T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE BOURBAKI-SINIRLILIK VE BOURBAKI-TAMLIK

MERVE İLKHAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. EMRAH EVREN KARA

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE BOURBAKI-SINIRLILIK VE BOURBAKI-TAMLIK

Merve İLKHAN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ
Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK
Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Kadir GÖKŞEN
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 21/05/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

21/05/2018

Merve İLKHAN

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca beni 2211-E Doktora Doğrudan Burs programı kapsamında finansal açıdan destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

21/05/2018 **Merve İLKHAN**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\{0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	$[0,+\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
$Cl(A)$	A kümesinin kapanışı

ÖZET

BAZI METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE BOURBAKI-SINIRLILIK VE BOURBAKI-TAMLIK

Merve İLKHAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Mayıs 2018, 80 sayfa

Bu tez çalışmasında asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki sınırlılık ve dış Bourbaki sınırlılık kavramları tanımlandı ve bu kavramlar üzerine çalışıldı. Asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki Cauchy ve kofinal Bourbaki Cauchy dizileri tanımlandıktan sonra Bourbaki sınırlılığın bu diziler yardımıyla karakterize edilip edilemeyeceği araştırıldı. Ayrıca bu diziler kullanılarak asimetrik metrik uzaylarda farklı tipte tamlık tanımları verildi. Asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık ve düzgün yerel kompaktlık ile ilgili önemli bazı sonuçlar elde edildi. Asimetrik metrik uzaylarda doğal yoğunluk kavramı kullanılarak yakınsaklık, Cauchy dizileri, limit noktası ve yığılma noktası gibi temel kavramlar genelleştirildi ve bazı ana sonuçlar elde edildi. Metrik uzaylardaki durumun aksine bu kavramlar ile ilgili bazı farklılıkların olduğu gözlemlendi. Tezin son bölümünde metrik uzaylarda istatistiksel Bourbaki Cauchy dizisi olarak adlandırılan dizilerin yeni bir sınıfı tanımlanarak Bourbaki tamlığa denk yeni bir şart ifade edildi. İstatistiksel Bourbaki Cauchy dizilerini koruyan istatistiksel Bourbaki Cauchy regüler fonksiyonu tanımladıktan sonra bu fonksiyonlar yardımıyla Bourbaki tamlık ve Bourbaki sınırlılığın bazı yeni karakterizasyonları sunuldu.

Anahtar sözcükler: Asimetrik Metrik, Bourbaki Sınırlılık, Bourbaki Tamlık, İstatistiksel Yakınsaklık, Kompaktlık.

ABSTRACT

BOURBAKI-BOUNDEDNESS AND BOURBAKI-COMPLETENESS ON SOME METRIC SPACES

Merve İLKHAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
May 2018, 80 pages

In this thesis the concepts of Bourbaki boundedness and outside Bourbaki boundedness are defined in asymmetric metric spaces and these concepts are studied. After defining Bourbaki Cauchy and cofinally Bourbaki Cauchy sequences in asymmetric metric spaces, it is investigated whether Bourbaki boundedness can be characterized by means of these sequences. Moreover by using these sequences, definitions of different type of completeness are given. Some important results are obtained related to compactness, sequentially compactness and uniformly locally compactness in asymmetric metric spaces. By using the notion of natural density, some basic concepts such as convergence, Cauchy sequences, limit point and cluster point are generalized and some fundamental results are obtained on asymmetric metric spaces. Unlike the case of metric spaces, some differences are observed related to these concepts. In the last part of the thesis, a new condition equivalent to Bourbaki completeness is stated by defining a new class of sequences named as a statistical Bourbaki-Cauchy sequence in metric spaces. After defining the statistical Bourbaki Cauchy regular function which is a function preserving statistical Bourbaki Cauchy sequences, some new characterizations of Bourbaki completeness and Bourbaki boundedness are introduced by means of these functions.

Keywords: Asymmetric Metric, Bourbaki boundedness, Bourbaki Completeness, Compactness, Statistical Convergence.

EXTENDED ABSTRACT

BOURBAKI-BOUNDEDNESS AND BOURBAKI-COMPLETENESS ON SOME METRIC SPACES

Merve İLKHAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
May 2018, 80 pages

1. INTRODUCTION

Compact metric spaces and complete metric spaces play a crucial role in functional analysis. Metric spaces satisfying properties between compactness and completeness have been the subject of research for a number of papers over years. One of the most popular of them is Atsuji space also known as UC space introduced by Atsuji in [1]. Atsuji space is a space on which every real valued continuous function is uniformly continuous. Owing to the significance of Atsuji spaces, a number of authors have studied extensively to give more new characterizations of such spaces (see the survey article [2] by Kundu and Jain). Another kind of this intermediate property that a metric space possesses is Bourbaki completeness which is introduced recently in [3]. Also in this paper it has been proved that every Atsuji space is Bourbaki complete. If one aims to obtain a stronger property than completeness for a metric space, it is enough to cluster all sequences in the space which have certain definition and which are more general than Cauchy sequences. For this purpose, authors in [3] have defined Bourbaki Cauchy and cofinally Bourbaki Cauchy sequences. Bourbaki Cauchy sequences are found out when the authors deal with the notion of Bourbaki boundedness of a set in a metric space. Bourbaki bounded space is introduced in [1] under the name of finitely chainable space. This space is a metric space on which every real valued uniformly continuous function is bounded. Bourbaki boundedness is a property which is weaker than totally boundedness (or equivalently precompactness) but stronger than usual boundedness in a metric space. As totally boundedness is characterized with Cauchy sequences in a metric space authors in [3] have characterized Bourbaki boundedness with Bourbaki Cauchy sequences.

An asymmetric metric introduced by Wilson in [4] is a distance function satisfying all the axioms of a metric except symmetry condition. Asymmetric metric spaces are extensive research subject not only in theoretical mathematics but also in applied mathematics. The lack of symmetry condition in the definition of an asymmetric metric has influence upon whole theory. Especially, the results related to completeness, compactness and precompactness in asymmetric metric spaces are very different from metric spaces. For example, completeness and sequentially completeness do not coincide in asymmetric metric spaces unlike the situation in metric spaces. On the other hand, totally boundedness and precompactness are different notions in asymmetric case. By the way, a new concept is appeared named outside precompactness in asymmetric metric spaces. Like a metric induces a topology, an asymmetric metric induces three different topologies.

As an extension of usual convergence, the concept of statistical convergence for real-valued sequences was introduced by Fast [5] and Steinhaus [6]. However, the idea of statistical convergence (appeared under the name of almost convergence) goes back to Zygmund [7]. The formal definition is based on the notion of natural density (asymptotic density) of a subset in $\mathbb{N}$. The statistical convergence was generalized to sequences in some other spaces and studied on these spaces such as metric spaces, cone metric spaces, topological and uniform spaces and topological groups etc. In [8], Schoenberg gave some basic properties of statistical convergence and also studied the concept as a summability method. Later on it was further investigated and linked with the summability theory by many authors. Also, several important applications of statistical convergence are available in different areas of mathematics such as measure theory, optimization theory, approximation theory, probability theory, number theory etc.

2. MATERIAL AND METHODS

After a comprehensive literature review, the previous studies related to subject have been explained in detail in the first section of the thesis. In the second section, all necessary and fundamental concepts related to topological and metric spaces are given. Later, it is focused on the notion of statistical convergence in a metric space. Since the most of the main results have to do with asymmetric metric spaces, these spaces are examined in a comprehensive manner. Also, similarities and differences between asymmetric metric and metric are investigated. In order to obtain the main results, missing definitions are made and theorems are proved in the theory of asymmetric metric spaces.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this thesis the concepts of Bourbaki boundedness and outside Bourbaki boundedness are defined in an asymmetric metric space and these concepts are studied. After defining Bourbaki Cauchy and cofinally Bourbaki Cauchy sequences in asymmetric metric spaces, it is investigated whether Bourbaki boundedness can be characterized by means of these sequences. Moreover by using these sequences, the definitions of varied completeness are given. Some significant results are obtained related to compactness, sequentially compactness and uniformly locally compactness in asymmetric metric spaces.

In asymmetric metric spaces, some basic concepts are given and some fundamental results are obtained related to statistical convergence. By defining new type statistical Cauchy sequences (called (weakly) left (right) K-statistical Cauchy and left (right) ρ-statistical Cauchy), the relation between these sequences are examined with examples. On the contrary to the metric case, it is observed that there are some differences within the context of statistical concepts. For example, statistical limit of a sequence in an asymmetric metric space is not unique. Furthermore, some interesting results are obtained related to completeness (in some sense), compactness and precompactness on this setting by using these statistical Cauchy sequences. Later, some summability type theorems are presented on asymmetric normed spaces.

In the last part of the thesis, a new characterization of Bourbaki completeness in metric spaces is studied. For this purpose, the definition of a statistical Bourbaki Cauchy sequence is given as a new concept in the setting of metric spaces. The relations between these new sequences and other known sequences are examined. On the other hand, after defining the statistical Bourbaki Cauchy regular function which is a function preserving statistical Bourbaki Cauchy sequences, some new characterizations of Bourbaki completeness and Bourbaki boundedness are introduced by means of these functions.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this thesis, a new condition equivalent to Bourbaki completeness is stated by defining a new class of sequences named as a statistical Bourbaki-Cauchy sequence. Hence, it is concluded that every sequence in an Atsuji space has a statistical Bourbaki-Cauchy subsequence. Further, since compactness has been characterized by Bourbaki boundedness and Bourbaki completeness, it can be deduced that a metric space X is compact if and only if X is Bourbaki bounded and every sequence in X has a statistical Bourbaki-Cauchy subsequence.

1. GİRİŞ

Matematiksel bir sistem boştan farklı bir küme ile bu küme üzerinde tanımlanan bir yapıdan oluşur. Bir küme üzerinde ikili bir işlem tanımlanmış ise bu yapıya cebirsel yapı denir. Herhangi bir X kümesinde verilen bir dizinin yakınsak olması veya iki küme arasında tanımlı bir fonksiyonun sürekli olması için kümeler üzerine koyulması gereken matematiksel yapıya ise topolojik yapı denir.

Bir fonksiyonun sürekliliği, limiti ve bir dizinin yakınsaklığı gibi kavramlar klasik analizin temel kavramları olduğu gibi bu kavramlarla matematiğin topoloji, fonksiyonel analiz, kompleks analiz, geometri gibi dallarında da karşılaşılmaktadır. Tüm bu kavramların temeli açık küme kavramına dayanır.

Topolojinin aksiyomatik tanımı ilk olarak Hausdorff tarafından 1914 yılında verilmiştir. Topolojinin analizden geometriye matematiğin pek çok dalında uygulama alanı bulunmaktadır. Topolojinin temel yapı taşı açık kümelerdir. Topolojik uzaylar, üzerinde uzaklık fonksiyonunun tanımlı olmadığı veya bu fonksiyonun tanımlı olduğu uzayların genellemesi olarak düşünülebilir. Topolojik uzayların en iyi bilinen örneklerinden biri metrik uzaylardır. Metrik uzaylar, matematiğin klasik analiz, geometri ve lineer cebir gibi dallarında kullanılan yöntemlerin sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi sonucu ortaya çıkan fonksiyonel analiz dalında önemli bir yere sahiptir.

İlk olarak 1906 yılında Frechet'in herhangi nesnelerden oluşan kümeler üzerinde yeni bir yapı (metrik) tanımlamasıyla Öklid uzaylarından farklı uzaylara geçilmiştir. Klasik analizde karşılaşılan temel kavramlardan biri olan limit kavramının temeli $\mathbb{R}$ de veya daha genel olarak $\mathbb{R}^n$ de iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonuna dayanır. Dolayısıyla limit kavramı $\mathbb{R}^n$ nin cebirsel yapısına değil de topolojik yapısına bağlıdır. Bu tür kavramları daha genel bir uzaya taşımak için boştan farklı bir X kümesi üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanarak modern matematiğin temelini oluşturan metrik uzay yapısı geliştirilmiştir.

Burada ele alınan X kümesinin $\mathbb{R}^n$ nin sahip olduğu gibi cebirsel bir yapıya (vektörel toplam, skaler çarpım) sahip olması gerekmez. Fakat literatürde karşılaşılan birçok metrik uzay aynı zamanda bir vektör uzayıdır (Bir vektör uzayı üzerinde toplama ve skalerle çarpma cebirsel işlemlerinin tanımlı olduğu ve bu işlemlerin belli özellikleri sağladığı bir uzaydır). Bu tür uzaylarda metrik, norm adı verilen çok daha basit bir fonksiyon tarafından üretilir. Norm fonksiyonu vektör uzayın her bir vektörüne bir uzunluk karşılık getiren dönüşümdür. Ayrıca her bir metrik uzay üzerinde tanımlanan metrik fonksiyonu yardımıyla bir topolojik uzay oluşturur. Uzaklık fonksiyonuna ihtiyaç duyulmayan durumlarda metrik uzaylardan daha genel olan topolojik uzaylar üzerinde çalışılabilir. Ancak bazı soyut kavramlar topolojik uzaylarda zor anlaşılır olduğundan ve bu kavramlar metrik uzaylarda somut geometrik örnekler verilerek basite indirgenebildiğinden metrik uzaylar üzerinde çalışmak daha uygundur.

Matematik biliminde klasik analizden modern analize geçişte ve uygulamalı bilimlerde metrik uzaylar önemli role sahiptir. Topolojinin temel kavramlarının pek çoğu metrik uzaylardan aktarılmış olmasına rağmen metrik uzay kavramı önemini korumuştur. Bu nedenle metrik kavramı çeşitli yollarla genelleştirilerek yeni uzaklık kavramları tanımlanmıştır. Bunlardan biri 1930'larda ortaya atılan asimetrik (simetrik olmayan) uzaklık fonksiyonudur. Asimetrik metrik uzay kavramı ilk olarak Wilson [4] tarafından verilmiştir. Daha sonrasında birçok yazar bu tür uzayların teorisini geliştirmek için kapsamlı bir şekilde çalışmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Albert [9], Bodjanova [10], Doitchinov [11], Künzi [12, 13], Künzi ve Yıldız [14, 15], Künzi ve ark. [16], Mennucci [17], Reilly ve Vamanamurthy [18], Romaguera [19, 20], Romaguera ve Gutierrez [21], Stoltenberg [22] tarafından yapılmıştır. Ayrıca asimetrik normlu uzaylar için [23, 24, 25, 26] nolu çalışmalara bakılabilir.

Asimetrik metrik kavramı sadece matematik alanında yoğun bir araştırma konusu olmamakla beraber aynı zamanda bilgisayar bilimi, madde bilimi gibi bilimin diğer farklı dallarında da araştırma konusu olmuştur. Uygulamalı matematik ve madde bilimi alanında asimetrik metrik uzayların birçok yeni uygulaması vardır (bkz. [27, 28, 29, 30]). Biyolojide amino asit dizilimleri ve DNA dizilimleri gibi biyolojik dizilimler arasındaki uzaklıkları ölçmek için asimetrik metrik kavramı kullanılmıştır. Biyolojik kökenli asimetrik metrikler Waterman, Smith ve Beyer [31] tarafından çalışılmıştır. Ayrıca uzay-zaman yapısı ile asimetrik metriğin alakasını görmek için Domiaty'nin [32, 33] nolu çalışmalarına bakılabilir.

Bu tür uzaklıklar pratik uygulamalarda faydalı olabilir. Günlük hayatta yaygın olarak karşımıza çıkan asimetrik metrik örnekleri vardır. Caddelerin tek yönlü çalıştığı bir şehirde belli bir A mevkiinden belli bir B mevkiine giden yol ile B mevkiinden A mevkiine giden yol farklı olacağından böyle bir şehirde iki mevkii arasındaki uzaklık bir asimetrik metrik örneğidir fakat bu uzaklık fonksiyonu metrik değildir [34].

Bu yeni uzaklık fonksiyonu tanımında metriğin simetri şartı kaldırıldığından dolayı metrik uzaylar için ispatlanan birçok teorem kolay bir şekilde ispat edilememektedir ve hatta bazı teoremler bu yeni uzay için geçerli değildir. Örneğin; kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramı metrik uzaylarda çakışırken asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık dizisel kompaktlığı gerektirir (asimetrik metrik uzay birinci sayılabilir olduğundan). Fakat bu ifadenin karşıtı her zaman doğru değildir. Ayrıca asimetrik metrik üç farklı topoloji ürettiği için bu tip uzaylar üzerinde birçok farklı tamlık kavramı tanımlanabilmektedir. Asimetrik metrik uzaylardaki bu farklılıklara rağmen, tamlık, kompaktlık ve tamamen sınırlılık (ön kompaktlık) ile ilgili metrik uzaylardaki gibi birçok olumlu sonuçlar vardır [35].

Sonlu niceliklerle çalışmak sonsuzlarla çalışmaktan çok daha kolaydır. Benzer şekilde metrik kavramlarını kompakt metrik uzaylarda araştırmak keyfi metrik uzaylarda araştırmaktan genellikle daha kolaydır. Örneğin; klasik analizde süreklilik kavramı genelde kompakt olan $[a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı fonksiyonları çalışırken incelenir. Klasik analizin en önemli teoremlerinin birçoğu kapalı sınırlı aralıklar için ispat edilmiştir. Kompakt uzayların önemli özelliklerinin olmasının yanı sıra kompaktlığın kendisi topolojik uzaylarda mevcut olan zayıf yapıyı gidermek için uygun hale getirilmiş kuvvetli bir özelliktir. Bir metrik ele alındığında metrik yapıya uyarlanmış daha zayıf bir özellik ile kompaktlığın avantajlarının çoğunu elde etmek mümkündür. Kompaktlık gibi bu yeni zayıf özellik limitin varlığını sağlar. Bu zayıf özelliği sağlayan uzaylara tam metrik uzaylar denir. Temel özellikleri ile kompakt metrik uzaylar ve tam metrik uzaylar tüm matematikçiler tarafından iyi bilinmektedir. Tam metrik uzaylar mantık, sabit nokta teorisi, bilgisayar bilimi, kuantum mekaniği gibi özellikle matematiğin fonksiyonel analiz ve diğer bilimlerin birçok dalında önemlidir. Fonksiyonel analizde çeşitli uygulaması olan birçok temel sonucun ispatlanmasında tam metrik uzaylar önemli rol oynar. Sürekli fonksiyonların davranışlarını incelerken elde edilen Baire kategori teoremi tam metrik uzayların yapısını aydınlatmak için çok önemli bir özelliktir. Ayrıca Banach sabit nokta teoremi tam metrik uzaylar teorisi için kullanışlı bir özelliktir. Lineer eşitsizlikler, optimizasyon ve yaklaşım teorisi gibi alanlarda çok fazla uygulaması olması nedeni ile sabit nokta teorisindeki ilerleme oldukça ilgi çekmiş ve birçok çalışma yapılmıştır (bkz. [36, 37, 38, 39, 40, 41]). Kompaktlık kavramı da metrik uzaylar teorisinde etkili role sahiptir. Bilindiği üzere kompakt metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir [42]. Fakat bir metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olması için kompaktlık gerekli değildir. Örneğin; sonsuz elemanlı ayrık metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyon aynı zamanda düzgün süreklidir fakat ayrık uzay kompakt değildir [2]. Üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyonun düzgün sürekli olduğu metrik uzayları karakterize etmek için ilk çalışma Nagata [43] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Monteiro ve Peixoto [44] bu tür uzayların dört yeni karakterizasyonunu vermiştir. Bu çalışmada bir metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyonun düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şartın uzayın her açık örtüsünün bir Lebesgue sayısına sahip olması gerektiği ispat edildiğinden bu tür uzaylar [45] ve [46] nolu çalışmalarda Lebesgue uzayları olarak adlandırılmıştır. 1958 yılında Atsuji [1] tarafından bu uzayların birçok yeni karakterizasyonu verilmiştir. Beer bu uzayları [47] ve [48] de Atsuji uzayı olarak adlandırırken [49] ve [50] da birçok matematikçi gibi (örneğin [51]) UC uzayı olarak adlandırmıştır. [52] nolu çalışmada bu tür uzayların farklı karakterizasyonları verilmiştir. Kundu ve Jain [2] hazırlamış oldukları araştırma makalesinde bu tür metrik uzaylara denk olan 25 şartı bir araya toplamıştır.

Her kompakt metrik uzay tamdır fakat tam olup kompakt olmayan metrik uzaylar vardır. Tamlıktan daha kuvvetli kompaktlıktan daha zayıf özellikleri sağlayan metrik uzaylar birçok matematikçi tarafından araştırılmaktadır ve yıllardır birçok makalenin araştırma konusu olmuştur. Bu tür uzayların taşıdığı önem nedeniyle birçok yazar bu uzayların çeşitli karakterizasyonları üzerine çalışmıştır. Bu uzaylara örnek olarak Atsuji uzayları verilir. Bunun dışında Beer [53] kofinal tam olarak adlandırılan "her kofinal Cauchy dizisinin yakınsak alt dizisinin var olduğu" metrik uzayların birkaç yeni karakterizasyonunu vermiştir. Atsuji ve kofinal tam uzayların yanı sıra sınırlı kompakt, düzgün yerel kompakt, kuvvetli kofinal tam [48] metrik uzaylarda kompakt ve tam uzaylar arasında yer alan önemli uzay örnekleridir. Bu uzayların hepsi konveks analiz, optimizasyon teorisi ve hiperyüzeyler üzerindeki yakınsama yapıları ortamındaki problemler ile bağlantılıdır (bkz. [54]). Metrik uzaylar için bir özelliğin tamlıktan daha kuvvetli olmasını sağlamanın bir yolu uzaydaki Cauchy dizileri sınıfından daha genel bir sınıfa ait olan tüm dizilerin yakınsak alt dizilerinin bulunmasıdır. Bu amaçla Garrido ve Merono [3] metrik uzaylarda Bourbaki Cauchy ve kofinal Bourbaki Cauchy dizisi tanımlarını vererek bu genelleştirilmiş Cauchy dizileri yardımıyla farklı iki tamlık kavramı sunmuştur. Böylece Bourbaki tam ve kofinal Bourbaki tam olarak adlandırılan bu uzaylar da bu ara özelliği sağlayan uzaylara örnek olmuştur.

Metrik uzay teorisinde sınırlı kümelerin sınıfı, tamamen sınırlı (ön kompakt) kümelerin sınıfı ve Bourbaki sınırlı kümelerin sınıfı önemli bir yere sahiptir. Bourbaki sınırlılık kavramı ilk olarak Atsuji [1] tarafından, üzerinde tanımlı tüm düzgün sürekli fonksiyonların sınırlı olduğu metrik uzayları karakterize etmek için tanımlanmıştır. Atsuji bu çalışmada, Bourbaki sınırlı uzayı sonlu zincirlenebilir metrik uzay olarak adlandırmıştır. Bourbaki sınırlılık ismi, bu kümelerin düzgün uzaylarda düşünüldüğü Bourbaki'nin [55] de verilen kitabından gelir. Bu uzaylar Hejcman [56] tarafından, düzgün uzaylarda basitçe sınırlı adı altında çalışılmıştır. Tamamen sınırlı kümelerin Cauchy dizileri yardımıyla karakterize edildiği gibi (bkz. [57]) Garrido ve Merono [3] Bourbaki Cauchy ve kofinal Bourbaki Cauchy dizileri yardımıyla Bourbaki sınırlılığı karakterize etmiştir. Bu yeni diziler de aslında bir metrik uzayda Bourbaki sınırlı kümeler düşünüldüğünde ortaya çıkmıştır.

Alışılmış yakınsama kavramının genellemesi olarak, Fast [5] ve Steinhaus [6] tarafından reel terimli diziler için istatistiksel yakınsama kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra

Schoenberg [8] bu kavramın bazı temel özelliklerini vererek toplanabilme metodu olarak bu kavramı çalışmıştır. Aslında istatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund'un 1935 de yayınlanan [7] nolu eserine kadar uzanır. Bu kavram Zygmund'un eserinde hemen hemen yakınsama olarak adlandırılmıştır. İstatistiksel yakınsama kavramı 60 yıl önce tanımlanmış olmasına rağmen son 20 yılda aktif araştırma konusu olmuştur. İstatistiksel yakınsama ile ilgili literatürde çok fazla çalışma bulunmaktadır (bunların birkaçı için bkz. [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67]). Birçok matematikçi bu yeni yakınsama kavramını daha genel uzaylara taşımıştır. Topolojik uzaylarda [68], metrik uzaylarda [69, 70, 71], fonksiyon uzaylarında [72], fuzzy normlu uzaylarında [73], 2-normlu uzaylarda [74] ve diğer bazı uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine çalışılmıştır. Bunun yanısıra, istatistiksel yakınsamanın ölçüm teorisi [75], trigonometrik seriler [7], yaklaşım teorisi [76, 77], yerel konveks uzaylar [78], sayılar teorisi [79], optimizasyon teorisi [80], olasılık teorisi [81] gibi matematiğin farklı alanlarında birçok önemli uygulamaları bulunmaktadır. Ayrıca günümüzde matematiğin toplanabilme teorisi alanında istatistiksel yakınsama kavramı üzerine aktif bir şekilde çalışılmaktadır. Bu konu ile ilgili çalışmalar için [82, 83, 84, 85, 86, 87, 88] nolu makalelere bakılabilir.

