir. Bu durumda $|d_m| \neq 1$ ise $d_m \theta_m = 0 \pmod{2\pi}$ denkleminde

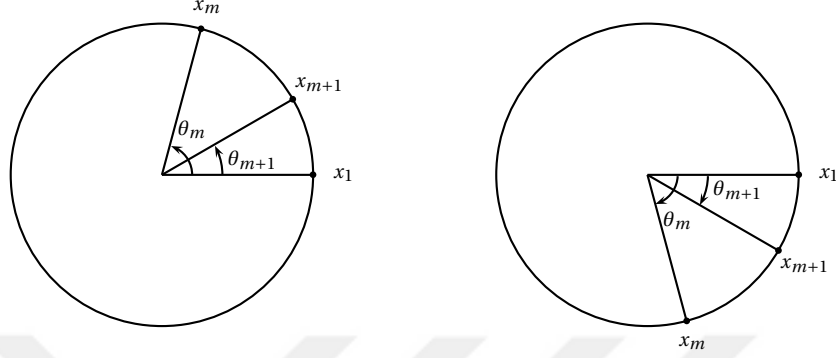
$$\theta_m = \frac{2k\pi}{d_m}, \quad k = 1, 2, \dots, d_m - 1$$

yazılabilir. $d_m | d_{m+1}$ olduğundan $d_{m+1} = a d_m$, $a \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısı vardır ve bu da

$$\theta_{m+1} = \frac{2k\pi}{d_{m+1}} = \frac{\frac{2k\pi}{d_m}}{a} = \frac{\theta_m}{a}$$

demektir. O halde çember üzerinde x_1, x_m ve x_{m+1} noktalarının yerleşimi, örneğin, $k = 1$ ve $k = d_m - 1$ için Şekil 4.8'de gösterildiği gibi olmalıdır ve bu iki yerleşme x_1 eksenine

göre simetrik olduğundan denk yerleşmelerdir. Genelleştirilecek olursa $|d_m| \neq 1$ ise K düğümünün k için elde edilen çember temsili ile $d_m - k$ için elde edilen çember temsili denktir.



Şekil 4.8: Çember temsillerinin sayısı

O halde K 'nin çember temsilleri sayısı

$$\prod_{|d_i| \neq 1} \left\lfloor \left\lceil \frac{|d_i|}{2} \right\rceil \right\rfloor.$$

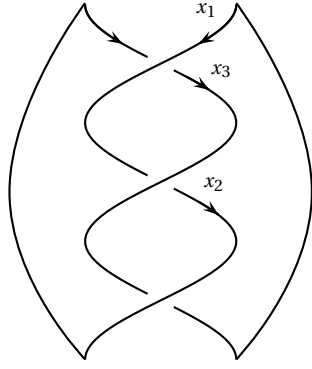
□

4.3. Tamsayı Düğüm Gruplarının $SU(2)$ Temsilleri Uzayı

Örnek 4.9.

Üreteçler arasındaki ilişkiler Şekil 4.9'da gösterildiği gibi olan üç yapraklı yonca düğümünün grubu G_3 olmak üzere $\varphi : G_3 \rightarrow SU(2)$ bir homomorfizm olsun. Gösterimden de görüldüğü gibi ilk ilişkinin sonucu olarak x_1 ve x_3 , ikinci ilişkinin sonucu olarak x_2 ve x_1 ve son ilişkinin sonucu olarak x_3 ve x_2 eşleniktirler, yani $x_1 \sim x_2 \sim x_3$. Bunun sonucu olarak, $\varphi(x_i) = X_i \in SU(2) \cong S^3$ gösterimi kullanılırsa φ bir homomorfizm olduğundan $X_1 \sim X_2 \sim X_3$ 'tür ve Lemma 2.3'ten dolayı reel kısımları yani açıları aynıdır. O halde $\underline{x}_i \in S^2_{\pi/2}$ olmak üzere $X_i = e^{a\underline{x}_i}$ formundadır.

Lemma 2.2'den $X_1 = X_2 X_3 X_2^{-1}$ ilişkisinin geometrisi göz önüne alınacak olursa; X_1 'in açısı X_3 'ün açısı kadardır ve \underline{x}_1 noktası $S^2_{\pi/2}$ küresinde \underline{x}_2 'nin ortogonal düzle-



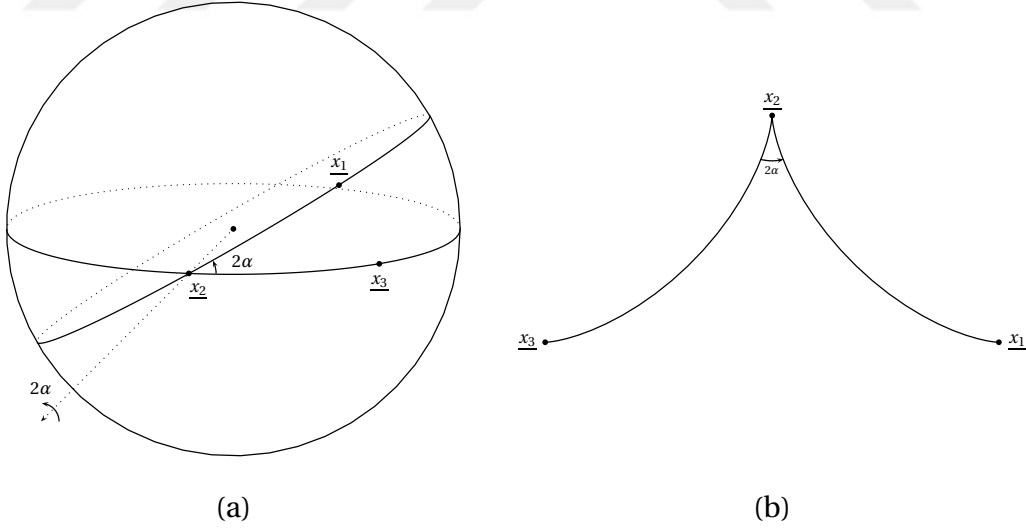
$$x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1}$$

$$x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1}$$

$$x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}$$

Şekil 4.9: Bir tamsayı düğümü olarak üç yapraklı yonca düğümü

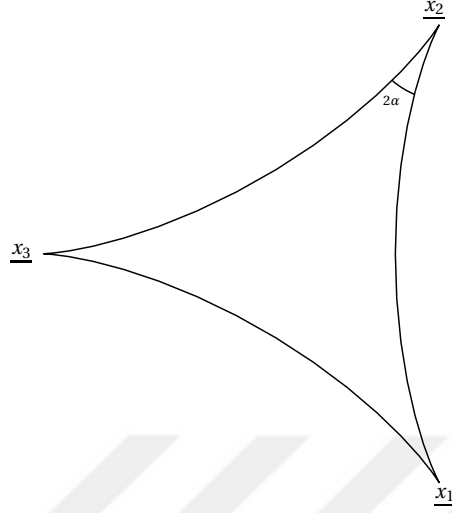
minde saatin dönme yönünün tersine 2α -lık dönmenin sonucunda elde edilen \underline{x}_3 noktasının görüntüsüdür. Bu durumda $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ ve \underline{x}_3 noktaları $S^2_{\pi/2}$ küresi üzerine, Şekil 4.10 (a)'da gösterildiği gibi, $\underline{x}_1 \underline{x}_2$ doğrusu ile $\underline{x}_2 \underline{x}_3$ doğrusu arasındaki yönlü açı 2α ve \underline{x}_3 noktasının \underline{x}_2 noktasına uzaklığı ile \underline{x}_1 noktasının \underline{x}_2 noktasına uzaklığı aynı olacak şekilde yerleşirler. Bu yerleşme Şekil 4.10 (b)'deki gibi de özetlenebilir. Şimdi bu üç



Şekil 4.10: x_1, x_2 ve x_3 'ün küre üzerindeki yerleşimi

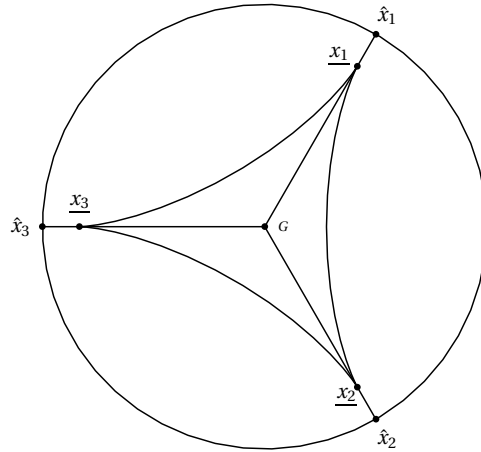
noktanın $S^2_{\pi/2}$ 'deki konfigürasyonu göz önüne alınırsa $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ ve \underline{x}_3 bir eşkenar üçgenin köşe noktaları olmak zorundadır, çünkü ilişkiler sırasıyla kenarların ikişer ikişer eşit olduğunu söyler. Diğer taraftan Şekil 4.11'de gösterilen bu eşkenar üçgenin iç açıları toplamı $2\alpha + 2\alpha + 2\alpha > \pi$ olmak zorundadır, yani $\alpha > \pi/6$ olmak zorundadır ve bu da

K_3 'ün bir $SU(2)$ temsili olması için önemli bir obstrüksiyon verir. $\alpha \leq \pi/6$ için indirgenemez bir temsil olamaz.



