ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Dünya KARAPINAR

GRUP ETKİLERİNİN KOMPAKTLAMALARA GENİŞLEMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP ETKİLERİNİN KOMPAKTLAMALARA GENİŞLEMESİ

Dünya KARAPINAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ../../2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oy birliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…………………………...
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
DANIŞMAN

....
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
ÜYE

....
Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
ÜYE

…………………….
Prof. Dr. Erol YAŞAR
ÜYE

....……………………
Doç. Dr. Şehmus FINDIK
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma TÜBİTAK-BİDEB Tarafından Desteklenmiştir.

ÖZ
DOKTORA TEZİ

GRUP ETKİLERİNİN KOMPAKTLAMALARA GENİŞLEMESİ

Dünya KARAPINAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Yıl: 2018, Pages:39
Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Doç. Dr. Şehmus FINDIK

X bir Tychonoff G-uzayı, G sonlu ayrık bir grup ve A, X'in bir yoğun G-invaryant alt uzayı olsun. Bu çalışmada, Gelfand kompaktlama metodu kullanarak, bir kompakt G-uzayına homeomorfik, A/G orbit uzayının bir kompaktlaması inşa edildi. Ayrıca bir uygulama olarak, çift fonksiyonlar halkasının maksimal ideallerinin kümesinin Stone topolojisiyle beraber negatif olmayan rasyonellerin bir kompaktlaması olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Gelfand kompaktlamaları, sonlu grup etkisi, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar halkası

ABSTRACT

PhD THESIS

EXTENDING GROUP ACTIONS TO COMPACTIFICATIONS

Dünya KARAPINAR

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2018, Pages:39
Jury : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Assoc. Prof. Dr. Şehmus FINDIK

Let X be a Tychonoff G-space, G be a finite discrete group and A be a dense and G-invariant subspace of X. In this work, by means of Gelfand's method, we construct a compactification of the orbit space A/G which is homeomorphic a compact G-space. As an application, we show that, the set of maximal ideals of even function ring with Stone topology is a compactification of non-negative rationals.

Key Words: Gelfand compactification, finite group action, continuous and bounded functions ring

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

X bir Tychonoff uzayı ve *G*, X üzerine sürekli etki eden bir topolojik grup olmak üzere G etkisinin genişletilebildiği *X*’in bir γX kompaktlaması varsa γX ’e X ’in bir *G*-kompaktlaması denir. *G*-kompaktlama her zaman mevcut olmayabilir. Örneğin Megrelishvili (1988), *G* kompaktlamaya izin vermeyen bir *G* topolojik grubu ve bu grubun etki ettiği bir Tychonoff *G*-uzayı bulmuştur.

Bununla beraber bazı sonuçlar vardır. Bu sonuçlara birkaç örnek verecek olursak, R. Palais(1960) bir yerel kompakt *G*-uzayının Alexandroff kompaktlamasının kendisini bir *G*- kompaktlaması olduğunu göstermiştir. J. De Viries (1978) *G* yerel kompakt grup ise her *G*-uzayının bir *G*-kompaktlamaya sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca yine J. De Viries (1978), bir *X* Tychonoff uzayının *G*-kompaktlamaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun noktaları kapalı kümelerden ayıran bir α-düzgün fonksiyonlarının bir ailesi olması koşulu olduğunu göstermiştir.

Eğer X ’in bir *G*-kompaktlaması varsa, kompaktlamaların alışıldık sıralaması ile, $\beta_G X$ ile gösterilen bir maximal *G*-kompaktlaması vardır. Srivastava (1987) sonlu bir G grubu için $\beta_G X = \beta X$ ve $\beta(X/G) = \beta X/G$ olduğunu göstermiştir. (βX, X ’in, Stone-Cech kompaktlamasını göstermektedir.)

Bu tezde çeşitli kompaktlama metodları arasından Gelfand kompaktlama metodu kullanılarak sonlu *G* grubu ve *X* Tychonoff *G*-uzayının yoğun invaryant alt uzayları için Srivastava’nın (1987) elde ettiği sonuçların benzeri sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere fazla ayrıntısına girilmeden yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Porter ve Woods(1988)'den yararlanılarak, çeşitli kompaktlama yöntemleri arasından Gelfand kompaktlama metodu anlatılmıştır. Teoremlerin ispatları verilmemiştir. Teoremlerin ispatları ve Gelfand kompaktlaması ile ilgili daha detaylı bilgiler için Porter ve Woods(1988)'den faydalanılabilir.

Üçüncü bölümde, kompaktlamalarla ilgili daha önce yapılmış Srivastava'nın (1987) bir çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir. Srivastava sonlu bir *G* grubu etkisi altında bir *X* Tychonoff uzayının βX Stone-Cech kompaktlamasının uzayın maksimal *G*-kompaktlaması olduğunu ve bu kompaktlamanın orbit uzayının da uzayın orbit uzayının Stone-Cech kompaktlaması olduğunu göstermiştir.

Bununla beraber $X^* = \beta X - X$ kalan uzayı βX'in bir *G*-retraktı ise yani X^*'ın noktalarını sabit bırakan *G*-ekivaryant bir $r : \beta X \to X^*$ sürekli dönüşümü var ise *X* Tychonoff uzayına *G*-retractive uzay denir. Srivastava (1987) *G*- retractive uzayların orbit uzaylarınında *G*-retractive olduğunu göstermiştir.

Dördüncü bölümde, Srivastava'nın (1987) sonuçları geliştirilmeye çalışılmıştır. X bir Tychonoff G-uzayı, G sonlu ayrık bir grup ve A, X'in bir yoğun G invaryant alt uzayı olmak üzere Gelfand metodu kullanarak A/G orbit uzayının, bir kompakt G-uzayına homeomorfik, bir kompaktlaması inşa edilmiştir Ayrıca bir uygulama olarak, çift fonksiyonlar halkasının maksimal ideallerinin kümesinin, üzerindeki Stone topolojisiyle negatif olmayan rasyonellerin bir kompaktlaması olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölüm, sonuç ve öneriler kısmıdır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yapıcı ve yönlendirici fikirleriyle bana yol gösteren, değerli zamanını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim süresince verdiği burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca varlığından güç aldığım, umut veren sözleriyle beni destekleyen, her zaman gurur duyduğum aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1.GİRİŞ

Tanım 1.1: $(G,\ .)$ bir cebirsel grup olsun. Eğer G bir (Hausdorff) topolojik uzay

$$G\times G \longrightarrow G$$
$$(g,h) \longrightarrow g.h$$

ve

$$G \longrightarrow G$$
$$g \longrightarrow g^{-1}$$

fonksiyonları sürekli ise G 'ye topolojik grup denir.

Not: Her cebirsel grup üzerindeki ayrık topolojiyle topolojik gruptur.

Tanım 1.2: G bir topolojik grup, X bir (Haussdorff) topolojik uzay, ve

$$\theta : G\times X \longrightarrow X$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

i) Her $x\in X$ için $\theta(e,x)=x$

ii) Her $g,h\in G$ ve $x\in X$ için

$$\theta(g,\theta(h,x))=\theta(gh,x)$$

koşulları sağlanıyorsa G grubuna bir dönüşüm grubu, X topolojik uzayına bir *G*-uzayı ve θ fonksiyonuna G 'nin X üzerindeki bir etkisi denir.