Asimetrik metrik uzaylarda bir kümenin tamamen sınırlılığı kümenin ön kompakt olmasını gerektirirken metrik uzayların aksine bir kümenin ön kompaktlığı kümenin tamamen sınırlı olmasını gerektirmez (bkz. [89, 90]). Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda ön kompaktlıktan daha zayıf olan dış ön kompaktlık kavramı verilmektedir. Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde asimetrik metrik uzaylarda ön kompaktlık ve sınırlılık arasında yer alan Bourbaki sınırlılık kavramı tanımlanacak ve bu kavram üzerine çalışılacaktır. Bu üç kavram arasındaki ilişki örnekler ile incelenecektir. Benzer şekilde Bourbaki sınırlılıktan daha zayıf olan dış Bourbaki sınırlılık kavramı verilecektir. Metrik uzayların aksine asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki sınırlı kümelerin alt kümelerinin ve asimetrik metriğin ürettiği topolojiye göre kapanışlarının Bourbaki sınırlı olmadığı gösterilecektir. Bu kavramın metrik uzaylarda sağladığı diğer özelliklerin asimetrik metrik uzaylarda sağlanıp sağlanmadığı araştırılacaktır. Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda çeşitli tipte Bourbaki Cauchy ve kofinal Bourbaki Cauchy dizileri tanımlandıktan sonra (dış) Bourbaki sınırlılığın bu diziler yardımıyla karakterize edilip edilemeyeceği tartışılacaktır.

Bu yeni Cauchy dizileri yardımıyla asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki tamlık ve kofinal Bourbaki tamlık tanımlandıktan sonra kompaktlık, dizisel kompaktlık ve düzgün yerel kompaktlık kavramlarına dayanan bazı önemli sonuçlar elde edilecektir.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde asimetrik metrik uzaylar üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanıp çalışılacaktır. Bunun yanı sıra istatistiksel Cauchy dizileri bu simetri şartının sağlanmadığı uzaylar üzerinde düşünülecektir. Tüm bu tanımların ve elde edilen sonuçların alışılmış metrik ile arasındaki benzerlik ve farklılıklar incelenecektir. Asimetrik metrik uzayda bir dizinin istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktaları tanımları verildikten sonra tamlık ve kompaktlık üzerine bazı sonuçlar verilecektir. Son olarak asimetrik normlu uzaylar üzerinde toplanabilme teorisi ile ilgili bazı temel sonuçlar sunulacaktır.

Tezin son bölümünde Bourbaki tam metrik uzayların karakterize edilmesi üzerine çalışılacaktır. Bu amaçla öncelikle metrik uzaylar teorisinde yeni bir kavram olarak istatistiksel Bourbaki Cauchy dizisi tanımı yapılacaktır. Tanımlarından görülecektir ki bir Bourbaki-Cauchy dizisi ya da istatistiksel Cauchy dizisi aynı zamanda istatistiksel Bourbaki Cauchy dizidir. Buna rağmen bir istatistiksel Bourbaki Cauchy dizisi Bourbaki-Cauchy ya da istatistiksel Cauchy dizisi olmak zorunda değildir. Bunlar örneklerle gösterilecektir. Ayrıca istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi yardımıyla bir şart oluşturulacak ve bu şartın Bourbaki tamlığa denk olduğu ispat edilecektir. Son zamanlarda yayınlanan [91] nolu çalışmada Bourbaki sınırlı metrik uzayların üç yeni karakterizasyonu üzerine çalışılmıştır. Bu amaçla çeşitli fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunlardan biri Bourbaki-Cauchy dizilerini koruyan Bourbaki-Cauchy regüler olarak adlandırılan fonksiyonlardır. Son olarak bu tezde istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizilerini koruyan fonksiyonları istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon olarak adlandırdıktan sonra bu fonksiyonlar kullanılarak Bourbaki tamlığın yeni bir karakterizasyonu elde edilecektir. Daha sonra da Bourbaki sınırlı metrik uzaylar bu yeni tip fonksiyon yardımıyla karakterize edilecektir. Bu sonuçlardan önce istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler ve Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon arasındaki ilişki incelenecektir. Sonuç olarak bir Atsuji uzayındaki her dizinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi var olacağı söylenebilecektir. Üstelik kompaktlık kavramı Bourbaki sınırlılık ve Bourbaki tamlık ile karakterize edilebildiğinden "bir metrik uzayın kompakt olması ancak ve ancak uzayın Bourbaki sınırlı ve uzaydaki her dizinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisine sahip olması" şeklinde ifade edilebilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1. TOPOLOJİK UZAYLAR VE METRİK UZAYLAR

Tanım 2.1. [92] X boştan farklı bir küme olmak üzere X in alt kümelerinden oluşan bir τ koleksiyonu

(T1) τ nun elemanlarının herhangi birleşimi τ ya aittir,

(T2) τ nun elemanlarının sonlu kesişimi τ ya aittir,

(T3) $\emptyset$ ve X kümeleri τ ya aittir

şartlarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji ve τ nun elemanlarına açık kümeler denir. (X,τ) ikilisi bir topolojik uzay olarak adlandırılır.

X üzerinde iki topoloji τ_1 ve τ_2 verildiğinde $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_1 topolojisi τ_2 den daha kabadır ya da τ_2 topolojisi τ_1 den daha incedir denir.

Tanım 2.2. [93] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ topolojisine τ dan A üzerine indirgenmiş topoloji veya alt uzay topolojisi denir. (A,τ_A) uzayına da (X,τ) uzayının bir alt uzayı denir.

Tanım 2.3. [92] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve U kümesi X in bir alt kümesi olsun. Eğer U kümesi x noktasını içerecek şekilde bir V açık kümesi kapsıyorsa U ya x in bir komşuluğu denir. x in tüm komşuluklarının koleksiyonu $\mathcal{U}_x$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. [57] (X,τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının her komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa x noktasına A kümesinin kapanış noktası denir. A kümesinin tüm kapanış noktaları kümesine A

kümesinin kapanışı denir ve

$$\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X : \text{her } U \in \mathcal{U}_x \text{ için } A \cap U \neq \emptyset\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5. [92] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer x in her U komşuluğu için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar denir.

Teorem 2.6. [93] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Terimleri A nın elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi varsa $x \in \mathrm{Cl}(A)$ dır.

Not 2.7. [93] Herhangi bir topolojik uzayda $x \in \mathrm{Cl}(A)$ olmasına rağmen A da x noktasına yakınsayan bir dizi olmayabilir.

Tanım 2.8. [92] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathcal{B}_x$ koleksiyonu $\mathcal{U}_x$ in bir alt koleksiyonu olsun. Her bir $U \in \mathcal{U}_x$ bir $V \in \mathcal{B}_x$ kümesi kapsıyorsa $\mathcal{B}_x$ koleksiyonuna x noktasında bir komşuluklar bazı denir.

Tanım 2.9. [92] (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her bir $x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluk bazı varsa X topolojik uzayı birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlar denir.

Tanım 2.10. [93] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

1. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ve $A \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ ise $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ koleksiyonuna A nın bir açık örtüsü denir.
2. $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ koleksiyonu A nın açık bir örtüsü ve $J \subseteq I$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$ koleksiyonu A nın bir örtüsü ise $\mathcal{V}$ örtüsüne $\mathcal{U}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda J sonluysa $\mathcal{V}$ örtüsüne $\mathcal{U}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

Not 2.11. [93] Açık örtü tanımında $A = X$ alınırsa $X \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ ifadesi $X = \cup_{i\in I} U_i$ ifadesine dönüşür.

Tanım 2.12. [93] (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X,τ) uzayına veya kısaca X in kendisine kompakt topolojik uzay denir. $A \subseteq X$ ve (A,τ_A) uzayı kompaktsa A ya X in kompakt alt kümesi denir.

Tanım 2.13. [93] (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına sayılabilir kompakttır denir. $A \subseteq X$ ve (A,τ_A) uzayı sayılabilir kompaktsa A ya X in sayılabilir kompakt alt kümesi denir.

Not 2.14. [93] Kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık tanımları gereğince her kompakt uzay sayılabilir kompakttır.

Tanım 2.15. [93] (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X uzayına dizisel kompakttır denir. $A \subseteq X$ olmak üzere (A,τ_A) uzayı dizisel kompaktsa A kümesine (X,τ) uzayının dizisel kompakt alt kümesi denir.

Önerme 2.16. [94]

1. Dizisel kompakt her topolojik uzay sayılabilir kompakttır.
2. Sayılabilir kompakt bir topolojik uzay birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyorsa dizisel kompakttır.

Tanım 2.17. [93] (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

1. $x \neq y$ özelliğindeki her $x,y \in X$ noktaları için

$$x \in U \text{ ve } y \notin U \text{ veya } y \in U \text{ ve } x \notin U$$

   olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa bu uzaya bir T_0-uzayı denir.
2. $x \neq y$ özelliğindeki her $x,y \in X$ noktaları için

$$x \in U, y \notin U \text{ ve } y \in V, x \notin V$$

   olacak şekilde bir $U,V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya bir T_1-uzayı denir.
3. $x \neq y$ özelliğindeki her $x,y \in X$ noktaları için

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

   olacak şekilde bir $U,V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya bir T_2-uzayı veya Hausdorff uzayı denir.

4. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ özelliğindeki kapalı her F_1, F_2 kümeleri için

$$U \cap V = \emptyset, F_1 \subseteq U \text{ ve } F_2 \subseteq V$$

olacak şekilde bir $U, V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya normal uzay denir.

Teorem 2.18. [93] Her metrik uzay bir normal uzaydır.

Teorem 2.19. [95] (X, τ) normal topolojik uzay, Y kapalı bir alt küme ve $f : Y \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun X uzayına sürekli bir genişlemesi vardır.

Tanım 2.20. [96] X boş olmayan bir küme olmak üzere

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını gerçekliyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, üzerinde d metriği tanımlı olan X kümesine metrik uzay denir.

Tanım 2.21. [96] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer

$$\{d(x,y) : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

kümesinin bir üst sınırı var ise A kümesine sınırlı küme denir ve bu durumda

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

sayısına da A kümesinin çapı denir. Eğer X sınırlı ise (X, d) metrik uzayına sınırlı metrik uzay denir. Diğer bir ifade ile çapı sonlu olan kümeye sınırlı bir küme denir.

Tanım 2.22. [96] (X, d) ve (X', d') metrik uzaylar ve $f : (X, d) \to (X', d')$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(X)$ kümesi sınırlı ise f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.23. [96] (X,d) ve (X',d') iki metrik uzay, $f:(X,d)\to(X',d')$ ve $a\in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için $d(x,a)<\delta$ olduğunda $d'(f(x),f(a))<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her bir noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde sürekli ya da kısaca süreklidir denir.

Tanım 2.24. [57] (X,d) metrik uzay, bir $a\in X$ noktası ve bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

$$B_d(a,\varepsilon)=\{x\in X : d(a,x)<\varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ε yarıçaplı bir açık yuvar denir.

Tanım 2.25. [93] (X,d) metrik uzay ve $U\subseteq X$ olsun. Her $x\in U$ için $B_d(x,\varepsilon)\subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı varsa U kümesine d-açık küme veya kısaca açık küme denir.

Tanım 2.26. [93] (X,d) metrik uzay olsun.

$$\tau_d=\{U\subseteq X : U \text{ kümesi } (X,d) \text{ uzayında açıktır}\}$$

koleksiyonu X üzerinde bir topolojidir ve d metriğinin ürettiği topoloji (metrik topoloji) olarak adlandırılır.

Tanım 2.27. [97] (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$ ise başka bir deyişle eğer her $\varepsilon>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 2.28. [97] (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n,m\geq n_0$ olduğunda $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.29. [97] Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse X metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Teorem 2.30. [97] Bir (X,d) metrik uzayı ve boş olmayan $A\subseteq X$ alt kümesi verilsin. $x\in \mathrm{Cl}(A)$ olması için gerek ve yeter şart A içinde x e yakınsayan bir (x_n) dizinin varolmasıdır.

Teorem 2.31. [93] Bir (X,d) metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır.

Not 2.32. [93] Her (X,d) metrik uzayı birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağladığından (X,d) metrik uzayının sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır.

Tanım 2.33. [98] (X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Sonlu bir $B = \{x_1, ..., x_n\}$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \varepsilon)$ ise B kümesine A için bir ε-ağı denir.

Tanım 2.34. [98] (X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için A nın en az bir ε-ağı varsa A ya tamamen sınırlı (ön kompakt) bir küme denir.

Tanım 2.35. [1, 99] (X,d) metrik uzay, $m \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $i = 1, ..., m$ için $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ olmak üzere X de $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sıralı noktalarının kümesine x_0 dan x_n ye m-uzunluğunda ε-zincir denir. X in her iki eleman çifti bir ε-zincir ile bağlanabiliyorsa X e ε-zincirlenebilir denir. Eğer X her $\varepsilon > 0$ için ε-zincirlenebilir ise X e zincirlenebilir denir.

Tanım 2.36. [3] (X,d) metrik uzayında bir $B_d(x,\varepsilon)$ açık yuvarının m. ε-genişlemesi $B_d^1(x,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon)$ ve $m \geq 2$ için $B_d^m(x,\varepsilon) = (B_d^{m-1}(x,\varepsilon))^{\varepsilon} = \cup\{B_d(y,\varepsilon) : y \in B_d^{m-1}(x,\varepsilon)\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.37. [1, 100] (X,d) metrik uzay ve B, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_d^m(x_i, \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve sonlu bir $F = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ kümesi varsa B kümesine X in Bourbaki sınırlı alt kümesi denir.

Bourbaki sınırlı kümeler [1] nolu çalışmada sonlu zincirlenebilir kümeler olarak adlandırılır.

Metrik uzayda ön kompakt kümeler Bourbaki sınırlıdır ve Bourbaki sınırlı kümeler sınırlıdır. Fakat bu iki ifadenin karşıtının doğru olması gerekmez.

Örnek 2.38. [101] X sonsuz boyutlu Banach uzayı olsun. Bu uzayda kapalı birim yuvar kompakt değildir. Dolayısıyla ön kompakt değildir. Fakat kapalı birim yuvar Bourbaki sınırlıdır. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $m \in \mathbb{N}$ sayısı $1 < m\varepsilon$ olacak şekilde seçilirse kapalı birim yuvar sıfır merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvarın m. ε-genişlemesi tarafından kapsanır.

Örnek 2.39. [101] $\mathbb{R}$ üzerinde $\tilde{d}(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$ olarak tanımlanan $\tilde{d}$ metriği alınsın. Bu metriğe göre $\mathbb{R}$ nin her alt kümesi sınırlıdır. Fakat bu metriğe göre $\mathbb{R}$ nin Bourbaki sınırlı alt kümeleri sadece mutlak değer metriğine göre sınırlı olan kümelerdir.

Tanım 2.40. [3] (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) dizisi X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B_d^m(x,\varepsilon)$ olacak şekilde $m, n_0 \in \mathbb{N}$ sayıları ve bir $x \in X$ noktası varsa (x_n) dizisine X de bir Bourbaki-Cauchy dizisi denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B_d^m(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı, sonsuz bir $\mathbb{N}_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası varsa (x_n) dizisine X de bir kofinal Bourbaki-Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.41. [3] (X,d) bir metrik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. B, X in Bourbaki sınırlı alt kümesidir.
2. B nin sayılabilir her alt kümesi X de Bourbaki sınırlıdır.
3. B deki her dizinin X de Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.
4. B deki her dizi X de kofinal Bourbaki-Cauchy dizisidir.

Not 2.42. [3] (X,d) bir metrik uzay ve $B \subseteq X$ olsun.

1. X in tamamen sınırlı (ön kompakt) her alt kümesi X de Bourbaki sınırlıdır. X in Bourbaki sınırlı her alt kümesi X de sınırlıdır.
2. B, X in Bourbaki sınırlı bir alt kümesi ve $A \subseteq B$ ise A, X de Bourbaki sınırlıdır.
3. B, X in Bourbaki sınırlı bir alt kümesi ise B nin X de kapanışı da Bourbaki sınırlıdır.

Tanım 2.43. [3] Eğer X deki her Bourbaki-Cauchy dizisinin X de yakınsak bir alt dizisi varsa (X,d) metrik uzayına Bourbaki tam denir. Eğer X deki her kofinal Bourbaki-Cauchy dizisinin X de yakınsak bir alt dizisi varsa (X,d) metrik uzayına kofinal Bourbaki tam denir.

Teorem 2.44. [3] (X,d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X kompakttır.
2. X tamamen sınırlı ve tamdır.
3. X Bourbaki sınırlı ve Bourbaki tamdır.

Tanım 2.45. [99] (X,d) ve (X',d') iki metrik uzay ve $f:(X,d)\to(X',d')$ bir fonksiyon olsun. (X,d) metrik uzayındaki her (x_n) Bourbaki-Cauchy dizisi için $(f(x_n))$ dizisi (X',d') metrik uzayında bir Bourbaki-Cauchy dizisi oluyorsa f fonksiyonuna Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon denir.

Teorem 2.46. [99] (X,d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (X,d) Bourbaki tamdır.
2. (X,d) metrik uzayından (X',d') zincirlenebilir metrik uzayına tanımlı sürekli her fonksiyon Bourbaki-Cauchy regülerdir.
3. (X,d) metrik uzayından $\mathbb{R}$ standart metrik uzayına tanımlı sürekli her fonksiyon Bourbaki-Cauchy regülerdir.

2.2. METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.47. [102] $A\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere A kümesine ait n den küçük ya da eşit olan pozitif tam sayıların sayısı $A(n)$ ile gösterilsin. $\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$ limiti mevcut ise A kümesinin doğal yoğunluğu vardır denir. A kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A)$ ile gösterilir ve $\delta(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$ dır.

Not 2.48. Tez çalışması boyunca B kümesinin eleman sayısı $|B|$ ile gösterilecektir. Dolayısıyla $A(n)=|\{k\leq n:k\in A\}|$ dır.

Tanım 2.49. [71] (X,d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x\in X$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $A_\varepsilon=\{n\in\mathbb{N}:d(x_n,x)\geq\varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(A_\varepsilon)=0$ ise (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum st-$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ile gösterilir.

Aşağıda istatistiksel yakınsak olup yakınsak olmayan bir dizi örneği verilmiştir.

Örnek 2.50. [58]

$$x_k=\begin{cases}1, & k=m^2\\ 0, & k\neq m^2\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi yakınsak değildir. Fakat her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. O halde (x_k) dizisi 0 a istatistiksel yakınsaktır.

Lemma 2.51. [71] (X,d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. st-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ise $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ ve $\delta(\{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}) = 1$ olacak şekilde (x_n) nin (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

Tanım 2.52. [71] (X,d) metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = \{n : d(x_n, x_{n_\varepsilon}) \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(A_\varepsilon) = 0$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.53. [69] (X,d) metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Keyfi bir $x \in X$ ve öyle bir $M > 0$ için $A = \{n : d(x_n, x) \geq M\}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ ise (x_n) dizisi istatistiksel sınırlıdır denir.

2.3. ASİMETRİK METRİK UZAYLAR VE ASİMETRİK NORMLU UZAYLAR

Tanım 2.54. [35] X boştan farklı bir küme ve $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için ρ dönüşümü

(AM1) $\rho(x,x) = 0$

(AM2) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

şartlarını sağlıyorsa ρ dönüşümüne X üzerinde bir asimetrik yarı metrik adı verilir ve bu durumda (X,ρ) ikilisine bir asimetrik yarı metrik uzay denir. Eğer ρ dönüşümü

(AM3) $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0 \Rightarrow x = y$

şartını da sağlıyorsa ρ dönüşümüne X üzerinde bir asimetrik metrik adı verilir ve bu durumda (X,ρ) ikilisine bir asimetrik metrik uzay denir.

$\bar{\rho}(x,y) = \rho(y,x)$ ile tanımlı $\bar{\rho} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dünüşümü de X üzerinde bir asimetrik (yarı) metriktir ve ρ nun eşlenik asimetrik (yarı) metriği olarak adlandırılır. Ayrıca $\rho^s(x,y) = \max\{\rho(x,y), \bar{\rho}(x,y)\}$ dünüşümü X üzerinde bir (yarı) metriktir [35].

Her $x,y \in X$ için

$$\rho(x,y) \leq \rho^s(x,y) \ \text{ ve } \ \bar{\rho}(x,y) \leq \rho^s(x,y)$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.55. X bir reel vektör uzayı ve $p : X \to \mathbb{R}^+$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için p dönüşümü

(AN1) $p(x) = p(-x) = 0 \Rightarrow x = 0$
(AN2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$
(AN3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

şartlarını sağlıyorsa p dönüşümüne X üzerinde bir asimetrik norm adı verilir ve bu durumda (X,p) ikilisine bir asimetrik normlu uzay denir. Eğer p dönüşümü sadece (AN2) ve (AN3) şartlarını sağlıyorsa p dönüşümüne X üzerinde bir asimetrik yarı norm adı verilir ve bu durumda (X,p) ikilisine bir asimetrik yarı normlu uzay denir.

$\bar{p}(x) = p(-x)$ ile tanımlı $\bar{p} : X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü de X üzerinde bir asimetrik (yarı) normdur ve p nin eşlenik asimetrik (yarı) normu olarak adlandırılır. Ayrıca $p^s(x) = \max\{p(x), \bar{p}(x)\}$ dünüşümü X üzerinde bir (yarı) normdur.

Her $x \in X$ için

$$p(x) \leq p^s(x) \ \text{ ve } \ \bar{p}(x) \leq p^s(x)$$

olduğu açıktır.

X bir vektör uzayı ve p, X üzerinde bir asimetrik norm olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için $\rho_p(x,y) = p(y-x)$ eşitliği ile tanımlanan ρ_p dönüşümü bir asimetrik metriktir. Buna p asimetrik normunun ürettiği asimetrik metrik denir.

(X,ρ) asimetrik metrik uzayında $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere yuvarlar

$$B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\} \text{ ve } B_\rho[x,\varepsilon] = \{y \in X : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır [35].

Tanım 2.56. [35] (X,ρ) asimetrik metrik uzay, $V \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $B_\rho(x,r) \subseteq V$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa V kümesine x noktasının ρ-komşuluğu denir.

Tanım 2.57. [35] (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $B_\rho(x,r) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa G kümesine ρ-açık küme denir.

Bir X kümesi üzerindeki her bir ρ asimetrik metriği alışılmış yöntemle bir topoloji üretir. Dolayısıyla, X kümesi üzerindeki bir ρ asimetrik metriğinin ürettiği topoloji X in ρ-açık alt kümelerinden oluşur. Bu topoloji τ_ρ ile gösterilecektir. Benzer şekilde, (X,ρ) asimetrik metrik uzayı verildiğinde $\bar{\rho}$ eşlenik asimetrik metrik kullanılarak X üzerinde bir başka topoloji $\tau_{\bar{\rho}}$ tanımlanabilir. Ayrıca X üzerinde ρ^s metriğinin ürettiği topoloji τ_{ρ^s} ile gösterilecektir.

τ_ρ ve $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojileri ile bir uzay olarak (X,ρ) asimetrik metrik uzayı [103] de tanımlanan anlamda bir bitopolojik uzay olarak görülür.

Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerinde büyük öneme sahip bir asimetrik norm örneği verilmiştir. Ayrıca bu örnekten

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times X \to X \\ & (\alpha, x) \mapsto \alpha x \end{aligned}$$

dönüşümünün sürekli olmadığı ve bu nedenle asimetrik normlu uzayın bir topolojik vektör uzayı olması gerekmediği sonucuna varılır.

