

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**3-BOYUTLU LORENTZİYEN UZAYDA
KATI CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ**

Mehmet AYDINALP

**Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ**



MANİSA-2018

**Mehmet
AYDINALP**

**3-BOYUTLU LORENTZİYEN UZAYDA
KATI CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ**

2018

TEZ ONAYI

Mehmet AYDINALP tarafından hazırlanan "**3-Boyutlu Lorentziyen Uzayda Katı Cisimlerin Kinematiki**" adlı tez çalışması 11/05/2018 tarihinde aşığıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak savunulmuş ve **oybirliğı** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman

Prof. Dr. Mustafa KAZAZ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



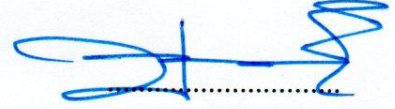
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Hasan Hüseyin Uğurlu
Gazi Üniversitesi



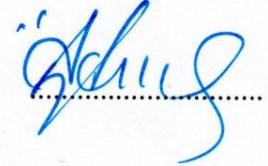
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Yılmaz Tunçer
Uşak Üniversitesi



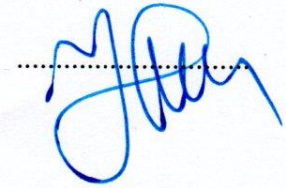
Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Ali Özdemir
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Kocayigit
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet AYDINALP



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ	1
2. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ....	5
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzakında Temel Kavramlar	5
2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzakında Eğriler Teorisi	6
2.3. 3-Boyutlu Öklid Uzakında Yüzeyler Teorisi	8
3. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN İLERİ KİNEMATİĞİ.....	20
3.1. Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematiki	20
3.2. Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematikiinin Hız Denklemi	23
4. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN TERS KİNEMATİĞİ.....	30
4.1. Yüzeylerde Darboux Çatı Metodu	30
4.2. 3-Boyutlu Öklid Uzakında Yüzeylerin Kontak Denklemleri	32
4.3. 3-Boyutlu Öklid Uzakında Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematiki	38
5. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ	49
5.1. 3-Boyutlu Lorentz Uzakında Temel Kavramlar.....	49
5.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzakında Eğriler Teorisi.....	51
5.3. 3-Boyutlu Lorentz Uzakında Yüzeyler Teorisi	53
5.3.1. 3-Boyutlu Lorentz Uzakında Spacelike Yüzeylerin Teorisi.....	54
5.3.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzakında Timelike Yüzeylerin Teorisi.....	66
6. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN İLERİ KİNEMATİĞİ.....	87
6.1. Spacelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının İleri Kinematiki.....	87
6.1.1. Spacelike Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematiki	87
6.1.2. Spacelike Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematikiinin Hız Denklemi.....	91
6.1.3. Örnekler	93
6.2. Timelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının İleri Kinematiki.....	100
6.2.1. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematiki	100
6.2.2. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematikiinin Hız Denklemi	104
6.2.3. Örnekler	106
6.2.4. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematiki	114

6.2.5. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığının Hız Denklemi	118
6.2.6. Örnekler	120
7. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN TERS KİNEMATİĞİ	128
7.1. Spacelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı	128
7.1.1. Spacelike Yüzeylerde Darboux Çatı Metodu	128
7.1.2. Spacelike Yüzeylerde Kontak Denklemler.....	130
7.1.3. Spacelike Yüzeylerde Kontak Yuvarlanmanın Ters Kinematığı.....	136
7.2. Timelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı	146
7.2.1. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Darboux Çatı Metodu.....	146
7.2.2. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Denklemler	149
7.2.3. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı.....	155
7.2.4. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Darboux Çatı Metodu.....	166
7.2.5. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Denklemler	168
7.2.6. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı.....	174
KAYNAKLAR	181
ÖZGEÇMİŞ	184

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

IR	: Reel sayılar cümlesi
E^3	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
$\langle , \rangle_E$	: Öklidyen iç çarpım
$\times_E$	: Öklidyen vektörel çarpım
S^2	: Öklidyen birim küre
IR_1^3	: 3-boyutlu Lorentziyen Uzay
$\langle , \rangle$	: Lorentziyen iç çarpım
$\times$	: Lorentziyen vektörel çarpım
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
S_1^2	: Lorentziyen birim küre
Λ	: Işık konisi
S_1, S_2	: Sırasıyla, sabit yüzey ve hareketli yüzey
α, β	: Sırasıyla, S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerindeki kontak yörünge eğrileri
s	: Yay uzunluğu parametresi
(T, g, n)	: Darboux çatısı
k_g	: Geodezik eğrilik
k_n	: Normal eğrilik
τ_g	: Geodezik burulma
k_g^*	: İndirgenmiş geodezik eğrilik
k_n^*	: İndirgenmiş normal eğrilik
τ_g^*	: İndirgenmiş geodezik burulma
ω	: Hareketli yüzeyin açısal hızı
v_P	: Hareketli yüzey üzerindeki bir P noktasının hızı
σ	: Yuvarlanma oranı
φ	: Yuvarlanma yönü
$\hat{\omega}_3$	: Telafi edici dönme oranı
ω_{ij}	: Diferansiyel 1-formlar

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi.....	21
Şekil 3.2. Paraboloid yüzeyinin birim silindir yüzeyi üzerinde β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketi	26
Şekil 4.1. S^2 üzerinde yatan bir α eğrisi boyunca Darboux çatısı.....	31
Şekil 4.2. S_1 yüzeyi üzerinde T vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 yüzeyi	33
Şekil 4.3. Kontak yuvarlanmanın ters kinematiğinin girdileri ve çıktıları	38
Şekil 4.4. Birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan S^2 birim küresi	40
Şekil 4.5. $x = \tan(\varphi + \theta) / 2$ için birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan birim kürenin T vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri	48
Şekil 6.1. S_2 spacelike yüzeyinin S_1 spacelike yüzeyi üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi	89
Şekil 6.2. Hiperbolik birim silindirin spacelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi.....	94
Şekil 6.3. Hiperbolik birim kürenin hiperbolik birim silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi	97
Şekil 6.4. S_2 timelike yüzeyinin S_1 timelike yüzeyi üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi	102
Şekil 6.5. Birim silindirin timelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi	107
Şekil 6.6. Lorentziyen birim kürenin yarıçapı $1/2$ olan timelike silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi	111
Şekil 6.7. S_2 timelike yüzeyinin S_1 timelike yüzeyi üzerinde β ve α timelike eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi	115
Şekil 6.8. Lorentziyen birim silindirin timelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi.....	120
Şekil 6.9. Lorentziyen birim kürenin yarıçapı $1/2$ olan timelike silindir üzerinde β ve α timelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi	124
Şekil 7.1. H_0^2 üzerinde yatan bir α spacelike eğrisi boyunca Darboux çatısı...	129
Şekil 7.2. S_1 spacelike yüzeyi üzerinde T spacelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 spacelike yüzeyi	131
Şekil 7.3. Hiperbolik birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan H_0^2 hiperbolik birim küresi.....	138
Şekil 7.4. $x = \tan(\varphi + \theta) / 2$ için hiperbolik birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan hiperbolik birim kürenin T spacelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri	146
Şekil 7.5. S_1^2 üzerinde yatan bir α spacelike eğrisi boyunca Darboux çatısı....	148
Şekil 7.6. S_1 timelike yüzeyi üzerinde T spacelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 timelike yüzeyi	150
Şekil 7.7. Timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan S_1^2 Lorentziyen birim küresi	157

Şekil 7.8. $x = \tanh(\varphi + \theta) / 2$ için $3/4$ yarıçaplı timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin T spacelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri	165
Şekil 7.9. S_1^2 üzerinde yatan bir α timelike eğrisi boyunca Darboux çatısı	167
Şekil 7.10. S_1 timelike yüzeyi üzerinde T timelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 timelike yüzeyi	169
Şekil 7.11. $x = \tanh(\varphi + \theta) / 2$ için $3/4$ yarıçaplı timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin T timelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri	180



TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Kazaz' a teşekkürlerimi sunarım.

Bilgi ve tecrübesi ile yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen hocam Sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin Uğurlu' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan, beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve her daim yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Mehmet AYDINALP
Manisa, 2018



ÖZET

Doktora Tezi

3-Boyutlu Lorentziyen Uzayda Katı Cisimlerin Kinematığı

Mehmet AYDINALP

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Bu tezde, Lorentziyen 3-uzayında hareketli bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzeyin sabit bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketinin ileri ve ters kinematığı örneklerle incelenmiştir.

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kontak yuvarlanma hareketi ile ilgili literatür bilgisi verilir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerin teorisi ile ilgili temel kavramlar detaylı bir şekilde verilir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde, Öklid 3-uzayında kontak yuvarlanma hareketinin ileri ve ters kinematığının teorisi verilir.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu Lorentziyen uzayda temel kavramlar, eğriler ve yüzeylerin teorisi detaylı bir şekilde verilir.

Altıncı bölümde, 3-boyutlu Lorentziyen uzayda hareketli bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzeyin sabit bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketinin ileri kinematığı incelenmiş ve bu hareketin hız denklemi elde edilmiştir.

Yedinci bölümde, 3-boyutlu Lorentziyen uzayda hareketli bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzeyin sabit bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketinin ters kinematığı bir polinom denklemi ile çözümlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Darboux Çatısı, Dönme-Yuvarlanma, Has-Yuvarlanma, İleri Kinematik, Kontak Yuvarlanma, Lorentziyen 3-Uzay, Ters Kinematik.

2018, 196 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

The Kinematics of Rigid Bodies in 3-Dimensional Lorentzian Space

Mehmet AYDINALP

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

In this thesis, the forward and inverse kinematics of rolling contact motion without sliding of a moving spacelike (respectively, timelike) surface on a fixed spacelike (respectively, timelike) surface in Lorentzian 3-space was investigated.

This thesis consists of seven sections.

In first section, literature notion about rolling contact motion is given.

In section two, the theory of curves and surfaces in 3-dimensional Euclidean space is given in detail.

In section three and four, the theory of the forward and inverse kinematics of rolling contact motion in Euclidean 3-space is given.

In section five, basic concepts, the theory of curves and surfaces in 3-dimensional Lorentzian space are given in detail.

In section six, the forward kinematics of rolling contact motion without sliding of a moving spacelike (respectively, timelike) surface on a fixed spacelike (respectively, timelike) surface was investigated and the velocity equation of this motion in 3-dimensional Lorentzian space was obtained.

In section seven, the inverse kinematics of rolling contact motion without sliding of a moving spacelike (respectively, timelike) surface on a fixed spacelike (respectively, timelike) surface in 3-dimensional Lorentzian space was solved by a polynomial equation.

Keywords: Darboux Frame, Spin-Rolling, Pure-Rolling, Forward Kinematics, Rolling Contact, Lorentzian 3-Space, Inverse Kinematics.

2018, 196 pages

1. GİRİŞ

Küresel robotlar, tek tekerlekli robotlar ve çok parmaklı robotik eller gibi robotik ve mühendislik uygulamalarında yer alan birçok mekanik sistem (aygıt) bir konumdan diğerine ulaşmak için kontak yuvarlanmayı kullanmaktadır. Kontak yuvarlanma mekanik sistemlere, holonomik olmayan kısıtlar olarak da bilinen, integrallenemeyen kinematik kısıtlar getirmektedir. Bu holonomik olmayan kısıtlar verilen bir zaman aralığında iki kontak geometrik yerin eşit yay uzunluklarına sahip olmasını gerektirir [5, 33]. Başka bir deyişle, yüzeylerin kontak yuvarlanmasının kinematiği holonomik olmayan bir kısıt problemidir. Yani, iki yüzeyi ilişkilendiren denklem, yüzeylerin konumları yerine hızları cinsinden ifade edilir [7, 12].

Kontak yuvarlanma hareketinde iki geometrik kısıt vardır. Birincisi, hareketli ve sabit yüzeylerin normal vektörlerinin kontak noktada çakışması ve ikincisi de kontak noktadaki eğrilerin aynı hıza sahip olmasıdır. Diğer bir deyişle, iki kontak yörünge eğrisinin birbirine teğet olması ve yüzeylerin yörünge eğrileri boyunca aynı yuvarlanma oranına sahip olmasıdır [13].

Kontak yuvarlanmanın kinematiği iki kategoriye ayrılır. Birincisi bükülme-yuvarlanma olarak da bilinen dönme-yuvarlanma, ikincisi ise has-yuvarlanma hareketidir. Dönme-yuvarlanma hareketinde ani dönme eksenini kontak noktadan geçer ve bu eksen herhangi bir yönde olabilir. Has-yuvarlanma hareketinin her anında ise kontak noktadan geçen ani dönme eksenini iki yüzeyin ortak teğet düzlemine paraleldir. Bu da dönme-yuvarlanma hareketini has-yuvarlanma hareketinden ayıran karakteristik bir farktır [12]. Ayrıca, has-yuvarlanma hareketi yüzeylerin ortak normal vektörü etrafında dönme hareketine sahip olmadığından iki kontak yörünge eğrisi aynı geodezik eğriliğe sahip olur. Dolayısıyla, kontak yörünge eğrileri keyfi değildir [12, 13]. Hareketli yüzeyin sabit yüzeye göre bağlı hareketinde sabit yüzeyin $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısına göre $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{T} + \omega_y \mathbf{g} + \omega_z \mathbf{n}$ açısal hızını belirlemek için dönme-yuvarlanma hareketinin ω_x , ω_y ve ω_z açısal hız bileşenlerinden oluşan 3 serbestlik derecesine ihtiyaç vardır. Bununla birlikte, has-yuvarlanma hareketinin ω_x ve ω_y açısal hız bileşenlerinden oluşan 2 serbestlik derecesine ihtiyaç vardır. Yani, ω_z açısal hız bileşeni sıfırdır [12].

Diğer taraftan, kontak kinematik, ileri kinematik ve ters kinematik olmak üzere iki kategoride sınıflandırılır. İleri kinematik, her iki yüzey üzerinde belirli bir kontak geometrik yerden itibaren hareketli yüzeyin hareketini hesaplamak için kinematik denklemlerin kullanılması problemi içerir. İleri kinematiğin girdileri iki yüzeyin geometrisi ve kontak yörünge eğrileri, çıktısı ise hareketli yüzeyin hareketidir. İleri kinematik, kinematik simülasyonu için kullanışlıdır. Örneğin, hareketli yüzeyin geometrik yeri belirlendiğinde zamanla nasıl geliştiğini görmek için kullanılabilirler. Ters kinematik ise hareketli yüzeye istenen bir hareketi veren kontrol parametrelerinin belirlenmesi problemiyle ilgilenir. Ters kinematiğin girdileri iki yüzeyin geometrisi ve hareketli yüzeyin (T_1, T_2, n) Darboux çatısına göre istenen $\omega = \omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 n$ açısal hızının ω_1 , ω_2 ve ω_3 bileşenleridir. Hareketli yüzey ω_1 , ω_2 ve ω_3 açısal hız bileşenlerinden oluşan 3 dönel serbestlik derecesine sahip olduğundan istenen açısal hızı gerçekleştirmek için genel olarak 3 çıktıya ihtiyaç vardır. Bu çıktılar, mekanik sistem için bir kontrol sistemi tasarlamak amacıyla girdi olarak kullanılabilen yuvarlanma yönü, yuvarlanma oranı ve telafi edici dönme oranıdır [14].

Genel olarak kontak yuvarlanmanın ters kinematiğine yaklaşımlar, kinematik denklemin yüzeylerin parametrizasyonlarının türevleri cinsinden formüle edilmesi şeklindedir [21, 23, 25, 27, 36]. Bu yaklaşımlarla birçok durumda çözülmesi zor beş lineer olmayan adi diferansiyel denklemler sistemi çözülmelidir. Ayrıca, kinematik denklemin formüle edilmesi belirli bir koordinat çatısının seçimine bağlıdır. Orijin ya da çatının yönlendirilmesi değişirse denklem yeniden oluşturulmalıdır [14]. Cui ve Dai [14], kontak yuvarlanmanın ters kinematiğine farklı bir yaklaşım getirmektedir. Bu yaklaşımda kontak denklemler olarak üç lineer olmayan cebirsel denklem elde edilmektedir. Bu denklemler diferansiyel geometrideki hareketli çatı metodu yardımıyla altıncı dereceden tek değişkenli bir polinoma dönüştürülmektedir. Elde edilen bu polinomun üç avantajı vardır. Bunlardan birincisi, polinomun nümerik köklerinin herhangi bir yazılım kodu ile doğru ve hızlı bir biçimde hesaplanabilir olmasıdır [6, 26]. İkincisi, dönme hızının indirgenmiş dönme hızı ve telafi edici dönme hızı olarak ortaya çıkmasıdır. Üçüncüsü de, ters kinematiğin üç çıktısının belirli bir koordinat çatısının seçimine göre invaryant (değişmez) olmasıdır [14].

Yüzeylerin kontak yuvarlanmasının kinematiği birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Neimark ve Fufaev [29], yüzeylerin dönme-yuvarlanma hareketinin hız denklemini elde etmek için eğrilik çizgileri boyunca hareketli çatıyı ilk uygulayanlardandır. Cai ve Roth [8, 9], hem düzlemsel hem de uzaysal hareket altında katı cisimlerin kontak noktadaki kayma ve has-yuvarlanma hareketlerini incelediler. Montana [27], yüzeylerin diferansiyel geometrisi yardımıyla kayma-dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiğini inceleyerek kontak denklemler türetmiş ve bu denklemlerden birinci mertebeden diferansiyellenebilir kinematik denklemi (yani, yüzeylerin parametrizasyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemi) elde etmiştir. Li ve Canny [22], Montana'nın kontak denklemlerini kullanarak has-yuvarlanma hareketinin gerçekleşmesi durumunda iki noktanın konumları (konfigürasyonları) arasındaki makul bir yolun varlığını ve eğer varsa nasıl bulunacağını araştırdılar. Sarkar ve diğerleri [36], kontak yuvarlanmanın ivme denklemlerini içerecek şekilde Montana'nın kinematik denklemini genişlettiler ve içsel geometrik özellikleri kullanarak kontak yüzeylerin Cristoffel sembollerine ve zaman türevlerine bağımlılığını gösterdiler. Marigo ve Bicchi [25], iki yüzey arasındaki has-yuvarlanma hareketinde yüzeylerin kontak olma koşullarını veren farklı bir yaklaşımla Montana'nın kontak denklemleri ile benzer denklemleri elde ettiler. Agrachev ve Sachkov [1], iki katı cismin has-yuvarlanma hareketinin kontrol edilebilirlik problemini çözümlədiler. Chelouah ve Chitour [11], bir 2-boyutlu Riemann manifoldunun bir diğeri üzerinde has-yuvarlanma hareketi sonucunda oluşan kontrol sistemi için hareket planlama problemini ele aldılar ve has-yuvarlanma hareketine tabi tutulan 2-boyutlu iki Riemann manifoldun biri düzlem diğeri dışbükey bir yüzey olması durumundaki hareket planlama problemini çözümlədiler. Cui ve Dai [12], Darboux çatı metodu yardımıyla hareketli bir yüzeyin sabit bir yüzey üzerinde yüzeylere ait keyfi yörünge eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketinin ileri kinematiğini incelediler. Kerr ve Roth [21], çok parmaklı ellerde kontak yuvarlanmanın kinematiğini parmak ucu yüzeyi ile kavranan cisim yüzeyinin parametrizasyonlarının birinci mertebeden diferansiyel denklemleri yardımıyla incelediler. Li ve diğerleri [23], çok parmaklı ellerle kavranan cismin kavranma planlamasında ve çok parmaklı ellerin koordineli bir şekilde kontrolünün sağlanmasında kontak yuvarlanmanın kinematiğinden yararlandılar. Kavranan cisim ile parmaklar arasındaki kontak yuvarlanma hareketinin kinematiğinde 4 kısıt olduğunu göstermek için bir dizi koordinat çatıları tanımladılar ve bu çatıların bağıl

hareketini incelediler. Cui [13], Darboux çatı metodu yardımıyla kayma-yuvarlanma hareketinin kinematığını inceledi ve kinematığı çok parmaklı robotik ellerde uyguladı. Cui ve Dai [14], yüzeylere eğrilik teorisi ve hareketli çatı metodunu uygulayarak üç lineer olmayan cebirsel denklemin bir sistemi formunda üç kontak denklem elde ettiler. Kontak denklemleri altıncı dereceden tek değişkenli bir polinoma dönüştürdüler. Bu polinom ile hareketli bir yüzeyin sabit bir yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanmasının ters kinematığını incelediler. Ayrıca, kinematığın temel kavramları için [7, 20, 28, 30] kaynaklarına bakılabilir.

Bu tezde, IR_1^3 Lorentziyen 3-uzayında hareketli bir yüzeyin sabit bir yüzey üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketinin ileri ve ters kinematikleri incelenmiştir. Dönme-yuvarlanma hareketinde kontak noktada yüzeylerin Darboux çatıları çakışık olacağından iki yüzeyin birbiri üzerinde yuvarlanabilmesi için aynı causal karaktere sahip olması gerekir. Dolayısıyla, yüzeylere ait keyfi yörünge eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketlerinin ileri kinematığı, spacelike ve timelike yüzeylerin dönme-yuvarlanma hareketlerinin ileri kinematığı olmak üzere iki kısımda verilmiştir. Benzer şekilde, yüzeylerin kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketinin ters kinematığı spacelike ve timelike yüzeylerin kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketlerinin ters kinematığı olmak üzere iki kısımda incelenmiştir. Ters kinematik için yüzeylerin eğrilik teorisi ve hareketli çatı metodu yardımıyla lineer olmayan üç kontak denklem elde edilerek bu kontak denklemlerden altıncı dereceden tek değişkenli bir polinom elde edilmiştir. Bu polinom ile spacelike ve timelike yüzeylerin kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketlerinin ters kinematikleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasında null eğrilere ve null yüzeylere yer verilmemiştir.

2. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ

Bu bölümde, E^3 Öklidyen 3-uzayının temel kavramları ile bu uzaydaki yüzeylerin geometrisi Frenet ve Darboux türev formülleri yardımıyla ifade edilecektir. Burada verilen tanım, teorem ve ifadeler için [3, 10, 15, 18, 19, 31, 35, 37] nolu referanslara bakılabilir.

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. IR^3 reel vektör uzay uzayı üzerinde Öklidyen iç çarpım,

$$\langle , \rangle_E : IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_E = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in IR^3$ dür. Bu Öklidyen iç çarpım ile birlikte IR^3 Afın uzayı, Öklidyen 3-uzay (veya 3 boyutlu Öklid uzayı) olarak isimlendirilir ve genellikle E^3 ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. Bir $\mathbf{a} \in E^3$ vektörünün normu

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_E}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektörlere birim vektörler denir.

Tanım 2.1.3. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, E^3 de iki vektör olsun. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_E = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki açı denir.

Tanım 5.1.5. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^3$ keyfi iki vektör olmak üzere, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_E = 0$ ise $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerine Öklidyen anlamda diktirler denir.

Tanım 2.1.4. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in E^3$ keyfi iki vektör olsun. Bu vektörlerin Öklidyen vektörel çarpımı

$$\mathbf{a} \times_E \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}), \quad i = 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$\mathbf{a} \times_E \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ile verilir. Burada

$$\mathbf{e}_1 \times_E \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times_E \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times_E \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

dır.

Teorem 2.1.1. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, E^3 uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

- i) $\langle \mathbf{a} \times_E \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_E = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
- ii) $(\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) \times_E \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle_E \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle_E \mathbf{a}$
- iii) $\langle \mathbf{a} \times_E \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle_E = 0$ ve $\langle \mathbf{a} \times_E \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_E = 0$
- iv) $\langle \mathbf{a} \times_E \mathbf{b}, \mathbf{a} \times_E \mathbf{b} \rangle_E = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_E \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_E - (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_E)^2$

dır.

2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. E^3 Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri) bir

$$\alpha : I \rightarrow E^3, \quad t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

dönüşümü ile verilir. Eğer $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi C^k sınıfından ise α ya C^k sınıfından bir eğri denir. Buradaki $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \alpha_i(t), \quad 1 \leq i \leq 3$ fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir. $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ parametresi zaman parametresi olarak düşünülürse, $\alpha(t)$ eğrisi hareketli bir noktanın E^3 deki yörünge eğrisi olarak alınabilir.

Tanım 2.2.2. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ eğrisi bir diferansiyellenebilir eğri olsun. $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \in E^3$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir.

$$\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left[\alpha'_1(t)\right]^2 + \left[\alpha'_2(t)\right]^2 + \left[\alpha'_3(t)\right]^2}$$

olarak tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α eğrisinin t noktasındaki (skaler) hızı denir.

Tanım 2.2.3. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ olan bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 2.2.4. $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ olan bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda t parametresine yay uzunluğu parametresi denir ve genellikle s ile gösterilir.

Tanım 2.2.5. $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $\alpha = \alpha(t)$, diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere α eğrisinin t_0 noktasından t ye kadar olan yay uzunluğu fonksiyonu

$$s: I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

ile tanımlanan s fonksiyonudur. Yay uzunluğu fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olup, diferansiyeli

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \|\alpha'(t)\|$$

dır. Böylece $\alpha(t)$, hareketli bir noktanın t anındaki konumu olarak düşünüldüğünde $\frac{ds}{dt}$, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı olur.

Tanım 2.2.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliği ile verilen $T(s)$ vektörüne s noktasındaki birim teğet vektör denir. Böylece $\|T(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$ dir. $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ sayısına α eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir. $\kappa(s) \neq 0$ olan noktalarda, $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ eşitliği ile verilen $N(s)$ birim vektörüne s noktasındaki asli normal vektör denir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ birim vektörüne s noktasındaki binormal vektör denir. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin s noktasındaki burulması denir.

Tanım 2.2.7. Birim hızlı bir α eğrisinin her bir s noktasında $T(s)$ teğet, $N(s)$ asli normal ve $B(s)$ binormal vektörlerinden oluşan bir (T, N, B) ortonormal koordinat sistemi vardır. Bu (T, N, B) üçlüsüne hareketli üçyüzlü ya da Frenet çatısı denir.

α birim hızlı bir eğri ve $\forall s \in I$ için $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sayıları, sırasıyla, α eğrisinin eğriliği ve burulması olmak üzere Frenet türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir.

2.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.3.1. $U \subset \mathbb{R}^2$ boştan farklı bir açık alt cümle olsun. $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$ olmak üzere

$$x(U) = \{x(u, v) | (u, v) \in U\} \subseteq E^3$$

görüntüsüne bir yüzey adı verilir. $\forall (u, v) \in U$ için

$$x(u, v) = \{x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)\}$$

biçiminde yazılabilir. Burada x_1, x_2 ve x_3 iki değişkenli koordinat fonksiyonlarıdır.

Eğer $\forall (u, v) \in U$ noktasında x_u ve x_v vektörleri lineer bağımsız (yani $x_u \times_E x_v \neq 0$)

ise x yüzeyine düzgün (regüler) yüzey denir. Burada x_u ve x_v , sırasıyla, u ve v ye göre kısmi türevlerdir. Ayrıca

$$\mathbf{n} = \frac{x_u \times_E x_v}{\|x_u \times_E x_v\|}$$

vektörüne x regüler yüzeyinin birim normal vektörü denir.

Tanım 2.3.2. T, M noktasında yüzeye ve eğriye teğet birim vektör alanı, $\mathbf{n}$, yüzeyin M noktasındaki birim normal vektör alanı ve $\mathbf{g}$ de M noktasında yüzeye teğet olan birim geodezik normal vektör alanı olmak üzere yüzeyin M noktasındaki

Darboux çatısı (T, g, n) ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır. Bu hareketli çatı, Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. T , g ve n vektörleri arasında

$$T \times_E g = n, \quad g \times_E n = T, \quad n \times_E T = g$$

bağıntıları vardır. Burada T vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer N , B , g ve n vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T eksen etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki açı ve n ile B arasındaki açının ϕ olması demektir. Böylece Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir.

Tanım 2.3.3. S , E^3 de bir yüzey ve bu yüzey üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s) \in S$ noktasındaki teğet düzlemi üzerindeki izdüşüm eğrisinin eğriliğine, α eğrisinin bu noktadaki geodezik eğriliği denir ve k_g ile gösterilir.

Tanım 2.3.4. S , E^3 de bir yüzey ve u vektörü S üzerinde herhangi bir $M \in S$ noktasında yüzeye teğet bir vektör olsun. S yüzeyinin M noktasında u doğrultusundaki normal eğriliği, yüzeyin M noktasındaki normali ve u vektörünün belirlediği düzlem ile yüzeyin arakesit eğrisinin M noktasındaki eğriliği olarak tanımlanır ve k_n ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ ye bir eğri olsun. $\alpha(s) \in S$ noktasındaki n yüzey normalinin, α eğrisinin T teğet vektörü etrafındaki değişim oranını veren eğriliğe, α eğrisinin bu noktadaki geodezik burulması denir ve τ_g ile gösterilir.

Teorem 2.3.1. S , parametrik ifadesi $x = x(u, v)$ olan bir regüler yüzey ve α , S üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca (T, g, n) Darboux çatısı için türev formülleri

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ile verilir. Bu matris formundan, Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\omega = \tau_g T - k_n g + k_g n \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. O halde, Darboux üçyüzlüsüne ait türev formülleri

$$\frac{dT}{ds} = \omega \times_E T, \quad \frac{dg}{ds} = \omega \times_E g, \quad \frac{dn}{ds} = \omega \times_E n$$

ile verilir. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 + k_n^2, \\ k_g &= \kappa \cos \phi, \\ k_n &= -\kappa \sin \phi, \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\phi = \phi(s)$, g ile N arasındaki açıdır.

Yüzey üzerinde öyle eğriler vardır ki, bu eğriler üzerindeki her noktada Darboux vektörünün bazı bileşenleri devamlı olarak sıfır olur. Bu durumda aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 2.3.6. Eğer

- i) $\tau_g = 0$ ise böyle eğrilere *eğrilik çizgileri*,
- ii) $k_g = 0$ ise böyle eğrilere *geodezik çizgiler*,
- iii) $k_n = 0$ ise böyle eğrilere *asimptotik çizgiler*

denir.

Tanım 2.3.7. $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$, $x = x(u, v)$ bir parametrik yüzey olsun. $v = v_0 = \text{sabit}$ alınarak elde edilen $x(u, v_0)$ eğrisine u -parametre eğrisi ve $u = u_0 = \text{sabit}$ alınarak elde edilen $x(u_0, v)$ eğrisine de v -parametre eğrisi denir.

Tanım 2.3.8. $x:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$, $x = x(u,v)$ yüzeyi için 1. ve 2. temel formlar, sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

ile verilir. Burada 1. ve 2. temel formlarının katsayıları

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_E, F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_E, G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_E,$$

$$e = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u \rangle_E, f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v \rangle_E, g = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v \rangle_E$$

dır.

