



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM
ELEMENLİ MATRİSLERDE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahar AKYÜZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa BAŞI

AKSARAY, 2017



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM
ELEMENLİ MATRİSLERDE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahar AKYÜZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa BAŞI

AKSARAY, 2017

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ


ONAY BELGESİ


Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342624 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Bahar AKYÜZ", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa BAHŞI
Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Halis BİLGİL
Aksaray Üniversitesi


.....

.....

.....

Teslim Tarihi: 01/11/2017

Savunma Tarihi: 24/11/2017

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullandığımda alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Bahar AKYÜZ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen danışman hocam Doç. Dr. Mustafa BAHŞI' ye, hayatın her aşamasında yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
DOĞRULUK BEYANI	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanıtımı	1
1.2 Literatür Özeti	2
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
3. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI	10
3.1 Fibonacci Sayılarının Maksimum ve Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları.....	10
3.2 Lucas Sayılarının Maksimum ve Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları.....	26
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

ÖZET

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Bu çalışmada, elemanları Fibonacci veya Lucas sayılarından oluşan maksimum veya minimum elemanlı matrislerin determinantlarını, terslerini, Hadamard terslerini ve normlarını inceledik. Sonuçları Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olarak elde ettik.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olarak verilen birinci bölümde; amaç belirlenmiştir ve problem tanıtılmıştır. Üzerinde çalışılan problemle ilgili literatür kısa özetlenmiştir. İkinci bölümde; Maksimum ve minimum elemanlı matrisler ile bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde; elemanları Fibonacci veya Lucas sayıları olarak seçilen maksimumlu veya minimumlu matrislerin determinantları, normları, tersleri ve Hadamard tersleri ile ilgili elde edilen bulgular verilmiştir. Dördüncü bölümde ise; sonuç ve öneriler verilmiştir.


Anahtar Kelimeler: Determinant, Ters, Norm.

ABSTRACT

APPLICATIONS OF THE FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS IN MATRICES WITH MAXIMUM AND MINIMUM ELEMENTS

In this study, we have investigated the determinants, inverses, Hadamard inverses and norms of the matrices with maximum and minimum elements, which have been formed from Fibonacci and Lucas numbers. We have obtained the results which depend on the Fibonacci and Lucas Numbers.

This study consists of four sections. In the first section given as the introduction section; the purpose has been determined and the problem has been introduced. The literature on the problem studied has been briefly summarized. In the second section; Some basic concepts have been introduced with maximum and minimum element matrices. In the third section; The determinants, norms, inverses, and Hadamard inverses of the maximum or minimum matrices selected as Fibonacci or Lucas numbers have been given. In the fourth section; conclusions and suggestions were given.



Keywords : Determinant, Inverse, Norm.

SİMGELER DİZİNİ

F_n n . ci Fibonacci Sayısı

L_n n . ci Lucas Sayısı

$\{F_n\}$ Fibonacci dizisi

$\{L_n\}$ Lucas dizisi

$\|A\|_E$ A matrisinin Öklid normu

$\|A\|_2$ A matrisinin spektral normu

A^{o-1} A matrisinin Hadamard tersi

λ Lambda

$|A|$ A matrisinin determinanı

A^{-1} A matrisinin tersi

1. GİRİŞ

Son yıllarda teknolojik gelişmelerin hızla artmasında, matematik ile diğer bilimlerin arasındaki yakınlaşmanın rolü yadsınmaz. Bu yakınlaşmada matris teorisi öne çıkan konulardan birisi olmuştur. Çünkü, mühendislik ve istatistik gibi çoğu uygulamalı bilimlerde matrislerle karşılaşmaktadır.

Uygulamalı bilimlerde, verilen bir problemin matris temsilleri yazılarak elde edilen matrisin özellikleri incelenerek verilen problemle ilgili önemli bilgiler elde edilebilir. Özdeğer, singüler değer, norm ve determinant gibi kavramlar matrislerin ve dolayısıyla üzerinde çalışılan problemin özellikleri hakkında bize önemli bilgiler sunmaktadır. Fakat büyük boyutlu matrislerde bu kavramların sayısal değerlerini hesaplamak oldukça güçtür. Bundan dolayı matris teorisi çalışmalarında, matrisi veya elemanlarını özel seçmek; hem kolaylık hem de dikkate değer bulgular elde edilmesi açısından son yıllarda araştırmacılar tarafından tercih edilen bir seçenek olmuştur. En çok tercih edilen özel matrislerden biri, elemanları Fibonacci sayı dizisi veya Fibonacci sayı dizisi ile ilişkili sayı dizileri seçilerek oluşturulan Circulant matrislerdir.

Fibonacci sayı dizisi; $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç şartlarıyla $n > 1$ doğal sayısı için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ kuralıyla elde edilen sayıların oluşturduğu dizidir. Benzer şekilde Lucas sayı dizisi; $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç şartlarıyla $n > 1$ doğal sayısı için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ kuralıyla elde edilen sayıların oluşturduğu dizidir.

Bizim bu çalışmadaki amacımız ise; elemanları Fibonacci veya Lucas sayıları olan maksimum ve minimum elemanlı matrislerin özelliklerini araştırmaktır.

1.1 Problemin Tanıtımı

Son yıllarda elemanları $a_{ij} = \min(i, j)$ veya $a_{ij} = \max(i, j)$ ve bunların genellemeleri olan minimum ve maksimum elemanlı matrisler üzerinde çalışmalar artmaktadır. Biz ise; elemanları Fibonacci sayılarından oluşan ve daha önce çalışılmış olan Literatür Özeti bölümünde bahsedeceğimiz $F = [F_{\min(i, j)+1}]_{i, j=1}^n$ matrisinin daha genel halini,

Fibonacci ve Lucas sayıları açısından inceleyeceğiz. Şöyle ki; $k \geq 0$ tamsayısı için elemanları,

$$a_{ij} = F_{k+\max(i,j)-1}, \quad (1.1)$$

$$b_{ij} = F_{k+\min(i,j)-1}, \quad (1.2)$$

$$c_{ij} = L_{k+\max(i,j)-1} \quad (1.3)$$

ve

$$d_{ij} = L_{k+\min(i,j)-1} \quad (1.4)$$

şeklinde Fibonacci veya Lucas sayıları olarak seçilen maksimumlu veya minimumlu $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin determinanı, normu, tersi ve Hadamard tersi gibi özelliklerini inceleyeceğiz.

1.2 Literatür Özeti

Bu bölümde çalışmamızla ilgili daha önce yapılmış çalışmalarını kısa kısa özetleyeceğiz. Minimum ve maksimum elemanlı matrislere ilk defa Pólya ve Szegő tarafından yazılan ve 4. baskısı 1971 yılında basılan Problems and Theorems in Analysis II kitabında karşılaştığı Matilla ve Haukkanen (2016) tarafından belirtilmiştir.

Catalani (2002), $a_{ij} = \min(i, j)$ olmak üzere $n \times n$ tipinde $A = (a_{ij})$ matrisinin esas minörleri ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişkileri vermiştir. Bhatia (2006), elemanları $a_{ij} = \min(i, j)$ şeklinde tanımlı matrislerin sonsuz bölünebilirliğini göstermiş ve yine Bhatia (2011) bu ve benzeri tipteki matrisleri daha kapsamlı bir şekilde incelemiştir.