Şekil 4.11: x_1, x_2, x_3 eşkenar üçgeni

G , $\triangle x_1 x_2 x_3$ eşkenar üçgeninin ağırlık merkezi olsun ve Γ , G 'nin kutup çemberini göstereceğiz. Gx_i doğrularını G 'den x_i yönünde uzatıp Γ çemberini kestiği noktalar, Şekil 4.12'de gösterildiği gibi, \hat{x}_i olmak üzere \hat{x}_1, \hat{x}_2 ve \hat{x}_3 bir çember temsilidir. Bu iddia $d(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = d(\hat{x}_1, \hat{x}_3) = d(\hat{x}_3, \hat{x}_2)$ olduğundan dolayı doğrudur. $d(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = d(\hat{x}_1, \hat{x}_3) = d(\hat{x}_3, \hat{x}_2)$ olması da x_1, x_2, x_3 noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olmasının sonucudur. Özetle, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.



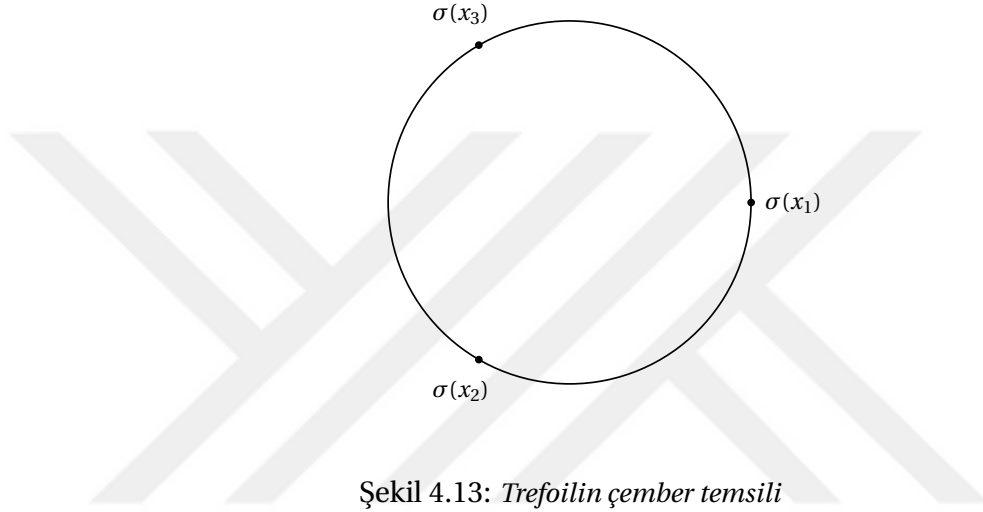
Şekil 4.12: Trefoilin çember temsilinin elde edilmesi

Sonuç 1.

Eğer trefoilin bir $SU(2)$ temsili varsa bu temsilden bir çember temsili elde edilebilir.

Tersine, trefoilin herhangi bir çember temsili, trefoilin genel bir $SU(2)$ temsilene kaldirılabilir.

$\sigma : G \rightarrow SU(2)$ bir çember temsili olsun. Bu durumda G_3 'ün üreteçleri x_1, x_2, x_3 için $\sigma(x_1), \sigma(x_2)$ ve $\sigma(x_3)$ aynı çember üzerindedir. Γ , Şekil 4.13'te olduğu gibi bu çemberi gösterebilir. Γ çemberinin kutbu ξ olmak üzere $\xi \xrightarrow{\sigma} \sigma(x_i)$ doğruları,



Şekil 4.13: Trefoilin çember temsili

$$l(\theta) = \cos \theta \xi + \sin \theta \sigma(x_i)$$

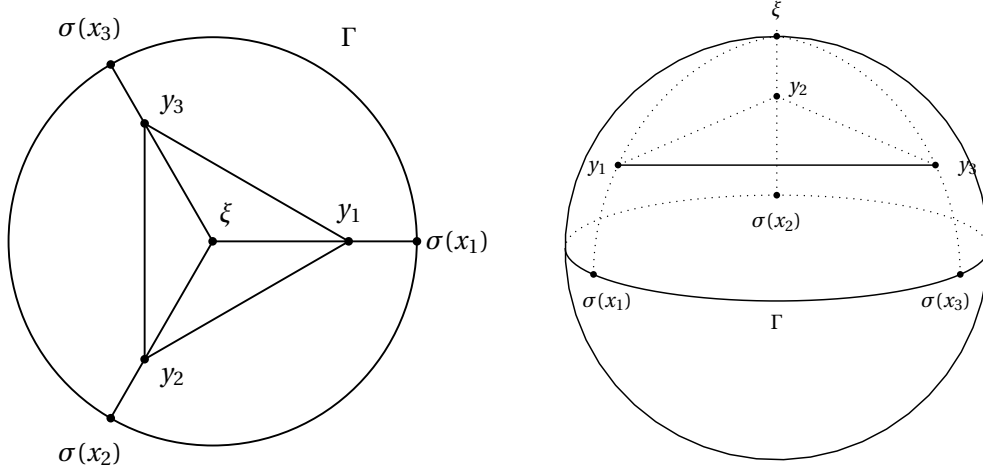
şeklinde parametrize edilebilir. Bu durumda $l(0) = \xi$ ve $l(\pi/2) = \sigma(x_i)$ 'dir. Sabit bir θ_0 için

$$y_i = \cos \theta_0 \xi + \sin \theta_0 \sigma(x_i)$$

noktaları göz önüne alındığında, $y_1 y_2 y_3$ üçgeni bir eşkenar üçgendir çünkü

$$d(\sigma(x_i), \sigma(x_j)) = 2\pi/3, (i \neq j).$$

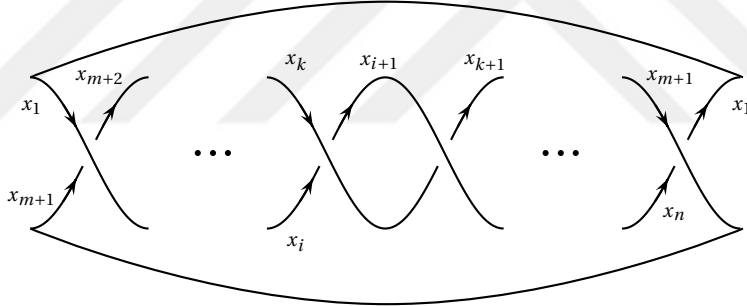
Diğer taraftan $\xi y_1 y_2, \xi y_2 y_3, \xi y_1 y_3$ üçgenleri kongürenttir. Bu üçgenlerden birinin y_i 'deki açısı α ise $\{e^{\alpha y_1}, e^{\alpha y_2}, e^{\alpha y_3}\}$ bir $SU(2)$ temsildir ve üreteçlerin görüntüleri S_α^2 küresindedir. Ayrıca, $y_1 y_2 y_3$ üçgeninin var olması için $6\alpha > \pi$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\alpha \in (\pi/6, \pi - \pi/6)$ için yalnızca bir tane $SU(2)$ temsil vardır. α 'nın $\pi/6$ ve $\pi - \pi/6$ değerleri için $y_1 = y_2 = y_3$ olup indirgenebilir bir temsil elde edilir.



Şekil 4.14: Trefoilin $SU(2)$ temsili

Sonuç 2.

Trefoilin indirgenemez $SU(2)$ temsilleri uzayı $SO(3)$ denklik altında $(\pi/6, \pi - \pi/6)$ açık aralığına homeomorftur.