X bir G -uzayı dediğimizde (X, G, θ) üçlüsünü kastedeceğiz. Burada X bir topolojik uzay, G bir topolojik grup ve θ, G 'nin X üzerindeki etkisidir.

Her $(g, x) \in G \times X$ için $\theta(g, x) = \theta_g(x) = gx$ notasyonunu kullanalım.

Tanım 1.3: X bir G-uzayı olsun. A, X 'in bir alt uzayı olmak üzere, $\theta(G \times A) = A$ ise A 'ya X uzayının bir G -invaryant alt uzayı denir.

Tanım 1.4: X bir G -uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$G(x) = \{\theta(g, x) = gx : g \in G\}$$

alt uzayına *x*'in orbiti denir. X / G ile *X*'in bütün orbitlerinin kümesini gösterelim. $\pi : X \longrightarrow X / G$ $\pi(x) = G(x)$ olarak tanımlanan fonksiyona orbit fonksiyonu denir. X / G uzayına, π ile ilişkili olan bölüm topolojisiyle, X'in orbit uzayı denir.

Orbit fonksiyonunun açık dönüşüm olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım1.5: Her $x \in X$ için $G(x) = \{x\}$ ise G grubunun X uzayı üzerindeki θ etkisine aşikar etki denir.

Tanım1.6: Her $x \in X$ için $G(x) = X$ ise G grubunun X uzayı üzerindeki θ etkisine geçişmeli etki denir.

Tanım 1.7: X ve Y birer $G-$uzayı olmak üzere her $g \in G$ ve her $x \in X$ için

$$f(g.x) = g.f(x)$$

olacak şekilde $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona ekivaryant fonksiyon denir.

Tanım 1.8: X bir topolojik uzay ve $\mathbb{R}$ standart topolojisiyle donatılmış olsun.

$$C(X) = \{ f : f : X \to \mathbb{R} \text{ sürekli} \} \text{ ve}$$

$$C^*(X) = \{ f : f : X \to \mathbb{R} \text{ sürekli ve sınırlı} \}$$

olarak tanımlanır. $C^*(X) \subseteq C(X)$ dir.

Tanım1.9: $f, g \in C(X)$ olsun. $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

olarak tanımlanırsa $C(X)$, bu işlemler altında $\mathbb{R}$ üzerinde birim elemanlı, değişmeli bir halkadır ve $C^*(X)$, $C(X)$'in bir alt halkasıdır. $C(X)$ halkasına sürekli fonksiyonlar halkası denir.

Tanım 1.10: $C^*(X)$ üzerinde, $\|f\| = \underset{x\in X}{Sup}|f(x)|$ olarak tanımlanan ,$\|.\|$, supremum normunun belirlediği

$$d(f,g) = \|f-g\|$$

metriğine supremum metriği veya düzgün metrik denir.

Tanım 1.11: $Q \subseteq C^*\left(X\right)$ olsun. $p,q \in X$ ve $p \neq q$ için $f\left(p\right) \neq f\left(q\right)$ olacak şekilde $f \in Q$ varsa Q'ya noktaları ayıran bir fonksiyon ailesi denir.

Tanım 1.12: X bir topolojik uzay ve $F^{kapalı} \subseteq X$ olsun. Her $x_0 \in X / F$ için $f(x_0) = 0$ ve $f(F) = \{1\}$ olacak şekilde $f \in C^*(X)$ $(0 \leq f \leq 1)$ varsa**,** X 'e tam regüler uzay denir.

Tanım 1.13: Tam regüler ve Hausdorff olan bir X topolojik uzayına Tychonoff uzay denir.

Tanım 1.14: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$$

kümesine f'nin sıfır kümesi denir. $Q \subseteq C\left(X\right)$ olmak üzere $Z[Q] = \{Z(f) : f \in Q\}$ olarak tanımlanır.

Önerme 1.15: $Z[C^*(X)] = Z[C(X)]$ dir.

Bundan sonra X 'teki bütün sıfır kümelerinin $Z[C(X)]$ ailesini $Z(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.16: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$ X'in bir takım kapalı alt kümelerinden oluşan bir aile olmak üzere X in her kapalı alt kümesi $\mathcal{B}$'nin bir takım alt kümelerinin kesişimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesine, X topolojik uzayının kapalı kümeleri için bir bazdır denir.

Önerme 1.17: $\mathcal{B}$ X topolojik uzayının kapalı kümeleri için bir baz olması için gerek ve yeter koşul her $F^{kapalı} \subseteq X$ ve $x \notin F$ için $F \subseteq B$ ve $x \notin B$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ olmasıdır.

Önerme 1.18: X bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir.

i) X Tychonoff uzaydır

ii) $Z(X)$, X 'in kapalı kümeleri için bazdır.

Teorem 1.19: X bir topolojik uzay olsun. O zaman $Z(X)$ sonlu birleşim ve sayılabilir kesişimler altında kapalıdır.

Tanım 1.20: X ‘i yoğun bir alt uzay olarak içeren kompakt ve Hausdorff Y uzayına X uzayının bir kompaktlaması denir.

Başka bir ifadeyle, X bir topolojik uzay, Y kompakt ve Hausdorff bir topolojik uzay olsun. $Cl_Y f(X) = Y$ olacak şekilde sürekli, bire-bir ve açık bir $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümü varsa Y uzayına X uzayının bir kompaktlaması denir.

Bir topolojik uzayın kompaktlaması Tychonoff uzaydır ve bir Tychonoff uzayın her alt uzayı da Tychonofftur. O halde sadece Tychonoff uzayların kompaktlaması vardır.

Bundan sonra bütün uzayları Tychonoff uzay kabul edeceğiz.

Y_1 ve Y_2, X ’in iki kompaktlaması olsun. $Y_1 \equiv_X Y_2 \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $f(x) = x$ koşulunu sağlayan $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ homeomorfizması vardır. Kolayca görülebilirki $\equiv_X$ bağıntısı X ’in kompaktlamaları arasında bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.21: $Y_1 \equiv_X Y_2$ ise Y_1 ve Y_2 kompaktlamalarına X ’in eşdeğer kompaktlamaları denir.

$K(X)$, X ’in, $\equiv_X$ denklik bağıntısına göre, bütün kompaktlamalarının denklik sınıflarının kümesi olsun. $Y_1, Y_2 \in K(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = x$ koşulunu sağlayan sürekli bir $f : Y_2 \longrightarrow Y_1$ fonksiyonu varsa $Y_1 \leq Y_2$ yazılır. “$\leq$“ bağıntısı $K(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 1.22: $(A,\leq)$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere $a,b\in A$ elemanlarının her çifti için $\sup\{a,b\}=a\vee b$ ve $\inf\{a,b\}=a\wedge b$ varsa $(A,\leq)$ kısmi sıralı kmesine bir **latis** denir .

Tanım 1.23: $(A,\leq)$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere her $\emptyset\neq B\subseteq A$ için $\sup B$ varsa $(A,\leq)$ kısmi sıralı kümesine bir üst yarı tam latis denir.

Tanım 1.24: $(A,\leq)$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere her $\emptyset\neq B\subseteq A$ için $\inf B$ varsa $(A,\leq)$ kısmi sıralı kümesine bir alt yarı tam latis denir.

