STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İLE ASAL SAYILAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

İBRAHİM ADALAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

2018

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İLE ASAL SAYILAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

DOKTORA TEZİ

İBRAHİM ADALAR
(201392172001)

Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rauf AMİROV

SİVAS
MART 2018

İBRAHİM ADALAR'ın hazırladığı ve **"Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerleri ile Asal Sayılar Arasındaki İlişki"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİMDALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Rauf AMİROV** ....
Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hüseyin DEMİR** ....
Gümüşhane Üniversitesi

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ....
Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN ....
Cumhuriyet Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Yaşar ÇAKMAK
Cumhuriyet Üniversitesi ....

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

16.03.2018

İbrahim ADALAR

ÖZET

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İLE ASAL SAYILAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

İBRAHİM ADALAR

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV
2018, 92+viii sayfa

Bu tezde, Sturm-Liouville ve Difüzyon operatörlerinin pozitif özdeğerleri ile asal sayılar arasındaki ilişki incelenmiştir. Asal sayıların dağılımını gösteren asimptotik ifadeler kullanılarak bu operatörler için ters problemler ele alınmıştır. Ayrıca özdeğerleri asal sayıların bir fonksiyonu olan Coulomb singüleritesine sahip bir Sturm-Liouville problemi önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörü; Difüzyon Operatörü; Ters Problem; Spektrum; Asal Sayılar; Coulomb Singülerite

ABSTRACT

THE RELATIONSHIP BETWEEN EIGENVALUES OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS AND PRIME NUMBERS

İbrahim ADALAR

Ph.D. Thesis
Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV
2018, 92+viii pages

In this thesis, the relationship between the positive eigenvalues of the Sturm-Liouville and Diffusion operators and prime numbers has been investigated. Inverse problems for these operators are discussed by using asymptotic expressions that represent the distribution of prime numbers. We also proposed a Sturm-Liouville problem with Coulomb singularity, whose eigenvalues are a function of prime numbers.

Keywords: Sturm-Liouville Operator; Diffusion Operator; Inverse Problem; Spectrum; Prime Numbers; Coulomb Singularity

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Prof. Dr. Rauf AMİROV'a, çok teşekkür ederim.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Başta bazı fizik problemleri olmak üzere bir takım uygulamalı bilimlerde diferansiyel operatörlerin spektral teorisi önemli bir yere sahiptir. $-(py')'+qy=\lambda\rho y$ diferansiyel denklemi ve belirli bir sınırlı aralığın uç noktalarındaki sınır koşulları ile üretilen Sturm-Liouville operatörü bunlardan biridir. Bu operatörler için konulan spektral problemlere Sturm-Liouville problemleri denir. Burada p,q ve ρ bağımsız x değişkeninin fonksiyonları, λ bir parametredir. Bu λ'lar keyfi değildir. 1830'larda Sturm ve Liouville'nin yapmış oldukları çalışmalar ile, [1]; λ değerleri ancak ayrık bir küme oluşturduğunda, denklem ve sınır koşullarını sağlayan $y(x)\neq 0$ fonksiyonlarının bulunabileceği gösterilmiştir. Çözümün bulunmasına olanak veren bu λ değerlerine özdeğerler, bunlara karşılık gelen çözümlere ise özfonksiyonlar denir.

Bu problemlerdeki spektral analize, bazı fizik problemlerinin bir sonucu olarak bakılabilir. Bir borudaki ses dalgaları, bir sicimin titreşimi ve bazı mekanik sistemler örnek olarak gösterilebilir.

Titreşen tel durumunda, enine yer değiştirmeler, $\rho U_{tt}-(TU_x)_x=\rho F$ hiperbolik kısmi diferansiyel denklemindeki $U(x,t)$ büyüklüğü ile ölçülebilir. Burada $T(x)$ gerilmeyi, $\rho(x)$, her bir x noktasındaki telin yoğunluğunu gösterir. $F(x,t)$ fonksiyonu, enlemesine yönde hareket eden birim kütle başına etki eden harici kuvveti temsil eder. Büyüklüklerin zamandan bağımsız sadece mekansal değişkene bağlı olduğu kabul edilirse, harici kuvvetler olmadığında $-(Tu')'=\lambda\rho u$ denklemi elde edilir. Burada λ özdeğeri, telin titreşim sıklığına karşılık gelir.

Kuantum mekaniğinde, bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi $-u''+V(x)u=Eu$ şeklindedir. Burada V potansiyel alanı, u, x noktasındaki dalga genliğini temsil eder ve E sistemin enerji seviyelerine karşılık gelir. Bütün enerji seviyelerinin mümkün olmadığını ve ayrık bir küme oluşturduğunu gösterir. Bu özdeğerlerin ya da enerji seviyelerinin ayrık bir küme oluşturmasının Kuantum mekaniğinde çok önemli sonuçları vardır.

Fiziksel büyüklükler verildiğinde, sistemin enerji seviyelerinin bulunması problemine düz problem denir.

Frekansların, enerji seviyelerinin ya da matematiksel dil ile özdeğerlerin bilgisinden, fiziksel parametreleri yapılandırmaya ters problem denir.

[2] çalışmasından, ters spektral problemler ile Korteweg-de Vries denklemi gibi lineer olmayan denklemler arasında da ilişkiler kurulabileceği görülebilir. Bu uygulama örnekleri, sadece fiziksel problemlerle sınırlı değildir.

Ters spektral problemler, matematiğin diğer alt dallarındaki problemler ile de ilişkilendirilebilir. Bu konuya örnek olarak, asal sayılar ile yakından ilişkili olan Riemann Zeta Fonksiyonunun sıfırlarının belirlenmesi problemi verilebilir. Bu fonksiyon, $s \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(s) > 1$ olmak üzere $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun sıfırları ile ilgili ilk çalışma, [3], asal sayı teorisinin temelini oluşturmaktadır. $\mathrm{Re}(s) > 1$ için bu fonksiyonun hiç sıfırı yoktur. $\mathrm{Re}(s) < 0$ için, sadece negatif çift tam sayılar sıfırlarıdır. Bu sıfırlara aşikar sıfırlar denir. Böylece, $\zeta(s)$'nin aşikar olmayan sıfırları, $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ şeridinde bulunur. Bu sıfırlar, $s = 1$ kutup noktası dışında $\zeta(s)$'nin analitik devamı olan $\xi(s) = \xi(1-s)$ fonksiyonel denklemi ile bulunur. Burada $\xi(s) = \Gamma(\frac{s}{2})(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ ve $\Gamma(s)$, Euler Gama fonksiyonudur. Riemann Hipotezine göre, $\zeta(s)$'nin aşikar olmayan sıfırları, $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ doğrusu üzerindedir. Örneğin ilk dört sıfır, [4],

$$s_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,14{,}1347251417...$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,21{,}0220396387...$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,25{,}0108575801...$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,30{,}4248761258...$$

şeklindedir. Bu hipotezin doğruluğu, çeşitli algoritmalar ve bilgisayarlar yardımıyla, [5], 10^{22}. aşikar olmayan sıfıra kadar bilinmesine rağmen, henüz ispatlanamamıştır. Bu hipotezin doğruluğunu ispatlamak için, önerilen yöntemlerden biri de, $\zeta(s)$'nin aşikar olmayan sıfırlarını, bazı lineer operatörlerin özdeğerlerine karşılık getirme fikridir. Böyle bir operatörün olması gerektiği Hilbert-Polya varsayımı olarak bilinir. Buna göre, özdeğerleri, Riemann Zeta Fonksiyonunun aşikar olmayan sıfırları olan bir operatör kurulabilirse, bu hipotez de ispatlanacaktır. [6-22] çalışmalarında, bu konu hakkında fiziksel ve matematiksel yeni sonuçlar ortaya çıksa da, henüz doğru bir operatör oluşturulamamıştır. Bu çalışmalarda, $\zeta(s_n)=0$ ve $s_n=\frac{1}{2}+it_n$ olmak üzere, özdeğerleri $\{t_n\}_{n\geq 1}$ sayıları olan simetrik bir diferansiyel operatör bulunması problemi önerilmiştir.

Böylece son yıllarda, sayılar teorisinin sayısal analiz ile etkileşiminin yanı sıra fizik problemleri ile de yeni bağlantıları ortaya çıkmaktadır. Özellikle [6-11] makalelerinde, özdeğerleri asal sayılar olan bir operatörün bulunması fikri ayrıca incelenmiştir.

Böyle bir düşüncenin ortaya çıkma sebebi, Riemann Zeta fonksiyonunun aşikar olmayan sıfırları ile asal sayıların arasındaki kuvvetli ilişkidir. Sayılar teorisindeki en temel alan asal sayılardır. Öklit'in, sonsuz tane asal sayının var olduğunu gösteren ispatından beri, asal sayılar ile ilgili araştırmalar devam ediyor olmasına rağmen, belirli bir sayıdan küçük asal sayıların sayısının bulunması gibi, birçok soru henüz tam olarak cevap bulamamıştır. Asal sayılar ile Riemann Zeta fonksiyonu arasındaki en temel ilişkiyi gösteren

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$$

eşitliği, Euler çarpımı olarak bilinir. Burada p_n sayısı n. asal sayıdır.

x'den küçük veya eşit asal sayıların sayısını gösteren fonksiyon $\pi(x)$ olmak üzere, Gauss ve Legendre'nin önerdiği,

$$\pi(x)\sim\frac{x}{lnx} \qquad [1.1]$$

asimptotik ifadesi, [23,24]'de Hadamard ve De La Vallee Poussin tarafından ispatlanmıştır. [1.1] asimptotik durumu, Asal Sayı Teoremi olarak bilinir. Bu teorem, tamamen $\zeta(s)$'nin sıfırları ile ilişkilidir. Bu aşikar olmayan sıfırlar, asal sayı teoremindeki kalan terimi belirler. Bu kalan terimi geliştirmek için, $\pi(x)$'e, $\frac{x}{\ln x}$'den çok daha iyi bir yaklaşım olan $li(x)$ logaritmik integral fonksiyonu verilebilir. Burada $li(x)$, [25,s.228],

$$li(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, [26],

$$li(2) := 1{,}145163, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{ve} \quad \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = x\left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1!}{\ln^2 x} + \ldots \frac{m!}{\ln^{m+1} x} + O\left(\frac{1}{\ln^{m+2} x}\right) \right)$$

olmak üzere, $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + li(2)$ yazılabilir. Böylece, $li(x) \sim \frac{x}{lnx}$ sonucu da geçerlidir. [1.1] ifadesinin yerine,

$$\pi(x) \sim li(x) \qquad [1.2]$$

asimptotik ifadesi de elde edilir. $li(x)$ ve $\pi(x)$ arasındaki yakın ilişki aşağıdaki çizelgeden görülebilir. [27,s.3],

Çizelge 1.1 Asal sayıların dağılımını gösteren logaritmik integral fonksiyonunun değerleri

x	$\pi(x)$	$\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$	$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \pi(x)$
500 000	41538	41606	68
1 000 000	78498	78628	130
1 500 000	114155	114263	108
2 000 000	148933	149055	122
2 500 000	183072	183245	173
3 000 000	216816	216971	155

Asal sayı teoreminin bir sonucu olarak, [27,s.90],

$$|\pi(x) - li(x)| \le c_1 x e^{(-c_2(\sqrt{\ln x})}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_1, c_2 > 0$.

Eğer Riemann hipotezi doğru ise, $c > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$$\left|\pi(x)-li(x)\right| \le c\sqrt{x}\ln x \qquad [1.3]$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Eğer [1.3] geçerli ise, Riemann hipotezi de doğru olacaktır. Böylece Riemann Zeta fonsiyonunun aşikar olmayan sıfırlarının yeri, asalların dağılımıyla yakından ilişkilidir.

Bu sebeple, özdeğerleri asal sayılar olan bir operatörün kurulması, elde edilecek fiziksel sonuçların yanında, matematik problemleri için de son derece önemli bir gelişme olacaktır. Böylece, $\pi(x)'in$ belirlenmesi ve dolayısıyla Riemann hipotezinin ispatlanması için direk bir yöntem bulunmuş olacaktır.

Özel olarak Sturm-Liouville operatörleri için, bu problem ilk defa Zettl, [28], tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada özdeğerleri asal sayılar olan Sturm-Liouville operatörünün potansiyel fonksiyonun belirlenmesine ilişkin bir ters problem verilmiştir. Mingarelli, bu ters problem için, [29] çalışmasında, özdeğerleri asal sayılar olan regüler bir Sturm-Liouville probleminin var olmadığını göstermiştir. [29]'da ele alınan bu problem, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı,

$$-(p(x)y')'+q(x)y=\lambda r(x)y \qquad [1.4]$$

diferansiyel denklemi ile,

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha-(py'(a))\sin\alpha=0 \\ y(b)\cos\beta-(py'(b))\sin\beta=0 \end{aligned} \qquad [1.5]$$

sınır koşullarını içermektedir. Burada, $\frac{1}{p}$, q ve $r\in L[a,b]$, λ kompleks parametre ve $\alpha\in[0,\pi), \beta\in(0,\pi]$. Bu problemin pozitif özdeğerlerinin asimptotik ifadesi, [30],

$$\lambda_n^+ \sim \frac{n^2\pi^2}{\int_a^b \sqrt{(r(x)/p(x))_+}\,dx} \qquad [1.6]$$

ve asal sayı teoreminin bir sonucu olarak, p_n için asimptotik ifade;

$$p_n \sim n\ln n \qquad [1.7]$$

ile ifade edilebilir. Mingarelli, [1.6] ve [1.7] asimptotik ifadelerinin uyuşmadığını göstererek, özdeğerleri asal sayılar olan [1.4]-[1.5] probleminin var olmadığını ispatlamıştır. Yine aynı çalışmada, bu tez konusunun da temelini oluşturan yeni bir problem önerilmiştir. Önerilen bu problemde,

$$-y''+q(x)y=\left(\frac{\pi\lambda}{\ln\lambda}\right)^2 y \qquad [1.8]$$

$$y(0)=y(1)=0 \qquad [1.9]$$

şeklindeki Dirichlet sınır şartına sahip bir Sturm-Liouville problemi oluşturulmuş ve [1.8]-[1.9] probleminin özdeğerlerinin asal sayılar olabileceği belirtilmiş, bunun için uygun bir $q(x)$ potansiyel fonksiyonun var olup olmadığı bir soru olarak bırakılmıştır.

$q(x)=0$ iken, [1.8]-[1.9] probleminin özdeğerlerinin $n\geq 1$ için, $\frac{\lambda}{\ln\lambda}=n$ denklemini sağlaması gerekir. Burada λ spektral parametresinin, lineer olmayan bir fonksiyon şeklinde verilmesinin sebebi, [31]'de verilen

$$p_n=n\ln n+n\ln\ln n-n+\frac{n(\ln\ln n-2)}{\ln n}-\ldots \qquad [1.10]$$

yaklaşımı ile, $\frac{\lambda}{\ln\lambda}=n$ denkleminden elde edilen

$$\lambda_n=n\ln n+n\ln\ln n+n\ln\ln\ln n+\ldots \qquad [1.11]$$

yaklaşımı arasındaki ilişkidir. [1.10] ve [1.11] ifadelerinin ilk iki terimlerinin aynı olması sonucunda, uygun bir $q(x)$ potansiyel fonksiyonu için, $\lambda_n=p_n$ olacak şekilde [1.8]-[1.9] probleminin oluşturulabileceği fikri doğmuştur.

[1.4] denkleminden [1.8] denklemine geçiş Liouville dönüşümü ile yapılmaktadır. Gerçekten de,

ρ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}(p(t)f'(t))+[\rho w(t)-z(t)]f(t)=0 \qquad [1.12]$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{aligned}A_1 f(a)+B_1 f'(a)&=0\\ A_2 f(b)+B_2 f'(b)&=0\end{aligned} \qquad [1.13]$$

sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin bulunmasına ilişkin ele alınan Sturm-Liouville sınır değer problemi, Liouville dönüşümü kullanılarak, daha sade bir hale getirilebilir. Burada $p(t)$, $w(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlardır. $p(t)$, $w(t)$ fonksiyonları bu aralıkta pozitiftir. A_1, A_2, B_1 ve B_2 reel sayıları $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ ve $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşullarını sağlamaktadır. Eğer $(p(t)w(t))''$ ve $p'(t)$ fonksiyonları bu aralıkta sürekli ise; $M = \int_a^b \left(\frac{w(t)}{p(t)} \right)^{\frac{1}{2}} dt$ ve $u(t) = (p(t)w(t))^{\frac{1}{4}}$

olmak üzere

$$x = \frac{1}{M} \int_a^t \left(\frac{w(s)}{p(s)}\right)^{\frac{1}{2}} ds \quad \text{ve} \quad y = u(t) f$$

dönüşümleri ile [1.12] denklemi,

$$-y'' + q(x) y = \lambda y \qquad [1.14]$$

denklemine, [1.13] sınır koşulları ise,

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(1) + Hy(1) &= 0 \end{aligned} \qquad [1.15]$$

sınır koşullarına dönüşür. Burada $q(x) = \frac{u''(x)}{u(x)} + M^2 \frac{z(x)}{w(x)}$, $h, H \in \mathbb{R}$ ve $\lambda = M^2 \rho$. [1.14]-[1.15] problemine Sturm-Liouville probleminin kanonik hali adı verilir. Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, Dalambert, Euler, Liouville ve Sturm'a aittir.

20. yüzyılda farklı operatör sınıfları için spektral teori hızlı bir gelişim göstermiştir. Bu dönemde, Birkhoff, Weyl, Hilbert, Neumann, Pöschel, Trubowitz gibi matematikçiler önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Sonlu aralıkta ikinci mertebeden diferansiyel ifadeler ve regüler sınır koşulları ile üretilen operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkhoff tarafından verilmiştir. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda, lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi arasındaki benzerliklerden ilk faydalanan Hilbert olmuştur. Bunların

sonucu olarak soyut Hilbert uzayı kurularak, Lineer self adjoint operatörler teorisi gelişmeye başlamıştır.

Böylece regüler bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin reel sayılar olması, özfonksiyonların L_2 Hilbert uzayında ortoganal olması gibi bir çok temel sonuçlar, [34-38], elde edilmiştir. Yine bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, normalleştirci sayılar için asimptotik formüller elde edilmiştir. Simetrik operatörlerin tüm self adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neuman tarafından ele alınmıştır.