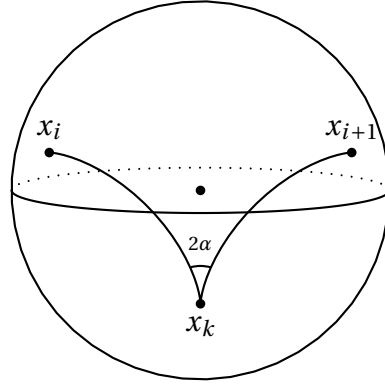


Şekil 4.15: K_n tamsayı düğümünün yönlendirilmiş diyagramı

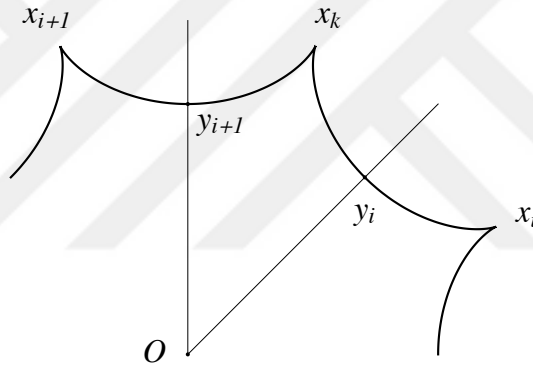
Genel durum

$\sigma : G_n \rightarrow SU(2)$, $\sigma(x_i) = X_i = e^{\alpha x_i}$ bir homomorfizm olsun. Üreteçlerin görüntüleri eşlenik olduğundan α sabittir. O halde X_1, X_2, \dots, X_n noktalarının S_α^2 küresi üzerinde bir konfigürasyonu var demektir. Bu durumda tipik bir $X_{i+1} = X_k^{-1} X_i X_k$ ilişkisi için X_i, X_k ve X_{i+1} noktalarının imajiner kısımları olan x_i, x_k ve x_{i+1} , Şekil 4.16'de gösterildiği gibi S_α^2 küresi üzerine yerleşirler. Tüm x_i noktalarının oluşturduğu $x_1 x_2 \dots x_n$ çokgeninin orta dikme doğruları bir noktada kesişirler, Şekil 4.17. Bu kesişim noktası O olmak üzere Γ , kutbu O olan çemberi gösterebilir, yani $\Gamma = \{x \in S_\alpha^2 \mid \langle x, O \rangle = 0\}$. Ox_i doğrusu ile Γ çemberinin arakesiti, $Ox_i \cap \Gamma = \hat{x}_i$ noktaları için eğer $X_{i+1} = X_k^{-1} X_i X_k$ ilişkisi geçerli ise $d(x_i, x_k) = d(x_k, x_{i+1})$ olduğundan $\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_k^{-1} \hat{x}_i \hat{x}_k$ ilişkisi sağlanır. Bu

sebeple G_n 'nin herhangi bir $SU(2)$ temsili G_n 'nin bir çember temsilini indirger.



Şekil 4.16: G_n grubunun üreteçlerinin görüntüsünün küreye yerleşimi



Şekil 4.17: $x_1 x_2 \dots x_n$ çokgeninin orta dikme doğruları bir noktada kesişir

Tersine G_n grubunun bir çember temsili $SU(2)$ temsile kaldırılabilir.

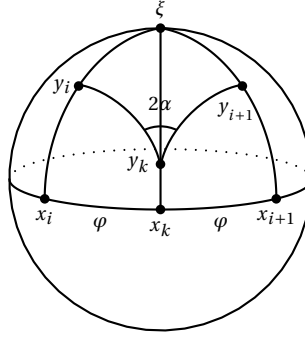
Teorem 4.10.

Şekil 4.15'teki gibi yönlendirilmiş bir tamsayı düğümünün $SU(2)$ temsilleri uzayı $[\frac{n}{2}]$ tane açık aralığın ayrık birleşimidir.

İspat.

$\rho : G_n \rightarrow S_{\pi/2}^2 \subset SU(2)$ bir çember temsili olsun. Böylece meridyenlerin görüntüleri aynı büyük çember üzerindedir (ya da orijinden geçen aynı düzlem üzerindedir). Γ bu çemberi ξ de Γ 'nin kutbunu gösterebilir. $S_{\pi/2}^2$ küresindeki

$$y_i = \cos \theta x_i + \sin \theta \xi, \quad \theta \in (0, \pi) \tag{4.4}$$



Şekil 4.18: $\xi y_i y_k$ üçgeni

noktaları için 2α , Şekil 4.18'de gösterildiği gibi $\overrightarrow{y_k y_i}$ ve $\overrightarrow{y_k y_{i+1}}$ doğruları arasındaki açıyı gösterebiliriz. Bu durumda

$$x_{i+1} = x_k^{-1} x_i x_k$$

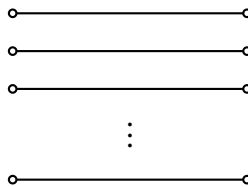
ilişkisinden $Y_i = e^{\alpha y_i}$ olmak üzere

$$Y_{i+1} = Y_k^{-1} Y_i Y_k$$

ilişkisi elde edilir. Buradaki tek kısıt $\xi y_i y_k$ üçgeninin var olmasıdır ve bu üçgenin var olması için de gerekli ve yeterli koşul $2\alpha + \varphi > \pi$ olmasıdır. Ayrıca ilişki çemberin diğer tarafına da genişletildiğinde

$$\pi - \frac{\varphi}{2} < \alpha < \pi + \frac{\varphi}{2} \quad (4.5)$$

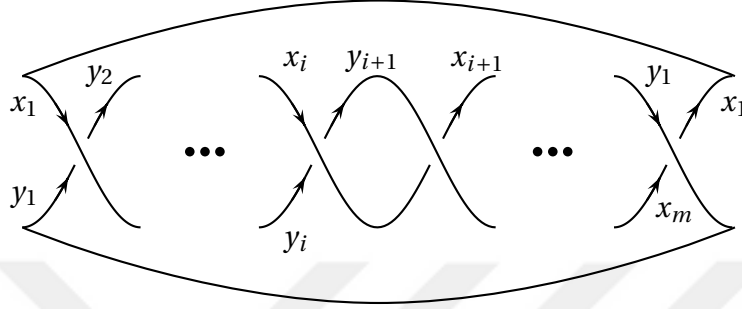
elde edilir. Tamsayı düğümleri için $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ 'dir dolayısıyla $\pi - \frac{k\pi}{n} < \alpha < \pi + \frac{k\pi}{n}$. Sonuç olarak bir çember temsili x_i üreteçlerini $e^{\alpha x_i}$ 'ye götüren bir $SU(2)$ temsile kaldırılabilir ve burada $x_i \mapsto e^{\alpha x_i} \iff \pi - \frac{k\pi}{n} < \alpha < \pi + \frac{k\pi}{n}$. Bu sebeple temsil uzayı $[\frac{n}{2}]$ sayıda $([\frac{n}{2}], \frac{n}{2})$ 'nin tam değerini göstermektedir) açık aralığın ayrık birleşimidir, Şekil 4.19. \square



Şekil 4.19: $[\frac{n}{2}]$ sayıda açık aralığın ayrık birleşimi

4.4. Tamsayı Link Gruplarının $SU(2)$ Temsilleri Uzayı

Bir linke karşılık gelen örgüler için durum biraz farklıdır. Bilindiği gibi n çift bir pozitif tamsayı ise K_n tamsayı örgüsüne karşılık gelen diyagram bir link diyagramıdır. $n = 2m$ olmak üzere Şekil 4.20'teki gibi etiketlenmiş bir linkin grubu



Şekil 4.20: K_n linkinin yönlendirilmiş diyagramı

$$G_n = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \mid x_{i+1} = y_{i+1} x_i y_{i+1}^{-1} \pmod{m}, \\ y_{i+1} = x_i y_i x_i^{-1} \pmod{m}, i = 1, 2, \dots, m \rangle \quad (4.6)$$

şeklindedir.

Örnek 4.11.