Örnek 2.58. [35] $X = \mathbb{R}$ üzerinde u asimetrik normu $u(\alpha) = \alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\bar{u}(\alpha) = \alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$ ve $u^s(\alpha) = |\alpha|$ olur. u tarafından üretilen topoloji τ_u, $\mathbb{R}$ nin üst limit topolojisi ve $\bar{u}$ tarafından üretilen topoloji $\tau_{\bar{u}}$, $\mathbb{R}$ nin alt limit topolojisidir. $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasının bir u-komşuluklar bazı $\varepsilon > 0$ için $(-\infty, \alpha+\varepsilon)$ açık aralıkları ile oluşturulur. $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasının bir $\bar{u}$-komşuluklar bazı $\varepsilon > 0$ için $(\alpha-\varepsilon, +\infty)$ açık aralıkları ile oluşturulur.

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noktasının keyfi bir u-komşuluğu $V = (-\infty, \alpha\beta+\varepsilon)$ olmak üzere yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için α ve β nın u-komşulukları $-n$ sayısını içerir fakat yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 = (-n)(-n) \notin V$ dir. Bu ise skalerle çarpımın sürekli olmadığını gösterir.

Önerme 2.59. [35] (X, ρ) asimetrik metrik uzay olsun.

1. Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B_\rho(x, \varepsilon)$ yuvarı ρ-açık ve $B_\rho[x, \varepsilon]$ yuvarı $\bar{\rho}$-kapalıdır. Ayrıca
$$B_{\rho^s}(x, \varepsilon) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon) \ \text{ ve } \ B_{\rho^s}(x, \varepsilon) \subseteq B_{\bar{\rho}}(x, \varepsilon)$$
kapsamaları sağlanır.
2. a) τ_{ρ^s} topolojisi τ_ρ ve $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojilerinden daha incedir. Yani herhangi ρ-açık (kapalı) küme ρ^s-açıktır (kapalıdır) ve herhangi $\bar{\rho}$-açık (kapalı) küme ρ^s-açıktır (kapalıdır).
   b) X de bir (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına ρ^s-yakınsaktır ancak ve ancak x noktasına ρ-yakınsak ve $\bar{\rho}$-yakınsaktır.
3. a) τ_ρ ve $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojileri T_0 dır fakat bu topolojilerin T_1 olması gerekmez (bu nedenle de metrik uzaylardaki durumun aksine T_2 olması gerekmez).
   b) τ_ρ topolojisi T_1 dir ancak ve ancak $x \neq y$ iken $\rho(x, y) > 0$ dır. Bu durumda $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojisi de T_1 dir.

Not 2.60. $B_\rho[x, \varepsilon]$ yuvarının ρ-kapalı olması gerekmez.

Örnek 2.61. [35] Örnek 2.58 de verilen asimetrik normlu uzayda $B_u[0, 1] = (-\infty, 1]$ yuvarının tümleyeni $\mathbb{R} \backslash B_u[0, 1] = (1, +\infty) = B_{\bar{u}}(2, 1)$ $\bar{u}$-açıktır fakat u-açık değildir. Dolayısıyla $B_u[0, 1]$ yuvarı u-kapalı değildir.

Tanım 2.62. [104] (X, ρ) asimetrik metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ olan bütün $n \in \mathbb{N}$ sayıları için $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ $(\rho(x_n, x) < \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına sol (sağ) ρ-yakınsaktır denir.

Sol ρ-yakınsama τ_ρ topolojisine göre yakınsaklık iken sağ ρ-yakınsama $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojisine göre yakınsaklıktır.

Tanım 2.63. [104] (X,ρ) asimetrik metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

1. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı ve bir $x \in X$ noktası $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ $(\rho(x_n,x) < \varepsilon)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) ρ-Cauchy dizisi denir.
2. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n_0},x_n) < \varepsilon$ $(\rho(x_n,x_{n_0}) < \varepsilon)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine zayıf sol (sağ) K-Cauchy dizisi denir.
3. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq k \geq n_0$ özelliğindeki her $n,k \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_k,x_n) < \varepsilon$ $(\rho(x_n,x_k) < \varepsilon)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) K-Cauchy dizisi denir.
4. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n,k \geq n_0$ özelliğindeki her $n,k \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_k,x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine ρ^s-Cauchy dizisi denir.

Önerme 2.64. [104] (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun.

1. Bu uzayda bir dizi

$$\begin{aligned} \rho^s\text{-Cauchy} &\Rightarrow \text{sol (sağ) } K\text{-Cauchy} \\ &\Rightarrow \text{zayıf sol (sağ) } K\text{-Cauchy} \Rightarrow \text{sol (sağ) } \rho\text{-Cauchy} \end{aligned}$$

   dir.
2. Bu uzayda bir dizinin ρ asimetrik metriğine göre belli bir anlamda sol Cauchy olması için gerek ve yeter şart dizinin $\bar{\rho}$ eşlenik asimetrik metriğine göre aynı anlamda sağ Cauchy olmasıdır.
3. Bir dizinin ρ^s-Cauchy olması için gerek ve yeter şart hem sol hem de sağ K-Cauchy olmasıdır.
4. Sol ρ-yakınsak dizi sol ρ-Cauchy dizisi ve sağ ρ-yakınsak dizi sağ ρ-Cauchy dizisidir.

Tanım 2.65. [104] (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun.

1. Eğer bu uzaydaki her sol (sağ) ρ-Cauchy dizisi sol ρ-yakınsak ise X e sol (sağ) ρ-dizisel tam denir.
2. Eğer bu uzaydaki her zayıf sol (sağ) K-Cauchy dizisi sol ρ-yakınsak ise X e zayıf sol (sağ) K-dizisel tam denir.
3. Eğer bu uzaydaki her sol (sağ) K-Cauchy dizisi sol ρ-yakınsak ise X e sol (sağ) K-dizisel tam denir.
4. Eğer bu uzaydaki her ρ^s-Cauchy dizisi sol ρ-yakınsak ise X e ρ^s-dizisel tam denir.

Ayrıca bir asimetrik metrik uzayda belli bir anlamda Cauchy dizisi olan her dizinin $\tau_{\bar{\rho}}$ ve τ_{ρ^s} topolojilerine göre yakınsamasıyla tamlığın 14 farklı kavramı daha elde edilir.

Not 2.66. Bir dizinin sol ρ-Cauchy dizisi olması ve sağ $\bar{\rho}$-Cauchy dizisi olması aynı anlama gelirken sol ρ-dizisel tamlık ve sağ $\bar{\rho}$-dizisel tamlık kavramları farklıdır. Çünkü sol ρ-dizisel tamlık; uzaydaki her sol ρ-Cauchy dizisinin τ_ρ topolojisine göre yakınsaması iken sağ $\bar{\rho}$-dizisel tamlık; uzaydaki her sol ρ-Cauchy dizisinin $\tau_{\bar{\rho}}$ topolojisine göre yakınsamasıdır.

Önerme 2.67. [10, 18] (X,ρ) asimetrik metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir sol K-Cauchy dizisi olsun.

1. Eğer (x_n) dizisinin x noktasına sol ρ-yakınsak bir alt dizisi varsa bu durumda (x_n) dizisi de x noktasına sol ρ-yakınsaktır.
2. Eğer (x_n) dizisinin x noktasına sağ ρ-yakınsak bir alt dizisi varsa bu durumda (x_n) dizisi de x noktasına sağ ρ-yakınsaktır.

Önerme 2.68. [19] Bir asimetrik metrik uzayın zayıf sol K-dizisel tam olması için gerek ve yeter şart sol K-dizisel tam olmasıdır.

Tanım 2.69. [35] (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve Y, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$Y \subseteq \cup\{B_\rho(z,\varepsilon) : z \in Z\} \tag{2.1}$$

olacak şekilde Y nin sonlu bir Z alt kümesi bulunabiliyorsa Y kümesine ön kompakt denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için (2.1) sağlanacak şekilde X in sonlu bir Z alt kümesi bulunabiliyorsa Y kümesine dış ön kompakt denir.

Önerme 2.70. [105] (X,ρ) asimetrik metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun.

1. Eğer (x_n) dizisi zayıf sol K-Cauchy ise bu durumda $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ön kompakttır.
2. Eğer (x_n) dizisi sol ρ-yakınsak ise bu durumda $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi dış ön kompakttır.
3. Eğer (x_n) dizisi x noktasına sol ρ-yakınsak ise bu durumda $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ön kompakttır.

Tanım 2.71. [21] (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve Y, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$Y \subseteq \cup_{i=1}^{n} F_i$$

olacak şekilde X in çapı ε dan küçük olan sonlu sayıda F_i alt kümesi varsa Y kümesine tamamen sınırlıdır denir.

Tamamen sınırlılık ön kompaktlığı gerektirir. Gerçekten $i = 1,...,n$ için $d(A_i) < \varepsilon$ ve $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere eğer $Y \subseteq \cup\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ ise $z_i \in A_i \cap Y$ alındığında $Y \subseteq \cup\{B_\rho(z_i,\varepsilon) 1 \leq i \leq n\}$ olur.

Metrik uzaylarda ön kompaktlık, dış ön kompaktlık ve tamamen sınırlılık denk kavramlardır. Asimetrik metrik uzaylarda ise dış ön kompaktlık ön kompaktlıktan kesin olarak daha zayıf iken ön kompaktlık tamamen sınırlılıktan kesin olarak daha zayıftır (bkz. [89]).

Örnek 2.72. [21] $X = \mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik yarı metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ 0, & 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x \leq 0 \text{ ya da } x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < x < 1$ için $X = B_\rho(x, \varepsilon)$ olduğundan X ön kompakttır. Fakat $x \in X \backslash (0,1)$ seçilirse x noktasını içeren X in herhangi F alt kümesi için $d(F) = 1$ dir. O halde X tamamen sınırlı olamaz.

Örnek 2.73. [35] $X = \ell_\infty$ üzerinde ρ asimetrik metriği $\rho(x,y) = \sup_i \max\{y_i - x_i, 0\}$ şeklinde tanımlansın. $x_n = (1,1,...,1,0,...) \in \ell_\infty$ ve $x = (1,1,...,1,...)\ell_\infty$ dizileri alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x, x_n) = 0$ olduğundan ℓ_∞ da (x_n) dizisi x noktasına sol ρ-yakınsaktır. O halde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi dış ön kompakttır. Fakat $\varepsilon = 1/2$ seçilirse sonlu sayıda keyfi $x_{n_1}, ..., x_{n_k} \in A$ $(n_1 < ... < n_k)$ için $\rho(x_{n_i}, x_{n_k+1}) = 1$ $(i = 1, ..., k)$ olduğundan A ön kompakt olamaz.

Önerme 2.74. [21] (X, ρ) ön kompakt asimetrik metrik uzay ise bu uzaydaki her dizinin bir sol ρ-Cauchy alt dizisi vardır. Eğer X sayılabilir ise bu ifadenin tersi de doğrudur.

Tanım 2.75. [35] (X, ρ) asimetrik metrik uzayının her alt kümesi ön kompakt ise X e kalıtımsal olarak ön kompakttır denir.

Önerme 2.76. [12] (X, ρ) asimetrik metrik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X kalıtımsal olarak ön kompakttır.
2. X in sayılabilir her alt kümesi ön kompakttır.
3. X de her dizinin sol K-Cauchy alt dizisi vardır.
4. X de her dizinin zayıf sol K-Cauchy alt dizisi vardır.

Sonuç 2.77. [35] Bir asimetrik metrik uzayın dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart sayılabilir kompakt olmasıdır.

Önerme 2.78. [35] Ön kompakt sayılabilir kompakt asimetrik metrik uzay kompakttır.

Sonuç 2.79. [35] Kompakt asimetrik metrik uzay dizisel kompakttır.

Aşağıda dizisel kompakt olup kompakt olmayan asimetrik metrik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 2.80. [106] ω_1 ilk sayılamaz sıra sayısı olsun. $X = [1, \omega_1)$ üzerinde ρ asimetrik metriği $x < y$ ise $\rho(x,y) = 1$ ve diğer durumlarda $\rho(x,y) = 0$ olarak tanımlansın. (x_n), X de bir dizi ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$\rho(x,x_n) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi x e sol ρ-yakınsaktır. Böylece X dizisel kompakttır. Her $x \in X$ için $B_\rho(x,1) = \{y \in X : y \leq x\}$ sayılabilir bir kümedir. Ayrıca $\{B_\rho(x,1) : x \in X\}$ ailesi X i örter. X sayılamaz olduğundan bu yuvarların sonlu tanesi ile örtülemez. O halde X kompakt değildir.

Sonuç 2.81. [35] Dizisel kompakt T_1 asimetrik metrik uzay kompakttır.

3. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA BAZI YENİ KAVRAMLAR

Asimetrik metrik uzaylarda bir kümenin tamamen sınırlılığı kümenin ön kompakt olmasını gerektirirken metrik uzayların aksine bir kümenin ön kompaktlığı kümenin tamamen sınırlı olmasını gerektirmez. Yani metrik uzaylarda bu iki kavram birbirine denk olurken asimetrik metrik uzaylarda farklı kavramlardır. Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda ön kompaktlıktan daha zayıf olan dış ön kompaktlık kavramı ile karşılaşılmaktadır. Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda ön kompaktlık ve sınırlılık arasında yer alan Bourbaki sınırlılık kavramı tanımlanacaktır. Bu üç kavram arasındaki ilişkiler örnekler ile incelenecektir. Benzer şekilde Bourbaki sınırlılıktan daha zayıf olan dış Bourbaki sınırlılık kavramı verilecektir. Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda çeşitli tipte Bourbaki Cauchy ve kofinal Bourbaki Cauchy dizileri tanımlandıktan sonra (dış) Bourbaki sınırlılığın bu diziler yardımıyla karakterize edilip edilemeyeceği incelenecektir. Son olarak, kompaktlık, dizisel kompaktlık ve düzgün yerel kompaktlık kavramlarına dayanan bazı önemli sonuçlar verilecektir.

3.1. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA BOURBAKI SINIRLILIK

Asimetrik metrik uzayda Bourbaki sınırlılık kavramını tanımlamadan önce sınırlılık kavramı ele alınacaktır. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir A alt kümesinin ρ-sınırlı olması için $A \subseteq B_\rho(x,r)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının ve $r > 0$ sayısının bulunması gerekir (bkz. [107]). Bu tanımın metrik uzayda verilen sınırlılık tanımına denk olmadığına dikkat edilmelidir. Metrik uzayda bir kümenin çapı sonlu ise kümeye sınırlıdır denir. Fakat asimetrik metrik uzayda sınırlı bir kümenin çapının sonlu olması gerekmez. Bunu görmek için $\mathbb{R}$ üzerinde $\rho(x,y) = \max\{y-x,0\}$ olarak tanımlanan ρ asimetrik metriği ve $A = (-\infty,0)$ alt kümesi ele alınsın. $A \subseteq B_\rho(0,1) = (-\infty,1)$ olduğundan A kümesi ρ-sınırlıdır. Diğer tarafdan her $x,y \in A$ için $\rho(x,y) < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısının var olduğu kabul edilsin. A kümesinden $x = -(M+2)$ ve $y = -1$ elemanları seçilirse $\rho(x,y) = M+1 > M$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$ sonlu değildir. Aslında burada $d(A)$ ifadesi A kümesinin ρ^s metriğine göre çapıdır. Dolayısıyla her $x \in X$ ve her $r > 0$ için $B_{\rho^s}(x,r) \subseteq B_\rho(x,r)$ olduğundan asimetrik metrik uzayda ρ^s metriğine göre sınırlı bir küme ρ-sınırlıdır. Fakat verilen bu örnekten asimetrik metrik uzayda bir kümenin ρ-sınırlı olmasının ρ^s metriğine göre sınırlı olmasını gerektirmediği görülür.

Tanım 3.1. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve $x,y \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve bir $m \in \mathbb{N}$ için $\rho(x,a_1) < \varepsilon$, $\rho(a_1,a_2) < \varepsilon$,..., $\rho(a_{m-1},y) < \varepsilon$ olacak şekilde $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1} \in X$ noktaları bulunabiliyorsa x noktası y noktasına m uzunluğunda ε-zincir ile bağlanır denir. x noktası sabit olmak üzere tüm bu y noktalarının kümesi $B^m_\rho(x,\varepsilon)$ ile gösterilir.

Bir A kümesinin ε-genişlemesi

$$A^\varepsilon = \bigcup\{B_\rho(x,\varepsilon) : x \in A\}$$

ile tanımlanır. $m \geq 2$ için $B_\rho(x,\varepsilon)$ ρ-açık yuvarının m. ε-genişlemesi

$$B^m_\rho(x,\varepsilon) = (B^{m-1}_\rho(x,\varepsilon))^\varepsilon = \bigcup\{B_\rho(y,\varepsilon) : y \in B^{m-1}_\rho(x,\varepsilon)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.2. $X = \mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y-x, & x \leq y \text{ ise} \\ 1, & x > y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $\varepsilon \leq 1$ ise $B^m_\rho(x,\varepsilon) = [x,x+m\varepsilon)$ ve $\varepsilon > 1$ ise $B^m_\rho(x,\varepsilon) = (-\infty,x+m\varepsilon)$ dır.

Tanım 3.3. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve Y kümesi X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$Y \subseteq \bigcup\{B^m_\rho(x,\varepsilon) : x \in F\}$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve X kümesinin sonlu bir F alt kümesi bulunabiliyorsa Y kümesine dış ρ-Bourbaki sınırlıdır denir. Burada bulunan F kümesi Y nin bir alt kümesi ise bu durumda Y kümesine ρ-Bourbaki sınırlıdır denir.

Not 3.4. (X,d) metrik uzay ise $z \in B_d^m(x,\varepsilon)$ için $B_d^m(x,\varepsilon) \subseteq B_d^{2m}(z,\varepsilon)$ olduğundan bu iki kavram birbirine denktir. Fakat bu kapsama asimetrik metrik uzayda geçerli değildir.

Örnek 3.5. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. Bu durumda $B_\rho(0,\frac{1}{2}) = [0,\frac{1}{2})$ ρ-açık yuvarı $B_\rho^2(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = [\frac{1}{4},1]$ kümesi tarafından kapsanmaz.

Diğer yandan asimetrik metrik uzaylar için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Lemma 3.6. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında $z \in B_{\bar{\rho}}^m(x,\varepsilon)$ için

$$B_\rho^m(x,\varepsilon) \subseteq B_\rho^{2m}(z,\varepsilon)$$

dır.

İspat. $y \in B_\rho^m(x,\varepsilon)$ olsun. $\rho(x,a_1) < \varepsilon$, $\rho(a_1,a_2) < \varepsilon$,...,$\rho(a_{m-1},y) < \varepsilon$ olacak şekilde $a_1,a_2,...,a_{m-1} \in X$ vardır. Hipotezden, $\bar{\rho}(x,b_1) < \varepsilon$, $\bar{\rho}(b_1,b_2) < \varepsilon$,...,$\bar{\rho}(b_{m-1},z) < \varepsilon$ olacak şekilde $b_1,b_2,...,b_{m-1} \in X$ noktaları bulunur. Dolayısıyla, ρ asimetrik metriğine göre z noktası y noktasına $2m$ uzunluğunda ε-zincir ile bağlanır. Yani $y \in B_\rho^{2m}(z,\varepsilon)$ elde edilir. □

Lemma 3.7. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında her $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$B_\rho^m(x,\varepsilon) \subseteq B_\rho(x,m\varepsilon)$$

dır.

İspat. $y \in B_\rho^m(x,\varepsilon)$ olsun. $\rho(x,a_1) < \varepsilon$, $\rho(a_1,a_2) < \varepsilon$,...,$\rho(a_{m-1},y) < \varepsilon$ olacak şekilde $a_1,a_2,...,a_{m-1} \in X$ vardır. Böylece (AM2) şartından $\rho(x,y) < m\varepsilon$, yani $y \in B_\rho(x,m\varepsilon)$ elde edilir. □

Lemma 3.7 deki kapsamanın tersi sağlanmak zorunda değildir.

Örnek 3.8. $X = \mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x > y \text{ ise} \\ 0, & x \leq y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu uzayda $B^2_\rho(0,1) = [0,+\infty)$ ve $B_\rho(0,2) = \mathbb{R}$ dir.

Önerme 3.9. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında her (dış) ρ-Bourbaki sınırlı küme ρ-sınırlıdır.

İspat. Y dış ρ-Bourbaki sınırlı küme olsun. Bu durumda $\varepsilon = 1$ için $Y \subseteq \cup\{B^m_\rho(x,1) : x \in F\}$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve X kümesinin sonlu bir F alt kümesi bulunur. Lemma 3.7 den $Y \subseteq \cup\{B_\rho(x,m) : x \in F\}$ elde edilir. Dolayısıyla keyfi $y \in Y$ için $\inf\{\rho(x,y) : x \in F\} < m$ dir. F sonlu bir küme olduğundan $\rho(x_0,y) = \inf\{\rho(x,y) : x \in F\}$ olacak şekilde bir $x_0 \in F$ vardır. Böylece $Y \subseteq B_\rho(x_0,m)$ dir. Buradan Y nin ρ-sınırlı olduğu sonucuna varılır. □

Bir asimetrik metrik uzayda ρ-sınırlı olup (dış) ρ-Bourbaki sınırlı olmayan kümeler vardır.

Örnek 3.10. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $\rho(x,y) = \max\{y-x,0\}$ olmak üzere $\tilde{\rho}(x,y) = \min\{1,\rho(x,y)\}$ asimetrik metriği verilsin. Bu durumda $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ nin $\tilde{\rho}$-sınırlı alt kümesidir. Gerçekten, $r > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{N} \subseteq B_{\tilde{\rho}}(x,r) = \mathbb{R}$ elde edilir. Fakat $\varepsilon \leq 1$ seçilirse herhangi $x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $B^m_{\tilde{\rho}}(x,\varepsilon) = (-\infty, x+m\varepsilon)$ olduğundan $\mathbb{N}$ bu kümelerin sonlu tanesi ile örtülemez. Böylece $\mathbb{N}$ dış $\tilde{\rho}$-Bourbaki sınırlı olamaz. Dolayısıyla da $\mathbb{N}$ $\tilde{\rho}$-Bourbaki sınırlı değildir.

Dış Bourbaki sınırlılık ve Bourbaki sınırlılık kavramları (X,p) asimetrik normlu uzayında benzer şekilde tanımlanabilir. Asimetrik metrik uzayların aksine asimetrik normlu uzaylarda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.11. (X,p) asimetrik normlu uzayında her $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$B^m_p(x,\varepsilon) = B_p(x,m\varepsilon)$$

dır.

İspat. Keyfi $y \in B_p(x, m\varepsilon)$ verilsin. $i = 0, ..., m$ için $a_i = \frac{m-i}{m}x + \frac{i}{m}y$ olmak üzere $p(a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{m}p(y-x) < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise x noktasının y noktasına m uzunluğunda ε-zincir ile bağlanabildiğini, yani $y \in B_p^m(x, \varepsilon)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $B_p(x, m\varepsilon) \subseteq B_p^m(x, \varepsilon)$ olur. Ters kapsam Lemma 3.7 den elde edilir. □

Bu lemmanın bir sonucu olarak asimetrik normlu uzaylarda (dış) p-Bourbaki sınırlılık ve p-sınırlılık kavramlarının denk olduğu görülür.

Önerme 3.12. (X, p) asimetrik normlu uzayında her p-sınırlı küme (dış) p-Bourbaki sınırlıdır.

İspat. (X, p) asimetrik normlu uzayında bir Y alt kümesi p-sınırlı ise $Y \subseteq B_p(x, r)$ olacak şekilde $x \in Y$ noktası ve $r > 0$ sayısı bulunur. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{r}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ seçilirse Lemma 3.11 den $Y \subseteq B_p^m(x, \varepsilon)$ olduğu görülür. Dolayısıyla Y kümesi (dış) p-Bourbaki sınırlıdır. □

Asimetrik metrik uzayda her (dış) ρ-ön kompakt kümenin (dış) ρ-Bourbaki sınırlı olduğu tanımlarından kolaylıkla görülebilir. Fakat bir asimetrik metrik uzayda (dış) ρ-Bourbaki sınırlı olup (dış) ρ-ön kompakt olmayan kümeler vardır.

Örnek 3.13. $X = \ell_\infty$ üzerinde $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_\infty$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $(y_i - x_i)^+ = \max\{y_i - x_i, 0\}$ olmak üzere $\rho(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}}(y_i - x_i)^+$ asimetrik metriği verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için x^n dizisi ilk n terimi 1 ve diğer sonsuz terimi 0 olan dizi, yani $x^n = (1, 1, ..., \overset{n.}{1}, 0, 0, ...)$ olsun. $Y = \{x^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_\infty$ kümesinin ρ-ön kompakt olmadığı Örnek 2.73 de gösterilmiştir. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $m\varepsilon > 1$ olmak üzere $Y \subseteq B_\rho^m(x^1, \varepsilon)$ olduğundan Y kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır.