Ters spektral problemler için ilk çalışma, [39], Ambarzumyan'a aittir. Borg, Levinson, Gelfand, Levitan, Tikhonov, Marchenko, Krein, Gasymov gibi matematikçiler iki özdeğer dizisinin veya bir özdeğer dizisi ile normalleştirici sayı dizisinin Sturm-Liouville opertörünü tek olarak belirleyeceğini gösteren çeşitli çalışmalar, [40-49] yapmışlardır. Ayrıca [50]'de, potansiyel fonksiyonun simetrik olduğu durumda ters problem için bir özdeğer dizisinin yeterli olduğu gösterilmiştir. [51]'de, aralığın yarısında, potansiyel fonksiyonun bilinmesi durumunda yine tek bir özdeğer dizisinin yeterli olduğu ispatlanmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlar ve Sturm-Liouville operatörünün ters problemleri için temel teoremler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, Riemann Zeta fonksiyonunun sıfırları ile asal sayıların ilişkisi ele alınmıştır. Ayrıca Asal Sayı Teoremi ispatlanmıştır. Orijinal sonuçlar, tezin dördüncü bölümünde ve beşinci ve altıncı bölümlerinin ikinci kısımlarında verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak Mingarelli'nin önerdiği [29],

$$-y''+q(x)y=\left(\frac{\pi\lambda}{\ln\lambda}\right)^2 y$$

$$y(0)=y(1)=0$$

problemi ele alınmıştır. $q(x)\in L_2[0,1]$ olduğunda, [29] çalışmasındaki açık soru cevaplanmıştır. Bu problemin özdeğerlerinin, asal sayılar olması durumunda, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun $L_2[0,1]$ uzayından olamayacağı gösterilmiştir. Bu sonucu geliştirmek için, aynı bölümde,

$$-y''+q(x)y=\left(\pi li(\lambda)\right)^2 y$$
$$y(0)=y(1)=0$$

şeklinde bir problem oluşturulmuş ve özdeğerleri asal sayılar olduğunda, yine $q(x)\notin L_2[0,1]$ olması gerektiği gösterilmiştir. Böyle bir problemin inşa edilme sebebi, $li(x)$ logaritmik integral fonksiyonunun, $\pi(x)$'e, $\frac{x}{\ln x}$'den çok daha iyi bir yaklaşım olmasıdır. Böylece $li(\lambda)=n$ denklemini sağlayan $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ değerlerinin asimptotik ifadesi $\{p_n\}_{n\geq 1}$ sayılarına, Mingarelli'nin önerdiği $\frac{\lambda}{\ln\lambda}=n$ denkleminin köklerinden daha fazla yaklaşacaktır. Aşağıdaki çizelgeden bu durum görülebilir. [52,s.202],

Çizelge 1.2 Asal sayıların dağılımını gösteren farklı iki yaklaşımın değerleri

x	$\pi(x)$	$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}$	$\int_2^x \frac{dt}{\ln t}-\pi(x)$
10^2	25	3	5
10^3	168	23	10
10^4	1229	143	17
10^5	9592	906	38
10^6	78498	6116	130
10^7	664579	44158	339
10^8	5761455	332774	754
10^9	50834734	2592592	1701
10^{10}	455052511	20754029	3104

Tezin beşinci bölümünde daha genel bir problem olan,

$$-y''+q(x)y+2\pi N(\lambda)p(x)y=(\pi N(\lambda))^2 y$$

$y(0) = y(1) = 0$

difüzyon problemi ele alınmıştır. Sırasıyla $N(\lambda) = \lambda$, $N(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\ln \lambda}$ ve $N(\lambda) = li(\lambda) := \int_0^{\lambda} \dfrac{dt}{\ln t}$ alınarak çeşitli problemler oluşturulmuştur.

Bu problemler $p(x) \equiv 0$ için, Dirichlet sınır şartı içeren klasik Sturm-Liouville problemlerine dönüşebilmektedir. Burada $p(x) \in W_1^1[0,1]$ ve $q(x) \in W_1^0[0,1] = L[0,1]$. $W_1^n[0,1]$ fonksiyon uzayı, $x \in [0,1]$ olmak üzere $f^{(m)}(x)$ $(m = 0,...,n-1)$ türevlerinin mutlak sürekli olması ve $f^{(n)}(x) \in L[0,1]$ olmasını gösterir. Bu bölümde ele alınan bu üç problem için de, $p(x) \in W_1^1[0,1]$ iken, pozitif özdeğerleri asal sayılar olması durumunda, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun $L[0,1]$ uzayından olamayacağı gösterilmiştir. Sonuç olarak bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar, bu bölümde hem $L_2[0,1]$ uzayından $L[0,1]$ uzayına geliştirilmiş hem de daha genel bir operatör kullanılmıştır. Ayrıca [29]'daki elde edilen sonuç da geliştirilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde;

$$-y'' + \left(\frac{2\pi}{x} + q_1(x)\right) y = \lambda^2 y$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Coulomb singüleritesine sahip bir problem ele alınmıştır. Bu problemin özdeğerleri ile asal sayılar arasındaki ilişkiyi gösteren uygun bir $q_1(x) \in L_2[0,1]$ fonksiyonunun bulunabileceği gösterilmiştir. Bu durumda, n'den küçük veya eşit asal sayıların sayısını gösteren fonksiyon $\pi(n)$ ve özdeğerler $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ olmak üzere,

$$\pi(n) = \frac{1}{n - \lambda_n}$$

denklemini sağlayan, Coulomb singüleritesine sahip bir Sturm-Liouville problemi oluşturulmuştur.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1: $ly = -y'' + q(x)y$ diferansiyel ifadesi verilsin. Eğer, a ve b sonlu olmak üzere $x \in [a, b]$ ve $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse ly ifadesine regüler diferansiyel ifade denir. Eğer, a ve b sayılarından herhangi biri ya da her ikisi de sonsuz ise veya $q(x)$ fonksiyonu [a,b] aralığında integrallenemezse veya her iki durum birlikte söz konusu ise ly ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

Tanım 2.2: [1.14] diferansiyel denklemi ve [1.15] sınır koşulları tarafından üretilen lineer operatör L olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ çözümü varsa λ ya L operatörünün özdeğeri, y çözümüne de λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 2.3: $(L - \lambda I)^{-1}$operatörüne L operatörünün Resolvent operatörü denir.

Tanım 2.4: $(L - \lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2[a, b]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine rezolvent küme denir ve ρ(L) ile gösterilir.

Tanım 2.5:

i) $(L - \lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün noktasal spektrumu veya özdeğerler kümesi denir. Noktasal spektrum $\sigma_p(L) = \{\lambda : Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L)\}$ ile gösterilir.

ii) $(L - \lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak sekildeki λ' ların kümesine sürekli spektrum denir. $\sigma_c(L)$ ile gösterilir.

iii) $(L - \lambda I)^{-1}$mevcut, fakat yoğun olmayan kümede tanımlı λ' ların kümesine rezidü spektrum denir. $\sigma_r(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y(x, \lambda_n)\}$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 2.7: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir.

Tanım 2.8: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerin bulunması problemine düz problem, verilen herhangi iki dizinin hangi Sturm-Liouville operatörünün spektral karakteristikleri olduğunu araştırmaya ise ters problem denir.

Tanım 2.9: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyunu kompleks düzlemin bir W alt kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$ 'ye W'de analitik fonksiyon denir.

Tanım 2.10: Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.11: $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $f(z)$'ye W'de sınırlı fonksiyon denir.

Teorem 2.12 (Liouville): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.13: $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir.
Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \dots$, $f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.14: $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğunda her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$'nin ayrık aykırı (singüler) noktası denir.

Tanım 2.15: z_0, bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık aykırı noktası olsun.

i) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$'nin esas aykırı noktası denir.

Teorem 2.16 (Rouché) : $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ , B bölgesinde bulunan ve $f(z)$ ve $g(z)$' nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada, Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin, γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer $f(z)$ ve $g(z)$, B içinde analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ olur.

Tanım 2.17: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r 'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 2.18: $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r' ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. $M(r) < \exp(ar^{\rho})$ eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir.

Teorem 2.19 (Hadamard): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$' nin orijindeki sıfırın katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$' nin 0' dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Tanım 2.20: Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi uzay içinde bir limite sahipse bu uzaya tam iç çarpım uzayı veya Hilbert uzayı adı verilir. Örneğin,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

uzayı, $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.21: L, H Hilbert uzayından kendi üzerine tanımlı bir lineer operatör ve $\overline{D(L)} = H$ olsun.

$$M := \{ y \in H : \forall x \in D(L) \text{ için } (Lx, y) = (x, z) \text{ olacak şekilde } z \in H \}$$

kümesi üzerinde $y \in M$ için $L^* y = z$ şeklinde tanımlı operatöre L'nin adjonit (eşlenik) operatörü denir. Bir L operatörü için $L \subset L^*$ ise L'ye simetrik operatör, $L = L^*$ ise L'ye self adjoint (özeşlenik) operatör adı verilir.

Teorem 2.22: L bir self adjoint operatör olsun. Bu durumda,

a) L' nin tüm özdeğerleri reel sayılardır, yani $\sigma_p \subset \mathbb{R}$' dir.

b) Farklı özdeğerlere karşılık gelen y_1, y_2 özfonksiyonları ortogonaldir, yani $(y_1, y_2) = 0$.

Tanım 2.23:

$$L = L\,(\,q(x), h\,, H\,)$$
$$:= \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi\,, q(x) \in L_2(0,\pi) \\ \quad U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $\varphi(x,\lambda)$ ve $\vartheta(x,\lambda)$ fonksiyonları $L\,(\,q(x), h\,, H\,)$ sınır değer probleminin, $\varphi(0,\lambda) = 1, \varphi'(0,\lambda) = h$ ve $\vartheta(0,\lambda) = 1, \vartheta'(0,\lambda) = -H$ şartlarını sağlayan çözümleri ise, $\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -\,U(\vartheta)$ fonksiyonuna L probleminin karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 2.24: $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ile L probleminin özdeğerleri çakışır.

Teorem 2.25: Aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar bir sabit çarpan dışında tektir. Yani, $\vartheta(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n)$, $\beta_n \neq 0$ olacak şekilde bir $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ dizisi vardır. Ayrıca, $\beta_n \alpha_n = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.26: λ_n' ye karşılık gelen $\varphi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonun $(0,\pi)$ aralığında n tane sıfırı vardır.

Teorem 2.27:

i)

$$L = L\,(\,q(x), h\,, H\,)$$
$$:= \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = \rho^2, \quad 0 < x < \pi, q(x) \in L_2(0,\pi) \\ \quad U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları sistemi $L_2[0,\pi]$ uzayında tamdır.

ii) $f(x)$, $x \in [0,\pi]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt$$

olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \varphi(x,\lambda_n)$$

serisi $x \in [0,\pi]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

iii) $f(x) \in L_2[0,\pi]$ için (ii) deki seri $L_2[0,\pi]$ uzayında yakınsaktır ve

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, |a_n|^2$$

Parseval eşitliği sağlanmaktadır.

iv) $P(x,t)$ ve $K(x,t)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$, ve $C(0,\lambda) = 1$, $\quad C'(0,\lambda) = 0$

şartlarını sağlayan çözümler sırasıyla,

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^{x} P(x,t)\frac{\sin\rho x}{\rho}dt,$$

$$C(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^{x} K(x,t)\cos\rho t\, dt$$

şeklindedir.

Teorem 2.28:

$$L = L\,(\,q(x), h\,, H\,)$$
$$:= \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < 1, q(x) \in L_2(0,1) \\ U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, & V(y) := y'(1) + Hy(1) = 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

a) $L\,, D(L)$ üzerinde kapalı, self adjoint bir operatördür.

b) L sınır değer problemi, mutlak değerlerine göre sınırlandığında sınırsız şekilde büyüyen , sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.

c) L'nin özdeğeri reel sayılardır ve herhangi farklı iki özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir, yani $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerler ve $y(x,\lambda_1\,)$, $z(x,\lambda_2)$ fonksiyonları sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\int_0^1 y(\,x,\lambda_1)\overline{z(x,\lambda_2)}dx = 0$$

eşitliği geçerlidir.

d) Özdeğerler dizisini $\{\lambda_n\}$ ile gösterirsek, n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir:

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{c}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

burada $c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx$ şeklindedir.

e) $u\ (x,\lambda)\ ve\ v\ (x,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$u(0,\lambda) = 1, \qquad u'(0,\lambda) = \ h$$
$$v(1,\lambda) = 1, \qquad v'(1,\lambda) = -\,H$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri olmak üzere, herhangi bir

$f(x) \in L_2(0,1)$ fonksiyonu için

$$-y'' + \{q(x) - \lambda\}y = \ f(x), \qquad x \in (0,1)$$

denkleminin çözümü

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t;\lambda) f(t)dt$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $G(x,t;\lambda)$ Green fonksiyonudur ve

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x \le t \\ u(t,\lambda)v(x,\lambda), & t \le x \end{cases}$$

şeklindedir. $y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t;\lambda) f(t)dt$ ile tanımlanan operatöre L'nin rezolvent operatörü adı verilir ve bu operatör L'nin özdeğerleri dışında tanımlanır.

Lemma 2.29: λ kompleks bir parametre olmak üzere $\{\cos \lambda x\}$ ve $\{\sin \lambda x\}$ fonksiyon kümeleri $L_2[0,\pi]$'de tamdır. $\forall \lambda$ için,

$\int_0^\pi f(x)\cos \lambda x dx = 0$ veya $\int_0^\pi f(x)\sin \lambda x dx = 0$

eşitliklerini sağlayan bit tek $f(x) = 0$ (h.h.y) fonksiyonu vardır.

Lemma 2.30: $f(x) \in L_2[0,\pi]$ herhangi bir fonksiyon ve $K(x,t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) + \int_x^\pi f(t)K(x,t)dt = 0$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f(x) = 0$ (h.h.y) fonksiyonu vardır.

Lemma 2.31:(Riemann-Lebesque) $f(x)$, $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyon olmak üzere, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(\alpha x + \beta)dx = 0.$$

Özel olarak $\beta = \frac{\pi}{2}$ için,

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \int_a^b f(x)\cos \alpha x dx = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{|\alpha|\to\infty} \int_a^b f(x)\sin \alpha x dx = 0.$$

Lemma 2.32:

$$-y''+q(x)y=\lambda y \qquad [2.1]$$

$$\begin{aligned} &y'(0)-hy(0)=0,\\ &y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \end{aligned} \qquad [2.2]$$

probleminin karakteristik fonksiyonu $\Delta(\lambda)$, $G_\delta=\left\{\rho:\left|\rho-n\right|<\delta, n\in\mathbb{Z}\right\}$ bölgesinde yeterince büyük ρ'ler için,

$$\Delta(\lambda)\geq c\left|\rho\right|e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|\pi}$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 2.33: [2.1]-[2.2] probleminin $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)$, $q(x)$ yerine $\tilde{q}(x)$ alınarak elde edilen problemin aynı başlangıç koşullarındaki çözümü $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ olmak üzere,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x G(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt,$$

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x \tilde{G}(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt,$$

$$\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^\pi K(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}tdt\right].$$

Burada $K(x,t)=2\left(G(x,x-2t)-\tilde{G}(x,x-2t)\right)+$

$$2\left[\int_{-x+2t}^{x}\tilde{G}(x,s-2t)G(x,s)ds+\int_{-x}^{x-2t}\tilde{G}(x,s+2t)G(x,s)ds\right].$$

2.2 Özdeğerlerin Asimptotiği

Lemma 2.34: $-y''+q(x)y=\lambda y$ denkleminin $\varphi(0,\lambda)=1$ ve $\varphi'(0,\lambda)=h$ başlangış koşullarını sağlayan çözümü, $\lambda=\rho^2$ olmak üzere,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{\sin\rho x}{2\rho}\int_0^x q(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\rho}\int_0^x \sin p(x-2t)q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|x}}{|\rho|^2}\right)$$

asimptotik ifadesini sağlar.

İspat: Sabitlerin değişimi yöntemi ile,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt$$

elde edilir. İntegralin içindeki $\varphi(t,\lambda)$ yeniden yazılırsa,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)q(t)[\cos\rho t+\frac{h}{\rho}\sin\rho t]dt$$
$$+\frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)q(t)\left[\frac{1}{\rho}\int_0^t \sin\rho(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right]dt$$

bulunur. $|\sin z|\le e^{|\mathrm{Im}\,z|}$ ve $|\cos z|\le e^{|\mathrm{Im}\,z|}$ olduğundan,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{1}{\rho}\sin\rho x\int_0^x \cos^2\rho t q(t)dt$$
$$+\frac{h}{\rho^2}\sin\rho x\int_0^x \cos\rho t\sin\rho t q(t)dt+\frac{1}{\rho}\cos\rho x\int_0^x \sin\rho t\cos\rho t q(t)dt$$
$$-\frac{h\cos\rho x}{\rho^2}\int_0^x \sin^2\rho t q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|x}}{|\rho|^2}\right)$$

elde edilir.

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{1}{2\rho}\sin\rho x\int_0^x\left(1+\cos 2\rho t\right)q(t)dt$$
$$-\frac{1}{2\rho}\cos\rho x\int_0^x\sin 2\rho t q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\rho|x}}{|\rho|^2}\right)$$

olur. Buradan da,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\frac{h}{\rho}\sin\rho x+\frac{\sin\rho x}{2\rho}\int_0^x q(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\rho}\int_0^x\sin p(x-2t)q(t)dt+O(\frac{e^{|\operatorname{Im}\rho|x}}{|\rho|^2})$$

bulunur.

Teorem 2.35: [34] $\lambda=\rho^2$, $q(x)\in L_2[0,1]$ ve $h,H\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-y''+q(x)y=\lambda y$$
$$y'(0)-hy(0)=0$$
$$y'(1)+Hy(1)=0$$

probleminin $\{\lambda_n\}$ özdeğerler dizisi için, n' nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir.

$$\sqrt{\lambda_n}=\rho_n=n\pi+\frac{c}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2}).$$

Burada $c=h+H+\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt.$

İspat: $\Delta(\lambda)$ karakteristik denklemin sıfırları problemin özdeğerleridir. Lemma 2.34'deki ifadeler $\Delta(\lambda)=\varphi'(1,\lambda)+H\varphi(1,\lambda)=0$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\Delta(\lambda)=-\rho\sin\rho+\left(h+H\right)\cos\rho+\frac{hH}{\rho}\sin\rho$$
$$+\int_0^1\cos\rho(1-t)q(t)\varphi(t)dt+\frac{H}{\rho}\int_0^1\sin\rho(1-t)q(t)\varphi(t)dt=0$$

elde edilir. İntegral içindeki $\varphi(t)$ fonksiyonu yeniden düzenlenip, denklem

ρ'ye bölünürse;

$$\Delta(\rho) = -\sin\rho + \frac{c}{\rho}\cos\rho + \frac{1}{2\rho}\int_0^1 \cos\rho(1-2t)q(t)dt + O(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|x}}{|\rho|^2}) = 0$$

bulunur. Burada $c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt.$

$G = \left\{\rho \in \mathbb{C}: \ |\mathrm{Re}\,\rho| \le \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, |\mathrm{Im}\,\rho| \le \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$ bölgesinde,

$$|\sin\rho| = \left|\sin\left[\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \pm it\right]\right| \ge \frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|}}{4}$$

ve $f(\rho) = \frac{c}{\rho}\cos\rho + \frac{1}{2\rho}\int_0^1 \cos\rho(1-2t)q(t)dt + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|x}}{|\rho|^2}\right)$

için, $f(\rho) \le \frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|}}{4}$ olur. $-\sin\rho$ ve $f(\rho)$ fonksiyonlarına Rouche teoremi uygulanırsa, $-\sin\rho$ fonksiyonu ile $-\sin\rho + f(\rho)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayıları aynıdır. Böylece $\Delta(\rho)$'nin sıfırları, $\delta_n = O(\frac{1}{n^2})$ olmak üzere

$\rho_n = n\pi + \delta_n$ şeklindedir. Buradan $\Delta(\rho_n) = 0$ için,

$$\Delta(\rho_n) = -\sin(n\pi+\delta_n) + \frac{c}{n\pi+\delta_n}\cos(n\pi+\delta_n)$$
$$+\frac{1}{2(n\pi+\delta_n)}\int_0^1 c\,\mathrm{os}[(n\pi+\delta_n)(1-2t)]q(t)dt + O\left(\frac{1}{|n|^2}\right) = 0$$

bulunur.

$$\sin(n\pi+\delta_n) = (-1)^n(\delta_n - \frac{\delta_n^3}{3!} + \ldots) = (-1)^n\delta_n + O(\frac{1}{n^2}),$$

$$\cos(n\pi+\delta_n) = (-1)^n(1 - \frac{\delta_n^2}{2!} + \ldots) = (-1)^n + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{n\pi+\delta_n}=\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{\delta_n}{n\pi}+\ldots\right)=\frac{1}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik ifadelerinden;

$$(-1)^{n+1}\delta_n+\frac{(-1)^n c}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2})=0$$

elde edilir. $c=h+H+\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt$ ve $\rho_n=n\pi+\delta_n$ olmak üzere;

$$\delta_n=\frac{c}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2}) \text{ ve } \rho_n=n\pi+\frac{c}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur.