Fonseca (2007), $a > 0$ ve $a \neq b$ olmak üzere $C = [\min\{ai - b, aj - b\}]_{i,j=1}^n$ matrisinin özdeğerlerini ve tersini incelemiştir.

Neudecker, Trenkler ve Liu (2009), $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = [a_{\min(i,j)}]_{i,j=1}^n$ matrisinin pozitif tanımlılığı, tersi ve determinanı ile ilgili bazı problemler ortaya atmışlar ve bu problemlerin cevapları 2 yıl sonra Chu, Puntanen ve Styan (2011) tarafından verilmiştir.

Bahşi ve Solak (2011,2013,2015), farklı üç çalışmalarında A_k ve B_k matrislerinin elemanlarını $a_{ij} = k + \min(i, j) - 1$, $b_{ij} = k + \max(i, j) - 1$ ve $k \in R$ şeklinde karakterize etmişler ve bu matrislerin determinant, norm, ters, karakteristik polinom gibi özelliklerini incelemişlerdir.

Hossein, Petroudi ve Pirouz (2015), farklı iki çalışmalarında üstel minimum ve maksimum elemanlı matrisleri araştırmışlardır.

Hossein, Petroudi ve Pirouz (2016), elemanları Fibonacci sayılarından oluşan $F = [F_{\min(i,j)+1}]_{i,j=1}^n$ matrisinin determinantını, tersini incelemişler ve spektral normu için alt ve üst sınırlar vermişlerdir.

Matilla ve Haukkanen (2016), maksimum ve minimum elemanlı matrisler ile meet ve join matrisler arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m \times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A \circ B = (a_{ij} \cdot b_{ij}) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Hadamard çarpımının spektral normu için, $r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ (maksimum satır

normu) ve $c_1(B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^m |b_{ij}|^2}$ (maksimum sütun normu) olmak üzere

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A) c_1(B) \quad (2.2)$$

eşitsizliği geçerlidir (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 2.2 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin Hadamard tersi $a_{ij} \neq 0$ olmak üzere,

$$A^{\circ-1} = \left(\frac{1}{a_{ij}} \right)_{m \times n} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 2.3 A $m \times n$ matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

ifadesine A matrisinin Öklid normu denir (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 2.4 $\|A\|_2 = \{ \lambda : \lambda, A^H A \text{ 'nın mutlak değerce en büyük öz değerinin karekökü} \}$ şeklinde tanımlanan norma A matrisinin spektral normu denir (Horn ve Johnson, 1991).

Tanım 2.5 Başlangıç değerleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları, bu sayıların oluşturduğu $\{F_n\}_{n \geq 0}$ sayı dizisine ise Fibonacci sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Tanım 2.6 Başlangıç değerleri $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

bağıntısı ile tanımlanan sayılara Lucas sayıları, bu sayıların oluşturduğu $\{L_n\}_{n \geq 0}$ sayı dizisine de Lucas sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas sayılarına ait karakteristik denklem $x^2 - x - 1 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. n . Fibonacci ve n . Lucas sayıları α ve β ya bağlı olarak sırasıyla,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.7)$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.8)$$

şeklinde yazılıp bu yazılımlara Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet Formülleri denir (Koshy, 2001). Ayrıca, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sayısı altın oran olarak bilinir ve Fibonacci ve Lucas sayıları ile altın oran arasında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha \quad (2.9)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \alpha \quad (2.10)$$

bağıntıları mevcuttur (Koshy, 2001). Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayıları arasında,

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i F_{i-1} = F_n^2 \quad (n \text{ çift ise}) \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i F_{i-1} = F_n^2 - 1 \quad (n \text{ tek ise}) \quad (2.13)$$

$$F_n + L_n = 2F_{n+1} \quad (2.14)$$

eşitlikleri vardır (Koshy, 2001).

Tanım 2.7 Elemanları maksimum (minimum) kavramlarına bağlı olarak tanımlanan matrislere maksimum elemanlı (minimum elemanlı) matrisler denir. Bazı maksimum ve minimum elemanlı matris örnekleri;

$$A = [\min(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad B = [\max(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}$$

$$A_k = [k + \min(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ k+1 & k+2 & k+2 & \dots & k+2 \\ k+1 & k+2 & k+3 & \dots & k+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k+1 & k+2 & k+3 & \dots & k+n \end{bmatrix}$$

ve

$$B_k = [k + \max(i, j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} k+1 & k+2 & k+3 & \dots & k+n \\ k+2 & k+2 & k+3 & \dots & k+n \\ k+3 & k+3 & k+3 & \dots & k+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k+n & k+n & k+n & \dots & k+n \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 2.1 $T = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ reel sonlu bir küme ve $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ olsun. T kümesinin minimum matrisi ve maksimum matrisi,

$$(T)_{\min} = \min(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_1 & z_1 & \dots & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_2 & \dots & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ve

$$[T]_{\max} = \max(z_i, z_j) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_2 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ z_3 & z_3 & z_3 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n & z_n & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

olmak üzere, $n \geq 2$ için

$$[T]_{\max} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 - z_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ve

$$(T)_{\min} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 - z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_2 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

eşitlikleri geçerlidir (Haukkanen ve Mattila, 2016).

Teorem 2.2 Elemanları $a_{ij} = k + \min(i, j) - 1$, $k \in R$ olarak tanımlanan

$$A_k = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} k & k & k & \dots & k \\ k & k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ k & k+1 & k+2 & \dots & k+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k+1 & k+2 & \dots & k+n-1 \end{bmatrix}$$

matrisi için,

$$\det(A_k) = k \quad (2.19)$$

dır (Bahşi ve Solak, 2011).

Teorem 2.3 Teorem 2.2.'de verilen A_k matrisinin tersi $k \neq 0$ için,

$$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{k+1}{k} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

matrisine eşittir (Bahşi ve Solak, 2011).

Teorem 2.4 Elemanları $b_{ij} = k + \max(i, j) - 1$, $k \in \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan

$$B_k = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} k & k+1 & k+2 & \dots & k+n-1 \\ k+1 & k+1 & k+2 & \dots & k+n-1 \\ k+2 & k+2 & k+2 & \dots & k+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k+n-1 & k+n-1 & k+n-1 & \dots & k+n-1 \end{bmatrix}$$

matrisinin Öklid normu,

$$\|B_k\|_E = \sqrt{n \left[(n+1) \frac{3n^2 + (8k-7)n + 2(3k-4)(k-1) - 1}{6} - (k-1)^2 \right]} \quad (2.21)$$

şeklindedir (Bahşi ve Solak, 2013).

Teorem 2.5 Teorem 2.4.'de verilen B_k matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$k \notin \{0, -1, -2, \dots, -n+1\}$ ve $n \geq 2$ için

$$(B_k^{\circ-1})^{-1} = \begin{cases} b_{11} = k(k+1), \\ b_{ij} = 2(k+i-1)^2, & 1 < i = j < n \\ b_{ij} = -(k+i-1)(k+j-1), & |i-j|=1 \\ b_{nn} = (k+n-1)^2, \\ b_{ij} = 0. & |i-j| > 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklindedir (Bahşi ve Solak, 2013).