Asimetrik metrik uzayda dış ρ-ön kompaktlığın ρ-ön kompaktlıktan kesin olarak daha zayıf olması durumu dış ρ-Bourbaki sınırlılık ve ρ-Bourbaki sınırlılık için de geçerlidir. Yani her ρ-Bourbaki sınırlı küme dış ρ-Bourbaki sınırlıdır. Fakat dış ρ-Bourbaki sınırlı olup ρ-Bourbaki sınırlı olmayan kümeler vardır.

Örnek 3.14. $X = [0, 1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. $m > 1/\varepsilon$ için $Y = (0, 1) \subseteq B_\rho^m(0, \varepsilon)$ olduğundan Y kümesi dış ρ-Bourbaki sınırlıdır.

Y nin ρ-Bourbaki sınırlı olduğu kabul edilsin. Verilen herhangi $\varepsilon \leq 1$ için $Y \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_{\rho}^{m}(x_i,\varepsilon)$ olacak şekilde sonlu çoklukta $x_1,...,x_n \in Y$ ve $m \in \mathbb{N}$ vardır. Fakat bu durumda $a = \min\{x_i : i = 1,...,n\}$ ve $b = \max\{x_i : i = 1,...,n\}$ olmak üzere $\cup_{i=1}^{n} B_{\rho}^{m}(x_i,\varepsilon) = [a,b+m\varepsilon)$ dır. Y kümesi $[a,b+m\varepsilon)$ ile örtülemeyeceği için bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla Y kümesi ρ-Bourbaki sınırlı değildir.

Teorem 3.15. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında Y kümesinin ρ-Bourbaki sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $Y \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_{\rho}^{m}(x_i,\varepsilon)$ ve $Y \cap B_{\bar{\rho}}^{m}(x_i,\varepsilon) \neq \emptyset$ $(i = 1,...n)$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve X in sonlu bir $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ alt kümesinin bulunmasıdır.

İspat. Gerek şart tanımdan kolaylıkla ispat edilir.

Tersine her bir $i = 1,...n$ için $x_i \in X$ olmak üzere $y_i \in Y \cap B_{\bar{\rho}}^{m}(x_i,\varepsilon)$ alınırsa Lemma 3.6 dan

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\rho}^{m}(x_i,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\rho}^{2m}(y_i,\varepsilon)$$

elde edilir. Bu ise Y nin ρ-Bourbaki sınırlı olduğunu gösterir. □

ρ^s metriğine göre bir kümenin Bourbaki sınırlılığı kümenin hem ρ-Bourbaki sınırlı hem de $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlı olmasını gerektirir. Diğer tarafdan bir asimetrik metrik uzayda hem ρ-Bourbaki sınırlı hem de $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlı olup ρ^s metriğine göre Bourbaki sınırlı olmayan kümeler vardır.

Örnek 3.16. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği ve keyfi $x \in X$ alınsın. Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ seçilsin. $a_i = \frac{ix}{m}$ $(i = 0,...,m)$ olmak üzere $i = 0,...,m-1$ için $\rho(a_i,a_{i+1}) = \frac{x}{m} < \varepsilon$ elde edilir. Böylece X de herhangi x noktası 0 noktasına m uzunluğunda ε-zincir ile bağlanır. Buradan $X = B_{\rho}^{m}(0,\varepsilon)$ olduğu ve dolayısıyla X in ρ-Bourbaki sınırlı olduğu görülür. Benzer şekilde, $X = B_{\bar{\rho}}^{m}(1,\varepsilon)$ olduğu ve böylece X in $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Fakat ρ^s, X üzerindeki ayrık metrik olduğundan X kümesi ρ^s-Bourbaki sınırlı değildir.

Bir asimetrik metrik uzayda ρ-Bourbaki sınırlı olan kümeler $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlı olmayabilir.

Örnek 3.17. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m \in \mathbb{N}$ sayısı $m\varepsilon > 1$ olacak şekilde seçilirse $Y = [0,1) \subseteq B^m_\rho(0,\varepsilon) = [0,1]$ olduğundan Y alt kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır. Fakat herhangi $x \in X$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $B^m_{\bar{\rho}}(x,\varepsilon) = (x - m\varepsilon, x]$ olduğundan Y alt kümesi bu kümelerin sonlu tanesi ile örtülemeyeceğinden $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlı değildir.

Şimdi bir asimetrik metrik uzayda bir kümenin ρ, $\bar{\rho}$ asimetrik metriklerine ve ρ^s metriğine göre Bourbaki sınırlılığı ile ilgili ilişki verilecektir. Burada tanımlanan λ değerinin birden büyük eşit olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.18. (X,ρ), T_1 asimetrik metrik uzayı olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X, ρ-Bourbaki sınırlıdır.
2. X, $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlıdır.
3. X, ρ^s-Bourbaki sınırlıdır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ Eğer X kümesi ρ-Bourbaki sınırlı ise $X = \bigcup_{z\in F} B^m_\rho(z, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve X in sonlu bir F alt kümesi vardır. Hipotez gereği $x \neq y$ olan her $x,y \in X$ için $\bar{\rho}(x,y) \leq \lambda\rho(x,y)$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her $z \in F$ için $B^m_\rho(z,\frac{\varepsilon}{\lambda}) \subseteq B^m_{\bar{\rho}}(z,\varepsilon)$ elde edilir. Buradan $X = \bigcup_{z\in F} B^m_{\bar{\rho}}(z,\varepsilon)$ olduğu görülür. Dolayısıyla X kümesi $\bar{\rho}$-Bourbaki sınırlıdır.

$(2 \Rightarrow 3)$ X kümesinin sonlu bir F alt kümesi ve $m \in \mathbb{N}$ sayısı için $X = \bigcup_{z\in F} B^m_{\bar{\rho}}(z, \frac{\varepsilon}{\lambda}) = \bigcup_{z\in F} B^m_{\rho^s}(z,\varepsilon)$ elde edilir.

$(3 \Rightarrow 1)$ Her $x \in X$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $B^m_{\rho^s}(x,\varepsilon) \subseteq B^m_\rho(x,\varepsilon)$ olduğundan sonuç açıktır. □

Not 3.19. Metrik uzayların aksine asimetrik metrik uzaylarda ρ-Bourbaki sınırlı kümenin alt kümeleri ρ-Bourbaki sınırlı olmayabilir.

Örnek 3.20. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır. Çünkü $m > 1/\varepsilon$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ seçilirse $Y \subseteq B^m_\rho(0,\varepsilon) = X$ elde edilir. Buna rağmen Y kümesinin $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesi $B^m_\rho(\frac{1}{n},\varepsilon) = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + m\varepsilon)$ şeklindeki kümelerin sonlu tanesi ile örtülemeyeceği için ρ-Bourbaki sınırlı değildir.

Not 3.21. Metrik uzayların aksine asimetrik metrik uzaylarda ρ-Bourbaki sınırlı kümenin ρ nun ürettiği topolojiye göre kapanışı ρ-Bourbaki sınırlı olmayabilir.

Örnek 3.22. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $\rho(x,y) = \max\{y-x, 0\}$ asimetrik metriği verilsin. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $(-\infty, 1] \subseteq B_\rho(1,\varepsilon) = (-\infty, 1+\varepsilon)$ kapsaması sağlanacağından $(-\infty, 1]$ kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır. Fakat ρ tarafından üretilen topolojiye göre kapanış τ_ρ-Cl$((-\infty,1]) = \mathbb{R}$ ρ-Bourbaki sınırlı değildir. Gerçekten, bu küme herhangi $x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için sonlu sayıda $B^m_\rho(x,\varepsilon) = (-\infty, x+m\varepsilon)$ ile örtülemez.

Teorem 3.23. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir Y alt kümesinin (dış) ρ-Bourbaki sınırlı olması için gerek ve yeter şart Y kümesinin $\tau_{\bar\rho}$ topolojisine göre kapanışının (dış) ρ-Bourbaki sınırlı olmasıdır.

İspat. Y, X kümesinin ρ-Bourbaki sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için $Y \subseteq \bigcup\{B^m_\rho(x,\varepsilon) : x \in F\}$ olacak şekilde Y nin sonlu bir F alt kümesi ve $m \in \mathbb{N}$ sayısı bulunur. $z \in \tau_{\bar\rho}$-Cl(Y) ise kapanış tanımı gereği $\bar\rho(z,y) < \varepsilon$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. Hipotezden en az bir $x \in F$ için y noktası $B^m_\rho(x,\varepsilon)$ kümesine aittir. Böylece x noktasından z noktasına $m+1$ uzunluğunda bir ε-zincir elde edilir. Dolayısıyla $\tau_{\bar\rho}$-Cl$(Y) \subseteq \bigcup\{B^{m+1}_\rho(x,\varepsilon) : x \in F\}$ sağlanır. Buradan $\tau_{\bar\rho}$-Cl(Y) nin ρ-Bourbaki sınırlı olduğu görülür.

Tersine her $\varepsilon > 0$ için $\tau_{\bar\rho}$-Cl$(Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B^m_\rho(z_i,\varepsilon)$ olacak şekilde $z_i \in \tau_{\bar\rho}$-Cl(Y) noktaları ve $m \in \mathbb{N}$ sayısı bulunsun. Bu durumda $B_{\bar\rho}(z_i,\varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$ dır. Her bir $i = 1,...,n$ için $y_i \in B^m_{\bar\rho}(z_i,\varepsilon) \cap Y$ seçilirse Lemma 3.6 dan $B^m_\rho(z_i,\varepsilon) \subseteq B^{2m}_\rho(y_i,\varepsilon)$ elde edilir. Sonuç olarak Y kümesi sonlu tane $B^{2m}_\rho(y_i,\varepsilon)$ kümesi ile örtülür. Dolayısıyla Y kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır. □

3.2. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA BOURBAKI CAUCHY DİZİLERİ

Asimetrik metrik uzaylarda Cauchy dizileri gibi birden fazla farklı Bourbaki Cauchy dizisi kavramı tanımlanabilir.

Tanım 3.24. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x, \varepsilon)$ ($x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x, \varepsilon)$) olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) ρ-Bourbaki Cauchy dizisi denir.
2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x_{n_0}, \varepsilon)$ ($x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x_{n_0}, \varepsilon)$) olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine zayıf sol (sağ) K-Bourbaki Cauchy dizisi denir.
3. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_{\rho^s}(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine ρ^s-Bourbaki Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.25. (X, ρ) asimetrik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x, \varepsilon)$ ($x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x, \varepsilon)$) olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$ ve $\mathbb{N}$ nin sonsuz $\mathbb{N}_\varepsilon$ alt kümesi bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi denir.
2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x_{n_0}, \varepsilon)$ ($x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x_{n_0}, \varepsilon)$) olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$ nin sonsuz $\mathbb{N}_\varepsilon$ alt kümesi bulunabiliyorsa (x_n) dizisine zayıf sol (sağ) K-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi denir.
3. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B^m_{\rho^s}(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$ ve $\mathbb{N}$ nin sonsuz $\mathbb{N}_\varepsilon$ alt kümesi bulunabiliyorsa (x_n) dizisine ρ^s-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi denir.

Sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin sol $\bar{\rho}$-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olduğu ve ρ asimetrik metriğine göre zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin $\bar{\rho}$ asimetrik metriğine göre zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olduğu tanımlarından anlaşılır.

Bir dizi zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi ise sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisidir. Fakat sol ρ-Bourbaki Cauchy olup zayıf sol K-Bourbaki Cauchy olmayan diziler vardır.

Örnek 3.26. $X = [0, 1]$ üzerinde Örnek 3.8 de tanımlanan ρ asimetrik metriği verilsin. (x_n) terimleri X de olan bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(0, x_n) = 0$ olduğundan (x_n) dizisi 0 noktasına ρ-yakınsaktır. Dolayısıyla bu uzaydaki her dizi sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisidir.

Diğer tarafdan, her $n,m \in \mathbb{N}$ için $B^m_\rho(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2}) = [\frac{1}{2^n},1]$ kümesi dışında $(\frac{1}{2^n})$ dizisinin sonsuz çoklukta terimi olduğundan bu dizi zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi değildir.

Zayıf sol K-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisidir. Fakat sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisinin zayıf sol K-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi olması gerekmez. Aşağıdaki örnek ile ayrıca zayıf sol K-kofinal Bourbaki Cauchy (sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy) olup zayıf sol K-Bourbaki Cauchy (sol ρ-Bourbaki Cauchy) olmayan dizi örneği verilmiştir.

Örnek 3.27. $X = \mathbb{R}$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen asimetrik metrik alınsın.

$(x_n) = (1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},...)$ dizisinin sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy olduğu açıktır fakat bu dizi zayıf sol K-kofinal Bourbaki Cauchy değildir.

$(y_n) = (0,1,0,2,0,3,...)$ sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisi değildir ve bu nedenle zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi de olamaz. Gerçekten, verilen herhangi $m,n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $x+m < \frac{n_1}{2}$ olacak şekilde $n_1 > n$, n_1 çift sayısı bulunabilir. Buradan $y_{n_1} \notin B^m_\rho(x,1) = [x,x+m)$ elde edilir. Fakat bu dizi zayıf sol K-kofinal Bourbaki Cauchy dizisidir ve bu nedenle sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisidir. Bunu görmek için $m = n_0 = 1$ ve $\mathbb{N}_\varepsilon = \{1,3,5,7,...\}$ alınsın. Böylece verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$ olduğunda $y_n \in B_\rho(0,\varepsilon) = [0,\varepsilon)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekte sol ρ-Bourbaki Cauchy olup sol ρ-Cauchy olmayan bir dizi örneği verilmiştir. Ayrıca bu dizi zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisine bir örnektir. Örnek 3.26 da sol ρ-Cauchy dizisi olup zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi olmayan bir dizi verilmişti. Dolayısıyla zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizileri ile sol ρ-Cauchy dizileri arasında bir ilişki olmadığı sonucu çıkar.

Örnek 3.28. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. (x_n) dizisi $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ kümesinin numaranlandırılmasıyla oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için dizinin tüm terimleri $m > 1/\varepsilon$ olduğunda $B^m_\rho(0,\varepsilon) = [0,1]$ tarafından kapsanır. Bu (x_n) dizisinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi ve daha genel olarak sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\varepsilon = 1/2$ ve herhangi $x \in X$ için $B_\rho(x,1/2) = [x,x+1/2)$ kümesi dışında dizinin sonsuz çoklukta terimi mevcut olduğundan bu dizi sol ρ-Cauchy dizisi olamaz.

Eğer (x_n) dizisi ρ^s metriğine göre (kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi ise hem sol ρ-(kofinal) Bourbaki (zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki) Cauchy hem de sağ ρ-(kofinal) Bourbaki (zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki) Cauchy dizisidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için

$$B^m_{\rho^s}(x,\varepsilon) \subseteq B^m_{\rho}(x,\varepsilon) \text{ ve } B^m_{\rho^s}(x,\varepsilon) \subseteq B^m_{\bar{\rho}}(x,\varepsilon) \tag{3.1}$$

kapsamaları sağlanır. Bir dizinin hem sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy (zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy) hem de sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy (zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy) dizisi olması dizinin ρ^s metriğine göre (kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Örnek 3.29. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen ρ asimetrik metriği alınsın. X de $(0,1,0,1,...)$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda dizinin tüm terimleri $B^m_{\rho}(0,\varepsilon)$ ve $B^m_{\bar{\rho}}(1,\varepsilon)$ kümeleri tarafından kapsanır. Bunlar ise sırasıyla dizinin zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ve zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Fakat ρ^s metriği X üzerindeki ayrık metrik olduğundan bu dizi ρ^s metriğine göre ne Bourbaki Cauchy dizisi ne de kofinal Bourbaki Cauchy dizisidir. Gerçekten, $\varepsilon \leq 1$ için X deki herhangi ρ^s-açık yuvarın m. ε-genişlemesi sadece bir tek noktadan oluşur.

Tüm bu Bourbaki-Cauchy dizileri arasında aşağıdaki çizenekte verilen ilişki vardır. Benzer çizenek sağ Bourbaki-Cauchy dizileri için de verilebilir.

$$\begin{array}{lcl}
\text{zayıf sol } K\text{-Cauchy} & \Longrightarrow & \text{sol } \rho\text{-Cauchy} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{zayıf sol } K\text{-Bourbaki-Cauchy} & \Longrightarrow & \text{sol } \rho\text{-Bourbaki-Cauchy} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{zayıf sol } K\text{-kofinal Bourbaki-Cauchy} & \Longrightarrow & \text{sol } \rho\text{-kofinal Bourbaki-Cauchy}
\end{array}$$

Aşağıdaki iki teorem hangi şartlar altında ρ, $\bar{\rho}$ ve ρ^s ye göre Bourbaki Cauchy dizilerinin denk olacağını gösterir.

Teorem 3.30. (X,ρ) T_1 asimetrik metrik uzayı olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (x_n) sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir.
2. (x_n) sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir.
3. (x_n) ρ^s-Bourbaki Cauchy dizisidir.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ (x_n) dizisi X de sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ vardır. $x \neq y$ olan her $x,y \in X$ için $\bar{\rho}(x,y) \leq \lambda\rho(x,y)$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x,\varepsilon)$ elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X de sağ ρ-Bourbaki Cauchy dizisi olur.

$(2 \Rightarrow 3)$ (x_n) dizisi X de sağ ρ-Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ vardır. $B^m_{\bar{\rho}}(x, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subseteq B^m_{\rho^s}(x,\varepsilon)$ olduğundan (x_n) ρ^s-Bourbaki Cauchy dizisidir.

$(3 \Rightarrow 1)$ (3.1) de verilen ilk kapsamadan sonuç açıktır. □

Teorem 3.31. (X,ρ), T_1 asimetrik metrik uzayı olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (x_n) zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir.
2. (x_n) zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir.
3. (x_n) ρ^s-Bourbaki Cauchy dizisidir.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.30 un ispatına benzer şekilde yapılır. □

Aşağdaki örnekte bir dizinin zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ya da sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olması dizinin aynı zamanda zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ya da sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olmasını gerektirmediği görülmektedir. Tam tersine dizinin zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ya da sağ

ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olması dizinin aynı zamanda zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ya da sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Örnek 3.32. $X = (0,1)$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x-y, & y \leq x \text{ ise} \\ 1, & y > x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$(\frac{1}{n+1})$ dizisi zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisidir fakat sağ ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi değildir. Gerçekten herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $m = 1$ seçilirse $x_n \in B_\rho^m(x_{n_0}, \varepsilon) = (0, x_{n_0}]$ elde edilir. Ayrıca, verilen herhangi $x \in X$, $m \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$ nin sonsuz $\mathbb{N}_1$ alt kümesi için $\frac{1}{n+1} \notin B_{\bar{\rho}}^m(x,1) = [x,1)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}_1$ vardır.

Zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi ve sol ρ-yakınsak dizi tanımlarından aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.33. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun.

1. Eğer (x_n) X de zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi ise $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır.
2. Eğer (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına sol ρ-yakınsak ise $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi dış ρ-Bourbaki sınırlıdır ve $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır.

Asimetrik metrik uzayda ρ-Bourbaki sınırlı olmayan ρ-yakınsak diziler vardır. $X = [0,1]$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen asimetrik metik alınırsa $(\frac{1}{n})$ dizisi sıfıra ρ-yakınsar. Fakat $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin ρ-Bourbaki sınırlı olmadığı Örnek 3.20 de gösterilmiştir.

Teorem 3.34. (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun. Eğer X, ρ-Bourbaki sınırlı ise X deki her dizinin sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisi vardır.

İspat. X in ρ-Bourbaki sınırlı olduğu kabul edilsin. (x_n) dizisi X de keyfi bir dizi olsun. Bu durumda $X = \cup\{B_\rho^{m_1}(x,1/2) : x \in F_1\}$ olacak şekilde X in sonlu bir F_1 alt kümesi ve bir $m_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bazı $x_1 \in F_1$ için $B_\rho^{m_1}(x_1,1/2)$ kümesi (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir. $M_1 = \{n_1^1 < n_2^1 < ... < n_i^1 < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ bu terimlerin indislerinden oluşan küme olsun. $(x_{n_i^1})$ dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olur. Benzer şekilde bu işleme devam edilirse X in sonlu bir F_k alt kümesi, $m_k \in \mathbb{N}$ sayısı ve $M_k = \{n_1^k < n_2^k < ... < n_i^k < ...\} \subseteq M_{k-1}$ kümesi bulunur. $x_k \in F_k$ olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için $x_{n_i^k} \in B_\rho^{m_k}(x_k, 1/2^k)$ dır. Böylece $(x_{n_i^i})$ köşegen dizisinin istenen sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisi olduğu görülür. Gerçekten, herhangi $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{2^{k_\varepsilon}} < \varepsilon$ olacak şekilde $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $i > k_\varepsilon$ için $x_{n_i^i} \in B_\rho^{m_{k_\varepsilon}}(x_{k_\varepsilon}, \varepsilon)$ elde edilir. □

[106] nolu çalışmada dizisel kompakt olup kompakt olmayan asimetrik metrik uzay örneği verilmiştir. Ayrıca bu örnek dizisel kompakt olup ön kompakt olmayan asimetrik metrik uzaya bir örnektir. Bu uzayın aynı zamanda ρ-Bourbaki sınırlı olmadığı gösterilecektir.

Örnek 3.35. ω_1 ilk sayılamaz sıra sayısı olsun. $X = [1, \omega_1)$ üzerinde ρ asimetrik metriği $x < y$ ise $\rho(x,y) = 1$ ve diğer durumlarda $\rho(x,y) = 0$ olarak tanımlansın. Her $x \in X$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $B_\rho^m(x,1) = \{y \in X : y \leq x\}$ sayılabilir bir kümedir. Eğer $X = B_\rho^m(x_1,1) \cup ... \cup B_\rho^m(x_n,1)$ olacak şekilde sonlu sayıda $x_1, ..., x_n \in X$ elemanı mevcut olsaydı X kümesinin sayılabilir bir küme olması gerekirdi. O halde X kümesi ρ-Bourbaki sınırlı değildir. Fakat bu uzayın dizisel kompakt olduğu Örnek 2.80 de gösterilmiştir.

Dizisel kompaktlık uzaydaki her dizinin sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisinin var olmasını gerektirmektedir. Böylece Teroem 3.34 deki iddianın karşıtının doğru olmadığı görülmektedir. Karşıtı için aşağıdaki teoremde ifade edilen ekstra bir şarta ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 3.36. (X, ρ) asimetrik metrik uzay olsun. Eğer X sayılabilir bir küme ve X deki her dizinin sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisi varsa X, ρ-Bourbaki sınırlıdır.

İspat. $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin ρ-Bourbaki sınırlı olmadığı kabul edilsin. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ için X in sonlu herhangi F alt kümesi ve herhangi $m \in \mathbb{N}$ için $x \in F$ olduğunda $y \notin B_\rho^m(x, \varepsilon)$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. $F_n = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Kabulden dolayı $y_n \notin B_\rho^m(x_k, \varepsilon)$ $(k = 1, ..., n)$ $y_n \in X$ seçilebilir. Bu şekilde oluşturulan (y_n) dizisi sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisine sahip olamaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde X, ρ-Bourbaki sınırlıdır. □

Örnek 3.28 de verilen dizi ρ-yakınsak olmamasına rağmen (x_n) dizisinin $(\frac{1}{n})$ alt dizisi sıfıra ρ-yakınsaktır. O halde zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy ya da sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin ρ-yakınsak alt dizisi varsa dizinin kendisi ρ-yakınsak olmak zorunda değildir. Bu gerçek doğultusunda sol ρ-(kofinal) Bourbaki tamlık ve zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tamlık tanımları verilecektir.

Tanım 3.37. (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun.

1. Eğer X deki her sol (sağ) ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi varsa (X,ρ) asimetrik metrik uzayı sol (sağ) ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır denir.
2. Eğer X deki her zayıf sol (sağ) K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi varsa (X,ρ) asimetrik metrik uzayı zayıf sol (sağ) K-(kofinal) Bourbaki tamdır denir.
3. Eğer X deki her ρ^s-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi varsa (X,ρ) asimetrik metrik uzayı ρ^s-(kofinal) Bourbaki tamdır denir.