Tanım 1.25: $(A,\leq)$ bir latis olmak üzere A alt ve üst yarı tam latis ise $(A,\leq)$ latisine tamdır denir.

Önerme 1.26: X bir topolojik uzay olmak üzere $K(X)$ üst yarı tam latistir ve $K(X)\neq\emptyset$ ise $K(X)$'in maksimum elemanı vardır. $K(X)$'in maksimum elemanına X topolojik uzayının Stone-Cech kompaktlaması denir ve βX ile gösterilir.

2.GELFAND KOMPAKTLAMASI

Bu bölümde, çeşitli kompaktlama metodları arasından Gelfand kompaktlama metodundan bahsedeceğiz. Daha ayrıntılı bilgiler için Porter ve Woods (1988)' dan yararlanılabilir.

Q, $C^*(X)$'in $\mathbb{R} \subseteq Q$ olacak şekilde bir alt halkası olsun. Q'nun maksimal ideallerinin kümesini $m_Q X$ ile göstereceğiz. O halde $m_Q X = \{M : M,\ Q$ halkasının bir maksimal ideali$\}$ dir. Öte yandan $f \in Q$ ise $S(f) = \{M \in m_Q X : f \in M\}$ olarak alacağız.

Teorem 2.1: Q, $C^*(X)$' in $\mathbb{R} \subseteq Q$ olacak şekilde bir alt halkası olsun. O halde,

i) $S(1) = \varnothing$ ve $S(0) = m_Q X$

ii) $S(f) \cup S(g) = S(fg)$

iii) $S(f) \cap S(g) \subseteq S(f^2 + g^2)$

iv) $\{S(f) : f \in Q\}$, $m_Q X$ üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeleri için bazdır.

Tanım 2.2: $m_Q X$, kümesi üzerinde $\{S(f) : f \in Q\}$ ailesini kapalı kümelerine baz kabul eden yegane topolojiye **Stone topolojisi** denir.

Tanım 2.3: X bir topolojik uzay ve Q, supremum metriğine göre $C^*(X)$'in bir tam alt halkası olsun. Eğer

i) $\mathbb{R} \subseteq Q$

ii) $Z[Q] = \{Z(f): f \in Q\}$ kümesi X'in kapalı kümeleri için bazdır.

Koşulları sağlanıyor ise Q'ya $C^*(X)$ 'in bir regüler alt halkası denir.

Teorem 2.4: X bir Tychonoff uzay ve Q, $C^*(X)$'in , $\mathbb{R} \subseteq Q$ olacak şekilde, bir tam alt halkası olsun. O zaman $m_Q X$ kompakt ve Haussdorff uzaydır.

Ayrıca $f, g \in Q$ için,

$$\{M \in m_Q X : f + M > g + M\}$$

kümesi $m_Q X$ 'de açıktır.

Önerme 2.5: Q, $C^*(X)$'in regüler alt halkası ve $x \in X$ olsun. $M_X = \{f \in Q : f(x) = 0\}$ olmak üzere $M_X \in m_Q X$ dir.

Teorem 2.6 (Gelfand): Q, $C^*(X)$'in bir regüler alt halkası olsun. O halde

$$\lambda : X \longrightarrow m_Q X$$
$$\lambda(x) = M_X$$

yoğun bir gömmedir. Dolayısıyla $m_Q X$, X'in bir kompaktlamasıdır.

Tanım 2.7: X bir Tychonoff uzay ve Y, X'in bir kompaktlaması olsun. Eğer $C^*(X)$'in regüler bir Q alt halkası için

$$Y \equiv_X m_Q X$$

oluyorsa Y 'ye bir Gelfand Kompaktlaması denir.

Aşağıdaki teorem her kompaktlamanın bir Gelfand kompaktlaması olduğunu söyler.

Teorem 2.8: X bir Tychonoff uzay, $T \in K(X)$ ve $Q = \{ f \mid X : f \in C^*(T) \}$ olsun.

i) Q, $C^*(X)$ 'in regüler alt halkasıdır.

ii) $M^p = \{ f \mid X : f \in C^*(T) \text{ ve } f(p) = 0 \}$ olmak üzere

$m_Q X = \{ M^p : p \in T \}$ dir.

iii) $T \equiv_X m_Q X$ dir.

Sonuç 2.9: X bir Tychonoff uzay olsun.

i) $\beta X \equiv_X m_Q X$ dir. Burada $Q = C^*(X)$ dir.

ii) βX , X 'in C^* -gömüldüğü tek kompaktlamadır.

iii) Eğer $X \subseteq T \subseteq \beta X$ ise $\beta T \in K(X)$ ve $\beta T \equiv_X \beta X$ dir.

3.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde Srivastava'nın (1987) bir çalışması detaylıca incelenmiştir. Srivastava bu çalışmasında, G sonlu bir grup olmak üzere , G ayrık grubunun X Tychonoff uzayı üzerindeki etkisini βX 'e genişleterek X' in orbit uzayının Stone-Cech kompaktlamasının, βX 'in orbit uzayı olduğu göstermiş ve ayrıca G-retractive uzay tanımı vermiş ve bir G-retractive uzayın orbit uzayının G-retractive olduğunu göstermiştir.

X bir Tychonoff uzay, G ayrık grup, θ X üzerinde G'nin bir etkisi olsun. βX , X Tychonoff uzayının Stone- Cech kompaktlaması ve $X^* = \beta X - X$ olmak üzere X üzerindeki A^P z- ultrafitresi $p \in \beta X$ ile temsil edilsin.

X , Y Tychonoff uzay olmak üzere $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun βf Stone genişlemesi

$$(\beta f)\ (p) = \bigcap_{Z \in A^P} Clf(Z)$$

şeklindedir.

G ayrık grubunun X Tychonoff uzayı üzerindeki etkisini βX 'e genişletebiliriz.

3.1. G ' nin βX üzerindeki etkisi

X bir G uzayı ve $g \in G$ için $T_g : X \longrightarrow X$ $T_g(x) = g.x$ homeomorfizmini düşünelim. A, X 'in bir alt kümesi ve Λ, X ' in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $T_g(A) = \{ g.a : a \in A\}$ kümesini $g.A$ ve $T_g(\Lambda) = \{g.A : A \in \Lambda\}$ ile gösterelim.

e, G ’nin birim elemanı ve g_1 ,$g_2 \in G$ olmak üzere

$$e.A = A \text{ ve}$$

$$g_1.(g_2.A) = (g_1.g_2).A$$

dir.

A bir z–ultrafiltre olsun. $g \in G$ olmak üzere $g.A$ bir z – ultra filtredir.

θ, G ’nin X üzerindeki etkisi olmak üzere

$$\theta_\beta : G \times \beta X \to \beta X$$
$$\theta_\beta \left(g, A^x \right) = gA^x = \left\{ gZ \in gZ\left(X \right) : x \in Z \right\}$$

X üzerindeki θ etkisinin etkisinin βX ’e genişlemesidir. Burada $x \in X$ için $A^x = \left\{ Z \in Z(X) : x \in Z \right\}$ dir. Bunun için sadece θ_β ’nin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. X ’in Z sıfır kümeleri ve $g \in G$ için

$$g.\, cl_{\beta X} Z = cl_{\beta X} (g.Z)$$

olur. Böylece

$$\left(\theta_\beta \right)^{-1} \left(cl_{\beta X} Z \right) = \bigcup_{g \in G} (\{g\} \times cl_{\beta X} \left(g^{-1} Z \right))$$

olup θ_β süreklidir.