Tanım 2.3.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında

$$\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

şeklindeki bir ifadeye bir 1-form (veya diferansiyel 1-form) adı verilir. Burada F_i ($i=1,2,3$) ler reel değerli fonksiyonlardır. 1-formların en önemli örneklerinden biri aşağıda verilir:

Eğer $f(x, y, z) \in C^1$ sınıfından bir fonksiyon ise bu fonksiyonun tam diferansiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

bir 1-formdur. Bir diferansiyel 1-formun pasif bir nesne olmadığını, bir çeşit fonksiyon olarak düşünülebileceğini not edelim. En temel 1-form olan dx_i ($i=1,2,3$) basit bir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörünü girdi olarak kabul eder ve $\mathbf{v}$ 'nin i . bileşeni v_i olarak çıktı verir. Yani

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i$$

dır. Buna göre

$$\omega(\mathbf{v}) = F_1(x, y, z)v_1 + F_2(x, y, z)v_2 + F_3(x, y, z)v_3$$

yazılabilir.

Bir $x = x(u, v)$ yüzeyinin $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrilerinin birbirine dik olduklarını kabul edelim. Bu yüzey üzerinde alınan bir M noktasından geçen keyfi bir eğri α olsun. Aynı noktadan geçen $v = \text{sabit}$ parametre eğrisini α_1 ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrini α_2 ile gösterelim. α , α_1 ve α_2 eğrilerinin M deki birim

teğet vektörleri, sırası ile, T , T_1 ve T_2 ile gösterilsin. Yüzeyin M deki birim normal vektörü n olmak üzere,

$$n \times_E T = g, \quad n \times_E T_1 = g_1, \quad n \times_E T_2 = g_2$$

dır. Bu durumda

$$(T, g, n), \quad (T_1, g_1, n), \quad (T_2, g_2, n)$$

gibi üç Darboux üçyüzlüsü elde edilir. Bunların her birine karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri

$$\begin{aligned} \omega &= \tau_g T - k_n g + k_g n, \\ \omega_1 &= \tau_{g_1} T_1 - k_{n_1} g_1 + k_{g_1} n, \\ \omega_2 &= \tau_{g_2} T_2 - k_{n_2} g_2 + k_{g_2} n \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada α eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğunu s , α_1 eğrisinin yay uzunluğunu s_1 ve α_2 eğrisinin yay uzunluğunu da s_2 ile gösterelim. E , F ve G 1. temel formun katsayıları olmak üzere

$$T = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}, \quad T_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad T_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$$

ve

$$T_1 \times T_2 = \frac{x_u \times_E x_v}{\|x_u \times_E x_v\|} = n$$

dır. Buradan

$$x_u = \sqrt{E} T_1, \quad x_v = \sqrt{G} T_2$$

olup, bu değerler tekrar yazılırsa

$$T = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E} T_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G} T_2 \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Burada T ile T_1 vektörleri arasındaki açıyı φ ile gösterirsek, T ile T_2 arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafını sırası ile T_1 ve T_2 ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} T &= \cos \varphi T_1 + \sin \varphi T_2, \\ \langle T, T_1 \rangle_E &= \cos \varphi = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \\ \langle T, T_2 \rangle_E &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

formülleri elde edilir. ds , ds_1 ve ds_2 diferansiyel 1-formları için

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + Gdv^2 ; F = 0, \\ ds_1^2 &= Edu^2 ; v = \text{sabit}, dv = 0, \\ ds_2^2 &= Gdv^2 ; u = \text{sabit}, du = 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{E}du}{ds} = \frac{ds_1}{ds}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{G}dv}{ds} = \frac{ds_2}{ds}$$

elde edilir. $\mathbf{g}$ vektörü $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{n} \times_E (\cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2) \\ &= \cos \varphi (\mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_1) + \sin \varphi (\mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_2) = \cos \varphi \mathbf{g}_1 + \sin \varphi \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $x = x(u, v)$ yüzeyinin parametre eğrilerinin Darboux üçyüzlülerinin her ikisinde de $\mathbf{n}$ çakışık olup, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times_E \mathbf{T}_2$ dir. Buna göre

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_1 \times_E \mathbf{T}_2) \times_E \mathbf{T}_1 = \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle_E \mathbf{T}_2 - \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle_E \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_2 = (\mathbf{T}_1 \times_E \mathbf{T}_2) \times_E \mathbf{T}_2 = \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle_E \mathbf{T}_2 - \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 \rangle_E \mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2. $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ birim teğet vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= -\sin \varphi \mathbf{T}_1 + \cos \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.3}$$

biçimindedir.

Teorem 2.3.3. Bir $x = x(u, v)$ yüzeyinin parametre eğrilerinin $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüleri sıra ve yönleri aynı olmamak şartı ile daima birbirine çakışiktır. Ayrıca, bu üçyüzlüler için Darboux türev formülleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial s_j} &= \boldsymbol{\omega}_j \times_E \mathbf{T}_i \\ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial s_j} &= \boldsymbol{\omega}_j \times_E \mathbf{g}_i \quad (i, j = 1, 2) \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_j} &= \boldsymbol{\omega}_j \times_E \mathbf{n}\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 2.3.4. Parametre eğrileri dik olan bir $x = x(u, v)$ yüzeyinin M noktasından geçen keyfi bir eğri α , bu noktadan geçen $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrileri α_1 ve α_2 , bu eğrilere M noktasında karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri, sırasıyla, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ olsun. α ve α_1 in M deki $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}_1$ teğetleri arasındaki açı φ , α nın yay elemanı ds ve yüzeyin M noktasındaki birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{\omega} = \cos \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sin \varphi \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}$$

dır.

$\mathbf{g}_1 = \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{T}_1$ eşitlikleri göz önüne alınarak $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ Darboux ani dönme vektörleri (2.3) deki eşitlikler ile skaler çarpım yapıldığında genelleştirilmiş Euler, O. Bonnet ve Liouville formülleri sırasıyla aşağıdaki sonuç ile verilir:

Sonuç 2.3.1.

$$\begin{aligned}k_n &= k_{n1} \cos^2 \varphi + 2\tau_{g1} \cos \varphi \sin \varphi + k_{n2} \sin^2 \varphi, \\ \tau_g &= \tau_{g1} \cos 2\varphi + (k_{n2} - k_{n1}) \cos \varphi \sin \varphi, \\ k_g &= k_{g1} \cos \varphi + k_{g2} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Şimdi, $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ Darboux çatısının diferansiyelini matris formunda aşağıdaki gibi verelim:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}.$$

(T_1, T_2, n) Darboux çatısının diferansiyeli ise $g_1 = T_2$, $g_2 = -T_1$ ve $n = T_1 \times_E T_2$ eşitliklerinden aşağıdaki gibi matris formunda elde edilir:

$$d \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix}.$$

(x_u, x_v, n) ve (T_1, T_2, n) çatıları arasındaki $x_u = \sqrt{E}T_1$, $x_v = \sqrt{G}T_2$ bağıntılarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Burada $E = \langle x_u, x_u \rangle_E$, $F = \langle x_u, x_v \rangle_E$ ve $G = \langle x_v, x_v \rangle_E$ 1. temel formun katsayıları ve

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dır. (2.5) eşitliğinin sol tarafının diferansiyeli alındığında}$$

$$d \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{uu} du + x_{uv} dv \\ x_{uv} du + x_{vv} dv \\ n_u du + n_v dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{uu} \\ x_{uv} \\ n_u \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} x_{uv} \\ x_{vv} \\ n_v \end{bmatrix} dv$$

olur. Gauss denklemleri ve Weingarten denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + en, \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fn, \quad \text{ve} \quad n_u = W_1^1 x_u + W_1^2 x_v, \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gn, \quad n_v = W_2^1 x_u + W_2^2 x_v \end{aligned}$$

biçimindedir. $d \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix}$ diferansiyeli bu denklemler ile matris formunda

$$d \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. Buradan

$$d \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) A \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Γ_{ij}^k Gauss denklemlerinin katsayıları, W_i^j de Weingarten denklemlerinin katsayıları, ve $e = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u \rangle_E$, $f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v \rangle_E$ ve $g = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle_E = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v \rangle_E$ 2. temel formun katsayıları olarak gösterilmektedir. Bu katsayıların değerleri

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \\ W_1^1 &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & W_1^2 &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ W_2^1 &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & W_2^2 &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}\end{aligned}$$

biçimindedir. (2.5) eşitliğinin sağ tarafının diferansiyeli alındığında

$$d \left(A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = (dA) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + A \left(d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \left(dA + A \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. A matrisinin diferansiyeli alınırsa

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}A \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & 0 & \sqrt{G}\omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$d \begin{pmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$ eşitliğinin diferansiyeli matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv \\ \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv \\ \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi ise bu eşitlikler arasındaki bağıntıları hesaplayalım. Bunun için önce 1. temel formun katsayılarının diferansiyellerini bulalım. Bu diferansiyeller

$$dE = E_u du + E_v dv;$$

$$E_u = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle_E + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle_E = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle_E, \quad E_v = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle_E + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle_E = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle_E$$

$$dG = G_u du + G_v dv;$$

$$G_u = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle_E + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle_E = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle_E, \quad G_v = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle_E + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle_E = 2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle_E$$

$$dF = F_u du + F_v dv;$$

$$F_u = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle_E + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle_E \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle_E = F_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle_E = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$F_v = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle_E + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle_E \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle_E = F_v - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle_E = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

biçiminde hesaplanır. Matris formundaki eşitliklerin ilk satırından

$$\mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv = \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} \mathbf{T}_1 + \sqrt{E}\omega_{12} \mathbf{T}_2 + \sqrt{E}\omega_{13} \mathbf{n}$$

dır. ω_{12} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{T}_2$ vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
\sqrt{E}\omega_{12} &= \langle \mathbf{x}_{uu}du + \mathbf{x}_{uv}dv, \mathbf{T}_2 \rangle_E \\
&= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{T}_2 \rangle_E du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{T}_2 \rangle_E dv \\
&= \left\langle \mathbf{x}_{uu}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle_E du + \left\langle \mathbf{x}_{uv}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle_E dv
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle_E = \frac{G_u}{2}$ ve $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle_E = F_u - \frac{1}{2}E_v$ bağıntılarından

$$\sqrt{E}\omega_{12} = \left(F_u - \frac{1}{2}E_v \right) \frac{du}{\sqrt{G}} + \left(\frac{G_u}{2} \right) \frac{dv}{\sqrt{G}}$$

bulunur. ω_{13} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\sqrt{E}\omega_{13} = \langle \mathbf{x}_{uu}du + \mathbf{x}_{uv}dv, \mathbf{n} \rangle_E = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle_E du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle_E dv = edu + fdv$$

bulunur. Matris formundaki eşitliklerin ikinci satırından

$$\mathbf{x}_{uv}du + \mathbf{x}_{vv}dv = -\sqrt{G}\omega_{12}\mathbf{T}_1 + \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}}\mathbf{T}_2 + \sqrt{G}\omega_{23}\mathbf{n}$$

dır. ω_{23} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\sqrt{G}\omega_{23} = \langle \mathbf{x}_{uv}du + \mathbf{x}_{vv}dv, \mathbf{n} \rangle_E = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle_E du + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle_E dv = fdu + gdv$$

bulunur. $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki parametre eğrileri dik olarak kabul edildiği için $F = 0$ dır. Elde edilen tüm bağıntılar düzenlendiğinde ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formlarının 1. temel form bileşenleri ile 2. temel form bileşenleri cinsinden ifadeleri

$$\omega_{12} = \frac{-E_v du + G_u dv}{2\sqrt{EG}}, \quad \omega_{13} = \frac{edu + fdv}{\sqrt{E}}, \quad \omega_{23} = \frac{fdu + gdv}{\sqrt{G}}$$

biçiminde elde edilir.

u – koordinat eğrisi boyunca v değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_1$ vektörü yönündeki $ds_1 = \sqrt{E}du$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g1} , k_{n1} ve τ_{g1} sırasıyla u – koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$k_{g1} = \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle_E}{ds_1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{-E_v du}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{-E_v}{2E\sqrt{G}},$$

$$k_{n1} = \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle_E}{ds_1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{edu}{\sqrt{E}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{e}{E},$$

$$\tau_{g1} = \frac{\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle_E}{ds_1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{fdu}{\sqrt{G}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{f}{\sqrt{EG}}$$

eğrilikler elde edilir. Burada 1-formların $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısında verildiğini not edelim.

$\mathbf{g}_1 = \mathbf{T}_2$, $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{T}_1$ eşitlikleri göz önüne alındığında, v -koordinat eğrisine ait 1-formlar $(\mathbf{T}_2, -\mathbf{T}_1, \mathbf{n})$ çatısında elde edilir. v -koordinat eğrisi boyunca u değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_2$ vektörü yönündeki $ds_2 = \sqrt{G}dv$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g2} , k_{n2} ve τ_{g2} sırasıyla v -koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$k_{g2} = \frac{\langle d\mathbf{T}_2, -\mathbf{T}_1 \rangle_E}{ds_2} = \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle_E}{ds_2} = \frac{G_u dv}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}},$$

$$k_{n2} = \frac{\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle_E}{ds_2} = \frac{g dv}{\sqrt{G}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{g}{G},$$

$$\tau_{g2} = \frac{\langle -d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle_E}{ds_2} = \frac{f dv}{\sqrt{E}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{-f}{\sqrt{EG}}$$

eğrilikler elde edilir.

3. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN İLERİ KİNEMATİĞİ

Bu bölümde, E^3 Öklidyen 3-uzayında hareketli bir yüzeyin sabit bir yüzey üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketinin ileri kinematığı ve bu harekete ait hız denklemi incelenecektir.

3.1. Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığı

α , E^3 de yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde yatan yönlendirilmiş bir eğri ve (T, g, n) , α eğrisinin her bir M noktasına bağlı bir sağ-el ortogonal Darboux çatısını gösterebilir. Burada T , n ve g vektörleri, sırasıyla, M noktasında α eğrisinin birim teğet vektörü, S yüzeyinin birim normal vektörü ve S yüzeyinin $g = n \times_E T$ ile verilen birim geodezik normal vektörüdür.

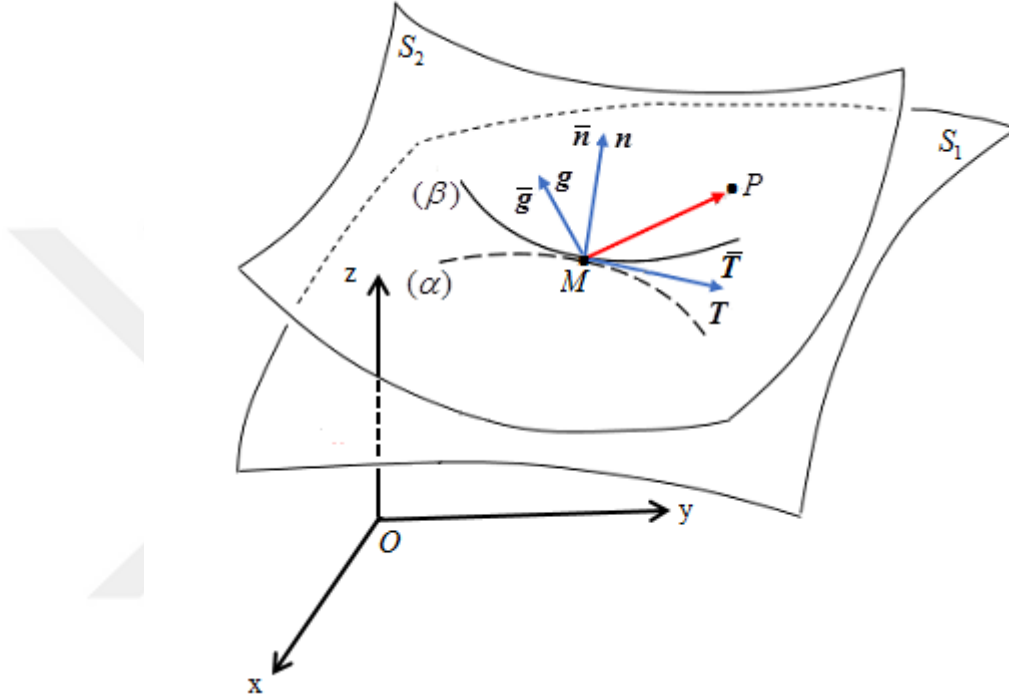
İkinci bölümden Darboux çatısının hareket denklemlerinin

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = T, \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Burada $\mathbf{m}$ vektörü M noktasının koordinat seçimine bağlı bir konum vektörüdür. $\mathbf{m}$ vektörünün bileşenleri, koordinat sisteminin eksenleri boyunca ölçümünden elde edilir. Bununla birlikte, (3.1) deki T , g ve n vektörleri kontravaryant vektörlerdir ve herhangi bir yerel koordinat sistemine sahip değildirler. Bu kontravaryant vektörlerin bileşenleri koordinat sisteminin değişmesine bağlı olarak değişebilirken, kontravaryant vektörlerin kendisi değişmez [12].

S_1 ve S_2 iki yüzey olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin her anda kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketine tabi tutulduğunu varsayalım. Burada S_1 yüzeyini sabit yüzey ve S_2 yüzeyini de S_1 yüzeyine göre dönme-yuvarlanma hareketine sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda, bu iki yüzey arasındaki bağıl hareketi inceleyeceğiz. α ve β eğrileri sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde kontak yörünge eğrilerini gösterebilir. α eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı (T, g, n) , β eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ ile gösterilsin.

$(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatılarının her ikisi de sağ-el ortonormal çatılardır. Yuvarlanma kısıtlarından dolayı (yani, kaymaksızın yuvarlanmadan dolayı), $\mathbf{T}$ ve $\bar{\mathbf{T}}$ kontravaryant vektörleri daima doğrudadır ve buna bağlı olarak $\mathbf{n}$ ve $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri de doğrudadır. Dolayısıyla, iki çatı Şekil 3.1. de görüldüğü üzere çakışır. Burada $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörü S_1 yüzeyinin dışına doğru, $\bar{\mathbf{n}}$ kontravaryant vektörü ise S_2 yüzeyinin içine doğru yönelmiştir.



Şekil 3.1. S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin her ikisinin de, sırasıyla, s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. (3.1) de $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısının Darboux türev formülleri verilmektedir. Benzer şekilde, $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısının Darboux türev formülleri

$$\frac{d\bar{\mathbf{m}}}{d\bar{s}} = \bar{\mathbf{T}}, \quad \frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_g & \bar{k}_n \\ -\bar{k}_g & 0 & \bar{\tau}_g \\ -\bar{k}_n & -\bar{\tau}_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$

olarak verilir. P , S_2 yüzeyi üzerinde keyfî ve sabit bir nokta olsun. Bu durumda, $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısına göre P noktasının $\bar{\mathbf{p}}$ konum vektörü

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{m}} + \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{T}} + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{n}} \quad (3.2)$$

biçiminde yazılabilir. (3.2) nin $\bar{s}$ yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} &= \frac{d\bar{\mathbf{m}}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{T}} + \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{g}} + \frac{d\bar{\mathbf{g}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} + \frac{d\bar{\mathbf{n}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_3 \\ &= \bar{\mathbf{T}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{T}} + (\bar{k}_g \bar{\mathbf{g}} + \bar{k}_n \bar{\mathbf{n}}) \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{g}} + (-\bar{k}_g \bar{\mathbf{T}} + \bar{\tau}_g \bar{\mathbf{n}}) \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} + (-\bar{k}_n \bar{\mathbf{T}} - \bar{\tau}_g \bar{\mathbf{g}}) \bar{\lambda}_3 \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = (1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} - \bar{\lambda}_2 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n) \bar{\mathbf{T}} + (\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g) \bar{\mathbf{g}} + (\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1 \bar{k}_n + \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g) \bar{\mathbf{n}} \quad (3.3)$$

bulunur. Burada $\bar{k}_g$, $\bar{k}_n$ ve $\bar{\tau}_g$ sırasıyla β eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. P , S_2 yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olduğundan

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = 0 \quad (3.4)$$

dır. Bu eşitlik (3.3) de yerine yazıldığında

$$\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} = \bar{\lambda}_2 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n - 1, \quad \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g, \quad \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{k}_n - \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre P noktasının $\mathbf{p}$ konum vektörü

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} + \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{g} + \lambda_3 \mathbf{n} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir. (3.5) in s yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{d\mathbf{m}}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds} \mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} \mathbf{g} + \frac{d\mathbf{g}}{ds} \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \lambda_3 \\ &= \mathbf{T} + \frac{d\lambda_1}{ds} \mathbf{T} + (k_g \mathbf{g} + k_n \mathbf{n}) \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} \mathbf{g} + (-k_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{n}) \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} \mathbf{n} + (-k_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{g}) \lambda_3 \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (1 + \frac{d\lambda_1}{ds} - \lambda_2 k_g - \lambda_3 k_n) \mathbf{T} + (\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_1 k_g - \lambda_3 \tau_g) \mathbf{g} + (\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_1 k_n + \lambda_2 \tau_g) \mathbf{n} \quad (3.6)$$

bulunur. Burada k_g , k_n ve τ_g sırasıyla α eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. (3.2) ve (3.5) eşitlikleri dikkate alındığında, $\overrightarrow{MP} = \mathbf{p} - \mathbf{m}$ vektörü bir kontravaryant vektördür. $\overrightarrow{MP}$ kontravaryant vektörü gerek $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre gerekse $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısına göre özdeş kalır. Bu durumda M ve P noktalarını birleştiren $\mathbf{r}_{MP}$ vektörü

$$\mathbf{r}_{MP} = \overrightarrow{MP} = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{g} + \lambda_3 \mathbf{n} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{T}} + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{n}}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yuvarlanma kısıtları, iki kontak yörünge eğrilerinin hızlarının eşit olmasını gerektirir. Bu durum, aynı zaman periyodundaki iki kontak yörünge eğrisinin yay uzunluklarının birbirine eşit ($s = \bar{s}$) olduğunu gösterir. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatıları her anda çakıştığından

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 \quad (3.7)$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \quad (3.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, Darboux çatılarının çakışmasından dolayı s yay uzunluğu, hem s hem de $\bar{s}$ şeklinde ve λ_i , hem λ_i hem de $\bar{\lambda}_i$ şeklinde gösterilebilir. (3.3) ve (3.8) eşitlikleri (3.6) da yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (\lambda_2 k_g^* + \lambda_3 k_n^*) \mathbf{T} + (-\lambda_1 k_g^* + \lambda_3 \tau_g^*) \mathbf{g} + (-\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*) \mathbf{n} \quad (3.9)$$

bulunur. Burada,

$$k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g \quad (3.10)$$

skalerleri sırasıyla indirgenmiş geodezik eğrilik, indirgenmiş normal eğrilik ve indirgenmiş geodezik burulmadır [12, 13].

3.2. Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığının Hız Denklemi

Eğer t zamanı göz önüne alınırsa, S_2 yüzeyi üzerindeki keyfî bir P noktasının hızı denklem (3.9) dan

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \sigma (\lambda_2 k_g^* + \lambda_3 k_n^*) \mathbf{T} + \sigma (\lambda_3 \tau_g^* - \lambda_1 k_g^*) \mathbf{g} + \sigma (-\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*) \mathbf{n} \quad (3.11)$$

şeklinde dir. Burada $\sigma = \frac{ds}{dt}$ skaleri yuvarlanma hızının büyüklüğüdür [12, 13].

Teorem 3.1. Hareketli S_2 yüzeyinin, sabit S_1 yüzeyine göre açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma (-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n})$$

dır [12, 13].

İspat: $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızını

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{T} + \omega_y \mathbf{g} + \omega_z \mathbf{n}$$

şeklinde yazalım. P noktasının hız vektörünün $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times_E \mathbf{r}_{MP}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\mathbf{v}_P = (-\lambda_2 \omega_z + \lambda_3 \omega_y) \mathbf{T} + (\lambda_1 \omega_z - \lambda_3 \omega_x) \mathbf{g} + (-\lambda_1 \omega_y + \lambda_2 \omega_x) \mathbf{n} \quad (3.12)$$

elde edilir. Böylece (3.11) ve (3.12) karşılaştırıldığında

$$\omega_x = -\sigma \tau_g^*, \quad \omega_y = \sigma k_n^*, \quad \omega_z = -\sigma k_g^*$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece hareketli S_2 yüzeyinin açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n}) \quad (3.13)$$

olarak bulunur. ■

(3.13) denklemi, hareketli yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketinin Darboux çatısına göre açısal hızını verir. (3.13) de ilk iki ifade olan $-\sigma \tau_g^* \mathbf{T} + \sigma k_n^* \mathbf{g}$ kontak noktada teğet düzleminde bir eksen etrafındaki has-yuvarlanma hızını verir. Son ifade olan $\sigma k_g^* \mathbf{n}$ ise kontak noktada normal vektör yönü etrafındaki dönme hareketini verir [12, 13].

Yuvarlanma hızının büyüklüğü olan σ ve τ_g^*, k_n^*, k_g^* indirgenmiş eğriliklerin birer skaler oldukları açıktır. Bir kontravaryant vektörün bileşenleri koordinat sisteminin değişimi ile farklılık gösterebilse de, kontravaryant vektörün kendisi değişmez. $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörlerine dayalı açısal hız bir koordinat sisteminde formüle edildiğinden dolayı, koordinat sisteminin değişimi yalnızca kontravaryant vektörlerin bileşenlerinin değişimiyle sonuçlanır ve bu değişim formüle edilen açısal hız denklemini değiştirmez. Bu nedenle, (3.13) deki açısal hız denklemi kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır (yani, koordinat-invaryanttır) [12, 13].

(3.13) denkleminin bir diğer avantajı ise, keyfi parametrik yüzeylere ve kontak yörüngelere kolaylıkla genelleştirilebilen geometrik invaryantlar cinsinden ifade edilmesidir. Hareketli yüzeyin yüksek mertebeden kinematiği (3.13) denkleminin sağ tarafının diferansiyellenmesiyle elde edilebilir [12, 13].

Bir hareketli yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiği, Darboux çatısına göre elde edilen (3.11) öteleme hız ve (3.13) açılal hız denklemleriyle belirlenir.

Bir has-yuvarlanma hareketi yüzey normali etrafında dönme hareketine sahip değildir. Dolayısıyla $k_g^* = 0$ olacağından (3.10) dan

$$k_g = \bar{k}_g$$

dır [12, 13]. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1. Eğer iki yüzey has-yuvarlanma hareketine sahipse, bu takdirde karşılık gelen iki kontak yörünge eğrilerinin geodezik eğrilik değerleri eşit olmak zorundadır.

Hareketli yüzeyin, sabit yüzey üzerindeki istenen yörünge eğrisini takip edecek şekilde kontrol etmek için (3.13) ün ilk iki ifadesi, teğet düzlemine paralel yöndeki açılal hız hakkında bilgi verir. (3.13) ün üçüncü ifadesi ise dönme hareketinin açılal hızını verir. Bu bilgi, hareketli yüzeyin sabit yüzey üzerindeki istenen yörünge eğrisini takip etmesini sağlamak için kontrol sisteminin girdisi olarak kullanılabilir [12].

Örnek 3.1.

Bu örnekte bir paraboloid yüzeyinin bir birim silindir üzerinde β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği incelenecektir (Şekil 3.2). Sabit S_1 yüzeyi olarak

$$x(u, v) = (\sin u, v, \cos u)$$

parametrik denklemleriyle ifade edilen birim silindir ve bu yüzey üzerindeki α eğrisini de

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = x(t, t) = (\sin t, t, \cos t)$$

parametrik denklemleriyle verilen bir helis eğrisi olarak alalım (Şekil 3.2). Hareketli S_2 yüzeyi olarak

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{\bar{u} + \bar{v}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{u} - \bar{v}}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} \right)$$

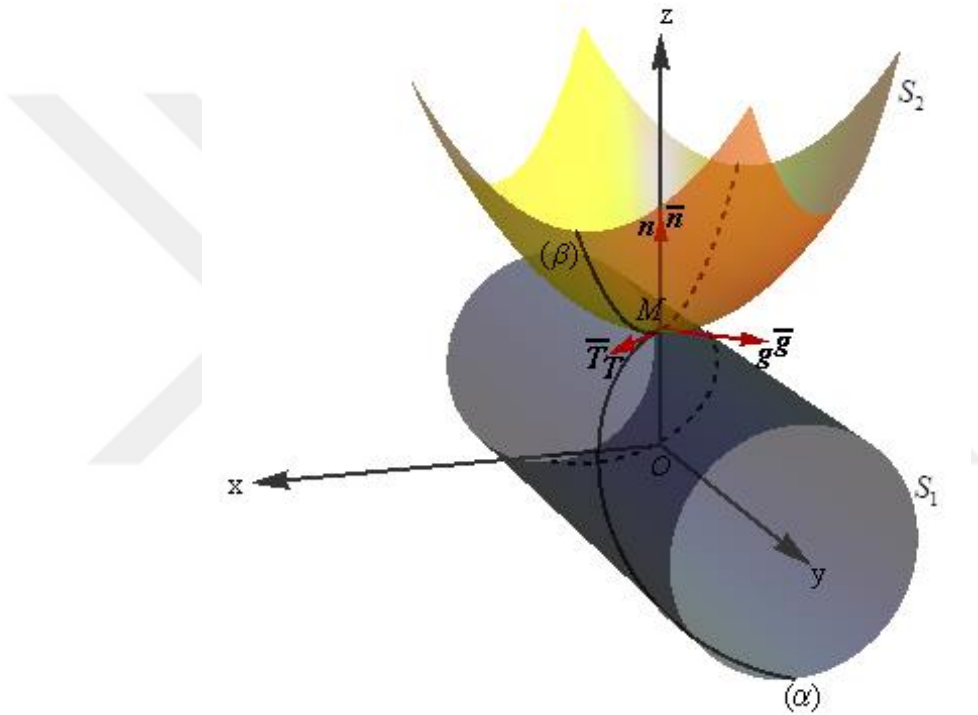
parametrik denklemiyle verilen paraboloid yüzeyini alalım. Bu yüzeyin,

$$y_1(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\bar{u}, -\bar{v}, 1 + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} \right) \text{ paraboloid yüzeyinin } z \text{ ekseninde saat yönünün}$$

tersine $\pi/4$ derece döndürülmesiyle elde edilebileceğini not edelim. S_2 yüzeyi üzerinde bir eğri olarak da

$$\beta(\bar{u}) = y(\bar{u}, \bar{v}_0) = \left(\frac{\bar{u} + \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{u} - \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2}{2} \right)$$

$\bar{u}$ -parametre eğrisini ($\bar{v} = \bar{v}_0$ eğrisini) alalım.