Tüm bu tamlık çeşitleri arasında aşağıdaki çizenekte verilen ilişki vardır. Benzer çizenek sağ tamlık kavramları için de verilebilir.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{sol } \rho\text{-kofinal Bourbaki tam} & \Longrightarrow & \text{zayıf sol } K\text{-kofinal Bourbaki tam} \\
\quad\Downarrow & & \quad\Downarrow \\
\text{sol } \rho\text{-Bourbaki tam} & \Longrightarrow & \text{zayıf sol } K\text{-Bourbaki tam} \\
\quad\Downarrow & & \quad\Downarrow \\
\text{sol } \rho\text{-tam} & \Longrightarrow & \text{zayıf sol } K\text{-tam}
\end{array}
$$

Aşağıdaki örnek asimetrik metrik uzayın zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tam olmasının uzayın sol ρ-(kofinal) Bourbaki tam olmasını gerektirmediğini gösterir.

Örnek 3.38. $X = \mathbb{N}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(r,s) = \begin{cases} 0, & r = s \text{ ise} \\ \frac{1}{r}, & s > r,\ s \text{ çift, } r \text{ tek ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

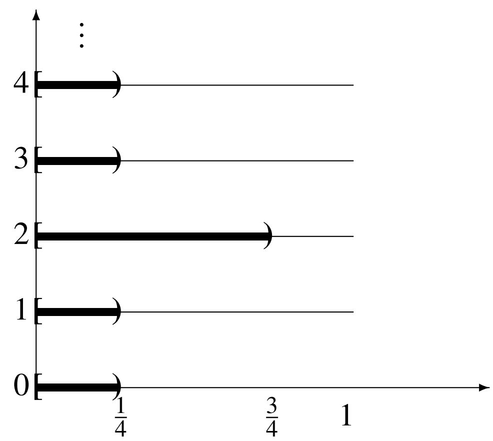
şeklinde tanımlansın. X deki zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizileri sadece aşikar olan diziler olduğundan (X,ρ) zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tamdır. $\{2,4,6,...\}$ dizisi sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisidir fakat ρ-yakınsak alt dizisi bulunmamaktadır. Dolayısıyla (X,ρ) sol ρ-(kofinal) Bourbaki tam değildir.

Aşağıdaki örnek asimetrik metrik uzayın zayıf sol K-tam olmasının uzayın zayıf sol K-Bourbaki tam olmasını ve aynı zamanda sol ρ-tam olmasının sol ρ-Bourbaki tam olmasını gerektirmediğini gösterir.

Örnek 3.39. [94, 3] $(0,s)$ şeklindeki tüm noktalar bir tek $\mathbf{0} \equiv [(0,s)]$ noktası ile tanımlanmak üzere $X = \cup_{n\in\mathbb{N}_0}([0,1]\times\mathbb{N}_0)$ üzerinde ρ (asimetrik) metriği

$$\rho((x,n_1),(y,n_2)) = \begin{cases} |x-y|, & n_1 = n_2 \\ x+y, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu uzayda örnek olarak $(\frac{1}{4},2)$ merkezli, $\frac{1}{2}$ yarıçaplı yuvar aşağıda gösterilmiştir. Yani $B_\rho((\frac{1}{4},2),\frac{1}{2}) = [0,\frac{1}{4})\times\mathbb{N}_0\backslash\{2\}\cup[0,\frac{3}{4})\times\{2\}$ dir.



X deki her dizi zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisidir. Bunu görmek için X de keyfi bir $((x_k, n_k))$ dizisi alınsın. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\frac{1}{m} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ seçilirse $B_\rho^m(\mathbf{0}, \varepsilon) = X$ bulunur. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $B_\rho^m(\mathbf{0}, \varepsilon) \subseteq B_\rho^{2m}((x_k, n_k), \varepsilon)$ kapsaması sağlanır. Dolayısıyla $X = B_\rho^{2m}((x_k, n_k), \varepsilon)$ olduğundan $((x_k, n_k))$ dizisi X de zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisidir. Diğer tarafdan X de $((1,n))$ dizisinin keyfi bir $((1, n_k))$ alt dizisi ve X de herhangi bir (x,s) elemanı alınırsa her $k \in \mathbb{N}$ için $\rho((x,s),(1,n_{k_1})) = x+1 \geq 1$ olacak şekilde $s \neq k_1$, $k_1 > k$ sayısı bulunduğundan $((1,n))$ dizisinin yakınsak alt dizisi yoktur. Dolayısıyla X zayıf sol K-Bourbaki tam değildir ve bu nedenle sol ρ-Bourbaki tam değildir.

Asimetrik metrik uzay sol ρ-(kofinal) Bourbaki tam ya da zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tam ise ayrıca sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tam ya da zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tam olması gerekmez. Tam tersine asimetrik metrik uzay sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tam ya da zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tam ise ayrıca sol ρ-(kofinal) Bourbaki tam ya da zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tam olması gerekmez.

Örnek 3.40. $Z = \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde Örnek 3.32 de verilen asimetrik metrik alınsın. Her $\varepsilon \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in Z$ için $B_\rho^m(x, \varepsilon) = (x - m\varepsilon, x]$ olduğundan bu uzayda alınan sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisinin terimleri belli bir yerden sonra sabit olmalıdır. Dolayısıyla bu uzay sol ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır ve bu nedenle zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tamdır. Fakat Z zayıf sağ K-tam olmadığından ([104] Örnek 3) bu uzay ne zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tam ne de sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır.

Eğer bir asimetrik metrik uzay zayıf sol (sağ) K-(kofinal) Bourbaki tam ise bu uzayın ρ^s-(kofinal) Bourbaki tam olduğu açıktır. Fakat ρ^s-(kofinal) Bourbaki tamlık uzayın hem zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tam hem de zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tam olmasını gerektirmez.

Örnek 3.41. Örnek 3.32 de verilen asimetrik metrik uzay zayıf sol K-tam ve zayıf sağ K-tam olmadığından ([104] Örnek 4) zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tam ve zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tam değildir.

Teorem 3.42. (X,ρ) zayıf sol K-Bourbaki tam asimetrik metrik uzay ise zayıf sol K-tamdır.

İspat. (X,ρ) zayıf sol K-Bourbaki tam asimetrik metrik uzay ve (x_n), X de sol K-Cauchy dizisi olsun. (x_n) aynı zamanda zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) dizisi sol ρ-yakınsak alt diziye sahiptir. Önerme 2.67 gereği (x_n) dizisi de aynı noktaya sol ρ-yakınsaktır. Bu durum X in sol K-tam ya da denk olarak zayıf sol K-tam olduğunu gösterir. □

Teorem 3.43. (X,ρ), T_1 asimetrik metrik uzay olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X sol ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır.
2. X sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır.
3. X ρ^s-(kofinal) Bourbaki tamdır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ X sol ρ-(kofinal) Bourbaki tam ve (x_n) dizisi X de keyfi bir sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Teorem 3.30 a göre (x_n) aynı zamanda sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. O halde X sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır.

$(2 \Rightarrow 3)$ X sağ ρ-(kofinal) Bourbaki tam ve (x_n) dizisi X de keyfi bir ρ^s-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Teorem 3.30 a göre (x_n) aynı zamanda sağ ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. O halde X ρ^s-(kofinal) Bourbaki tamdır.

$(3 \Rightarrow 1)$ X ρ^s-(kofinal) Bourbaki tam ve (x_n) dizisi X de keyfi bir sol ρ-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Teorem 3.30 a göre (x_n) aynı zamanda ρ^s-(kofinal) Bourbaki Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. O halde X sol ρ-(kofinal) Bourbaki tamdır. □

Teorem 3.44. (X,ρ), T_1 asimetrik metrik uzay olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X zayıf sol K-(kofinal) Bourbaki tamdır.

2. X zayıf sağ K-(kofinal) Bourbaki tamdır.
3. X ρ^s-(kofinal) Bourbaki tamdır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.43 ün ispatına benzer şekilde yapılır. □

Metrik uzayın aksine asimetrik metrik uzayda Bourbaki sınırlılık Borbaki Cauchy dizileri ile karakterize edilemez. Asimetrik metrik uzayda X kalıtımsal olarak ρ-Bourbaki sınırlı küme ise bu küme zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizileri ile karakterize edilebilir.

Tanım 3.45. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir A kümesinin her alt kümesi ρ-Bourbaki sınırlı ise A kümesine kalıtımsal olarak ρ-Bourbaki sınırlıdır denir.

Teorem 3.46. (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X kalıtımsal olarak ρ-Bourbaki sınırlıdır.
2. X in sayılabilir her alt kümesi ρ-Bourbaki sınırlıdır.
3. X de her dizinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy alt dizisi vardır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ Bu kısmın ispatı açıktır.

$(2 \Rightarrow 3)$ (x_n), X de keyfi bir dizi ve $Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Hipotezden $Z \subseteq \bigcup\{B_\rho^{m_1}(x,1) : x \in F_1\}$ olacak şekilde sonlu $F_1 \subseteq Z$ alt kümesi ve $m_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $n_1 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_1} \in F_1$ olmak üzere $M_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_1, x_n \in B_\rho^{m_1}(x_{n_1},1)\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi oluşturulsun. Bu durumda $Z_1 = \{x_n : n \in M_1, n > n_1\}$ kümesi de ρ-Bourbaki sınırlıdır. Dolayısıyla $Z_1 \subseteq \bigcup\{B_\rho^{m_2}(x,1/2) : x \in F_2\}$ olacak şekilde sonlu $F_2 \subseteq Z_1$ alt kümesi ve $m_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $n_2 \in M_1$ için $x_{n_2} \in F_2$ olmak üzere $M_2 = \{n \in M_1 : n \geq n_2, x_n \in B_\rho^{m_2}(x_{n_2},1/2)\} \subseteq M_1$ kümesi oluşturulsun. Bu durumda $Z_2 = \{x_n : n \in M_2, n > n_2\}$ kümesi de ρ-Bourbaki sınırlı olur. Bu işleme aynı şekilde devam edildiğinde her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \in M_k$ olmak üzere $\ldots \subseteq M_2 \subseteq M_1$ sonsuz iç içe kümeler ve $n_1 < n_2 < \ldots$ artan dizisi elde edilir. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$ olacak şekilde $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Her $j > k_\varepsilon$ için $M_j \subseteq M_{k_\varepsilon}$ olduğundan $x_{n_j} \in B_\rho^{m_{k_\varepsilon}}(x_{n_{k_\varepsilon}},\varepsilon)$ bulunur. Bu (x_{n_j}) nin (x_n) dizisinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy alt dizisi olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

$(3 \Rightarrow 1)$ Aksine, X in bir Y alt kümesinin ρ-Bourbaki sınırlı olmadığı kabul edilsin. Bu durumda $F_1 = \{x_1\} \subseteq Y$ ve keyfi $m \in \mathbb{N}$ için $x_2 \notin B_\rho^m(x_1,\varepsilon)$ olacak şekilde $x_2 \in Y$ ve bir

$\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Benzer şekilde, $F_2 = \{x_1, x_2\} \subseteq Y$ için $x_3 \notin B^m_\rho(x_1, \varepsilon) \bigcup B^m_\rho(x_2, \varepsilon)$ olacak şekilde $x_3 \in Y$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $n > k$ için $x_n \notin B^m_\rho(x_k, \varepsilon)$ olmak üzere X de bir (x_n) dizisi elde edilir. Bu ise X deki her dizinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy alt dizisinin mevcut olması ile çelişir. O halde X in her alt kümesi ρ-Bourbaki sınırlı olmalıdır. □

3.3. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK ÜZERİNE SONUÇLAR

Bu bölümde ilk iki bölümde tanımlanan kavramlar ile asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık ve düzgün yerel kompaktlık kavramlarına dayanan bazı önemli sonuçlar verilecektir. Tez çalışması boyunca asimetrik metrik uzayın kompakt, dizisel kompakt ve düzgün yerel kompakt olduğu söylendiğinde aksi belirtilmedikçe verilen asimetrinin ürettiği topolojiye göre kompakt, dizisel kompakt ve düzgün yerel kompakt olduğu kastedilecektir.

Teorem 3.47. (X, ρ) asimetrik metrik uzay olsun. Eğer X sağ $\bar{\rho}$-Bourbaki tam ise X deki tüm ρ-Bourbaki sınırlı alt kümelerin $\bar{\rho}$-kapanışı $\bar{\rho}$-dizisel kompakttır.

İspat. X sağ $\bar{\rho}$-Bourbaki tam olsun. Bu durumda X deki her sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisinin sol $\bar{\rho}$-yakınsak alt dizisi vardır. B kümesi X de keyfi bir ρ-Bourbaki sınırlı alt küme olsun. Teorem 3.23 den $\tau_{\bar{\rho}}$-Cl(B) nin ρ-Bourbaki sınırlı olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.34 e göre terimleri $\tau_{\bar{\rho}}$-Cl(B) den alınan herhangi (x_n) dizisinin sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisi vardır. Kabul gereği bu alt dizi bir $x \in X$ noktasına sol $\bar{\rho}$-yakınsaktır. $\tau_{\bar{\rho}}$-Cl(B) kümesi $\bar{\rho}$-kapalı olduğundan $x \in \tau_{\bar{\rho}}$-Cl(B) elde edilir. Bu durum herhangi ρ-Bourbaki sınırlı kümenin $\bar{\rho}$-kapanışının $\bar{\rho}$-dizisel kompakt olduğunu gösterir. □

Teorem 3.48. Kompakt asimetrik metrik uzay sol ρ-Bourbaki tamdır (zayıf sol K-Bourbaki tamdır) ve ρ-Bourbaki sınırlıdır.

İspat. (X, ρ) kompakt asimetrik metrik uzay olsun. X aynı zamanda dizisel kompakttır. Yani X deki her dizi sol ρ-yakınsak alt diziye sahiptir. Buradan uzayın sol ρ-Bourbaki tam (zayıf sol K-Bourbaki tam) olduğu elde edilir.

Kompakt asimetrik metrik uzay ön kompakt olduğundan, ρ-Bourbaki sınırlı olur. $\square$

Teorem 3.49. (X,ρ) asimetrik metrik uzayı ρ-Bourbaki sınırlı ve sol ρ-Bourbaki tam ise dizisel kompakttır.

İspat. Eğer X, ρ-Bourbaki sınırlı asimetrik metrik uzay ise Teorem 3.34 den X uzayındaki her dizinin sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisinin mevcut olduğu bilinmektedir. Hipotezden bu alt dizinin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Böylece X dizisel kompakttır. $\square$

Aşağıdaki teorem hangi şartlar altında asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki tamlık ve Bourbaki sınırlılığın kompaktlığa denk olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.50. (X,ρ) T_1 asimetrik metrik uzay olsun. Eğer $\lambda = \sup\limits_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\rho(x,y)}{\rho(y,x)}$ mevcut ise aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X kompakttır.
2. X sol ρ-Bourbaki tam ve ρ-Bourbaki sınırlıdır.
3. X zayıf sol K-Bourbaki tam ve ρ-Bourbaki sınırlıdır.
4. X dizisel kompakttır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ Teorem 3.48 de gösterilmiştir.

$(2 \Rightarrow 3)$ Zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi sol ρ-Bourbaki Cauchy dizisi olduğundan ispat açıktır.

$(3 \Rightarrow 4)$ (x_n) dizisi X de keyfi bir dizi olsun. Teorem 3.34 a göre (x_n) dizinin bir (y_k) sol ρ-Bourbaki Cauchy alt dizisi vardır. Teorem 3.30 gereği bu alt dizi aynı zamanda ρ^s-Bourbaki Cauchy dizisidir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda $y_k \in B^m_\rho(x, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı, $m \in \mathbb{N}$ ve $k_0 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Buradan hipotez gereği bazı $a_1,...,a_{m-1} \in X$ için $\rho(y_{k_0},a_1) < \varepsilon,...,\rho(a_{m-1},x) < \varepsilon$ olduğu görülür. Ayrıca $y \in B^m_\rho(x, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ seçilirse bazı $b_1,...,b_{m-1} \in X$ için $\rho(x,b_1) < \varepsilon,...,\rho(b_{m-1},y) < \varepsilon$ olur. Sonuç olarak $B^m_\rho(x, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subseteq B^{2m}_\rho(y_{k_0},\varepsilon)$ elde edilir. Buradan (y_k) alt dizisinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla sol ρ-yakınsak alt dizisinin var olduğu sonucu çıkar. O halde X dizisel kompakttır.

$(4 \Rightarrow 1)$ X asimetrik metrik uzayı T_1 uzayı olduğundan her $x \in X$ için τ_ρ-Cl$(\{x\}) = \{x\}$ dir. Dolayısıyla τ_ρ-Cl$(\{x\})$ kompakttır. Dizisel kompakt asimetrik metrik uzayda tek nokta kümelerinin kapanışı kompakt ise X kompakttır (bkz. [35] Önerme 1.2.28). □

Teorem 3.51. Kalıtımsal olarak ρ-Bourbaki sınırlı ve zayıf sol K-Bourbaki tam asimetrik metrik uzay dizisel kompakttır.

İspat. X kalıtımsal olarak ρ-Bourbaki sınırlı asimetrik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Teorem 3.46 dan (x_n) dizisinin zayıf sol K-Bourbaki Cauchy alt dizisi vardır. Hipotezden bu alt dizinin sol ρ-yakınsak alt dizisi mevcuttur. Böylece X dizisel kompakttır. □

Tanım 3.52. (X,ρ) asimetrik metrik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için $B_\rho(x,\delta)$ ρ-açık yuvarının τ_ρ topolojisine göre kapanışı kompakt olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa (X,ρ) asimetrik metrik uzayı düzgün yerel kompakttır denir. Ayrıca eğer X deki her x noktasının ρ-Bourbaki sınırlı komşuluğu varsa (X,ρ) asimetrik metrik uzayı ρ-yerel Bourbaki sınırlı olarak adlandırılır.

Eğer $x \in U \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \tau_\rho$ varsa $V \subseteq X$ alt kümesine $x \in X$ noktasının bir komşuluğu olarak adlandırıldığı bilinmektedir. Bu kavramları kullanarak aşağıdaki sonuç verilir.

Lemma 3.53. (X,ρ) düzgün yerel kompakt asimetrik metrik uzay ve B kümesi X in bir alt kümesi olsun. B kompakt küme ise τ_ρ-Cl$(B^{\delta/2})$ ρ-kompakttır.

İspat. Her $x \in X$ için τ_ρ-Cl$(B_\rho(x,\delta))$ kompakt olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut olsun. X de kompakt B alt kümesi alınsın. Bu durumda B nin $\{B_\rho(y,\frac{\delta}{2}) : y \in B\}$ ρ-açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Yani $F \subseteq B$ ve F sonlu olmak üzere $B \subseteq \bigcup_{y\in F} B_\rho(y,\frac{\delta}{2})$ dır.

$$(B_\rho(y,\frac{\delta}{2}))^{\delta/2} = B_\rho^2(y,\frac{\delta}{2}) \subseteq \tau_\rho\text{-Cl}(B_\rho(y,\delta))$$

kapsamasından τ_ρ-Cl$(B_\rho(y,\frac{\delta}{2}))^{\delta/2}$ kümesinin kompakt olduğu görülür. Çünkü bu küme kompakt kümenin ρ-kapalı alt kümesidir. Sonuç olarak

$$B^{\delta/2} \subseteq \bigcup_{y\in F} (B_\rho(y,\frac{\delta}{2}))^{\delta/2} \subseteq \bigcup_{y\in F} \tau_\rho\text{-Cl}(B_\rho(y,\delta))$$

elde edilir. Böylece τ_ρ-Cl$(B^{\delta/2})$ kompakttır. $\square$

Teorem 3.54. (X,ρ) düzgün yerel kompakt asimetrik metrik uzayı ρ-yerel Bourbaki sınırlıdır ve sol ρ-kofinal Bourbaki tamdır.

İspat. X düzgün yerel kompakt asimetrik metrik uzay olsun. Bu durumda her $x \in X$ için τ_ρ-Cl$(B_\rho(x,\delta))$ kümesi x in kompakt komşuluğu ve böylece x in ρ-Bourbaki sınırlı komşuluğu olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece X ρ-yerel Bourbaki sınırlıdır.

(x_n) dizisi X de sol ρ-kofinal Bourbaki Cauchy dizisi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in \tau_\rho$-Cl$(B^m_\rho(x,\frac{\delta}{2}))$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$ ve $\mathbb{N}$ nin sonsuz $\{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ alt kümesi vardır. Lemma 3.53 den τ_ρ-Cl$(B^m_\rho(x,\frac{\delta}{2}))$ ρ-kümesi kompakt olduğundan (x_{n_k}) alt dizisinin ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Böylece X in sol ρ-kofinal Bourbaki tam olduğu görülür. $\square$

4. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL CAUCHY DİZİLERİ VE TOPLANABİLME TEORİSİ

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda istatistiksel yakınsama kavramı verildikten sonra Cauchy dizileri gibi üç farklı istatistiksel Cauchy dizisi tanımı yapılacaktır. Metrik uzaylardaki durumun aksine istatistiksel limitin tek olmadığı gösterilecektir. Cauchy ve istatistiksel Cauchy dizileri arasındaki ilişki örnekler ile incelenecektir. Metrik uzayda olduğu gibi istatistiksel yakınsak ve istatistiksel Cauchy dizilerinin sırasıyla yakınsak ve Cauchy alt dizilerinin bulunduğu gösterilecektir. İstatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası tanımları verilerek bu kavramlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Asimetrik metrik uzaylarda tamlık ve kompaktlık ile ilgili elde edilen bulgular sunulacaktır. Son olarak asimetrik normlu uzaylarda toplanabilme teorisi ile bağlantılı sonuçlar verilecektir.

4.1. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL CAUCHY DİZİLERİ

(X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir (x_n) dizisinin $x\in X$ noktasına sol (sağ) ρ-istatistiksel yakınsaklığı her $\varepsilon>0$ için $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x,x_n)\geq\varepsilon\})=0$ ya da denk olarak $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x,x_n)<\varepsilon\})=1$ ($\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_n,x)\geq\varepsilon\})=0$ ya da denk olarak $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_n,x)<\varepsilon\})=1$) olması ile tanımlanmıştır (bkz. [34]).

Not 4.1. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında (x_n) dizisi ρ^s metriğine göre $x\in X$ noktasına istatistiksel yakınsak ise her $\varepsilon>0$ için $\{n:\rho^s(x,x_n)<\varepsilon\}\subseteq\{n:\rho(x,x_n)<\varepsilon\}$ ve $\{n:\rho^s(x,x_n)<\varepsilon\}\subseteq\{n:\rho(x_n,x)<\varepsilon\}$ olduğundan x noktasına hem sol hem de sağ ρ-istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 4.2. $X=\mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y)=\begin{cases} y-x, & x<y \\ 0, & x\geq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $(x_n)=((-1)^n)$ dizisi verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\rho(1,x_n)=0$ ve $\rho(x_n,-1)=0$ dır. Dolayısıyla herhangi $\varepsilon>0$ için $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(1,x_n)<\varepsilon\})=1$ ve $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_n,-1)<\varepsilon\})=1$ elde edilir. (x_n) dizisi 1 e sol ρ-istatistiksel yakınsak ve -1 e sağ ρ-istatistiksel yakınsaktır. Fakat ρ^s mutlak değer metriği olduğundan

$$\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho^s(x,x_n)<1\})=\begin{cases} \frac{1}{2}, & |x|<2 \text{ ve } x\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi ρ^s metriğine göre istatistiksel yakınsak değildir.

Not 4.3. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir (x_n) dizisinin sol (sağ) ρ-istatistiksel limiti tek değildir. Yukarıdaki örnekte her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x\in[1,\infty)$ ($x\in(-\infty,-1]$) için $\rho(x,x_n)=0$ ($\rho(x_n,x)=0$) olduğundan (x_n) dizisi 1 ve 1 den büyük (-1 ve -1 den küçük) her sayıya sol (sağ) ρ-istatistiksel yakınsaktır.

Not 4.4. Asimetrik metrik uzayda sol (sağ) ρ-istatistiksel yakınsak olup sağ (sol) ρ-istatistiksel yakınsak olmayan diziler vardır.