Lemma 3.1: X ve Y, G –uzayları için

i) X ve X^*, βX ’in G –invaryant alt uzaylarıdır.

ii) X üzerindeki θ geçişmeli etkisinin βX üzerindeki θ_β genişlemesi geçişmeli olması için gerek ve yeter şart X 'in kompakt olmasıdır.

iii) $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ekivaryant fonksiyonunun $\beta f : \beta X \to \beta Y$ Stone genişlemesi ekivaryanttır.

Teorem3.2: G sonlu bir grup olmak üzere X bir G –uzay olsun. O halde X/G orbit uzayının Stone–Cech kompaktlaması X 'in Stone–Cech kompaktlamasının orbit uzayıdır.

İspat: X/G, $\beta X/G$ kompakt uzayının yoğun bir alt uzayıdır. Bredon (1972) Teorem 3.1'den G kompakt olduğundan dolayı $\beta X/G$ Haussdorfftur.

$$i : X/G \longrightarrow \beta X/G$$

içerme fonksiyonunun βi stone genişlemesinin homeomorfizm olduğunu göstereceğiz.

$$\pi_X : X \to X/G$$

$$\pi : \beta X \to \beta X/G$$

orbit fonksiyonları ve

$$i_X : X \to \beta X$$

içerme fonksiyonu olmak üzere

$$i \circ \pi_X = \pi \circ i_X$$

dir. Buradan

$$\beta i \circ \beta\pi_X = \pi \circ I_{\beta X}$$

elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[r] \arrow[d] & \beta(X/G) \arrow[d] \\
\beta X \arrow[r] & \beta X/G
\end{tikzcd}$$

Diagramı değişmeli olup $q_1,\ q_2 \in \beta(X/G)$ için $p_1 \in (\beta\pi_x)^{-1}(q_1)$ ve $p_2 \in (\beta\pi_x)^{-1}(q_2)$ seçelim. O halde $(\beta i)(q_1) = (\beta i)(q_2)$ ve dolayısıyla $G(p_1) = G(p_2)$ olur. Böylece bir $g \in G$ için $p_1 = gp_2$ olur. $\beta\pi_X$ 'in ekivaryant oluşu ve $\beta(X/G)$ üzerindeki etkinin trivial oluşunu kullanarak $q_1 = q_2$ sonucunu elde ederiz. Öte yandan $G_p \in \beta X/G$ olmak üzere

$$(\beta i)(\beta\pi_x)(p) = G_p$$

olur. Böylece

$$\beta i : \beta(X/G) \longrightarrow \beta X/G$$

dönüşümü homeomorfizmdir.

3.2. *G*- Retractive Uzaylar

Tanım 3.3: X bir G-uzay, A X'in invaryant alt uzayı olmak üzere $r : X \longrightarrow A$ sürekli ve örten fonksiyon olsun.

Eğer

i) *r*, *G*-ekivaryant

ii) Her $a \in A$ için $r(a) = a$

koşullarını sağlıyorsa *r* , X 'den *A*'ya bir G - retractiondır ve *A*, *X*'in bir *G*-retractı denir.

Eğer X^* invaryant alt uzayı, βX'in *G*-retractı ise X *G*-uzayına G –retractive uzay denir.

Örnek 3.4: X kompakt olmayan Tychnoff uzay $p \in X^*$ olmak üzere $S = \beta X - \{p\}$ olsun. O halde $\beta S = \beta X$ dir.

$\{ f : f : S \longrightarrow S$ bir homeomorfizm $\}$ bu bileşke işlemiyle bir gruptur.

$$\theta : G \times S \to S$$

$$\theta(T, S) = T(S)$$

bu bir etkidir. Lemma 3.1(i) düşünürsek $S^* = \{p\}$ invaryant alt uzaydır. Kolayca görülüyorki S^*, βS'nin G –retractıdır.

Yardımcı Teorem 3.5: Eğer X, G –retractive uzay ise , X^{*}/G , $\beta X/G$ nin G-retractı olur.

İspat: X , G –retractive uzay olsun. O halde

$$r: \beta X \to X^*$$

sürekli, ekivaryant, örten ve her $a \in X^*$ için $r(a) = a$ olacak şekilde bir r fonksiyonu vardır. $p \in \beta X$ olmak üzere

$$r_1(G(p)) = G\,(r(p))$$

olarak tanımlanan dönüşüm bir G-retractiondır.

Teorem 3.6: G sonlu grup olmak üzere bir G –retractive uzayın orbit uzayı G –retractivedir.

İspat: G sonlu bir grup olmak üzere X , G-retractive uzay, r βX 'den X^*'a $G-$retraction, $\beta i : \beta(X/G) \to \beta X/G$ ve $r_1 : \beta X/G \to X^{*}/G$ sırasıyla Teorem(3.2) ve Yardımcı Teorem (3.5)'deki dönüşümler olsun.

$$r_2 : \beta(X/G) \to (X/G)^{*}$$

$$r_2(q) = f(r_1(\beta i(q)\ )$$

olarak tanımlayalım.

Burada $q \in \beta(X \setminus G)$ ve $p \in X^*$ olmak üzere

$$f:\ X^{*}/\ G \longrightarrow \left(X/G\right)^{*}$$

$$f(G(p)) = (\beta i)^{-1}(G(p))$$

şeklindedir. r_2 sürekli, örten ve ekivaryant olup G- retraction olur.Ayrıca aşağıdaki diagramı dikkatlice incelersek r_2 nin G- retraction olduğunu görebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
\beta(X/G) \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "\beta i"'] & (X/G)^{*} \\
\beta X/G \arrow[r, "r_1"] & X^{*}/G \arrow[u, "f:(\beta i)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

4. ORBİT UZAYININ BİR KOMPAKTLAMASI

Bu bölümde Srivastava'nın (1987) sonuçları geliştirilmeye çalışılmıştır. X bir Tychonoff G-uzayı , G sonlu ayrık bir grup ve A, X'in bir yoğun G-invaryant alt uzayı olsun. Gelfand kompaklaştırma metodu kullanarak, A/G orbit uzayının bir kompaktlamasını inşa edeceğiz. Ayrıca bir uygulama olarak, çift fonksiyonlar halkasının maksimal ideallerinin kümesinin Stone topolojisiyle beraber negatif olmayan rasyonellerin bir kompaktlaması olduğunu göstereceğiz.

X bir G-uzayı dediğimizde (X,G,θ) üçlüsünü kastedeceğiz. Burada X bir topolojik uzay, G bir topolojik grup ve θ, G nin X üzerindeki etkisidir.

γX , X in bir kompaktlaması olsun. Eğer G nin X üzerindeki etkisi γX e genişliyorsa γX e X in bir $G-$ kompaktlaması denir. X, bir $G-$ kompaktlamaya sahip olmayabilir. Örneğin, Megrelishvili (1988) kompakt ve Hausdorff genişlemesi olmayan bir Tychonoff G- uzayı inşa etmiştir. Ancak belirli koşullar altında $G-$ kompaktlamanın varlığı söylenebilir. Örneğin, R.Palais (1960) yerel kompakt $G-$uzayı için Alexandroff kompaktlamasının bir $G-$ kompaktlama olduğunu ve J.de.Vries (1978) de, G yerel kompakt grup ise, her X Tychnoff G- uzayının bir $G-$ kompaktlamaya sahip olduğunu ispatlamıştır ve $G-$etkisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şartın X'in $G-$ kompaktlamasına sahip olmasıdır önermesini ispatlamıştır.