Şekil 3.2. Paraboloid yüzeyinin birim silindir yüzeyi üzerinde β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketi

S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde sırasıyla β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın yuvarlandığını varsayalım. Şekil 3.2 de görüldüğü gibi bir M kontak noktasını alalım. α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_E} = \sqrt{2}$$

dır. Buna göre α eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, 1, -\sin t)$$

biçiminde bulunur. Sabit birim silindirin yüzey normali dışa doğru alındığından birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\sin u, 0, \cos u)$$

biçiminde bulunur. Buradan α eğrisi boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t, t) = (\sin t, 0, \cos t)$$

olarak bulunur. Birim yüzeyin birim geodezik normal vektörü

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(t, t) = \mathbf{n} \times_E \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & 1 & -\sin t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, 1, \sin t)$$

biçiminde bulunur. $\alpha(u, v)$ birim silindiri üzerinde yatan α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$k_g = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{g} \right\rangle_E \bigg/ \frac{ds}{dt} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, 0, -\cos t), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, 1, \sin t) \right\rangle_E \bigg/ \sqrt{2}$$

$$= 0,$$

$$k_n = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle_E \bigg/ \frac{ds}{dt} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, 0, -\cos t), (\sin t, 0, \cos t) \right\rangle_E \bigg/ \sqrt{2}$$

$$= -\frac{1}{2},$$

$$\tau_g = \left\langle \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle_E \bigg/ \frac{ds}{dt} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, 0, \cos t), (\sin t, 0, \cos t) \right\rangle_E \bigg/ \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda α eğrisi bir geodezik çizgidir.

Benzer şekilde, paraboloid yüzeyi (S_2 yüzeyi) üzerindeki β eğrisi için

$$\left\| \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta}{d\bar{u}}, \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\rangle_E} = \sqrt{\bar{u}^2 + 1}$$

olduğu açıktır. Böylece birim hızlı β eğrisinin birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2 + 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{u} \right)$$

biçiminde bulunur. Hareketli paraboloidin yüzey normali içe doğru alındığından birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = \left(\frac{-\bar{u} - \bar{v}}{\sqrt{2}}, \frac{-\bar{u} + \bar{v}}{\sqrt{2}}, 1 \right) / \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 1}$$

Paraboloid yüzeyi üzerindeki eğri $\bar{v} = \bar{v}_0$ eğrisi olduğundan

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} \left(\frac{-\bar{u} - \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, \frac{-\bar{u} + \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

biçiminde bulunur. Birim yüzeyin geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \times_E \bar{\mathbf{T}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2 + 1} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-\bar{u} - \bar{v}_0}{\sqrt{2}} & \frac{-\bar{u} + \bar{v}_0}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \bar{u} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2 + 1} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} \left(\frac{-\bar{u}^2 + \bar{u} \bar{v}_0 - 1}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{u}^2 + \bar{u} \bar{v}_0 + 1}{\sqrt{2}}, -\bar{v}_0 \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $y(\bar{u}, \bar{v})$ paraboloid yüzeyi üzerinde yatan β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\bar{k}_g = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}} \right\rangle_E / \left\| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} \right\| = \frac{-\bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)^{3/2} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_n &= \left\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E / \left\| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} \right\| \\ &= \left\langle \frac{1}{(\bar{u}^2 + 1)^{3/2}} \left(\frac{-\bar{u}}{\sqrt{2}}, \frac{-\bar{u}}{\sqrt{2}}, 1 \right), \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} \left(\frac{-\bar{u} - \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, \frac{-\bar{u} + \bar{v}_0}{\sqrt{2}}, 1 \right) \right\rangle_E \\ &= \frac{1}{(\bar{u}^2 + 1) \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}}, \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_g = \left\langle d\bar{\mathbf{g}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E / \left\| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} \right\| = \frac{\bar{u} \bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)(\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1)}$$

biçiminde bulunur. β eğrisi Şekil 3.2 deki gibi $\bar{v}_0 = 0$ a karşılık gelen bir eğri olduğunda hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir. Her iki yüzey için elde edilen

geodezik eğrilikler, normal eğrilikler ve geodezik burulmalar (3.10) daki eşitliklerde yerlerine yazıldığında indirgenmiş eğrilikler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} k_g^* &= \frac{-\bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)^{3/2} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}}, \\ k_n^* &= \frac{1}{(\bar{u}^2 + 1) \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} + \frac{1}{2}, \\ \tau_g^* &= \frac{\bar{u} \bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)(\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1)} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3.13) den birim silindir üzerinde yuvarlanan paraboloid yüzeyinin açısal hızı

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma \left(\frac{-\bar{u} \bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)(\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1)} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{T} + \sigma \left(\frac{1}{(\bar{u}^2 + 1) \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{g} \\ &\quad + \sigma \left(\frac{\bar{v}_0}{(\bar{u}^2 + 1)^{3/2} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}_0^2 + 1}} \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.14)$$

biçiminde bulunur. $\beta(u, 0)$ eğrisi boyunca birim silindir üzerinde yuvarlanan paraboloid yüzeyinin açısal hızı

$$\omega = \sigma \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{T} + \sigma \left(\frac{1}{(\bar{u}^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{g}$$

biçiminde bulunur. Burada $k_g^* = 0$ olduğundan, yuvarlanma hareketi bir has-yuvarlanma hareketidir. Bu örnekteki türetmeden, önerilen Darboux çatı metodunun keyfi parametrik yüzeylere ve eğrilere kolaylıkla uygulanabilen geometrik değişmezler (invariantlar) cinsinden ifade edildiği görülebilir.

4. E^3 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN TERS KİNEMATİĞİ

4.1. Yüzeylerde Darboux Çatı Metodu

S , E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey ve α eğrisi de S üzerinde yönlendirilmiş bir eğri olsun. α eğrisi S yüzeyi üzerinde olduğundan, α eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir sağ-el ortonormal (T, g, n) çatısı mevcuttur. Burada T , α eğrisinin birim teğet vektörü; n , S yüzeyinin birim normal vektörü ve g de S yüzeyinin birim geodezik normal vektörüdür ve $g = n \times_E T$ dir. Çatıların hareket denklemleri

$$d\mathbf{m} = ds\mathbf{T}, \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{m}$ koordinat seçimine bağlı bir M noktasının konum vektörü; s , α eğrisinin yay uzunluğu olup ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} , koordinatlardan bağımsız 1-formlardır. Bu diferansiyel 1-formlardan, (T, g, n) Darboux çatısının T birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_g = \frac{\omega_{12}}{ds}, \quad k_n = \frac{\omega_{13}}{ds}, \quad \tau_g = \frac{\omega_{23}}{ds}$$

biçiminde verilir [10, 14].

Örnek 4.1. (Bir Küresel Eğrinin 1-Formları)

Bu örnekte bir α küresel eğrisine bağlı hareketli bir çatının 1-formları verilmektedir. S^2 birim küresinin parametrik denklemi

$$S^2 : x(u, v) = (\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u)$$

ile verilebilir. α eğrisi üzerinde keyfi bir nokta M olsun. α eğrisi t zamanının bir fonksiyonu olarak parametrik denklemi

$$\mathbf{m}(t) = (\cos u_0 \cos v, -\cos u_0 \sin v, \sin u_0), \quad u = u_0 = \text{sbt.}$$

olan bir çembere karşılık gelsin (Şekil 4.1). Buradan

$$d\mathbf{m}(t) = (-\sin v(t), -\cos v(t), 0) \cos u_0 dv(t) = ds(t)\mathbf{T}(t)$$

elde edilir. Böylece (4.4) den ds 1-formu ve $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü

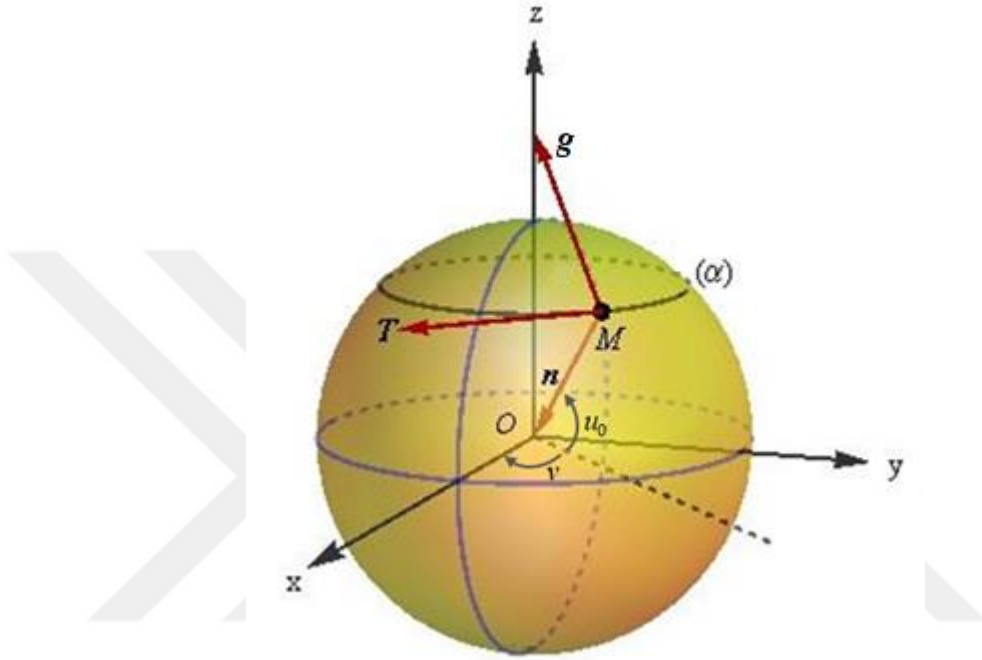
$$ds(t) = \cos u_0 dv(t), \quad \mathbf{T}(t) = (-\sin v(t), -\cos v(t), 0)$$

olarak bulunur. Yüzeyin $\mathbf{n}$ birim normal vektörünü M noktasında içe doğru (yani, orijine doğru) yönelen bir vektör olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{n}(t) = -\mathbf{m}(t) = (-\cos u_0 \cos v, \cos u_0 \sin v, -\sin u_0)$$

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{n}(t) \times \mathbf{T}(t) = (-\sin u_0 \cos v, \sin u_0 \sin v, \cos u_0)$$

bulunur. Böylece $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri M noktasına bağlı bir hareketli çatı olan Darboux çatısını oluştururlar.



Şekil 4.1. S^2 üzerinde yatan bir α eğrisi boyunca Darboux çatısı

Buradan ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_{12}(t) = \langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{g}(t) \rangle_E$$

$$= \langle (-\cos v(t), \sin v(t), 0) dv(t), (-\sin u_0 \cos v(t), \sin u_0 \sin v(t), \cos u_0) \rangle_E$$

$$= \sin u_0 dv(t),$$

$$\omega_{13}(t) = \langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t) \rangle_E$$

$$= \langle (-\cos v(t), \sin v(t), 0) dv(t), (-\cos u_0 \cos v(t), \cos u_0 \sin v(t), -\sin u_0) \rangle_E$$

$$= \cos u_0 dv(t),$$

$$\omega_{23}(t) = \langle d\mathbf{g}(t), \mathbf{n}(t) \rangle_E$$

$$= \langle (\sin u_0 \sin v(t), \sin u_0 \cos v(t), 0) dv(t), (-\cos u_0 \cos v(t), \cos u_0 \sin v(t), -\sin u_0) \rangle_E$$

$$= 0.$$

(4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
d \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & \omega_{13}(t) \\ -\omega_{12}(t) & 0 & \omega_{23}(t) \\ -\omega_{13}(t) & -\omega_{23}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sin u_0 dv(t) & \cos u_0 dv(t) \\ -\sin u_0 dv(t) & 0 & 0 \\ -\cos u_0 dv(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına bağlı geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma sırasıyla

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{\omega_{12}}{ds} = \frac{\sin u_0 dv(t)}{\cos u_0 dv(t)} = \tan u_0, \\
k_n &= \frac{\omega_{13}}{ds} = \frac{\cos u_0 dv(t)}{\cos u_0 dv(t)} = 1, \\
\tau_g &= \frac{\omega_{23}}{ds} = \frac{0}{\cos u_0 dv(t)} = 0
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

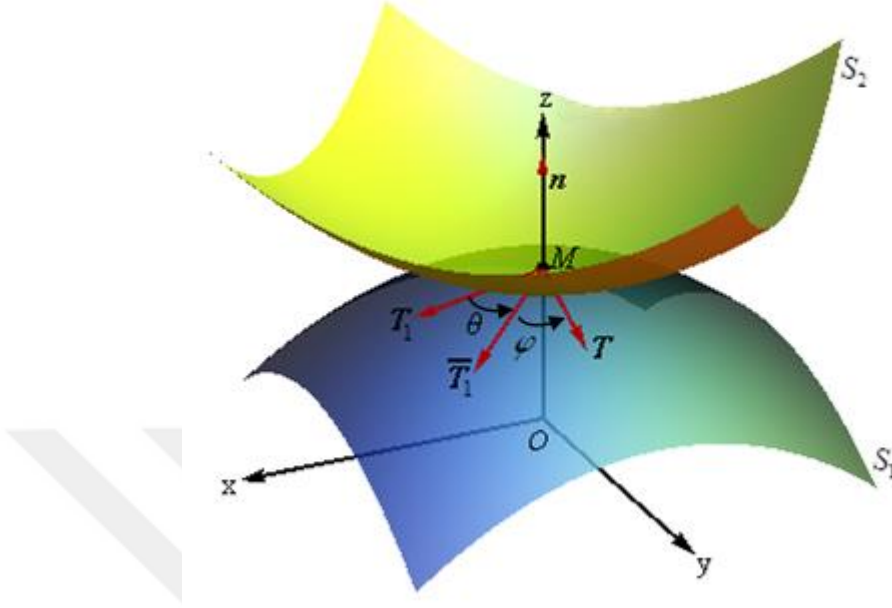
Tensör analizinde $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri $(1,0)$ tensörler olduklarını ve ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} 1-formları $(0,1)$ tensörler olduklarını not edelim. Ayrıca bunlar belirli bir koordinat sistemi seçiminden bağımsızdırlar [14].

4.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerin Kontak Denklemleri

Bu bölümde yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve eğriliklere göre kontak denklemler verilecektir.

İlk olarak yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hızı belirleyelim. Parametre eğrileri dik olan sabit bir $x(u, v)$ yüzeyini S_1 ve hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ yüzeyini S_2 ile gösterelim. S_1 yüzeyinin u – koordinat eğrisi (α_1 eğrisi) boyunca birim teğet vektörü $\mathbf{T}_1$, v – koordinat eğrisi (α_2 eğrisi) boyunca birim teğet vektörü $\mathbf{T}_2$, S_2 yüzeyinin $\bar{u}$ – koordinat eğrisi (β_1 eğrisi) boyunca birim teğet vektörü $\bar{\mathbf{T}}_1$, $\bar{v}$ – koordinat eğrisi (β_2 eğrisi) boyunca birim teğet vektörü $\bar{\mathbf{T}}_2$ ve $\mathbf{T}_1$ ile $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörleri arasındaki açı θ olsun. Hareketli S_2 yüzeyinin $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü yönünde yuvarlandığını belirtelim. $\mathbf{T}$ vektörü ile $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörü arasındaki açı φ olsun (Şekil

4.2). T , T_1 ve $\bar{T}_1$ vektörleri aynı teğet düzlemde yatarlar. Bundan dolayı T vektörü ile T_1 vektörü arasındaki açı da $(\varphi + \theta)$ olur [14].



Şekil 4.2. S_1 yüzeyi üzerinde T vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 yüzeyi

Yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve kontak denklemleri vermeden önce hareketli ve sabit yüzeyler üzerindeki parametre eğrilerinin Darboux çatılarının hareket denklemlerini (türev formüllerini) oluşturalım.

Hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ yüzeyi üzerindeki β_1 eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_1, \bar{g}_1, \bar{n})$ ve β_2 eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_2, \bar{g}_2, \bar{n})$ olsun. Bu durumda β_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{m}_1 = d\bar{s}_1 \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0), \quad d \begin{bmatrix} \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{g}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{n}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ -\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ -\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) & -\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{g}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{n}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{g}_1 = \bar{n} \times_E \bar{T}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{T}_1, \bar{g}_1, \bar{n})$ Darboux çatısının $\bar{T}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g_1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{k}_{n_1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{\tau}_{g_1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde β_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{\mathbf{m}}_2 = d\bar{s}_2 \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}), \quad d \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ -\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ -\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) & -\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{n}} \times_E \bar{\mathbf{T}}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatısının $\bar{\mathbf{T}}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g_2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{k}_{n_2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{\tau}_{g_2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$$

biçimindedir. Burada $\bar{\mathbf{m}}_1$ ve $\bar{\mathbf{m}}_2$, sırasıyla, β_1 ve β_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının konum vektörü; $\bar{s}_1$, β_1 eğrisinin yay uzunluğu ve $\bar{s}_2$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu olup $d\bar{s}_1$, $d\bar{s}_2$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$ ve $\bar{\omega}_{23}$ koordinatlardan bağımsız 1-formlardır [14].

Sabit $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki α_1 eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve α_2 eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ olsun. Bu durumda α_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_1 = ds_1 \mathbf{T}_1(u, v_0), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u, v_0) & \omega_{13}(u, v_0) \\ -\omega_{12}(u, v_0) & 0 & \omega_{23}(u, v_0) \\ -\omega_{13}(u, v_0) & -\omega_{23}(u, v_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ Darboux çatısının $\mathbf{T}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g_1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}, \quad k_{n_1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}, \quad \tau_{g_1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde α_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_2 = ds_2 \mathbf{T}_2(u_0, v), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u_0, v) & \omega_{13}(u_0, v) \\ -\omega_{12}(u_0, v) & 0 & \omega_{23}(u_0, v) \\ -\omega_{13}(u_0, v) & -\omega_{23}(u_0, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times_E \mathbf{T}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux çatısının $\mathbf{T}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g_2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}, \quad k_{n_2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}, \quad \tau_{g_2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$$

Burada $\mathbf{m}_1$ ve $\mathbf{m}_2$, sırasıyla, α_1 ve α_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının konum vektörü; s_1 , α_1 eğrisinin yay uzunluğu ve s_2 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu olup ds_1 , ds_2 , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır [14].

Şimdi ise yüzeylerde kontak denklemleri verelim. $\mathbf{T}$ vektörü yönünde S_2 yüzeyi üzerindeki geometrik yerin $\bar{k}_n$ normal eğriliği, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulması ve $\bar{k}_g$ geodezik eğriliği (2.4) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_n &= \bar{k}_{n1} \cos^2 \varphi + 2\bar{\tau}_{g1} \cos \varphi \sin \varphi + \bar{k}_{n2} \sin^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_g &= \bar{\tau}_{g1} \cos 2\varphi + (\bar{k}_{n2} - \bar{k}_{n1}) \cos \varphi \sin \varphi, \\ \bar{k}_g &= \bar{k}_{g1} \cos \varphi + \bar{k}_{g2} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Burada $\bar{s}$, S_2 yüzeyi üzerinde bulunan $\mathbf{T}$ vektörünün yönünde kontak geometrik yerin yay uzunluğudur. $\bar{k}_{n1}$, $\bar{k}_{n2}$, $\bar{\tau}_{g1}$, $\bar{\tau}_{g2}$, $\bar{k}_{g1}$ ve $\bar{k}_{g2}$, S_2 yüzeyinin M kontak noktasındaki $\bar{u}$ -parametrik ve $\bar{v}$ -parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir [14].

s , S_1 yüzeyi üzerindeki kontak geometrik yerin yay uzunluğu olsun. Kontak yuvarlanmanın kısıtlarından dolayı, s ve $\bar{s}$ yay uzunlukları birbirine eşittir ve ayrıca $\mathbf{T}$ vektörü S_1 yüzeyi üzerinde etki eden kontak geometrik yerin teğet vektörüdür. $\mathbf{T}$

vektörü yönünde S_1 yüzeyi üzerindeki geometrik yerin k_n normal eğriliği, τ_g geodezik burulması ve k_g geodezik eğriliği (2.4) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= k_{n1} \cos^2(\varphi + \theta) + 2\tau_{g1} \cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta) + k_{n2} \sin^2(\varphi + \theta), \\ \tau_g &= \tau_{g1} \cos 2(\varphi + \theta) + (k_{n2} - k_{n1}) \cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta), \\ k_g &= k_{g1} \cos(\varphi + \theta) + k_{g2} \sin(\varphi + \theta) + \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Burada k_{n1} , k_{n2} , τ_{g1} , τ_{g2} , k_{g1} ve k_{g2} , S_1 yüzeyinin M kontak noktasındaki u -parametrik ve v -parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir [14].

Kontak geometrik yerler verildiğinde, hareketli yüzeyin Darboux ani dönme vektörü (açısal hızı) denklem (3.13) den

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n})$$

biçiminde verilmektedir. Burada

$$\sigma = \frac{ds}{dt}, \quad k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$$

dir ve σ , yuvarlanma oranını temsil eder [14].

Şekil 4.2 de görüldüğü üzere $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ birim vektörleri arasındaki açı $(\varphi + \theta)$ dır. Bu durumda (2.3) göz önüne alındığında $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \sin(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= -\sin(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \cos(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir [14]. Bu eşitlikler (3.13) de elde edilen $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısındaki $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız denkleminde yerlerine yazıldığında $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısındaki açısal hız denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir [14]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) \tau_g^* - \sin(\varphi + \theta) k_n^* \right) \mathbf{T}_1 \\ &\quad + \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cos(\varphi + \theta) k_n^* \right) \mathbf{T}_2 - \sigma k_g^* \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Şimdi ise yüzeylerde eğriliklere göre kontak denklemleri oluşturalım. (4.4) eşitliğinde

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) \tau_g^* - \sin(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cos(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_3 &= -\sigma k_g^* \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

denilirse S_2 yüzeyinin açısal hızı (T_1, T_2, n) çatısına göre

$$\omega = \omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 n.$$

şeklinde ifade edilir. (4.2) ve (4.3) denklemlerini kullanarak $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kontak denklemleri aşağıdaki gibi bulunur [14]:

T_1 vektörü yönündeki ilk kontak denklem

$$\omega_1 = \sigma \left(\begin{aligned} &A_1 \cos^3 \varphi + A_2 \sin^3 \varphi + A_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &+ A_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + A_5 \cos \varphi + A_6 \sin \varphi \end{aligned} \right) \quad (4.6)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 = A_4 &= -\bar{\tau}_{g1} \cos \theta - \bar{k}_{n1} \sin \theta, \quad A_2 = A_3 = -\bar{\tau}_1 \sin \theta - \bar{k}_{n2} \cos \theta, \\ A_5 &= \tau_{g1} \cos \theta + k_{n2} \sin \theta, \quad A_6 = -\tau_{g1} \sin \theta + k_{n2} \cos \theta \end{aligned}$$

dır. T_2 vektörü yönündeki ikinci kontak denklem

$$\omega_2 = \sigma \left(\begin{aligned} &B_1 \cos^3 \varphi + B_2 \sin^3 \varphi + B_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &+ B_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + B_5 \cos \varphi + B_6 \sin \varphi \end{aligned} \right) \quad (4.7)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} B_1 = B_4 &= -\bar{\tau}_{g1} \sin \theta + \bar{k}_{n1} \cos \theta, \quad B_2 = B_3 = \bar{\tau}_{g1} \cos \theta - \bar{k}_{n2} \sin \theta, \\ B_5 &= -\tau_{g1} \sin \theta - k_{n1} \cos \theta, \quad B_6 = -\tau_{g1} \cos \theta + k_{n1} \sin \theta \end{aligned}$$

dır. Son olarak n vektörü yönündeki üçüncü kontak denklem

$$\omega_3 = \sigma (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi) + \hat{\omega}_3 \quad (4.8)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} C_1 &= -\bar{k}_{g1} + k_{g1} \cos \theta + k_{g2} \sin \theta \\ C_2 &= -\bar{k}_{g2} - k_{g1} \sin \theta + k_{g2} \cos \theta \\ \hat{\omega}_3 &= d\theta / dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

dır.

(4.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk ifade olan $\sigma (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi)$ terim iki yüzeyin geodezik eğriliklerinin farkı tarafından indirgenen dönme oranıdır.

Dolayısıyla, son ifade olan $\hat{\omega}_3$, indirgenen dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farkı telafi eden dönme oranıdır. Lei Cui ve Jian S. Dai [14], $\hat{\omega}_3$ dönme oranını “telafi edici dönme oranı” olarak isimlendirmişlerdir. Böylelikle üç kontak denklem elde edilmiş olur.

4.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematiği

(4.6), (4.7) ve (4.8) denklemlerindeki $A_1, \dots, A_6$, $B_1, \dots, B_6$ ve C_1, C_2 katsayılarının koordinat eğrilerinin eğriliklerine ve iki koordinat çatısı ile kesişen θ açısına göre ifade edildiklerini dikkate alalım. Dolayısıyla bu katsayıların ve θ açısının, verilen bir kontak noktaya ait oldukları açıktır.

ω_1 , ω_2 ve ω_3 açısal hız bileşenlerinin verilmesiyle üç bilinmeyen değer hesaplanacaktır. Bu bilinmeyenler φ yuvarlanma yönü, σ yuvarlanma oranı ve $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranıdır [14].



Şekil 4.3. Kontak yuvarlanmanın ters kinematiğinin girdileri ve çıktıları

İlk çıktı olan φ yuvarlanma yönü aşağıdaki gibi elde edilir:

(4.6) ve (4.7) deki eşitliklerde ortak olan σ yuvarlanma oranı yok edilip eşitleme yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} B_1 \cos^3 \varphi + B_2 \sin^3 \varphi + B_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ + B_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + B_5 \cos \varphi + B_6 \sin \varphi \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} A_1 \cos^3 \varphi + A_2 \sin^3 \varphi + A_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ + A_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + A_5 \cos \varphi + A_6 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Eşitliğin sol tarafı sağ tarafa geçirildiğinde

$$\begin{aligned} & (A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1) \cos^3 \varphi + (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1) \sin^3 \varphi + (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1) \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ & + (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1) \cos \varphi \sin^2 \varphi + (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1) \cos \varphi + (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1) \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $P_1 = A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1$, $P_2 = (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1)$,

$P_3 = (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1)$, $P_4 = (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1)$, $P_5 = (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1)$ ve $P_6 = (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1)$

olmak üzere polinomu

$$P_1 \cos^3 \varphi + P_2 \sin^3 \varphi + P_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + P_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + P_5 \cos \varphi + P_6 \sin \varphi = 0$$

şeklinde yazabiliriz. (4.25) de $x = \tan(\varphi / 2)$ alındığında altıncı dereceden

$$\begin{aligned} &(-P_1 - P_5)x^6 + (2P_3 + 2P_6)x^5 + (3P_1 - 4P_4 - P_5)x^4 \\ &+ (8P_2 - 4P_3 + 4P_6)x^3 + (-3P_1 + 2P_5)x^2 + (2P_3 + 2P_6)x + P_1 + P_5 = 0. \end{aligned}$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun çözümü, hareketli yüzeyin yuvarlanabileceği bütün yönleri verir. Tüm çözümlerin kompleks sayı olması durumunda istenen hareketi oluşturabilmenin hiçbir yolunun olamayacağını not edelim [14].

İkinci çıktı olan σ yuvarlanma oranı, (4.6) veya (4.7) de φ açısının yerine konulmasıyla elde edilir. Bu iki çıktı, has-yuvarlanmanın dönme hareketini belirler. Ayrıca (4.5) in ilk iki eşitliğinin kareleri alınıp taraf tarafa toplandığında

$$\sigma^2 = \frac{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}$$

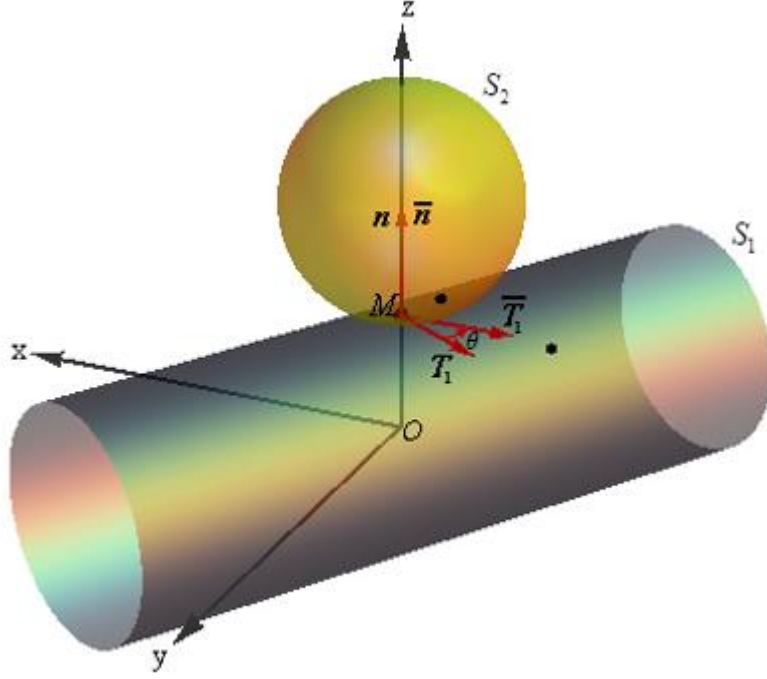
elde edilir. Fiziksel olarak σ yuvarlanma oranı pozitif olmalıdır. Eşitliğin her iki tarafın karekökleri alındığında σ aşağıdaki gibi bulunur [14]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}}.$$

Üçüncü çıktı olan $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranı, σ ve φ değerlerinin denklem (4.23) de yerlerine koyulmasıyla elde edilir. Bu üç parametre, hareketli yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketini belirler [14].

4.4. Örnek

Bu örnekte hareketli bir yüzey olarak göz önüne alınan S^2 birim küresinin (S_2 yüzeyinin) sabit bir yüzey olarak göz önüne alınan birim silindir (S_1 yüzeyi) üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematiği verilmektedir (Şekil 4.4). Bu iki yüzeyin ters kinematiği incelenirken ilk olarak kontak denklemler bulunur. Daha sonra da nümerik kök yaklaşımları metodu uygulanır.