Lemma 2.1 $1 \neq x \in R$ için

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \quad (2.24)$$

eşitlikleri mevcuttur (Petroudi ve Pirouz, 2016).

Bu çalışmada ele alınan ve çalışmanın 3. bölümünde bahsi geçen A , B , C ve D matrisleri,

$$A = \left[F_{k+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+1} & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+2} & F_{k+2} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$B = \left[F_{k+\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} F_k & F_k & F_k & \cdots & F_k \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} & \cdots & F_{k+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$C = \left[L_{k+\max(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+1} & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+2} & L_{k+2} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ve

$$D = \left[L_{k+\min(i,j)-1} \right]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} L_k & L_k & L_k & \cdots & L_k \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+1} & \cdots & L_{k+1} \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

olup bu durum her defasında tekrar tekrar belirtilmeyecektir.

3. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARININ MAKSİMUM VE MİNİMUM ELEMANLI MATRİSLERDE UYGULAMALARI

Bu bölümde elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olarak seçilen maksimum ve minimum elemanlı matrisler için elde ettiğimiz bulgular verilmiştir.

3.1 Fibonacci Sayılarının Maksimum ve Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 3.1.1 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere A matrisinin determinanı,

$$|A| = (-1)^{n+1} F_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} F_{k+i-1} \quad (3.1.1)$$

şeklindedir.

İspat A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+1} & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ F_{k+2} & F_{k+2} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup (2.17) eşitliğine göre,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_k - F_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Buradan A matrisinin determinanı alındığında,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_k - F_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.1.3)$$

yazılır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (3.1.4)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |A| &= (F_k - F_{k+1})(F_{k+1} - F_{k+2}) \cdots (F_{k+n-2} - F_{k+n-1}) F_{k+n-1} \\ &= (-F_{k-1})(-F_k) \cdots (-F_{k+n-3}) F_{k+n-1} \\ &= (-1)^{n+1} F_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} F_{k+i-1} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere A matrisinin tersinin elemanları k_{ij} olsun.

O halde,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-1} - F_{k+i}} & i = j = 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-2} - F_{k+i-1}} + \frac{1}{F_{k+i-1} - F_{k+i}} & 1 < i = j < n \\ \frac{1}{|F_{k+i-1} - F_{k+j-1}|} & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-2} - F_{k+i-1}} + \frac{1}{F_{k+i-1}} & i = j = n \end{cases} \quad (3.1.6)$$

biçimindedir.

İspat (2.17) eşitliğine göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k - F_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olup bu eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k - F_{k+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{k+2} - F_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

ve matris çarpımından

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k - F_{k+1}} & -\frac{1}{F_k - F_{k+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{F_k - F_{k+1}} & \frac{1}{F_k - F_{k+1}} + \frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & -\frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} & \frac{1}{F_{k+1} - F_{k+2}} + \frac{1}{F_{k+2} - F_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-2} - F_{k+n-1}} + \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

elde edilir ki bu matrisin elemanları teoremin ifadesindeki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.1.3 A matrisinin Öklid normu için,

$$\|A\|_E = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[2[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2}] - [L_{2k+2n-1} - L_{2k-1}] - 2n(-1)^{k+n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.9)$$

eşitliği vardır.

İspat Öklid normu tanımı, (2.7) ve (2.8)'deki Binet Formülleri ve Lemma 2.1.'deki eşitlikler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\|A\|_E^2 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)F_{k+i-1}^2 = \sum_{i=1}^n 2iF_{k+i-1}^2 - \sum_{i=1}^n F_{k+i-1}^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^n i \left(\frac{\alpha^{k+i-1} - \beta^{k+i-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha^{k+i-1} - \beta^{k+i-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[2 \sum_{i=1}^n i \left(\alpha^{2k+2i-2} - 2(\alpha\beta)^{k+i-1} + \beta^{2k+2i-2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(\alpha^{2k+2i-2} - 2(\alpha\beta)^{k+i-1} + \beta^{2k+2i-2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2 \left(\sum_{i=1}^n i \alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i \beta^{2k-2} (\beta^2)^i - \sum_{i=1}^n 2i(-1)^{k+i-1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^n \alpha^{2k+2i-2} + \sum_{i=1}^n \beta^{2k+2i-2} - \sum_{i=1}^n 2(-1)^{k+i-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2 \left(\sum_{i=1}^n i \alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i \beta^{2k-2} (\beta^2)^i - \sum_{i=1}^n 2i(-1)^{k+i-1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2k} (\alpha^2)^i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta^{2k} (\beta^2)^i - \sum_{i=1}^n 2(-1)^{k+i-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2 \left(\alpha^{2k-2} \frac{n(\alpha^2)^{n+2} - (n+1)(\alpha^2)^{n+1} + \alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + \beta^{2k-2} \frac{n(\beta^2)^{n+2} - (n+1)(\beta^2)^{n+1} + \beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^n 2i(-1)^{k+i-1} \right) - \left(\alpha^{2k} \frac{(\alpha^2)^n - 1}{\alpha^2 - 1} + \beta^{2k} \frac{(\beta^2)^n - 1}{\beta^2 - 1} - \sum_{i=1}^n 2(-1)^{k+i-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2 \left[n(\alpha^{2k+2n} + \beta^{2k+2n}) - (n+1)(\alpha^{2k+2n-2} + \beta^{2k+2n-2}) + (\alpha^{2k-2} + \beta^{2k-2}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(\alpha^{2k+2n-1} + \beta^{2k+2n-1}) - (\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) \right] - 2n(-1)^{k+n-1} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[2[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2}] - [L_{2k+2n-1} - L_{2k-1}] - 2n(-1)^{k+n-1} \right] \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4 A matrisinin spektral normu için,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{nF_{k+n-1}^2((n-1)F_{k+n-1}^2 + 1)} \quad (3.1.11)$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat A matrisi iki matrisin Hadamard çarpımı olarak,

$$A = \begin{bmatrix} F_k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ F_{k+1} & F_{k+1} & 1 & \cdots & 1 \\ F_{k+2} & F_{k+2} & F_{k+2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & F_{k+n-1} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ 1 & 1 & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & F_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

$$= A_2 \circ B_2 \quad (3.1.13)$$

şeklinde yazılsın. A_2 matrisinin maksimum satır normu ve B_2 matrisinin maksimum sütun normu,

$$r_1(A_2) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{2ij}|^2} = \sqrt{nF_{k+n-1}^2} \quad (3.1.14)$$

ve

$$c_1(B_2) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{2ij}|^2} = \sqrt{(n-1)F_{k+n-1}^2 + 1} \quad (3.1.15)$$

şeklinde. Buradan (2.2) eşitsizliğine göre,

$$\|A\|_2 = \|A_2 \circ B_2\|_2 \leq r_1(A_2)c_1(B_2) \quad (3.1.16)$$

olacağından A matrisinin spektral normu için,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{nF_{k+n-1}^2[(n-1)F_{k+n-1}^2 + 1]}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.5 $k > 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere A matrisinin Hadamard tersinin determinanı

$$|A^{\circ-1}| = \frac{F_{k-1}}{F_{k+n-1}F_{k+n-2}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{F_{k+i-1}} \quad (3.1.17)$$

şeklinde.