Örnek 4.5. (X,ρ) Örnek 4.2 de verilen asimetrik metrik uzay olsun. $(x_n)=(-n)$ dizisi X in her noktasına sol ρ-istatistiksel yakınsaktır fakat X in hiçbir noktasına sağ ρ-istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 4.6. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve bütün $k\in M$ ler için $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_k,x_n)\geq\varepsilon\})=0$ ($\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_n,x_k)\geq\varepsilon\})=0$) ya da denk olarak $\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_k,x_n)<\varepsilon\})=1$ ($\delta(\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_n,x_k)<\varepsilon\})=1$) ve $\delta(M)=1$ olacak şekilde $M\subseteq\mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) K-istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Lemma 4.7. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında bir (x_n) dizisi sol (sağ) K-Cauchy dizisi ise sol (sağ) K-istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. (x_n), X de bir sol K-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ ve $n \geq r \geq n_0$ olan bütün $n, r \in \mathbb{N}$ sayıları için $\rho(x_r, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M = \{n_0, n_0 + 1, ...\}$ olsun. $\delta(M) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca keyfi $k \in M$ için $\delta(\{n > k : \rho(x_k, x_n) < \varepsilon\}) = 1$ olduğundan

$$\{n > k : \rho(x_k, x_n) < \varepsilon\} \subseteq \{n : \rho(x_k, x_n) < \varepsilon\}$$

kapsaması (x_n) dizisinin sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu gösterir. □

Tanım 4.8. (X, ρ) asimetrik metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{n_0}, x_n) \geq \varepsilon\}) = 0$ ($\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_{n_0}) \geq \varepsilon\}) = 0$) ya da buna denk olarak $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{n_0}, x_n) < \varepsilon\}) = 1$ ($\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon\}) = 1$) olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine zayıf sol (sağ) K-istatistiksel Cauchy dizisi denir.
2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x, x_n) \geq \varepsilon\}) = 0$ ($\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\}) = 0$) ya da buna denk olarak $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x, x_n) < \varepsilon\}) = 1$ ($\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) < \varepsilon\}) = 1$) olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) ρ-istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Sonuçlar sol yapılar için verilecektir. Benzer sonuçlar sağ yapılar için de verilebilir.

Teorem 4.9. (X, ρ) asimetrik metrik uzayında bir (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak (sol K-istatistiksel Cauchy ya da zayıf sol K-istatistiksel Cauchy ya da sol ρ-istatistiksel Cauchy) olması için gerek ve yeter şart $K = \{n_1 < n_2 < ... < n_k ...\}$ kümesi $\mathbb{N}$ nin $\delta(K) = 1$ özelliğinde bir alt kümesi olmak üzere (x_n) nin (x_{n_k}) alt dizisinin sol ρ-yakınsak (sol K-Cauchy ya da zayıf sol K-Cauchy ya da sol ρ-Cauchy) olmasıdır.

İspat. Diğer sonuçlar benzer şekilde ispat edilebileceğinden teorem sadece sol ρ-istatistiksel yakınsaklık için ispat edilecektir.

(x_n) dizisi x noktasına sol ρ-istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her $l \in \mathbb{N}$ için $A_l = \{n : \rho(x, x_n) < \frac{1}{l}\}$ olmak üzere $\delta(A_l) = 1$ dir. $i_l \in A_l$ ve her $n \geq i_l$ $(l \in \mathbb{N})$ için

$$1 - \frac{1}{l} < \frac{1}{n} |\{k \leq n : \rho(x, x_k) < \frac{1}{l}\}| \tag{4.1}$$

olmak üzere $i_1 < i_2 < ... < i_l < ...$ şeklinde doğal sayıların artan bir dizisi oluşturulabilir.

$$A = \{n : 1 \leq n < i_1\} \bigcup \left[\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{n : i_l \leq n < i_{l+1}\} \cap A_l \right]$$

olsun. Böylece her $l \in \mathbb{N}$ ve $i_l \leq n < i_{l+1}$ için

$$\{k \leq n : \rho(x, x_k) < \frac{1}{l}\} \subseteq \{k \leq n : k \in A\}$$

kapsaması (4.1) eşitsizliği ile her $l \in \mathbb{N}$ için

$$1 - \frac{1}{l} < \frac{1}{n}|\{k \leq n : \rho(x, x_k) < \frac{1}{l}\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : k \in A\}|$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\delta(A) = 1$ elde edilir. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{l} < \varepsilon$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ ve $n \geq i_l$ olan $n \in A$ seçilsin. Böylece $i_r \leq n < i_{r+1}$ ve $n \in A_r$ olacak şekilde $r \geq l$ olan r doğal sayısı bulunur. Buradan $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ elde edilir.

Karşıt durum için $\delta(\{n_k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve (x_{n_k}) alt dizisi $x \in X$ noktasına sol ρ-yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $k \geq k_0$ olan her k için $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\{n : \rho(x, x_n) \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} - \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, ...\}$$

kapsaması sağlanır. $\mathbb{N} - \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, ...\}$ nın doğal yoğunluğu sıfır olduğundan $\delta(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x, x_n) \geq \varepsilon\}) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, (x_n) dizisi x noktasına sol ρ-istatistiksel yakınsaktır. □

Sonuç 4.10. (X, ρ) asimetrik metrik uzayında bir (x_n) dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsak (sol K-istatistiksel Cauchy ya da zayıf sol K-istatistiksel Cauchy ya da sol ρ-istatistiksel Cauchy) ise (x_n) nin sol ρ-yakınsak (sol K-Cauchy ya da zayıf sol K-Cauchy ya da sol ρ-Cauchy) alt dizisi vardır.

Aşağıda sol K-istatistiksel Cauchy olup sol K-Cauchy olmayan bir dizi örneği verilmiştir.

Örnek 4.11. $X = \mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \text{ ise} \\ 1, & x < y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \text{ ise } (k \in \mathbb{N}) \\ \\ \frac{1}{n}, & n \neq k^2 \end{cases}$$

olmak üzere (x_n) dizisi ele alınsın. Bir $p \in \mathbb{N}$ için $n = p^2$, her $r \in \mathbb{N}$ için $m \neq r^2$ ve $n > m$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda $\rho(x_m, x_n) = 1$ olur. Dolayısıyla (x_n) sol K-Cauchy dizisi değildir.

$K = \{n : n \neq r^2, r \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere (x_n) dizisinin $(\frac{1}{n})_{n \in K}$ alt dizisi alınsın. Her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunur. Bulunan n_0 sayısı her $r \in \mathbb{N}$ için $n_0 \neq r^2$ olarak seçilebilir. $n \geq m \geq n_0$ olan her $n, m \in K$ için $\rho(x_m, x_n) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla (x_n) nin $(\frac{1}{n})_{n \in K}$ alt dizisi sol K-Cauchy dizisidir. Teorem 4.9 a göre (x_n) sol K-istatistiksel Cauchy dizisidir.

Bir dizi sol ρ-yakınsak ise aynı noktaya sol ρ-istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca bir dizi sol ρ-Cauchy ya da zayıf sol K-Cauchy dizisi ise sırasıyla sol ρ-istatistiksel Cauchy ya da zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisidir. Bu ifadelerin tersinin doğru olmadığı Örnek 4.30 de gösterilecektir. Ayrıca sol ρ-istatistiksel yakınsak ve zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi olurken bir dizi sol ρ-istatistiksel yakınsak ya da zayıf sol K-istatistiksel Cauchy olmadan sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi olabilir.

Örnek 4.12. $X = [0,1]$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x > y \text{ ise} \\ 0, & x \leq y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, & n \text{ tek ise,} \\ \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere (x_n) dizisi ele alınsın. Bu dizi sol ρ-yakınsaktır ([104] Örnek 1). Dolayısıyla sol ρ-istatistiksel yakınsaktır ve sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisidir. Fakat (x_n) zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi değildir. Bunu görmek için $N \in \mathbb{N}$ alınsın. Eğer N tek sayı ise

$$\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\} \subseteq \{k \leq N : k \text{ tek }\}$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\}\right| \leq \frac{N+1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\}\right| = 0$ dır. N nin çift sayı olması durumunda

$$\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\} \subseteq \{k \leq n : k \text{ tek }\} \cup \{k \leq N : k \text{ çift }\}$$

kapsaması sağlanır. Buradan

$$\left|\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\}\right| \leq |\{k \leq n : k \text{ tek }\}| + \frac{N}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \rho(x_N, x_k) < \frac{1}{2}\}\right| \leq \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu durum (x_n) nin zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olmadığını gösterir.

Örnek 4.13. $X = \{0\} \bigcup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ üzerinde ρ asimetik metriği her $x \in X$ için

$$\rho\left(\frac{1}{n}, x\right) = \frac{1}{n}, \ n \text{ tek ve } x \neq \frac{1}{n} \text{ ise}$$

$$\rho\left(\frac{1}{n}, x\right) = 1, \ n \text{ çift ve } x \neq \frac{1}{n} \text{ tek ise}$$

$$\rho\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \ n \text{ çift ise}$$

$$\rho\left(0,\frac{1}{n}\right)=1,\ n \text{ tek ise}$$

$$\rho(x,x)=0$$

şeklinde tanımlansın ve X de $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi verilsin. Herhangi $\varepsilon>0$ için $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ ve $\left|\{k\leq n:\rho(\frac{1}{n_0},\frac{1}{k})<\varepsilon\}\right|=n$ olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ tek doğal sayısı vardır. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:\rho(\frac{1}{n_0},\frac{1}{k})<\varepsilon\}\right|=1$ dir. Buradan $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi ve bu nedenle sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi olduğu görülür.

Şimdi $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin herhangi bir $x\in X$ noktasına sol ρ-istatistiksel yakınsak olmadığı gösterilecektir. Öncelikle $x=0$ ise

$$\left|\{k\leq n:\rho\left(0,\frac{1}{k}\right)\geq 1\}\right|=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise}\\ \\ \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:\rho(0,\frac{1}{k})\geq 1\}\right|=\frac{1}{2}$ elde edilir. O halde $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi 0 a sol ρ-istatistiksel yakınsak değildir. Herhangi sabit $N\in\mathbb{N}$ için $x=\frac{1}{N}$ ise

$$n-1\leq\left|\{k\leq n:\rho(\frac{1}{N},\frac{1}{k})\geq\frac{1}{N}\}\right|\leq n$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:\rho(\frac{1}{N},\frac{1}{k})\geq\frac{1}{N}\}\right|=1$ elde edilir. O halde $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi herhangi $N\in\mathbb{N}$ için $\frac{1}{N}$ ye sol ρ-istatistiksel yakınsak değildir (Bu $x\neq 0$ durumudur). Dolayısıyla $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsak değildir. Buna rağmen $\left(\frac{1}{2n}\right)$ alt dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsaktır. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\rho\left(0,\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$ olduğundan $\left(\frac{1}{2n}\right)$ alt dizisi 0 a sol ρ-yakınsaktır ve bu nedenle 0 a sol ρ-istatistiksel yakınsaktır.

Yukarıda verilen iki örnekten sol ρ-istatistiksel yakınsak ve zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizileri arasında bir ilişki olmadığı görülür. Ayrıca aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.14. Bir zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi ya da sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisi olmasına rağmen dizinin kendisi sol ρ-istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 4.15. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun.

$$\mathrm{Cl}_{st}(A)=\{x\in X : x \text{ noktasına sol } \rho\text{-istatistiksel yakınsak bir dizi vardır}\}$$

kümesine A kümesinin istatistiksel kapanışı denir.

Lemma 4.16. $\mathrm{Cl}_{st}(A)=\mathrm{Cl}(A)$ dır.

İspat. Keyfi $x\in\mathrm{Cl}(A)$ için X de x noktasına sol ρ-yakınsak olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. Buradan (x_n) aynı zamanda x noktasına sol ρ-istatistiksel yakınsak olacağından $x\in\mathrm{Cl}_{st}(A)$ elde edilir. $\mathrm{Cl}_{st}(A)\subseteq\mathrm{Cl}(A)$ durumu Sonuç 4.10 dan elde edilir. Böylece $\mathrm{Cl}_{st}(A)=\mathrm{Cl}(A)$ sonucuna varılır. □

Şimdi asimetrik metrik uzayda bir dizinin sol ρ-istatistiksel limit noktası tanımı verilecektir. Dizinin sol ρ-limit noktası o noktaya sol ρ- yakınsak olacak şekilde bir alt dizisinin mevcut olması şeklinde tanımlanır. Eğer dizinin sol ρ-istatistiksel limit noktası o noktaya sol ρ-istatistiksel yakınsak olacak şekilde bir alt dizisinin mevcut olması şeklinde tanımlanırsa bu tanım Sonuç 4.10 a göre sol ρ-limit noktası tanımı ile aynı olur. Dolayısıyla bir dizinin sol ρ-istatistiksel limit noktası tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 4.17. (X,ρ) asimetrik metrik uzay, $x\in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\mathbb{N}$ nin doğal yoğunluğu sıfırdan büyük ya da mevcut olmayacak şekilde bir $\{n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots\}$ alt kümesi varsa ve (x_n) nin (x_{n_k}) alt dizisi, x noktasına sol ρ-yakınsak oluyorsa $x\in X$ noktasına (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktası denir.

$\Lambda_\rho(x_n)$ ile (x_n) dizisinin tüm sol ρ-istatistiksel limit noktaları kümesi gösterilecektir. $L_\rho(x_n)$ ile (x_n) dizisinin tüm sol ρ-limit noktaları kümesi gösterilecektir. Eğer x noktası (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktası ise aynı zamanda sol ρ-limit noktası olduğu açıktır. Fakat karşıtı doğru değildir.

Örnek 4.18. Örnek 4.2 de verilen asimetrik metrik uzay alınsın. (x_n) dizisi

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ ise } (m \in \mathbb{N}) \\ \\ 0, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Not 4.3 den $L_\rho(x_n) = [0,\infty)$ ve $\Lambda_\rho(x_n) = [1,\infty)$ elde edilir. (x_n) dizisinin $x < 0$ için x noktasına sol ρ-yakınsak alt dizisi bulunmadığından $L_\rho(x_n) = [0,\infty)$ olduğu açıktır. $x < 1$ reel sayısı (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktası olamaz. Aksine $\mathbb{N}$ nin doğal yoğunluğu sıfır olmayan bir $\{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ alt kümesinin ve (x_n) dizisinin x noktasına sol ρ-yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisinin var olduğu kabul edilsin. $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ ve $k_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Bir $m \in \mathbb{N}$ için $n_k = m^2$ olacak şekilde bir $n_k > k_0$ sayısı seçilirse $\rho(x, x_{n_k}) = 1 - x > \varepsilon$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\Lambda_\rho(x_n) = [1,\infty)$ olmalıdır.

Sonuç 4.19. $\Lambda_\rho(x_n) \subseteq L_\rho(x_n)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

Not 4.20. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında $x \in X$ noktası (x_n) dizisinin ρ^s metriğine göre istatistiksel limit noktası ise x noktası (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktasıdır.

Örnek 4.21. Örnek 4.2 de verilen asimetrik metrik uzayında $(x_n) = (-n)$ dizisi alınsın. ρ^s mutlak değer metriği olduğundan $\Lambda_{\rho^s}(x_n) = \emptyset$ dir. Şimdi $\Lambda_\rho(x_n) = \mathbb{R}$ olduğu gösterilecektir. $x \in [-1,\infty)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x,x_n) = 0$ dır. Eğer $x \in (-\infty,-1)$ ise $[[x]]$ ifadesi x e eşit ya da x den küçük en büyük tamsayıyı göstermek üzere $n \geq |[[x]]|$ için $\rho(x,x_n) = 0$ olur. Dolayısıyla her reel sayı (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktasıdır.

Sonuç 4.22. $\Lambda_{\rho^s}(x_n) \subseteq \Lambda_\rho(x_n)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

Şimdi asimetrik metrik uzayda bir dizinin sol ρ-istatistiksel yığılma noktası tanımı verilecektir.

Tanım 4.23. (X,ρ) asimetrik metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{n : x_n \in B_\rho(x,\varepsilon)\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdan farklı ise x noktasına (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel yığılma noktası denir.

$\Gamma_\rho(x_n)$ ile (x_n) dizisinin tüm sol ρ-istatistiksel yığılma noktaları kümesi gösterilecektir.

Teorem 4.24. (X,ρ) asimetrik metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve K τ_ρ topolojisine göre X in kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer $\{n : x_n \in K\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır değil ise $K \cap \Gamma_\rho(x_n) \neq \emptyset$ dır.

İspat. Aksine $K \cap \Gamma_\rho(x_n) = \emptyset$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda herhangi $z \in K$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_\rho(z,\varepsilon_z)\}) = 0$ olacak şekilde bir $\varepsilon_z > 0$ sayısı vardır. K kümesi τ_ρ-kompakt ve $\{B_\rho(z,\varepsilon_z) : z \in K, \varepsilon_z > 0\}$ ailesi K kümesinin ρ-açık örtüsü olduğundan bir $z_i \in K$ ve $\varepsilon_{z_i} > 0$ $(i = 1,...,m)$ için $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\rho(z_i,\varepsilon_{z_i})$ dir. Böylece $x_n \in K$ olan herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_\rho(z_{i_0},\varepsilon_{z_{i_0}})$ olacak şekilde bir $i_0 \in \{1,...,m\}$ bulunur. Buradan $\{n : x_n \in K\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m \{n : x_n \in B_\rho(z_i,\varepsilon_{z_i})\}$ kapsaması elde edilir. Dolayısıyla $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}) \leq \sum_{i=1}^m \delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_\rho(z_i,\varepsilon_{z_i})\}) = 0$ olur. Bu ise teoremin hipotezi ile çelişir. O halde $K \cap \Gamma_\rho(x_n) \neq \emptyset$ olmalıdır. □

Tanım 4.25. [12] Bir asimetrik metrik uzayda her sol ρ-Cauchy dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisi varsa yani her sol ρ-Cauchy dizisinin sol ρ-limit noktası varsa bu uzaya dizisel tam denir.

Şimdi asimetrik metrik uzayda istatistiksel Cauchy dizileri ve tamlık ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.26. (X,ρ) asimetrik metrik uzayının dizisel tam olması için gerek ve yeter şart X de her sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisinin olmasıdır.

İspat. X dizisel tam ve (x_n) dizisi X de sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Sonuç 4.10 a göre (x_n) dizisinin sol ρ-Cauchy alt dizisi vardır. X in dizisel tamlığı bu alt dizinin sol ρ-yakınsak ve bu nedenle sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisinin var olmasını gerektirir.

Tersine (x_n) dizisi X de sol ρ-Cauchy dizisi olsun. Dolayısıyla (x_n) sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisidir. Hipotez gereği (x_n) nin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisi vardır. Sonuç 4.10 a göre (x_n) nin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Bu durum X in dizisel tam olduğunu gösterir. □

Teorem 4.27. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında her sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktası varsa X dizisel tamdır.

İspat. (x_n) dizisi X de sol ρ-Cauchy dizisi olsun. Dolayısıyla (x_n) sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisidir. Hipotez gereği (x_n) nin X de sol ρ-istatistiksel limit noktası vardır. Dolayısıyla (x_n) nin sol ρ-limit noktası vardır. Sonuç olarak X dizisel tamdır. $\square$

Teorem 4.28. (X,ρ) asimetrik metrik uzayının sol K-tam olması için gerek ve yeter şart X deki her sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat. X sol K-tam ve (x_n) bu uzayda sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Teorem 4.9 a göre (x_{n_k}), (x_n) dizisinin sol K-Cauchy alt dizisi olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin $\delta(K)=1$ olan bir $K=\{n_1<n_2<...<n_k...\}$ alt kümesi vardır. Dolayısıyla bu alt dizi sol ρ-yakınsaktır. Teorem 4.9 dan (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir.

Tersi için (x_n) dizisi X de bir sol K-Cauchy dizisi olsun. Dolayısıyla (x_n) dizisi X de sol K-istatistiksel Cauchy dizisidir ve hipotezden sol ρ-istatistiksel yakınsaktır. Sonuç 4.10 a göre (x_n) nin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Önerme 2.67 1) e göre (x_n) dizisi sol ρ-yakınsaktır. O halde X sol K-tamdır. $\square$

Teorem 4.29. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında her sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki her zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat. X de her sol K-istatistiksel Cauchy dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsak olsun. Teorem 4.28 den X in sol K-tam olduğu elde edilir. Buna denk olarak X zayıf sol K-tamdır. (x_n), X de keyfi bir zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Teorem 4.28 in ispatında açıklandığı gibi (x_n) sol ρ-istatistiksel yakınsaktır.

Asimetrik metrik uzayda her sol K-istatistiksel Cauchy dizisi aynı zamanda zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olduğundan bu teoremin tersinin ispatı açıktır. $\square$

Asimetrik metrik uzayda zayıf sol K-Cauchy ya da sol ρ-yakınsak dizilerin aksine zayıf sol K-istatistiksel Cauchy ya da sol ρ-istatistiksel yakınsak dizilerin terimlerinden oluşan küme dış ön kompakt olmayabilir.

Örnek 4.30. $X=\mathbb{R}$ üzerinde ρ asimetrik metriği

$$\rho(x,y)=\begin{cases} y-x, & x\leq y \text{ ise} \\ 1, & x>y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k=\begin{cases} k, & k=m^2 \text{ ise } (m\in\mathbb{N}) \\ \\ 0, & k\neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere (x_k) dizisi verilsin. Herhangi $\varepsilon>0$ için $\{k:\rho(0,x_k)<\varepsilon\}\supseteq\{k: k\neq m^2, m\in\mathbb{N}\}$ kapsaması sağlanır. Buradan $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:\rho(0,x_k)<\varepsilon\}|\geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n: k\neq m^2, m\in\mathbb{N}\}\right|=1$ elde edilir. Bu durum (x_k) dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak ve aynı zamanda zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Diğer tarafdan $\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$ kümesi herhangi $x\in X$ için sonlu sayıda $B_\rho(x,\frac{1}{2})=[x,x+\varepsilon)$ ρ-yuvarı tarafından örtülemeyeceğinden dış ön kompakt değildir (bu nedenle ön kompakt da olamaz).

Herhangi $x\in\mathbb{R}$ için $x+1<m^2$ olacak şekilde $m\in\mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Böylece $n\geq m$ olmak üzere $k=n^2$ olan her $k\in\mathbb{N}$ için $\rho(x,x_k)>1$ elde edilir. O halde (x_k) dizisi sol ρ-Cauchy dizisi değildir. Dolayısıyla (x_k) dizisi ne zayıf sol K-Cauchy dizisidir ne de sol ρ-yakınsaktır.

Tanım 4.31. (X,ρ) asimetrik metrik uzayında her dizinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisi varsa X asimetrik metrik uzayına istatistiksel dizisel kompakttır denir.

Teorem 4.32. (X,ρ) asimetrik metrik uzayının istatistiksel dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır.

İspat. X istatistiksel dizisel kompakt asimetrik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisi vardır. Sonuç 4.10 e göre bu alt dizinin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Bu durum X in dizisel kompakt olduğunu gösterir.

Tersi açıktır. □

Metrik uzayların aksine asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık ve dizisel kompaktlık farklı kavramlardır. (Dizisel) Kompakt topolojik uzayın sayılabilir kompakt olduğu ve eğer sayılabilir kompakt topolojik uzay birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyorsa bu durumda dizisel kompakt olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla bir asimetrik metrik uzayda x merkezli ve $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}$ yarıçaplı ρ-açık yuvarların ailesi x noktasının sayılabilir komşuluklar bazını oluşturduğundan dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık asimetrik metrik uzaylarda denk kavramlardır. Diğer yandan dizisel kompakt olup kompakt olmayan asimetrik metrik uzaylar vardır. Ayrıca Önerme 2.78 e göre ön kompakt ve sayılabilir kompakt asimetrik metrik uzay kompakttır.

Teorem 4.33. (X,ρ) ön kompakt asimetrik metrik uzay olsun. X deki her sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsak ise X kompakttır.

İspat. (x_n), X de bir dizi olsun. X ön kompakt olduğundan sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi vardır. Hipotez gereği bu alt dizi sol ρ-istatistiksel yakınsaktır. Sonuç 4.10 dan (x_n) nin sol ρ-yakınsak alt dizisi vardır. Dolayısıyla X kompakttır. □

Teorem 4.34. (X,ρ) asimetrik metrik uzayı ön kompakt ise bu uzayda her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi vardır.

Eğer X sayılabilir ve X deki her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi varsa X ön kompakttır.

İspat. X ön kompakt ise X deki her dizinin sol ρ-Cauchy alt dizisinin var olduğu Önerme 2.74 den bilinmektedir. Her sol ρ-Cauchy dizisi sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi olduğundan X de her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi vardır.

Tersine, X sayılabilir ve X de her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi varsa Sonuç 4.10 a göre sol ρ-Cauchy alt dizisi vardır. Buradan X in ön kompakt olduğu elde edilir.