Srivastava (1987), G sonlu bir grup olmak üzere G ayrık grubunun X Tychonoff uzayı üzerindeki etkisini βX genişleterek X' in orbit uzayının Stone-Cech kompaktlamasının X'in βX Stone-Cech kompaktlamasının orbit uzayı olduğunu göstermiştir. Biz, bu bölümde X 'in yoğun ve invaryant alt uzayları için benzer bir sonucu göstereceğiz. Bundan sonra A, X uzayının bir G-invaryant yoğun alt uzayını gösterecektir.

Lemma 4.1: Eğer $\mathcal{A} = \{ f|_A : f \in C^*(X) \}$ ise, $\mathcal{A}$, $C^*(A)$ ‘nın regüler bir alt halkasıdır. Böylece $M_{\mathcal{A}} A$, A ’nın bir kompaktlaması olur.

İspat: $\mathcal{A}$ ’nın $C^*(A)$ ‘nın regüler bir alt halkası olduğunu göstermek için; $\mathcal{A}$ ’nın $C^*(A)$ ‘nın bir tam alt halkası olduğunu, $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$ oluşunu, (yani $\mathcal{A}$ nın sabitleri içerdiğini) ve $Z[\mathcal{A}]$ nın A nın kapalı kümeleri için baz olduğunu kanıtlamalıyız.

$f|_A, g|_A \in \mathcal{A}$ olsun. $f|_A - g|_A = (f-g)|_A \in \mathcal{A}$ ve $f|_A . g|_A = (f.g)|_A \in \mathcal{A}$ olup $\mathcal{A}$, $C^*(A)$ ‘nın bir alt halkasıdır.

Şimdi $\mathcal{A}$ nın supremum metriğine göre tam olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $(f_n|_A)_{n \in N}$ $\mathcal{A}$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. $(f_n)_{n \in N}$ $C^*(X)$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $(f_n|_A)_{n \in N}$ $\mathcal{A}$ içinde bir Cauchy dizisi olduğundan, $N \le n \le m$ için

$$d(f_n|_A, f_m|_A) = \sup\{ |f_n(x) - f_m(x)| : x \in A \} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$x \in X$ olsun. $\overline{A} = X$ olduğundan, A ’da $\lim x_k = x$ olacak şekilde (x_k) dizisi vardır. O halde $N \le n \le m$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \lim_{k\to\infty} | f_n(x_k) - f_m(x_k) |$$

$$\leq \sup \{ | f_n(x) - f_m(x) | : x \in A \} < \varepsilon$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece $(f_n)_{n\in N}$ $C^*(X)$ de bir Cauchy dizisidir. $C^*(X)$ tam olduğundan $\lim f_n = f$ olacak şekilde $f \in C^*(X)$ vardır. Buradan $\lim(f_n|_A) = f|_A$ ve $f | A \in \mathcal{A}$ olur. Böylece $\mathcal{A}$'nın $C^*(A)$ 'nın bir tam alt halkası olur.

r$\in \mathbb{R}$ alalım. $\mathbb{R} \subseteq C^*(X)$ olup sabitlerin A'ya kısıtlanışıda sabittir. Dolayısıyla $\mathcal{A}$' nın sabitleri içerdiği kolayca görülebilir.

Öte yandan *F*, *X* içinde kapalı bir küme ise $F = \bigcap_{i\in I} Z(f_i)$ olacak şekilde $\{f_i\}_{i\in I} \subset C^*(X)$ ailesi vardır. Buradan $Z(f) \bigcap A = Z(f|_A)$ olduğundan,

$$F \cap A = \bigcap_{i\in I} Z(f_i) \cap A = \bigcap_{i\in I} Z(f_i|_A)$$

olur. Dolayısıyla

$$Z[\mathcal{A}] = \{Z(g) : g \in \mathcal{A}\} = \{Z(f|_A) : f \in C^*(X)\}$$

A'nın kapalı kümeleri için bazdır.

Böylece $\mathcal{A}$, $C^*(A)$ 'nın regüler bir alt halkası olduğundan $M_{\mathcal{A}}A$, A'nın bir kompaktlaması olur.

Tanım 4.2 : γX **,** X **'**in bir kompaktlaması olsun. Eğer G'nin X üzerindeki etkisi γX **'**e genişliyorsa γX 'e X **'**in bir $G-$kompaktlaması denir.

Önerme4.3: $M_{\mathcal{A}}A$, A'nın bir $G-$kompaktlamasıdır.

İspat: P**,** $\mathcal{A}$**'**nın bir maksimal ideali ve her $g \in G$ için $gP = \{ f\,|_A \circ \theta_{g^{-1}} : f\,|_A \in P\}$ olsun. Burada θ**,** G'nin X üzerindeki etkisi olmak üzere her $g \in G$ için

$$\theta_{g^{-1}} : A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow \theta(g^{-1}, a) = g^{-1}a$$

şeklinde tanımlı homeomorfizmdir.

Öncelikle gP'nin $\mathcal{A}$' nın bir maksimal ideali olduğunu gösterelim. $f\big|_A \circ \theta_{g^{-1}}$ **,** $h\big|_A \circ \theta_{g^{-1}} \in gP$ olsun. $f\big|_A \circ \theta_{g^{-1}} - h\big|_A \circ \theta_{g^{-1}} = (f-h)\big|_A \circ \theta_{g^{-1}} \in gP$ olur. Öte yandan, $f\big|_A \circ \theta_{g^{-1}} \in gP$ ve $h\big|_A \in \mathcal{A}$ olsun. $h' = h \circ \theta_g$ olarak tanımlayalım.

$$(h\big|_A)(f\big|_A \circ \theta_{g^{-1}}) = (h'\big|_A\, f\big|_A) \circ \theta_{g^{-1}} \in gP$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$gP \subseteq I \subseteq \mathcal{A}$ olacak şekilde $\mathcal{A}$'nın bir I ideali olsun. $\mathcal{A}$'nın $g^{-1}I = \{ f\big|_A \circ \theta_g : f\big|_A \in I\}$ ideali için $P \subseteq g^{-1}I \subseteq \mathcal{A}$ olur. P, $\mathcal{A}$'nın maksimal ideali olduğundan $g^{-1}I = P$ veya $g^{-1}I = \mathcal{A}$ olur. O halde $I = gP$ veya $I = \mathcal{A}$ olur. Böylece gP , $\mathcal{A}$'nın bir maksimal idealidir.

Şimdi

$$\Psi : G \times M_{\mathcal{A}} A \longrightarrow M_{\mathcal{A}} A$$

$$\Psi(g, P) = gP = \{ f|_A \circ \theta_{g^{-1}} : f|_A \in P \}$$

şeklinde tanımlayalım.

Ψ , G'nin A üzerindeki etkisinin $M_{\mathcal{A}} A$'ya genişlemesidir. Bunu gösterelim.