K_6 linkinin diyagramı Şekil 4.21'de verilmiştir. Üreteçleri arasındaki ilişkiler (4.6)'ten de kolayca elde edilebilecek olan K_6 'nın grubu

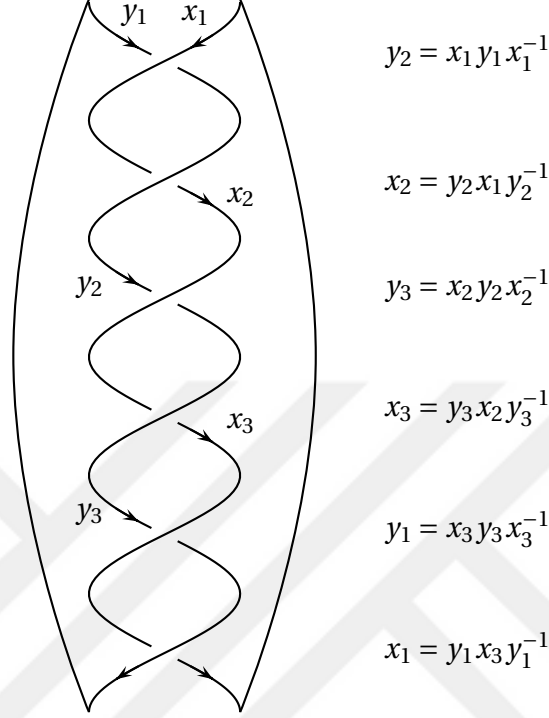
$$G_6 = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \mid x_1 = y_1 x_3 y_1^{-1}, x_2 = y_2 x_1 y_2^{-1}, x_3 = y_3 x_2 y_3^{-1}, \\ y_1 = x_3 y_3 x_3^{-1}, y_2 = x_1 y_1 x_1^{-1}, y_3 = x_2 y_2 x_2^{-1} \rangle \quad (4.7)$$

grubudur. G_6 'nın düğüm gruplarından farkı G_6 'nın üreteçleri arasında iki tane farklı eşlenik sınıfı olmasıdır. Bunlardan birisi $[x_1]$ ve diğeri $[y_1]$ 'dir. Açık olarak

$$[x_1] = \{x_1, x_2, x_3\} \quad \text{ve} \quad [y_1] = \{y_1, y_2, y_3\}$$

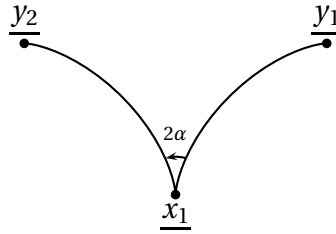
şeklindedir. Yani bir $f : G_6 \rightarrow SU(2)$ homomorfizmi göz önüne alındığında $f(x_i) =$

$e^{\alpha x_i}$ ve $f(y_i) = e^{\beta y_i}$ olmak durumundadır. Tamsayı düğümleri durumunda olduğu gibi yine, $f(x_i)$ -lerin ve $f(y_i)$ -lerin imajiner kısımlarının, \underline{x}_i -lerin ve \underline{y}_i -lerin, $S^2_{\pi/2}$ 'deki pozisyonları incelenebilir.



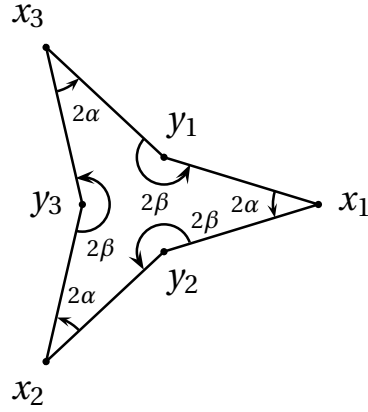
Şekil 4.21: K_6 linkinin diyagramı

İlk ilişki göz önüne alındığında, yani $S^2_{\pi/2}$ 'de \underline{x}_1 'in ve \underline{y}_1 'in bir şekilde yerleştirildiği düşünülürse bu durumda \underline{y}_2 , Şekil 4.22'deki gibi yerleşmiş olur. Tüm diğer ilişkiler kullanılarak benzeri yapırsa Şekil 4.23'teki küresel çokgen elde edilir.



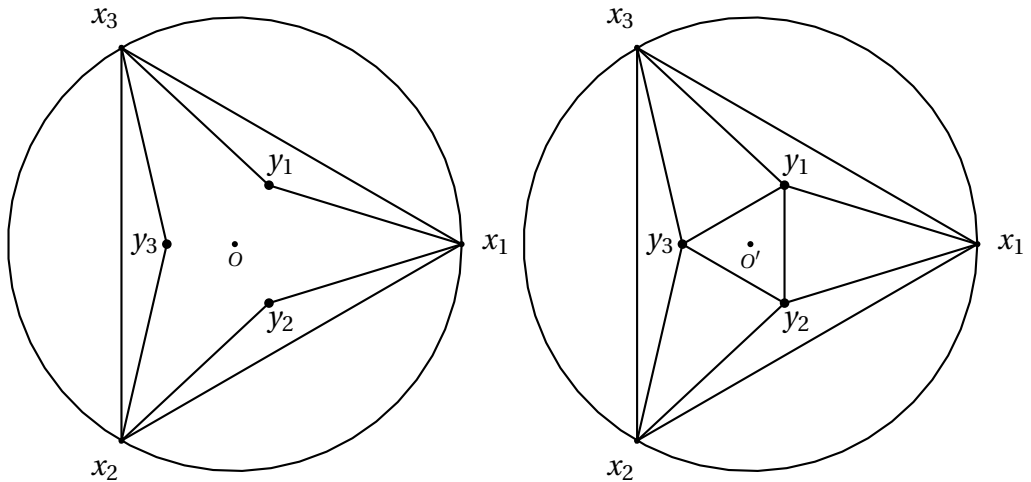
Şekil 4.22: x_1, y_1, y_2 'nin küreye yerleşimi

Özetle G_6 'nın bir $SU(2)$ temsili demek Şekil 4.23'teki bir konfigürasyon demektir. (Elbette bu işlerin $SO(3)$ denklik altında yapıldığı unutulmamalıdır.)



Şekil 4.23: G_6 'nın bir $SU(2)$ temsili

Şimdi düğümdeki durumun burada da geçerli olduğunu görmek için Şekil 4.23'teki temsilin var olduğu varsayılp bundan bir çember temsili edilebilir. Apaçık olarak Şekil 4.23'teki çokgenin kenarortay dikmeleri aynı noktadan geçmezler. O noktası $\underline{x_1 \hat{\Delta} x_2 x_3}$ üçgeninin ağırlık merkezini gösterebilir. $\underline{x_1 \hat{\Delta} x_2 x_3}$ üçgeni bir eşkenar üçgendir, yani bu üçgenin açıortayları da kenarortayları da yükseklikleri de aynı noktadan geçerler. Ayrıca O' noktası $\underline{y_1 \hat{\Delta} y_2 y_3}$ üçgeninin ağırlık merkezini göstermek üzere $\underline{y_1 \hat{\Delta} y_2 y_3}$ üçgeni de bir eşkenar üçgendir. Diğer taraftan $\underline{x_1 \hat{\Delta} y_1 y_2}$, $\underline{x_2 \hat{\Delta} y_2 y_3}$, $\underline{x_3 \hat{\Delta} y_1 y_3}$ üçgenleri de birer ikizkenar



Şekil 4.24: $x_1 x_2 x_3$ ve $y_1 y_2 y_3$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri

üçgendir. Örneğin $\underline{x_1 \hat{\Delta} y_1 y_2}$ üçgeninde $y_1 y_2$ kenarının orta dikmesi l_1 ile gösterilecek

olursa, l_1 doğrusu $\sphericalangle y_1 x_1 y_2$ açısının açıortayıdır. Benzer olarak diğer ikizkenar üçgenlerde de

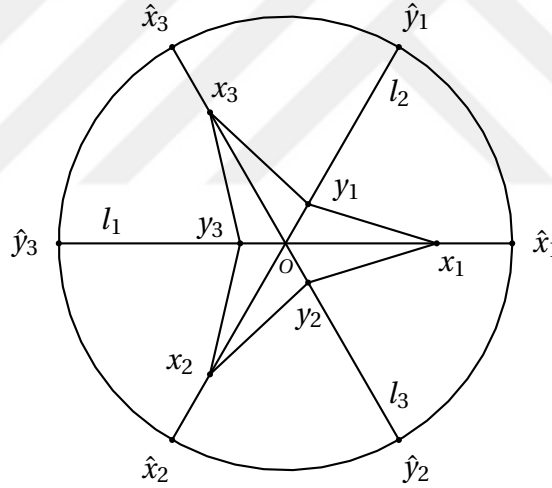
l_2 doğrusu $y_2 y_3$ doğru parçasının orta dikmesi ve $\sphericalangle y_3 x_2 y_2$ açısının açıortayıdır

ve

l_3 doğrusu $y_1 y_3$ doğru parçasının orta dikmesi ve $\sphericalangle y_1 x_3 y_3$ açısının açıortayıdır.

Diğer taraftan O noktası $\sphericalangle y_1 x_1 y_2$, $\sphericalangle y_3 x_2 y_2$ ve $\sphericalangle y_1 x_3 y_3$ açılarının açıortaylarının kesişim noktasıdır çünkü $\underline{x_1 \hat{y}_1 x_3}$, $\underline{x_1 \hat{y}_2 x_2}$ ve $\underline{x_2 \hat{y}_3 x_3}$ üçgenleri de birer eş ikizkenar üçgendir. O halde O noktası ile O' noktası aynı noktadır, Şekil 4.24.