□

Teorem 4.35. (X,ρ) asimetrik metrik uzayının kalıtımsal olarak ön kompakt olması için gerek ve yeter şart X de her dizinin zayıf sol K-istatistiksel Cauchy alt dizisinin bulunmasıdır.

İspat. Eğer X kalıtımsal olarak ön kompakt ise Teorem 2.76 ya göre her dizinin zayıf sol K-Cauchy alt dizisi vardır. Dolayısıyla zayıf sol K-istatistiksel Cauchy alt dizisi vardır.

Tersi Sonuç 4.10 kullanılarak görülür. □

4.2. ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA TOPLANABİLME İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde asimetrik normlu uzaylar üzerinde toplanabilme teoremleri ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Öncelikle asimetrik metrik uzaylardaki gibi bir asimetrik normlu uzayda istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecektir.

Tanım 4.36. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : p(x_n - x) \geq \varepsilon\}) = 0$ ya da buna denk olarak $\delta(\{n \in \mathbb{N} : p(x_n - x) < \varepsilon\}) = 1$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına sol p-istatistiksel yakınsaktır denir.

Tanım 4.37. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $(\frac{x_1+...+x_n}{n})$ dizisi $x \in X$ noktasına sol p-yakınsak ise (x_n) dizisi x e Cesàro toplanabilirdir denir.

Teorem 4.38. (X,p) asimetrik normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi sıfıra sol p-istatistiksel yakınsak ve p-sınırlı ise (x_n) dizisi sıfıra Cesàro toplanabilirdir.

İspat. (x_n) dizisinin sıfıra sol p-istatistiksel yakınsak ve p-sınırlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda herhangi $\varepsilon > 0$ için $A(n) = \{k \leq n : p(x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = 0$ dır. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $p(x_k) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı bulunabilir. Böylece yeterince büyük n değerleri için

$$\begin{aligned} p(\frac{x_1+...+x_n}{n}) &\leq \frac{1}{n}(p(x_1)+...+p(x_n)) \\ &\leq \frac{1}{n}\left(|A(n)|M + (n-|A(n)|)\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{|A(n)|}{n}M + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})$ dizisinin sıfıra sol p-yakınsak olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.39. Eğer (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına sol p-istatistiksel yakınsak ve sol p-sınırlı ise (x_n) dizisi x e Cesàro toplanabilirdir.

Tanım 4.40. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k - x) = 0$ ise (x_n) dizisi x e kuvvetli toplanabilirdir denir.

Teorem 4.41. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi x e kuvvetli toplanabilir ise (x_n) dizisi x e sol p-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{\varepsilon}{n}|\{k \leq n : p(x_k - x) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1, p(x_k-x)\geq\varepsilon}^{n} p(x_k - x) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k - x).$$

Hipotezden yeterince büyük n değerleri için $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k - x) < \varepsilon^2$ olduğu görülür. Buradan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : p(x_k - x) \geq \varepsilon\}| = 0$ elde edilir. Bu (x_n) dizisinin x noktasına sol p-istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. □

Teorem 4.42. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi x noktasına sol p-istatistiksel yakınsak ve p-sınırlı ise (x_n) dizisi x noktasına kuvvetli toplanabilirdir.

İspat. (x_n) dizisi p-sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $p(x_n - x) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca (x_n) dizisi x noktasına sol p-istatistiksel yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A(n) = \{k \leq n : p(x_k - x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ olmak üzere $n \geq n_0$ olduğunda $\frac{|A(n)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(x_k - x) &\leq \frac{1}{n}\left((n - |A(n)|)\frac{\varepsilon}{2} + |A(n)|M\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliğinden (x_n) dizisinin x e kuvvetli toplanabilir olduğu görülür. □

Sonuç 4.43. (X,p) asimetrik normlu uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda p-sınırlı bir dizi olsun. (x_n) dizisinin x e sol p-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin x e kuvvetli toplanabilir olmasıdır.

5. İSTATİSTİKSEL BOURBAKI CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesinin doğal yoğunluğu kavramı kullanılarak metrik uzaylarda istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi tanımı verilecektir. Daha sonra daha önceden tanımlanmış diziler ile bu yeni diziler arasındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca bir metrik uzayın Bourbaki tam olmasına denk bir şart verilecektir.

Çalışma boyunca χ_A doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için karakteristik fonksiyonu gösterecektir. Yani

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in A \\ 0 & , \quad k \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.1. (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_d^m(x,\varepsilon)\} = 0$ ya da buna denk olarak $\delta\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_d^m(x,\varepsilon)\} = 1$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı ve bir $x \in X$ elemanı bulunuyorsa (x_n) dizisine istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.40 ve Tanım 5.1 den metrik uzayda her Bourbaki-Cauchy dizisinin aynı zamanda bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olduğu görülür. Fakat aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi Bourbaki-Cauchy dizisi olmayabilir. Bu iki Cauchy dizisi arasındaki en önemli fark Bourbaki-Cauchy dizisi metrik anlamda sınırlı olurken istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi genel olarak sınırlı olmak zorunda değildir. Ayrıca eğer bir X metrik uzayında (x_n) istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi ise herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_d(x,m\varepsilon)\}) \geq \delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_d^m(x,\varepsilon)\}) = 1$$

olacak şekilde $x \in X$ ve $m \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabildiğinden (x_n) dizisi istatistiksel sınırlıdır.

Örnek 5.2. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. (x_n) dizisinin terimleri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n \text{ bir asal sayı ise,} \\ 1 & , \quad n \text{ bir asal sayı değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Asal sayılar kümesinin yoğunluğu sıfır olduğundan (bkz. [108]) bu dizi istatistiksel Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) dizisi istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisidir. Fakat bu dizi mutlak değer metriğine göre sınırlı olmadığından Bourbaki-Cauchy dizisi değildir.

Metrik uzayda bir dizinin istatistiksel yakınsak olması dizinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olmasını gerektirir. Fakat metrik uzaylarda istatistiksel yakınsak olmayıp istatistiksel Bourbaki-Cauchy olan diziler vardır.

Örnek 5.3. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği ve $((-1)^n)$ dizisi verilsin. Bu dizi Bourbaki-Cauchy dizisidir ve dolayısıyla istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisidir. Fakat bu dizi istatistiksel Cauchy dizisi değildir. $((-1)^n)$ dizisinin istatistiksel yakınsak alt dizileri mevcut olmasına rağmen dizinin kendisi istatistiksel yakınsak değildir.

Bu son iki örnek Bourbaki-Cauchy dizileri için de doğru olduğu gibi bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisinin istatistiksel yakınsak alt dizisi varsa dizinin kendisinin istatistiksel yakınsak olması gerekmediğini gösterir. Ayrıca bu örneklerden istatistiksel Cauchy ve Bourbaki-Cauchy dizileri arasında bir ilişki olmadığı görülür. Sonuç olarak aşağıdaki çizenek elde edilir ve bu çizenekteki ters geçişler doğru değildir.

$$\begin{array}{lcl} \text{Cauchy} & \Longrightarrow & \text{istatistiksel Cauchy} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Bourbaki-Cauchy} & \Longrightarrow & \text{istatistiksel Bourbaki-Cauchy} \end{array}$$

Aşağıdaki teoremde Bourbaki-Cauchy ve istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizileri arasındaki bazı ilişkiler verilecektir.

Teorem 5.4. (X,d) metrik uzay ve (x_n), bu uzayda bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (x_n), X de istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisidir.
2. (x_n) dizisinin $\delta(\{n_j \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}) = 1$ olacak şekilde bir (x_{n_j}) Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.
3. (x_n) dizisinin $\delta(\{n_j \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}) = 1$ olacak şekilde bir (x_{n_j}) istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ (x_n) dizisi X de istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olsun. $A_1 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in B_d^{m_1}(x_{i_1}, \frac{1}{2})\}$ olmak üzere $\delta(A_1) = 1$ olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ ve $i_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı şekilde $B_1 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in B_d^{m_2}(x_{i_2}, \frac{1}{2^2})\}$ olmak üzere $\delta(B_1) = 1$ olacak şekilde bir $m_2 \in \mathbb{N}$ ve $i_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $A_2 = A_1 \cap B_1$ olsun. Bu durumda $\delta(A_2) = 1$, $A_2 \subseteq A_1$ ve her $k_1, k_2 \in A_2$ için $x_{k_2} \in B_d^{2m_2}(x_{k_1}, \frac{1}{2^2})$ dir. Bu işleme aynı şekilde devam edilirse $\mathbb{N}$ de $\delta(A_j) = 1$ olacak şekilde $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_j \supset ...$ alt kümelerin azalan bir dizisi elde edilir ve her $k_1, k_2 \in A_j$ için $x_{k_2} \in B_d^{2m_j}(x_{k_1}, \frac{1}{2^j})$ olur. $n_1 \in A_1$ olsun. $n_2 \in A_2$ sayısı $n_2 > n_1$ ve her $n \geq n_2$ için $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_2}(k) > 1 - \frac{1}{2}$ olacak şekilde seçilsin. Bu yöntemle her bir $j \in \mathbb{N}$ için $n_j \in A_j$ olmak üzere $n \geq n_j$ olduğunda $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_j}(k) > 1 - \frac{1}{j}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ de artan bir (n_j) dizisi elde edilir. $A = \{k : 1 \leq k \leq n_1\} \bigcup \left[\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{k : n_j < k \leq n_{j+1}\} \cap A_j\right]$ olsun. Herhangi $j \in \mathbb{N}$ ve $n_j < n \leq n_{j+1}$ için $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_j}(k) > 1 - \frac{1}{j}$ olur. Buradan $\delta(A) = 1$ olduğu görülür. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{2^{j_0}} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $j_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sabit $k \in A$ ve $l > k > n_{j_0}$ olan keyfi $l \in A$ seçilsin. Bu durumda $k \in A_r$, $n_r < k \leq n_{r+1}$ ve $l \in A_s$, $n_s < l \leq n_{s+1}$ olacak şekilde $s \geq r \geq j_0$ özelliğinde $r, s \in \mathbb{N}$ sayıları bulunabilir. Böylece $l, k \in A_r$ ve bu nedenle $x_l \in B_d^{2m_r}(x_k, \frac{1}{2^r}) \subseteq B_d^{2m_r}(x_k, \varepsilon)$ elde edilir. Dolayısıyla $(x_l)_{l\in A}$ aranan Bourbaki-Cauchy alt dizisidir.

$(2 \Rightarrow 3)$ Her Bourbaki-Cauchy dizisi aynı zamanda istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olduğundan ispat açıktır.

$(3 \Rightarrow 1)$ $\delta(\{n_j \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}) = 1$ olmak üzere (x_{n_j}) dizisi (x_n) dizisinin bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ için $A = \{j \in \mathbb{N} : x_j \in B_d^{m}(x, \varepsilon)\}$ ve

$\widetilde{A} = \{n_j \in \mathbb{N} : x_{n_j} \in B_d^m(x,\varepsilon)\}$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \chi_A(j) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \chi_{\widetilde{A}}(n_j) = 1,$$

olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ vardır. Buradan $\delta(A) = 1$ elde edilir. Bu durum (x_n) dizisinin X de istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olduğunu gösterir. □

Sonuç 5.5. (X,d) metrik uzayında her istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisinin Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.

Aşağıdaki teoremde istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi ile ilişkili Bourbaki tamlığa denk olan bir şart ifade edilmektedir.

Teorem 5.6. (X,d) metrik uzayının Bourbaki tam olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki her istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisinin istatistiksel yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır.

İspat. X Bourbaki tam metrik uzay ve (x_n) istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır. X in Bourbaki tamlığından bu alt dizinin yakınsak ve dolayısıyla istatistiksel yakınsak alt dizisi vardır.

Tersi için X de bir (x_n) Bourbaki-Cauchy dizisi alınsın. Aynı zamanda bu dizi bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olduğundan hipotez gereği istatistiksel yakınsak alt dizisi bulunur. Lemma 2.51 e göre her istatistiksel yakınsak dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla X Bourbaki tamdır. □

Kundu ve ark. [91] nolu çalışmada Bourbaki sınırlı metrik uzayların üç yeni karakterizasyonu üzerine çalışmıştır. Bu amaçla çeşitli tipte fonksiyonlar kullanmışlardır. Bu fonksiyonlardan biri bu çalışma da gerekli olan Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyondur.

Aşağıdaki teoremde istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizilerini koruyan ve istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon olarak adlandırılan fonksiyonlar yardımıyla Bourbaki tamlığın bazı yeni karakterizasyonları verilecektir. Ayrıca son teoremde bir metrik uzayın Bourbaki sınırlılığı bu tip fonksiyonlar yardımıyla karakterize edilecektir. Bourbaki tamlığı karakterize etmeden önce istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler ve Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyonlar arasındaki ilişki incelenecektir.

Lemma 5.7. Bourbaki-Cauchy regüler her fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regülerdir.

İspat. $f:(X,d)\to(X',d')$ bir Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon ve (x_n), X de bir istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olsun. Teorem 5.4 e göre (x_n) dizisinin $\delta(\{n_j\in\mathbb{N}: j\in\mathbb{N}\})=1$ olmak üzere bir (x_{n_j}) Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır. f fonksiyonu Bourbaki-Cauchy regüler olduğundan $(f(x_{n_j}))$ dizisi de Bourbaki-Cauchy dizisidir. Tekrar Teorem 5.4 uygulanırsa $(f(x_n))$ dizisinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olduğu görülür. Dolayısıyla f fonksiyonu istatistiksel Bourbaki-Cauchy regülerdir. □

Teorem 5.8. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (X,d) Bourbaki tamdır.
2. (X,d) metrik uzayından (X',d') zincirlenebilir metrik uzayına tanımlı her sürekli fonksiyon Bourbaki-Cauchy regülerdir.
3. (X,d) metrik uzayından (X',d') zincirlenebilir metrik uzayına tanımlı her sürekli fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regülerdir.
4. (X,d) metrik uzayından $\mathbb{R}$ standart metrik uzayına tanımlı her sürekli fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regülerdir.

İspat. $(1\Rightarrow 2)$ Bu kısım [99] nolu çalışmada ispatlanmıştır.

$(2\Rightarrow 3)$ Her Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler olduğundan ispat açıktır.

$(3\Rightarrow 4)$ $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre zincirlenebilir olduğundan ispat açıktır.

$(4\Rightarrow 1)$ (x_n), X de Bourbaki-Cauchy dizisi olsun. (x_n) dizisinin terimleri farklı olan bir Bourbaki-Cauchy alt dizisi alınabilir. Aksi taktirde ispat açıktır. (x_n) Bourbaki-Cauchy dizisinin yakınsak alt dizisinin bulunmadığı kabul edilsin. Buradan $Y=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesinin X in kapalı alt kümesi olduğu elde edilir. Ayrıca Y sadece ayrık noktalardan oluştuğundan Y üzerindeki alt uzay topolojisi ayrık topolojidir. Y üzerinde reel değerli bir g fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $g(x_n) = n$ olarak tanımlansın. Ayrık topolojik uzay üzerinde tanımlı her fonksiyon sürekli olduğundan g süreklidir. Teorem 2.19 Tietze genişleme teoremine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = g(x_n)$ olmak üzere sürekli bir $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Fakat (x_n) dizisi X de istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olup $(f(x_n)) = (n)$ dizisi $\mathbb{R}$ de istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi olmadığından bu fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler değildir. O halde X de her Bourbaki-Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi olmak zorundadır. Dolayısıyla X Bourbaki tamdır. □

Teorem 5.9. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (X,d) metrik uzayındaki her dizinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.
2. (X',d') herhangi metrik uzay olmak üzere $f : (X,\rho) \to (X',\rho')$ istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon ise f sınırlı bir fonksiyondur.
3. $(\tilde{X},\tilde{d})$ sınırlı olmayan zincirlenebilir bir metrik uzay olmak üzere $f : (X,d) \to (\tilde{X},\tilde{d})$ istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon ise f sınırlı bir fonksiyondur.
4. (X,d) metrik uzayı Bourbaki sınırlıdır.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ $f : (X,\rho) \to (X',\rho')$ fonksiyonunun istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler olduğu fakat sınırlı olmadığı kabul edilsin. Bu durumda $f(X)$ kümesi sınırlı olmadığından her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho'(f(x_{n+1}), f(x_i)) > n$ $(i = 1,...,n)$ olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi vardır. Hipotez gereği (x_n) dizisinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi vardır.

Herhangi $m \in \mathbb{N}$ ve $x' \in X'$ için $\{k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) \in B_d^m(x',1)\}$ kümesi sonludur. Aksi taktirde sabit bir $p \in A$ için

$$B_d^m(x',1) \subseteq B_d^{2m}(f(x_{n_p}),1) \subseteq B_d(f(x_{n_p}),2m)$$

kapsaması sonsuz çoklukta $k \in \mathbb{N}$ için $d'(f(x_{n_k}), f(x_{n_p})) < 2m$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $(f(x_{n_k}))$ istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi değildir. Bu ise f fonksiyonunun istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler olması ile çelişir. O halde f sınırlı bir fonksiyondur.

$(2 \Rightarrow 3)$ İspat açıktır.

$(3 \Rightarrow 4)$ (X,d) metrik uzayı Bourbaki sınırlı olmasın. Bu durumda her $m \in \mathbb{N}$ için X, sonlu çoklukta $B_d^m(x,\varepsilon_0)$ $(x \in X)$ kümeleri ile örtülemeyecek şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır. Sabit bir $x_0 \in X$ alınsın. Bu durumda $x_1 \notin B_d^1(x_0,\varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $x_1 \in X$ seçilebilir. Aynı şekilde $x_2 \notin B_d^2(x_0,\varepsilon_0) \cup B_d^2(x_1,\varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $x_2 \in X$ seçilsin. Bu işleme devam edilirse her $j \in \mathbb{N}$ ve $i = 0,...,j-1$ için $x_j \notin B_d^j(x_i,\varepsilon_0)$ olacak şekilde X de bir (x_j) dizisi elde edilir. $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ olsun. $(\tilde{X},\tilde{d})$ metrik uzayı sınırlı olmadığından her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_n,\tilde{x}_0) > n$ olacak şekilde $\tilde{x}_n \in \tilde{X}$ vardır. Şimdi $f : (X,\rho) \to (\tilde{X},\tilde{\rho})$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{x}_j & , \quad \text{bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } x = x_j \text{ ise} \\ \tilde{x}_0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa f sınırlı değildir. Fakat bu fonksiyon istatistiksel Bourbaki-Cauchy regülerdir. Gerçekten X de bir (y_n) istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisi alınırsa bulunan bu $\varepsilon_0 > 0$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : y_n \in B_d^{m_0}(x_0,\varepsilon_0)\}) = 1$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı ve bir $x_0 \in X$ noktası vardır. Yani $B_d^{m_0}(x_0,\varepsilon_0)$ kümesi (y_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir. Diğer tarafdan $A = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in B_d^{m_0}(x_0,\varepsilon_0)\}$ olmak üzere sadece sonlu sayıda $j \in \mathbb{N}$ için $x_j \in \{y_n : n \in A\}$ olur. Aksi taktirde sonsuz çoklukta $j_0 \in \mathbb{N}$ için

$$B_d^{m_0}(x_0,\varepsilon_0) \subseteq B_d^{2m_0}(x_{j_0},\varepsilon_0)$$

sağlanacağından bu (x_j) dizisinin oluşturulması ile çelişir. O halde $\{f(y_n) : n \in A\}$ kümesi $\tilde{X}$ nın sonlu bir alt kümesidir. Buradan herhangi $\varepsilon > 0$ için $M = \max\{m_n : n \in A\}$ ve her $n \in A$ için m_n sayısı $\tilde{x}_0$ dan $f(y_n)$ noktasına ε-zincirin uzunluğu olmak üzere $f(y_n) \in B_d^M(\tilde{x}_0,\varepsilon)$ elde edilir. Böylece $\delta(A) = 1$ olmak üzere $(f(y_n))_{n\in A}$ alt dizisi Bourbaki-Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $(f(y_n))$ istatistiksel Bourbaki-Cauchy dizisidir. Sonuç olarak hipotezin aksine X metrik uzayından sınırlı olmayan zincirlenebilir bir $\tilde{X}$ metrik uzayına sınırlı olmayan istatistiksel Bourbaki-Cauchy regüler fonksiyon bulunmuş olur. Bu nedenle X Bourbaki sınırlı olmalıdır.

$(4) \Rightarrow (1)$ Teorem 2.41 den X Bourbaki sınırlı ise X deki her dizinin Bourbaki-Cauchy alt dizisi bulunacağından istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisi de bulunur. $\square$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1. Metrik uzayların aksine asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki sınırlılık ve dış Bourbaki sınırlılık olarak iki farklı kavram tanımlanmıştır. Metrik uzaylarda bu iki kavramın çakıştığı vurgulanmıştır. Dış Bourbaki sınırlılığın Bourbaki sınırlılıktan daha zayıf bir özellik olduğu bir örnek üzerinde gösterilmiştir. Bourbaki sınırlılık kavramı metrik uzaylarda olduğu gibi asimetrik metrik uzaylarda da ön kompaktlık ve sınırlılık arasında bir özellik olarak bulunmuştur. Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda sınırlı bir kümenin metrik uzaylarda olduğu gibi çapının sonlu olması gerekmediği gösterilmiştir. Benzer şekilde asimetrik normlu uzaylarda tüm bu kavramlar verilmiştir ve normlu uzaylarda olduğu gibi (dış) Bourbaki sınırlılık ve sınırlılığın denk olduğu ifade edilmiştir. Asimetrik metriğe göre Bourbaki sınırlı bir kümenin eşlenik asimetriğe ve asimetrinin ürettiği metriğe göre Bourbaki sınırlı olup olmadığı araştırılmıştır. Verilen tüm ilişkiler karşıt örneklerle desteklenmiştir. Hangi şartlar altında asimetrik metriğe, eşlenik asimetrik metriğe ve asimetrinin ürettiği metriğe göre Bourbaki sınırlılığın denk olacağı ifade ve ispat edilmiştir. Metrik uzaylardaki durumun aksine asimetrik metrik uzaylarda Bourbaki sınırlı kümelerin alt kümelerinin Bourbaki sınırlı olmasının gerekmediği ve aynı şekilde Bourbaki sınırlı kümelerin asimetrinin ürettiği topolojiye göre kapanışlarının Bourbaki sınırlı olmasının gerekmediği gösterilmiştir. Diğer tarafdan asimetrik metrik uzayda bir kümenin Bourbaki sınırlı olması için gerek ve yeter şartın eşlenik asimetrik metriğin ürettiği topolojiye göre kapanışının Bourbaki sınırlı olması gerektiği ispat edilmiştir. Tez çalışmasının devamında asimetrik metrik uzaylarda farklı tipte Bourbaki Cauchy dizileri tanımlanarak Bourbaki sınırlılığın bu diziler yardımıyla karakterize edilip edilemeyeceği araştırılmıştır. Metrik uzayın Bourbaki sınırlı olması için gerek ve yeter şartın uzaydaki her dizinin Bourbaki Cauchy alt dizisi bulunması iken bu ifadenin asimetrik metrik uzayda herhangi bir anlamda Bourbaki Cauchy dizisi için sağlanması gerekmemektedir. Ayrıca bu Cauchy dizileri yardımıyla asimetrik metrik uzaylarda farklı türde Bourbaki tamlık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar üzerinde çalışılmıştır. Bourbaki tamlık

ve Bourbaki sınırlılığın kompaktlık, dizisel kompaktlık ve düzgün yerel kompaktlık ile ilişkisi incelenmiştir. Metrik uzayların aksine Bourbaki sınırlı asimetrik metrik uzayların dizisel kompakt olmasının gerekmediği bir örnek ile gösterilmiştir.