İspat A matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|A^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \frac{1}{F_{k+2}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.1.18)$$

olup, bu determinant; ikinci satırdan başlanarak her satır (-1) ile çarpılıp bir önceki satıra eklendiğinde,

$$|A^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+2}} & \frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+3}} & \frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+3}} & \frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.1.19)$$

halini alır. Bu son determinant hesaplanırsa

$$\begin{aligned} |A^{\circ-1}| &= \left(\frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} \right) \left(\frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+2}} \right) \left(\frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+3}} \right) \cdots \left(\frac{1}{F_{k+n-2}} - \frac{1}{F_{k+n-1}} \right) \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ &= \frac{F_{k+1} - F_k}{F_k F_{k+1}} \frac{F_{k+2} - F_{k+1}}{F_{k+1} F_{k+2}} \frac{F_{k+3} - F_{k+2}}{F_{k+2} F_{k+3}} \cdots \frac{F_{k+n-1} - F_{k+n-2}}{F_{k+n-2} F_{k+n-1}} \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ &= \frac{F_{k-1}}{F_k F_{k+1}} \frac{F_k}{F_{k+1} F_{k+2}} \frac{F_{k+1}}{F_{k+2} F_{k+3}} \cdots \frac{F_{k+n-3}}{F_{k+n-2} F_{k+n-1}} \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ &= \frac{F_{k-1}}{F_{k+n-1} F_{k+n-2}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{F_{k+i-1}} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere A matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} + \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} + \frac{F_{k+2} F_{k+3}}{F_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_{k+n-1} + \frac{F_{k+n-2} F_{k+n-1}}{F_{k+n-3}} \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

biçimindedir.

İspat A matrisinin Hadamard tersi, sağdan ve soldan $n \times n$ tipinde

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

matrisi ile çarpıldığında

$$I_1 A^{-1} I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \dots & \frac{1}{F_k} \end{bmatrix} = A_1 \quad (3.1.24)$$

elde edilir. A_1 matrisi (2.18) eşitliğine göre yazılırsa,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} - \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

elde edilir. Bu eşitlik $(I_1)^{-1} A_1 (I_1)^{-1} = A^{\circ-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} - \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

olur. Buradan,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} - \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = P \Lambda P \quad (3.1.27)$$

elde edilir. $A^{\circ-1} = P \Lambda P$ eşitliğinin her iki yanının tersi alınırsa $(A^{\circ-1})^{-1} = P^{-1} \Lambda^{-1} P^{-1}$

olur. Buradan,

$$(A^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} - \frac{1}{F_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} + \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} + \frac{F_{k+2} F_{k+3}}{F_{k+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} + \frac{F_{k+n-2} F_{k+n-1}}{F_{k+n-3}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.7 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere B matrisinin determinanı,

$$|B| = F_k \prod_{i=0}^{n-2} F_{k+i-1} \quad (3.1.29)$$

şeklindedir.

İspat B matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} F_k & F_k & F_k & \cdots & F_k \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} & \cdots & F_{k+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

olup (2.18) eşitliğine göre,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} - F_{k+n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.30)$$

biçiminde çarpanlarına ayırılır. Buradan B matrisinin determinanı alındığında,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} - F_{k+n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.1.31)$$

yazılır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |B| &= F_k (F_{k+1} - F_k) \cdots (F_{k+n-1} - F_{k+n-2}) \\ &= F_k F_{k-1} \cdots F_{k+n-3} \\ &= F_k \prod_{i=0}^{n-2} F_{k+i-1} \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere B matrisinin tersinin elemanları s_{ij} olsun.

O halde,

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-1}} + \frac{1}{F_{k+i} - F_{k+i-1}} & i = j = 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-1} - F_{k+i-2}} + \frac{1}{F_{k+i} - F_{k+i-1}} & 1 < i = j < n \\ \frac{-1}{|F_{k+i-1} - F_{k+j-1}|} & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{F_{k+i-1} - F_{k+i-2}} & i = j = n \end{cases} \quad (3.1.33)$$

biçimindedir.

İspat (2.18) eşitliğine göre

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{k+1} - F_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{k+n-1} - F_{k+n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olup bu eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+1}-F_k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{k+2}-F_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}-F_{k+n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.34)$$

ve matris çarpımından,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_k - F_{k+1}} & -\frac{1}{F_{k+1} - F_k} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{F_{k+1} - F_k} & \frac{1}{F_{k+1} - F_k} + \frac{1}{F_{k+2} - F_{k+1}} & -\frac{1}{F_{k+2} - F_{k+1}} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{F_{k+2} - F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+2} - F_{k+1}} + \frac{1}{F_{k+3} - F_{k+2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1} - F_{k+n-2}} \end{bmatrix} \quad (3.1.35)$$

elde edilir ki bu matrisin elemanları teoremin ifadesindeki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.1.9 B matrisinin Öklid normu için,

$$\|B\|_E = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(2n+1)[L_{2k+2n-1} - L_{2k-1}] - 2[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2}] + 2n(-1)^{k-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.36)$$

eşitliği vardır.

İspat Öklid normunun tanımı, (2.7) ve (2.8)'deki Binet Formülleri ve Lemma 2.1.'deki eşitlikler kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|B\|_E^2 &= \sum_{i=1}^n (2n-2i+1)F_{k+i-1}^2 = 2 \sum_{i=1}^n (2n-2i+1) \left(\frac{\alpha^{k+i-1} - \beta^{k+i-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2n+1) \left(\frac{\alpha^{k+i-1} - \beta^{k+i-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \left(\frac{\alpha^{k+i-1} - \beta^{k+i-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[\sum_{i=1}^n (2n+1) (\alpha^{2k+2i-2} - 2(\alpha\beta)^{k+i-1} + \beta^{2k+2i-2}) \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. - 2 \sum_{i=1}^n i (\alpha^{2k+2i-2} - 2(\alpha\beta)^{k+i-1} + \beta^{2k+2i-2}) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[(2n+1) \left(\sum_{i=1}^n \alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n \beta^{2k-2} (\beta^2)^i - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. - 2 \left(\sum_{i=1}^n i \alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i \beta^{2k-2} (\beta^2)^i - 2 \sum_{i=1}^n i (-1)^{k+i-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[(2n+1) \left(\alpha^{2k} \frac{(\alpha^2)^n - 1}{\alpha^2 - 1} + \beta^{2k} \frac{(\beta^2)^n - 1}{\beta^2 - 1} - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) - 2 \left(\alpha^{2k-2} \frac{n(\alpha^2)^{n+2} - (n+1)(\alpha^2)^{n+1} + \alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} \right. \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. \left. + \beta^{2k-2} \frac{n(\beta^2)^{n+2} - (n+1)(\beta^2)^{n+1} + \beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} - 2 \sum_{i=1}^n i (-1)^{k+i-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[(2n+1) \left[(\alpha^{2k+2n-1} + \beta^{2k+2n-1}) - (\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) \right] - 2 \left[n(\alpha^{2k+2n} + \beta^{2k+2n}) \right. \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. \left. - (n+1)(\alpha^{2k+2n-2} + \beta^{2k+2n-2}) + (\alpha^{2k-2} + \beta^{2k-2}) \right] + 2n(-1)^{k-1} \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[(2n+1) [L_{2k+2n-1} - L_{2k-1}] - 2 [nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2}] + 2n(-1)^{k-1} \right] \quad (3.1.37)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10 B matrisinin spektral normu için,