Γ , O noktasının kutup çemberi olsun. l_1 doğrusunun, Ox_1 yönünde Γ çemberini kestiği nokta \hat{x}_1 ve l_2 doğrusunun Oy_1 yönünde Γ çemberini kestiği nokta \hat{y}_1 olsun. Benzer şekilde diğer doğruların da Γ çemberini kestiği noktalar $\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{x}_3$ ve \hat{y}_3 olsun.



Şekil 4.25: G_6 'nın çember temsilinin elde edilişi

$x_1 \hat{x}_2 x_3$ bir eşkenar üçgen olduğundan $d(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = d(\hat{x}_2, \hat{x}_3) = d(\hat{x}_3, \hat{x}_1)$ 'dir. Ayrıca l_1, l_2, l_3 doğruları $x_1 \hat{x}_2 x_3$ üçgeninin kenar ortay doğruları olduğundan $d(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = d(\hat{y}_1, \hat{x}_3) = d(\hat{x}_3, \hat{y}_3) = d(\hat{y}_3, \hat{x}_2) = d(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = d(\hat{y}_2, \hat{x}_1)$ 'dir. Dolayısıyla O 'dan geçen bu üç doğru kutup çemberini 6 eşit parçaya böler. O halde \hat{x}_i -ler ve \hat{y}_i -ler Γ çemberine eşit aralıklarla yerleşir ve bu da bir çember temsili verir.

Yukarıda anlatılanın tersi de doğrudur, yani bir çember temsili bir $SU(2)$ temsile kaldırılabilir. $\rho : G_6 \rightarrow SU(2)$ bir homomorfizm ve $\rho(x_i), \rho(y_i) \in S_{\pi/2}^2$ olsun. Bu du-

rumda ilişkiler, $\rho(x_i) = \underline{x}_i$ ve $\rho(y_i) = \underline{y}_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\underline{y}_2 &= \underline{x}_1 \underline{y}_1 \underline{x}_1^{-1} = 2 \langle \underline{x}_1, \underline{y}_1 \rangle \underline{x}_1 - \underline{y}_1 \\ \underline{x}_2 &= \underline{y}_2 \underline{x}_1 \underline{y}_2^{-1} = 2 \langle \underline{y}_2, \underline{x}_1 \rangle \underline{y}_2 - \underline{x}_1 \\ \underline{y}_3 &= \underline{x}_2 \underline{y}_2 \underline{x}_2^{-1} = 2 \langle \underline{x}_2, \underline{y}_2 \rangle \underline{x}_2 - \underline{y}_2 \\ \underline{x}_3 &= \underline{y}_3 \underline{x}_2 \underline{y}_3^{-1} = 2 \langle \underline{y}_3, \underline{x}_2 \rangle \underline{y}_3 - \underline{x}_2 \\ \underline{y}_1 &= \underline{x}_3 \underline{y}_3 \underline{x}_3^{-1} = 2 \langle \underline{x}_3, \underline{y}_3 \rangle \underline{x}_3 - \underline{y}_3 \\ \underline{x}_1 &= \underline{y}_1 \underline{x}_3 \underline{y}_1^{-1} = 2 \langle \underline{y}_1, \underline{x}_3 \rangle \underline{y}_1 - \underline{x}_3\end{aligned}$$

halini alır.

Diğer taraftan $\langle \underline{x}_1, \underline{y}_1 \rangle = \langle \underline{y}_2, \underline{x}_1 \rangle = \langle \underline{x}_2, \underline{y}_2 \rangle = \langle \underline{y}_3, \underline{x}_2 \rangle = \langle \underline{x}_3, \underline{y}_3 \rangle = \langle \underline{y}_1, \underline{x}_3 \rangle$ 'dir. Eğer $\langle \underline{x}_1, \underline{y}_1 \rangle = 1$ ise bu durumda bütün \underline{x}_i ve \underline{y}_i noktaları aynı yerdedir, bu da (istenilmeyen) abelyen çözümdür. Dolayısıyla $\langle \underline{x}_1, \underline{y}_1 \rangle \neq \pm 1$ varsayılabilir. Bu durumda da basit bir argümanla $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ ve $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3$ noktalarının orijinden geçen aynı düzlemde yer aldığı görülür, dolayısıyla bu noktalar $S_{\pi/2}^2$ 'nin (yalnızca) bir jeodeziği üzerinde yer alır. Yani düğümde olduğu gibi burada da $S_{\pi/2}^2$ üzerinde çember temsilden başka temsil yoktur. Bu çember temsiller de Şekil 4.26'da gösterildiği gibidir.

Şekil 4.26 (a)'daki çemberin kutbu O olsun. $O\underline{x}_i$ doğrusu üzerinde

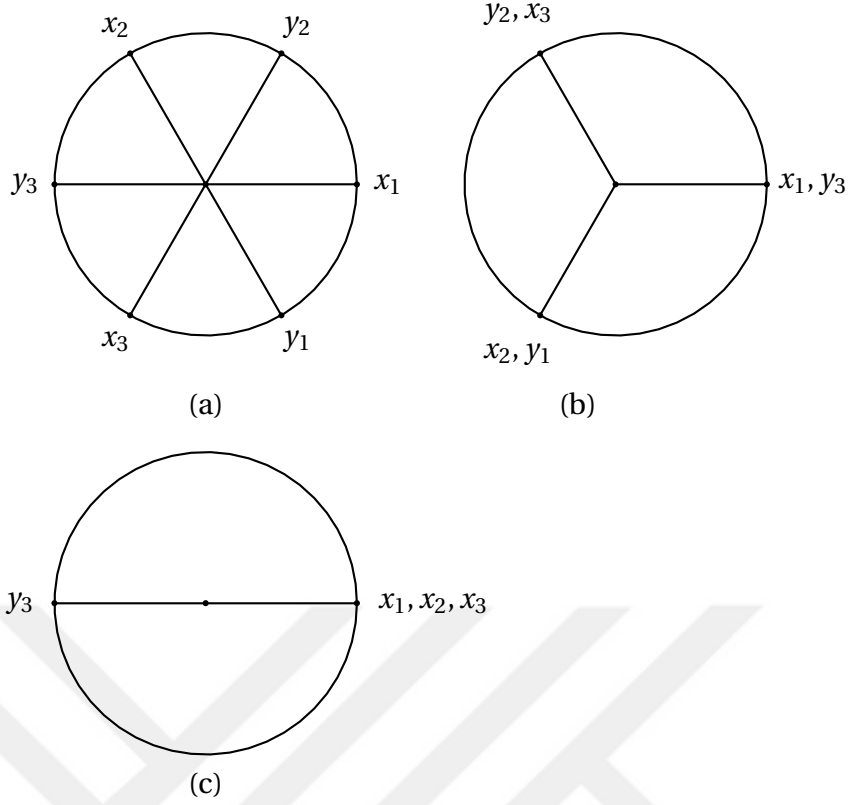
$$t_i = \cos \theta \underline{x}_i + \sin \theta O, \quad (4.8)$$

benzer şekilde $O\underline{y}_i$ doğrusu üzerinde

$$s_i = \cos \gamma \underline{y}_i + \sin \gamma O$$

noktaları göz önüne alındığında $s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3$ çokgeni için $\langle s_3 t_3 s_1 = \langle s_1 t_1 s_2 = \langle s_2 t_2 s_3$ ve $\langle t_3 s_1 t_1 = \langle t_1 s_2 t_2 = \langle t_2 s_3 t_3$ 'dür, Şekil 4.27.