Asimetrik metrik uzayda sol (sağ) K- Cauchy dizisi gibi sol (sağ) K-Bourbaki Cauchy dizisi tanımı verilebilir. (X,ρ) asimetrik metrik uzay ve (x_n) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq r \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B^m_\rho(x_r,\varepsilon)$ $(x_n \in B^m_{\bar{\rho}}(x_r,\varepsilon))$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}$ sayıları bulunuyorsa (x_n) dizisine sol (sağ) K-Bourbaki Cauchy dizisi denir. Sol (sağ) K-Bourbaki Cauchy dizileri zayıf sol (sağ) K-Bourbaki Cauchy ve sol ρ-Bourbaki Cauchy dizilerinden farklıdır. Örnek 3.8 de verilen asimetrik metrik uzay ve $(w_n) = (0,1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},...)$ dizisi alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(w_1,w_n) = 0$ olacağından (w_n) dizisi zayıf sol K-Cauchy ve bu nedenle de zayıf sol K-Bourbaki Cauchy dizisi olur. Fakat $s > r > 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $w_s \notin B^m_\rho(w_r,\frac{1}{2}) = [w_r,1]$ olduğundan bu dizi sol K-Bourbaki Cauchy dizisi değildir. Metrik uzaylarda bu şekilde üç farklı Bourbaki Cauchy dizisi tanımlamaya gerek olmadığına dikkat edilmelidir. Benzer şekilde uzaydaki her sol K-Bourbaki Cauchy dizisinin sol ρ-yakınsak alt dizisinin bulunmasıyla sol K-Bourbaki tamlık tanımlanabilir.

Metrik uzayda kompaktlık tamlığa ve ön kompaktlığa denk olduğu gibi kompaktlık Bourbaki tamlığa ve Bourbaki sınırlılığa denktir. Asimetrik metrik uzayda ise kompaktlık sol K-tamlığa ve ön kompaktlığa denktir. Bununla beraber kompaktlığın sol K-Bourbaki tamlığa ve Bourbaki sınırlılığa denk olup olmadığı araştırılabilir. İkinci olarak zayıf sol K-tamlığın sol K-tamlığa denk olduğu gibi zayıf sol K-Bourbaki tamlığın sol K-Bourbaki tamlığa denk olup olmadığına bakılabilir.

Tüm bu kavramlar asimetrik düzgün uzaylar üzerinde çalışılabilir.

2. Asimetrik metrik uzaylarda bir dizinin istatistiksel limitinin tek olmadığı gösterilmiştir. Belli bir anlamda istatistiksel Cauchy dizisinin aynı anlamda Cauchy alt dizisi bulunmaktadır. Zayıf sol K-istatistiksel Cauchy ve sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisi bulunması gerekmez. Bir dizinin sol ρ-istatistiksel limit noktaları kümesi sol ρ-limit noktaları kümesi tarafından kesin olarak kapsanır. Bir asimetrik metrik uzayın dizisel tam olması için gerek ve yeter şart uzaydaki her sol

ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır. Asimetrik metrik uzayda her sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel limit noktası varsa uzay dizisel tamdır. Bir asimetrik metrik uzayın sol K-tam olması için gerek ve yeter şart uzaydaki her sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olmasıdır. Uzaydaki her sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her zayıf sol K-istatistiksel Cauchy dizisinin sol ρ-istatistiksel yakınsak olmasıdır. Ön kompakt asimetrik metrik uzayda her sol ρ-istatistiksel Cauchy dizisi sol ρ-istatistiksel yakınsak ise uzay kompakttır. Ön kompakt asimetrik metrik uzayda her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi vardır. X sayılabilir ve X deki her dizinin sol ρ-istatistiksel Cauchy alt dizisi varsa X ön kompakttır. (X,ρ) asimetrik metrik uzayının kalıtımsal olarak ön kompakt olması için gerek ve yeter şart X deki her dizinin zayıf sol K-istatistiksel Cauchy alt dizisinin bulunmasıdır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve Cauchy dizileri asimetrik düzgün uzaylar üzerinde tanımlanıp çalışılabilir.

3. Kompaktlık ile tamlık arasındaki özellikleri sağlayan metrik uzaylar yıllardır birçok makalenin araştırma konusu olmuştur. Bunlardan en iyi bilineni Atsuji ya da UC uzaylarıdır. Bu uzaylar üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir. Bourbaki tam metrik uzay da kompaktlık ile tamlık arasındaki özellikleri sağlayan metrik uzaylara örnektir. Atsuji uzayının Bourbaki tam olduğu bilinmektedir. Bu tez çalışmasının son kısmında istatistiksel Bourbaki Cauchy dizisi olarak adlandırılan dizilerin yeni bir sınıfı tanımlanmış ve bu diziler yardımıyla Bourbaki tamlığa denk yeni bir şart ortaya konulmuştur. Sonuç olarak Atsuji uzaylarında her dizinin istatistiksel Bourbaki Cauchy alt dizisinin mevcut olduğu elde edilir. Ayrıca kompaktlık, Bourbaki sınırlılık ve Bourbaki tamlıkla karakterize edilebildiğinden metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şartın uzayın Bourbaki sınırlı ve uzaydaki her dizinin istatistiksel Bourbaki-Cauchy alt dizisinin bulunması sonucu ortaya çıkar.

7. KAYNAKLAR

[1] M. Atsuji, “Uniform continuity of continuous functions of metric spaces,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 1, pp. 11–16, 1958.

[2] S. Kundu and T. Jain, “Atsuji spaces: equivalent conditions,” *Topology Proceedings*, vol. 30, no. 1, pp. 301–325, 2006.

[3] M. I. Garrido and A. S. Meroño, “New types of completeness in metric spaces,” *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, vol. 39, no. 2, pp. 733–758, 2014.

[4] W. Wilson, “On quasi-metric spaces,” *American Journal of Mathematics*, vol. 53, no. 3, pp. 675–684, 1931.

[5] H. Fast, “Sur la convergence statistique,” *Colloquium Mathematicae*, vol. 2, no. 3-4, pp. 241–244, 1951.

[6] H. Steinhaus, “Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique,” *Colloquium Mathematicae*, vol. 2, no. 1, pp. 73–74, 1951.

[7] A. Zygmund, *Trigonometric series*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

[8] I. Schoenberg, “The integrability of certain functions and related summability methods,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 5, pp. 361–375, 1959.

[9] G. E. Albert, “A note on quasi-metric spaces,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 47, no. 6, pp. 479–482, 1941.

[10] S. Bodjanová, “Some basic notions of mathematical analysis in oriented metric spaces,” *Mathematica Slovaca*, vol. 31, no. 3, pp. 277–289, 1981.

[11] D. Doitchinov, “On completeness in quasi-metric spaces,” *Topology and its Applications*, vol. 30, no. 2, pp. 127–148, 1988.

[12] H.-P. A. Künzi, “Complete quasi-pseudo-metric spaces,” *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 59, no. 1-2, pp. 121–146, 1992.

[13] ——, “Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology,” in *Handbook of the history of general topology*, C. E. Aull and R. Lowen, Eds. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2001, ch. 3, pp. 853–968.

[14] H.-P. A. Künzi and F. Yıldız, "Convexity structures in T_0-quasi-metric spaces," *Topology and its Applications*, vol. 200, pp. 2–18, 2016.

[15] ——, "Extensions of T_0-quasi-metrics," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 153, no. 1, pp. 196–215, 2017.

[16] H.-P. A. Künzi, M. Mrsevic, and I. Reilly, *Convergence, precompactness and symmetry in quasi-uniform spaces*. University of Auckland. Department of Mathematics and Statistics, 1991.

[17] A. C. Mennucci, "On asymmetric distances," *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, vol. 1, pp. 200–231, 2013.

[18] I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, "On oriented metric spaces," *Mathematica Slovaca*, vol. 34, no. 3, pp. 299–305, 1984.

[19] S. Romaguera, "Left K-completeness in quasi-metric spaces," *Mathematische Nachrichten*, vol. 157, no. 1, pp. 15–23, 1992.

[20] ——, "Fixed point theorems for mappings in complete quasi-metric spaces," *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University. Mathematics*, vol. 39, no. 2, pp. 159–164, 1993.

[21] S. Romaguera and A. Gutiérrez, "A note on Cauchy sequences in quasi-pseudometric spaces," *Glasnik Matematicki*, vol. 21, no. 191–200, 1986.

[22] R. A. Stoltenberg, "On quasi-metric spaces," *Duke Mathematical Journal*, vol. 36, no. 1, pp. 65–71, 1969.

[23] L. García-Raffi, "Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces," *Topology and its Applications*, vol. 153, no. 5-6, pp. 844–853, 2005.

[24] J. Conradie and M. Mabula, "Completeness, precompactness and compactness in finite-dimensional asymmetrically normed lattices," *Topology and its Applications*, vol. 160, no. 15, pp. 2012–2024, 2013.

[25] ——, "Convergence and left-K-sequential completeness in asymmetrically normed lattices," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 139, no. 1-2, pp. 147–159, 2013.

[26] ——, "Convergence and completeness in asymmetrically normed sequence lattices," *Quaestiones Mathematicae*, vol. 38, no. 1, pp. 73–81, 2015.

[27] A. Mielke and T. Roubícek, "A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys," *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 1, no. 4, pp. 571–597, 2003.

[28] A. Mainik and A. Mielke, "Existence results for energetic models for rate-independent systems," *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 22, no. 1, pp. 73–99, 2005.

[29] I. V. Chenchiah, M. O. Rieger, and J. Zimmer, "Gradient flows in asymmetric metric spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 71, no. 11, pp. 5820–5834, 2009.

[30] M. O. Rieger and J. Zimmer, "Young measure flow as a model for damage," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, vol. 60, no. 1, pp. 1–32, 2009.

[31] M. S. Waterman, T. F. Smith, and W. A. Beyer, "Some biological sequence metrics," *Advances in Mathematics*, vol. 20, no. 3, pp. 367–387, 1976.

[32] R. Domiaty, "The Hausdorff separation property for space-time," *Eleutheria (Athenes)*, vol. 2, no. 1979, pp. 358–371, 1979.

[33] ——, "Life without T_2," in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*. Springer, 1981, pp. 251–258.

[34] Z. H. Toyganözü and S. Pehlivan, "Some results on exhaustiveness in asymmetric metric spaces," *Filomat*, vol. 29, no. 1, pp. 183–192, 2015.

[35] S. Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*. Basel, Switzerland: Birkhauser-Springer, 2013.

[36] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922.

[37] R. Kannan, "Some results on fixed points–II," *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, no. 4, pp. 405–408, 1969.

[38] L. B. Ćirić, "A generalization of Banach's contraction principle," *Proceedings of the American Mathematical society*, vol. 45, no. 2, pp. 267–273, 1974.

[39] I. Altun and H. Şimsek, "Some fixed point theorems on ordered metric spaces and application," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2010, no. 1, pp. 621–469, 2010.

[40] J. Jachymski, "Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 3, pp. 768–774, 2011.

[41] B. Samet, C. Vetro, and P. Vetro, "Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 75, no. 4, pp. 2154–2165, 2012.

[42] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. New York, USA: McGraw-Hill, 1964.

[43] J. Nagata, "On the uniform topology of bicompactifications," *Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University. Series A: Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 28–38, 1950.

[44] A. Monteiro and M. M. Peixoto, "Le nombre de Lebesgue et la continuité uniforme," *Portugaliae Mathematica*, vol. 10, no. 3, pp. 105–113, 1951.

[45] S. Nadler and T. West, "A note on Lebesgue spaces," *Topology Proceedings*, vol. 6, pp. 363–369, 1981.

[46] S. Romaguera and J. A. Antonino, "On Lebesgue quasimetrizability," *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol. A(7), no. 1, pp. 59–66, 1993.

[47] G. Beer, "Metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous and Hausdorff distance," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 95, no. 4, pp. 653–658, 1985.

[48] ——, "More about metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 33, no. 3, pp. 397–406, 1986.

[49] ——, "UC spaces revisited," *The American Mathematical Monthly*, vol. 95, no. 8, pp. 737–739, 1988.

[50] ——, *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publisher, 1993.

[51] W. Waterhouse, "On UC spaces," *The American Mathematical Monthly*, vol. 72, no. 6, pp. 634–635, 1965.

[52] S. Mrowka, "On normal metrics," *The American Mathematical Monthly*, vol. 72, no. 9, pp. 998–1001, 1965.

[53] G. Beer, "Between the cofinally complete spaces and the UC spaces," *Houston Journal of Mathematics*, vol. 38, pp. 999–1015, 2012.

[54] B. Burdick, "On linear cofinal completeness," *Topology Proceedings*, vol. 25, pp. 435–455, 2000.

[55] N. Bourbaki, *Elements of mathematics, general topology, part 1*. Paris, France: Springer, 1966.

[56] J. Hejcman, "Boundedness in uniform spaces and topological groups," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 9, no. 4, pp. 544–563, 1959.

[57] Ş. Yüksel, *Genel Topoloji*. Konya, Türkiye: Eğitim Akademi Yayınları, 2008.

[58] J. A. Fridy, "On statistical convergence," *Analysis*, vol. 5, no. 4, pp. 301–314, 1985.

[59] J. Fridy, "Statistical limit points," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 118, no. 4, pp. 1187–1192, 1993.

[60] J. Fridy and C. Orhan, "Statistical limit superior and limit inferior," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 125, no. 12, pp. 3625–3631, 1997.

[61] J. Connor, "A topological and functional analytic approach to statistical convergence," in *Analysis of Divergence*. Springer, 1999, pp. 403–413.

[62] E. Savaş, "On statistically convergent sequences of fuzzy numbers," *Information Sciences*, vol. 137, no. 1-4, pp. 277–282, 2001.

[63] S. Pehlivan, A. Güncan, and M. Mamedov, "Statistical cluster points of sequences in finite dimensional spaces," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 54, no. 1, pp. 95–102, 2004.

[64] H. Çakallı, "A study on statistical convergence," *Functional Analysis, Approximation and Computation*, vol. 1, no. 2, pp. 19–24, 2009.

[65] M. Mursaleen, C. Çakan, S. A. Mohiuddine, and E. Savaş, "Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences," *Acta Mathematica Sinica, English Series*, vol. 26, no. 11, pp. 2131–2144, 2010.

[66] H. Çakallı, "Statistical ward continuity," *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, no. 10, pp. 1724–1728, 2011.

[67] S. Altundağ, "On generalized difference lacunary statistical convergence in a paranormed space," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2013, no. 1, p. 256, 2013.

[68] G. Di Maio and L. D. Kočinac, "Statistical convergence in topology," *Topology and its Applications*, vol. 156, no. 1, pp. 28–45, 2008.

[69] M. Küçükaslan and U. Değer, "On statistical boundedness of metric valued sequences," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 174–186, 2012.

[70] M. Küçükaslan, U. Değer, and O. Dovgoshey, "On the statistical convergence of metric valued sequences," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 66, no. 5, pp. 796–805, 2014.

[71] B. Bilalov and T. Nazarova, "On statistical convergence in metric spaces," *Journal of Mathematics Research*, vol. 7, no. 1, p. 37, 2015.

[72] A. Caserta, G. Di Maio, and L. D. Kočinac, "Statistical convergence in function spaces," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2011, pp. 1–11, 2011.

[73] S. Karakuş, K. Demirci, and O. Duman, "Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 35, no. 4, pp. 763–769, 2008.

[74] M. Gürdal and S. Pehlivan, "Statistical convergence in 2-normed spaces," *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, vol. 33, no. 2, p. 257–264, 2009.

[75] H. I. Miller, "A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 347, no. 5, pp. 1811–1819, 1995.

[76] A. Gadjiev and C. Orhan, “Some approximation theorems via statistical convergence,” *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 32, no. 1, pp. 129–138, 2002.

[77] A. D. Gadjiev, “Simultaneous statistical approximation of analytic functions and their derivatives by k-positive linear operators,” *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 57–66, 2011.

[78] I. Maddox, “Statistical convergence in a locally convex space,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 104, no. 1, pp. 141–145, 1988.

[79] P. Erdös and G. Tenenbaum, “Sur les densités de certaines suites d’entiers,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 3, no. 3, pp. 417–438, 1989.

[80] S. Pehlivan and M. A. Mamedov, “Statistical cluster points and turnpike,” *Optimization*, vol. 48, no. 1, pp. 91–106, 2000.

[81] J. A. Fridy and M. K. Khan, “Tauberian theorems via statistical convergence,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 228, no. 1, pp. 73–95, 1998.

[82] J. A. Fridy and C. Orhan, “Lacunary statistical summability,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 173, no. 2, pp. 497–504, 1993.

[83] M. Mursaleen, “λ-statistical convergence,” *Mathematica Slovaca*, vol. 50, no. 1, pp. 111–115, 2000.

[84] M. Mursaleen and O. H. Edely, “Generalized statistical convergence,” *Information Sciences*, vol. 162, no. 3-4, pp. 287–294, 2004.

[85] V. Karakaya and T. Chishti, “Weighted statistical convergence,” *Iranian Journal of Science and Technology. Transaction A: Science*, vol. 33, no. 3, pp. 119–223, 2009.

[86] O. H. Edely and M. Mursaleen, “On statistical A-summability,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 49, no. 3-4, pp. 672–680, 2009.

[87] F. Patterson and E. Savaş, “On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences,” *Thai Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 267–272, 2012.

[88] A. Esi and E. Savaş, “On lacunary statistically convergent triple sequences in probabilistic normed space,” *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 9, no. 5, p. 2529, 2015.

[89] P. T. Lambrinos, “On precompact (quasi-) uniform structures,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 62, no. 2, pp. 365–366, 1977.

[90] M. G. Murdeshwar and S. A. Naimpally, *Quasi-uniform topological spaces*. Noordhoff, 1966.

[91] S. Kundu, M. Aggarwal, and S. Hazra, “Finitely chainable and totally bounded metric spaces: Equivalent characterizations,” *Topology and its Applications*, vol. 216, pp. 59–73, 2017.

[92] S. Willard, *General Topology*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.

[93] M. Koçak, *Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar*. Eskişehir, Türkiye: Kampüs Yayıncılık, 2011.

[94] R. Engelking, *General topology*. Berlin, Germany: Heldermann Verlag, 1989.

[95] C. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*. Berlin, Germany: Springer, 2006.

[96] O. Bizim, *Genel topoloji*. Bursa, Türkiye: Dora Yayıncılık, 2013.

[97] B. Musayev and M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*. Kütahya, Türkiye: Balcı Yayınları, 2000.

[98] O. Mucuk, *Topoloji ve Kategori*. Ankara, Türkiye: Nobel Yayın Dağıtım, 2010.

[99] M. Aggarwal and S. Kundu, “More on variants of complete metric spaces,” *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 151, no. 2, pp. 391–408, 2017.

[100] M. I. Garrido and A. S. Meroño, “Uniformly metrizable bornologies,” *Journal of Convex Analysis*, vol. 20, no. 1, pp. 285–299, 2013.

[101] ——, “Some classes of bounded sets in metric spaces,” in *Contribuciones Matemáticas en Honor a Juan Tarrés*. UCM, 2012, pp. 179–186.

[102] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1972.

[103] J. Kelly, “Bitopological spaces,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 3, no. 1, pp. 71–89, 1963.

[104] I. L. Reilly, P. Subrahmanyam, and M. Vamanamurthy, “Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces,” *Monatshefte für Mathematik*, vol. 93, no. 2, pp. 127–140, 1982.

[105] C. Alegre, I. Ferrando, L. García-Raffi, and E. S. Pérez, “Compactness in asymmetric normed spaces,” *Topology and its Applications*, vol. 155, no. 6, pp. 527–539, 2008.

[106] H.-P. A. Künzi, “A note on sequentially compact quasi-pseudo-metric spaces,” *Monatshefte für Mathematik*, vol. 95, no. 3, pp. 219–220, 1983.

[107] J. Collins and J. Zimmer, “An asymmetric Arzelà–Ascoli theorem,” *Topology and its Applications*, vol. 154, no. 11, pp. 2312–2322, 2007.

[108] E. Kováč, “On φ-convergence and φ-density,” *Mathematica Slovaca*, vol. 55, no. 3, pp. 329–351, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Merve İLKHAN
Doğum Tarihi ve Yeri	: İstanbul 1989
Yabancı Dili	: İngilizce
Eposta	: merveilkhan@duzce.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	İstanbul Ticaret Üniversitesi	2012
Lise		Küçükçekmece Y.D.A. Lisesi	2007

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. E. E. Kara, M. İlkhan, On some Banach sequence spaces derived by a new band matrix, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 9(2), 141-159 (2015).

A2. E. E. Kara, M. İlkhan, On some paranormed A-ideal convergent sequence spaces defined by Orlicz function *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, 4(4), 183-194 (2015).

A3. E. E. Kara, M. İlkhan, On a new class of s-type operators, *Konuralp Journal of Mathematics*, 3(1), 1-11 (2015).

A4. E. E. Kara, M. İlkhan, Some properties of generalized Fibonacci sequence spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, 64(11), 2208-2223 (2016).

A5. E. E. Kara, M. İlkhan, Lacunary I-convergent and lacunary I-bounded sequence spaces defined by an Orlicz function, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4(2), 150-159 (2016).

A6. E. E. Kara, M. Daştan, M. İlkhan, On almost ideal convergence with respect to an Orlicz function, *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 87-94 (2016).

A7. E. E. Kara, M. Daştan, M. İlkhan, On Lacunary ideal convergence of some sequences, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1), 234-242 (2017).

A8. M. İlkhan, E. E. Kara, Uniform continuity and Cauchy continuity in G-metric spaces, *Journal of Inequalities and Special Functions*, 8(3), 59-68 (2017).

A9. P. Zengin Alp, M. İlkhan, E. E. Kara, Generalized Stolz mappings, *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(2), 12-18 (2017).

A10. M. İlkhan, M. Başarır, E. E. Kara, A note on I-convergence and I^*-convergence of an infinite product, *Creative Mathematics and Informatics*, 26(3), 275-279 (2017).

A11. M. İlkhan, M. Akyiğit, E. E. Kara, On new types of sets via γ-open sets in bitopological spaces, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 67(1), 225-234 (2018).

A12. N. Turan, E. E. Kara, M. İlkhan, Generalization of statistical convergence in cone metric spaces, *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, (kabul edildi).

A13. M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara, On the spaces of linear operators acting between asymmetric cone normed spaces, *Mediterranean Journal of Mathematics*, (kabul edildi).

A14. M. İlkhan, E. E. Kara, A new type of statistical Cauchy sequence and its relation to Bourbaki completeness, *Cogent Mathematics and Statistics*, (hakem sürecinde).

A15. M. İlkhan, E. E. Kara, On statistically converence in quasi metric spaces, *Open Mathematics*, (hakem sürecinde).

A16. M. İlkhan, E. E. Kara, Bourbaki completeness in quasi metric spaces, *Topology and its Applications*, (hakem sürecinde).

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler :

B1 M. İlkhan, E. E. Kara (2014) On some new difference sequence spaces. Karatekin Mathematics Days International Mathematics Symposium (KMD 2014) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B2 E. E. Kara, M. İlkhan (2014) Some geometric properties of weighted sequence space $e_w^\theta(p)$. XII. Geometri Sempozyumu (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B3 M. İlkhan, M. Akyiğit, E. E. Kara (2015) On γ-P-Open Sets in Bitopological Spaces. 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA2015) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B4 M. Daştan, M. İlkhan, E. E. Kara (2015) Almost I Convergent Sequence Spaces Defined by Orlicz Function. 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA2015) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B5 M. İlkhan, E. E. Kara (2016) Some properties of generalized metric spaces. 2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B6 E. E. Kara, M. Başarır, M. İlkhan (2016) Ideal Cacuhy condition for infinite products. 2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B7 M. İlkhan, E. E. Kara (2016) New Type Open Sets in Bitopological Spaces. 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B8 M. İlkhan, E. E. Kara (2016) A new type measure of noncompactness. International Congress on Fundamental and Applied Sciences 2016 (ICFAS 2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B9 M. İlkhan, E. E. Kara (2016) Some new spaces of lacunary ideal convergent sequences. International Congress on Fundamental and Applied Science 2016 (ICFAS 2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B10 E. E. Kara, M. İlkhan (2016) Ideal convergent sequence spaces via Orlicz function. 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B11 M. Daştan, E. E. Kara, M. İlkhan (2016) New type of lacunary ideal convergent sequence spaces. 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B12 M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara (2016) Cofinally quasi Cauchy continuity. 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B13 E. E. Kara, M. İlkhan (2017) Generalizing asymmetric convergence and Cauchy conditions using asymptotic density. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B14 M. İlkhan, E. E. Kara (2017) On asymmetric cone normed spaces. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B15 M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara, (2017) On Boundedness and Continuity of Linear Operators Between Asymmetric Cone Normed Spaces. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B16 P. Zengin Alp, M. İlkhan, E. E. Kara (2017) A New Version of Stolz Mappings. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B17 M. İlkhan, E. E. Kara (2017) Some Effective Results Related To The New Statistical Cauchy Sequence. 6^{th} International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B18 E. E. Kara, M. İlkhan (2017) A New Property Between Compactness and Completeness in Generalized Metric Spaces. 6^{th} International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)