$$\|B\|_2 \leq \sqrt{(F_{k+n-1} \cdot F_{k+n} - F_{k-1} \cdot F_k)(F_{k+n-2} \cdot F_{k+n-1} - F_{k-1} \cdot F_k + 1)} \quad (3.1.38)$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat B matrisi iki matrisin Hadamard çarpımı olarak,

$$B = \begin{bmatrix} F_k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ F_k & F_{k+1} & 1 & \cdots & 1 \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & \cdots & F_{k+n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & F_k & F_k & \cdots & F_k \\ 1 & 1 & F_{k+1} & \cdots & F_{k+1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & F_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.39)$$

$$= A_3 \circ B_3 \quad (3.1.40)$$

şeklinde yazılsın. A_3 matrisinin maksimum satır normu ve B_3 matrisinin maksimum sütun normu için,

$$r_1(A_3) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{3ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=k}^{n+k-1} F_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+n-1} F_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} F_i^2} \quad (3.1.41)$$

ve

$$c_1(B_3) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{3ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=k}^{k+n-2} F_i^2 + 1} \quad (3.1.42)$$

olup (2.11) eşitliği kullanılarak

$$r_1(A_3) = \sqrt{F_{k+n-1}F_{k+n} - F_{k-1}F_k} \quad (3.1.43)$$

ve

$$c_1(B_3) = \sqrt{F_{k+n-2}F_{k+n-1} - F_{k-1}F_k + 1} \quad (3.1.44)$$

elde edilir. (2.2) eşitsizliğine göre,

$$\|B\|_2 = \|A_3 \circ B_3\|_2 \leq r_1(A_3)c_1(B_3) \quad (3.1.45)$$

olacağından B matrisinin spektral normu için,

$$\|B\|_2 \leq \sqrt{[F_{k+n-1}F_{k+n} - F_{k-1}F_k][F_{k+n-2}F_{k+n-1} - F_{k-1}F_k + 1]}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.11 $k > 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere B matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|B^{\circ-1}| = (-1)^{n+1} \frac{F_{k-1}}{F_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{F_{k+i-1}} \quad (3.1.46)$$

şeklindedir.

İspat B matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|B^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \cdots & \frac{1}{F_k} \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+1}} \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \frac{1}{F_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.1.47)$$

biçimindedir. Bu determinant; (n-1). satırdan başlanarak her satır (-1) ile çarpılıp bir sonraki satıra eklendiğinde,

$$|B^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \cdots & \frac{1}{F_k} \\ 0 & \frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_k} & \cdots & \frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_{k+n-1}} - \frac{1}{F_{k+n-2}} \end{vmatrix} \quad (3.1.48)$$

halini alır. Bu son determinant hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} |B^{\circ-1}| &= \frac{1}{F_k} \left(\frac{1}{F_{k+1}} - \frac{1}{F_k} \right) \left(\frac{1}{F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{F_{k+n-1}} - \frac{1}{F_{k+n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{F_k} \frac{F_k - F_{k+1}}{F_k F_{k+1}} \frac{F_{k+1} - F_{k+2}}{F_{k+1} F_{k+2}} \cdots \frac{F_{k+n-2} - F_{k+n-1}}{F_{k+n-2} F_{k+n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{F_k} \frac{-F_{k-1}}{F_k F_{k+1}} \frac{-F_k}{F_{k+1} F_{k+2}} \dots \frac{-F_{k+n-3}}{F_{k+n-2} F_{k+n-1}} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{F_{k-1}}{F_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{F_{k+i-1}}
\end{aligned} \tag{3.1.49}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.12 $k > 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere B matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(B^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} F_k - \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} - \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} - \frac{F_{k+2} F_{k+3}}{F_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{F_{k+n-1} F_{k+n-2}}{F_{k+n-3}} \end{bmatrix} \tag{3.1.50}$$

biçimindedir.

İspat B matrisinin Hadamard tersi sağdan ve soldan $n \times n$ tipinde

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile çarpıldığında

$$I_1 B^{\circ-1} I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \dots & \frac{1}{F_k} \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_{k+1}} & \dots & \frac{1}{F_{k+n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.51}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{F_k} \\ \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{F_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_k} & \frac{1}{F_k} & \cdots & \frac{1}{F_k} \end{bmatrix} = B_1 \quad (3.1.52)$$

elde edilir. B_1 matrisi (2.17) eşitliğine göre yazılırsa,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.53)$$

olur. Bu eşitlik $I_1^{-1}B_1I_1^{-1} = B^{-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.54)$$

olur. Buradan,

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{F_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 \Lambda_1 P_1 \quad (3.1.55)$$

elde edilir. $B^{-1} = P_1 \Lambda_1 P_1^{-1}$ eşitliğinin her iki yanının tersi alınırsa, $(B^{-1})^{-1} = P_1^{-1} \Lambda_1^{-1} P_1^{-1}$ elde edilmiş olur. Buradan,

$$(B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{F_{k+n-1}} & \frac{1}{F_{k+n-2}} & & & & \\ & 0 & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-3}} & & \\ & & \frac{1}{F_{k+n-2}} & \frac{1}{F_{k+n-3}} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & F_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.56)$$

$$= \begin{bmatrix} F_k - \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} & -\frac{F_k F_{k+1}}{F_{k-1}} - \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} & -\frac{F_{k+1} F_{k+2}}{F_k} - \frac{F_{k+2} F_{k+3}}{F_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{F_{k+n-2} F_{k+n-1}}{F_{k+n-3}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

3.2 Lucas Sayılarının Maksimum ve Minimum Elemanlı Matrislerde Uygulamaları

Teorem 3.2.1 C matrisinin $k > 0$ ve $n \geq 2$ için determinanı,

$$|C| = (-1)^{n+1} L_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} L_{k+i-1} \quad (3.2.1)$$

şeklindedir.

İspat C matrisi,

$$C = \begin{bmatrix} L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+1} & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ L_{k+2} & L_{k+2} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğundan (2.17) eşitliğine göre,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k - L_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

biçiminde yazılacağından,

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_k - L_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.2.3)$$

olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |C| &= (L_k - L_{k+1})(L_{k+1} - L_{k+2}) \cdots (L_{k+n-2} - L_{k+n-1})L_{k+n-1} \\ &= (-L_{k-1})(-L_k) \cdots (-L_{k+n-3})L_{k+n-1} \\ &= (-1)^{n+1} L_{k+n-1} \prod_{i=0}^{n-2} L_{k+i-1} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $k > 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere C matrisinin tersinin elemanları t_{ij} olsun.