Öncelikle Ψ 'nin bir etki olduğunu gösterelim. $P \in M_{\mathcal{A}} A$ ve e, G nin birim elemanı olmak üzere $\Psi(e, P) = eP = P$ dir. Öte yandan, her $g, h \in G$ ve her $P \in M_{\mathcal{A}} A$ için

$$\Psi(gh, P) = (gh)P = \{ f|_A \circ \theta_{(gh)^{-1}} : f|_A \in P \}$$

$$\begin{aligned} \Psi(g, \Psi(h, P)) &= \Psi(g, hP) \\ &= \{ f|_A \circ \theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}} : f|_A \in P \} = \Psi(gh, P) \end{aligned}$$

olup $\Psi(gh, P) = \Psi(g, \Psi(h, P))$ dir.

$gP \in S(f) = \{ M \in M_{\mathcal{A}} A : f \in M \}$ olsun. O halde $f \in gP$ dir. Yani $f = h\big|_A \circ \theta_{g^{-1}}$ olacak şekilde bir $h\big|_A \in P$ vardır. Buradan $f \circ \theta_g = h\big|_A$ olup $f \circ \theta_g \in P$ dir. Böylece $P \in S(gf)$ olur. Burada $gf = f \circ \theta_g$ olarak tanımlanmıştır.

Şimdi Ψ ’nin sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(S(f)) &= \{(g,P):\ \Psi(g,P)\in S(f)\}\\ &= \{(g,P):\ gP\in S(f)\}\\ &= \{(g,P):\ P\in S(gf)\}\\ &= \bigcup_{g\in G}\{g\}\times S(gf)\end{aligned}$$

olur. O halde Ψ süreklidir. Böylece $M_{\mathcal{A}}A$ bir G-uzayı olur.

$$\begin{aligned} i: A &\longrightarrow M_{\mathcal{A}}A\\ a &\longrightarrow M_a = \{f|_A:\ f\in C^*(X)\ \ ve\ f(a) = 0\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm Teorem 2.6’dan dolayı bir yoğun gömmedir.

i ekivaryant,yani $i(g.a) = g\ i(a)$ olduğunu gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} i\ (ga) &= M_{ga} = \{f|_A\ :\ f\in C^*(X) ve\ f(ga) = 0\}\\ g\ i(a) &= gM_a = \{f|_A\circ\theta_{g^{-1}} : f(a) = 0\}\end{aligned}$$

dır.

$M_{ga}\subseteq gM_a$ olduğunu gösterelim. $f|_A\in M_{ga}$ olsun. $f|_A\in M_{ga}$ olduğundan $f(ga) = 0$ dır. $h = f\circ\theta_g\in C^*(X)$ olsun. O halde $h\circ\theta_{g^{-1}} = f$ olup $h\circ\theta_{g^{-1}}(ga) = f(ga)$ olur. $f(ga)=0$ olduğundan $h(a)=0$ olur. Yani $f\big|_A = h\big|_A\circ\theta_{g^{-1}}$ olacak şekilde $h\in C^*(X)$ vardır. Buradan $f|_A$ $\in gM_a$ dir. Böylece $M_{ga}\subseteq gM_a$ olur. Öte yandan $f|_A\circ\theta_{g^{-1}}\in gM_a$ olsun.

Buradan $f(a) = 0$ dır. O halde $f|_A \circ \theta_{g^{-1}}(ga) \in M_{ga}$ dir. Böylece $gM_a \subseteq M_{ga}$ olur. O halde $i(g.a) = g\, i(a)$ olup i equivaryant bir fonksiyondur. Yani,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta_g"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "i"] \\ M_{\mathcal{A}}A \arrow[r, "\Psi_g"] & M_{\mathcal{A}}A \end{tikzcd}$$

diagramı değişmelidir. Böylece $M_{\mathcal{A}}A$, A'nın bir $G-$ kompaktlamasıdır.

Not: A/G orbit uzayı, X/G orbit uzayının yoğun alt uzayıdır. $\mathfrak{B} = \{ f|_{A/G} : f \in C^*(X/G)\}$ olmak üzere Önerme 4.3'ten $M_{\mathfrak{B}}(A/G)$ Stone topolojisiyle beraber A/G orbit uzayının bir kompaktlamasıdır.

Lemma 4.5: $\mathcal{A}' = \{ f \in \mathcal{A} : f$ 'nin her bir orbite kısıtlaması sabit$\}$ olsun. $\mathcal{A}'$, $C^*(A)$'nın tam halkasıdır.

İspat: $\left(f_n|_A \right)_{n\in N}$ $\mathcal{A}'$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Lemma 4.1 den, $(f_n)_{n\in N}$ $C^*(X)$'in bir Cauchy dizisidir ve $\mathcal{A}$'nın tamlığından $\lim f_n|_A = f$ olacak şekilde $f \in \mathcal{A}$ vardır. $f_n|_A$ orbitlerde sabit olduğundan, her $x \in A$ ve $g, h \in G$ için $f_n(gx) = f_n(hx)$ dir. Böylece $f(gx) = \lim f_n(gx) = \lim f_n(hx) = f(hx)$ olur. O zaman $\mathcal{A}'$, $C^*(A)$ nın tam halkasıdır.

Not: $M_{\mathcal{A}'}A$ Stone topolojisiyle beraber bir kompakt uzaydır . Öte yandan G 'nin X üzerindeki etkisi aşikar olmadıkça $Z[\mathcal{A}']$, A 'nın kapalı kümeleri için bir baz olmaz. Çünkü $Z[\mathcal{A}']$ 'nün tüm elemanları G- invaryant olduğundan, eğer $Z[\mathcal{A}']$ A 'nın kapalı kümeleri için bir baz ise X 'in tüm kapalı kümeleri G-invaryant olur. Özel olarak $x \in X$ olmak üzere $F = \{x\}$ alınırsa, F G-invaryant olduğundan G 'nin X üzerindeki etkisi aşikar olur.

Teorem 4.7 : $M_{\mathfrak{B}}(A/G)$, $M_{\mathcal{A}'}A$ 'ya homeomorfiktir.

İspat: Her $f \in \mathcal{A}'$ ve her $x \in A$ için $f|_{G(x)}$ sabit olduğundan, $f = h_f \circ \pi$ olacak şekilde biricik $h_f \in C^*(A/G)$ vardır. Burada π orbit fonksiyondur. Yani, her $x \in A$ için $h_f(G(x)) = f(x)$ dir. A, X 'in yoğun alt kümesi olduğundan, her $x \in X$ için $\lim x_n = x$ olacak şekilde $(x_n) \subseteq A$ dizisi vardır. Ayrıca her $g, h \in G$ için $(f(gx_n))$ ve $(f(hx_n))$ dizileri eşittir. Eğer $f = \tilde{f}|A$ olacak şekilde bir $\tilde{f} \in C^*(X)$ varsa,

$$\tilde{f}(gx) = \lim f(gx_n) = \lim f(hx_n) = \tilde{f}(hx)$$

olur. Böylece $\tilde{f}$, f gibi bütün orbitlerde sabit değer alır. Dolayısıyla $f' \circ \pi = \tilde{f}$ olacak şekilde $f' \in C^*(X/G)$ vardır. Öte yandan $f'|A/G = h_f$ olup $h_f \in \mathfrak{B}$ olur.

Her $P \in M_{\mathcal{A}'}A$ için

$$\mathcal{A}_P = \{h_f : f \in P\}$$

kümesini tanımlayalım.