Şekil 4.4. Birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan S^2 birim küresi

S^2 üzerindeki keyfî iki parametre eğrisi β_1 ve β_2 olsun. β_1 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_1$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_2$ biçiminde verilsin. S^2 birim küresini

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (-\sin \bar{u} \cos \bar{v}, \sin \bar{u} \sin \bar{v}, 2 - \cos \bar{u})$$

parametrik denklemi ile verelim. S^2 üzerindeki $\beta_1 = \beta_1(\bar{u})$ eğrisini $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_1(\bar{u}) = y(\bar{u}, \bar{v}_0) = (-\sin \bar{u} \cos \bar{v}_0, \sin \bar{u} \sin \bar{v}_0, 2 - \cos \bar{u})$$

biçiminde alalım. $\beta_1(\bar{u})$ eğrisinin $\bar{s}_1$ yay uzunluğunun $\bar{u}$ ya göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_1}{d\bar{u}}, \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \right\rangle_E} = 1$$

dir. β_1 eğrisinin birim teğet vektörü

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = \frac{d\beta_1}{d\bar{s}_1} = \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \Big/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = (-\cos \bar{u} \cos \bar{v}_0, \cos \bar{u} \sin \bar{v}_0, \sin \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Hareketli bir yüzey olan birim kürenin yüzey normali içe doğru alınsın. Bu durumda birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos \bar{u} \cos \bar{v} & \cos \bar{u} \sin \bar{v} & \sin \bar{u} \\ \sin \bar{u} \sin \bar{v} & \sin \bar{u} \cos \bar{v} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(-\sin^2 \bar{u} \cos \bar{v}, \sin^2 \bar{u} \sin \bar{v}, -\cos \bar{u} \sin \bar{u}) / \sin \bar{u} \\
&= (\sin \bar{u} \cos \bar{v}, -\sin \bar{u} \sin \bar{v}, \cos \bar{u})
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak bulunur. β_1 eğrisi, $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (4.9) daki birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) = (\sin \bar{u} \cos \bar{v}_0, -\sin \bar{u} \sin \bar{v}_0, \cos \bar{u})$$

biçimindedir. Yüzeyin birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{g}}_1 &= \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \times_E \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin \bar{u} \cos \bar{v}_0 & -\sin \bar{u} \sin \bar{v}_0 & \cos \bar{u} \\ -\cos \bar{u} \cos \bar{v}_0 & \cos \bar{u} \sin \bar{v}_0 & \sin \bar{u} \end{vmatrix} \\
&= (-\sin \bar{v}_0, -\cos \bar{v}_0, 0)
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$ olmak üzere

β_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}}_1 \right\rangle_E \bigg/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0, \\ \bar{k}_{n1} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E \bigg/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 1, \\ \bar{\tau}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{g}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E \bigg/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

biçiminde bulunur.

Benzer şekilde, S^2 üzerindeki $\beta_2 = \beta_2(\bar{v})$ eğrisini $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_2(\bar{v}) = y(\bar{u}_0, \bar{v}) = (-\sin \bar{u}_0 \cos \bar{v}, \sin \bar{u}_0 \sin \bar{v}, 2 - \cos \bar{u}_0)$$

biçiminde alalım. $\beta_2(\bar{v})$ eğrisinin $\bar{s}_2$ yay uzunluğunun $\bar{v}$ ye göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_2}{d\bar{v}}, \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} \right\rangle_E} = \sin \bar{u}_0$$

dir. β_2 eğrisinin birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}}_2 = \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = \frac{d\beta_2}{d\bar{s}_2} = \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} \bigg/ \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = (\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0)$$

biçiminde bulunur. β_2 eğrisi, $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (4.9) daki birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) = (\sin \bar{u}_0 \cos \bar{v}, -\sin \bar{u}_0 \sin \bar{v}, \cos \bar{u}_0)$$

biçimindedir. Yüzeyin birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) &= \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \times_E \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin \bar{u}_0 \cos \bar{v} & -\sin \bar{u}_0 \sin \bar{v} & \cos \bar{u}_0 \\ \sin \bar{v} & \cos \bar{v} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos \bar{v} \cos \bar{u}_0, \sin \bar{v} \cos \bar{u}_0, \sin \bar{u}_0) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g_2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{k}_{n_2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{\tau}_{g_2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$ olmak üzere

β_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{g_2} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{g}}_2 \right\rangle_E / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = -\cot \bar{u}_0, \\ \bar{k}_{n_2} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = 1, \\ \bar{\tau}_{g_2} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = \left\langle d\bar{\mathbf{g}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle_E / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

biçiminde bulunur.

Sabit bir yüzey olan birim silindir üzerindeki parametre eğrileri α_1 ve α_2 olsun. α_1 eğrisinin yay uzunluğu s_1 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu s_2 biçiminde verilsin. Parametrik denklemi

$$\mathbf{x}(u, v) = (-\sin u, -v, \cos u)$$

olacak şekilde bir birim silindir alalım. Bu silindiri z eksenini etrafında saat yönünde $\pi/6$ derece döndürelim. Bu durumda Şekil 4.4 de görüldüğü gibi dönme sonucu oluşan birim silindir

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u - \frac{1}{2} v, \frac{1}{2} \sin u - \frac{\sqrt{3}}{2} v, \cos u \right)$$

biçiminde parametrelendirilir. Dolayısıyla, birim silindir üzerindeki $\alpha_1 = \alpha_1(u)$ parametre eğrisi de

$$\alpha_1(u) = \alpha_1(u, v_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u - \frac{1}{2} v_0, \frac{1}{2} \sin u - \frac{\sqrt{3}}{2} v_0, \cos u \right)$$

biçimindedir. $\alpha_1(u)$ eğrisinin s_1 yay uzunluğunun u ya göre türevi

$$\frac{ds_1}{du} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_1}{du}, \frac{d\alpha_1}{du} \right\rangle_E} = 1$$

dir. α_1 eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(u, v_0) = \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{du} \Big/ \frac{ds_1}{du} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u, \frac{1}{2} \cos u, -\sin u \right)$$

biçiminde bulunur. Sabit bir yüzey olan birim silindirin yüzey normali dışa doğru alınsın. Bu durumda birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u & \frac{1}{2} \cos u & -\sin u \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u, \frac{1}{2} \sin u, \cos u \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak bulunur. α_1 eğrisi, u -parametre eğrisi olarak alındığından (4.12) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u, \frac{1}{2} \sin u, \cos u \right)$$

biçiminde bulunur. Birim geodezik normal vektörü

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1(u, v_0) = \mathbf{n}(u, v_0) \times_E \mathbf{T}_1(u, v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u & \frac{1}{2} \sin u & \cos u \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u & \frac{1}{2} \cos u & -\sin u \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

biçiminde bulunur. $k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}$, $k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}$, $\tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$ olmak üzere

α_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g1} &= \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{g}_1 \rangle_E / \frac{ds_1}{du} = 0, \\ k_{n1} &= \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = \langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{n} \rangle_E / \frac{ds_1}{du} = -1, \\ \tau_{g1} &= \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = \langle d\mathbf{g}_1/du, \mathbf{n} \rangle_E / \frac{ds_1}{du} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

biçiminde bulunur.

Birim silindir üzerindeki $\alpha_2 = \alpha_2(v)$ eğrisini de

$$\alpha_2(v) = \alpha_2(u_0, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u_0 - \frac{1}{2}v, \frac{1}{2} \sin u_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}v, \cos u_0 \right)$$

biçiminde alalım. $\alpha_2(v)$ eğrisinin s_2 yay uzunluğunun v ye göre türevi

$$\frac{ds_2}{dv} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_2}{dv}, \frac{d\alpha_2}{dv} \right\rangle_E} = 1$$

dir. α_2 eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(u_0, v) = \frac{d\alpha_2}{ds_2} = \frac{d\alpha_2}{dv} / \frac{ds_2}{dv} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

biçiminde bulunur. α_2 eğrisi, v -parametre eğrisi olarak alındığından (7.12) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u_0, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u_0, \frac{1}{2} \sin u_0, \cos u_0 \right)$$

biçimindedir. Birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2(u_0, v) = \mathbf{n}(u_0, v) \times_E \mathbf{T}_2(u_0, v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u_0 & \frac{1}{2} \sin u_0 & \cos u_0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u_0, -\frac{1}{2} \cos u_0, \sin u_0 \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $k_{g2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}$, $k_{n2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}$, $\tau_{g2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$ olmak üzere

α_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g2} &= \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2} = \langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{g}_2 \rangle_E / \frac{ds_2}{dv} = 0, \\ k_{n2} &= \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2} = \langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{n} \rangle_E / \frac{ds_2}{dv} = 0, \\ \tau_{g2} &= \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2} = \langle d\mathbf{g}_2/dv, \mathbf{n} \rangle_E / \frac{ds_2}{dv} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

biçiminde bulunur.

(4.10) ve (4.11) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (4.2) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde $\mathbf{T}$ vektörü yönünde hareketli birim küre üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$\bar{k}_n = 1, \quad \bar{\tau}_g = 0, \quad \bar{k}_g = -\cot \bar{u} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}$$

biçiminde bulunur. (4.13) ve (4.14) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (4.3) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde $\mathbf{T}$ vektörü yönünde sabit birim silindir üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$k_n = -\cos^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g = \cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta), \quad k_g = \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}$$

biçiminde bulunur. $k_g^* = \bar{k}_g - k_g$, $k_n^* = \bar{k}_n - k_n$, $\tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$ eşitlikleriyle verilen indirgenmiş eğrilikler

$$k_g^* = -\cot \bar{u} \sin \varphi - \frac{d\theta}{ds}, \quad k_n^* = 1 + \cos^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g^* = -\cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta)$$

olarak bulunur. Hareketli S^2 birim küresinin eğrilikleri ile sabit birim silindirin eğrilikleri farkı sonucu elde edilen k_g^* , k_n^* ve τ_g^* indirgenmiş eğrilikleri (4.5) de yerlerine yerleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) [-\cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta)] - \sin(\varphi + \theta) [1 + \cos^2(\varphi + \theta)] \right) \\ &= -\sigma \sin(\varphi + \theta) \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) [-\cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta)] + \cos(\varphi + \theta) [1 + \cos^2(\varphi + \theta)] \right) \\ &= 2\sigma \cos(\varphi + \theta) \\ \omega_3 &= -\sigma \left(-\cot \bar{u} \sin \varphi - \frac{d\theta}{ds} \right) = \sigma (\cot \bar{u} \sin \varphi) + \hat{\omega}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

biçiminde üç kontak denklem elde edilir. (4.15) deki ilk iki eşitliğe, σ yuvarlanma oranının yok edilmesiyle çapraz çarpım işlemi uygulandığında

$$P_1 \cos(\varphi + \theta) + P_2 \sin(\varphi + \theta) = 0 \quad (7.16)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\omega_1 \\ P_2 &= \omega_2 \end{aligned}$$

dir.

(4.16) daki denklemi çözmek için, kapalı-form çözümü elde edilemediğinden, nümerik metot kullanılmalıdır. $x = \tan((\varphi + \theta)/2)$ alınıp (4.16) da yerine yerleştirildiğinde

$$P_1(1 + x^2 - x^4 - x^6) + P_2(2x + 4x^3 + 2x^5) = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde aşağıdaki gibi P_1 ve P_2 katsayılarına bağlı altıncı dereceden bir polinom elde edilir.

$$(-P_1)x^6 + (2P_2)x^5 + (-P_1)x^4 + (4P_2)x^3 + (P_1)x^2 + (2P_2)x + P_1 = 0.$$

Birim küre ile birim silindirin kontak noktası M olmak üzere, birim silindir üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($u = \pi/4$ ve $v=1$), birim küre üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($\bar{u} = \pi/3$ ve $\bar{v} = \pi/4$), ve istenen açısal hızın $\omega_{\text{istenen}} = -3T_1 + 1T_2 - 2n$ olduklarını varsayalım. Burada $\omega_1 = -3$, $\omega_2 = 1$ ve $\omega_3 = -2$ dir. Bu durumda $P_1 = 2\omega_1$ ve $P_2 = \omega_2$ olduğundan $P_1 = -6$ ve $P_2 = 1$ olarak elde edilir. Bu parametreler polinom denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde

$$3x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

biçiminde altıncı dereceden polinom elde edilir. Polinomun köklerinin nümerik yaklaşımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$x_1 = -1.18046, \quad x_2 = 0.84713, \quad x_3 = x_5 = i, \quad x_4 = x_6 = -i.$$

Burada son dört kök sanal kısımlardan oluştuğundan bu kökler göz ardı edilir. Reel kökler, muhtemel yuvarlanma yönlerini verir. x_1 ilk reel kökü ile x_2 ikinci reel kökünü (4.15) deki ilk denklemde yerlerine yerleştirdiğimizde σ yuvarlanma oranlarının değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-\omega_1}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{3(1 + x_1^2)}{2x_1} \Rightarrow \sigma = -3.04138 \\ \sigma &= \frac{-\omega_1}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{3(1 + x_2^2)}{2x_2} \Rightarrow \sigma = 3.04138 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Fiziksel olarak, yuvarlanma oranı yalnızca pozitif olabilir. Dolayısıyla, negatif çözüm göz ardı edilir. Burada σ yuvarlanma oranını pozitif yapan değer x_2 reel kökü olduğundan bundan sonraki işlemlerde $x_2 = 0.84713$ değerine göre hesaplamalar yapılmaktadır.

T_1 vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörünün iç çarpımı

$$\cos \theta = \langle T_1, \bar{T}_1 \rangle_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \bar{u} \cos \bar{v}_0 \cos u + \frac{1}{2} \cos \bar{u} \sin \bar{v}_0 \cos u - \sin \bar{u} \sin u$$

biçimindedir. ($u = \pi/4$ ve $v=1$) ve ($\bar{u} = \pi/3$ ve $\bar{v} = \pi/4$) değerleri iç çarpımda yerlerine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -0.27087 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan T_1 vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörü arasındaki açının radyan cinsinden değeri

$$\theta = 1.84509$$

biçiminde bulunur. Bu durumda φ yuvarlanma yönü

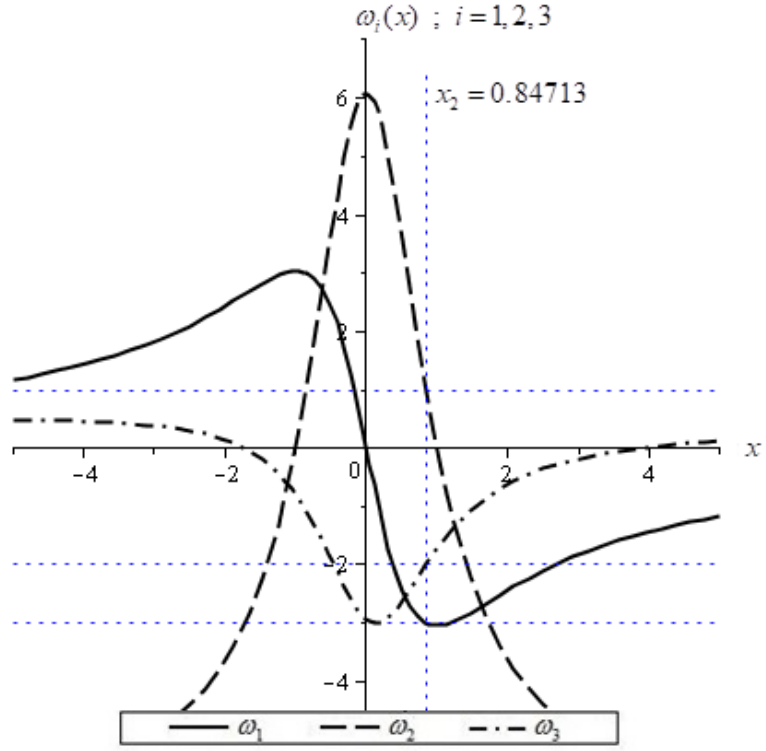
$$\varphi = 2\arctan(x_2) - \theta = -0.43943$$

biçiminde elde edilir.

$\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme hızı, $\varphi = -0.43943$ yuvarlanma yönünün, $\sigma = 3.04138$ yuvarlanma oranının ve $\omega_3 = -2$ istenen dönme oranının (4.15) in üçüncü denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_3 &= \omega_3 - \sigma (\cot \bar{u} \sin \varphi) = -2 - 3.04138 (\cot(\pi/3) \sin(-0.43943)) \\ &= -1.25298. \end{aligned}$$

Burada $\hat{\omega}_3 = -1.25298$ telafi edici dönme oranı, $\sigma (\cot \bar{u} \sin \varphi) = -0.74702$ indirgenmiş dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farka eşittir. Böylelikle birim kürenin birim silindir üzerinde yuvarlanmasının ters kinematiği tamamlanmış olur.



Şekil 4.5. $x = \tan(\varphi + \theta) / 2$ için birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan birim kürenin T vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri

5. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ

Bu bölümde, IR_1^3 Lorentziyen 3-uzayının temel kavramları ile bu uzaydaki spacelike ve timelike yüzeylerin geometrisi Frenet ve Darboux türev formülleri yardımıyla ifade edilecektir.

5.1. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 5.1.1. IR^3 reel vektör uzayı üzerinde Lorentziyen iç çarpım

$$\langle , \rangle : IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in IR^3$ dır. Bu Lorentziyen iç çarpım ile birlikte IR^3 Afın uzayı, Minkowski 3-uzayı (veya 3 boyutlu Lorentz uzayı veya Lorentziyen 3-uzay) olarak isimlendirilir ve IR_1^3 ile gösterilir [32].

Lorentziyen iç çarpım pozitif tanımlı olmadığından IR_1^3 deki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı Lorentziyen karaktere sahip olabilirler.

Tanım 5.1.2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3$ herhangi bir vektör olsun.

- i) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ ya da $\mathbf{a} = 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne spacelike,
- ii) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne timelike,
- iii) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ ve $\mathbf{a} \neq 0$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne null (lightlike)

vektör denir [32].

Tanım 5.1.3. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in IR_1^3$ keyfi iki vektör olmak üzere, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ ise $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerine Lorentziyen anlamda diktirler denir [4].

Tanım 5.1.4. Bir $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3$ vektörünün normu

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektörlere birim vektörler denir [32].

Tanım 5.1.5. [4, 34]:

i) **Hiperbolik açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki timelike vektör olsun. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

ii) **Merkez açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem timelike olsun. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir.

iii) **Spacelike açı:** $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike olsun. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir.

iv) **Lorentziyen timelike açı:** $\mathbf{a}$, IR_1^3 de bir spacelike vektör ve $\mathbf{b}$, IR_1^3 de bir timelike vektör olsun. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sinh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir.

Tanım 5.1.6. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in IR_1^3$ keyfi iki vektör olsun. Bu vektörlerin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}), \quad i = 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ile verilir. Burada

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$$

dır [38, 39].

Teorem 5.1.1. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ve $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\mathbb{R}^3$

uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

- i) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
- ii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$
- iii) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$
- iv) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)^2$

dir [39].

5.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 5.2.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\alpha = \alpha(s)$ $\mathbb{R}_1^3$ de birim hızlı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için α eğrisinin teğet vektörü $\alpha'(s)$ bir spacelike, timelike veya null vektör ise $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine, sırasıyla, spacelike, timelike veya null eğri adı verilir [32].

Tanım 5.2.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir [24, 39]:

1) Spacelike durumu: α eğrisi bir spacelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $T(s)$ birim teğet vektörü de bir spacelike vektördür. Bu durumda $T'(s)$ vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

i) $T'(s)$ spacelike: $\kappa(s)$ eğrilik ve $\tau(s)$ burulma olmak üzere (T, N, B)

Frenet çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $T(s)$ ve $N(s)$ vektörleri spacelike, $B(s)$ vektörü ise timelike vektörler olup,

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s),$$

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad \tau(s) = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$$

dır.

ii) $\mathbf{T}'(s)$ *timelike*: $\kappa(s)$ eğrilik ve $\tau(s)$ burulma olmak üzere $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$

Frenet çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektörleri spacelike, $\mathbf{N}(s)$ vektörü ise timelike vektörler olup,

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad \mathbf{B}(s) = -\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s),$$

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad \tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$$

dır.

2) Timelike durumu: α eğrisi bir timelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $\mathbf{T}(s)$ birim teğet vektörü de bir timelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{T}'(s) \neq 0$ vektörü bir spacelike vektördür. $\kappa(s)$ eğrilik ve $\tau(s)$ burulma olmak üzere $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ Frenet çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ vektörleri spacelike, $\mathbf{T}(s)$ vektörü ise timelike vektörler olup,

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad \mathbf{B}(s) = -\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s),$$

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad \tau(s) = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$$

dır.

5.3. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım 5.3.1. S , IR_1^3 uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise S ye spacelike yüzey denir. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise S ye timelike yüzey denir. Yani, IR_1^3 uzayındaki spacelike (timelike) bir yüzeyin birim normal vektörü timelike (spacelike) karakterdedir [2]. S yüzeyinin bütün teğet düzlemleri lightlike (null), yani yüzeyin normal vektörü lightlike ise S ye lightlike yüzey denir [24].

Tanım 5.3.2. IR_1^3 uzayındaki orijin merkezli Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1 \}$$

ve

$$H_0^2 = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1 \}$$

olarak tanımlanır. Burada, H_0^2 ve S_1^2 küreleri, sırasıyla, spacelike ve timelike yüzeylerdir [39]. IR_1^3 uzayında tüm lightlike vektörlerin cümlesi

$$\Lambda = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \} - \{ (0, 0, 0) \}$$

olarak tanımlanır. Bu cümleye ışık konisi adı verilir. Işık konisi bir lightlike yüzeydir [24].

Bir spacelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem spacelike düzlem olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan bütün eğriler spacelike eğrilerdir. Dolayısıyla, yüzey üzerinde herhangi bir M noktasından geçen dik parametre eğrilerinin her ikisi de spacelike eğrilerdir. Bir timelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem Lorentz düzlemi (yani, IR_1^3 de bir timelike düzlem) olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan eğriler spacelike, timelike veya lightlike (null) eğriler olabilir. Burada eğrilerin null olması durumunu göz önüne almıyoruz. Dolayısıyla, yüzey üzerinde herhangi bir M noktasından geçen dik parametre eğrilerinden biri spacelike, diğeri ise timelike eğridir [39].

Tanım 5.3.3. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ işaret fonksiyonlarını gösterebilirsin. IR_1^3 de bir yüzeyin birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= \varepsilon_1 \|\mathbf{n}_u\|^2, \quad \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle = \varepsilon_2 \|\mathbf{n}_v\|^2, \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \varepsilon_3 E, \quad \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \varepsilon_4 G, \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}}, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_5.\end{aligned}$$

yüzeyin için 1. ve 2. temel formları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}I &= \varepsilon_3 E du^2 + \frac{2F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} du dv + \varepsilon_4 G dv^2, \\ II &= \frac{e}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} du^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \right) f du dv + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} dv^2\end{aligned}$$

biçimindedir [17].

5.3.1. 3 -Boyutlu Lorentz Uzayında Spacelike Yüzeylerin Teorisi

Diferansiyellenebilir bir spacelike $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde bir α spacelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu hareketli çatı, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır ve Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. Burada $\mathbf{T}$ birim vektörü, α spacelike eğrisinin bir M noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; $\mathbf{n}$, yüzeyin M noktasındaki birim normal vektör alanı ve $\mathbf{g}$ vektörü, $\mathbf{g} = -\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik normal vektör alanıdır. Ayrıca, $\mathbf{n}$ timelike olduğundan, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{g}$ birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$\mathbf{T} \times \mathbf{g} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{g} \times \mathbf{n} = -\mathbf{T}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\mathbf{g} \quad (5.1)$$

bağıntıları vardır. Burada $\mathbf{T}$ vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, $\mathbf{T}$ spacelike eksen etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ hiperbolik açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise $\mathbf{g}$ ile $\mathbf{N}$ arasındaki merkez açı ve $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{B}$ arasındaki hiperbolik açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ile verilir. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ile verilir. Bu matris formundan, Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\boldsymbol{\omega} = \tau_g \mathbf{T} - k_n \mathbf{g} - k_g \mathbf{n} \quad (5.3)$$

biçiminde tanımlanır. O halde, Darboux üçyüzlüsüne ait türev formülleri

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır.

Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 - k_n^2, \\ k_g &= \kappa \cosh \phi, \\ k_n &= -\kappa \sinh \phi, \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir [39].

$x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrilerinin dik olduğunu kabul edelim. $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde alınan bir M noktasından geçen keyfi bir spacelike eğri α olsun. Aynı noktadan geçen $v = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrisini α_1 ve $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrini α_2 ile gösterelim. α , α_1 ve α_2 eğrilerinin M deki teğet birim vektörleri, sırası ile, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ vektörleri spacelike vektörlerdir. Yüzeyin M deki timelike birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\mathbf{g}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 = -\mathbf{g}_1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2 = -\mathbf{g}_2 \quad (5.4)$$

dir. Bu durumda

$$(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}), (\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n}), (\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$$

gibi üç Darboux üçyüzlüsü elde edilir. Bunların her birine karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \tau_g \mathbf{T} - k_n \mathbf{g} - k_g \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\omega}_1 &= \tau_{g1} \mathbf{T}_1 - k_{n1} \mathbf{g}_1 - k_{g1} \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \tau_{g2} \mathbf{T}_2 - k_{n2} \mathbf{g}_2 - k_{g2} \mathbf{n}\end{aligned}\quad (5.5)$$

biçimindedir. Burada α eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğunu s , α_1 eğrisinin yay uzunluğunu s_1 ve α_2 eğrisinin yay uzunluğunu da s_2 ile gösterelim. E , F ve G 1. temel formun katsayıları olmak üzere

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds}, \quad \mathbf{T}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \quad (5.6)$$

ve

$$\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \mathbf{n}$$

dir. (5.6) dan

$$\mathbf{x}_u = \sqrt{E} \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{x}_v = \sqrt{G} \mathbf{T}_2$$

olup, bu değerler (5.6) da yazılırsa

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E} \mathbf{T}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G} \mathbf{T}_2 \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ vektörleri arasındaki spacelike açığı φ ile gösterirsek,

$\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_2$ arasındaki spacelike açı $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafını sırası ile $\mathbf{T}_1$

ve $\mathbf{T}_2$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2, \\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_1 \rangle &= \cos \varphi = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_2 \rangle &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}\end{aligned}\quad (5.7)$$

formülleri elde edilir. ds , ds_1 ve ds_2 diferansiyel 1-formları için

$$\begin{aligned}ds^2 &= Edu^2 + Gdv^2; \quad F = 0, \\ ds_1^2 &= Edu^2; \quad v = \text{sabit}, \quad dv = 0, \\ ds_2^2 &= Gdv^2; \quad u = \text{sabit}, \quad du = 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

dır. (5.7) nin son iki formülüyle (5.8) in son iki formülü karşılaştırılırsa

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{E} du}{ds} = \frac{ds_1}{ds}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} = \frac{ds_2}{ds} \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.4) deki ilk eşitlikten $\mathbf{g}$ vektörü $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (\cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2) \times \mathbf{n} \\ &= \cos \varphi (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{n}) + \sin \varphi (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{n}) = \cos \varphi \mathbf{g}_1 + \sin \varphi \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin parametre eğrilerinin Darboux üçyüzlülerinin her ikisinde de $\mathbf{n}$ çakışık olup, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$ dir. Buna göre (5.4) den

$$-\mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_1 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_1$$

ve

$$-\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_2 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{T}_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir [39].

Sonuç 5.3.1. $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ spacelike birim vektörleri arasındaki spacelike açı φ olmak üzere, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= -\sin \varphi \mathbf{T}_1 + \cos \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.11)$$

olarak ifade edilir [39].

Teorem 5.3.1. Bir $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin parametre eğrilerinin $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüleri sıra ve yönleri aynı olmamak şartı ile daima birbirine çakışıktır. Ayrıca, bu üçyüzlüler için Darboux türev formülleri

$$\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{T}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{g}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{n}, \quad (i, j = 1, 2)$$

biçimindedir [39].

$x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerindeki keyfi bir α eğrisi ile α_1 ve α_2 parametre eğrilerinin yay elemanları sırasıyla s , s_1 ve s_2 ; α_1 ve α_2 ye ait Darboux

ani dönme vektörleri ω_1 , ω_2 ve α eğrisinin T teğetinin T_1 ile yaptığı spacelike açısı φ ise, bu durumda

$$\frac{dT_1}{ds} = \frac{\partial T_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial T_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds}$$

dır. (5.9) göz önüne alınırsa

$$\frac{dT_1}{ds} = \cos \varphi (\omega_1 \times T_1) + \sin \varphi (\omega_2 \times T_1) = (\cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2) \times T_1$$

işlemlerde kolaylık açısından

$$\mathbf{a} = \cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2 \quad (5.12)$$

olarak kısaltırsak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times T_1$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{ds} &= \frac{\partial T_2}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial T_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \\ &= \cos \varphi (\omega_1 \times T_2) + \sin \varphi (\omega_2 \times T_2) \\ &= (\cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2) \times T_2 \\ &= \mathbf{a} \times T_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{d}{ds} (T_1 \times T_2) \\ &= \frac{dT_1}{ds} \times T_2 + T_1 \times \frac{dT_2}{ds} \\ &= (\mathbf{a} \times T_1) \times T_2 + T_1 \times (\mathbf{a} \times T_2) \\ &= -\langle \mathbf{a}, T_2 \rangle T_1 + \langle T_1, T_2 \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{a}, T_1 \rangle T_2 - \langle T_2, T_1 \rangle \mathbf{a} \\ &= -\langle \mathbf{a}, T_2 \rangle T_1 + \langle \mathbf{a}, T_1 \rangle T_2 \\ &= (T_2 \times T_1) \times \mathbf{a} \\ &= -\mathbf{n} \times \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times T_1, \quad \frac{dT_2}{ds} = \mathbf{a} \times T_2, \quad \frac{dn}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.11) deki

$$\mathbf{T} = \cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2$$

eşitliğinin s ye göre türevi alınır

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \cos \varphi \frac{d\mathbf{T}_1}{ds} - \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \frac{d\mathbf{T}_2}{ds} + \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{T}_2$$

bulunur. $\mathbf{T}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{g}_2$ olmak üzere (5.10) ve (5.13) eşitlikleri göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \cos \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_1) - \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_1) + \sin \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_2) + \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_2) \\ &= \cos \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_1) - \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_2) + \sin \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_2) + \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times (-\mathbf{T}_1)) \\ &= \mathbf{a} \times (\cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2) - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \times (\cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2) \\ &= \left(\mathbf{a} - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times (\cos \varphi \mathbf{T}_1 + \sin \varphi \mathbf{T}_2) \\ &= \left(\mathbf{a} - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(\mathbf{a} - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T}$ ve $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}$ elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}$$

bulunur [39]. Bu eşitlik (5.12) ile kıyaslanıldığında aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 5.3.2. Parametre eğrileri dik olan bir $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin M noktasından geçen keyfi bir spacelike eğri α , bu noktadan geçen $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrileri α_1 ve α_2 , bu eğrilere M noktasında karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri; sırasıyla, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ olsun. α ve α_1 in M deki $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}_1$ teğetleri arasındaki spacelike açı φ , α nın yay elemanı ds ve yüzeyin M noktasındaki birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{\omega} = \cos \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sin \varphi \boldsymbol{\omega}_2 - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \quad (5.14)$$

dır [39].