$\triangle Ot_3 s_1$ üçgeni ile $\triangle Os_1 t_1$ üçgenleri kongürenttir, dolayısıyla eşit kenarların karşılardaki açı da eşittir. Benzer argüman diğer üçgenlerin kongürentliğinde de kullanılırsa iddia edilen açıların eşitliği görülür. Bu durumda $\tilde{g} : G_6 \rightarrow SU(2)$, $\tilde{g}(x_i) = e^{\alpha t_i}$ ve $\tilde{g}(y_i) = e^{\beta s_i}$ bir grup homomorfizmidir. Diğer yandan bu homomorfizmin var olması



Şekil 4.26: G_6 'nın çember temsilleri

için örneğin $O_{S_1} t_1$ üçgeni var olmalıdır. Bu ise ancak

$$\alpha + \beta + \pi/3 > \pi$$

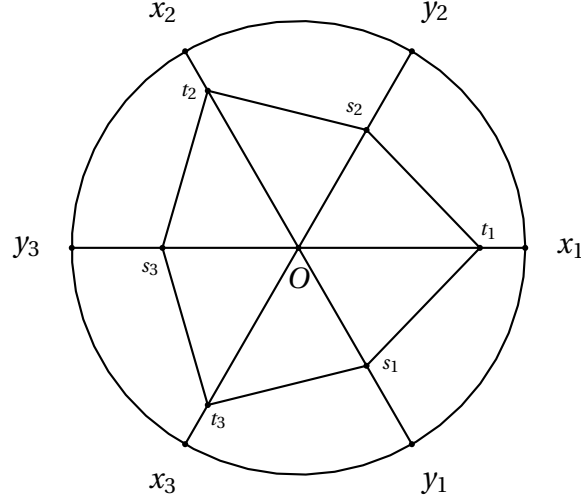
olmasıyla mümkündür. Yani $\alpha + \beta > \frac{2\pi}{3}$ olmalıdır. Bu durumda temsil uzayı Şekil 4.28'te gösterilen ve bir açık diske homeomorf olan 5-gendir.

Şekil 4.26 (b)'deki çember temsili alındığında da temsil uzayı $(\pi/6, \pi - \pi/6)$ açık aralığıdır.

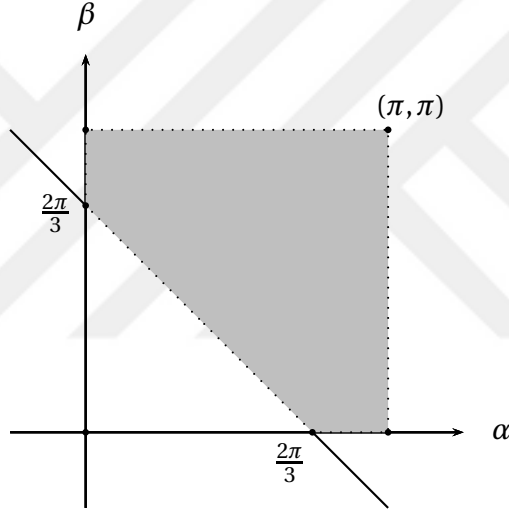
Şekil 4.26 (c)'deki çember temsili alındığında temsil uzayı tek noktadır.

Genel durum

Yukarıdaki örnekten hareketle $n = 2m$ olmak üzere bir K_n tamsayı linkinin $SU(2)$ temsilleri uzayı belirlenebilir. K_n linkinin grubu G_n , iki farklı eşlenik sınıfına sahiptir, bunlardan birisi $[x_1]$ ve diğeri $[y_1]$ 'dir. $\sigma : G_n \rightarrow SU(2)$ bir homomorfizm olsun ve $\sigma(x_i) = e^{\alpha x_i}$ ve $\sigma(y_i) = e^{\beta y_i}$ ile gösterilsin. Bu durumda \underline{x}_i -lerin ve \underline{y}_i -lerin $S^2_{\pi/2}$ 'deki konfigürasyonu Şekil 4.30'de gösterildiği gibidir. $x_1 x_2 \dots x_m$ çokgeninin (ya da $y_1 y_2 \dots y_m$ çokgeninin) ağırlık merkezi O olsun ve kutbu O olan çember de O_Γ olsun. $\overrightarrow{Ox_i}$ doğrusu-



Şekil 4.27: $s_1 t_1 s_2 t_2 s_3 t_3$ çokgeni



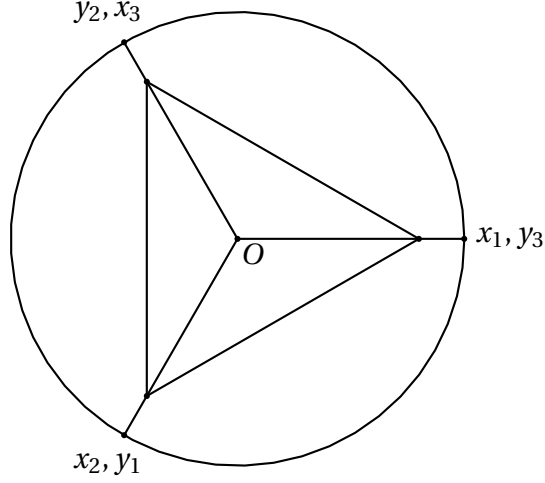
Şekil 4.28: G_6 'nın açık diske homeomorf olan temsil uzayı

nun O_Γ çemberini kestiği nokta, yani $\overleftrightarrow{Ox_i} \cap O_\Gamma = \hat{x}_i$ olmak üzere, benzer şekilde $\overleftrightarrow{Oy_i} \cap O_\Gamma = \hat{y}_i$ olmak üzere $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m\}$, G_n grubunun bir çember temsili verir. Tersine G_n grubunun bir çember temsili, G_n 'nin bir $SU(2)$ temsiline kaldırılabilir.

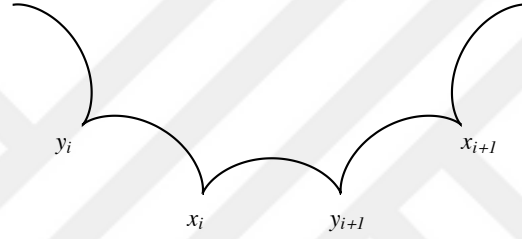
$$\sigma : G_n \rightarrow S_{\pi/2}^2 \subset SU(2), \quad \sigma(x_i) = \underline{x}_i, \quad \sigma(y_i) = \underline{y}_i$$

olsun ve $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_m$ aynı büyük çember, S_Γ^1 üzerinde yer alsın. S_Γ^1 çemberinin kutbu O olmak üzere $S_{\pi/2}^2$ küresinde

$$\hat{x}_i = \cos \gamma \underline{x}_i + \sin \gamma O \quad \text{ve} \quad \hat{y}_i = \cos \varphi \underline{y}_i + \sin \varphi O$$



Şekil 4.29: $x_1 x_2 x_3$ eşkenar üçgeni



Şekil 4.30: x_i ve y_i noktalarının $S^2_{\pi/2}$ 'deki konfigürasyonu

noktaları kullanılarak G_n 'nin $SU(2)$ temsilleri elde edilebilir. 2α , $\overleftrightarrow{\hat{x}_i \hat{y}_i}$ ile $\overleftrightarrow{\hat{x}_i \hat{y}_{i+1}}$ doğruları arasındaki açıyı gösterebilir ve 2β , $\overleftrightarrow{\hat{x}_i \hat{y}_{i+1}}$ ile $\overleftrightarrow{\hat{y}_{i+1} \hat{x}_{i+1}}$ doğruları arasındaki açıyı gösterebilir, Şekil 4.31. Bu durumda α ve β açıları üzerindeki kısıt, $O \hat{x}_i \hat{y}_i$ üçgeninin varlığına indirgenmiş olur. Bir küresel üçgenin iç açıları toplamı π 'den büyük 3π 'den küçük olduğundan

$$\pi < \alpha + \beta + \theta < 3\pi, \quad (4.9)$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu durumda