O halde,

$$t_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-1} - L_{k+i}} & i = j = 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-2} - L_{k+i-1}} + \frac{1}{L_{k+i-1} - L_{k+i}} & 1 < i = j < n \\ \frac{1}{|L_{k+i-1} - L_{k+j-1}|} & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-2} - L_{k+i-1}} + \frac{1}{L_{k+i-1}} & i = j = n \end{cases} \quad (3.2.5)$$

şeklindedir.

İspat (2.17) eşitliğine göre,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_k - L_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_{k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olup bu eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k - L_{k+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

ve

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k - L_{k+1}} & -\frac{1}{L_k - L_{k+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{L_k - L_{k+1}} & \frac{1}{L_k - L_{k+1}} + \frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & -\frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} & \frac{1}{L_{k+1} - L_{k+2}} + \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-2} - L_{k+n-1}} + \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

elde edilir ki bu matrisin elemanları teoremin ifadesindeki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.2.3 C matrisinin Öklid normu için,

$$\|C\|_E = \left[2(nL_{2n+2k} - (n+1)L_{2n+2k-2} + L_{2k-2}) - (L_{2n+2k-1} - L_{2k-1}) + 2n(-1)^{k+n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.8)$$

eşitliği vardır.

İspat Öklid normunun tanımı, (2.7) ve (2.8)'deki Binet Formülleri ve Lemma 2.1.'deki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} \|C\|_E^2 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)L_{k+i-1}^2 = \sum_{i=1}^n (2i-1)(\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i(\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 - \sum_{i=1}^n (\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n i\alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i\beta^{2k-2} (\beta^2)^i + 2 \sum_{i=1}^n i(-1)^{k+i-1} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n \alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n \beta^{2k-2} (\beta^2)^i + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n i\alpha^{2k-2} (\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i\beta^{2k-2} (\beta^2)^i + 2 \sum_{i=1}^n i(-1)^{k+i-1} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2k} (\alpha^2)^i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta^{2k} (\beta^2)^i + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\alpha^{2k-2} \frac{n(\alpha^2)^{n+2} - (n+1)(\alpha^2)^{n+1} + \alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + \beta^{2k-2} \frac{n(\beta^2)^{n+2} - (n+1)(\beta^2)^{n+1} + \beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n i(-1)^{k+i-1} \right) - \left(\alpha^{2k} \frac{(\alpha^2)^n - 1}{\alpha^2 - 1} + \beta^{2k} \frac{(\beta^2)^n - 1}{\beta^2 - 1} + \sum_{i=1}^n 2(-1)^{k+i-1} \right) \\
&= 2 \left[n(\alpha^{2k+2n} + \beta^{2k+2n}) - (n+1)(\alpha^{2k+2n-2} + \beta^{2k+2n-2}) + (\alpha^{2k-2} + \beta^{2k-2}) \right] \\
&\quad - \left[(\alpha^{2k+2n-1} + \beta^{2k+2n-1}) - (\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) \right] + 2n(-1)^{k+n-1} \\
&= 2 \left[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2} \right] - \left[L_{2k+2n-1} - L_{2k-1} \right] + 2n(-1)^{k+n-1} \tag{3.2.9}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 C matrisinin spektral normu için,

$$\|C\|_2 \leq \sqrt{nL_{k+n-1}^2 ((n-1)L_{k+n-1}^2 + 1)} \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat C matrisi iki matrisin Hadamard çarpımı olarak,

$$C = \begin{bmatrix} L_k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ L_{k+1} & L_{k+1} & 1 & \cdots & 1 \\ L_{k+2} & L_{k+2} & L_{k+2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & L_{k+n-1} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ 1 & 1 & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & L_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

$$= C_2 \circ D_2 \tag{3.2.12}$$

şeklinde yazılsın. C_2 matrisinin maksimum satır normu ve D_2 matrisinin maksimum sütun normu,

$$r_1(C_2) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |c_{2,ij}|^2} = \sqrt{nL_{k+n-1}^2} \quad (3.2.13)$$

ve

$$c_1(D_2) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |d_{2,ij}|^2} = \sqrt{(n-1)L_{k+n-1}^2 + 1} \quad (3.2.14)$$

şeklindedir. (2.2) eşitsizliğine göre,

$$\|C\|_2 = \|C_2 \circ D_2\|_2 \leq r_1(C_2)c_1(D_2) \quad (3.2.15)$$

olacağından, C matrisinin spektral normu için,

$$\|C\|_2 \leq \sqrt{nL_{k+n-1}^2 [(n-1)L_{k+n-1}^2 + 1]}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.5 C matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|C^{\circ-1}| = \frac{L_{k-1}}{L_{k+n-1}L_{k+n-2}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{L_{k+i-1}} \quad (3.2.16)$$

şeklindedir.

İspat C matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|C^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \frac{1}{L_{k+2}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.2.17)$$

biçimindedir. Bu determinant; ikinci satırdan başlanarak her satır (-1) ile çarpılıp bir önceki satıra eklendiğinde,

$$|C^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k} - \frac{1}{L_{k+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_{k+2}} & \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_{k+2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+3}} & \frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+3}} & \frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.2.18)$$

halini alır. Bu son determinant hesaplanırsa

$$\begin{aligned} |C^{\circ-1}| &= \left(\frac{1}{L_k} - \frac{1}{L_{k+1}} \right) \left(\frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_{k+2}} \right) \left(\frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+3}} \right) \cdots \left(\frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-1}} \right) \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ &= \frac{L_{k+1} - L_k}{L_k L_{k+1}} \frac{L_{k+2} - L_{k+1}}{L_{k+1} L_{k+2}} \frac{L_{k+3} - L_{k+2}}{L_{k+2} L_{k+3}} \cdots \frac{L_{k+n-1} - L_{k+n-2}}{L_{k+n-2} L_{k+n-1}} \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ &= \frac{L_{k-1}}{L_k L_{k+1}} \frac{L_k}{L_{k+1} L_{k+2}} \frac{L_{k+1}}{L_{k+2} L_{k+3}} \cdots \frac{L_{k+n-3}}{L_{k+n-2} L_{k+n-1}} \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ &= \frac{L_{k-1}}{L_{k+n-1} L_{k+n-2}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{L_{k+i-1}} \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6 $k > 0$ olmak üzere C matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(C^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} + \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} + \frac{L_{k+2} L_{k+3}}{L_{k+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} + \frac{L_{k+n-2} L_{k+n-1}}{L_{k+n-3}} \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

şeklindedir.