(5.5) denklemlerindeki $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ Darboux ani dönme vektörlerini göz önüne alalım. Bu ani dönme vektörlerinin $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ ve $\mathbf{n}$ birim

vektörleri ile skaler çarpılarak, eğrilerin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_1, T_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 - k_{n1} g_1 - k_{g1} n, T_1 \rangle = \tau_{g1} \langle T_1, T_1 \rangle = \tau_{g1} \\
\langle \omega_2, T_2 \rangle &= \langle \tau_{g2} T_2 - k_{n2} g_2 - k_{g2} n, T_2 \rangle = \tau_{g2} \langle T_2, T_2 \rangle = \tau_{g2} \\
\langle \omega, T \rangle &= \langle \tau_g T - k_n g - k_g n, T \rangle = \tau_g \langle T, T \rangle = \tau_g \\
\langle \omega_1, g_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 - k_{n1} g_1 - k_{g1} n, g_1 \rangle = -k_{n1} \langle g_1, g_1 \rangle = -k_{n1} \\
\langle \omega_2, g_2 \rangle &= \langle \tau_{g2} T_2 - k_{n2} g_2 - k_{g2} n, g_2 \rangle = -k_{n2} \langle g_2, g_2 \rangle = -k_{n2} \\
\langle \omega, g \rangle &= \langle \tau_g T - k_n g - k_g n, g \rangle = -k_n \langle g, g \rangle = -k_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (5.10), (5.11) ve (5.14) den

$$\begin{aligned}
\langle \omega, T \rangle &= \left\langle \cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2 - \frac{d\varphi}{ds} n, \cos \varphi T_1 + \sin \varphi T_2 \right\rangle \\
&= \cos^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \cos \varphi \sin \varphi \langle \omega_1, T_2 \rangle + \sin \varphi \cos \varphi \langle \omega_2, T_1 \rangle + \sin^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = T_2$ ve $g_2 = -T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\langle \omega, T \rangle = \cos^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \cos \varphi \sin \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle + \sin \varphi \cos \varphi \langle \omega_2, -g_2 \rangle + \sin^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\tau_g = \tau_{g1} \cos^2 \varphi - k_{n1} \cos \varphi \sin \varphi + k_{n2} \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{g2} \sin^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece spacelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *O. Bonnet formülü* elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\langle \omega, g \rangle &= \left\langle \cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2 - \frac{d\varphi}{ds} n, \cos \varphi g_1 + \sin \varphi g_2 \right\rangle \\
&= \cos^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle + \cos \varphi \sin \varphi \langle \omega_1, g_2 \rangle + \sin \varphi \cos \varphi \langle \omega_2, g_1 \rangle + \sin^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = T_2$ ve $g_2 = -T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\langle \omega, g \rangle = \cos^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle + \cos \varphi \sin \varphi \langle \omega_1, -T_1 \rangle + \sin \varphi \cos \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle + \sin^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$-k_n = -k_{n1} \cos^2 \varphi - \tau_{g1} \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{g2} \sin \varphi \cos \varphi - k_{n2} \sin^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece spacelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *Euler formülü* elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
\langle \omega, n \rangle &= \langle \tau_g T - k_n g - k_g n, n \rangle = -k_g \langle n, n \rangle = k_g \\
\langle \omega_1, n \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 - k_{n1} g_1 - k_{g1} n, n \rangle = -k_{g1} \langle n, n \rangle = k_{g1}
\end{aligned}$$

$$\langle \omega_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \tau_{g_2} \mathbf{T}_2 - k_{n_2} \mathbf{g}_2 - k_{g_2} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = -k_{g_2} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = k_{g_2}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle \omega, \mathbf{n} \rangle &= \left\langle \cos \varphi \omega_1 + \sin \varphi \omega_2 - \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \cos \varphi \langle \omega_1, \mathbf{n} \rangle + \sin \varphi \langle \omega_2, \mathbf{n} \rangle - \frac{d\varphi}{ds} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= k_{g_1} \cos \varphi + k_{g_2} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece spacelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *Liouville formülü* elde edilir [39]. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 5.3.2. Spacelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş Euler, O. Bonnet ve Liouville formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir [39]:

$$\begin{aligned} k_n &= k_{n_1} \cos^2 \varphi + (\tau_{g_1} - \tau_{g_2}) \cos \varphi \sin \varphi + k_{n_2} \sin^2 \varphi, \\ \tau_g &= \tau_{g_1} \cos^2 \varphi + (k_{n_2} - k_{n_1}) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{g_2} \sin^2 \varphi, \\ k_g &= k_{g_1} \cos \varphi + k_{g_2} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Şimdi, spacelike bir yüzeye ait $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ Darboux çatısının diferansiyelini matris formunda aşağıdaki gibi verelim:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}.$$

$(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ Darboux çatısının diferansiyeli ise $\mathbf{g}_1 = \mathbf{T}_2$, $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$ eşitliklerinden aşağıdaki gibi matris formunda elde edilir:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}.$$

$(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n})$ ve $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatıları arasındaki $\mathbf{x}_u = \sqrt{E} \mathbf{T}_1$, $\mathbf{x}_v = \sqrt{G} \mathbf{T}_2$ bağıntılarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Burada $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ ve $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ 1. temel formun katsayıları ve

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dır. (5.16) eşitliğinin sol tarafının diferansiyeli alındığında}$$

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv \\ \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv \\ \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \\ \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{n}_u \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{x}_{vv} \\ \mathbf{n}_v \end{bmatrix} dv$$

olur. $\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle = \varepsilon_1 \|\mathbf{n}_u\|^2$ ve $\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle = \varepsilon_2 \|\mathbf{n}_v\|^2$ olmak üzere Gauss denklemleri ve Weingarten denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v - \frac{e}{\sqrt{\varepsilon_1}} \mathbf{n}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v - \frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}} \mathbf{n}, \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_u &= W_1^1 \mathbf{x}_u + W_1^2 \mathbf{x}_v, \\ \mathbf{n}_v &= W_2^1 \mathbf{x}_u + W_2^2 \mathbf{x}_v \end{aligned} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v - \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} \mathbf{n} \end{aligned}$$

biçimindedir [16, 17]. $d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$ diferansiyeli bu denklemler ile matris formunda

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & -e/\sqrt{\varepsilon_1} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & -f/\sqrt{\varepsilon_2} \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & -f/\sqrt{\varepsilon_2} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & -g/\sqrt{\varepsilon_2} \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. Buradan

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & -e/\sqrt{\varepsilon_1} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & -f/\sqrt{\varepsilon_2} \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & -f/\sqrt{\varepsilon_2} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & -g/\sqrt{\varepsilon_2} \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Γ_{ij}^k Gauss denklemlerinin katsayıları, W_i^j de Weingarten denklemlerinin katsayıları, ve

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{\varepsilon_1} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{\varepsilon_1} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u \rangle, \\
f &= \sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v \rangle, \\
g &= \sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v \rangle
\end{aligned}$$

2. temel formun katsayıları olarak gösterilmektedir. Bu katsayıların değerleri

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - FG_v - GG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \\
W_1^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{fF}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{eG}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right), & W_1^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{eF}{\sqrt{\varepsilon_1}} - \frac{fE}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \\
W_2^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{gF}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{fG}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right), & W_2^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{fF}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{gE}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right)
\end{aligned}$$

biçimindedir [16, 17]. (5.16) eşitliğinin sağ tarafının diferansiyeli alındığında

$$d \left(A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = (dA) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + A \left(d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \left(dA + A \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. A matrisinin diferansiyeli alınır

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
A \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & 0 & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$d \left(A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$ eşitliğinin diferansiyeli matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv \\ \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv \\ \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & \sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi ise bu eşitlikler arasındaki bağıntıları hesaplayalım. Bunun için önce 1. temel formun katsayılarının diferansiyellerini bulalım. Bu diferansiyeller

$$dE = E_u du + E_v dv;$$

$$E_u = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle, \quad E_v = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle$$

$$dG = G_u du + G_v dv;$$

$$G_u = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G_v = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle$$

$$dF = F_u du + F_v dv;$$

$$F_u = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$F_v = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

biçiminde hesaplanır [16, 39]. Matris formundaki eşitliklerin ilk satırından

$$\mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv = \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} \mathbf{T}_1 + \sqrt{E}\omega_{12} \mathbf{T}_2 + \sqrt{E}\omega_{13} \mathbf{n}$$

dır. ω_{12} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{T}_2$ spacelike vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
\sqrt{E}\omega_{12} &= \langle \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv, \mathbf{T}_2 \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{T}_2 \rangle du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{T}_2 \rangle dv \\
&= \left\langle \mathbf{x}_{uu}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle du + \left\langle \mathbf{x}_{uv}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle dv
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}$ ve $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v$ bağıntılarından

$$\sqrt{E}\omega_{12} = \left(F_u - \frac{1}{2}E_v \right) \frac{du}{\sqrt{G}} + \left(\frac{G_u}{2} \right) \frac{dv}{\sqrt{G}}$$

bulunur. ω_{13} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ timelike birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$-\sqrt{E}\omega_{13} = \langle \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle dv = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon_1}} du + \frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv$$

bulunur. Matris formundaki eşitliklerin ikinci satırından

$$\mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv = -\sqrt{G}\omega_{12}\mathbf{T}_1 + \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}}\mathbf{T}_2 + \sqrt{G}\omega_{23}\mathbf{n}$$

dır. ω_{23} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ timelike birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$-\sqrt{G}\omega_{23} = \langle \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle du + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle dv = \frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}} du + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv$$

bulunur. $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki parametre eğrileri dik olarak kabul edildiği için $F=0$ dır. Elde edilen tüm bağıntılar düzenlendiğinde ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formlarının 1. temel form bileşenleri ile 2. temel form bileşenleri cinsinden ifadeleri

$$\omega_{12} = \frac{-E_v du + G_u dv}{2\sqrt{EG}}, \quad \omega_{13} = \frac{-\frac{e}{\sqrt{\varepsilon_1}} du - \frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv}{\sqrt{E}}, \quad \omega_{23} = \frac{-\frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}} du - \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv}{\sqrt{G}}$$

biçiminde elde edilir.

u – koordinat eğrisi boyunca v değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_1$ spacelike vektörü yönündeki $ds_1 = \sqrt{E}du$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g1} , k_{n1} ve τ_{g1} sırasıyla u – koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
k_{g1} &= \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{-E_v du}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{-E_v}{2E\sqrt{G}}, \\
k_{n1} &= \frac{-\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = -\frac{edu}{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{E}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{-e}{\sqrt{\varepsilon_1}E}, \\
\tau_{g1} &= \frac{-\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = -\frac{fdu}{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{G}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{-f}{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{EG}}
\end{aligned}$$

eğrilikler elde edilir. Burada 1-formların $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısında verildiğini not edelim.

$\mathbf{g}_1 = \mathbf{T}_2$, $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{T}_1$ eşitlikleri göz önüne alındığında, v – koordinat eğrisine ait 1-formlar $(\mathbf{T}_2, -\mathbf{T}_1, \mathbf{n})$ çatısında elde edilir. v – koordinat eğrisi boyunca u değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_2$ spacelike vektörü yönündeki $ds_2 = \sqrt{G}dv$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g2} , k_{n2} ve τ_{g2} sırasıyla v – koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
k_{g2} &= \frac{\langle d\mathbf{T}_2, -\mathbf{T}_1 \rangle}{ds_2} = \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle}{ds_2} = \frac{G_u dv}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}, \\
k_{n2} &= \frac{-\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle}{ds_2} = -\frac{g dv}{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{G}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{-g}{\sqrt{\varepsilon_2}G}, \\
\tau_{g2} &= \frac{-\langle -d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle}{ds_2} = \frac{f dv}{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{E}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{f}{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{EG}}
\end{aligned}$$

eğrilikler elde edilir [39].

5.3.2. 3 -Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Yüzeylerin Teorisi

Bu alt bölümde spacelike ve timelike keyfi yörünge eğrileri için timelike yüzeylerin teorisi verilecektir.

i - Timelike Yüzeyler Üzerinde Yatan Spacelike Yörünge Eğrileri

Diferansiyellenebilir bir timelike $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde bir α spacelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu hareketli çatı, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır ve Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. Burada $\mathbf{T}$ birim vektörü, α spacelike eğrisinin bir M noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; $\mathbf{n}$, yüzeyin M noktasındaki birim normal vektör alanı ve $\mathbf{g}$ vektörü, $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik

normal vektör alanıdır. Ayrıca, $\mathbf{g}$ timelike olduğundan, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{n}$ birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$\mathbf{T} \times \mathbf{g} = -\mathbf{n}, \quad \mathbf{g} \times \mathbf{n} = -\mathbf{T}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T} = \mathbf{g} \quad (5.17)$$

bağıntıları vardır. Burada $\mathbf{T}$ vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, $\mathbf{T}$ spacelike eksen etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ hiperbolik açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise $\mathbf{g}$ ile $\mathbf{N}$ arasındaki hiperbolik açı ve $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{B}$ arasındaki merkez açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 0 & \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ile verilir. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

ile verilir. Bu matris formundan, Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\boldsymbol{\omega} = -\tau_g \mathbf{T} - k_n \mathbf{g} + k_g \mathbf{n} \quad (5.19)$$

biçiminde tanımlanır. O halde, Darboux üçyüzlüsüne ait türev formülleri

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır.

Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 - k_n^2, \\ k_g &= \kappa \cosh \phi, \\ k_n &= \kappa \sinh \phi, \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir [39].

$x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrilerinin dik olduğunu kabul edelim. $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde alınan bir M noktasından geçen keyfi bir spacelike eğri α olsun. Aynı noktadan geçen $v = \text{sabit}$ timelike parametre eğrisini α_1 ve $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrini α_2 ile gösterelim. α , α_1 ve α_2 eğrilerinin M deki teğet birim vektörleri, sırası ile, T , T_1 ve T_2 ile gösterilsin. Bu durumda T ve T_2 vektörleri spacelike, T_1 vektörü ise timelike vektördür. Yüzeyin P deki spacelike birim normal vektörü n olmak üzere,

$$n \times T = g, \quad n \times T_1 = -g_1, \quad n \times T_2 = g_2 \quad (5.20)$$

dir. Bu durumda

$$(T, g, n), \quad (T_1, g_1, n), \quad (T_2, g_2, n)$$

gibi üç Darboux üçyüzlüsü elde edilir. Bunların her birine karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri

$$\begin{aligned} \omega &= -\tau_g T - k_n g + k_g n, \\ \omega_1 &= \tau_{g_1} T_1 + k_{n_1} g_1 - k_{g_1} n, \\ \omega_2 &= -\tau_{g_2} T_2 - k_{n_2} g_2 + k_{g_2} n \end{aligned} \quad (5.21)$$

biçimindedir. Burada α eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğunu s , α_1 eğrisinin yay uzunluğunu s_1 ve α_2 eğrisinin yay uzunluğunu da s_2 ile gösterelim. E , F ve G 1. temel formun katsayıları olmak üzere

$$T_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad T_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{x_v}{\sqrt{G}}, \quad T = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds} \quad (5.22)$$

ve

$$T_1 \times T_2 = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = n$$

dir. (5.22) den

$$x_u = \sqrt{E} T_1, \quad x_v = \sqrt{G} T_2$$

olup, bu değerler (5.22) de yazılırsa

$$T = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E} T_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G} T_2 \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Burada T ile T_1 vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açığı φ ile gösterirsek, T ile T_2 arasındaki açı merkez açıdır. Bu eşitliğin her iki tarafını sırası ile T_1 ve T_2 ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \sinh \varphi \mathbf{T}_1 + \cosh \varphi \mathbf{T}_2, \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_1 \rangle &= -\sinh \varphi = -\sqrt{E} \frac{du}{ds}, \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_2 \rangle &= \cosh \varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

formülleri elde edilir. ds , ds_1 ve ds_2 diferansiyel 1-formları için

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -Edu^2 + Gdv^2 ; F = 0, \\
ds_1^2 &= Edu^2 ; v = \text{sabit}, dv = 0, \\
ds_2^2 &= Gdv^2 ; u = \text{sabit}, du = 0
\end{aligned} \tag{5.24}$$

dır. (5.23) ün son iki formülüyle (5.24) ün son iki formülü karşılaştırılırsa

$$\sinh \varphi = \frac{\sqrt{E} du}{ds} = \frac{ds_1}{ds}, \quad \cosh \varphi = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} = \frac{ds_2}{ds} \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.20) deki ilk eşitlikten $\mathbf{g}$ vektörü $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \mathbf{n} \times (\sinh \varphi \mathbf{T}_1 + \cosh \varphi \mathbf{T}_2) \\
&= \sinh \varphi (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1) + \cosh \varphi (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_2) \\
&= -\sinh \varphi \mathbf{g}_1 + \cosh \varphi \mathbf{g}_2
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin parametre eğrilerinin Darboux üçyüzlülerinin her ikisinde de $\mathbf{n}$ çakışık olup, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$ dir. Buna göre (5.20) den

$$-\mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_1 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_1$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_2 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= -\mathbf{T}_2 \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{T}_1
\end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir [39].

Sonuç 5.3.3. T spacelike birim vektörü ile $\mathbf{T}_1$ timelike birim vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açısı φ olmak üzere, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \sinh \varphi \mathbf{T}_1 + \cosh \varphi \mathbf{T}_2 \\
\mathbf{g} &= \cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2 \\
\mathbf{n} &= \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olarak ifade edilir [39].

Teorem 5.3.3. Bir $x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin parametre eğrilerinin (T_1, g_1, n) ve (T_2, g_2, n) Darboux üçyüzlüleri sıra ve yönleri aynı olmamak şartı ile daima birbirine çakışıktır. Ayrıca, bu üçyüzlüler için Darboux türev formülleri

$$\frac{\partial T_i}{\partial s_j} = \omega_j \times T_i, \quad \frac{\partial g_i}{\partial s_j} = \omega_j \times g_i, \quad \frac{\partial n}{\partial s_j} = \omega_j \times n, \quad (i, j = 1, 2)$$

biçimindedir [39].

$x = x(u, v)$ timelike yüzeyi üzerindeki keyfi bir α eğrisi ile α_1 ve α_2 parametre eğrilerinin yay elemanları sırasıyla s , s_1 ve s_2 ; α_1 ve α_2 ye ait Darboux ani dönme vektörleri ω_1 , ω_2 ve α eğrisinin T teğetinin T_1 ile yaptığı Lorentziyen timelike açı φ ise, bu durumda

$$\frac{dT_1}{ds} = \frac{\partial T_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial T_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds}$$

dır. (5.25) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{ds} &= \sinh \varphi (\omega_1 \times T_1) + \cosh \varphi (\omega_2 \times T_1) \\ &= (\sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2) \times T_1 \end{aligned}$$

işlemlerde kolaylık açısından

$$\mathbf{a} = \sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2 \quad (5.28)$$

olarak kısaltırsak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times T_1$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{ds} &= \frac{\partial T_2}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial T_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \\ &= \sinh \varphi (\omega_1 \times T_2) + \cosh \varphi (\omega_2 \times T_2) \\ &= (\sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2) \times T_2 \\ &= \mathbf{a} \times T_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d}{ds} (T_1 \times T_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dT_1}{ds} \times T_2 + T_1 \times \frac{dT_2}{ds} \\
&= (\mathbf{a} \times T_1) \times T_2 + T_1 \times (\mathbf{a} \times T_2) \\
&= -\langle \mathbf{a}, T_2 \rangle T_1 + \langle T_1, T_2 \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{a}, T_1 \rangle T_2 - \langle T_2, T_1 \rangle \mathbf{a} \\
&= -\langle \mathbf{a}, T_2 \rangle T_1 + \langle \mathbf{a}, T_1 \rangle T_2 \\
&= (T_2 \times T_1) \times \mathbf{a} \\
&= -\mathbf{n} \times \mathbf{a} \\
&= \mathbf{a} \times \mathbf{n}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times T_1, \quad \frac{dT_2}{ds} = \mathbf{a} \times T_2, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \quad (5.29)$$

elde edilir. (5.27) deki

$$\mathbf{T} = \sinh \varphi T_1 + \cosh \varphi T_2$$

eşitliğinin s ye göre türevi alınır

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \sinh \varphi \frac{dT_1}{ds} + \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} T_1 + \cosh \varphi \frac{dT_2}{ds} + \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} T_2$$

bulunur. $T_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{g}_1$ ve $T_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{g}_2$ olmak üzere (5.26) ve (5.29) eşitlikleri göz önüne alınır

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \sinh \varphi (\mathbf{a} \times T_1) - \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_1) + \cosh \varphi (\mathbf{a} \times T_2) + \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_2) \\
&= \sinh \varphi (\mathbf{a} \times T_1) - \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times (-T_2)) + \cosh \varphi (\mathbf{a} \times T_2) + \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times T_1) \\
&= \mathbf{a} \times (\sinh \varphi T_1 + \cosh \varphi T_2) + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \times (\sinh \varphi T_1 + \cosh \varphi T_2) \\
&= \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times (\sinh \varphi T_1 + \cosh \varphi T_2) \\
&= \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T}$ ve $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}$ elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}$$

bulunur [39]. Bu eşitlik (5.28) ile kıyaslanıldığında aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 5.3.4. Parametre eğrileri dik olan bir $x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin M noktasından geçen keyfi bir spacelike eğri α , bu noktadan geçen $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ timelike ve spacelike parametre eğrileri α_1 ve α_2 , bu eğrilere M noktasında karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri; sırasıyla, ω , ω_1 ve ω_2 olsun. α ve α_1 in P deki T ve T_1 teğetleri arasındaki Lorentziyen timelike açı φ , α nin yay elemanı ds ve yüzeyin M noktasındaki birim normal vektörü n olmak üzere,

$$\omega = \sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} n \quad (5.30)$$

dır [39].

(5.21) denklemlerindeki ω , ω_1 ve ω_2 Darboux ani dönme vektörlerini göz önüne alalım. Bu ani dönme vektörlerinin T , T_1 , T_2 ve g , g_1 , g_2 ve n birim vektörleri ile skaler çarpılarak, eğrilerin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, T_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 + k_{n1} g_1 - k_{g1} n, T_1 \rangle = \tau_{g1} \langle T_1, T_1 \rangle = -\tau_{g1} \\ \langle \omega_2, T_2 \rangle &= \langle -\tau_{g2} T_2 - k_{n2} g_2 + k_{g2} n, T_2 \rangle = -\tau_{g2} \langle T_2, T_2 \rangle = -\tau_{g2} \\ \langle \omega, T \rangle &= \langle -\tau_g T - k_n g + k_g n, T \rangle = -\tau_g \langle T, T \rangle = -\tau_g \\ \langle \omega_1, g_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 + k_{n1} g_1 - k_{g1} n, g_1 \rangle = k_{n1} \langle g_1, g_1 \rangle = k_{n1} \\ \langle \omega_2, g_2 \rangle &= \langle -\tau_{g2} T_2 - k_{n2} g_2 + k_{g2} n, g_2 \rangle = -k_{n2} \langle g_2, g_2 \rangle = k_{n2} \\ \langle \omega, g \rangle &= \langle -\tau_g T - k_n g + k_g n, g \rangle = -k_n \langle g, g \rangle = k_n \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (5.26), (5.27) ve (5.30) dan

$$\begin{aligned} \langle \omega, T \rangle &= \left\langle \sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} n, \sinh \varphi T_1 + \cosh \varphi T_2 \right\rangle \\ &= \sinh^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_1, T_2 \rangle \\ &\quad + \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_2, T_1 \rangle + \cosh^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = -T_2$ ve $g_2 = T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \langle \omega, T \rangle &= \sinh^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_1, -g_1 \rangle \\ &\quad + \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle + \cosh^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$-\tau_g = -\tau_{g1} \sinh^2 \varphi - k_{n1} \sinh \varphi \cosh \varphi + k_{n2} \cosh \varphi \sinh \varphi - \tau_{g2} \cosh^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *O. Bonnet formülü* elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \omega, g \rangle &= \left\langle \sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}, -\sinh \varphi g_1 + \cosh \varphi g_2 \right\rangle \\ &= -\sinh^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_1, g_2 \rangle \\ &\quad - \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_2, g_1 \rangle + \cosh^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = -T_2$ ve $g_2 = T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \langle \omega, g \rangle &= -\sinh^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle \\ &\quad - \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_2, -T_2 \rangle + \cosh^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$k_n = -k_{n1} \sinh^2 \varphi - \tau_{g1} \sinh \varphi \cosh \varphi - \tau_{g2} \cosh \varphi \sinh \varphi + k_{n2} \cosh^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *Euler formülü* elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} \langle \omega, n \rangle &= \langle -\tau_g T - k_n g + k_g n, n \rangle = k_g \langle n, n \rangle = k_g \\ \langle \omega_1, n \rangle &= \langle \tau_{g1} T_1 + k_{n1} g_1 - k_{g1} n, n \rangle = -k_{g1} \langle n, n \rangle = -k_{g1} \\ \langle \omega_2, n \rangle &= \langle -\tau_{g2} T_2 - k_{n2} g_2 + k_{g2} n, n \rangle = k_{g2} \langle n, n \rangle = k_{g2} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle \omega, n \rangle &= \left\langle \sinh \varphi \omega_1 + \cosh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}, \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \sinh \varphi \langle \omega_1, n \rangle + \cosh \varphi \langle \omega_2, n \rangle + \frac{d\varphi}{ds} \langle n, n \rangle \end{aligned}$$

$$k_g = -k_{g1} \sinh \varphi + k_{g2} \cosh \varphi + \frac{d\varphi}{ds}$$

olarak hesaplanır. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş *Liouville formülü* elde edilir [39]. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 5.3.4. Timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi spacelike eğriler için genelleştirilmiş Euler, O. Bonnet ve Liouville formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir [39]:

$$\begin{aligned}
k_n &= -k_{n1} \sinh^2 \varphi - (\tau_{g1} + \tau_{g2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + k_{n2} \cosh^2 \varphi, \\
\tau_g &= \tau_{g1} \sinh^2 \varphi + (k_{n1} - k_{n2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + \tau_{g2} \cosh^2 \varphi, \\
k_g &= -k_{g1} \sinh \varphi + k_{g2} \cosh \varphi + \frac{d\varphi}{ds}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

ii - Timelike Yüzeyler Üzerinde Yatan Timelike Yörünge Eğrileri

Diferansiyellenebilir bir timelike $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde bir α timelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu hareketli çatı, (T, g, n) ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır ve Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. Burada T birim vektörü, α timelike eğrisinin bir M noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; n , yüzeyin M noktasındaki birim normal vektör alanı ve g vektörü, $g = -n \times T$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik normal vektör alanıdır. T timelike olduğundan, n ve g birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$T \times g = -n, \quad g \times n = T, \quad n \times T = -g \tag{5.32}$$

bağıntıları vardır. Burada T vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer N , B , g ve n vektörleri aynı spacelike düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T timelike eksen etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ spacelike açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki ve n ile B arasındaki spacelike açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. (T, g, n) Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

ile verilir. Bu matris formundan, Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\omega = \tau_g T + k_n g - k_g n \tag{5.34}$$

biçiminde tanımlanır. O halde, Darboux üçyüzlüsüne ait türev formülleri

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 + k_n^2, \\ k_g &= \kappa \cos \phi, \\ k_n &= \kappa \sin \phi, \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir [39].

$x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrilerinin dik olduğunu kabul edelim. $x = x(u, v)$ yüzeyi üzerinde alınan bir M noktasından geçen keyfi bir timelike eğri α olsun. Aynı noktadan geçen $v = \text{sabit}$ timelike parametre eğrisini α_1 ve $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrini α_2 ile gösterelim. α , α_1 ve α_2 eğrilerinin M deki teğet birim vektörleri, sırası ile, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}_1$ vektörleri timelike, $\mathbf{T}_2$ vektörü ise spacelike vektördür. Yüzeyin M deki spacelike birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\mathbf{g}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 = -\mathbf{g}_1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2 = \mathbf{g}_2 \quad (5.35)$$

dir. Bu durumda

$$(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n}), \quad (\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n}), \quad (\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$$

gibi üç Darboux üçyüzlüsü elde edilir. Bunların her birine karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \tau_g \mathbf{T} + k_n \mathbf{g} - k_g \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\omega}_1 &= \tau_{g1} \mathbf{T}_1 + k_{n1} \mathbf{g}_1 - k_{g1} \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= -\tau_{g2} \mathbf{T}_2 - k_{n2} \mathbf{g}_2 + k_{g2} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.36)$$

biçimindedir. Burada α eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğunu s , α_1 eğrisinin yay uzunluğunu s_1 ve α_2 eğrisinin yay uzunluğunu da s_2 ile gösterelim. E , F ve G 1. temel formun katsayıları olmak üzere

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds}, \quad \mathbf{T}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \quad (5.37)$$

ve

$$\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \mathbf{n}$$

dir. (5.37) den

$$\mathbf{x}_u = \sqrt{E}\mathbf{T}_1, \quad \mathbf{x}_v = \sqrt{G}\mathbf{T}_2$$

olup, bu değerler (5.37) de yazılırsa

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\mathbf{T}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G}\mathbf{T}_2 \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ vektörleri arasındaki hiperbolik açığı φ ile gösterirsek, $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_2$ arasındaki açı Lorentziyen timelike açıdır. Bu eşitliğin her iki tarafını sırası ile $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2, \\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_1 \rangle &= -\cosh \varphi = -\sqrt{E} \frac{du}{ds}, \\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}_2 \rangle &= \sinh \varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \end{aligned} \quad (5.38)$$

formülleri elde edilir. ds , ds_1 ve ds_2 diferansiyel 1-formları için

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 - Gdv^2; \quad F = 0, \\ ds_1^2 &= Edu^2; \quad v = \text{sabit}, \quad dv = 0, \\ ds_2^2 &= Gdv^2; \quad u = \text{sabit}, \quad du = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

dır. (5.38) in son iki formülüyle (5.39) un son iki formülü karşılaştırılırsa

$$\cosh \varphi = \frac{\sqrt{E}du}{ds} = \frac{ds_1}{ds}, \quad \sinh \varphi = \frac{\sqrt{G}dv}{ds} = \frac{ds_2}{ds} \quad (5.40)$$

elde edilir. (5.35) deki ilk eşitlikten $\mathbf{g}$ vektörü $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (\cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2) \times \mathbf{n} \\ &= \cosh \varphi (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{n}) + \sinh \varphi (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{n}) \\ &= \cosh \varphi \mathbf{g}_1 - \sinh \varphi \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ timelike yüzeyinin parametre eğrilerinin Darboux üçyüzlülerinin her ikisinde de $\mathbf{n}$ çakışık olup, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$ dir. Buna göre (5.35) den

$$-\mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_1 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_1$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \times \mathbf{T}_2 = -\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_2 + \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{T}_1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

elde edilir [39].