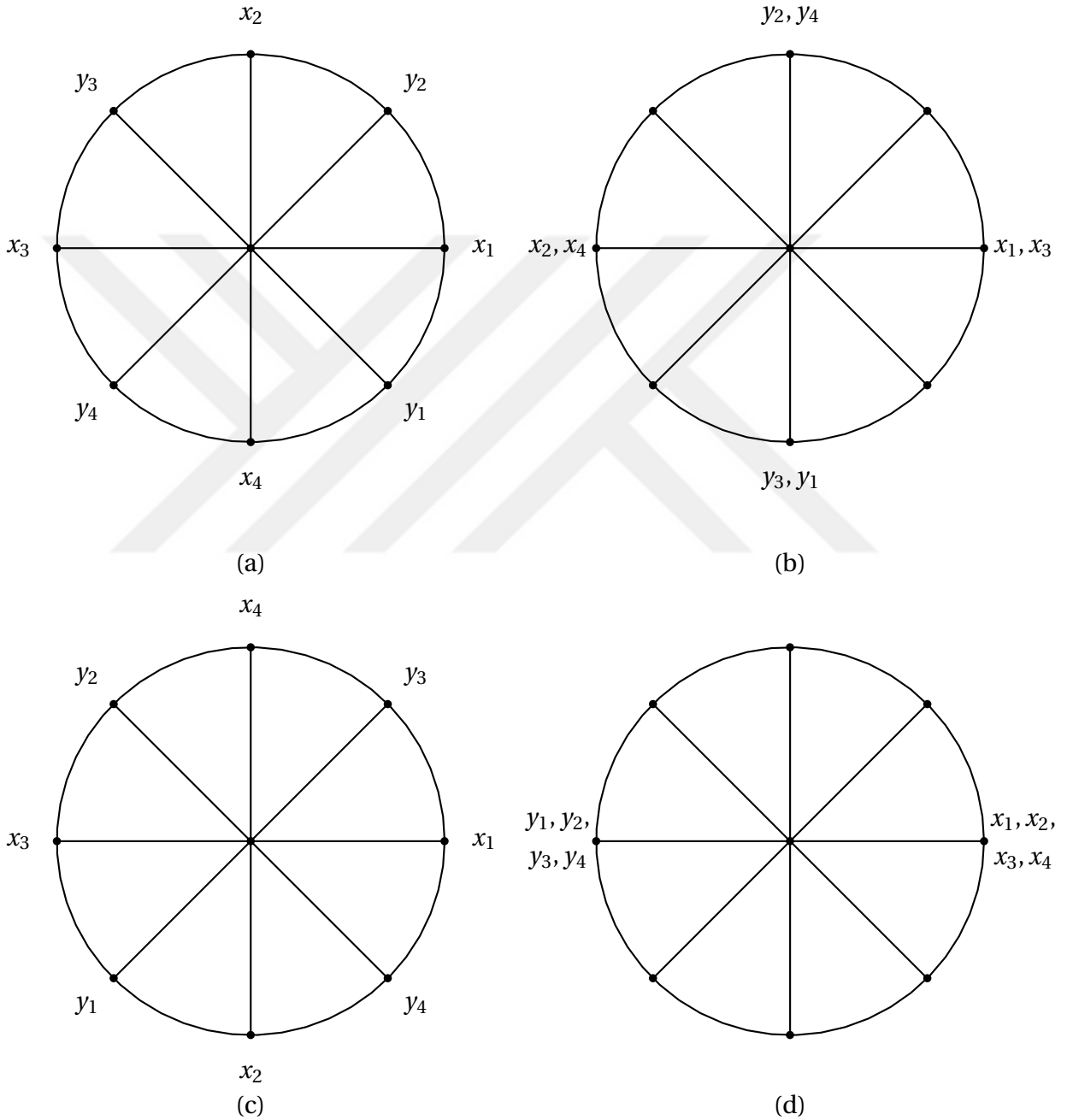
$$\pi - \theta < \alpha + \beta < 3\pi - \theta. \quad (4.10)$$

Sabit bir θ için dolayısıyla sabit bir çember temsili için

$\alpha \neq \beta$ ise G_n grubunun çember temsili $SU(2)$ temsili Şekil 4.32'de de gösterildiği gibi açık diske homeomorftur.

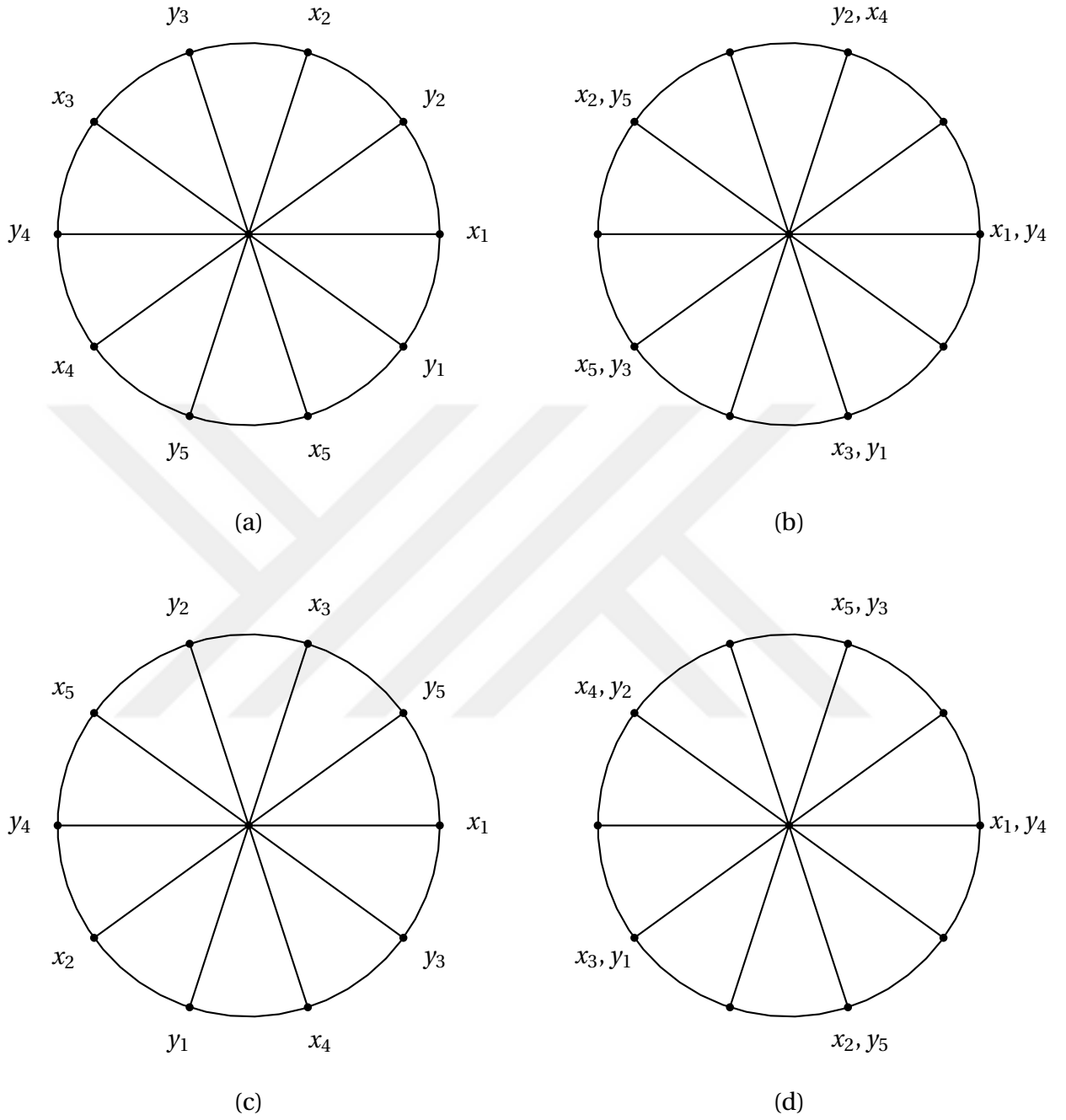
Aşağıda K_8 ve K_{10} tamsayı link gruplarının çember temsilleri verilmiştir. Yukarıda anlatılan yöntem ile bu çember temsiller kullanılarak K_8 ve K_{10} tamsayı link gruplarının $SU(2)$ temsilleri elde edilebilir.

Örnek 4.13. (K_8 linkinin grubu G_8 'in çember temsilleri)

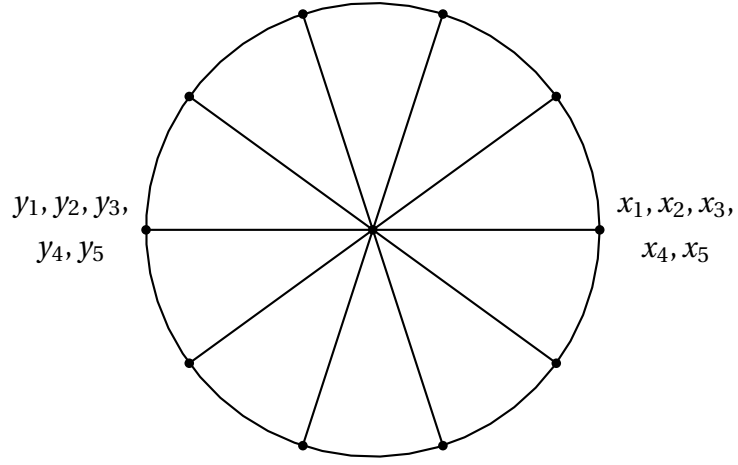


Şekil 4.33: G_8 'in çember temsilleri

Örnek 4.14. (K_{10} linkinin grubu G_{10} 'un çember temsilleri)



Şekil 4.34



(e)