İspat C matrisinin Hadamard tersi, sağdan ve soldan $n \times n$ tipinde

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile çarpıldığında,

$$I_1 C^{\circ-1} I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} = C_1 \quad (3.2.22)$$

elde edilir. C_1 matrisi (2.18) eşitliğine göre,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_k} - \frac{1}{L_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik, $I_1^{-1} C_1 I_1^{-1} = C^{\circ-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$C^{c-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k} - \frac{1}{L_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.24)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k} - \frac{1}{L_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = P\Lambda_2P \quad (3.2.25)$$

elde edilir. $C^{c-1} = P\Lambda_2P$ eşitliğinin her iki yanının tersi alınırsa $(C^{c-1})^{-1} = P^{-1}(\Lambda_2)^{-1}P^{-1}$ olur. Buradan,

$$(C^{c-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k+n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - 1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k - L_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} + \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} + \frac{L_{k+2} L_{k+3}}{L_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{k+n-1} + \frac{L_{k+n-2} L_{k+n-1}}{L_{k+n-3}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.7 $k > 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere D matrisinin determinanı,

$$|D| = L_k \prod_{i=0}^{n-2} L_{k+i-1} \quad (3.2.27)$$

şeklindedir.

İspat D matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} L_k & L_k & L_k & \cdots & L_k \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+1} & \cdots & L_{k+1} \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup (2.18) eşitliğine göre,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} - L_{k+n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.28)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Buradan D matrisinin determinanı alındığında,

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} - L_{k+n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.2.29)$$

yazılır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |D| &= L_k (L_{k+1} - L_k) \cdots (L_{k+n-1} - L_{k+n-2}) \\ &= L_k L_{k-1} \cdots L_{k+n-3} \end{aligned}$$

$$= L_k \prod_{i=0}^{n-2} L_{k+i-1} \quad (3.2.30)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8 $k > 0$ için D matrisinin tersinin elemanları h_{ij} olsun. O halde,

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-1}} + \frac{1}{L_{k+i} - L_{k+i-1}} & i = j = 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-1} - L_{k+i-2}} + \frac{1}{L_{k+i} - L_{k+i-1}} & 1 < i = j < n \\ \frac{-1}{|L_{k+i-1} - L_{k+j-1}|} & |i-j| = 1 \\ \frac{1}{L_{k+i-1} - L_{k+i-2}} & i = j = n \end{cases} \quad (3.2.31)$$

biçimindedir.

İspat (2.18) eşitliğine göre,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k+1} - L_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k+n-1} - L_{k+n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olup bu eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+1} - L_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1} - L_{k+n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

ve matris çarpımından,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} + \frac{1}{L_k - L_{k+1}} & -\frac{1}{L_{k+1} - L_k} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{L_{k+1} - L_k} & \frac{1}{L_{k+1} - L_k} + \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+1}} & -\frac{1}{L_{k+2} - L_{k+1}} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{k+2} - L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+2} - L_{k+1}} + \frac{1}{L_{k+3} - L_{k+2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1} - L_{k+n-2}} \end{bmatrix} \quad (3.2.33)$$

elde edilir ki bu matrisin elemanları teoremin ifadesindeki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.2.9 D matrisinin Öklid normu için,

$$\|D\|_E = \left[(2n+1)[L_{2k+2n-1} - L_{2k-1}] - 2[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2}] - 2n(-1)^{k-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.34)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Öklid normunun tanımı, (2.7) ve (2.8)'deki Binet Formülleri ve Lemma 2.1.'deki eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|D\|_E^2 &= \sum_{i=1}^n (2n-2i+1)L_{k+i-1}^2 = \sum_{i=1}^n (2n-2i+1)(\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 \\ &= (2n+1)\sum_{i=1}^n (\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 - 2\sum_{i=1}^n i(\alpha^{k+i-1} + \beta^{k+i-1})^2 \\ &= (2n+1)\sum_{i=1}^n (\alpha^{2k+2i-2} + \beta^{2k+2i-2} + 2(\alpha\beta)^{k+i-1}) - 2\sum_{i=1}^n i(\alpha^{2k+2i-2} + \beta^{2k+2i-2} + 2(\alpha\beta)^{k+i-1}) \\ &= (2n+1)\left(\sum_{i=1}^n \alpha^{2k-2}(\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n \beta^{2k-2}(\beta^2)^i + 2\sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) \\ &\quad - 2\left(\sum_{i=1}^n i\alpha^{2k-2}(\alpha^2)^i + \sum_{i=1}^n i\beta^{2k-2}(\beta^2)^i + 2\sum_{i=1}^n i(-1)^{k+i-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n+1) \left(\alpha^{2k} \frac{(\alpha^2)^n - 1}{\alpha^2 - 1} + \beta^{2k} \frac{(\beta^2)^n - 1}{\beta^2 - 1} + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i-1} \right) - 2 \left(\alpha^{2k-2} \frac{n(\alpha^2)^{n+2} - (n+1)(\alpha^2)^{n+1} + \alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \beta^{2k-2} \frac{n(\beta^2)^{n+2} - (n+1)(\beta^2)^{n+1} + \beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} + 2 \sum_{i=1}^n i(-1)^{k+i-1} \right) \\
&= \left[(2n+1) \left[(\alpha^{2k+2n-1} + \beta^{2k+2n-1}) - (\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) \right] - 2 \left[n(\alpha^{2k+2n} + \beta^{2k+2n}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (n+1)(\alpha^{2k+2n-2} + \beta^{2k+2n-2}) + (\alpha^{2k-2} + \beta^{2k-2}) \right] - 2n(-1)^{k-1} \right] \\
&= \left[(2n+1) \left[L_{2k+2n-1} - L_{2k-1} \right] - 2 \left[nL_{2k+2n} - (n+1)L_{2k+2n-2} + L_{2k-2} \right] - 2n(-1)^{k-1} \right] \quad (3.2.35)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.10 D matrisinin spektral normu için,

$$\|D\|_2 \leq \sqrt{5(F_{k+n-1} \cdot F_{k+n} - F_{k-1} \cdot F_k)(5F_{k+n-2} \cdot F_{k+n-1} - 5F_{k-1} \cdot F_k + 1)} \quad (3.2.36)$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat D matrisi iki matrisin Hadamard çarpımı olarak

$$D = \begin{bmatrix} L_k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ L_k & L_{k+1} & 1 & \cdots & 1 \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k & L_{k+1} & L_{k+2} & \cdots & L_{k+n-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & L_k & L_k & \cdots & L_k \\ 1 & 1 & L_{k+1} & \cdots & L_{k+1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & L_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.37)$$

$$= C_3 \circ D_3 \quad (3.2.38)$$

şeklinde yazılsın. C_3 matrisinin maksimum satır normu ve D_3 matrisinin maksimum sütun normu için, (2.11), (2.12), (2.13) ve (2.14) kullanılarak,

$$r_1(C_3) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |c_{3,ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=k}^{n+k-1} L_i^2} \leq \sqrt{5F_{k+n-1} F_{k+n} - 5F_{k-1} F_k} \quad (3.2.39)$$

ve

$$c_1(D_3) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |d_{3ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=k}^{k+n-2} L_i^2 + 1} \leq \sqrt{5F_{k+n-2}F_{k+n-1} - 5F_{k-1}F_k + 1} \quad (3.2.40)$$

elde edilir. Buradan (2.2) eşitsizliğine göre

$$\|D\|_2 = \|C_3 \circ D_3\|_2 \leq r_1(C_3)c_1(D_3) \quad (3.2.41)$$

olacağından D matrisinin spektral normu için,

$$\|D\|_2 \leq \sqrt{5[F_{k+n-1}F_{k+n} - F_{k-1}F_k][5F_{k+n-2}F_{k+n-1} - 5F_{k-1}F_k + 1]}$$

yazılır.