Benzer şekilde, Dirichlet sınır koşullarına sahip problem için,

$$\rho_n=n\pi+\frac{\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir. Bu asimptotik ifadeler için, karesi yakınsak olan seriler kullanılarak benzer ifadeler aşağıdaki teoremler ile verilebilir.

Teorem 2.36: [48] $q(x)\in L_2(0,\pi)$,

$-y''+q(x)y=\lambda y$ ve $y'(0)-hy(0)=y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ probleminin özdeğerleri $c_n\in l_2$ olmak üzere,

$$\sqrt{\lambda_n}=\rho_n=n+\frac{h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt}{n\pi}+\frac{c_n}{n}. \qquad [2.3]$$

Teorem 2.37: [32] $q(x)\in L_2[0,1]$,

$-y''+q(x)y=\lambda y$ ve $y(0)=y(1)=0$ probleminin özdeğerleri $c_n\in l_2$ olmak üzere,

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)dx + c_n, \qquad [2.4]$$

veya

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\,dx - \int_0^1 q(x)\cos 2n\pi x\,dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir.

2.3 Ters Problemler için Temel Teklik Teoremleri

Teorem 2.38 [39]: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere λ_0 , λ_1 , … ,λ_n , … sayıları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ \ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri olsun.

Eğer $\lambda_n = n^2$ (n = 0, 1, …) ise $q(x) \equiv 0$ 'dır.

İspat:

λ_0 =0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon y_0 olsun. O halde,

$$-y_0'' + q(x)y_0 = 0$$

$$y_0'(0) = y_0'(\pi) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Teorem 2.26'dan y_0 çözümünün $[0,\pi]$

aralığında hiç sıfırı yoktur.

$$q(x) = \frac{y_0''}{y_0} = \frac{y_0 y_0'' - (y'_0)^2}{{y_0}^2} + \frac{(y'_0)^2}{{y_0}^2}$$

eşitliğinden,

$$q(x) = \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' + \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 \qquad [2.5]$$

elde edilir.

[2.3] özdeğerlerin asimptotik ifadesinden, teoremin koşulları altında

$$\int_0^{\pi} q(x)dx = 0$$

sonucu çıkar. [2.5] eşitliğinden ve teoremin sınır koşullarından,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx = 0$$

elde edilir. Bu ise $\left(\frac{y_0'}{y_0}\right) = 0$ (h.h.y) olmasını gerektirir. Sonuç olarak [2.5] denkleminden, $q(x) = 0$ (h.h.y) eşitliği bulunur.

Teorem 2.39 [51]:

[2.1]-[2.2] probleminin özdeğer dizisi $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, $q(x)$ yerine $\tilde{q}(x)$ alınarak elde edilen problemin özdeğer dizisi $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 0}$, $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ için $q(x) = \tilde{q}(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ise $x \in [0, \pi]$ için, $q(x) = \tilde{q}(x)$ (h.h.y) olur.

İspat:

[2.1]-[2.2] probleminin $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$, $q(x)$ yerine $\tilde{q}(x)$ alınarak elde edilen problemin aynı başlangıç koşullarındaki çözümü $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ olsun. Bu durumda

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi$$
$$-\tilde{\varphi}'' + q(x)\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla $\varphi(x, \lambda)$ ve $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\tilde{\varphi}''\varphi - \varphi''\tilde{\varphi} + \left(\left(q(x) - \tilde{q}(x)\right)\varphi(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda)\right) = 0$$

olur. Bu denklem 0'dan π'ye integrallenirse,

$$\tilde{\varphi}(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\tilde{\varphi}'(\pi,\lambda)=\int_0^{\pi}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)dx$$

elde edilir. $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ için $q(x)=\tilde{q}(x)$ olduğundan,

$$\tilde{\varphi}(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\tilde{\varphi}'(\pi,\lambda)=\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)dx$$

olur. $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $\varphi'(\pi,\lambda)=-H\varphi(\pi,\lambda)$ ve $\tilde{\varphi}'(\pi,\lambda)=-\tilde{H}\,\varphi(\pi,\lambda_n)$ olduğundan,

$F(\lambda)=\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(x,\lambda)dx$ fonksiyonu için $F(\lambda_n)=0$ bulunur.

$\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun sıfırları, $\{\lambda_n\}$ özdeğer dizisi olduğundan,

$\psi(\lambda)=\dfrac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ tam fonksiyondur.

$\varphi(x,\lambda)=O(e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x})$ ve $\tilde{\varphi}(x,\lambda)=O(e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x})$

asimptotik ifadelerinden

$|F(\lambda)|\le c\left|\sqrt{\lambda}\right|e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\pi}$ bulunur. Burada c sabittir.

Lemma 2.32'den $\Delta(\lambda)\ge c\left|\sqrt{\lambda}\right|e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\pi}$ olduğu dikkate alınırsa,

$\psi(\lambda)=\dfrac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\le\dfrac{c}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}$ olur. Liouville Teoreminden, $\psi(\lambda)$ fonksiyonu sabittir.

Böylece $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\psi(\lambda)=0$ olduğundan, $\psi(\lambda)=0$ ve dolayısıyla $|F(\lambda)|=0$ bulunur.

$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(x,\lambda)dx=0$ eşitliği yerine Lemma 2.33'den,

$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\left[1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^{\pi}K(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}t dt\right]dx=0$ ve buradan da,

$$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)dx+\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\cos 2\sqrt{\lambda}x dx+$$
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{x}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)K(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}dtdx=0$$

bulunur. İntegrasyon sırası değiştirilirse,

$$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)dx+\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)\cos 2\sqrt{\lambda}x dx+$$
$$\int_0^{\pi/2}\int_t^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)K(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}dxdt=0$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)dx+\int_0^{\pi/2}\left[\left(q(t)-\tilde{q}(t)\right)+\int_t^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)K(x,t)dx\right]\cos 2\sqrt{\lambda}tdt=0$$

olur. $f(t)=\left(q(t)-\tilde{q}(t)\right)+\int_t^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)K(x,t)dx$ olmak üzere,

$$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)dx+\int_0^{\pi/2}f(t)\cos 2\sqrt{\lambda}tdt=0$$

bulunur. Bu denklemde Riemann-Lebesque Lemması uygulanırsa,

$\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\int_0^{\pi/2}f(t)\cos 2\sqrt{\lambda}xdt=0$ olduğundan,

$\int_0^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)dx=0$ olur ve Böylece; $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için,

$\int_0^{\pi/2}f(t)\cos 2\sqrt{\lambda}tdt=0$ bulunur. $\{\cos\lambda x\}$ fonksiyonlarının tamlığından,

$$f(t)=\left(q(t)-\tilde{q}(t)\right)+\int_t^{\pi/2}\left(q(x)-\tilde{q}(x)\right)K(x,t)dx=0$$

olur. Homojen Volterra denkleminin çözümü için, Lemma 2.30'dan,

$$q(t)-\tilde{q}(t)=0$$

bulunur. Böylece,

$x \in [0,\pi]$ için, $q(x) = \tilde{q}(x)$ (h.h.y) olur.

Teorem 2.40: [40] h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere ,

λ_0 , λ_1 , … ,λ_n , …ler; $-y'' + q(x)y = \lambda y$ diferansiyel denklemi ve

$y'(0) - hy(0) = 0$

$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

sınır koşulları ile verilen problemin ; μ_0, μ_1 , … , μ_n,… ler ise

$-y'' + q(x)y = \lambda y$ denklemi ve

$y'(0) - h_1 y(0) = 0$

$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

$(h \neq h_1)$ sınır koşuluyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Teorem 2.41: [42]

$$L \coloneqq \begin{cases} l(y) \coloneqq -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \ 0 < x < \pi, q(x) \in L_2(0,\pi) \\ \quad U(y) \coloneqq y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) \coloneqq y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{L} \coloneqq \begin{cases} l(y) \coloneqq -y'' + \tilde{q}(x)y = \tilde{\lambda} y, \quad \lambda = k^2, \ 0 < x < \pi, q(x) \in L_2(0,\pi) \\ \quad U(y) \coloneqq y'(0) - \tilde{h}y(0) = 0, \quad V(y) \coloneqq y'(\pi) + \tilde{H}y(\pi) = 0 \end{cases}$$

problemleri verilmiş olsun. α_n ve $\tilde{\alpha}_n$ ve sırasıyla L ve $\tilde{L}$ operatörlerinin normalleştirici sayıları olmak üzere, Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ $(n = 0,1,\ldots)$ ise, $\tilde{h} = h$, $\tilde{H} = H$ ve $(0,\pi)$'de (h.h.y) $\tilde{q}(x) = q(x)$ dir.

Yani bir özdeğer dizisi ile normalleştirici sayı dizisi L problemini tek olarak belirlemeye yeter.

Teorem 2.42: [50] [2.1]-[2.2] probleminde,

Eğer $q(x) = q(\pi - x)$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ $(n = 0,1, \dots)$, $h = H$, $\tilde{h} = \widetilde{H}$ ve $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$ ise $\tilde{h} = h$ ve $(0,\pi)$'de $\tilde{q}(x) = q(x)$ (h.h.y) eşitlikleri sağlanır.

Yani potansiyel fonksiyonun simetrik olduğu durumda tek özdeğer dizisi L problemini tek olarak belirlemeye yeter.

İspat: Teorem 2.25 kullanılırsa, $\vartheta(x,\lambda_n)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları için;

$$\vartheta(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n) = \beta_n\vartheta(\pi - x,\lambda_n) = {\beta_n}^2\varphi(\pi - x,\lambda_n) = {\beta_n}^2\vartheta(x,\lambda_n)$$

ve buradan da ${\beta_n}^2 = 1$ bulunur ve

$$\alpha_n = (-1)^{n+1}\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$$

sonucu çıkar. Böylece $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ olur. Teorem 2.41'den ispat biter.

Teorem 2.43: [43] $\rho(x)$ parçalı analitik bir fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ olmak üzere,

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Eğer $\lambda < 0$ ise $R(\lambda) := \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirlenir.

Teorem 2.44: [49] $q(x)$fonksiyonu $q^{(m)}(x) \in L_1(0,\pi)$ olmak üzere $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin, [2.1]-[2.2] şeklindeki bir sınır-değer probleminin spektral karakteristikleri olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir:

1)

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Burada $n \neq m$ için $\lambda_n \neq \lambda_m$, $a_0 = \frac{1}{\pi}[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt]$ ve

$\alpha_n > 0$ $(n = 0,1,\dots)$.

2)

$$F(x,t) = \frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,t - \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\,x\cos\sqrt{\lambda_n}\,t}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right]$$

fonksiyonu $(0 \leq x,\ t \leq \pi)$ bölgesinde $(F(x,t))^{(m+1)}(x) \in L_1(0,\pi)$'dir.

Teorem 2.45: [49] Eğer her $n \in N$ için $\alpha_n > 0$ ve

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ise, o halde λ_n ve α_n sayılarına karşılık gelen [2.1]-[2.2] şeklindeki problem için, mutlak sürekli $q(x)$ fonksiyonu mevcuttur. Burada $a_0, a_1\ ve\ b_0$ sabitlerdir.

İspat:

Teorem 2.44' den

$$F(x,t) = \frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,t - \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\,x\cos\sqrt{\lambda_n}\,t}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right]$$

fonksiyonunun birinci türevinin mutlak sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ifadedeki $\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}\,x$ fonksiyonu mutlak süreklidir. Çünkü sınırlı türeve sahip bir fonksiyon, Lipschtiz şartını sağladığı için aynı zamanda mutlak sürekli olur. Mutlak sürekli iki fonksiyonun toplamı da mutlak süreklidir. O halde, özdeğerlerin asimptotiği göz önüne alındığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

serisini incelemek yeterlidir.

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\ln\left(1-e^{ix}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

ve

$$\ln z = \ln|z| + i\, Arg(z)$$

eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = Im(-\ln\left(1-e^{ix}\right)) = -Arg\,(1-\ e^{ix})$$

sonucu çıkar.

$$-Arg\left(1-\ e^{ix}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right) = \ \tan^{-1}(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}) = \frac{\pi - x}{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak $q(x)$ mutlak süreklidir.

Teorem 2.46: [49] $q(x)$ fonksiyonu $q''(x) \in L_2(0,\pi)$ koşulunu sağlamak üzere $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin,
[2.1]-[2.2] şeklindeki sınır-değer probleminin spektral karakteristikleri olması için gerekli ve yeterli koşul

her n için $\alpha_n > 0$,

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + \frac{\gamma_n}{n^3}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{\tau_n}{n^3}$$

asimptotik ifadelerinin sağlanmasıdır. Ayrıca, $k \neq n$ için $\lambda_k \neq \lambda_n$ ve

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^2$ serileri yakınsaktır.

Teorem 2.47 [49]: h_2, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere, $\lambda_0 , \lambda_1 , \dots ,\lambda_n , \dots$ler, $-y'' + q(x)y = \lambda y$ diferansiyel denklemi ve

$y'(0) - h_1 y(0) = 0,$

$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

sınır koşulları ile verilen problemin ; $\mu_0, \mu_1 , \dots , \mu_n ,\dots$ ler ise

$-y'' + q(x)y = \lambda y$ denklemi ve

$y'(0) - h_2 y(0) = 0,$

$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

$(h_2 \neq h_1)$ sınır koşuluyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve $h , h_1 \, ve \, H$ sayılarını tek olarak belirler.

İspat:

$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h_1$ ve $\omega(0,\lambda) = 1,\ \omega'(0,\lambda) = h_2$

koşullarını sağlayan çözümler sırasıyla $\varphi(x,\lambda)$ ve $\omega(x,\lambda)$ olsun.

$f(x,\lambda) = \omega(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$

fonksiyonu tanımlansın. Öyle ki,

$f'(\pi,\lambda) + Hf(\pi,\lambda) = 0$

eşitliği sağlansın. O halde buradan,

$$m(\lambda) = -\frac{\omega'(\pi,\lambda) + H\omega(\pi,\lambda)}{\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)}$$

olduğu elde edilir. Bu formülden görüldüğü gibi $m(\lambda)$ fonksiyonu iki analitik fonksiyonun oranı şeklinde bir fonksiyondur. Öyle ki kutup noktaları ve sıfır yerleri sırasıyla verilen sınır- değer problemlerinin özdeğerleri ile çakışır.

Diğer taraftan,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi f(x,\lambda_1) f(x,\lambda_2) dx$$

$$= \int_0^\pi [-f''(x,\lambda_1) f(x,\lambda_2) + f(x,\lambda_1) f''(x,\lambda_2)] dx$$

$$= f'(0\,,\lambda_1) f(0,\lambda_2) - f(0,\lambda_1) f'((0,\lambda_2) = (h_1 - h_2)[m(\lambda_1) - m(\lambda_2)]$$

olduğundan son eşitlikte eğer

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \lambda_2 = \bar{\lambda}$$

yazılırsa,

$$\int_0^\pi |f(x,\lambda)|^2\, dx = (h_1 - h_2) \frac{Im\, m(\lambda)}{Im\, \lambda}$$

eşitliği bulunur. Buradan açıktır ki, eğer $h_1 > h_2$ $(h_1 < h_2)$ ise o zaman $m(\lambda)$ fonksiyonu üst yarı düzlemi kendisine dönüştürür.(alt yarı düzlemi kendisine dönüştürür.) bu yüzden iki özdeğer dizisi sıralıdır. Şimdi aşağıdaki integral göz önüne alınırsa;

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi f(x,\lambda) \varphi(x,\lambda_n) dx$$

$$= \int_0^\pi [-f''(x,\lambda) \varphi(x,\lambda_n) + f(x,\lambda) \varphi''(x,\lambda_n)] dx$$

$$= f'(0,\lambda) \varphi(0,\lambda_n) - f(0,\lambda) \varphi'(0,\lambda_n) = (h_2 - h_1)$$

Buradan $\Phi_1(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)$ ve $\Phi_2(\lambda) = \omega'(\pi,\lambda) + H\omega(\pi,\lambda)$ olmak üzere $\lambda \to \lambda_n$,

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx = -(h_2-h_1)\frac{\Phi'_1(\lambda_n)}{\Phi_2(\lambda_n)}$$

sonucu elde edilir. $\sin\sqrt{\lambda}x$ ve $\cos\sqrt{\lambda}x$ tam fonksiyonlarının mertebelerinin $\frac{1}{2}$ olduğu düşünülürse, $\Phi_1(\lambda)$ ve $\Phi_2(\lambda)$ fonksiyonları $\frac{1}{2}$. mertebeden tam fonksiyonlardır. Hadamard teoremi gereğince, bu fonksiyonlar kendi sıfırları ile bir sabit çarpan farkıyla tek olarak ifade edilebilirler. Dolayısıyla,

$$\Phi_1(\lambda) = C_1\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

$$\Phi_2(\lambda) = C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre α_n fonksiyonu için,

$$\alpha_n = (h_2-h_1)\frac{C_1}{C_2}\frac{\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)}\frac{1}{\lambda_n}$$

$$= (h_2-h_1)\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\frac{1}{\mu_n-\lambda_n}$$

Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k=n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir.

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} = 1$$

olduğundan

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1} = \frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\mu_k-\lambda} = 1$$

elde edilir. Özdeğerlerin asimptotik formülleri dikkate alındığında

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\mu_k-\lambda}=\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda}\right)=1$$

ve

$$\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}=1$$

bulunur. Böylece

$$\alpha_n=\frac{h_2-h_1}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}$$

sonucu çıkar. Bu formül iki özdeğer dizisi ile normalleştirici sayı dizisinin bulunabileceğini gösterir. Sonuç olarak Teorem 2.41' den ispat biter.

3. RIEMANN ZETA FONKSİYONU VE ASAL SAYILAR

3.1 Zeta Fonksiyonunun Sıfırları

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ fonksiyonu Riemann Zeta fonksiyonu olarak bilinir ve $\forall\varepsilon>0$ ve $\mathrm{Re}(s)>1+\varepsilon$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $\mathrm{Re}(s)>1$ için analitiktir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ eşitliğine Euler çarpım formülü denir. $\mathrm{Re}(s)>1$ için eşitliğin her iki tarafı da yakınsaktır. s'nin diğer değerlerinde ıraksak olmalarına rağmen $s=1$ kutup noktası dışındaki bütün s değerlerinde tanımlanmıştır. s'ye göre analitik devamının olduğunu göstermek için faktöriyel fonksiyonu ya da Gama fonksiyonu olarak bilinen

$$n!=\int_0^{\infty}e^{-x}x^n dx \qquad (n=1,2,3,...)$$

fonksiyonunu kullanmak gerekir. Bu fonksiyon $n>-1$ ve n'nin tam sayı olmayan değerlerinde yakınsaktır.

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^s dx$$

fonksiyonu $s>-1$ için ve s'nin reel değerleri için tanımlanabilir. Böylece $\mathrm{Re}(s)>1$ için s'nin bütün kompleks değerlerinde tanımlanabilir.

Özel olarak s bir doğal sayı olduğunda $\Gamma(s)=s!$ olacaktır. Gerçekten de, bu has olmayan integral için, kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$u=x^s,\ dv=e^{-x}dx,\ du=sx^{s-1},\ v=-e^{-x}$ değişken değiştirmeleri kullanılarak,

$$\Gamma(s)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^s e^{-\varepsilon}-\lim_{M\to\infty}M^s e^{-M}+s\Gamma(s-1)$$

bulunur. Buradaki limitler sıfıra gideceğinden,

$$\Gamma(s)=s\Gamma(s-1) \qquad [3.1]$$

elde edilir.

$\Gamma(0) = \lim_{M\to\infty}(1-e^{-M}) = 1$ olduğundan s bir doğal sayı iken,

$\Gamma(n) = n\Gamma(n-1) = n(n-1)\Gamma(n-2) = n(n-1)(n-2)\ldots\Gamma(0)$ eşitliği ile $\Gamma(s) = s!$ bulunur.