$\mathcal{A}_P$, $\mathfrak{B}$ 'nin bir maksimal ideali olduğunu gösterelim.

$f, g \in P$ olmak üzere $h_f, h_g \in \mathcal{A}_P$ olsun. $f = h_f \circ \pi$, $g = h_g \circ \pi$ olup $f - g = (h_f - h_g) \circ \pi$ ve $f - g = (h_{f-g}) \circ \pi$ olur. Buradan $h_f - h_g = h_{f-g} \in \mathcal{A}_P$ olur. Öte yandan $f \in P$ olmak üzere $h_f \in \mathcal{A}_P$ ve $g \in \mathfrak{B}$ olsun. $g \in \mathfrak{B}$ olduğundan $g \circ \pi \in \mathcal{A}'$ ve $g = h_{g\circ\pi}$ olur. O halde $gh_f = h_{g\circ\pi}h_f$ dir. $f \in P$ olduğundan $f = h_f \circ \pi$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}(h_{g\circ\pi}h_f) \circ \pi &= (h_{g\circ\pi} \circ \pi)(h_f \circ \pi)\\ &= (g \circ \pi) f\\ &= (h_{(g\circ\pi)f}) \circ \pi\end{aligned}$$

olur ve $h_{g\circ\pi}h_f = h_{(g\circ\pi)f}$ bulunur. P, $\mathcal{A}'$nün ideali olduğundan $(g \circ \pi) f \in P$ olur. Böylece

$$gh_f = h_{g\circ\pi}h_f = h_{(g\circ\pi)f} \in \mathcal{A}_P$$

bulunur. O zaman $\mathcal{A}_P$, $\mathfrak{B}$ 'nin bir idealidir.

$\mathcal{A}_P \subseteq R \subseteq \mathfrak{B}$ olacak şekilde $\mathfrak{B}$ 'nin bir R idealini düşünelim.

$$R' = \{ f \circ \pi : f \in R \}$$

olarak tanımlayalım.

İddia: R', $\mathcal{A}'$ halkasının P'yi içeren bir idealdir.

$f, g \in R$ olmak üzere $f \circ \pi \in R'$, $g \circ \pi \in R'$ olsun. R, $\mathfrak{B}$ 'nin bir ideali olduğundan $f \circ \pi - g \circ \pi = (f - g) \circ \pi \in R'$ olur. Öte yandan $f \circ \pi \in R'$ ve $g \in \mathcal{A}'$ olsun. g$\in \mathcal{A}'$ olduğundan $g = h_g \circ \pi$ olacak şekilde bir tek $h_g \in C^*(X/G)$ vardır. Buradan

$$g(f \circ \pi) = (h_g \circ \pi)(f \circ \pi) = (h_g f) \circ \pi \in R'$$

olur. O halde R', $\mathcal{A}'$ nün bir idealidir.

Şimdi $P \subseteq R'$ olduğunu gösterelim. $f \in P$ alalım. $f = h_f \circ \pi$ olacak şekilde bir tek $h_f \in C^*(X/G)$ vardır. O halde $h_f \in \mathcal{A}_P$ ve $\mathcal{A}_P \subseteq R$ olduğundan $h_f \in R$ olur. Buradan $f = h_f \circ \pi$ olup $f \in R'$ olur. Böylece R', $\mathcal{A}'$ nün P yi içeren bir ideali olduğunu gösterdik. O halde $P \subseteq R' \subseteq \mathcal{A}'$ olup P, $\mathcal{A}'$ nün maksimal ideali olduğundan $R' = P$ veya $R' = \mathcal{A}'$ olur. Öncelikle $R' = P$ ise $R = \mathcal{A}_P$ olduğunu gösterelim.

$\mathcal{A}_P \subseteq R$ dir. $R \subseteq \mathcal{A}_P$ olduğunu gösterelim. Eğer $f \in R$ ise $f \circ \pi \in R' = P$ olur. O halde $f \circ \pi = h_{f \circ \pi} \circ \pi$ olup $f = h_{f \circ \pi} \in \mathcal{A}_P$ dir. Böylece $R = \mathcal{A}_P$ dir.

Şimdi eğer $R' = \mathcal{A}'$ ise $R = \mathfrak{B}$ olduğunu gösterelim. Kabülden $R \subseteq \mathfrak{B}$ dir.. $f \in \mathfrak{B}$ alalım. $f \circ \pi \in \mathcal{A}' = R'$ olur. Buradan $f \in R$ olur. O halde $\mathfrak{B} \subseteq R$ olup $R = \mathfrak{B}$ dir.

$$\phi : M_{\mathcal{A}'} A \longrightarrow M_{\mathfrak{B}}(A/G)$$

$$\phi(P) = \mathcal{A}_p$$

şeklinde tanımlayalım. Her $f \in \mathfrak{B}$ için,

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(S(f)) &= \{P : \phi(P) \in S(f)\} \\
&= \{P : \mathcal{A}_P \in S(f)\} \\
&= \{P : f \in \mathcal{A}_P\} \\
&= \{P : f = h_g \quad \textit{olacak} \quad \textit{şekilde} \quad g \in P \quad \text{var}\, \textit{dır}.\} \\
&= \{P : f \circ \pi \in P\} \\
&= S(f \circ \pi)
\end{aligned}$$

olup ϕ süreklidir.

İddia: ϕ bir homeomorfizmdir.

ϕ'nin tersini tanımlamak için, $\mathfrak{B}$'nin her P maksimal ideali için,

$$\mathcal{A}^P = \{f \circ \pi : f \in P\}$$

şeklinde tanımlayalım.

$\mathcal{A}^P = \{f \circ \pi : f \in P\}$, $\mathcal{A}'$ nün bir maksimal ideal olduğunu gösterelim. Her $f, g \in P$ için $f \circ \pi$, $g \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ olsun. $f \circ \pi - g \circ \pi = (f - g) \circ \pi$ olup P ideal olduğundan $f - g \in P$ olup $(f - g) \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ olur. Buradan $f \circ \pi - g \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ bulunur. Öte yandan her $f \in P$ için $f \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ ve

$k \in \mathcal{A}'$ olsun. $k \in \mathcal{A}'$ olup $k = h_k \circ \pi$ olacak şekilde biricik $h_k \in C^*(X/G)$ vardır.

$$(f \circ \pi)k = (f \circ \pi)(h_k \circ \pi)$$
$$= (fh_k) \circ \pi$$

olup $(f \circ \pi)k \in \mathcal{A}^P$ bulunur. O halde $\mathcal{A}^P = \{f \circ \pi : f \in P\}$, $\mathcal{A}'$ nün bir idealidir.

Şimdi $\mathcal{A}^P = \{f \circ \pi : f \in P\}$ maksimalliğini gösterelim. $\mathcal{A}^P \subseteq K \subseteq \mathcal{A}'$ olacak şekilde bir K ideali düşünelim.

$$K' = \{f : f \circ \pi \in K\}$$

olarak tanımlayalım.

İddia: K', $\mathfrak{B}$ 'nin P'yi içeren bir idealidir.