Teorem 3.2.11 $k > 0$ olmak üzere D matrisin Hadamard tersinin determinanı,

$$|D^{\circ-1}| = (-1)^{n+1} \frac{L_{k-1}}{L_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{L_{k+i-1}} \quad (3.2.42)$$

şeklindedir.

İspat D matrisinin Hadamard tersinin determinanı,

$$|D^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \cdots & \frac{1}{L_k} \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+1}} \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \frac{1}{L_{k+2}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{vmatrix} \quad (3.2.43)$$

biçimindedir. Bu determinant; $(n-1)$. satırdan başlanarak her satır (-1) ile çarpılıp bir sonraki satıra eklendiğinde,

$$|D^{\circ-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \cdots & \frac{1}{L_k} \\ 0 & \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_k} & \cdots & \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} \end{vmatrix} \quad (3.2.44)$$

halini alır. Bu son determinant hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} |D^{\circ-1}| &= \frac{1}{L_k} \left(\frac{1}{L_{k+1}} - \frac{1}{L_k} \right) \left(\frac{1}{L_{k+2}} - \frac{1}{L_{k+1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{L_k} \frac{L_k - L_{k+1}}{L_k L_{k+1}} \frac{L_{k+1} - L_{k+2}}{L_{k+1} L_{k+2}} \cdots \frac{L_{k+n-2} - L_{k+n-1}}{L_{k+n-2} L_{k+n-1}} \\ &= \frac{1}{L_k} \frac{-L_{k-1}}{L_k L_{k+1}} \frac{-L_k}{L_{k+1} L_{k+2}} \cdots \frac{-L_{k+n-3}}{L_{k+n-2} L_{k+n-1}} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{L_{k-1}}{L_{k+n-2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{L_{k+i-1}} \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.12 $k > 0$ olmak üzere D matrisinin Hadamard tersinin tersi,

$$(D^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} L_k - \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} - \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} - \frac{L_{k+2} L_{k+3}}{L_{k+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{L_{k+n-1} L_{k+n-2}}{L_{k+n-3}} \end{bmatrix} \quad (3.2.46)$$

biçimindedir.

İspat D matrisinin Hadamard tersi, sağdan ve soldan $n \times n$ tipinde

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile çarpıldığında,

$$I_1 D^{-1} I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \cdots & \frac{1}{L_k} \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{L_{k+n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.47)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} & \frac{1}{L_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{L_k} \\ \frac{1}{L_{k+n-2}} & \frac{1}{L_{k+n-2}} & \cdots & \frac{1}{L_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_k} & \frac{1}{L_k} & \cdots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} = D_1 \quad (3.2.48)$$

halini alır. D_1 matrisi (2.17) eşitliğine göre,

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.49)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Bu eşitlik $I_1^{-1} D_1 I_1^{-1} = D^{-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.50)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 \Lambda_3 P_1 \quad (3.2.51)$$

olur. $D^{\circ-1} = P_1 \Lambda_3 P_1$ eşitliğinin her iki yanının tersi alınırsa $(D^{\circ-1})^{-1} = P_1^{-1} \Lambda_3^{-1} P_1^{-1}$ elde edilmiş olur. Buradan,

$$(D^{\circ-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L_{k+n-1}} - \frac{1}{L_{k+n-2}} \\ 0 \\ \frac{1}{L_{k+n-2}} - \frac{1}{L_{k+n-3}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.52)$$

$$= \begin{bmatrix} L_k - \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} & -\frac{L_k L_{k+1}}{L_{k-1}} - \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} & -\frac{L_{k+1} L_{k+2}}{L_k} - \frac{L_{k+2} L_{k+3}}{L_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{L_{k+n-2} L_{k+n-1}}{L_{k+n-3}} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Biz bu çalışmada; elemanları $a_{ij} = F_{k+\max(i,j)-1}$, $b_{ij} = F_{k+\min(i,j)-1}$, $c_{ij} = L_{k+\max(i,j)-1}$ ve $d_{ij} = L_{k+\min(i,j)-1}$ şeklinde Fibonacci veya Lucas sayıları olarak seçilen maksimumlu ve minimumlu $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin determinanı, normu, tersi ve Hadamard tersi gibi özelliklerini inceledik. Ele aldığımız $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n = [F_{k+\min(i,j)-1}]_{i,j=1}^n$ matrisi, Petroudi ve Pirouz (2016) tarafından çalışılan $F = [F_{\min(i,j)+1}]_{i,j=1}^n$ matrisinin daha genel halidir. Sözelimi, $k = 2$ için elde ettiğimiz bulgular Petroudi ve Pirouz (2016) tarafından elde edilen bulgulara indirgenir. Bu çalışmamızın; elemanları Fibonacci sayılarının farklı türdeki genellemeleri seçilerek oluşturulacak maksimum veya minimum elemanlı matrisler üzerine çalışmalar yapılarak daha da geliştirilebileceği kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Bahşı, M. ve Solak, S., 2011. A particular matrix and its properties, Int. J. of Math. Sci. and Appl., 1, 2, 971-974.
- Bahşı, M. ve Solak, S., 2013. A particular matrix and its some properties, Sci. Res. Essays, 8, 1-5.
- Bahşı, M. ve Solak, S., 2015. Some particular matrices and their characteristic polynomials, Linear and Multilinear Algebra, 63, 2071-2078.
- Bhatia, R., 2006. Infinitely divisible matrices, Amer. Math. Monthly, 113, 3, 221-235.
- Bhatia, R., 2011. Min matrices and mean matrices, Math. Intelligencer, 33, 2, 22-28.
- Catalani, M., 2002. A particular matrix and its relationship with Fibonacci numbers, Alındığı tarih: 17.01.2017, Adres: <https://arxiv.org/pdf/math/0209249.pdf> .
- Chu, K. L., Puntanen, S. ve Styan, G. P. H., 2011. Problem section, Statistical Papers, 52, 257-262.
- Da Fonseca, C. M., 2007. On the eigenvalues of some tridiagonal matrices, J. Comput. Appl. Math. 200, 1, 283-286.
- Mattila, M. ve Haukkanen, P., 2016. Studying the various properties of MIN and MAX matrices-elementary vs. more advanced methods, Special Matrices, 4, 101-109.
- Neudecker, H., Trenkler, G. ve Liu, S., 2009. Problem section, Statistical Papers, 50, 221-223.
- Petroudi, S. H. J. ve Pirouz, B., 2015. On some properties of (k,h)-Pell sequence and (k,h)-Pell-Lucass sequence, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. 3, 1, 98-101.

Petroudi, S. H. J. ve Pirouz, M., 2016. On the bounds for the spectral norm of particular matrices with Fibonacci and Lucas numbers, *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech.*, 3, 4, 82-90.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Bahar AKYÜZ

Doğum Tarihi ve Yeri : 28.03.1992 / Aksaray

İletişim Bilgileri

E-posta adresi : akyuz.bhr@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Lisans : Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
(2010-2014)