$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx$ fonksiyonunun diğer bir gösterimi,

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\frac{1.2....N}{(s+1)(s+2)...(s+N)}(N+1)^s$$

şeklindedir. Burada paydayı sıfır yapan değerler haricinde tanımlıdır. Yani limit mevcuttur. Böylece $s = -1,-2,-3,\ldots$ dışındaki s'nin bütün değerlerlerinde $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx$ fonksiyonuna denk olur. Ayrıca $\Gamma(s) = s\Gamma(s-1)$ eşitliğinin gösterildiği gibi, aşağıdaki denklemlerin de geçerli oldukları görülebilir.

$$\Gamma(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}, \qquad [3.2]$$

$$\frac{\pi s}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} = \sin\pi s, \qquad [3.3]$$

$$\Gamma(s) = 2^s\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-1}{2})\pi^{\frac{-1}{2}}. \qquad [3.4]$$

$s = -1,-2,-3,\ldots$ değerleri $\Gamma(s)$ fonksiyonunun basit kutup noktalarıdır. $\Gamma(s)$ 'nin hiç sıfırı yoktur. Özel bir eşitlik olarak $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ bulunabilir.

$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx$ fonksiyonu, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ fonksiyonunun $\mathrm{Re}(s) > 1$ şartını sağlamayan değerlerde analitik devamı için kullanılabilir.

$\Gamma(s)$ fonksiyonunun ifadesinde x yerine nx alınırsa,

$\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s-1)}{n^s}$ elde edilir. Burada $s>0$ ve $n=1,2,3\ldots$ olduğundan n'ler üzerinden toplam alınırsa; $\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = \frac{1}{r-1}$ serisi kullanılarak

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x-1}$ ve

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx = \Gamma(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad [3.5]$$

bulunur. Burada, integral ve toplamın yer değiştirilebileceği kullanılmıştır.

$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$ çevre integrali ele alınırsa; bu integralin yolu $+\infty$'dan başlayıp, sola doğru pozitif reel eksen üzerinden devam edip, orjinde saat yönünün tersinde bir çember çizerek tekrar $+\infty$'a dönmektedir. Bu integral,

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$$

şeklinde yazılabilir.

$\frac{x}{e^x-1}$ fonksiyonu $x=0$'ın yakın komşuluğunda analitik olduğundan ve $|x|=\delta$ çemberindeki $id\theta = \frac{dx}{x}$ eşitliği ile, $\delta \to 0$ iken ortadaki integral 0'a gider.

$(-x)^s = e^{s\ln(-x)}$ tanımı kullanılarak,

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\ln x - i\pi)}}{e^x-1}\frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{s(\ln x + i\pi)}}{e^x-1}\frac{dx}{x}\right]$$

ve buradan da,

$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$ bulunur. [3.5] eşitliği dikkate alınırsa,

$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = 2i\sin(\pi s)\Gamma(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı

$\dfrac{\Gamma(-s)s}{2\pi is}$ ile çarpılırsa ve [3.3] gözönünde tutulursa,

$$\frac{\Gamma(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\zeta(s) \qquad [3.6]$$

bulunur. Bu fonksiyon, s'nin 1'den büyük reel değerleri için $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ fonksiyonuna denktir.

e^x, x^s 'den $x\to\infty$ durumunda daha hızlı artar. Böylece [3.6]'daki integral s'nin bütün değerlerinde yakınsaktır. Böylece [3.6] fonksiyonu, $\Gamma(-s)$'nin kutup noktaları olan $s=1,2,3,...$ noktaları dışında analitiktir. Bu noktalardan $s=2,3,4,...$ noktalarında $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ fonksiyonu kutuplara sahip olmadığından, [3.6]'daki integral, $\Gamma(-s)$'nin kutup noktalarını iptal etmesi için 0 olmalıdır.

$s=1$ için $\zeta(s)=\infty$ olur. Böylece $s=1$ noktası $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$'nin de basit kutup noktası olur. O halde, $s=1$ dışındaki tüm kompleks noktalarda [3.6] eşitliğinin sol tarafındaki fonksiyon analitiktir ve $s>1$'in reel değerlerinde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ olur ve $\mathrm{Re}(s)>1$ yarı düzlemi boyunca $\zeta(s)$ fonksiyonunun analitik devamıdır.

$\dfrac{x}{e^x-1}$ fonksiyonu $x=0$'ın yakın komşuluğunda analitik olduğundan, bir kuvvet serisine açılabilir ve

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $|x|<2\pi$'dir. Çünkü $x=\pm 2\pi i$ noktaları singüler noktalardır. B_n sayılarına Bernoulli sayıları denir. Bu katsayıların ilk birkaç tanesi

$$B_0 = 1$$
$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_1 = \frac{-1}{2}$$
$$B_3 = 0$$
$$B_4 = \frac{-1}{30} \qquad B_5 = 0$$
$$B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_7 = 0$$

şeklindedir. $n > 1$ ve tek sayı iken $B_n = 0'dır$.

B_n sayıları $s = -n$ olduğunda, $(n = 0,1,2,....)$, $\zeta(s)$ fonksiyonunda kullanılabilir. Gerçektende,

$$\zeta(-n) = \frac{\Gamma(n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{-n}}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{2\pi i} \int_{|x|=\delta} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m x^m}{m!} \right) \frac{(-x)^{-n}}{x} \frac{dx}{x}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n) B_m x^m}{m!} \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{m-n-1} d\theta$$

$$= n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

bulunur. Buradan kolayca, $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = ... = 0$ elde edilir. Bunlar aynı zamanda $\zeta(s)$'nin aşikar sıfırlarıdır. Diğer taraftan,

$\zeta(0) = \frac{-1}{2}$, $\zeta(-1) = \frac{-1}{12}$, $\zeta(-3) = \frac{-1}{120}$ gibi değerler bulunabilir.

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ fonksiyonunda, $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6),....$ değerleri için [27], $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n} (-1)^{n+1} B_{2n}}{2(2n)!}$ daha genel formülü kullanılabilir.

Ayrıca bu değerleri bulmak için bir takım özel yöntemler mevcuttur. Örneğin, $\sin(\pi z)$ fonksiyonu için Hadamard teoreminden, sıfırlarının çarpımı şeklinde yazılırsa,

$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ bulunur. Diğer taraftan Taylor kuvvet serisi açılımı,

$\sin(\pi z) = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \ldots$ bulunur. Her iki ifadenin eşitliğinden,

$$\pi z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \ldots . = \sin(\pi z) = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \ldots$$

$$\pi z - \pi z^3 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) + \ldots . = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \ldots$$

$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ bulunur.

$\zeta(s) = \frac{\Gamma(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$ ifadesinden, [27,s.12]'de gösterildiği gibi,

$$\zeta(s) = \Gamma(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s) \qquad [3.7]$$

fonksiyonel denklemi elde edilebilir. Bu denklem, [3.3] ve [3.4] eşitlikleri dikkate alınarak yeniden düzenlenirse,

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{-1}{2}} 2^{-s} \Gamma\left(\frac{-s}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{s+1}{2}\right) 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi s / 2}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

ve böylece

$$\zeta(s)\pi^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) = \zeta(1-s)\pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2} - 1\right)$$

bulunur. Bu denklemin sol tarafındaki s yerine $1-s$ yazılırsa, eşitliğin bozulmadığı görülür. s=0 ve s=1 noktaları, bu denklemdeki simetrik olan $\zeta(s)\pi^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right)$ fonksiyonunun kutup noktalarıdır. Bu noktalardan kurtulmak için, bu fonksiyonu $\frac{s(s-1)}{2}$ ile çarparak,

$\xi(s) = \Gamma(\frac{s}{2})(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ fonksiyonu tanımlanırsa, $\xi(s)$ tüm s'ler için analitik yani tam fonksiyon olur. Ayrıca [3.7] denklemine denk olup,

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

simetriklik koşulunu sağlar. $\mathrm{Re}(s) > 1$ iken $\zeta(s)$'nin hiç sıfırı olmadığından, aynı durumda $\xi(s)$'nin de hiç sıfırı yoktur. ρ, $\xi(s)$'nin bir sıfırı olduğunda $1-\rho$'*de* bir sıfırı olmak zorundadır. Böylece ρ sıfır noktası için, $\mathrm{Re}(\rho) > 1$ ve $\mathrm{Re}(1-\rho) > 1$ olamaz. O halde, $\xi(s)$'nin bütün sıfırları

$$0 \le \mathrm{Re}(\rho) \le 1$$

şartını sağlamalıdır.

Riemann Hipotezi olarak bilinen ve henüz doğruluğu ispatlanamamış ünlü varsayıma göre, $\zeta(s)$'nin aşikar olmayan bütün sıfırları, $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ doğrusu üzerindedir.

3.2 Asal Sayı Teoremi

p_n, *n.* asal sayı ve $\pi(x)$, $p_n \le x$ şartını sağlayan asal sayıların sayısını gösteren fonksiyon olsun. Gauss'unda aralarında olduğu 19. Yüzyılın önemli matematikçileri, asal sayıların dağılımı için $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ ifadesini önerdiler. 1896'da Hadamard ve Vallee Poussin, [23, 24], temel asal sayı teoremi olarak bilinen,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1 \qquad [3.8]$$

asimptotik durumu ispatladılar. İspatlarında etkili bir analitik yöntem kullanmışlardır.

Son yıllarda asal sayı teoreminin ispatı, Newman, [54], ve Zagier, [55], tarafından daha sade bir hale getirildi. Bu ispat tekniğinde karmaşık analizde önemli bir yer tutan Riemann Zeta Fonksiyonu kullanılmıştır. Bu teoremi ispatlamadan önce, kullanılacak gerekli tanımlar ve lemma'lar verilmiştir.

Tanım 3. 1: $f = O(g)$ ise $\exists c \in \mathbb{R} \ni |f| \leq cg$.

Tanım 3. 2: $f \sim g$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Lemma 3. 3: $\mathrm{Re}(s) > 1$ için $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ eşitliği doğrudur.

İspat:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + ... \quad [3.9]$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + ... \quad [3.10]$$

[3.9]' dan [3.10] çıkarılırsa,

$$(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + ... \quad [3.11]$$

elde edlilir.

$$\frac{1}{3^s}(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + ... \quad [3.12]$$

[3.11]' den [3.12] çıkarılırsa,

$$(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + ...$$

bulunur. Bu işlem sırasıyla bütün asal sayılar için $\left\{\frac{1}{5^s}, \frac{1}{7^s}, ...\right\}$ uygulanırsa,

$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^s})\zeta(s) = 1$ bulunur ve böylece ispat biter.

Lemma 3. 4: $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ serisi yakınsak ise $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ sonsuz çarpımı da yakınsaktır.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ yakınsak olsun.

$|\log(1+z_k)| = \left|z_k - \frac{z_k^2}{2} + \frac{z_k^3}{3} - ...\right| \leq |z_k|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right) \leq 2|z_k|$ olduğundan

$\sum_{k=1}^{\infty}|\log(1+z_k)|$ yakınsak olur. $n \to \infty$ iken, $S_n = \sum_{k=1}^{n}|\log(1+z_k)| \to s$ için $\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) \to e^s$ olacağından ispat biter.

Lemma 3. 5 : $\mathrm{Re}(s) > 1$ için $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ serisi yakınsaktır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty}|p_n^{-s}| < \sum_{n=1}^{\infty}|n^{-s}| < \infty$ olduğundan Lemma 3.4 gereğince $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_n^s})$ sonsuz çarpımı yakınsak olur ve Lemma 3.3 ile $\zeta(s)$ yakınsaktır.

Ayrıca bu lemma ile $\mathrm{Re}(s) > 1$ için $\zeta(s) \neq 0$.

Lemma 3. 6: $\mathrm{Re}(s) > 1$ için $\int_1^{\infty} x^{-s}dx = \frac{1}{s-1}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\int_n^x \frac{s}{u^{s+1}}du = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}$ eşitlikleri geçerlidir..

Lemma 3. 7: $\mathrm{Re}(s) > 0$ için, $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ fonksiyonu analitiktir.

İspat: Lemma 3 .6'dan

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} x^{-s}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} x^{-s}dx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)dx$$

alınır. Serinin içindeki integrasyona tekrar Lemma 3.6 uygulanırsa,

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right|=\left|\int_n^{n+1}\int_n^x\frac{sdu}{u^{s+1}}dx\right|\le\max_{n\le x\le n+1}\left|\int_n^x\frac{sdu}{u^{s+1}}\right|\le\left|\frac{s}{n^{s+1}}\right|$$ bulunur.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$ serisi, $\mathrm{Re}(s)>0$ için yakınsak olduğundan ispat biter.

Tanım 3. 8: $\vartheta(x)=\sum_{p_n\le x}\ln p_n$ fonksiyonuna Chebyshev fonksiyonu denir.

Lemma 3. 9 : $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1$

İspat:

$\vartheta(x)=\sum_{p_n\le x}\ln p_n \le n\ln p_n=\pi(p_n)\ln p_n\le\pi(x)\ln x$ olduğundan,

$$\vartheta(x)\le\pi(x)\ln x \qquad [3.13]$$

yazılabilir.

$$\vartheta(x)\ge\sum_{x^{1-\varepsilon}}^{x}\ln p_n\ge\left(\pi(x)-\pi(x^{1-\varepsilon})\right)\ln x^{1-\varepsilon}\ge\left(\pi(x)-x^{1-\varepsilon}\right)(1-\varepsilon)\ln x$$

ve buradan da

$$\pi(x)\le\frac{\vartheta(x)}{(1-\varepsilon).\ln x}+x^{1-\varepsilon} \qquad [3.14]$$

bulunur. [3.13] ve [3.14]'den,

$\frac{\vartheta(x)}{x}\le\pi(x)\frac{\ln x}{x}\le\frac{\vartheta(x)}{(1-\varepsilon)x}+\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ olur ve böylece ispat biter.

Lemma 3.10 : Her $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ azalmayan fonksiyonu için, eğer $\int_1^\infty \frac{f(u)-u}{u^2}du$ has olmayan integrali yakınsak ise $x\to+\infty,\ f(x)\sim x.$

İspat:

$\forall\varepsilon>0$ için $(1-\varepsilon)x<f(x)<(1+\varepsilon)x$ ise, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ olduğu açıktır.

$\exists\varepsilon>0$ için $f(x)\geq(1+\varepsilon)x$ olsun. $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{f(u)-u}{u^2}du\geq\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{(1+\varepsilon)u-u}{u^2}du \tag{3.15}$$

elde edilir. [3.15]'de $\psi(x)=\frac{u(x)}{x}$ değişimi yapılırsa,

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{f(u)-u}{u^2}du\geq\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{(1+\varepsilon)u-u}{u^2}du\geq\int_1^{(1+\varepsilon)}\left(\frac{1+\varepsilon}{\psi}-1\right)\frac{d\psi}{\psi}=c>0$$ bulunur. Bu ise $\forall x$ için,

$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{f(u)-u}{u^2}du\geq c$ olması demektir ve $x\to\infty$ iken $\int_1^\infty\frac{f(u)-u}{u^2}du$ integralinin yakınsak olmasıyla çelişir.

Benzer şekilde $f(x)\leq(1-\varepsilon)x$ iken de çelişkiye varılır. O halde $\forall\varepsilon>0$ için $(1-\varepsilon)x<f(x)<(1+\varepsilon)x$ eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3. 11 : $\int_0^\infty\left(\vartheta(e^t)e^{-t}-1\right)dt$ has olmayan integrali yakınsak ise Asal Sayı Teoremi doğrudur.

İspat : $u=e^t$ dönüşümü yapılırsa,

$\int_1^\infty\left(\vartheta(e^t)e^{-t}-1\right)dt=\int_0^\infty\frac{\vartheta(u)-u}{u^2}du$ olur. $\vartheta(x)$ azalmayan fonksiyon olduğundan, Lemma 3.10 ile $\vartheta(x) \sim x$ bulunur. Böylece Lemma 3.9 ile $x \to +\infty$, $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$ olur.

Lemma 3. 12 : $\vartheta(x) = O(x)$ asimptotik ifadesi sağlanır.

İspat:

$n \in \mathbb{N}$ olsun. Binom açılımından;

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{2n} \geq \binom{2n}{n} \text{ olur.}$$

$\binom{2n}{n} \geq \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \prod_{n<p_n\leq 2n} p_n$ olduğundan Chebyshev fonksiyonunun tanımı kullanılarak,

$$2^{2n} \geq \prod_{n<p_n\leq 2n} e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)} \qquad [3.16]$$

elde edilir. [3.16]'nın her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n.\ln 2$$

bulunur. Buradan,

$$\vartheta(2^m) \leq \sum_{n=1}^{m} \left(\vartheta(2^n) - \vartheta(2^{n-1}) \right) \leq \sum_{n=1}^{m} 2^n \ln 2 = (2^{m+1} - 2)\ln 2 \leq 2^{m+1} \ln 2$$

olur. Böylece $2^{m-1} \leq x < 2^m$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için;

$\vartheta(x) \leq \vartheta(2^{m+1}) \leq 2^{m+1} \ln 2 = 4.2^{m-1} \ln 2 \leq 4x \ln 2$ olur. Bu ise

$\vartheta(x) = O(x)$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.13: $f(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için parçalı sürekli ve sınırlı olsun. Eğer $g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ fonksiyonu analitik ise $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali yakınsaktır.

Lemma 3.14 : $\int_1^\infty \left(\vartheta(e^t)e^{-t} - 1 \right) dt$ has olmayan integrali yakınsaktır.

İspat :

Lemma 3.12 ile $\vartheta(e^t)e^{-t}-1$ fonksiyonunun parçalı sürekli olduğu

ve Lemma 3.13 ile sınırlı olduğu anlaşılır. Teorem 3.14'de $f(t)=\vartheta(e^t)e^{-t}-1$ alınırsa,

$\int_0^\infty \left(\vartheta(e^t)e^{-t}-1\right)dt$ integrali yakınsak olur.

Böylece Lemma 3.15 ve Lemma 3.12 ile aşağıdaki teoremin ispatı biter.

Teorem 3. 15 (Asal Sayı Teoremi): $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1.$

[62]'de Dusart, $x\geq 32299$ için,

$$\pi(x)\geq \frac{x}{lnx}(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1,8}{\ln^2 x}) \qquad [3.17]$$

ve $x\geq 355991$ için,

$$\pi(x)\leq \frac{x}{lnx}(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2,51}{\ln^2 x})$$

eşitsizliklerini elde etmiştir.

Asal sayı teoremindeki kalan terimi geliştirmek için, $\pi(x)$'e, $\dfrac{x}{\ln x}$'den çok daha iyi bir yaklaşım olan $li(x)$ logaritmik integral fonksiyonu verilebilir. Burada $li(x)$, [25,s.228],

$$li(x):=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, [26]'da verildiği şekliyle

$li(2):=1,145163$ $m\in\mathbb{Z}_+$ ve

$$\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=x\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1!}{\ln^2 x}+\ldots\frac{m!}{\ln^{m+1}x}+O(\frac{1}{\ln^{m+2}x})\right)$$

olmak üzere, $li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+li(2)$ yazılabilir. Böylece,

$li(x)\sim\dfrac{x}{lnx}$ sonucu da geçerlidir. Asal sayı teoreminin yerine, $x\to+\infty$,

$\pi(x) \sim li(x)$

asimptotik ifadesi de elde edilir.

[63]'deki bilgisayar hesaplamaları ile $x < 10^{14}$ sayıları için,

$\pi(x) < li(x)$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermesine rağmen,

Littlewood teoreminden, [64, 65],

$\pi(x) > li(x)$

eşitsizliğini sağlayan değerlerin olması gerektiği bilinmektedir.