Sonuç 5.3.5. $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ timelike birim vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ olmak üzere, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= -\sinh \varphi \mathbf{T}_1 - \cosh \varphi \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.42)$$

olarak ifade edilir [39].

Teorem 5.3.5. Bir $x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin parametre eğrilerinin $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüleri, sıra ve yönleri aynı olmamak şartı ile daima birbirine çakışıktır. Ayrıca, bu üçyüzlüler için Darboux türev formülleri

$$\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{T}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{g}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{n}, \quad (i, j = 1, 2)$$

biçimindedir [39].

$x = x(u, v)$ timelike yüzeyi üzerindeki keyfî bir α eğrisi ile α_1 ve α_2 parametre eğrilerinin yay elemanları sırasıyla s , s_1 ve s_2 ; α_1 ve α_2 ye ait Darboux ani dönme vektörleri $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ ve α eğrisinin $\mathbf{T}$ teğetinin $\mathbf{T}_1$ ile yaptığı hiperbolik açı φ ise, bu durumda

$$\frac{d\mathbf{T}_1}{ds} = \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds}$$

dır. (5.40) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}_1}{ds} &= \cosh \varphi (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{T}_1) + \sinh \varphi (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{T}_1) \\ &= (\cosh \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sinh \varphi \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

işlemlerde kolaylık açısından

$$\mathbf{a} = \cosh \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sinh \varphi \boldsymbol{\omega}_2 \quad (5.43)$$

olarak kısaltırsak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{T}_1$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{ds} &= \frac{\partial T_2}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial T_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \\ &= \cosh \varphi (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{T}_2) + \sinh \varphi (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{T}_2) \\ &= (\cosh \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sinh \varphi \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{T}_1 \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{T}_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2) \\ &= \frac{dT_1}{ds} \times \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \times \frac{dT_2}{ds} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_1) \times \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \times (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_2) \\ &= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_1 + \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_2 - \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{a} \\ &= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{T}_2 \rangle \mathbf{T}_1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{T}_1 \rangle \mathbf{T}_2 \\ &= (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1) \times \mathbf{a} \\ &= -\mathbf{n} \times \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{dT_1}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{T}_1, \quad \frac{dT_2}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{T}_2, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \quad (5.44)$$

elde edilir. (5.42) deki

$$\mathbf{T} = \cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2$$

eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \cosh \varphi \frac{dT_1}{ds} + \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \frac{dT_2}{ds} + \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{T}_2$$

bulunur. $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{g}_2$ olmak üzere (5.41) ve (5.44) eşitlikleri göz

önüne alınırsa

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \cosh \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_1) - \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_1) + \sinh \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_2) + \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \cosh \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_1) - \sinh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times (-\mathbf{T}_2)) + \sinh \varphi (\mathbf{a} \times \mathbf{T}_2) + \cosh \varphi \frac{d\varphi}{ds} (\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1) \\
&= \mathbf{a} \times (\cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2) + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \times (\cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2) \\
&= \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times (\cosh \varphi \mathbf{T}_1 + \sinh \varphi \mathbf{T}_2) \\
&= \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(\mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{T}$ ve $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}$ elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n}$$

bulunur [39]. Bu eşitlik (5.43) ile kıyaslanıldığında aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 5.3.6. Parametre eğrileri dik olan bir $x = x(u, v)$ timelike yüzeyinin M noktasından geçen keyfi bir timelike eğri α , bu noktadan geçen $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ timelike ve spacelike parametre eğrileri α_1 ve α_2 , bu eğrilere M noktasında karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri; sırasıyla, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ olsun. α ve α_1 in M deki $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}_1$ teğetleri arasındaki hiperbolik açı φ , α nin yay elemanı ds ve yüzeyin M noktasındaki birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{\omega} = \cosh \varphi \boldsymbol{\omega}_1 + \sinh \varphi \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{n} \quad (5.45)$$

dır [39].

(5.36) denklemlerindeki $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ ve $\boldsymbol{\omega}_2$ Darboux ani dönme vektörlerini göz önüne alalım. Bu ani dönme vektörlerinin $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ ve $\mathbf{n}$ birim vektörleri ile skaler çarpılarak, eğrilerin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{T}_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} \mathbf{T}_1 + k_{n1} \mathbf{g}_1 - k_{g1} \mathbf{n}, \mathbf{T}_1 \rangle = \tau_{g1} \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle = -\tau_{g1} \\
\langle \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{T}_2 \rangle &= \langle -\tau_{g2} \mathbf{T}_2 - k_{n2} \mathbf{g}_2 + k_{g2} \mathbf{n}, \mathbf{T}_2 \rangle = -\tau_{g2} \langle \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 \rangle = -\tau_{g2} \\
\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{T} \rangle &= \langle \tau_g \mathbf{T} + k_n \mathbf{g} - k_g \mathbf{n}, \mathbf{T} \rangle = \tau_g \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = -\tau_g \\
\langle \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{g}_1 \rangle &= \langle \tau_{g1} \mathbf{T}_1 + k_{n1} \mathbf{g}_1 - k_{g1} \mathbf{n}, \mathbf{g}_1 \rangle = k_{n1} \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle = k_{n1}
\end{aligned}$$

$$\langle \omega_2, g_2 \rangle = \langle -\tau_{g_2} T_2 - k_{n_2} g_2 + k_{g_2} n, g_2 \rangle = -k_{n_2} \langle g_2, g_2 \rangle = k_{n_2}$$

$$\langle \omega, g \rangle = \langle \tau_g T + k_n g - k_g n, g \rangle = k_n \langle g, g \rangle = k_n$$

elde edilir. Ayrıca (5.41), (5.42) ve (5.45) den

$$\begin{aligned} \langle \omega, T \rangle &= \left\langle \cosh \varphi \omega_1 + \sinh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} n, \cosh \varphi T_1 + \sinh \varphi T_2 \right\rangle \\ &= \cosh^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_1, T_2 \rangle \\ &\quad + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_2, T_1 \rangle + \sinh^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = -T_2$ ve $g_2 = T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \langle \omega, T \rangle &= \cosh^2 \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle + \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_1, -g_1 \rangle \\ &\quad + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle + \sinh^2 \varphi \langle \omega_2, T_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$-\tau_g = -\tau_{g_1} \cosh^2 \varphi - k_{n_1} \cosh \varphi \sinh \varphi + k_{n_2} \sinh \varphi \cosh \varphi - \tau_{g_2} \sinh^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi timelike eğriler için genelleştirilmiş *O. Bonnet formülü* elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \omega, g \rangle &= \left\langle \cosh \varphi \omega_1 + \sinh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} n, \cosh \varphi g_1 - \sinh \varphi g_2 \right\rangle \\ &= \cosh^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle - \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_1, g_2 \rangle \\ &\quad + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_2, g_1 \rangle - \sinh^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $g_1 = -T_2$ ve $g_2 = T_1$ eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \langle \omega, g \rangle &= \cosh^2 \varphi \langle \omega_1, g_1 \rangle - \cosh \varphi \sinh \varphi \langle \omega_1, T_1 \rangle \\ &\quad + \sinh \varphi \cosh \varphi \langle \omega_2, -T_2 \rangle - \sinh^2 \varphi \langle \omega_2, g_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlendiğinde

$$k_n = k_{n_1} \cosh^2 \varphi + \tau_{g_1} \cosh \varphi \sinh \varphi + \tau_{g_2} \sinh \varphi \cosh \varphi - k_{n_2} \sinh^2 \varphi$$

olarak hesaplanır. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi timelike eğriler için genelleştirilmiş *Euler formülü* elde edilir. Son olarak

$$\langle \omega, n \rangle = \langle \tau_g T + k_n g - k_g n, n \rangle = -k_g \langle n, n \rangle = -k_g$$

$$\langle \omega_1, n \rangle = \langle \tau_{g_1} T_1 + k_{n_1} g_1 - k_{g_1} n, n \rangle = -k_{g_1} \langle n, n \rangle = -k_{g_1}$$

$$\langle \omega_2, n \rangle = \langle -\tau_{g_2} T_2 - k_{n_2} g_2 + k_{g_2} n, n \rangle = k_{g_2} \langle n, n \rangle = k_{g_2}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\langle \omega, n \rangle &= \left\langle \cosh \varphi \omega_1 + \sinh \varphi \omega_2 + \frac{d\varphi}{ds} n, n \right\rangle \\
&= \cosh \varphi \langle \omega_1, n \rangle + \sinh \varphi \langle \omega_2, n \rangle + \frac{d\varphi}{ds} \langle n, n \rangle \\
-k_g &= -k_{g1} \cosh \varphi + k_{g2} \sinh \varphi + \frac{d\varphi}{ds}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi timelike eğriler için genelleştirilmiş *Liouville formülü* elde edilir [39]. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 5.3.6. Timelike yüzeyler üzerinde yatan keyfi timelike eğriler için genelleştirilmiş Euler, O. Bonnet ve Liouville formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir [39]:

$$\begin{aligned}
k_n &= k_{n1} \cosh^2 \varphi + (\tau_{g1} + \tau_{g2}) \cosh \varphi \sinh \varphi - k_{n2} \sinh^2 \varphi, \\
\tau_g &= \tau_{g1} \cosh^2 \varphi + (k_{n1} - k_{n2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + \tau_{g2} \sinh^2 \varphi, \\
k_g &= k_{g1} \cosh \varphi - k_{g2} \sinh \varphi - \frac{d\varphi}{ds}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Şimdi, timelike bir yüzeye ait (T_1, g_1, n) Darboux çatısının diferansiyelini matris formunda aşağıdaki gibi verelim:

$$d \begin{bmatrix} T_1 \\ g_1 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ g_1 \\ n \end{bmatrix}.$$

(T_1, T_2, n) Darboux çatısının diferansiyeli ise $g_1 = -T_2$, $g_2 = T_1$ ve $n = T_1 \times T_2$ eşitliklerinden aşağıdaki gibi matris formunda elde edilir:

$$d \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix}.$$

(x_u, x_v, n) ve (T_1, T_2, n) çatıları arasındaki $x_u = \sqrt{E}T_1$, $x_v = \sqrt{G}T_2$ bağıntılarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ n \end{bmatrix}. \tag{5.47}$$

Burada $E = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $\frac{F}{\sqrt{-1}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ ve $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ 1. temel formun katsayıları

ve $A = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dır. (5.47) eşitliğinin sol tarafının diferansiyeli alındığında

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv \\ \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv \\ \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \\ \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{n}_u \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{x}_{vv} \\ \mathbf{n}_v \end{bmatrix} dv$$

olur. $\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle = \varepsilon_1 \|\mathbf{n}_u\|^2$ ve $\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle = \varepsilon_2 \|\mathbf{n}_v\|^2$ olmak üzere Gauss denklemleri ve Weingarten denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + \frac{e}{\sqrt{-\varepsilon_1}} \mathbf{n}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2}} \mathbf{n}, \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_u &= W_1^1 \mathbf{x}_u + W_1^2 \mathbf{x}_v, \\ \mathbf{n}_v &= W_2^1 \mathbf{x}_u + W_2^2 \mathbf{x}_v \end{aligned} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} \mathbf{n} \end{aligned}$$

biçimindedir [16, 17]. $d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$ diferansiyeli bu denklemler ile matris formunda

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e / \sqrt{-\varepsilon_1} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f / \sqrt{-\varepsilon_2} \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f / \sqrt{-\varepsilon_2} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g / \sqrt{\varepsilon_2} \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. Buradan

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e / \sqrt{-\varepsilon_1} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f / \sqrt{-\varepsilon_2} \\ W_1^1 & W_1^2 & 0 \end{bmatrix} du + \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f / \sqrt{-\varepsilon_2} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g / \sqrt{\varepsilon_2} \\ W_2^1 & W_2^2 & 0 \end{bmatrix} dv \right) A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Γ_{ij}^k Gauss denklemlerinin katsayıları, W_i^j de Weingarten denklemlerinin katsayıları, ve

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{-\varepsilon_1} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{-\varepsilon_1} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u \rangle, \\ f &= \sqrt{-\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{-\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v \rangle, \\ g &= \sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -\sqrt{\varepsilon_2} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v \rangle \end{aligned}$$

2. temel formun katsayıları olarak gösterilmektedir. Bu katsayıların değerleri

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{-GE_u + 2FF_u - (FE_v)/\sqrt{-1}}{2(-EG + F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{(-2EF_u + FE_u)/\sqrt{-1} - EE_v}{2(-EG + F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{-GE_v - (FG_u)/\sqrt{-1}}{2(-EG + F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{-EG_u + (FE_v)/\sqrt{-1}}{2(-EG + F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{(2GF_v - FG_v)/\sqrt{-1} - GG_u}{2(-EG + F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{-EG_v + 2FF_v + (FG_u)/\sqrt{-1}}{2(-EG + F^2)} \\ W_1^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{fF}{\sqrt{-\varepsilon_2}} - \frac{eG}{\sqrt{-\varepsilon_1}} \right), & W_1^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{eF}{\sqrt{\varepsilon_1}} - \frac{fE}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \\ W_2^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{gF}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{fG}{\sqrt{-\varepsilon_2}} \right), & W_2^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{fF}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{gE}{\sqrt{-\varepsilon_2}} \right)\end{aligned}$$

biçimindedir [16, 17]. (5.47) eşitliğinin sağ tarafının diferansiyeli alındığında

$$d \left(A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = (dA) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + A \left(d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \left(dA + A \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. A matrisinin diferansiyeli alınır

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}A \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & 0 & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$d \left(A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & -\sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$ eşitliğinin diferansiyeli matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv \\ \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv \\ \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} & -\sqrt{E}\omega_{12} & \sqrt{E}\omega_{13} \\ -\sqrt{G}\omega_{12} & \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}} & \sqrt{G}\omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi ise bu eşitlikler arasındaki bağıntıları hesaplayalım. Bunun için önce 1. temel formun katsayılarının diferansiyellerini bulalım. Bu diferansiyeller

$$dE = E_u du + E_v dv;$$

$$-E_u = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle, \quad -E_v = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle$$

$$dG = G_u du + G_v dv;$$

$$G_u = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G_v = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle$$

$$dF = F_u du + F_v dv;$$

$$\begin{aligned} \frac{F_u}{\sqrt{-1}} &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{F_u}{\sqrt{-1}} - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \frac{F_u}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} E_v \\ \frac{F_v}{\sqrt{-1}} &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{F_v}{\sqrt{-1}} - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{F_v}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} G_u \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır [16, 39]. Matris formundaki eşitliklerin ilk satırından

$$\mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv = \frac{E_u du + E_v dv}{2\sqrt{E}} \mathbf{T}_1 - \sqrt{E}\omega_{12} \mathbf{T}_2 + \sqrt{E}\omega_{13} \mathbf{n}$$

dır. ω_{12} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{T}_2$ spacelike vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
-\sqrt{E}\omega_{12} &= \langle \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv, \mathbf{T}_2 \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{T}_2 \rangle du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{T}_2 \rangle dv \\
&= \left\langle \mathbf{x}_{uu}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle du + \left\langle \mathbf{x}_{uv}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle dv
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}$ ve $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{F_u}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} E_v$ bağıntılarından

$$-\sqrt{E}\omega_{12} = \left(\frac{F_u}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} E_v \right) \frac{du}{\sqrt{G}} + \left(\frac{G_u}{2} \right) \frac{dv}{\sqrt{G}}$$

bulunur. ω_{13} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ spacelike birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\sqrt{E}\omega_{13} = \langle \mathbf{x}_{uu} du + \mathbf{x}_{uv} dv, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle du + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle dv = \frac{e}{\sqrt{-\varepsilon_1}} du + \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2}} dv$$

bulunur. Matris formundaki eşitliklerin ikinci satırından

$$\mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv = -\sqrt{G}\omega_{12}\mathbf{T}_1 + \frac{G_u du + G_v dv}{2\sqrt{G}}\mathbf{T}_2 + \sqrt{G}\omega_{23}\mathbf{n}$$

dır. ω_{23} diferansiyel 1-formunu hesaplamak için eşitliğin her iki tarafına $\mathbf{n}$ spacelike birim yüzey normal vektörü ile iç çarpım işlemi uygulandığında

$$\sqrt{G}\omega_{23} = \langle \mathbf{x}_{uv} du + \mathbf{x}_{vv} dv, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle du + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle dv = \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2}} du + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv$$

bulunur. $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki parametre eğrileri dik olarak kabul edildiği için $F=0$ dır. Elde edilen tüm bağıntılar düzenlendiğinde ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formlarının 1. temel form bileşenleri ile 2. temel form bileşenleri cinsinden ifadeleri

$$\omega_{12} = \frac{-E_v du - G_u dv}{2\sqrt{EG}}, \quad \omega_{13} = \frac{\frac{e}{\sqrt{-\varepsilon_1}} du + \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2}} dv}{\sqrt{E}}, \quad \omega_{23} = \frac{\frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2}} du + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon_2}} dv}{\sqrt{G}}$$

biçiminde elde edilir.

u – koordinat eğrisi boyunca v değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_1$ timelike vektörü yönündeki $ds_1 = \sqrt{E} du$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g1} , k_{n1} ve τ_{g1} sırasıyla u – koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
k_{g1} &= \frac{\langle d\mathbf{T}_1, -\mathbf{T}_2 \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{-E_v du}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{-E_v}{2E\sqrt{G}}, \\
k_{n1} &= \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{e du}{\sqrt{-\varepsilon_1} \sqrt{E}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{e}{\sqrt{-\varepsilon_1} E}, \\
\tau_{g1} &= \frac{-\langle -d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle}{ds_1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = \frac{f du}{\sqrt{-\varepsilon_2} \sqrt{G}} \Big/ \sqrt{E} du = \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2} \sqrt{EG}}
\end{aligned}$$

eğrilikler elde edilir. Burada 1-formların $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısında verildiğini not edelim.

$\mathbf{g}_1 = -\mathbf{T}_2$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{T}_1$ eşitlikleri göz önüne alındığında, v -koordinat eğrisine ait 1-formlar $(-\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1, \mathbf{n})$ çatısında elde edilir. v -koordinat eğrisi boyunca u değişkeninin diferansiyeli 0 olur. Bu, $\mathbf{T}_2$ spacelike vektörü yönündeki $ds_2 = \sqrt{G} dv$ diferansiyel 1-formunu verir. k_{g2} , k_{n2} ve τ_{g2} sırasıyla v -koordinat eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
k_{g2} &= \frac{-\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1 \rangle}{ds_2} = \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle}{ds_2} = \frac{G_u dv}{2\sqrt{EG}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}, \\
k_{n2} &= \frac{-\langle d\mathbf{T}_2, \mathbf{n} \rangle}{ds_2} = \frac{-g dv}{\sqrt{\varepsilon_2} \sqrt{G}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{-g}{\sqrt{\varepsilon_2} G}, \\
\tau_{g2} &= \frac{\langle d\mathbf{T}_1, \mathbf{n} \rangle}{ds_2} = \frac{f dv}{\sqrt{-\varepsilon_2} \sqrt{E}} \Big/ \sqrt{G} dv = \frac{f}{\sqrt{-\varepsilon_2} \sqrt{EG}}
\end{aligned}$$

eğrilikler elde edilir [39].

6. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN İLERİ KİNEMATİĞİ

Bir spacelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem spacelike düzlem olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan bütün eğriler spacelike eğrilerdir. Dolayısıyla, bir spacelike yüzey üzerinde herhangi bir M noktasından geçen dik parametre eğrilerinin her ikisi de spacelike eğrilerdir.

Bir timelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem Lorentz düzlemi (yani, IR_1^3 de bir timelike düzlem) olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan eğriler spacelike, timelike veya lightlike (null) eğriler olabilir. Burada eğrilerin null olması durumunu göz önüne almıyoruz. Dolayısıyla, bir timelike yüzey üzerinde herhangi bir M noktasından geçen dik parametre eğrilerinden biri spacelike, diğeri ise timelike eğridir.

Bu bölümde IR_1^3 Lorentziyen 3-uzayında hareketli bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzeyin sabit bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzey üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketinin ileri kinematığı ve bu harekete ait hız denklemi elde edilecektir. Ayrıca dönme-yuvarlanma hareketinin ileri kinematığına örnekler verilecektir.

6.1. Spacelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının İleri Kinematığı

6.1.1. Spacelike Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığı

α , IR_1^3 de yönlendirilmiş bir S spacelike yüzeyi üzerinde yatan yönlendirilmiş bir spacelike eğri ve (T, g, n) , α eğrisinin her bir M noktasına bağlı bir sağ-el ortogonal Darboux çatısını gösterebilir. Burada T , n ve g vektörleri, sırasıyla, M noktasında α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü, S yüzeyinin timelike birim normal vektörü ve S yüzeyinin $g = -n \times T$ ile verilen spacelike birim geodezik normal vektörüdür. (5.2) eşitliğinden Darboux çatısının hareket denklemlerinin

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \mathbf{T}, \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Ayrıca, bir spacelike yüzey üzerindeki keyfi bir spacelike yörünge eğrisine karşılık gelen konum vektörü üç causal karaktere sahip olabilir. Dolayısıyla, $\mathbf{m}$ vektörü M noktasının koordinat seçimine bağlı bir (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörüdür. $\mathbf{m}$ vektörünün bileşenleri, koordinat sisteminin eksenleri boyunca ölçümünden elde edilir. Bununla birlikte, (6.1) deki $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri kontravaryant vektörlerdir ve herhangi bir yerel koordinat sistemine sahip değildirler. Bu kontravaryant vektörlerin bileşenleri koordinat sisteminin değişmesine bağlı olarak değişebilirken, kontravaryant vektörlerin kendisi değişmez.

S_1 ve S_2 iki spacelike yüzey olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin her anda kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketine tabi tutulduğunu varsayalım. Burada S_1 yüzeyini sabit yüzey ve S_2 yüzeyini de S_1 yüzeyine göre dönme-yuvarlanma hareketine sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda, bu iki yüzey arasındaki bağıl hareketi inceleyeceğiz. α ve β spacelike eğrileri sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde kontak yörünge eğrilerini gösterebilir. α eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$, β eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ ile gösterilsin. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatılarının her ikisi de sağ-el ortonormal çatılardır. Yuvarlanma kısıtlarından dolayı (yani, kaymaksızın yuvarlanmadan dolayı), $\mathbf{T}$ ve $\bar{\mathbf{T}}$ kontravaryant vektörleri daima doğrudur ve buna bağlı olarak $\mathbf{n}$ ve $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri de doğrudur ve bu nedenle aynı Lorentziyen karaktere sahiptirler, yani $\mathbf{T}$ ile $\bar{\mathbf{T}}$ vektörleri spacelike ve $\mathbf{n}$ ile $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri de timelike vektörlerdir. Dolayısıyla, iki çatı Şekil 6.1 de görüldüğü üzere çakışır. Burada $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörü S_1 yüzeyinin dışına doğru, $\bar{\mathbf{n}}$ kontravaryant vektörü ise S_2 yüzeyinin içine doğru yönelmiştir.

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = (1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} - \bar{\lambda}_2\bar{k}_g + \bar{\lambda}_3\bar{k}_n)\bar{\mathbf{T}} + (\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1\bar{k}_g + \bar{\lambda}_3\bar{\tau}_g)\bar{\mathbf{g}} + (\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1\bar{k}_n + \bar{\lambda}_2\bar{\tau}_g)\bar{\mathbf{n}} \quad (6.3)$$

bulunur. Burada $\bar{k}_g$, $\bar{k}_n$ ve $\bar{\tau}_g$ sırasıyla β eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. P , S_2 yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olduğundan

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = 0 \quad (6.4)$$

dır. Burada $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}}$ vektörü spacelike bir vektördür. Bu eşitlik (6.3) de yerine yazıldığında

$$\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} = \bar{\lambda}_2\bar{k}_g - \bar{\lambda}_3\bar{k}_n - 1, \quad \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1\bar{k}_g - \bar{\lambda}_3\bar{\tau}_g, \quad \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1\bar{k}_n - \bar{\lambda}_2\bar{\tau}_g$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre P noktasının $\mathbf{p}$ (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörü

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} + \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{g} + \lambda_3\mathbf{n} \quad (6.5)$$

biçiminde yazılabilir. (6.5) in s yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{d\mathbf{m}}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds}\mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds}\mathbf{g} + \frac{d\mathbf{g}}{ds}\lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds}\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds}\lambda_3 \\ &= \mathbf{T} + \frac{d\lambda_1}{ds}\mathbf{T} + (k_g\mathbf{g} + k_n\mathbf{n})\lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds}\mathbf{g} + (-k_g\mathbf{T} + \tau_g\mathbf{n})\lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds}\mathbf{n} + (k_n\mathbf{T} + \tau_g\mathbf{g})\lambda_3 \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (1 + \frac{d\lambda_1}{ds} - \lambda_2k_g + \lambda_3k_n)\mathbf{T} + (\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_1k_g + \lambda_3\tau_g)\mathbf{g} + (\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_1k_n + \lambda_2\tau_g)\mathbf{n} \quad (6.6)$$

bulunur. Burada k_g , k_n ve τ_g sırasıyla α eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. $\mathbf{p}$ vektörü üç causal karaktere

sahip olduğundan, $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ vektörü de üç causal karaktere sahip olur. (6.2) ve (6.5)

eşitlikleri dikkate alındığında, $\overrightarrow{MP} = \mathbf{p} - \mathbf{m}$ vektörü bir kontravaryant vektördür.

$\overrightarrow{MP}$ kontravaryant vektörü gerek $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre gerekse $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısına göre özdeş kalır. Bu durumda M ve P noktalarını birleştiren $\mathbf{r}_{MP}$ vektörü

$$\mathbf{r}_{MP} = \overrightarrow{MP} = \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{g} + \lambda_3\mathbf{n} = \bar{\lambda}_1\bar{\mathbf{T}} + \bar{\lambda}_2\bar{\mathbf{g}} + \bar{\lambda}_3\bar{\mathbf{n}}$$

biçiminde ifade edilebilir. S_2 hareketli spacelike yüzeyinin $\overline{MP}$ vektörü, S_2 yüzeyine bir noktada teğet bir spacelike vektöre paralel olacağından, bu vektör spacelike karakterde olmalıdır. Dolayısıyla $\overline{MP}$ vektörü de spacelike karakterdedir.

Yuvarlanma kısıtları, iki kontak spacelike yörünge eğrilerinin hızlarının eşit olmasını gerektirir. Bu durum, aynı zaman periyodundaki iki kontak spacelike yörünge eğrisinin yay uzunluklarının birbirine eşit ($s = \bar{s}$) olduğunu gösterir.

(T, g, n) ve $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ Darboux çatıları her anda çakıştığından

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 \quad (6.7)$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \quad (6.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Darboux çatılarının çakışmasından dolayı s yay uzunluğu, hem s hem de $\bar{s}$ şeklinde ve λ_i , hem λ_i hem de $\bar{\lambda}_i$ şeklinde gösterilebilir.

(6.3) ve (6.8) eşitlikleri (6.6) da yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{dp}{ds} = (\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*)T + (-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*)g + (-\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*)n \quad (6.9)$$

bulunur. Burada,

$$k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g \quad (6.10)$$

skalerleri sırasıyla indirgenmiş geodezik eğrilik, indirgenmiş normal eğrilik ve indirgenmiş geodezik burulmadır.

6.1.2. Spacelike Yüzeylerde Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematik Hız Denklemi

Eğer t zamanı göz önüne alınırsa, S_2 spacelike yüzeyi üzerindeki keyfi bir P noktasının hızı üç causal karakterde olup denklem (6.9) dan

$$v_P = \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dt} = \sigma(\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*)T + \sigma(-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*)g + \sigma(-\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*)n \quad (6.11)$$

şeklindedir. Burada $\sigma = \frac{ds}{dt}$ skaleri yuvarlanma hızının büyüklüğüdür.

Teorem 6.1. S_2 hareketli spacelike yüzeyinin, S_1 sabit spacelike yüzeyine göre açısız hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} + k_g^* \mathbf{n})$$

dır.

İspat: $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızını

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{T} + \omega_y \mathbf{g} + \omega_z \mathbf{n}$$

şeklinde yazalım. P noktasının hız vektörünün $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\mathbf{v}_P = (\lambda_2 \omega_z - \lambda_3 \omega_y) \mathbf{T} + (-\lambda_1 \omega_z + \lambda_3 \omega_x) \mathbf{g} + (-\lambda_1 \omega_y + \lambda_2 \omega_x) \mathbf{n} \quad (6.12)$$

elde edilir. Böylece (6.11) ve (6.12) karşılaştırıldığında

$$\omega_x = -\sigma \tau_g^*, \quad \omega_y = \sigma k_n^*, \quad \omega_z = \sigma k_g^*$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece S_2 hareketli spacelike yüzeyinin açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} + k_g^* \mathbf{n}) \quad (6.13)$$

olarak bulunur. ■

(6.13) denklemi, hareketli spacelike yüzeyinin dönme-yuvarlanma hareketinin Darboux çatısına göre açısal hızını verir. (6.13) de ilk iki ifade olan $-\sigma \tau_g^* \mathbf{T} + \sigma k_n^* \mathbf{g}$ kontak noktada spacelike teğet düzleminde bir eksen etrafındaki has-yuvarlanma hızını verir. Son ifade olan $\sigma k_g^* \mathbf{n}$ ise kontak noktada timelike normal vektör yönü etrafındaki dönme hareketini verir.

Yuvarlanma hızının büyüklüğü olan σ ve τ_g^*, k_n^*, k_g^* indirgenmiş eğriliklerin birer skaler oldukları açıktır. Bir kontravaryant vektörün bileşenleri koordinat sisteminin değişimi ile farklılık gösterebilse de, kontravaryant vektörün kendisi değişmez. $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörlerine dayalı açısal hız bir koordinat sisteminde formüle edildiğinden dolayı, koordinat sisteminin değişimi yalnızca kontravaryant vektörlerin bileşenlerinin değişimiyle sonuçlanır ve bu değişim formüle edilen açısal hız denklemini değiştirmez. Bu nedenle, (6.13) deki açısal hız denklemi kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır (yani, koordinat-invarianttır).

(6.13) denkleminin bir diğer avantajı ise, keyfi parametrik yüzeylere ve kontak yörüngelere kolaylıkla genelleştirilebilen geometrik invariantlar cinsinden

ifade edilmesidir. Hareketli spacelike yüzeyin yüksek mertebeden kinematığı (6.13) denkleminin sağ tarafının diferansiyellenmesiyle elde edilebilir.

Bir hareketli spacelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematığı, Darboux çatısına göre elde edilen (6.11) öteleme hız ve (6.13) açısal hız denklemleriyle belirlenir.