$f, g \in K'$ olsun. O zaman $f \circ \pi \in K$, $g \circ \pi \in K$ olur. K, $\mathcal{A}'$ nin bir ideali olduğundan $f \circ \pi - g \circ \pi = (f - g) \circ \pi \in K$ olur. Buradan $(f - g) \in K'$ olur. Öte yandan $f \in K'$ ve $g \in \mathfrak{B}$ olsun. $f \in K'$ olduğundan $f \circ \pi \in K$ olur ve $g \in \mathfrak{B}$ olduğundan $g \circ \pi \in \mathcal{A}'$ olur. K, $\mathcal{A}'$ halkasının ideali olup $(f \circ \pi)(g \circ \pi) \in K$ olur. Buradan $fg \in K'$ olur. Böylece K', $\mathfrak{B}$ 'nin bir idealidir.

Şimdi $P \subseteq K'$ olduğunu gösterelim. $f \in P$ alalım. $f \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ olur. $\mathcal{A}^P \subseteq K \subseteq \mathcal{A}'$ olduğundan $f \circ \pi \in K$ olur. Buradan $f \in K'$ olur. Böylece $P \subseteq K'$ dür. Böylece K', $\mathfrak{B}$ nün P yi içeren bir ideali olduğunu gösterdik. O halde $P \subseteq K' \subseteq \mathfrak{B}$ olur. P, $\mathfrak{B}$ 'nün maksimal ideali olduğundan $K' = P$ veya $K' = \mathfrak{B}$ olur. Eğer $K' = P$ ise $K = \mathcal{A}^P$ dir ve $K' = \mathfrak{B}$ ise $K = \mathcal{A}'$ olduğunu gösterelim. Kabülden $\mathcal{A}^P \subseteq K$ dir. $f \circ \pi \in K$ alalım. O halde $f \in K' = P$ olup $f \circ \pi \in \mathcal{A}^P$ olur. Buradan $K \subseteq \mathcal{A}^P$ olur. Böylece $K = \mathcal{A}^P$ dir.

Şimdi $K' = \mathfrak{B}$ olması durumuna bakalım. Kabülden $K \subseteq \mathcal{A}'$ dür. $f \in \mathcal{A}'$ alalım. $f = h_f \circ \pi$ olacak şekilde biricik $h_f \in \mathfrak{B}$ vardır $K' = \mathfrak{B}$ olduğundan $h_f \in K'$ olur. Buradan $f = h_f \circ \pi \in K$ bulunur. o halde $\mathcal{A}' \subseteq K$ olup $K = \mathcal{A}'$ olur. Böylece $\mathcal{A}^P$, $\mathcal{A}'$ ‘nin bir maksimal idealidir.

$$\varphi : M_{\mathfrak{B}}(A/G) \longrightarrow M_{\mathcal{A}'}A$$
$$\varphi(P) = \mathcal{A}^P$$

şeklinde tanımlayalım. Kolayca görülebilirki her $P \in M_{\mathfrak{B}}(A/G)$ için $\phi(\varphi(P)) = P$ ve her $P \in M_{\mathcal{A}'}A$ için $\varphi(\phi(P)) = P$ olur. O halde ϕ bire-birdir ve örtendir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(S(f)) &= \{P \in M_{\mathfrak{B}}(A/G) : \varphi(P) \in S(f)\} \\
&= \{P \in M_{\mathfrak{B}}(A/G) : \mathcal{A}^P \in S(f)\} \\
&= \{P : f \in \mathcal{A}^P\} \\
&= \{P : h_f \in P\} \\
&= S(h_f)
\end{aligned}$$

olup φ süreklidir. Sonuç olarak ϕ bir homeomorfizmdir.

Sonuç 4.8: $A = X$ ve

$\mathcal{X}' = \{ f \in C^*(X) : f$ nin her bir orbite kısıtlanışı sabit olsun.$\}$

olsun. O zaman

$$\beta(X/G) = \beta X/G = M_{\mathcal{X}'}X$$

olur.

Örnek 4.9: $A = \mathbb{Q}$ **,** $X = \mathbb{R}$ ve $G = \mathbb{Z}_2$ alıp yukarıdaki teoremi inceleyelim.

$Z_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ etkisini düşünelim. $\mathcal{A}' = \{ \ f|_{\mathbb{Q}} : f \in C^*(\mathbb{R})$ ve f çift fonksiyon$\}$ olur. $M_{\mathcal{A}'}\mathbb{Q} = \{P : P$, $\mathcal{A}'$ nün maksimal ideali$\}$ dir. $A/G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Q}^+$ olup $M_{\mathcal{A}'}\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$'nın kompaktlamasıdır.

O halde çift fonksiyonlar halkasının maksimal ideallerinin kümesinin Stone topolojisiyle beraber negatif olmayan rasyonellerin bir kompaktlaması olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Srivastava'nın(1987) sonuçları geliştirilmeye çalışılmıştır. X bir Tychonoff G-uzayı , G sonlu ayrık bir grup ve A, X 'in bir yoğun G-invaryant alt uzayı olsun. Gelfand kompaklaştırma metodu kullanarak, A/G orbit uzayının bir kompaktlamasını inşa edilmiştir. Ayrıca bir uygulama olarak, çift fonksiyonlar halkasının maksimal ideallerinin kümesinin Stone topolojisiyle beraber negatif olmayan rasyonellerin bir kompaktlaması olduğu gösterilmiştir.

Öte yandan aşağıdaki sorulara cevap aranabilir.

Soru 1: *G*-orbit dönüşümü ile denk olabilecek bir $\lambda : M_{\mathcal{A}} A \to M_{\mathcal{A}'} A$ dönüşümü tanımlanabilir mi? Örneğin hangi koşullar altında $\lambda(P) = P \cap \mathcal{A}'$ iyi tanımlı olur?

Soru 2: $A^* = M_{\mathcal{A}} A - A$ olmak üzere $M_{\mathcal{A}} A \longrightarrow A^*$ bir *G*- retraction varsa $M_{\mathfrak{B}}(A/G) \longrightarrow M_{\mathfrak{B}}(A/G) - (A/G) = (A/G)^*$ bir G- retraction var mıdır?

KAYNAKLAR

Bredon, G.E., 1972.Introduction to Compact Transformation Groups. Academic Press, New York.

De Vries J.,1978. On the existence of *G*-compactifcation, Bull Acad. Polon. Sci.Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (3), 275-280.

Gelfand, I.M. , and Kolmogorov, A.N., 1939. On Rings of Continuous Functions on Topological Spaces. Doklady Akad.Nauk U.S.S.R. 22, 11-15.

Megrelishvili, M.G., 1988. A Tychonoff *G*-space not admitting a compact Haussdorff *G*-extension or G-linearization, Russian Math Surveys 43 (2), 177-178.

Palais, R., 1960. The Classification of *G*-spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 36 (2), 1-72

Porter, J.R. and Woods, R.G.,1988. Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces, Springer-Verlag, New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo. 815pp.

Srivastava, K., 1987. On the Stone-Cech Compactification of an Orbit Space, Bull. Austral. Math. Soc. 36, 435-439.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılındaAdana’da doğdu. 2006 yılında ATO Anadolu Lisesi’nden mezun oldu. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nden Fakülte ve Bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı zamanda 2010 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü’nden çift-anadal diploması alarak mezun oldu. 2012 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalından tezli yüksek lisans diploması alarak mezun oldu. Ayrıca Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinden Pedagojik Formasyon aldı. 2017 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalından tezli yüksek lisans diploması alarak mezun oldu.