Tanım 3. 16 : $f(x) = \Omega_{\pm} g(x)$ ise

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \text{ve} \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.17: [64] $\pi(x) - li(x) = \Omega_{\pm}\left(\dfrac{\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$

Başka bir ifade ile, $\exists k > 0$ için,

$$\frac{\ln x\left(\pi(x) - li(x)\right)}{\sqrt{x}\ln\ln\ln x} > k \quad \text{ve} \quad \frac{\ln x\left(\pi(x) - li(x)\right)}{\sqrt{x}\ln\ln\ln x} < -k \qquad [3.18]$$

eşitsizliklerini sağlayan sonsuz sayıda x değeri vardır. Sonuç olarak $\pi(x) - li(x)$ sonsuz sayıda noktada işaret değiştirmektedir.

Asal sayı teoreminin bir sonucu olarak, [27,s.90],

$\left|\pi(x) - li(x)\right| \le c_1 x e^{(-c_2(\sqrt{\ln x})}$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_1, c_2 > 0$.

Teorem 3.18: **[56]** Eğer Riemann hipotezi doğru ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$$\left|\pi(x) - li(x)\right| \leq c\sqrt{x}\ln x \qquad [3.19]$$

eşitsiliği sağlanacak şekilde $\exists c > 0$ vardır. Eğer [3.19] geçerli ise, Riemann hipotezi de doğrudur.

Böylece, Riemann Zeta fonsiyonunun aşikar olmayan sıfırlarının yeri, asalların dağılımıyla yakından ilişkilidir.

4. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE ASAL SAYILAR

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y \qquad [4.1]$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha - (py'(a))\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta - (py'(b))\sin\beta = 0 \end{aligned} \qquad [4.2]$$

[4.1]-[4.2] Sturm-Liouville problemleri ele alınsın. Burada, λ kompleks parametre ve $\alpha \in [0,\pi), \beta \in (0,\pi]$. Eğer $[a,b]$ sonlu aralık ve $p,q,w:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\frac{1}{p}, q$ ve $w \in L[a,b]$ ise problem regüler, bu şartlardan herhangi biri sağlanmazsa problem singülerdir. Regüler problemin spektrumu yalnızca özdeğerlerden oluşur ve bu özdeğerler reel olup sonlu bir yığılma noktasına sahip olmayan artan bir dizidir.

Eğer $\frac{1}{p}$ fonksiyonu $[a,b]$'nin ölçümü sıfır olmayan en az bir alt aralığında 0'a denk ise, [4.1] denklemi,

$$\begin{cases} u' = \dfrac{v}{p}, \\ v' = (q - \lambda w)u \end{cases} \qquad [4.3]$$

sistemi ile ifade edilebilir. $u = y,\ \ v = pu'$ olduğundan, [4.2] sınır koşulları da,

$$\begin{aligned} u(a)\cos\alpha - v(a)\sin\alpha = 0 \\ u(b)\cos\beta - v(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \qquad [4.4]$$

şeklini alır. [4.3]-[4.4] problemine Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemi, [57], denir.

[58, 59] çalışmalarında; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şeklinde verilen herhangi n tane reel sayı için, bu sonlu tane sayının özdeğerler olduğu,

$$\begin{cases} u' = \dfrac{v}{p}, v' = (q - \lambda w)u, \\ \quad y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

şeklindeki, Dirichlet sınır şartına sahip Atkinson tipinde bir Sturm-Liouville probleminin var olduğu gösterilmiştir. [4.1]-[4.2] probleminde ise bu durum, sonlu sayıda spektral veri ile mümkün değildir. Ancak bir özdeğer dizisi ile

mümkün olabilir. Verilen herhangi bir reel sayı dizisi, özdeğerlerin asimptotik davranışına sahip olduğunda, bir Sturm-Liouville problemi inşa edilebilir. [28,s299]'de özdeğerleri asal sayılar olan herhangi bir Sturm-Liouville probleminin inşa edilmesi bir problem olarak verilmiştir.
Bu problem ile ilgili [29] makalesinde iki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.1: [29] Özdeğerleri asal sayılar olan, [4.1]-[4.2] şeklinde regüler bir Sturm-Liouville problemi yoktur.

İspat:

[4.1]-[4.2] probleminin pozitif özdeğerlerinin asimptotik ifadesi, [30],

$$\lambda_n^+ \sim \frac{n^2\pi^2}{\int_a^b \sqrt{(r(x)/p(x))_+}} \qquad [4.5]$$

şeklindedir. Burada $(r(x)/p(x))_+$ ifadesi $(r(x)/p(x))$'in pozitif değerleri demektir. Ayrıca $(r(x)/p(x)) \neq 0$.

Diğer taraftan;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

ifadesinde $x = p_n$ yazılırsa, asal sayı teoreminin bir sonucu olarak, p_n için asimptotik ifade,

$$p_n \sim n \ln n. \qquad [4.6]$$

alınır. [4.5] ve [4.6] ifadelerinden,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^+}{p_n} = \infty$ bulunur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.2: [29] Özdeğerleri asal sayılar olan [4.3]-[4.4] şeklinde Atkinson tipinde bir Sturm-Liouville problemi yoktur.

İspat:

[4.3]-[4.4] probleminin özdeğerleri, [57,s.206],

$\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} < \infty \qquad [4.7]$$

şartını sağlamaktadır.

Diğer taraftan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ serisinin yakınsaklık durumu için,

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ Euler çarpım formülü kullanılarak,

$\ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{p_n^s})^{-1}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)$ bulunur.

$|x|<1$ iken Taylor seri açılımından,

$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\ln(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n^s} + \frac{1}{2p_n^{2s}} + \frac{1}{3p_n^{3s}} + \ldots\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s(p_n^s-1)}$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s(p_n^s-1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{2s}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}$ eşitsizliğinden,

$s \to 1$ iken $\ln(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s})$ toplamı sınırsız ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s(p_n^s-1)}$ toplamı $\frac{\pi^2}{6}$ ile sınırlı olduğundan, $s \to 1$ iken,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s}$ serisi ıraksak olur. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = \infty \qquad [4.8]$$

bulunur. [4.7] ve [4.8] ifadelerinden elde edilen çelişki ile ispat biter.

Teorem 4.1 ile, özdeğerlerin bir alt kümesi asal sayılar olan bir Sturm-Liouville probleminin inşa edilemeyeceği sonucu çıkmaz. Örneğin;

$$-y'' + y = \lambda y$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri, $\lambda_n = n^2 + 1$ şeklindedir ve bu λ_n'lerin sonsuz alt kümesi asal sayıların bir alt kümesi olabilir. Bu ise açık bir sorudur. Gerçekten de bu problem, [60, 61]'de ele alınan, Landau problemine denktir. Bu Landau problemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n^2+1 ile ifade edilebilen asal sayıların sayısı sonsuz tane midir?

Landau problemlerinden bir diğeri:

$\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için n^2 ile $(n+1)^2$ arasında en az bir asal sayı var mıdır?

Bu problem, $\exists h, H \in \mathbb{R}$ için,

$$-y'' = \lambda y$$
$$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerlerinin, asal sayıların bir alt kümesi olması problemine dönüştürülebilir. Çünkü bu özdeğerler, Dirichlet sınır koşullarına sahip problemin özdeğerleri olan n^2 sayıları ile sıralıdır. [38, Lemma 1.1.3]; $n^2 < \lambda_n < (n+1)^2$ eşitsizliği geçerlidir. Bu özdeğerlerin bir alt kümesi, asal sayıların bir sonsuz alt kümesi olabilir. Bunlar, sayılar teorisi problemlerinin, spektral problemler ile ifade edilebilmesini sağlayan örneklerdir.

Ayrıca,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

probleminin özdeğerlerinin,

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)dx + c_n,$$

asimptotik ifadesindeki n yerine $\pi(p_n) = n$ alınarak yeni ilişkiler ortaya çıkabilir. Gerçekten de, özdeğerlerin asimptotik ifadesinden, $\pi(x)$ için ve dolayısıyla [3.19] ifadesi kullanılarak Riemann hipotezinin denkliği için yeni bir yaklaşım elde edilebilir.

[29]'da,

$$-y'' + q(x)y = \left(\frac{\pi\lambda}{\ln\lambda}\right)^2 y \qquad [4.9]$$

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad [4.10]$$

problemi önerilmiştir. Bu ters problem, $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln n}$ olduğundan dolayı, $\{\lambda_n\}$ özdeğer dizisi, $\lambda_n = p_n$ şartını sağlayacak şekilde, uygun bir potansiyel fonksiyon bulma problemidir. Önerilen bu problem, izleyen teorem ile, $L_2[0,1]$ uzayında ele alınmıştır.

Teorem 4.3: Özdeğerleri asal sayılar olan [4.9]-[4.10] problemi için $q(x) \notin L_2[0,1]$.

İspat:

Özdeğerlerin asimptotiğinden, $c_n \in l_2$ olmak üzere

$$\left(\frac{\pi\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)^2 = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)dx + c_n,$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)^2 - n^2\pi^2\right) = \int_0^1 q(x)dx \qquad [4.11]$$

bulunur.

Kabul edilsin ki, $\lambda_n = p_n$ olsun. [3.17]'deki, $x \geq 32299$ için,

$\pi(x) \geq \frac{x}{lnx}(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1,8}{\ln^2 x})$ eşitsizliğinde, $x = p_n$ alınırsa;

$$-\left(\frac{p_n}{\ln^2 p_n} + \frac{1,8p_n}{\ln^3 p_n}\right) \geq \frac{p_n}{\ln p_n} - n$$

bulunur. Buradan, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{\ln p_n} - n\right) = -\infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi p_n}{\ln p_n})^2 - n^2\pi^2\right) = -\infty \qquad [4.12]$$

olur. [4.11] ile [4.12] ifadeleri çelişir. Böylece ispat biter.

[4.10] Dirichlet sınır koşulları yerine, $h, H \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y'(0) - hy(0) = y'(1) + Hy(1) = 0 \qquad [4.13]$$

sınır koşulları alındığında,

aynı ispat yöntemi ile Teorem 4.3'e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4: Özdeğerleri asal sayılar olan [4.9]-[4.13] problemi için $q(x) \notin L_2[0,1]$.

İspat:

[4.9]-[4.13] probleminin özdeğerleri

$$\frac{\pi\lambda_n}{\ln \lambda_n} = n\pi + \frac{h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt}{n\pi} + O(\frac{1}{n^2})$$

şeklindedir. [4.12] ifadesi dikkate alındığında Teorem 4.3'ün ispatındaki yöntem ile

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}-n\right)\neq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{\ln p_n}-n\right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Özdeğerleri asal sayılar olabilecek uygun bir $q(x)\in L_2[0,1]$ potansiyeli bulmak için, Çizelge 1.2 dikkate alındığında, $\pi(p_n)=n$ sayılarına $\dfrac{n}{\ln n}$'den daha iyi bir yaklaşım olan $li(n)$ sayıları kullanılabilir.

$li(2):=1,145163$ $m\in\mathbb{Z}_+$ ve [26]'dan

$$\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=x\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1!}{\ln^2 x}+\ldots\frac{m!}{\ln^{m+1}x}+O(\frac{1}{\ln^{m+2}x})\right)$$

olmak üzere, $li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+li(2)$ fonksiyonu ile

$$-y''+q(x)y=\left(\pi li(\lambda)\right)^2 y \qquad [4.14]$$

$$y(0)=y(1)=0 \qquad [4.15]$$

şeklindeki Sturm-Liouville problemi ele alınabilir. Bu problemin $\{\lambda_n\}$ özdeğer dizisinin asal sayılar olması durumunda, [3.19] eşitsizliği ile özdeğerler arasında bağlantı kurulabilir. İzleyen teorem ile, böyle bir durumun gerçekleştiğinde, potansiyel fonksiyonun $L_2[0,1]$ uzayından olmadığı anlaşılmaktadır.

Teorem 4.5: Özdeğerleri asal sayılar olan [4.14]-[4.15] problemi için $q(x)\notin L_2[0,1]$.

İspat:

Özdeğerlerin asimptotiğinden, $c_n\in l_2$ olmak üzere

$$\left(\pi li(\lambda_n)\right)^2=n^2\pi^2+\int_0^1 q(x)dx+c_n,$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\pi li(\lambda_n)\right)^2-n^2\pi^2\right)=\int_0^1 q(x)dx \qquad [4.16]$$

bulunur.

Kabul edilsin ki, $\lambda_n = p_n$ olsun.

Teorem 3.17 ile, [3.18]'deki, $\exists k > 0$ için,

$$\frac{\ln x\left(\pi(x) - li(x)\right)}{\sqrt{x}\ln\ln\ln x} > k$$

eşitsizliğini sağlayan sonuz sayıda x değeri vardır.

Eğer $x = p_n$ yani x asal sayı ise, $\exists k > 0$ için,

$$\pi(p_n) - li(p_n) = \pi(x) - li(x) > \left(\frac{k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

olur. Eğer $x \neq p_n$ olmak üzere, $p_n < x$ şartını sağlayan en büyük asal sayı p_n ise,

$\pi(p_n) = \pi(x)$ ve $li(x) > li(p_n)$ olduğundan,

$$\pi(p_n) - li(p_n) = \pi(x) - li(p_n) > \pi(x) - li(x) > \left(\frac{k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

olur. Sonuç olarak sonsuz sayıda p_n asal sayıları için,

$$\pi(p_n) - li(p_n) > \left(\frac{k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\pi(p_n) - li(p_n)\right) \geq \limsup_{x\to\infty}\left(\frac{k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right) = \infty \qquad [4.17]$$

bulunur. Benzer şekilde, [3.18]'deki, $\exists k > 0$ için,

$$\frac{\ln x\left(\pi(x) - li(x)\right)}{\sqrt{x}\ln\ln\ln x} < -k$$

eşitsizliğini sağlayan sonuz sayıda x değeri vardır.

Eğer $x = p_n$ yani x asal sayı ise, $\exists k > 0$ için,

$$\pi(p_n) - li(p_n) = \pi(x) - li(x) < \left(\frac{-k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

olur. Eğer, $x \neq p_n$ olmak üzere, $p_n > x$ şartını sağlayan en küçük asal sayı p_n ise,

$\pi(p_n) = \pi(x) + 1$ ve $li(x) < li(p_n)$ olduğundan,

$$\pi(p_n)-li(p_n)=\pi(x)-li(p_n)+1<\pi(x)-li(x)+1<\left(\frac{-k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)+1$$

olur. Sonuç olarak sonsuz sayıda p_n asal sayıları için,

$$\pi(p_n)-li(p_n)<\left(\frac{-k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)+1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\pi(p_n)-li(p_n)\right)\leq\liminf_{x\to\infty}\left(\frac{-k\sqrt{x}\ln\ln\ln x}{\ln x}+1\right)=-\infty \qquad [4.18]$$

bulunur. [4.16] ile [4.17] ve [4.18] ifadeleri çelişir. Böylece ispat biter.

[4.15] Dirichlet sınır koşulları yerine, $h,H\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y'(0)-hy(0)=y'(1)+Hy(1)=0 \qquad [4.19]$$

sınır koşulları alındığında, [4.14]-[4.19] problemi için, aynı ispat yöntemi ile, Teorem 4.5'e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6: Özdeğerleri asal sayılar olan [4.14]-[4.19] problemi için $q(x)\notin L_2[0,1]$.

İspat:

[4.14]-[4.19] probleminin özdeğerleri

$$\pi li(\lambda_n)=n\pi+\frac{h+H+\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt}{n\pi}+O(\frac{1}{n^2})$$

şeklindedir. [4.17] ve [4.18] ifadeleri dikkate alındığında Teorem 4.5'in ispatındaki yöntem ile

$$\lim_{n\to\infty}\left(li(\lambda_n)-n\right)\neq\lim_{n\to\infty}\left(li(p_n)-n\right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5. DİFÜZYON OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE ASAL SAYILAR

5.1 Özdeğerlerin Asimptotiği

$$-y''+q(x)y+2\lambda p(x)y=\lambda^2 y \qquad [5.1]$$

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \qquad [5.2]$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \qquad [5.3]$$

λ spektral parametresinin ikinci dereceden ifadesi ile oluşturulan [5.1] -[5.3] Sturm-Liouville problemleri ele alınsın. Bu operatörlere aynı zamanda difüzyon operatörleri de denir. Burada $\alpha \in [0,\pi), \beta \in (0,\pi]$ $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ ve $q(x) \in L_2[0,\pi]$.

$W_2^n[0,\pi]$ fonksiyon uzayı, $x \in [0,\pi]$ olmak üzere $f^{(m)}(x)(m=0,...,n-1)$ türevlerinin mutlak sürekli olması ve $f^{(n)}(x) \in L_2[0,\pi]$ olmasını gösterir. Özel olarak $W_2^0[0,\pi] = L_2[0,\pi]$ olur. [5.1] denklemine difüzyon denklemi denir. Kuantum alan teorisinin en önemli denklemlerinden biridir. [5.1] denkleminde $p(x) \equiv 0$ alınırsa klasik Sturm-Liouville denklemine dönüşür.

Lemma 5.1. [5.1] denkleminin $y(0,\lambda)=0,$ $y'(0,\lambda)=1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü,

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\sin(\lambda x-\alpha(x))+\int_0^x A(x,t)\cos(\lambda t)dt+\int_0^x B(x,t)\sin(\lambda t)dt\right] \qquad [5.4]$$

şeklindedir. Burada $\alpha(x)=\int_0^x p(t)dt,$ $A(x,t)$ ve $B(x,t)$ fonksiyonları ise ikinci mertebeden kısmi türevli sürekli fonksiyonlar olup,

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}-2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}-q(x)A(x,t)=\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}, \qquad [5.5]$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}+2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}-q(x)B(x,t)=\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2},$$

$$A(0,0)=p(0),\ \ B(x,0)=0,\ \ \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \ \text{ ve}$$

$$A(x,x)\sin\alpha(x)+B(x,x)\cos\alpha(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (q(x)+p^2(x))dx$$

eşitlilkeri sağlanır.

İspat:

[5.4] eşitliğinin sağ tarafındaki integral terimlerine kısmi integresayon uygulanırsa,

$$\lambda y(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha(x))+\frac{1}{\lambda}[A(x,x)\sin(\lambda x)-B(x,x)\cos(\lambda x)+B(x,0)]$$
$$-\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^x \frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\sin(\lambda t)dt+\int_0^x \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\cos(\lambda t)dt\right] \qquad [5.6]$$

elde edilir. Bir kez daha kısmi integrasyon ile,

$$\lambda y(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha(x))+\frac{1}{\lambda}[A(x,x)\sin(\lambda x)-B(x,x)\cos(\lambda x)+B(x,0)]$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\cos(\lambda x)+\left.\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\sin(\lambda x)-\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right] \qquad [5.7]$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^x \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}\cos(\lambda t)dt+\int_0^x \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}\sin(\lambda t)dt\right]$$

alınır. [5.7] denkleminin her iki tarafı λ ile çarpılırsa, $\lambda^2 y(x,\lambda)$;

[5.6] denkleminin her iki tarafı $-2p(x)$ ile çarpılırsa, $-2\lambda p(x)y(x,\lambda)$;

[5.4] denkleminin her iki tarafı $-\frac{q(x)}{\lambda}$ ile çarpılırsa, $q(x)y(x,\lambda)$;

elde edilir. Böylece

$$[\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x)]y(x,\lambda)=$$
$$[\lambda-2p(x)]\sin(\lambda x-\alpha(x))+A(x,x)\sin(\lambda x)-B(x,x)\cos(\lambda x)+B(x,0)$$
$$-\frac{1}{\lambda}\left[\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}+p(x)B(x,0)+\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\cos(\lambda x)+\left.\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\sin(\lambda x)\right]$$
$$-\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^x \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}\cos(\lambda t)dt+\int_0^x \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\sin(\lambda t)dt\right]$$
$$-\frac{1}{\lambda}[2p(x)A(x,x)\sin(\lambda x)+2p(x)B(x,x)\cos(\lambda x)]$$
$$+\frac{2p(x)}{\lambda}\left[\int_0^x \frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\sin(\lambda t)dt-\int_0^x \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\cos(\lambda t)dt\right]$$
$$-\frac{q(x)}{\lambda}\left[\sin(\lambda x-\alpha(x))+\int_0^x A(x,t)\cos(\lambda t)dt+\int_0^x B(x,t)\sin(\lambda t)dt\right] \qquad [5.8]$$

bulunur. Diğer taraftan, [5.4] ile verilen gösterilimin x'e göre türevi alınırsa,

$$\lambda y'(x,\lambda)=[\lambda-p(x)]\cos(\lambda x-\alpha(x))+A(x,x)\cos(\lambda x)-B(x,x)\sin(\lambda x)$$
$$+\int_0^x \frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\cos(\lambda t)dt+\int_0^x \frac{\partial B(x,t)}{\partial x}\sin(\lambda t)dt$$

ve ikinci mertebeden türevi,

$$\lambda y''(x,\lambda)=\lambda^2\sin(\lambda x-\alpha(x))+2\lambda p(x)\sin(\lambda-\alpha(x))-\lambda A(x,x)\sin(\lambda x)$$
$$+B(x,x)\cos(\lambda x)-p^2(x)\sin(\lambda x-\alpha(x))-p'(x)\cos(\lambda x-\alpha(x))$$
$$+\frac{d}{dx}A(x,x)\cos(\lambda x)+\frac{d}{dx}B(x,x)\sin(\lambda x)+\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\cos(\lambda x) \qquad [5.9]$$
$$+\left.\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\sin(\lambda x)+\int_0^x \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}\cos(\lambda t)dt+\int_0^x \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}\sin(\lambda t)dt$$

olur.