Bir has-yuvarlanma hareketi yüzey normali etrafında dönme hareketine sahip değildir. Dolayısıyla $k_g^* = 0$ olacağından (6.10) dan

$$k_g = \bar{k}_g$$

dir. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.1. Eğer iki spacelike yüzey has-yuvarlanma hareketine sahipse, bu takdirde karşılık gelen iki kontak spacelike yörünge eğrilerinin geodezik eğrilik değerleri eşit olmak zorundadır.

Hareketli spacelike yüzeyin, sabit spacelike yüzey üzerindeki istenen spacelike yörünge eğrisini takip edecek şekilde kontrol etmek için (6.13) in ilk iki ifadesi, spacelike teğet düzlemine paralel yöndeki açısal hız hakkında bilgi verir. (6.13) in üçüncü ifadesi ise dönme hareketinin açısal hızını verir. Bu bilgi, hareketli yüzeyin sabit yüzey üzerindeki istenen yörünge eğrisini takip etmesini sağlamak için kontrol sisteminin girdisi olarak kullanılabilir.

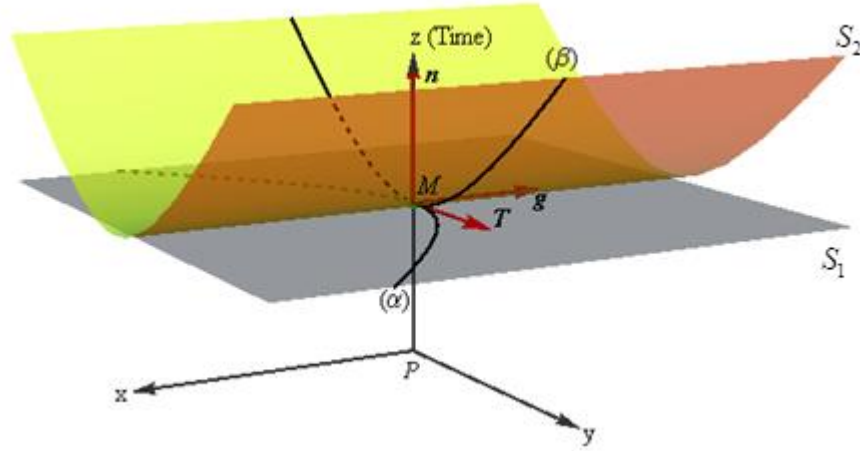
6.1.3. Örnekler

Bu bölümde yuvarlanma hareketinin ileri kinematığı iki örnekle verilmektedir. Örnek 6.1 de sabit bir spacelike düzlem üzerinde bir spacelike hiperbolik birim silindirin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematığı incelenmektedir. Örnek 6.2 de ise sabit bir spacelike hiperbolik birim silindir üzerinde hiperbolik birim kürenin has-yuvarlanma hareketinin kinematığı incelenmektedir.

Örnek 6.1.

Bu örnekte sabit bir spacelike düzlemde yatan spacelike α eğrisi boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi yapan hareketli bir hiperbolik birim silindir

üzerindeki hiperbolik birim çemberin (β eğrisinin) ileri kinematikini inceleyeceğiz. (Şekil 6.2)



Şekil 6.2. Hiperbolik birim silindirin spacelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. Hareketli hiperbolik birim silindirin (S_2 yüzeyinin) parametrik denklemini

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

biçiminde verelim. β eğrisi olarak $\bar{v} = 0$ a karşılık gelen $\bar{u}$ -parametre eğrisini (hiperbolik birim çemberini) alalım. Bu durumda β eğrisinin parametrik denklemi

$$\beta(\bar{u}) = y(\bar{u}, 0) = (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

dır. Burada $\frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \left\| \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\| = 1$ olduğundan β spacelike eğrisinin birim hızlı olduğunu

ifade edelim. Önce β eğrisinin $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ Darboux çatısını bulalım. β nın birim teğet vektörü

$$\bar{T} = (0, \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

dır. Burada $\bar{T}$ nin spacelike bir vektör olduğu açıktır. Hareketli hiperbolik birim silindirin yüzey normali içe doğru alındığından timelike birim yüzey normal vektörü

$$\bar{n} = -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & \cosh \bar{u} & \sinh \bar{u} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü ise

$$\bar{\mathbf{g}} = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}} = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \\ 0 & \cosh \bar{u} & \sinh \bar{u} \end{vmatrix} = (-1, 0, 0)$$

biçiminde bulunur. Buradan, elde edilen Darboux çatısına göre geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma, sırasıyla,

$$\bar{k}_g = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}} \right\rangle \bigg/ \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \frac{\langle (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}), (-1, 0, 0) \rangle}{1} = 0,$$

$$\bar{k}_n = -\left\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \bigg/ \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \frac{-\langle (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}), (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}) \rangle}{1} = 1,$$

$$\bar{\tau}_g = -\left\langle d\bar{\mathbf{g}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \bigg/ \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \frac{-\langle (0, 0, 0), (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}) \rangle}{1} = 0$$

elde edilir. Buna göre β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

Şimdi, sabit spacelike düzlem (S_1 yüzeyi) olarak parametrik denklemi

$$x(u, v) = (u, v, 1)$$

ile verilen düzlemi alalım. Bu düzlem üzerinde yatan spacelike α eğrisini

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = (\cosh t - 1, \sinh t, 1)$$

olarak alalım. $x(u, v)$ düzlemi üzerinde yatan α eğrisinin Darboux çatısını $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$

ile gösterelim (Şekil 6.2). $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{\cosh 2t}$$

dir. Buradan, α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}} (\sinh t, \cosh t, 0)$$

olarak bulunur. Sabit spacelike düzlemin timelike yüzey normali dışa doğru alındığından, birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

biçiminde bulunur. Düzlemin $\mathbf{n}$ normal vektörü eğri boyunca da aynıdır. Düzlemin spacelike birim geodezik normal vektörü de

$$\mathbf{g} = -\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}} (-\cosh t, \sinh t, 0)$$

biçiminde bulunur. Buradan $x(u, v)$ spacelike düzlemi üzerinde yatan spacelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla,

$$k_g = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{g} \right\rangle \frac{ds}{dt} = \frac{-1}{(\cosh 2t)^{3/2}},$$

$$k_n = -\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} = 0,$$

$$\tau_g = -\left\langle \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} = 0$$

biçiminde bulunur. Buna göre α eğrisinin hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi olduğu açıktır.

Hiperbolik birim çemberin açısal hızı ise (6.13) den

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma \left(\mathbf{g} + \frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \quad (6.14)$$

biçiminde elde edilir. Şekil 6.2 deki M kontak noktasında $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısındaki hiperbolik birim çemberin P merkez noktası orijindir. (6.11) ve (6.12) den P noktasının hızı

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP} = \sigma \left(\mathbf{g} + \frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \times (-\mathbf{n}) = \sigma \mathbf{T}$$

biçiminde bulunur. Burada $\mathbf{v}_P$ hız vektörünün spacelike bir vektör olduğu aşıkardır.

Spacelike düzlem üzerindeki α spacelike yörünge eğrisini takip eden hareketli hiperbolik birim çemberi kontrol etmek için (6.14) ile verilen açısal hız denkleminde yararlanılır. Hiperbolik birim silindirin 2 serbestlik derecesi vardır. Herhangi bir anda, (6.14) in ilk ifadesi olan σ , hiperbolik birim silindire dik olan eksen etrafında açısal hızı sağlar ve ikinci ifadesi olan $\sigma / (\cosh 2t)^{3/2}$, hiperbolik birim silindir üzerindeki hiperbolik birim çemberin α eğrisini takip etmesi için ne kadar hızla döndüğü hakkında bilgi sağlar ve böylece α yörüngesinin yeni teğet yönünü verir. Bu bilgi, hareketli hiperbolik birim çemberin α yörünge eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi için kontrol sisteminin girdileri olarak kullanılabilir.

Örnek 6.2.

Bu örnekte hiperbolik birim kürenin hiperbolik birim silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği incelenecektir (Şekil 6.3). S_1 sabit spacelike yüzeyi olarak

$$x(u, v) = (-\sinh u, v, 2 - \cosh u)$$

parametrik denklemleriyle ifade edilen spacelike hiperbolik birim silindiri ve bu yüzey üzerindeki α eğrisini de

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = x(t, 2t) = (-\sinh t, 2t, 2 - \cosh t)$$

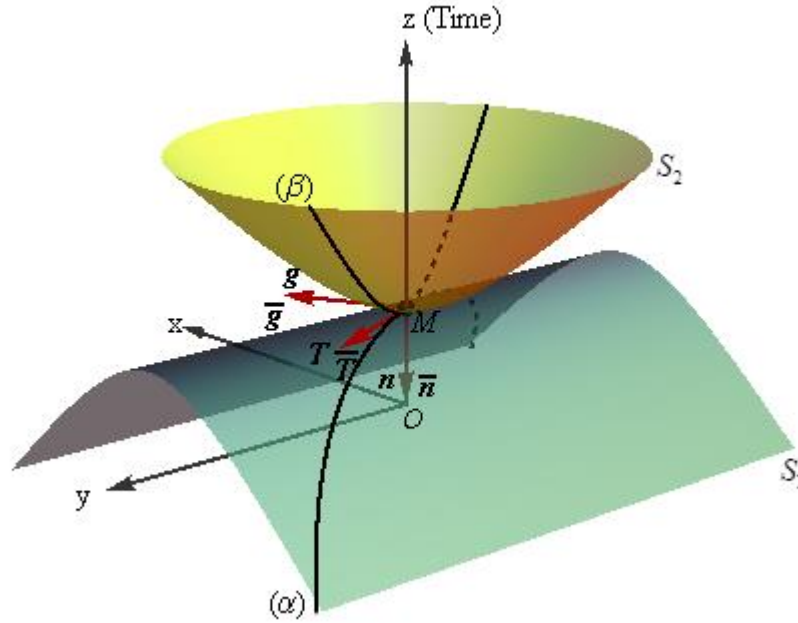
parametrik denklemleriyle verilen bir spacelike helis eğrisi olarak alalım. Hareketli S_2 yüzeyi olarak da

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \sinh \bar{u}, \sin \bar{v} \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

parametrik denklemleriyle verilen spacelike H_0^2 hiperbolik birim küresini ve bu yüzey üzerinde $\bar{v} = \arccos(-1/\sqrt{5})$ değerine karşılık gelen

$$\beta(\bar{u}) = y(\bar{u}, \arccos(-1/\sqrt{5})) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u} \right)$$

spacelike $\bar{u}$ -parametre eğrisini alalım (Şekil 6.3).



Şekil 6.3. Hiperbolik birim kürenin hiperbolik birim silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi

S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde sırasıyla β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın yuvarlandığını varsayalım. Şekil 6.3 de görüldüğü gibi bir M kontak noktasını alalım. α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{5}$$

dir. Buna göre α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, 2t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\cosh t, 2, -\sinh t)$$

biçiminde bulunur. Sabit hiperbolik birim silindirin yüzey normali dışa doğru alındığından timelike birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cosh u & 0 & -\sinh u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\sinh u, 0, -\cosh u)$$

biçiminde bulunur. Buradan α eğrisi boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t, 2t) = (-\sinh t, 0, -\cosh t)$$

olarak bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(t, 2t) = -\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\sinh t & 0 & -\cosh t \\ -\cosh t & 2 & -\sinh t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cosh t, 1, 2 \sinh t)$$

biçiminde bulunur. $x(u, v)$ hiperbolik birim silindiri üzerinde yatan spacelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{g} \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sinh t, 0, -\cosh t), \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cosh t, 1, 2 \sinh t) \right\rangle \bigg/ \sqrt{5} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}} \langle (-\sinh t, 0, -\cosh t), (2 \cosh t, 1, 2 \sinh t) \rangle \\ &= 0, \\ k_n &= -\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} = -\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sinh t, 0, -\cosh t), (-\sinh t, 0, -\cosh t) \right\rangle \bigg/ \sqrt{5} \\ &= -\frac{1}{5} \langle (-\sinh t, 0, -\cosh t), (-\sinh t, 0, -\cosh t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}, \\
\tau_g &= -\left\langle d\mathbf{g}/dt, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} = -\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \sinh t, 0, 2 \cosh t), (-\sinh t, 0, -\cosh t) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda α eğrisi bir geodezik çizgidir.

Benzer şekilde, hiperbolik birim küre (S_2 yüzeyi) üzerindeki β spacelike eğrisi için

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}}, \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} \right\rangle} = 1$$

olduğu açıktır. Böylece birim hızlı β eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\bar{u}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\cosh \bar{u}, 2 \cosh \bar{u}, \sqrt{5} \sinh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Hareketli hiperbolik birim kürenin yüzey normali içe alındığından timelike birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos \bar{v} \cosh \bar{u} & \sin \bar{v} \cosh \bar{u} & \sinh \bar{u} \\ -\sin \bar{v} \sinh \bar{u} & \cos \bar{v} \sinh \bar{u} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(\cos \bar{v} \sinh^2 \bar{u}, \sin \bar{v} \sinh^2 \bar{u}, \cosh \bar{u} \sinh \bar{u}) / \sinh \bar{u} \\
&= (-\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, -\sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, -\cosh \bar{u}) \\
\bar{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sinh \bar{u}, -2 \sinh \bar{u}, -\sqrt{5} \cosh \bar{u})
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\bar{\mathbf{g}} = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \sinh \bar{u} & -2 \sinh \bar{u} & -\sqrt{5} \cosh \bar{u} \\ -\cosh \bar{u} & 2 \cosh \bar{u} & \sqrt{5} \sinh \bar{u} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

biçiminde bulunur. $y(\bar{u}, \bar{v})$ hiperbolik birim küre üzerinde yatan spacelike β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\bar{k}_g &= \left\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right) \right\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{k}_n &= -\langle d\bar{T}/d\bar{u}, \bar{n} \rangle \\
&= -\left\langle \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \sinh \bar{u}, -\cosh \bar{u} \right) \right\rangle \\
&= -1, \\
\bar{\tau}_g &= -\langle d\bar{g}/d\bar{u}, \bar{n} \rangle = 0
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

(6.10) ve (6.13) den hiperbolik birim silindir üzerinde yuvarlanan hiperbolik birim kürenin açılma hızı

$$\omega = \sigma \left(-\frac{2}{5} \mathbf{T} - \frac{6}{5} \mathbf{g} \right)$$

biçiminde bulunur. Bu örnekteki türetmeden, önerilen Darboux çatı metodunun keyfi parametrik yüzeylere ve eğrilere kolaylıkla uygulanabilen geometrik değişmezler (invariantlar) cinsinden ifade edildiği görülebilir.

6.2. Timelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının İleri Kinematiki

Bu bölümde kontak yuvarlanmanın ileri kinematiki, timelike yüzeyler üzerinde bir keyfi yörünge eğrisi olarak yatan spacelike eğriler ve timelike eğriler olmak üzere iki bölümde incelenecektir.

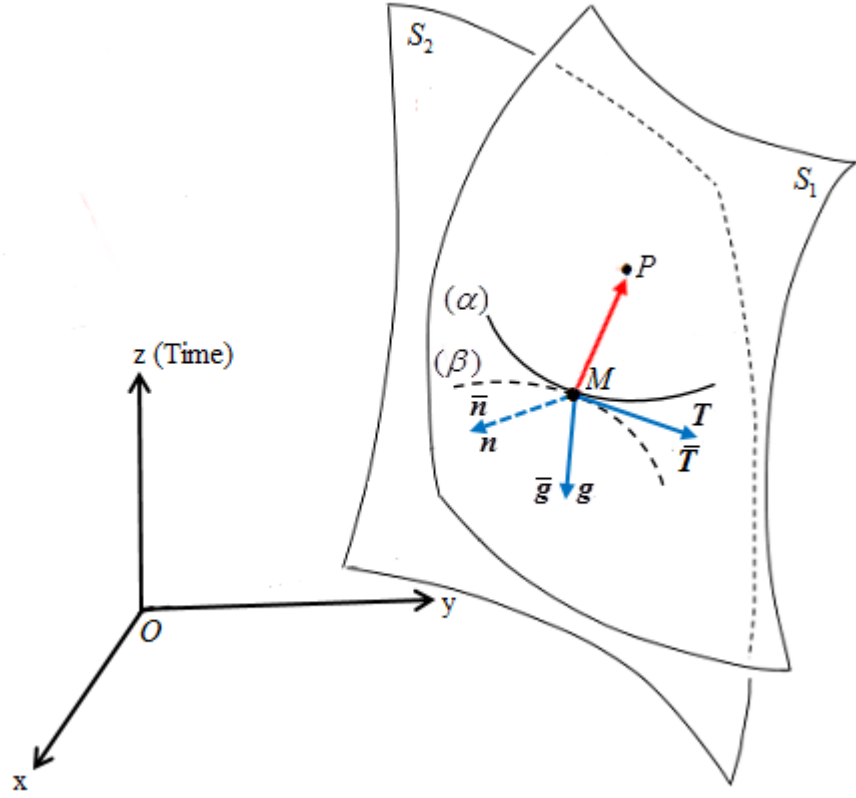
6.2.1. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematiki

α , IR_1^3 de yönlendirilmiş bir S timelike yüzeyi üzerinde yatan yönlendirilmiş bir spacelike eğri ve $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$, α eğrisinin her bir M noktasına bağlı bir sağ-el ortogonal Darboux çatısını gösterebilir. Burada $\mathbf{T}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{g}$ vektörleri, sırasıyla, M noktasında α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü, S yüzeyinin spacelike birim normal vektörü ve S yüzeyinin $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$ ile verilen timelike birim geodezik normal vektörüdür. (5.18) eşitliğinden Darboux çatısının hareket denklemlerinin

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \mathbf{T}, \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Ayrıca, bir timelike yüzey üzerindeki keyfi bir spacelike yörünge eğrisine karşılık gelen konum vektörü üç causal karaktere sahip olabilir. Dolayısıyla, $\mathbf{m}$ vektörü M noktasının koordinat seçimine bağlı bir (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörüdür. $\mathbf{m}$ vektörünün bileşenleri, koordinat sisteminin eksenleri boyunca ölçümünden elde edilir. Bununla birlikte, (6.15) deki $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri kontravaryant vektörlerdir ve herhangi bir yerel koordinat sistemine sahip değildirler. Bu kontravaryant vektörlerin bileşenleri koordinat sisteminin değişmesine bağlı olarak değişebilirken, kontravaryant vektörlerin kendisi değişmez.

S_1 ve S_2 iki timelike yüzey olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin her anda kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketine tabi tutulduğunu varsayalım. Burada S_1 yüzeyini sabit yüzey ve S_2 yüzeyini de S_1 yüzeyine göre dönme-yuvarlanma hareketine sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda, bu iki yüzey arasındaki bağıl hareketi inceleyeceğiz. α ve β spacelike eğrileri sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde kontak yörünge eğrilerini gösterebilir. α eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$, β eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ ile gösterilsin. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatılarının her ikisi de sağ-el ortonormal çatılardır. Yuvarlanma kısıtlarından dolayı (yani, kaymaksızın yuvarlanmadan dolayı), $\mathbf{T}$ ve $\bar{\mathbf{T}}$ kontravaryant vektörleri daima doğrudur ve buna bağlı olarak $\mathbf{n}$ ve $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri de doğrudur ve bu nedenle aynı Lorentziyen karaktere sahiptirler, yani $\mathbf{T}$ ile $\bar{\mathbf{T}}$ vektörleri ve $\mathbf{n}$ ile $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri spacelike vektörlerdir. Dolayısıyla, iki çatı Şekil 6.4 de görüldüğü üzere çakışır. Burada $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörü S_1 yüzeyinin dışına doğru, $\bar{\mathbf{n}}$ kontravaryant vektörü ise S_2 yüzeyinin içine doğru yönelmiştir.



Şekil 6.4. S_2 timelike yüzeyinin S_1 timelike yüzeyi üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin her ikisinin de, sırasıyla, s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. (6.15) de (T, g, n) çatısının Darboux türev formülleri verilmektedir. Benzer şekilde, $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ çatısının Darboux türev formülleri

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{s}} = \bar{T}, \quad \frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{g} \\ \bar{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_g & -\bar{k}_n \\ \bar{k}_g & 0 & \bar{\tau}_g \\ \bar{k}_n & \bar{\tau}_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{g} \\ \bar{n} \end{bmatrix}$$

olarak verilir. P , S_2 yüzeyi üzerinde keyfî ve sabit bir nokta olsun. Bu durumda, $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ çatısına göre P noktasının $\bar{p}$ (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörü

$$\bar{p} = \bar{m} + \bar{\lambda}_1 \bar{T} + \bar{\lambda}_2 \bar{g} + \bar{\lambda}_3 \bar{n} \quad (6.16)$$

biçiminde yazılabilir. (6.16) nın $\bar{s}$ yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} &= \frac{d\bar{\mathbf{m}}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{T}} + \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{g}} + \frac{d\bar{\mathbf{g}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} + \frac{d\bar{\mathbf{n}}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_3 \\ &= \bar{\mathbf{T}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{T}} + (\bar{k}_g \bar{\mathbf{g}} - \bar{k}_n \bar{\mathbf{n}}) \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{g}} + (\bar{k}_g \bar{\mathbf{T}} + \bar{\tau}_g \bar{\mathbf{n}}) \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} + (\bar{k}_n \bar{\mathbf{T}} + \bar{\tau}_g \bar{\mathbf{g}}) \bar{\lambda}_3\end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = (1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_2 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n) \bar{\mathbf{T}} + (\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g) \bar{\mathbf{g}} + (\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} - \bar{\lambda}_1 \bar{k}_n + \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g) \bar{\mathbf{n}} \quad (6.17)$$

bulunur. Burada $\bar{k}_g$, $\bar{k}_n$ ve $\bar{\tau}_g$ sırasıyla β eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. P , S_2 yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olduğundan

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}} = 0 \quad (6.18)$$

dır. Burada $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\bar{s}}$ vektörü spacelike bir vektördür. Bu eşitlik (6.17) de yerine yazıldığında

$$\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_2 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n - 1, \quad \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g, \quad \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = \bar{\lambda}_1 \bar{k}_n - \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre P noktasının $\mathbf{p}$ (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörü

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} + \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{g} + \lambda_3 \mathbf{n} \quad (6.19)$$

biçiminde yazılabilir. (6.19) un s yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{d\mathbf{m}}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds} \mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} \mathbf{g} + \frac{d\mathbf{g}}{ds} \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \lambda_3 \\ &= \mathbf{T} + \frac{d\lambda_1}{ds} \mathbf{T} + (k_g \mathbf{g} - k_n \mathbf{n}) \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} \mathbf{g} + (k_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{n}) \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} \mathbf{n} + (k_n \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{g}) \lambda_3\end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (1 + \frac{d\lambda_1}{ds} + \lambda_2 k_g + \lambda_3 k_n) \mathbf{T} + (\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_1 k_g + \lambda_3 \tau_g) \mathbf{g} + (\frac{d\lambda_3}{ds} - \lambda_1 k_n + \lambda_2 \tau_g) \mathbf{n} \quad (6.20)$$

bulunur. Burada k_g , k_n ve τ_g sırasıyla α eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. $\mathbf{p}$ vektörü üç causal karaktere

sahip olduğundan, $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ vektörü de üç causal karaktere sahip olur. (6.16) ve (6.19)

eşitlikleri dikkate alındığında, $\overline{MP} = \mathbf{p} - \mathbf{m}$ vektörü bir kontravaryant vektördür.

$\overline{MP}$ kontravaryant vektörü gerek $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre gerekse $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısına göre özdeş kalır. Bu durumda M ve P noktalarını birleştiren $\mathbf{r}_{MP}$ vektörü

$$\mathbf{r}_{MP} = \overline{MP} = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{g} + \lambda_3 \mathbf{n} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{T}} + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{n}}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yuvarlanma kısıtları, iki kontak spacelike yörünge eğrilerinin hızlarının eşit olmasını gerektirir. Bu durum, aynı zaman periyodundaki iki kontak spacelike yörünge eğrisinin yay uzunluklarının birbirine eşit ($s = \bar{s}$) olduğunu gösterir.

$(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatıları her anda çakıştığından

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 \quad (6.21)$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \quad (6.22)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, Darboux çatılarının çakışmasından dolayı s yay uzunluğu, hem s hem de $\bar{s}$ şeklinde ve λ_i , hem λ_i hem de $\bar{\lambda}_i$ şeklinde gösterilebilir.

(6.17) ve (6.22) eşitlikleri (6.20) de yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (-\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*) \mathbf{T} + (-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*) \mathbf{g} + (\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*) \mathbf{n} \quad (6.23)$$

bulunur. Burada,

$$k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g \quad (6.24)$$

skalerleri sırasıyla indirgenmiş geodezik eğrilik, indirgenmiş normal eğrilik ve indirgenmiş geodezik burulmadır.

6.2.2. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığının Hız Denklemi

Eğer t zamanı göz önüne alınırsa, S_2 timelike yüzeyi üzerindeki keyfi bir P noktasının hızı üç causal karakterde olup denklem (6.23) den

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \sigma(-\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*) \mathbf{T} + \sigma(-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*) \mathbf{g} + \sigma(\lambda_1 k_n^* - \lambda_2 \tau_g^*) \mathbf{n} \quad (6.25)$$

şeklindedir. Burada $\sigma = \frac{ds}{dt}$ skaleri yuvarlanma hızının büyüklüğüdür.

Teorem 6.2. S_2 hareketli timelike yüzeyinin, S_1 sabit timelike yüzeyine göre açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n})$$

dır.

İspat: $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızını

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{T} + \omega_y \mathbf{g} + \omega_z \mathbf{n}$$

şeklinde yazalım. P noktasının hız vektörünün $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\mathbf{v}_P = (\lambda_2 \omega_z - \lambda_3 \omega_y) \mathbf{T} + (\lambda_1 \omega_z - \lambda_3 \omega_x) \mathbf{g} + (\lambda_1 \omega_y - \lambda_2 \omega_x) \mathbf{n} \quad (6.26)$$

elde edilir. Böylece (6.25) ve (6.26) karşılaştırıldığında

$$\omega_x = \sigma \tau_g^*, \quad \omega_y = \sigma k_n^*, \quad \omega_z = -\sigma k_g^*$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece S_2 hareketli timelike yüzeyinin açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n}) \quad (6.27)$$

olarak bulunur. ■

(6.27) denklemi, hareketli timelike yüzeyinin dönme-yuvarlanma hareketinin Darboux çatısına göre açısal hızını verir. (6.27) da ilk iki ifade olan $\sigma \tau_g^* \mathbf{T} + \sigma k_n^* \mathbf{g}$ kontak noktada timelike teğet düzleminde bir eksen etrafındaki has-yuvarlanma hızını verir. Son ifade olan $-\sigma k_g^* \mathbf{n}$ ise kontak noktada spacelike normal vektör yönü etrafındaki dönme hareketini verir.

Yuvarlanma hızının büyüklüğü olan σ ve τ_g^*, k_n^*, k_g^* indirgenmiş eğriliklerin birer skaler oldukları açıktır. Bir kontravaryant vektörün bileşenleri koordinat sisteminin değişimi ile farklılık gösterebilse de, kontravaryant vektörün kendisi değişmez. $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörlerine dayalı açısal hız bir koordinat sisteminde formüle edildiğinden dolayı, koordinat sisteminin değişimi yalnızca kontravaryant vektörlerin bileşenlerinin değişimiyle sonuçlanır ve bu değişim formüle edilen açısal hız denklemini değiştirmez. Bu nedenle, (6.27) deki açısal hız denklemi kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır (yani, koordinat-invarianttır).

(6.27) denkleminin bir diğer avantajı ise, keyfi parametrik yüzeylere ve kontak yörüngelere kolaylıkla genelleştirilebilen geometrik invaryantlar cinsinden ifade edilmesidir. Hareketli timelike yüzeyin yüksek mertebeden kinematiği (6.27) denkleminin sağ tarafının diferansiyellenmesiyle elde edilebilir.

Bir hareketli timelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiği, Darboux çatısına göre elde edilen (6.25) öteleme hız ve (6.27) açısal hız denklemleriyle belirlenir.

Bir has-yuvarlanma hareketi yüzey normali etrafında dönme hareketine sahip değildir. Dolayısıyla $k_g^* = 0$ olacağından (6.24) den

$$k_g = \bar{k}_g$$

dir. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.2. Eğer iki timelike yüzey has-yuvarlanma hareketine sahipse, bu takdirde karşılık gelen iki kontak spacelike yörünge eğrilerinin geodezik eğrilik değerleri eşit olmak zorundadır.

Hareketli timelike yüzeyin, sabit timelike yüzey üzerindeki istenen spacelike yörünge eğrisini takip edecek şekilde kontrol etmek için (6.27) un ilk iki ifadesi, timelike teğet düzlemine paralel yöndeki açısal hız hakkında bilgi verir. (6.27) un üçüncü ifadesi ise dönme hareketinin açısal hızını verir. Bu bilgi, hareketli yüzeyin sabit yüzey üzerindeki istenen yörünge eğrisini takip etmesini sağlamak için kontrol sisteminin girdisi olarak kullanılabilir.

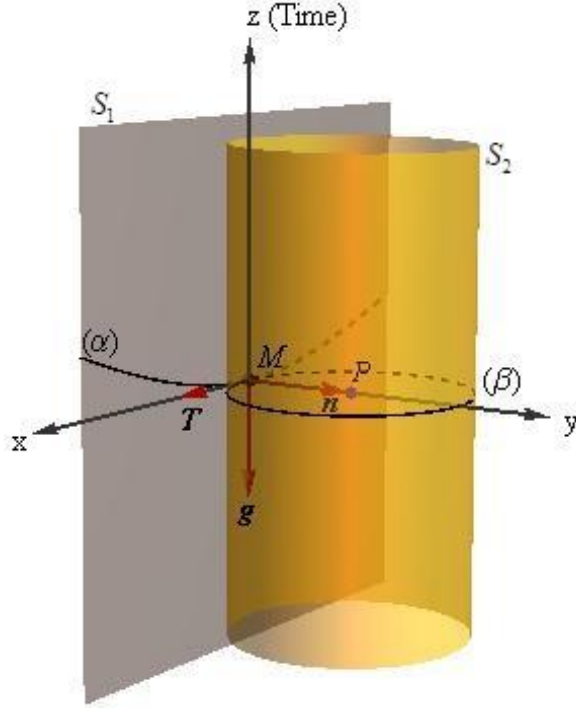
6.2.3. Örnekler

Bu bölümde yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği iki örnekle verilmektedir. Örnek 6.3 de sabit bir timelike düzlem üzerinde timelike karakterde olan bir birim silindirin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiği incelenmektedir. Örnek 6.4 de ise yarıçapı 1/2 olan sabit bir timelike silindir üzerinde bir Lorentziyen birim kürenin has-yuvarlanma hareketinin kinematiği incelenmektedir.

Örnek 6.3.