Şekil 4.34: (devam) G_{10} 'un çember temsilleri

5. SONUÇ

Bir tamayı düğümünün Wirtinger gösterimiyle verilen G_n grubunun üreteçleri meridyenlerin homotopi sınıflarıdır ve üreteçler arasındaki ilişkiler düğüm diyagramının yönlendirilmesine bağlı olarak ya hep $x_{i+1} = x_k^{-1} x_i x_k$ ya da hep $x_{i+1} = x_k x_i x_k^{-1}$ formundadır. G_n grubunun bir $SU(2)$ temsili, G_n grubundan $SU(2)$ grubuna bir homomorfizm olduğundan, x_i üreteçlerinin bu homomorfizm altındaki görüntüleri X_i kuaterniyonları olmak üzere; G_n grubunun bir $SU(2)$ temsili, G_n grubundaki ilişkilere karşılık gelen ilişkileri sağlayan $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ kuaterniyonlarının bir kümesi olarak düşünülebilir. X_i kuaterniyonlarının sağlaması gereken ilişkiler, örneğin, $X_{i+1} = X_k^{-1} X_i X_k$ şeklindedir. İki birim kuaterniyonun eşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul reel kısımlarının aynı olmasıdır. Bu nedenle $X_i = e^{\alpha x_i}$ kuaterniyonlarının imajiner kısımları S_α^2 küresindedir. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ kuaterniyonlarının bu küreye nasıl yerleşebildiklerini belirleyebilmek için $X_k^{-1} X_i X_k$ çarpımının geometrisi kullanılmıştır. Genel olarak $Q = e^{\alpha q}$ ve X birim kuaterniyonları için $Q^{-1} X Q$ çarpımının reel kısmı X 'in reel kısmı olup imajiner kısmı ise X 'in imajiner kısmının q ekseninde sol el kuralına göre döndürülmesiyle elde edilen kuaterniyondur. Benzer şekilde $Q X Q^{-1}$ sağ el kuralına göre döndürmeye karşılık gelir. Döndürmenin miktarı da Q 'nun açısının iki katı kadardır. Dolayısıyla X_1, X_2, \dots, X_n kuaterniyonlarının S_α^2 küresinde oldukça geometrik bir konfigürasyonu vardır. Bu konfigürasyondan G_n grubunun bir çember temsili elde edilebilir ve tersine G_n grubunun bir çember temsilinden G_n grubunun bir $SU(2)$ temsili elde edilebilir. G_n 'nin çember temsilleri ile $SU(2)$ temsilleri arasındaki bu ilişkiden G_n 'nin $SU(2)$ temsilleri uzayının $[\frac{d}{2}]$ tane açık aralığın ayrık birleşimine homeomorf olduğu gösterilmiştir.

Tamsayı düğüm grubunun geometrik konfigürasyonlarından hareketle tamsayı link grubu G_n 'nin $SU(2)$ temsilleri uzayının da açık disklerin ve açık aralıkların ayrık birleşimine homeomorf olduğu gösterilmiştir. Örneğin G_6 tamsayı link grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayı bir açık disk ile bir açık aralığın ayrık birleşimidir. G_8 link grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayı 3 açık diskin ayrık birleşimidir ve G_{10} link grubunun 2 açık diskin ve 2 açık aralığın ayrık birleşimidir.

Bir $K \subset S^3$ düğümünün Alexander polinomu $\Delta(t)$ olmak üzere $|\Delta(-1)|$ sayısına K

düğümünün determinanı denir. Determinanı 1'den farklı olan bir düğümün grubunun abelyen olmayan $SU(2)$ temsili vardır ([12], Corollary 11). Bundan sonraki çalışmalarda bu tezde verilen tamsayı düğümlerinin $SU(2)$ temsilleri uzayının belirlenmesinde kullanılan geometrik yöntemler ile diğer tipten bazı düğümlerin, örneğin 2-köprülü düğümlerin $SU(2)$ temsilleri uzayının topolojik yapısı belirlenmeye çalışılacaktır. Bir düğüm grubunun bir $SU(2)$ temsilini belirlemek demek düğüm grubundaki ilişkiler sağlanacak şekilde birim kuaterniyonlar bulmak demektir. Bu da kuaterniyonlardan oluşan bir denklem sistemini çözmeyi gerektirir. Elbette bu denklemler cebirsel işlemler kullanılarak da çözülebilir ancak üreteç sayısı n olan bir düğüm grubunun $SU(2)$ temsilini bu yöntemle bulmaya çalışmak n bilinmeyenli n kuaterniyonik denklemi çözmeyi gerektirir ki bu da oldukça zahmetli ve zor bir iştir. Bu sebeple böyle denklemleri çözmek için geometrik yöntemler kullanmak kontrolü elde tutmak açısından oldukça önemlidir.

KAYNAKÇA

- [1] Sossinsky, A. (2002). *Knots, mathematics with a twist*. Harvard University Press
- [2] Crowell, R. H. and Fox, R. H. (1977). *Introduction to Knot Theory*, SpringerVerlag.
- [3] Cohn P.M. (1989). *Algebra, Volume 1*. John Wiley and Sons. New York.
- [4] Azcan H. (1991). *Spherical Representations of Link Quandles*, PHD.
- [5] Rolfsen D. (2003). *Knots and Links*, American Mathematical Society.
- [6] Akbulut, S. and Mc Carthy, J. (1990). *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres-an exposition*. Mathematical Notes, Princeton University Press.
- [7] Burde, G. and Zieschang, H. (2003). *Knots*, 2nd revised and extended edition. Walter de Gruyter Berlin·New York.
- [8] Armstrong, M. A. (1983). *Basic Topology*. Springer.
- [9] Gray, B. (1975). *Homotopy theory: an introduction to algebraic topology*. Academic Press.
- [10] Heusener, M. (2003). *An Orientation for the $SU(2)$ -representation space of knot groups*, Topology and Its Applications, 127, 175-197.
- [11] Heusener, M. and Kroll, J. (1998). *Deforming abelian $SU(2)$ -representations of knot groups*. Comment. Math. Helv., 73, 480-498.
- [12] Klassen, E. P. (1991). *Representations of knot groups in $SU(2)$* . Transaction of the AMS 326(2).
- [13] Kosniowski, C. (1980). *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press.
- [14] Ledermann W. (1973). *INTRODUCTION TO GROUP THEORY*, LONGMAN GROUP LIMITED.

- [15] Lima, E. L. (2003). *Fundamental Groups and Covering Spaces*. A K Peters/CRC Press.
- [16] Lin, X.-S. (1992). *A knot invariant via representation spaces*. J. Differential Geometry, 35, 337-357.
- [17] Magnus, W., Karrass A. and Solitar D. (2004). *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, 2nd Revised edition, Dover Publications.
- [18] Massey, W. S. (1977). *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer.
- [19] Robinson, D. J. S. (1995). *A Course in the Theory of Groups*. 2nd edition, Springer.
- [20] Rotman, J. J. (1994). *An Introduction to the Theory of Groups*. 4th edition, Springer.
- [21] Switzer, R. M. (2002). *Algebraic Topology-Homology and Homotopy*, Springer.
- [22] Ryan, P. J. (2006). *EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY AN ANALYTIC APPROACH*. Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet ERGEN
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı : Gaziantep / 1982
E-Posta : mergen@anadolu.edu.tr, mehmet7ergen@gmail.com

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2005, Lisans, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2006, Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2008, Yüksek Lisans, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yayınları ve Bilimsel Faaliyetleri:

- 2007, Lisansüstü Yaz Okulu, İTÜ-TÜBİTAK LİSANSÜSTÜ YAZ OKULU, Multilinear Algebra and Vector Bundles, İstanbul Teknik Üniversitesi İstanbul.
- 2009, Sempozyum, VII. GEOMETRİ SEMPOZYUMU, Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir.
- 2010, Sempozyum, XXIII. ULUSAL MATEMATİK SEMPOZYUMU, Erciyes Üniversitesi Kayseri.
- Değirmenci N., Ergen M. (2011) Hopf Demetleri Üzerinde Yeni Bir Konneksiyon Formları Ailesi. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ-B Teorik Bilimler, 1(2), 129-133.
- 2012, TUBİTAK | 1001 - Araştırma Projesi, Türkiye'de Tarımsal Üretimde Tarım İşletmelerinin Verimlilik Ve Etkinlik Üzerine Etkisi Ve Seçilmiş Ürünlerin Kaotik Dinamik Analizi: Sorunlar, Çözümler Ve Politika Önerileri 109K129.
- Demir B., Alptekin N., Kılıçaslan Y., Ergen M., Uslu N. Ç. (2015). Forecasting Agricultural Production: A Chaotic Dynamic Approach. World Journal of Applied Economics, I(1), 65-80