[5.8] ve [5.9] eşitliklerinden

$$y''(x,\lambda)+[\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x)]y(,\lambda)=\frac{C(x,\lambda)}{\lambda}+B(x,0)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x [\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}-2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}-q(x)A(x,t)]\cos(\lambda t)dt \qquad [5.10]$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x [\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}-2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}-q(x)B(x,t)]\sin(\lambda t)dt=0$$

bulunur. Burada,

$$C(x,\lambda)=$$
$$\left[-(p^2(x)+q(x))\cos\alpha(x)-p'(x)\sin\alpha(x)+2\frac{d}{dx}B(x,x)-2p(x)A(x,x)\right]\sin(\lambda x)$$
$$+\left[(p^2(x)+q(x))\sin\alpha(x)-p'(x)\cos\alpha(x)+2\frac{d}{dx}A(x,x)-2p(x)B(x,x)\right]\cos(\lambda x)$$
$$-\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

[5.10] eşitliğine Riemann-Lebesque Lemma'sı uygulanırsa,

$B(x,0)=0,\ C(x,\lambda)=0$ bulunur.

Böylece [5.10] ifadesinde, $\{\cos(\lambda t)\}$ ve $\{\sin(\lambda t)\}$ fonksiyonlarının tam oldukları dikkate alınırsa,

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - 2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} - q(x)A(x,t) = \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} + 2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} - q(x)B(x,t) = \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca $C(x,\lambda) = 0$ eşitliğinden

$\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ ve

$$\begin{aligned}&(p^2(x)+q(x))\cos\alpha(x) - p'(x)\sin\alpha(x) + 2\frac{d}{dx}B(x,x) + 2p(x)A(x,x) = 0\\&(p^2(x)+q(x))\sin\alpha(x) - p'(x)\cos\alpha(x) + 2\frac{d}{dx}A(x,x) + 2p(x)B(x,x)] = 0\end{aligned} \qquad [5.11]$$

bulunur. [5.11]'deki denklemler ile

$$(p^2(x)+q(x)) = 2\frac{d}{dx}[A(x,x)\sin\alpha(x) + B(x,x)\cos\alpha(x)]$$

olur. Bu denklemden, $\alpha(0) = 0 = B(0,0)$ eşitlikleri dikkate alınarak,

$$\frac{1}{2}\int_0^x (p^2(x)+q(x))dx = A(x,x)\sin\alpha(x) + B(x,x)\cos\alpha(x)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Önceki Lemma'ya benzer şekilde aşağıdaki Lemma'nın da geçerli olduğu gösterilebilir.

Lemma 5.2. [5.1] denkleminin $y(0,\lambda) = 0,\ y'(0,\lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü,

$y(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x,t)\cos(\lambda t)dt + \int_0^x B(x,t)\sin(\lambda t)dt$ integral gösterimi ile ifade edilebilir. Burada $\alpha(x) = \int_0^x p(t)dt,\ \ A(x,t)$ ve $B(x,t)$

fonksiyonları ise ikinci mertebeden kısmi türevli sürekli fonksiyonlar olup,

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - 2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} - q(x)A(x,t) = \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} + 2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} - q(x)B(x,t) = \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2},$$

$$A(0,0) = h,\ \ B(x,0) = 0,\ \ \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \ \text{ ve}$$

$$A(x,x)\sin\alpha(x) + B(x,x)\cos\alpha(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (q(x) + p^2(x))dx$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 5.3. [5.1]-[5.2] probleminin özdeğerleri sayılabilir, ayrık ve basittir. Sonlu tanesi hariç özdeğerleri reeldir. Özdeğerlerin reel kısımları

$$\ldots \le \mathrm{Re}(\lambda_{-2}) \le \mathrm{Re}(\lambda_{-1}) \le \mathrm{Re}(\lambda_1) \le \mathrm{Re}(\lambda_2) \le \ldots, \qquad \alpha = \beta = 0$$

$$\ldots \le \mathrm{Re}(\lambda_{-2}) \le \mathrm{Re}(\lambda_{-1}) \le \mathrm{Re}(\lambda_0) \le \mathrm{Re}(\lambda_1) \le \ldots, \qquad \alpha, \beta \in (0,\pi)$$

azalmayan dizi şeklinde sıralanabilir.

Teorem 5.4: [66] [5.1]-[5.2] probleminin özdeğerleri, $|n| \to \infty$,

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_0, \alpha = \beta = 0 \qquad [5.12]$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + c_0 + \frac{c_1 + \frac{\cot\beta}{\pi}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \alpha = 0, \beta \neq 0$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + c_0 + \frac{c_1 + \frac{\cot\alpha}{\pi}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0, \beta = 0$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + c_0 + \frac{c_1 + \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\pi}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

asimptotik ifadelerini sağlar. Burada

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(q(x) + p^2(x)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[A(\pi,\pi)\sin\alpha(\pi) + B(\pi,\pi)\cos\alpha(\pi)\right]$$

şeklindedir ve özdeğerlerin sanal kısımları $|n| \to \infty$ için sınırlıdır.

İspat:

$\alpha = \beta = 0$ (Dirichlet sınır şartı) olsun. Diğer sınır şartları için de benzer şekilde ispat yapılabilir. İlk önce, $c_0 = 0$ ise,

$\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun ifadesinden, $x = \pi$'deki değeri, [5.4] ifadesi kullanılarak

$$\omega(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi A(\pi,t)\cos(t\lambda)dt + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi B(\pi,t)\sin(t\lambda)dt$$

şeklinde bulunur.

$\omega(\lambda)$ foksiyonunun sıfırları ile problemin özdeğerleri çakışır.

[3.6] ifadesinden yararlanarak,

$$\omega(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda} + \frac{A(\pi,t)\sin(\pi\lambda) - B(\pi,\pi)\cos(\pi\lambda)}{\lambda^2} + O\left(\frac{e^{\pi\tau}}{\lambda^3}\right)$$

asimptotik ifadesi elde edilir. Burada $\tau = |\operatorname{Im}\lambda|$.

$$\omega_0(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda}$$

fonksiyonunun sıfırları $\lambda_n^{(0)} = n$ olur. Buradan da

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + o(1)$$

yazılabilir. Asimptotik ifadeden

$$|\omega(\lambda) - \omega_0(\lambda)| < \frac{c}{|\lambda|^2}$$

olur ve böylece $\omega_0(\lambda) > |\omega(\lambda) - \omega_0(\lambda)|$

yazılabileceğinden, Rouche Teoremi kullanılarak özdeğerlerin basitliği elde edilir.

$$\operatorname{Re}(\lambda) = n + \frac{1}{4}, \ n \in \mathbb{Z}, \ |\operatorname{Im}\lambda| \geq 1 \text{ için,}$$

$$e^{\pi\tau}|\sin \pi\lambda|^{-1} \leq 4.$$

$x \to 0$ için $x \sim \log(1+x)$ olduğundan,

$$\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)} = 1 + \frac{A(\pi,\pi) - B(\pi,\pi)\cot(\pi\lambda)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ifadesi

$$\log\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)} = \frac{A(\pi,\pi) - B(\pi,\pi)\cot(\pi\lambda)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Köşeleri $(n \pm \frac{1}{4}) \pm i$ olan dikdörtgen γ_n olmak üzere, Rouche Teoremi ile γ_n'lerin içinde $\omega(\lambda)$'nin tek bir sıfırı olacağından ve

$$\oint_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi\lambda)}{\lambda} d\lambda = \frac{2i}{n}, \quad \oint_{\gamma_n} O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) d\lambda = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ile

$$\lambda_n - n = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)} d\lambda = \frac{B(\pi,\pi)}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

buradan da

$$\lambda_n = n + \frac{B(\pi,\pi)}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. $\alpha(x) = \int_0^x p(t)dt$ olmak üzere, $c_0 = 0$ olduğundan $\alpha(\pi) = 0$ olur.

Böylece,

$$A(x,x)\sin\alpha(x) + B(x,x)\cos\alpha(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (p^2(x) + q(x))dx$$

Eşitliğinden,

$$B(\pi,\pi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (p^2(x) + q(x))dx.$$

$c_0 \neq 0$ ise;

$$-y''(x) + [q(x) + 2\lambda p(x)]y(x) = \lambda^2 y(x)$$

denklemine denk olan

$$-y''(x) + [q(x) + 2p(x)c_0 - c_0^2 + 2(\lambda - c_0)(p(x) - c_0)]y(x) = (\lambda - c_0)^2 y(x)$$

denklemi kullanılırsa,

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n - c_0$$

$$\tilde{q}(x) = q(x) + 2p(x)c_0 - c_0^2$$

$$\widetilde{p}(x) = p(x) - c_0$$

ve

$$\int_0^\pi \widetilde{p}(t)dt = 0$$

olur. Böylece

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\widetilde{p}^2(x) + q(x))dx$$

için

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.5: [67]

$$-y''(x) + [q(x) + 2\lambda p(x)]y(x) = \lambda^2 y(x)$$
$$y'(0) - hy(0) = 0$$
$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

problemini ele alalım. $q(x)$ ve $p(x)$ reel değerli fonksiyonlar, $q(x) \in L_2[0,\pi]$ ve $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ ve $h, H, \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$h|y(0)|^2 + H|y(\pi)|^2 + \int_0^\pi (|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2)dx > 0$$

ise problemin bütün özdeğerleri reeldir, basittir ve sıfırdan farklıdır.

Özdeğerler,

$$\ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_{-0} < \lambda_{+0} < \lambda_{+1} < \lambda_{+2} \ldots$$

şeklinde sıralanabilir. $n = -0$ ve $n = +0$ notasyonu ile belirtilen özdeğerler de 0'dan farklıdır. Pozitif ve negatif özdeğerlerin asimptotik ifadesi $|n| \to \infty$ için,

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{k_n}{n}.$$

Burada $c_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi p(x)dx$, $c_1 = \dfrac{1}{\pi}\left(h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \left(q(x) + p^2(x)\right)dx\right)$ ve $k_n \in l_2$

şeklindedir.

Bu teoremlere benzer şekilde, $p(x)\in W_1^1[0,1]$ ve $q(x)\in W_1^0[0,1]=L[0,1]$ olmak üzere, Dirichlet sınır şartlı probleminin özdeğerler asimptotiği için izleyen teorem verilebilir.

Teorem 5.6 [68]:

$p(x)\in W_1^1[0,1]$ ve $q(x)\in L[0,1]$ olmak üzere,

$$-y''(x)+[q(x)+2\lambda p(x)]y(x)=\lambda^2 y(x)$$

$$y(0)=y(1)=0$$

problemi için, özdeğerlerin asimptotik ifadesi, $|n|\to\infty$,

$$\lambda_n = n\pi + w_0 + \frac{w_1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad [5.13]$$

Burada $w_0=\int_0^1 p(x)dx$ ve $w_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(q(x)+p^2(x)\right)dx.$

5.2 Özdeğerler İle Asal Sayılar Arasındaki İlişki

$$-y''+q(x)y+2\pi N(\lambda)p(x)y=(\pi N(\lambda))^2 y \qquad [5.14]$$

$$y(0)=y(1)=0 \qquad [5.15]$$

$$N(\lambda)=\lambda,\ \ N(\lambda)=\frac{\lambda}{\ln\lambda},\ \text{veya}\ N(\lambda)=li(\lambda):=\int_0^\lambda \frac{dt}{\ln t} \qquad [5.16]$$

şeklinde Difüzyon operatörleri ele alınsın. Burada $p(x)\in W_1^1[0,1]$ ve $q(x)\in W_1^0[0,1]=L[0,1]$. $li(x)$ logaritmik integral fonksiyonu [1,p.228]'de gösterildiği gibi tanımlanmıştır. λ spektral parametredir. Bu problem $p(x)\equiv 0$ için Dirichlet sınır şartı içeren klasik Sturm-Liouville problemine dönüşür.

4. bölümde ispatlanan teoremlere benzer şekilde aşağıdaki teoremler de verilebilir. $N(\lambda)=\lambda$ için, [5.14]-[5.15] probleminin özdeğerlerinin asimptotik ifadeleri ile asal sayı teoremi, ispatların temelini oluşturmaktadır.

Teorem 5.7: $N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için $q(x)\notin L[0,1]$.

İspat:

$N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olsun.

Pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için, $q(x)\in L[0,1]$ fonksiyonunun var olduğu kabul edilsin. Teorem 4.1'in ispatındaki [4.6] ve Teorem 5.6'daki [5.13] ifadeleri kullanılarak, $n\to\infty$ iken,

$$p_n \sim n\ln n, \tag{5.17}$$

$$p_n = n+\frac{w_0}{\pi}+\frac{w_1}{n\pi^2}+o(\frac{1}{n}) \tag{5.18}$$

ifadeleri bulunur.

Burada $w_0=\int_0^1 p(x)dx$ ve $w_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(q(x)+p^2(x)\right)dx.$

[5.17] ve [5.18] asimptotik ifadelerinin çeliştiği görülebilir.

Gerçekten de, [5.14] ve [5.15] ile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{n+\frac{w_0}{\pi}+\frac{w_1}{n\pi^2}+o(\frac{1}{n})}=\infty$$

ifadesinden $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\lambda_n}\neq 1$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.8: $N(\lambda)=\frac{\lambda}{\ln\lambda}$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için $q(x)\notin L[0,1]$.

İspat: $N(\lambda)=\frac{\lambda}{\ln\lambda}$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olsun.

Pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için, $q(x)\in L[0,1]$ var olduğu kabul edilsin.

[5.13] ile,

$$\pi\frac{p_n}{\ln p_n}=n\pi+w_0+\frac{w_1}{n\pi}+o(\frac{1}{n})$$

bulunur. Burada $w_0=\int_0^1 p(x)dx$ ve $w_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(q(x)+p^2(x)\right)dx.$

Böylece

$$\lim_{n\to\infty}(\pi\frac{p_n}{\ln p_n}-n\pi)=\int_0^1 p(x)dx \tag{5.19}$$

bulunur. Teorem 4.3'ün ispatındaki,

$x \geq 32299$ için;

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{1.8}{\ln^3 x}$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{p_n}{\ln p_n} - n = \pi(p_n) \to -\infty \qquad [5.20]$$

bulunur. [5.19] ile [5.20] çeliştiğinden ispat biter.

Teorem 5.9: $N(\lambda) = li(\lambda)$ ve $p(x) \in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için $q(x) \notin L[0,1]$.

İspat: Teorem 4.5'in ispatında gösterildiği gibi

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\pi(p_n) - li(p_n)) = +\infty$$

[5.21]

ve

$$\lim_{n\to\infty} \inf(\pi(p_n) - li(p_n)) = -\infty \qquad [5.22]$$

bulunur.

$N(\lambda) = li(\lambda)$ ve $p(x) \in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan [5.14]-[5.15] problemi için, $q(x) \in L[0,1]$ var olduğu kabul edilsin.

[5.13] ile,

$$\pi li(p_n) = n\pi + w_0 + \frac{w_1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$$

bulunur. Burada $w_0 = \int_0^1 p(x)dx$ ve $w_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(q(x) + p^2(x)\right)dx$. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} (\pi li(p_n) - n\pi) = \int_0^1 p(x)dx \qquad [5.23]$$

elde edilir. [5.23] ifadesi [5.21] ve [5.22] ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

$H, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere, [5.15] Dirichlet sınır koşulları yerine

$$y'(0) - hy(0) = y'(1) + Hy(1) = 0$$

genel sınır şartları alınırsa aynı yöntem kullanılarak bu teoremlere benzer sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 5.10: [29] çalışmasında, Teorem 5.7'nin özel bir durumu ($p(x) \equiv 0$ olduğunda $q(x) \in L[0,1]$ için) gösterilmiştir. Teorem 5.8 ve Teorem 5.9' un özel durumları ($p(x) \equiv 0$ olduğunda $q(x) \in L_2[0,1]$ için) 4. bölümde ispatlanmıştır. Sonuç olarak bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar, bu bölümde hem $L_2[0,1]$ uzayından $L[0,1]$ uzayına genelleştirilmiş hem de daha genel bir operatör kullanılmıştır. Ayrıca [29]'daki sonuç da genelleştirilmiştir.

6. COULOMB POTANSİYELİNE SAHİP PROBLEMİN ÖZDEĞERLERİ VE ASAL SAYILAR

6.1 Özdeğerlerin Asimptotiği

$l(y) := -y'' + q(x)y$

diferansiyel ifadesi, (a,b) aralığı sonlu ve $q(x) \in L[a,b]$ olduğunda regülerdir. (a,b) aralığı sonsuz ya da $q(x)$ fonksiyonu aralığın uç noktaları olan a veya b'de veya aralığın bir iç noktasında integrallenemeyen singüleriteye sahip ise $l(y)$ ifadesi singülerdir.

[69]'da, $u(x) \in L_2[a,b]$ olacak şekilde, genelleştirilmiş türev kullanılarak $q(x) = u'(x)$ potansiyeline sahip singüler Sturm-Liouville operatörü tanımlanmıştır. Aynı çalışmada, bu şekilde üretilen diferansiyel operatörlerin self- adjoint genişlemeleri çalışılmıştır. $\alpha \neq 2,4,6,\ldots$ olduğunda, [70]'deki yöntem kullanılarak, genelleştirilmiş fonksiyonlar $|x|^{-\alpha} \operatorname{sgn} x$ fonksiyonlarına karşılık getirilmiştir. $\alpha < \frac{3}{2}$ olduğunda, bu yolla elde edilen fonksiyonlar, $u(x) \in L_2[a,b]$ fonksiyonlarının genelleştirilmiş türevleri şeklinde gösterilebilir. Böylece, $q(x) = |x|^{-\alpha} \operatorname{sgn} x$ olacak şekilde Sturm-Liouville operatörü tanımlanabilir. $q(x) = Ax^{-\alpha}$, $A \in \mathbb{R}$ ve $\alpha < \frac{3}{2}$ için, [71] çalışmasında Sturm-Liouville denklemi için sınır değer probleminde bir regülarizasyon verilmiştir. $q(x) = Ax^{-\alpha}$ ve $\alpha \in [1,2)$ için, $l(y)$ diferansiyel ifadesi tarafından üretilen operatörlerin bütün self-adjoint genişlemeleri [72] çalışmasında verilmiştir. [69] ve [72]'deki regülarizasyon yöntemleri $\alpha < \frac{3}{2}$ için çakışmaktadır.

$$l(y) := -y'' + \frac{A}{x^{\alpha}} q(x)y, \qquad 0 < x < \pi$$

diferansiyel ifadesi alınsın.

$D_0' = C_0^{\infty}(0,\pi)$ kümesinde tanımlı, $L_0' : L_0' y = l(y)$ operatörü $L_2[0,\pi]$'de simetriktir.

Burada,

$C_0^{\infty}(0,\pi)=\{y(x)|\ y(x)$ her mertebeden sürekli türeve sahip ve

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=y'(0)=y''(0)=\ldots=0, \\ y(\pi)=y'(\pi)=y''(\pi)=\ldots=0 \end{array}\right\}$$

ve $\overline{C_0^{\infty}}[0,\pi]=L_2[0,\pi]$.

L_0 operatörünün kapanışı olan $L_0^{'}$ operatörü, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ürettiği minimal operatördür. L_0 operatörünün adjointi olan $\overset{*}{L}_0$ operatörü ise $l(y)$ için maksimal operatördür.

$u(x)=A\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ ve $(\Gamma_{\alpha}y)(x)=y'-u(x)y$ olsun.

[72]'de, $y\in D(\overset{*}{L}_0)$ için,

$$\lim_{x\to 0^+}(\Gamma y)(x)=(\Gamma y)(0)$$

olduğu gösterilmiştir. Böylece, L_0 minimal operatörünün $D(L_0)$ tanım kümesi sadece $y\in D(\overset{*}{L}_0)$ fonksiyonlarından oluşur. Bu durumda $y(x)$ fonksiyonları

$$y(0)=y(\pi)=(\Gamma y)(0)=y'(\pi)=0$$

koşullarını sağlar.

$\alpha=1,\ u(x)=A\ln x$ ve $(\Gamma y)(x)=y'-Ay\ln x$ için;

$$l(y):=-y''+(u'(x)+q(x)y=\lambda^2 y \qquad [6.1]$$

diferansiyel denklemi ve

$$U(y):=(\Gamma y)(0)-hy(0)=0,\ \ V(y):=(\Gamma y)(\pi)+Hy(\pi)=0 \qquad [6.2]$$

sınır koşullarının ürettiği L problemi ele alınsın. Burada λ spektral parametre, $h,H\in\mathbb{R}$ ve $q(x)\in L_2[0,\pi]$.

$(\Gamma y)(x)=y'-u(x)y$ alınırsa,

$$\begin{aligned} l(y) &:= -y''+u'(x)y+q(x)y=-(y'-u(x)y)'-u(x)y'+q(x)y \\ &= -((\Gamma y)(x))'-u(x)(\Gamma y)(x)-u^2(x)y+q(x)y \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $\lim\limits_{x\to 0}(\Gamma y)(x)$ değeri vardır.

$y_1(x)=y(x)$ ve $y_2(x)=(\Gamma y)(x)=y'(x)-u(x)y(x)$ olmak üzere;

$$\begin{cases} y_1' - u(x)y_1 = y_2 \\ y_2' + u(x)y_2 + u^2(x)y_1 - q(x)y_1 = -\lambda^2 y_1 \end{cases}$$

sistemi ile $l(y) := -y'' + (u'(x) + q(x)y = \lambda^2 y$ ifadesinin mertebesi düşürülebilir. Bu sistemin matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda^2 - u^2 + q & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad [6.3]$$

şeklindedir. $\forall \xi \in [0,\pi]$ ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in C^2$ olmak üzere, [37]'den,

$y_1(\xi) = \alpha_1$ ve $y_2(\xi) = \alpha_2$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır. Özel olarak bu koşullar

$y_1(0) = 1$ ve $y_2(0) = h$

şeklinde alınabilir.

[6.3] sisteminin, $y_1(\xi) = \alpha_1$, $(\Gamma y)(\xi) = \alpha_2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerin birinci bileşeni, [6.1] denkleminin aynı başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür.

Lemma 6.1: $f, g \in D(\overset{*}{L}_0)$ olmak üzere,

$$\left(\overset{*}{L}_0 f, g\right) = \int_0^\pi l(f)\overline{g}dx = \left(f, \overset{*}{L}_0 g\right) + [f,g]_0^\pi$$

formülü sağlanır. Burada $[f,g]_0^\pi = -(\Gamma f)(x)\overline{g}\Big|_0^\pi + -(\Gamma \overline{g})(x) f\Big|_0^\pi$.

İspat:

$$\left(\overset{*}{L}_0 f, g\right) = -\int_0^\pi (-f' - uf)'\overline{g}dx - \int_0^\pi u(f' - uf)\overline{g}dx - \int_0^\pi (u^2 - g) f\overline{g}dx$$

$$= \int_0^\pi (f' - uf)(\overline{g}' - u\overline{g})dx - \int_0^\pi (u^2 - g) f\overline{g}dx - (\Gamma f)(x)\overline{g}\Big|_0^\pi$$

$$= \int_0^\pi f l(\overline{g})dx + [f,g]_0^\pi = \left(f, \overset{*}{L}_0 g\right) + [f,g]_0^\pi.$$

Lemma 6.2: [6.1]-[6.2] probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $L_2[a,b]$ uzayında ortogonaldir ve özdeğerler reeldir.

İspat: $\lambda_n \neq \lambda_k$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla, $y_n(x)$ ve $y_k(x)$ olsun. [6.2] sınır koşulları kullanılarak, Lemma 6.1 ile,

$$\int_0^{\pi} l(y_n) y_k dx = \int_0^{\pi} y_n l(y_k) dx$$ ve buradan da

$$\lambda_n \int_0^{\pi} y_n y_k dx = \overline{\lambda_k} \int_0^{\pi} y_n y_k dx$$

elde edilir. $\lambda_n \neq \lambda_k$ olduğundan $\int_0^{\pi} y_n y_k dx = 0$ bulunur.

$\lambda_n = u + iv$ özdeğeri için, $h, H, q(x)$ reel olduğundan, $\overline{\lambda_n} = u - iv$ de bir özdeğer olur. $\lambda_n \neq \overline{\lambda_n}$ ise $\int_0^{\pi} y_n \overline{y_n} dx = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ bulunur.

Lemma 6.3: [6.3] sisteminin $\varphi_1(0,\lambda) = 1$ ve $\varphi_2(0,\lambda) = h$ koşullarını sağlayan çözümü; $\operatorname{Im}\lambda = \tau$ olmak üzere, $|\lambda| \to \infty$ için,

$$\varphi_1(x,\lambda^2) = \cos\lambda x + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|\lambda|}\right) = O(e^{|\tau|x}),$$

$$\varphi_2(x,\lambda^2) = -\lambda \sin\lambda x + O(e^{|\tau|x}) = O(|\lambda| e^{|\tau|x})$$

asimptotik ifadelerini sağlar.

İspat: [6.3] sisteminin $\varphi_1(0,\lambda) = 1$ ve $\varphi_2(0,\lambda) = h$ koşullarını sağlayan $y(x,\lambda^2) = \left(\varphi_1(x,\lambda^2), \varphi_2(x,\lambda^2)\right)^T$ çözümü için,

$$\varphi_1(x,\lambda^2) = \cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x$$
$$+\int_0^x \left[u(t)\varphi_1(t,\lambda^2)\cos\lambda(x-t) + \left(\left(q(t)-u^2(t)\right)\varphi_1(t,\lambda^2) - u(t)\varphi_2(t,\lambda^2)\right)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} \right] dt$$

$$\varphi_2(x,\lambda^2) = -\lambda\sin\lambda x + h\cos\lambda x$$
$$+\int_0^x \left[-\lambda u(t)\varphi_1(t,\lambda^2)\sin\lambda(x-t) + \left(\left(q(t)-u^2(t)\right)\varphi_1(t,\lambda^2) - u(t)\varphi_2(t,\lambda^2)\right)\cos\lambda(x-t) \right] dt$$

denklemleri geçerlidir.

$\varphi_1^*(x,\lambda^2) = |\varphi_1(x,\lambda^2)| e^{-|\tau|x}$ ve $\varphi_2^*(x,\lambda^2) = |\varphi_2(x,\lambda^2)| e^{-|\tau|x}$ olsun. $|\sin\lambda x| \leq e^{|\tau|x}$, $|\cos\lambda x| \leq e^{|\tau|x}$ ve $u(x), u^2(x), q(x) \in L[0,\pi]$ olduğundan,

$$\varphi_1^*(x,\lambda^2) \leq K\left(1 + \frac{|h|}{|\lambda|}\right) exp\left(\frac{1}{|\lambda|}\int_0^x \left(|q(t)| + |u(t)|^2\right) dt\right),$$

$$\frac{\varphi_2^*(x,\lambda^2)}{|\lambda|} \le K\left(1+\frac{|h|}{|\lambda|}\right)exp\left(\frac{1}{|\lambda|}\int_0^x\left(|q(t)|+|u(t)|^2\right)dt\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $K = exp\left(\int_0^x |u(t)|\,dt\right)$. Bu eşitsizliklerden $\varphi_1^*(x,\lambda^2)$ ve $\dfrac{\varphi_2^*(x,\lambda^2)}{|\lambda|}$ fonksiyonlarının sınırlı olduğu görülür. Böylece $\varphi_1^*(x,\lambda^2)=O(1)$ ve $\dfrac{\varphi_2^*(x,\lambda^2)}{|\lambda|}=O(1)$ olduğundan,

$\varphi_1(x,\lambda^2)=O(e^{|\tau|x})$ ve $\varphi_2(x,\lambda^2)=O(|\lambda|e^{|\tau|x})$ bulunur.

Teorem 6.4:[73] [6.1]-[6.2] probleminin $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ özdeğer dizisi için,

$$\lambda_n = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}$$

asimptotik ifadesi geçerlidir. Burada $\{k_n\}\in l_2$ ve

$$w = H + h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + A\left(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\ln\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}dt\right).$$

İspat: Lemma 6.3'de elde edilen $\operatorname{Im}\lambda = \tau$ olmak üzere, $|\lambda|\to\infty$ için,

$\varphi_1(x,\lambda^2)=O(e^{|\tau|x})$ ve $\varphi_2(x,\lambda^2)=O(|\lambda|e^{|\tau|x})$ asimptotik ifadeleri,

$$\varphi_1(x,\lambda^2) = \cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x$$
$$+\int_0^x\left[u(t)\varphi_1(t,\lambda^2)\cos\lambda(x-t) + \left(\left(q(t)-u^2(t)\right)\varphi_1(t,\lambda^2) - u(t)\varphi_2(t,\lambda^2)\right)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\right]dt$$

ve

$$\varphi_2(x,\lambda^2) = -\lambda\sin\lambda x + h\cos\lambda x$$
$$+\int_0^x\left[-\lambda u(t)\varphi_1(t,\lambda^2)\sin\lambda(x-t) + \left(\left(q(t)-u^2(t)\right)\varphi_1(t,\lambda^2) - u(t)\varphi_2(t,\lambda^2)\right)\cos\lambda(x-t)\right]dt$$

denklemlerinin sağ taraflarında yerlerine yazıldığında,

$$\varphi_1(x,\lambda^2)=\cos\lambda x+\int_0^x u(t)\cos\lambda(x-t)dt-h\int_0^x u(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}dt$$

$$-\int_0^x u^2(t)\frac{\sin\lambda(x-2t)}{2\lambda}dt+(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)dt)\frac{\sin\lambda x}{\lambda} \qquad [6.4]$$

$$+\int_0^x q(t)\frac{\sin\lambda(x-2t)}{2\lambda}dt+O(\frac{e^{|\tau|x}}{|\lambda|})$$

$$(\Gamma\varphi_1)(x,\lambda^2)=-\lambda\sin\lambda x-\lambda\int_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)-h\int_0^x u(t)\cos\lambda(x-2t)dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\cos\lambda(x-2t)dt+\left(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)dt\right)\cos\lambda x \qquad [6.5]$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos\lambda(x-2t)dt+O(e^{|\tau|x})$$

bulunur.

[6.4] ve [6.5] ifadeleri,

$\Delta(\lambda^2)=\left(\Gamma\varphi\right)(\pi,\lambda^2)+H\varphi(\pi,\lambda^2)$ karakteristik denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\Delta(\lambda^2)=-\lambda\sin\lambda x-\lambda\int_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)+w\cos\lambda\pi+k(\lambda) \qquad [6.6]$$

olur. Burada $w=H+h+\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(q(t)-u^2(t)\right)dt$ ve

$$k(\lambda)=\left(h-H\right)\int_0^\pi u(t)\cos\lambda(\pi-2t)dt-\frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(t)\cos\lambda(x-2t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos\lambda(\pi-2t)dt+O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{|\lambda|}\right).$$

$G_\delta:=\left\{\lambda:\left|\lambda-n\right|\geq\delta,\delta>0,n=\mp1,\pm2,\ldots\right\}$ olsun. [74]'de, yeterince büyük $\overset{*}{\lambda}$ değerleri için, $\lambda\geq\overset{*}{\lambda}$ ve $\lambda\in G_\delta$ olmak üzere,

$$\left|\Delta(\lambda^2)\right|\geq C_\delta\left|\lambda\right|e^{|\tau|\pi}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. $\Gamma_n=\left\{\lambda^2:\left|\lambda^2\right|=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ için, Rouche teoremi kullanılırsa, $\Delta(\lambda^2)$ fonksiyonunun $\gamma_n(\delta)=\left\{\lambda:\left|\lambda-n\right|\leq\delta\right\}$ çemberi içinde tek bir sıfırı olduğundan, Γ_n bölgesinde $(n+1)$ tane sıfırı vardır. Böylece $\varepsilon_n = o(1)$ olmak üzere,

$$\lambda_n = n + \varepsilon_n \qquad [6.7]$$

bulunur. [6.7] ifadesi [6.6]'de yerine yazılırsa,

$$\Delta(\lambda_n^2) = -(n+\varepsilon_n)\sin(n+\varepsilon_n) - (n+\varepsilon_n)\int_0^x u(t)\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]dt$$
$$+w\cos(n+\varepsilon_n) + k_n$$

[6.8]

elde edilir.

$u(x) = A\ln x$ için, $\int_0^x u(t)\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]dt$ integrali yakınsaktır. Gerçekten de, $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\int_0^x u(t)\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]dt = \int_0^\varepsilon A\ln t\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]dt$$
$$+\int_\varepsilon^\pi A\ln t\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]dt$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integral, $f(t) = A\ln t\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]$ fonksiyonu $[\varepsilon,\pi]$ aralığında sürekli olduğundan Riemann integrallenebilirdir, eşitliğin sağ tarafındaki birinci integral, $\int_0^\varepsilon \ln t dt$ integrali yakınsak olduğundan,

$$|A|\int_0^\varepsilon |\ln t|\left|\sin\left[(n+\varepsilon_n)(\pi-2t)\right]\right|dt \le -|A|\int_0^\varepsilon \ln t dt$$

eşitsizliği ile mutlak yakınsak olur. Bu integraller aynı zamanda düzgün yakınsaktır.

Böylece $\varepsilon_n = \frac{A}{\pi}\int_0^\pi \ln t\sin 2nt dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$ yazılabilir.

[6.8] tekrar kullanılırsa,

$$\varepsilon_n = \frac{A}{\pi}\int_0^\pi \ln t\sin 2nt dt + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n} \text{ ile}$$

$$\lambda_n = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}$$

bulunur. Burada $\{k_n\} \in l_2$. Gerçekten de,

$$k(\lambda_n) = (H-h)\int_0^{\pi} u(t)\cos\left[\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)\right]dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos\left[\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)\right]dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)\cos\left[\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)\right]dt + O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{n+\varepsilon_n}\right)$$

denklemindeki $u(t),\ u^2(t),\ q(t) \in L_2[0,\pi]$ ve $\left(\cos \pi k\right)_{k=0}^{\infty}$ dizisi $L_2[0,1]$'de tam olduğundan, $k_n = k(\lambda_n)$ ifadesindeki her terim l_2 uzayının bir elemanıdır.

Böylece ispat biter.

Teorem 6.4'e benzer şekilde, diğer sınır koşulları ile üretilen operatörler için özdeğerlerin asimptotik ifadeleri aşağıdaki teoremle verilebilir.

$$-y''+\left(\frac{A}{x}+q(x)\right)y = \lambda^2 y \qquad [6.9]$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \qquad [6.10]$$

$$U(y) = y(\pi) = 0 \qquad [6.11]$$

$$y(0) = V(y) = 0 \qquad [6.12]$$

olsun. Burada λ spektral parametre, $A \in \mathbb{R},\ q(x) \in L_2[0,\pi]$.

Teorem 6.5 [73]: [6.9] diferansiyel denklemi ve sırasıyla [6.10], [6.11] ve [6.12] sınır koşulları ile oluşturulan problemlerin özdeğerlerinin asimptotik ifadeleri sırasıyla,

$$\lambda_n = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w_1}{\pi n} + \frac{a_n}{n}, \qquad [6.13]$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln\left(n+1/2\right)}{n+1/2} + \frac{w_2}{\pi n} + \frac{b_n}{n},$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln\left(n+1/2\right)}{n+1/2} + \frac{w_3}{\pi n} + \frac{c_n}{n}.$$

Burada $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\} \in l_2$ ve

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + A\left(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\ln\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}dt\right),$$

$$w_2 = h + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + \frac{A}{2}\left(\ln\pi - \ln 4 + \frac{\sin 2}{2} - 2\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}dt\right),$$

$$w_3 = H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + \frac{A}{2}\left(\ln\pi - \ln 4 + \frac{\sin 2}{2} - 2\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}dt\right).$$

6.2 Özdeğerler İle Asal Sayılar Arasındaki İlişki

[75-86] çalışmalarında, $\pi(x)$, $\frac{1}{\pi(x)}$ ve $\frac{1}{li(x)}$ fonksiyonlarının $x \to \infty$ iken davranışları incelenmiştir. Bu fonksiyonlar için asimptotik ifadeler geliştirilmiştir. $\sum_{n=2}^{[\![x]\!]} \frac{1}{\pi(n)}$ ve $\sum_{n=2}^{[\![x]\!]} \frac{1}{li(n)}$ için formüller bulunmuştur. Örneğin [75]'de gösterilen

$$\sum_{n=2}^{[\![x]\!]} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2}\ln^2 x + O(\ln x)$$

ifadesi, [76]'da

$$\sum_{n=2}^{[\![x]\!]} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x - \ln\ln x + O(1)$$

ile geliştirilmiştir.

Bu çalışmalarda kullanılan temel asimptotik ifade [27,s.84],[77], $x \to \infty$ iken,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - \alpha(x)}$$

şeklindedir. Burada $\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = 1$. [76] çalışmasında $\alpha(x)$ fonksiyonu farklı bir ifade ile ele alınmıştır. Bu çalışmada bulunan asimptotik ifade, $x \to \infty$ iken,

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1 - \frac{k_1}{\ln x} - \frac{k_2}{\ln^2 x} - \ldots - \frac{k_n(1+\alpha_n(x))}{\ln^n x}}. \qquad [6.14]$$

Burada $\lim_{x\to\infty}\alpha_n(x) = 0$ ve $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sayıları, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için,

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \ldots + (n-1)!k_1 = (n)n!$$

denklemini sağlar. Örneğin ilk beş sayı;

$$k_1 = 1, k_2 = 3, k_{13} = 1, k_4 = 71, k_5 = 461$$

şeklindedir. [6.14] ifadesinin bir sonucu olarak, [76],

$n \geq 2$ ve $\lim_{n\to\infty}\alpha(n) = 3$ için,

$$\frac{1}{\pi(n)}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-\frac{\alpha(n)}{n\ln^2 n} \qquad [6.15]$$

ifadesi yazılabilir.

Benzer yöntemler ile, $\frac{1}{li(x)}$ için asimptotik ifadeler geliştirilmiştir. [26, 27]'de verilen

$$li(x)=\sum_{k=1}^{r+1}\frac{(k-1)!x}{\ln^k x}+O\left(\frac{(r+1)!x}{\ln^{r+2} x}\right)$$

ifadesi kullanılarak, [78]'de

$$\frac{1}{li(x)}=\frac{1}{x}\left(\ln x-1-\frac{k_1}{\ln x}-\frac{k_2}{\ln^2 x}-\ldots-\frac{k_n(1+\beta_n(x))}{\ln^n x}\right) \qquad [6.16]$$

bulunmuştur. Burada $\beta_n(x)=O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ ve [6.14]'deki gibi ve $k_1,k_2,\ldots,k_n$ sayıları, $n=1,2,3,\ldots$ için, $k_n+1!k_{n-1}+2!k_{n-2}+\ldots+(n-1)!k_1=(n)n!$ denklemini sağlar.

[6.16] ifadesinin bir sonucu olarak, [78],

$n\geq 2$ ve $\lim_{n\to\infty}\beta(n)=3$ için,

$$\frac{1}{li(n)}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-\frac{\beta(n)}{n\ln^2 n} \qquad [6.17]$$

ifadesi yazılabilir.

[6.15] ile, Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri arasında bir ilişki kurulabilir. Dirichlet sınır şartlı problem için aşağıdaki teorem verilebilir.

$$-y''+\left(\frac{A}{x}+q_1(x)\right)y=\lambda^2 y \qquad [6.18]$$

$$y(0)=y(\pi)=0 \qquad [6.19]$$

problemini ele alınsın. Burada λ bir spektral parametre ve $q_1(x)\in L_2[0,1]$.

Teorem 6.6: [6.18]-[6.19] probleminin özdeğerleri için,

$$\lambda_n=n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik ifadesi geçerlidir.

İspat: Teorem 6.5'de verilen [6.13] ile,

[6.18]-[6.19] probleminin özdeğerlerinin asimptotik ifadesi

$$\lambda_n = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w_1}{\pi n} + \frac{a_n}{n},$$

şeklindedir. Burada w_1 bir reel sayı ve $a_n \in l_2$.

Diğer taraftan, [6.15] ile,

$n \geq 2$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) = 3$ için,

$$\frac{1}{\pi(n)} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} - \frac{\alpha(n)}{n\ln^2 n}$$

ifadesi geçerlidir.

$\frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)} = \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{\alpha(n)}{\ln^2 n}\right]$ olduğundan,

$$\lambda_n - \left(n - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{w_1}{\pi} + a_n - \frac{A}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{\alpha(n)}{\ln^2 n}\right)\right]$$

bulunur. $\exists M_1 > 0$ için $|\alpha(n)| \leq M_1$. $\exists M > 0$ için $|a(n)| \leq M$ ve $A, w_1 \in \mathbb{R}$.

$\left[\frac{w_1}{\pi} + a_n - \frac{A}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{\alpha(n)}{\ln^2 n}\right)\right] = O(1)$ olduğundan,

$$\lambda_n - \left(n - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Gerçektende,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)}} = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left[\lambda_n - \left(n - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)}\right)\right] = 0$$

olur ve böylece ispat biter.

Teorem 6.6'a benzer şekilde, diğer sınır koşullarına sahip problemlerin asimptotik ifadeleri aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 6.7: [6.9] diferansiyel denklemi ve sırasıyla [6.11] ve [6.12] sınır koşulları ile oluşturulan problemlerin özdeğerlerinin asimptotik ifadeleri sırasıyla;

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\pi(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

şeklindedir.

Aynı yöntem kullanılarak [6.17] ile, Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri arasında bir ilişki kurulabilir. Dirichlet sınır şartlı problem için aşağıdaki teorem verilebilir:

$$-y''+\left(\frac{A}{x}+q_2(x)\right)y=\mu^2 y \qquad [6.20]$$

$$y(0)=y(\pi)=0 \qquad [6.21]$$

problemi ele alınsın. Burada μ bir spektral parametre ve $q_2(x)\in L_2[0,1]$.

Teorem 6.8: [6.20]-[6.21] probleminin özdeğerleri için,

$$\mu_n=n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik ifadesi geçerlidir.

İspat: Teorem 6.5'de verilen [6.13] ile,

[6.20]-[6.21] probleminin özdeğerlerinin asimptotik ifadesi

$$\mu_n=n-\frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n}+\frac{w_1}{\pi n}+\frac{a_n}{n}$$

şeklindedir. Burada w_1 bir reel sayı ve $a_n\in l_2$.

Diğer taraftan, [6.17] ile,

$n\geq 2$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(n)=3$ için,

$$\frac{1}{li(n)}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-\frac{\beta(n)}{n\ln^2 n}$$

ifadesi geçerlidir.

$$\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)}=\frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n}-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{\ln n}+\frac{\beta(n)}{\ln^2 n}\right] \text{ olduğundan,}$$

$$\mu_n-(n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)})=\frac{1}{n}\left[\frac{w_1}{\pi}+a_n-\frac{A}{2\pi}\left(1+\frac{1}{\ln n}+\frac{\beta(n)}{\ln^2 n}\right)\right]$$

bulunur. $\exists M_2>0$ için $|\beta(n)|\leq M_2$. $\exists M>0$ için $|a(n)|\leq M$ ve $A,w_1\in\mathbb{R}$.

$$\left[\frac{w_1}{\pi}+a_n-\frac{A}{2\pi}\left(1+\frac{1}{\ln n}+\frac{\beta(n)}{\ln^2 n}\right)\right]=O(1) \text{ olduğundan,}$$

$$\mu_n-(n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)})=O(\frac{1}{n})$$

elde edilir. Gerçekten de,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)}}=1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left[\mu_n-(n-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)})\right]=0$$

olur. Böylece ispat biter

Teorem 6.8'e benzer şekilde, diğer sınır koşullarına sahip problemlerin asimptotik ifadeleri aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 6.9: [6.9] diferansiyel denklemi ve sırasıyla [6.11] ve [6.12] sınır koşulları ile oluşturulan problemlerin özdeğerlerinin asimptotik ifadeleri sırasıyla;

$$\lambda_n=n+\frac{1}{2}-\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\lambda_n=n+\frac{1}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{1}{li(n)}+O(\frac{1}{n})$$

şeklindedir.

Sonuç 6.10: Özdeğerleri, (veya özdeğerlerin sonsuz alt kümesi)

$$\pi(n)=\frac{A}{2\pi}\frac{1}{n-\lambda_n}$$

denklemini sağlayan, [6.18]-[6.19] problemi için uygun bir $q_1(x)\in L_2[0,1]$ fonksiyon bulunabilir.

Sonuç 6.11: $A=2\pi$ ve uygun bir $q_1(x)\in L_2[0,1]$ için, Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri kullanılarak,

$$\lambda_n\sim n-\frac{1}{\pi(n)}$$

ifadesi ile asal sayıların dağılımını gösteren $\pi(x)$ fonksiyonuna yeni bir yaklaşım elde edilir.

Sonuç 6.12: Uygun $q_1(x),\ q_2(x)\in L_2[0,\pi]$ bulunduğunda, Teorem 3.18'deki Riemann Hipotezinin denkliği olan

$\exists c>0$ için, $|\pi(x)-li(x)|\le c\sqrt{x}\ln x$

eşitsizliğinin doğruluğu veya yanlışlığı, Teorem 6.6 ve Teorem 6.8'deki $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ ve $\{\mu_n\}_{n\ge1}$ özdeğerleri kullanılarak gösterilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Liouville, *J.*** (1836). Memoire sur le developpment des fonctions on. pant.es de fonctions en series dont les divers terms sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielles du second ordre contenant un parametre variable*,* J.de Mathematique, 1 253-265.

[2] **Levitan**, **B. M.** (1987). *Inverse Sturm-Liouville Problems,* VNU Science Press, Utrecht.

[3] **Riemann**, **B.** (1858/60). Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse, *Monatsberichte der Berliner Akad.* 671-680. Reprinted in *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1892, and later by Dover Publications. Englishtranslation by H. M. Edwards, pp. 299-305

[4] **Odlyzko, A. M.** (1990). Primes, quantum chaos and computers. In *Number Theory, Proceedings of a Symposium* (pp. 35-46).

[5] **Odlyzko, A. M.** (2001). The 10^22-th zero of the riemann zeta function. In M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, editors, Dynamical, Spectral, and Arithmetic Zeta Functions, number 290 in Contemporary Math. series, pages 139–144. Amer. Math. Soc.

[6] **Nash, C.** (1985). The spectrum of the Schrödinger operator and the distribution of primes. *Advances in Applied Mathematics*, *6*(4), 436-446.

[7] **Schumayer, D.,Van Zyl, B. P., Hutchinson, D. A.** (2008). Quantum mechanical potentials related to the prime numbers and Riemann zeros. *Physical Review E*, *78*(5), 056215.

[8] **Wolf, M.** (2014). Nearest-neighbor-spacing distribution of prime numbers and quantum chaos. *Physical Review E*, *89*(2), 022922.

[9] **Sanchis-Lozano, M. A., Barbero G, J. F., Navarro-Salas, J.** (2012). Prime numbers, quantum field theory and the Goldbach conjecture. *International Journal of Modern Physics A*, *27*(23), 1250136.

[10] **Choi, S., Chung, J. W., Kim, K. S.** (2012). Relation between primes and nontrivial zeros in the Riemann hypothesis; Legendre polynomials, modified zeta function and Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, *53*(12), 122108.

[11] **Rosu, H. C.** (2003). Quantum hamiltonians and prime numbers. *Modern Physics Letters A*, *18*(18), 1205-1213.

[12] **Aschheim, R., Perelman, C. C., Irwin, K.** (2017). The search for a Hamiltonian whose energy spectrum coincides with the Riemann zeta zeroes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *14*(06), 1750109.

[13] **Schumayer, D., Hutchinson, D. A.** (2011). Colloquium: Physics of the Riemann hypothesis. *Reviews of Modern Physics*, *83*(2), 307.

[14] **Bender, C. M., Brody, D. C., Müller, M. P.** (2017). Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function. *Physical Review Letters*, *118*(13), 130201.

[15] **Menezes, G., Svaiter, B. F., Svaiter, N. F.** (2013). Riemann zeta zeros and prime number spectra in quantum field theory. *International Journal of Modern Physics A*, *28*(26), 1350128.

[16] **Andrade, J. C.** (2013). Hilbert-Polya Conjecture, Zeta Functions and Quantum Field Theories. *International Journal of Modern Physics A*, *28*(17), 1350072.

[17] **Roesler, F.** (1986). Riemann's hypothesis as an eigenvalue problem. *Linear Algebra and its Applications*, *81*, 153-198.

[18] **Katz, N., Sarnak, P.** (1999). Zeroes of zeta functions and symmetry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *36*(1), 1-26.

[19] **Berry, M. V., Keating, J. P.** (1999). The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. *SIAM review*, *41*(2), 236-266.

[20] **Sierra, G.** (2014). The Riemann zeros as energy levels of a Dirac fermion in a potential built from the prime numbers in Rindler spacetime. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *47*(32), 325204.

[21] **Montgomery, H. L.** (1973). The pair correlation of zeros of the zeta function, *in* 'Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972)', Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 181–193.

[22] **Berry, M. V.** (1986). Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?, *in* T. Seligman & H. Nishioka, eds, 'Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics', Vol. 264 of *Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–17.

[23] **Hadamard, J.** (1896). Sur la distribution des zeros de la fonction z(*s*) et ses consequences arithmetiques, *Bull. Soc. Math. France 24*, 199-220. Reprinted in *Selecta*, Gauthier-Villars, Paris, 1935, pp. 111-132, and also in *Oeuvres*.

[24] **Vallee Poussin, C.-J. de la**. (1896). Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premierepartie: La fonction z(*s*) de Riemann et les nombres premiers en general, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20*, 183-256.

[25] **Abramowitz, M., Stegun, I. A.** (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Vol. 9). Dover, New York.

[26] **Ivic, A.** (1985). Riemann zeta-function. John Wiley *& Sons, Inc.,One Wiley Drive, Somerset, NJ 08873(USA), 340.*

[27] **Edwards, H. M.** (1974). Riemann's Zeta Function, D. New York, 2001. *First published*.

[28] **Zettl, A.** (2005). *Sturm-liouville theory* (No. 121). American Mathematical Soc.

[29] **Mingarelli, A. B.** (2011). A Note On Sturm-Liouville Problems Whose Spectrum Is The Set Of Prime Numbers. *Electronic Journal of Differential Equations*, (123), 1-4.

[30] **Atkinson, F. V., Mingarelli, A. B.** (1987). Asymptotics of the number of zeros and of the eigenvalues of general weighted Sturm-Liouville problems. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *375*, 380-393.

[31] **Cesàro, E.** (1894). Sur une formule empirique de M. Pervouchine. *CR Acad. Sci. Paris*, *119*, 848-849.

[32] **Pöschel, J. and Trubowitz, E.**(1987). Inverse Spectral Theory, Pure Appl. Math. Vol 130, Orlando, FL:Academic.

[33] **Krein, M. G**.(1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76, 21-24.

[34] **Chadan, K., Colton, D., Päivärinta, L., Rundell, W.** (1997). *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[35] **Weyl, H**. (1910). Über gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 68 220-269.

[36] **Titchmarsh, E. C.** (1962). Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations:Part I. Clarendon Press, Oxford.

[37] **Naimark, M. A.** (1968). Linear differential operators. Part I, II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Co.

[38] **Freiling, G. and Yurko, V. A**. (2001). Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

[39] **Ambartsumyan, V. A**. (1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

[40] **Borg, G**. (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

[41] **Marchenko, V. A.** (1977). Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev.

[42] **Marchenko, V.A**. (1950). Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, 457-560.

[43] **Tikhonov, A. N. (**1949). Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 797-800.

[45] **Levitan, B. M.** (1964). Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

[46] **Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S**. (1970). Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

[47] **Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S**. (1988). Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

[48] **Gasimov, M. G. and Levitan, B. M**. (1964). About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

[49] **Gelfand, I. M. and Levitan, B. M**. (1951). On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15, 309-60 (in Russian).

[50**] Levinson, N**. (1949). The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., 25-30.

[51] **Hochstadt, H., Lieberman, B.** (1978). An inverse Sturm–Liouville problem with mixed given data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *34*(4), 676-680.

[52] **Bateman, P. T., Diamond, H. G.** (2004). *Analytic Number Theory: An Introductory Course (Reprinted 2009)* (Vol. 1). World Scientific.

[53] **Levin, B. Ya**. (1971). Entire Functions, Moscow University, Moscow.

[54] **Newman, D. J.** (1980). Simple analytic proof of the prime number theorem. *The American Mathematical Monthly*, *87*(9), 693-696.

[55] **Zagier, D.** (1997). Newman's short proof of the prime number theorem. *The American mathematical monthly*, *104*(8), 705-708.

[56] **Von Koch, H.** (1901). Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica*, *24*(1), 159-182.

[57] **Atkinson, F. V. (**1964). Discrete and Continuous Boundary Value Problems. *Acad. Press., New York. MR*, *176141*.

[58] **Kong, Q., Wu, H., Zettl, A.** (2001). Sturm–Liouville problems with finite spectrum. *Journal of mathematical analysis and applications*, *263*(2), 748-762.

[59] **Volkmer, H., & Zettl, A.** (2007). Inverse spectral theory for Sturm-Liouville problems with finite spectrum. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *135*(4), 1129-1132.

[60] **Landau, E.** (1912). Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *21*, 208-228.

[61] **Pintz, J.** (2009). Landau's problems on primes. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, *21*(2), 357-404.

[62] **Dusart, P.** (1998). Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. *These, Université de Limoges*.

[63] **Kotnik, T.** (2008). The prime-counting function and its analytic approximations. *Advances in Computational Mathematics*, *29*(1), 55-70.

[64] **Littlewood, J. E.** (1914). Sur la distribution des nombres premiers. *CR Acad. Sci. Paris*, *158*, 1869-1872.

[65] **Ingham, A. E.** (1932). *The distribution of prime numbers* (No. 30). Cambridge University Press.

[66] **Yang, C. F., Zettl, A.** (2012). Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *16*(5), 1829-1846.

[67] **Gasymov, M. G., Guseinov, G. S.** (1981). Determination of a diffusion operator from spectral data. In *Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR* (Vol. 37, No. 2, pp. 19-23).

[68] **Buterin, S. A., Yurko, V. A.** (2012). Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions.

[69] **Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A.** (1999). Sturm-Liouville operators with singular potentials. *Mathematical Notes*, *66*(6), 741-753.

[70] **Gelfand, I. M., Shilov, G. E**. (1964). Generalized functions. Vol. 1. Properties and operations. Translated from the Russian by Eugene Saletan.

[71] **Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H.** (2012). *Solvable models in quantum mechanics*. Springer Science & Business Media.

[72] **Amirov, R. K., Guseinov, I. M. O.** (2002). Boundary Value Problems for a Class of Sturm–Liouville Operators with Nonintegrable Potential. *Differential Equations*, *38*(8), 1195-1197.

[73] **Amirov, R. K., Çakmak, Y., Gulyaz, S.** (2006). Boundary value problem for second-order differential equations with Coulomb singularity on a finite interval. Indıan Journal Of Pure And Applied Mathematics, *37*(3), 125.

[74] **Shkalikov, A. A.** (1983). Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Tr. Semim. im. IG Petrovskogo 9, 190–229 *English transl.: J. Sov. Math*, *33*, 1311-1342.

[75] **De Koninck, J. M., Ivic, A.** (1980). *Topics in arithmetical functions: asymptotic formulae for sums of reciprocals of arithmetical functions and related results* (Vol. 43). Elsevier.

[76] **Panaitopol, L.** (2000). A formula for pi(x) applied to a result of Koninck-Ivic. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, *1*, 55-56.

[77] **Rosser, J. B., Schoenfeld, L.** (1962). Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, *6*(1), 64-94.

[78] **Ivić, A.** (2002). On a sum involving the prime counting function π(x). *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika*, 85-88.

[79] **Hassani, M., Moshtagh, H.** (2008). A remark on a sum involving the prime counting function. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 51-55.

[80] **Berkane, D., & Dusart, P.** (2016). On a constant related to the prime counting function. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *13*(3), 929-938.

[81] **Dusart, P.** (2016). Explicit estimates of some functions over primes. *The Ramanujan Journal*, 1-25.

[82] **Hassani, M., Moshtagh, H.** (2007). A Remark on a Sum on Primes Counting Function. *Research report collection*, *10*(4).

[83] **Belbachir, H.** (2011). Asymptotic expansion for the sum of inverses of arithmetical functions involving iterated logarithms. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 80-86.

[84] **Panaitopol, L.** (2001). Asymptotic formulas involving π(x). *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 91-96.

[85] **Panaitopol, L.** (2000). Inequalities concerning the function π(x): Applications. *Acta Arithmetica*, *94*(4), 373-381.

[86] **Cobeli, C., Panaitopol, L., Vajaitu, M., Zaharescu, A.** (2004). Some Asymptotic Formulas Involving Primes in Arithmetic Progressions. *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi*, *53*(1), 23-35.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	İbrahim ADALAR
Doğum Yeri ve Tarihi	Tokat,07/03/1983
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi Zara Ahmet Çuhadaroğlu Meslek Yüksek Okulu, Zara/ Sivas
e-posta Adresi	iadalar@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lisans + Tezsiz Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği
Tezli Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı

İş Tecrübesi

Cumhuriyet Üniversitesi, Öğretim görevlisi, 2010-

Yayınlar

Ulusal

1- Adalar, İ. (2009). The Relation Between Generalized Euler Constants And Consecutive Primes. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 25 (1-2) 479 – 489.

2- Amirov, R., & Adalar, İ. (2017). Difüzyon Operatörlerinin Özdeğerleri ve Asal Sayılar. *Cumhuriyet Science Journal*, *38*(3), 488-491.

Uluslararası

3- Amirov, R., & Adalar, I. (2017). Eigenvalues of Sturm-Liouville operators and prime numbers. *Electronic Journal of Differential Equations*, *2017*(50), 1-3.