Bu örnekte sabit bir timelike düzlemde yatan spacelike α elips eğrisi boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi yapan hareketli bir timelike birim

silindir üzerindeki spacelike karakterde olan birim çemberin (β eğrisinin) ileri kinematiğini inceleyeceğiz. (Şekil 6.5)



Şekil 6.5. Birim silindirin timelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. Timelike karakterde olan birim silindirin (S_2 yüzeyinin) parametrik denklemini

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\sin \bar{v}, 1 + \cos \bar{v}, \bar{u})$$

biçiminde verelim. β eğrisi olarak $\bar{u} = 0$ a karşılık gelen $\bar{v}$ -parametre eğrisini (birim çemberini) alalım. Bu durumda β eğrisinin parametrik denklemi

$$\beta(\bar{v}) = y(0, \bar{v}) = (\sin \bar{v}, 1 + \cos \bar{v}, 0)$$

dır. Burada $\frac{d\bar{s}}{d\bar{v}} = \left\| \frac{d\beta}{d\bar{v}} \right\| = 1$ olduğundan β spacelike eğrisinin birim hızlı olduğunu

ifade edelim. Önce β eğrisinin $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ Darboux çatısını bulalım. β nın birim teğet vektörü

$$\bar{T} = (\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0)$$

dır. Burada $\bar{T}$ nin spacelike bir vektör olduğu açıktır. Hareketli birim silindirin yüzey normali içe doğru alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \bar{v} & -\sin \bar{v} & 0 \end{vmatrix} = (\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0)$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin timelike birim geodezik normal vektörü ise

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \sin \bar{v} & \cos \bar{v} & 0 \\ \cos \bar{v} & -\sin \bar{v} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1)$$

biçiminde bulunur. Buradan, elde edilen Darboux çatısına göre geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma, sırasıyla,

$$\bar{k}_g = -\left\langle \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{v}}, \bar{\mathbf{g}} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{v}} = -\frac{\langle (-\sin \bar{v}, -\cos \bar{v}, 0), (0, 0, -1) \rangle}{1} = 0,$$

$$\bar{k}_n = -\left\langle \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{v}}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{v}} = -\frac{\langle (-\sin \bar{v}, -\cos \bar{v}, 0), (\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0) \rangle}{1} = 1,$$

$$\bar{\tau}_g = \left\langle \frac{d\bar{\mathbf{g}}}{d\bar{v}}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{v}} = \frac{\langle (0, 0, 0), (\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0) \rangle}{1} = 0$$

elde edilir. Buna göre β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

Şimdi, sabit timelike düzlem (S_1 yüzeyi) olarak parametrik denklemi

$$x(u, v) = (-v, 0, u)$$

ile verilen düzlemi alalım. Bu düzlem üzerinde yatan spacelike α elips eğrisini

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = (2 \sinh t, 0, -1 + \cosh t)$$

olarak alalım. $x(u, v)$ düzlemi üzerinde yatan α eğrisinin Darboux çatısını $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$

ile gösterelim (Şekil 6.5). $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{1 + 3 \cosh^2 t}$$

dir. Buradan, α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \cosh^2 t}} (2 \cosh t, 0, \sinh t)$$

olarak bulunur. Sabit timelike düzlemin spacelike yüzey normali dışa doğru alındığından, birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

biçiminde bulunur. Düzlemin $\mathbf{n}$ normal vektörü eğri boyunca da aynıdır. Düzlemin timelike birim geodezik normal vektörü de

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} (-\sinh t, 0, -2\cosh t)$$

biçiminde bulunur. Buradan $x(u,v)$ timelike düzlemi üzerinde yatan spacelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla,

$$k_g = -\left\langle d\mathbf{T}/dt, \mathbf{g} \right\rangle \frac{ds}{dt} = \frac{-2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}},$$

$$k_n = -\left\langle d\mathbf{T}/dt, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} = 0,$$

$$\tau_g = \left\langle d\mathbf{g}/dt, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} = 0$$

biçiminde bulunur. Buna göre α eğrisinin hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi olduğu açıktır.

Birim çemberin açısal hızı ise (6.27) den

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma \left(\mathbf{g} - \frac{2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \quad (6.28)$$

biçiminde elde edilir. Şekil 6.5 deki M kontak noktasında $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısındaki P , spacelike karakterdeki birim çemberin merkez noktasıdır. (6.25) ve (6.26) dan P noktasının hızı

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP} = \sigma \left(\mathbf{g} - \frac{2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \times (\mathbf{n}) = -\sigma \mathbf{T}$$

biçiminde bulunur. Burada $\mathbf{v}_P$ hız vektörünün spacelike bir vektör olduğu aşıkardır.

Timelike düzlem üzerindeki α spacelike yörünge eğrisini takip eden hareketli birim çemberi kontrol etmek için (6.28) ile verilen açısal hız denkleminden yararlanılır. Birim silindirin 2 serbestlik derecesi vardır. Herhangi bir anda, (6.28) in ilk ifadesi olan σ , birim silindire dik olan eksen etrafında açısal hızı sağlar ve ikinci ifadesi olan $-2\sigma / (1+3\cosh^2 t)^{3/2}$, birim silindir üzerindeki birim çemberin α eğrisini takip etmesi için ne kadar hızla döndüğü hakkında bilgi sağlar ve böylece α yörüngesinin yeni teğet yönünü verir. Bu bilgi, hareketli birim çemberin α yörünge eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi için kontrol sisteminin girdileri olarak kullanılabilir.

Örnek 6.4.

Bu örnekte Lorentziyen birim kürenin, yarıçapı 1/2 olan timelike silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği incelenecektir (Şekil 6.6). Sabit S_1 yüzeyi olarak

$$x(u, v) = \left(\frac{1 + \cos v}{2}, -\frac{u}{\sqrt{3}} + \frac{\sin v}{\sqrt{3}}, \frac{-2u}{\sqrt{3}} + \frac{\sin v}{2\sqrt{3}} \right)$$

parametrik denklemlerle verilen timelike silindirini alalım. Bu yüzeyin,

$$x_1(u, v) = \left(\frac{1 + \cos v}{2}, \frac{\sin v}{2}, -u \right)$$
 timelike silindirinin x ekseninde negatif yönde

$\operatorname{arccosh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ merkez açısıyla döndürülmesiyle elde edilebileceğini not edelim. S_1

yüzeyi üzerindeki α eğrisini de

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = x\left(\frac{t}{4}, t\right) = \left(\frac{1 + \cos t}{2}, -\frac{t}{4\sqrt{3}} + \frac{\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{-t}{2\sqrt{3}} + \frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right)$$

parametrik denklemlerle verilen bir spacelike helis eğrisi olarak alalım. Hareketli S_2 yüzeyi olarak da

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

parametrik denklemlerle verilen timelike S_1^2 Lorentziyen küresini ve bu yüzey üzerinde $\bar{u} = 0$ değerine karşılık gelen

$$\beta(\bar{v}) = y(0, \bar{v}) = (\cos \bar{v}, \sin \bar{v}, 0)$$

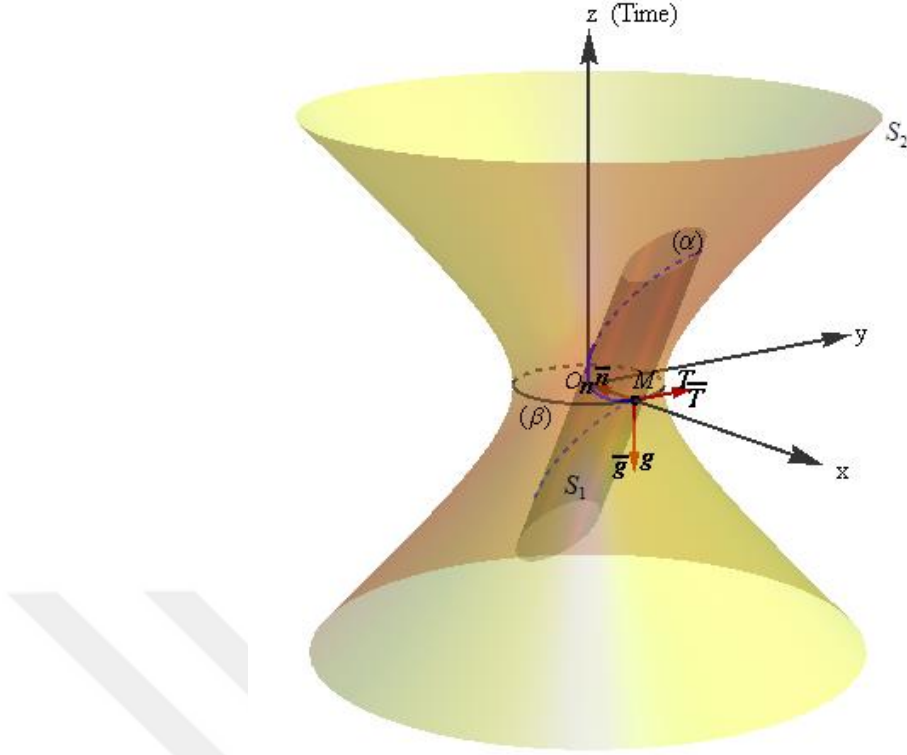
spacelike $\bar{v}$ -parametre eğrisini alalım (Şekil 6.6). S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde sırasıyla β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın yuvarlandığını varsayalım. Şekil 6.6 da görüldüğü gibi bir M kontak noktasını alalım. α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

dir. Buna göre α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$T = T\left(\frac{t}{4}, t\right) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{-\sin t}{2}, -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\cos t}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\cos t}{2\sqrt{3}} \right)$$

biçiminde bulunur.



Şekil 6.6. Lorentziyen birim kürenin yarıçapı 1/2 olan timelike silindir üzerinde β ve α spacelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi

Sabit silindirin yüzey normali dışa doğru alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-\sin v}{2} & \frac{\cos v}{\sqrt{3}} & \frac{\cos v}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\cos v}{2}, -\frac{\sin v}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin v}{2\sqrt{3}} \right) \bigg/ \frac{1}{2} \\ &= \left(-\cos v, -\frac{2\sin v}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin v}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Buradan α eğrisi boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}\left(\frac{t}{4}, t\right) = \left(-\cos t, -\frac{2\sin t}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak bulunur. Yüzeyin timelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \mathbf{g}\left(\frac{t}{4}, t\right) = \mathbf{n} \times \mathbf{T} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos t & -\frac{2 \sin t}{\sqrt{3}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sin t}{2} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\cos t}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\cos t}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sin t}{4}, \frac{-1 + \cos t}{2\sqrt{3}}, \frac{-4 + \cos t}{4\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $x(u, v)$ silindiri üzerinde yatan spacelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned} k_g &= -\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{g} \right\rangle \frac{ds}{dt} \\ &= -\left\langle \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\cos t}{2}, -\frac{\sin t}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right), \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sin t}{4}, \frac{-1 + \cos t}{2\sqrt{3}}, \frac{-4 + \cos t}{4\sqrt{3}} \right) \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_n &= -\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} \\ &= -\left\langle \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\cos t}{2}, -\frac{\sin t}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right), \left(-\cos t, -\frac{2 \sin t}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{8}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_g &= \left\langle \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \frac{ds}{dt} \\ &= \left\langle \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\cos t}{4}, -\frac{\sin t}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{4\sqrt{3}} \right), \left(-\cos t, -\frac{2 \sin t}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda α eğrisi bir geodezik çizgidir.

Benzer şekilde, Lorentziyen birim küre (S_2 yüzeyi) üzerindeki β spacelike eğrisi için

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dv} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dv}, \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dv} \right\rangle} = 1$$

olduğu açıktır. Böylece birim hızlı β eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\beta}{d\bar{v}} = (-\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0)$$

biçiminde bulunur. Hareketli Lorentziyen birim kürenin yüzey normalini içe alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos \bar{v} \sinh \bar{u} & \sin \bar{v} \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \\ -\sin \bar{v} \cosh \bar{u} & \cos \bar{v} \cosh \bar{u} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(\cos \bar{v} \cosh^2 \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh^2 \bar{u}, \cosh \bar{u} \sinh \bar{u}) / \cosh \bar{u} \\ &= (-\cos \bar{v} \cosh \bar{u}_0, -\sin \bar{v} \cosh \bar{u}_0, -\sinh \bar{u}_0) \\ \bar{\mathbf{n}} &= (-\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0)\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin timelike birim geodezik normal vektörü

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos \bar{v} & -\sin \bar{v} & 0 \\ -\sin \bar{v} & \cos \bar{v} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1)$$

biçiminde bulunur. $y(\bar{u}, \bar{v})$ Lorentziyen birim küre üzerinde yatan spacelike β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned}\bar{k}_g &= -\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{v}, \bar{\mathbf{g}} \rangle = -\langle (-\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0), (0, 0, -1) \rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_n &= -\langle d\bar{\mathbf{T}}/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \rangle = -\langle (-\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0), (-\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0) \rangle \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_g = \langle d\bar{\mathbf{g}}/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \rangle = 0$$

biçiminde bulunur. Bu durumda β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

(6.24) ve (6.27) den timelike silindir üzerinde yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma \left(-\frac{4}{3} \mathbf{T} + \frac{5}{3} \mathbf{g} \right)$$

biçiminde bulunur.

Bu örnekteki türetmeden, önerilen Darboux çatı metodunun keyfi parametrik yüzeylere ve eğrilere kolaylıkla uygulanabilen geometrik değişmezler (invariantlar) cinsinden ifade edildiği görülebilir.

6.2.4. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığı

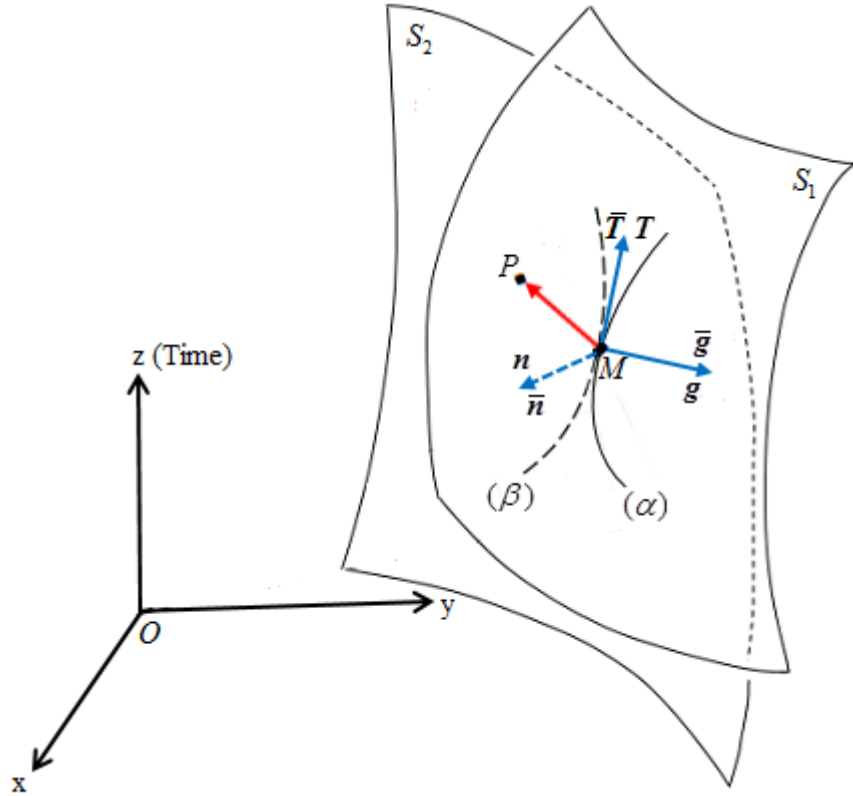
α , IR_1^3 de yönlendirilmiş bir S timelike yüzeyi üzerinde yatan yönlendirilmiş bir timelike eğri ve (T, g, n) , α eğrisinin her bir M noktasına bağlı bir sağ-el ortogonal Darboux çatısını gösterebilir. Burada T , n ve g vektörleri, sırasıyla, M noktasında α eğrisinin timelike birim teğet vektörü, S yüzeyinin spacelike birim normal vektörü ve S yüzeyinin $g = -n \times T$ ile verilen spacelike birim geodezik normal vektörüdür. (5.33) eşitliğinden Darboux çatısının hareket denklemlerinin

$$\frac{dm}{ds} = T, \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Ayrıca, bir timelike yüzey üzerindeki keyfi bir timelike yörünge eğrisine karşılık gelen konum vektörü üç causal karaktere sahip olabilir. Dolayısıyla, m vektörü M noktasının koordinat seçimine bağlı bir (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörüdür. m vektörünün bileşenleri, koordinat sisteminin eksenleri boyunca ölçümünden elde edilir. Bununla birlikte, (6.29) daki T , g ve n vektörleri kontravaryant vektörlerdir ve herhangi bir yerel koordinat sistemine sahip değildirler. Bu kontravaryant vektörlerin bileşenleri koordinat sisteminin değişmesine bağlı olarak değişebilirken, kontravaryant vektörlerin kendisi değişmez.

S_1 ve S_2 iki timelike yüzey olsun. S_1 ve S_2 yüzeylerinin her anda kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketine tabi tutulduğunu varsayalım. Burada S_1 yüzeyini sabit yüzey ve S_2 yüzeyini de S_1 yüzeyine göre dönme-yuvarlanma hareketine sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda, bu iki yüzey arasındaki bağıl hareketi inceleyeceğiz. α ve β timelike eğrileri sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde kontak yörünge eğrilerini gösterebilir. α eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı (T, g, n) , β eğrisinin M kontak noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ ile gösterilsin. (T, g, n) ve $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ çatılarının her ikisi de sağ-el ortonormal çatılardır. Yuvarlanma kısıtlarından dolayı (yani, kaymaksızın yuvarlanmadan dolayı), T ve $\bar{T}$ kontravaryant vektörleri daima doğrudur ve buna

bağlı olarak $\mathbf{n}$ ve $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri de doğrudadır ve bu nedenle aynı Lorentziyen karaktere sahiptirler, yani $\mathbf{T}$ ile $\bar{\mathbf{T}}$ vektörleri timelike ve $\mathbf{n}$ ile $\bar{\mathbf{n}}$ vektörleri spacelike vektörlerdir. Dolayısıyla, iki çatı Şekil 6.7 de görüldüğü üzere çakışır. Burada $\mathbf{n}$ kontravaryant vektörü S_1 yüzeyinin dışına doğru, $\bar{\mathbf{n}}$ kontravaryant vektörü ise S_2 yüzeyinin içine doğru yönelmiştir.



Şekil 6.7. S_2 timelike yüzeyinin S_1 timelike yüzeyi üzerinde β ve α timelike eğrileri boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin her ikisinin de, sırasıyla, s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. (6.29) da $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısının Darboux türev formülleri verilmektedir. Benzer şekilde, $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısının Darboux türev formülleri

$$\frac{d\bar{\mathbf{m}}}{d\bar{s}} = \bar{\mathbf{T}}, \quad \frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_g & \bar{k}_n \\ \bar{k}_g & 0 & -\bar{\tau}_g \\ \bar{k}_n & \bar{\tau}_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$

olarak verilir. P , S_2 yüzeyi üzerinde keyfi ve sabit bir nokta olsun. Bu durumda, $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ çatısına göre P noktasının $\bar{p}$ (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörü

$$\bar{p} = \bar{m} + \bar{\lambda}_1 \bar{T} + \bar{\lambda}_2 \bar{g} + \bar{\lambda}_3 \bar{n} \quad (6.30)$$

biçiminde yazılabilir. (6.30) un $\bar{s}$ yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} &= \frac{d\bar{m}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{T} + \frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{g} + \frac{d\bar{g}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{n} + \frac{d\bar{n}}{d\bar{s}} \bar{\lambda}_3 \\ &= \bar{T} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \bar{T} + (\bar{k}_g \bar{g} + \bar{k}_n \bar{n}) \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \bar{g} + (\bar{k}_g \bar{T} - \bar{\tau}_g \bar{n}) \bar{\lambda}_2 + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \bar{n} + (\bar{k}_n \bar{T} + \bar{\tau}_g \bar{g}) \bar{\lambda}_3 \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} = (1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_2 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n) \bar{T} + (\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1 \bar{k}_g + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g) \bar{g} + (\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} + \bar{\lambda}_1 \bar{k}_n - \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g) \bar{n} \quad (6.31)$$

bulunur. Burada $\bar{k}_g$, $\bar{k}_n$ ve $\bar{\tau}_g$ sırasıyla β eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. P , S_2 yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olduğundan

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}} = 0 \quad (6.32)$$

dır. Burada $\frac{d\bar{p}}{d\bar{s}}$ vektörü spacelike bir vektördür. Bu eşitlik (6.31) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} &= -\bar{\lambda}_2 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{k}_n - 1, \\ \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} &= -\bar{\lambda}_1 \bar{k}_g - \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}_g, \\ \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} &= -\bar{\lambda}_1 \bar{k}_n + \bar{\lambda}_2 \bar{\tau}_g \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, (T, g, n) çatısına göre P noktasının p (ya spacelike, ya timelike ya da lightlike) konum vektörü

$$p = m + \lambda_1 T + \lambda_2 g + \lambda_3 n \quad (6.33)$$

biçiminde yazılabilir. (6.33) ün s yay uzunluğuna göre diferansiyeli

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{dm}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds} T + \frac{dT}{ds} \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} g + \frac{dg}{ds} \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} n + \frac{dn}{ds} \lambda_3 \\ &= T + \frac{d\lambda_1}{ds} T + (k_g g + k_n n) \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds} g + (k_g T - \tau_g n) \lambda_2 + \frac{d\lambda_3}{ds} n + (k_n T + \tau_g g) \lambda_3 \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (1 + \frac{d\lambda_1}{ds} + \lambda_2 k_g + \lambda_3 k_n) \mathbf{T} + (\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_1 k_g + \lambda_3 \tau_g) \mathbf{g} + (\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_1 k_n - \lambda_2 \tau_g) \mathbf{n} \quad (6.34)$$

bulunur. Burada k_g , k_n ve τ_g sırasıyla α eğrisinin M noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır. $\mathbf{p}$ vektörü üç causal karaktere sahip olduğundan, $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ vektörü de üç causal karaktere sahip olur. (6.30) ve (6.33) eşitlikleri dikkate alındığında, $\overrightarrow{MP} = \mathbf{p} - \mathbf{m}$ vektörü bir kontravaryant vektördür. $\overrightarrow{MP}$ kontravaryant vektörü gerek $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre gerekse $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ çatısına göre özdeş kalır. Bu durumda M ve P noktalarını birleştiren $\mathbf{r}_{MP}$ vektörü

$$\mathbf{r}_{MP} = \overrightarrow{MP} = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{g} + \lambda_3 \mathbf{n} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{T}} + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{n}}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yuvarlanma kısıtları, iki kontak timelike yörünge eğrilerinin hızlarının eşit olmasını gerektirir. Bu durum, aynı zaman periyodundaki iki kontak timelike yörünge eğrisinin yay uzunluklarının birbirine eşit ($s = \bar{s}$) olduğunu gösterir. $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ ve $(\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatıları her anda çakıştığından

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 \quad (6.35)$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}}, \frac{d\lambda_3}{ds} = \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \quad (6.36)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, Darboux çatılarının çakışmasından dolayı s yay uzunluğu, hem s hem de $\bar{s}$ şeklinde ve λ_i , hem λ_i hem de $\bar{\lambda}_i$ şeklinde gösterilebilir.

(6.31) ve (6.36) eşitlikleri (6.34) de yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = (-\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*) \mathbf{T} + (-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*) \mathbf{g} + (-\lambda_1 k_n^* + \lambda_2 \tau_g^*) \mathbf{n} \quad (6.37)$$

bulunur. Burada,

$$k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g \quad (6.38)$$

skalerleri sırasıyla indirgenmiş geodezik eğrilik, indirgenmiş normal eğrilik ve indirgenmiş geodezik burulmadır.

6.2.5. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Dönme-Yuvarlanma Hareketinin İleri Kinematığının Hız Denklemi

Eğer t zamanı göz önüne alınırsa, S_2 timelike yüzeyi üzerindeki keyfi bir P noktasının hızı üç causal karakterde olup denklem (6.37) den

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \sigma(-\lambda_2 k_g^* - \lambda_3 k_n^*)\mathbf{T} + \sigma(-\lambda_1 k_g^* - \lambda_3 \tau_g^*)\mathbf{g} + \sigma(-\lambda_1 k_n^* + \lambda_2 \tau_g^*)\mathbf{n} \quad (6.39)$$

şeklindedir. Burada $\sigma = \frac{ds}{dt}$ skaleri yuvarlanma hızının büyüklüğüdür.

Teorem 6.3. S_2 hareketli timelike yüzeyinin, S_1 sabit timelike yüzeyine göre açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} - k_n^* \mathbf{g} + k_g^* \mathbf{n})$$

dır.

İspat: $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına göre $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızını

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{T} + \omega_y \mathbf{g} + \omega_z \mathbf{n}$$

şeklinde yazalım. P noktasının hız vektörünün $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{MP}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\mathbf{v}_P = (\lambda_3 \omega_y - \lambda_2 \omega_z) \mathbf{T} + (\lambda_3 \omega_x - \lambda_1 \omega_z) \mathbf{g} + (\lambda_1 \omega_y - \lambda_2 \omega_x) \mathbf{n} \quad (6.40)$$

elde edilir. Böylece (6.39) ve (6.40) karşılaştırıldığında

$$\omega_x = -\sigma \tau_g^*, \quad \omega_y = -\sigma k_n^*, \quad \omega_z = \sigma k_g^*$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece S_2 hareketli timelike yüzeyinin açısal hızı

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} - k_n^* \mathbf{g} + k_g^* \mathbf{n}) \quad (6.41)$$

olarak bulunur. ■

(6.41) denklemi, hareketli timelike yüzeyinin dönme-yuvarlanma hareketinin Darboux çatısına göre açısal hızını verir. (6.41) de ilk iki ifade olan $-\sigma \tau_g^* \mathbf{T} - \sigma k_n^* \mathbf{g}$ kontak noktada timelike teğet düzleminde bir eksen etrafındaki has-yuvarlanma hızını verir. Son ifade olan $\sigma k_g^* \mathbf{n}$ ise kontak noktada spacelike normal vektör yönü etrafındaki dönme hareketini verir.

Yuvarlanma hızının büyüklüğü olan σ ve τ_g^* , k_n^* , k_g^* indirgenmiş eğriliklerin birer skaler oldukları açıktır. Bir kontravaryant vektörün bileşenleri koordinat

sisteminin değişimi ile farklılık gösterebilse de, kontravaryant vektörün kendisi değişmez. T , g ve n kontravaryant vektörlerine dayalı açısal hız bir koordinat sisteminde formüle edildiğinden dolayı, koordinat sisteminin değişimi yalnızca kontravaryant vektörlerin bileşenlerinin değişimiyle sonuçlanır ve bu değişim formüle edilen açısal hız denklemini değiştirmmez. Bu nedenle, (6.41) deki açısal hız denklemini kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır (yani, koordinat-invarianttır).

(6.41) denkleminin bir diğer avantajı ise, keyfi parametrik yüzeylere ve kontak yörüngelere kolaylıkla genelleştirilebilen geometrik invariantlar cinsinden ifade edilmesidir. Hareketli timelike yüzeyin yüksek mertebeden kinematiği (6.41) denkleminin sağ tarafının diferansiyellenmesiyle elde edilebilir.

Bir hareketli timelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiği, Darboux çatısına göre elde edilen (6.39) öteleme hız ve (6.41) açısal hız denklemleriyle belirlenir.

Bir has-yuvarlanma hareketi yüzey normali etrafında dönme hareketine sahip değildir. Dolayısıyla $k_g^* = 0$ olacağından (6.38) den

$$k_g = \bar{k}_g$$

dir. Böylelikle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.3. Eğer iki timelike yüzey has-yuvarlanma hareketine sahipse, bu takdirde karşılık gelen iki kontak timelike yörünge eğrilerinin geodezik eğrilik değerleri eşit olmak zorundadır.

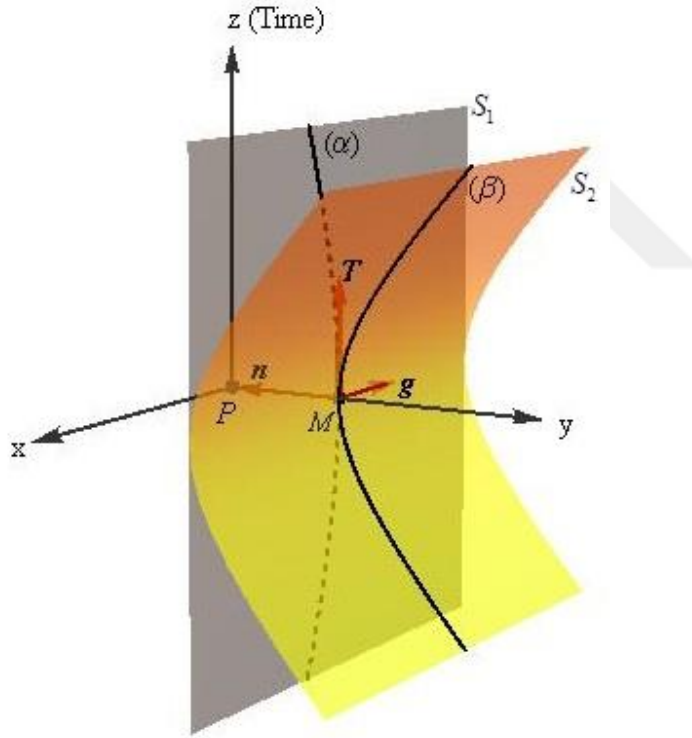
Hareketli timelike yüzeyin, sabit timelike yüzey üzerindeki istenen timelike yörünge eğrisini takip edecek şekilde kontrol etmek için (6.41) in ilk iki ifadesi, timelike teğet düzlemine paralel yöndeki açısal hız hakkında bilgi verir. (6.41) in üçüncü ifadesi ise dönme hareketinin açısal hızını verir. Bu bilgi, hareketli yüzeyin sabit yüzey üzerindeki istenen yörünge eğrisini takip etmesini sağlamak için kontrol sisteminin girdisi olarak kullanılabilir.

6.2.6. Örnekler

Bu bölümde yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği iki örnekle verilmektedir. Örnek 6.5 de sabit bir timelike düzlem üzerinde bir Lorentziyen birim silindirin dönme-yuvarlanma hareketinin kinematiği incelenmektedir. Örnek 6.6 da ise yarıçapı 1/2 olan sabit bir timelike silindir üzerinde bir Lorentziyen birim kürenin has-yuvarlanma hareketinin kinematiği incelenmektedir.

Örnek 6.5.

Bu örnekte sabit bir timelike düzlemde yatan timelike α elips eğrisi boyunca kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi yapan hareketli bir timelike birim silindir üzerindeki timelike Lorentziyen birim çemberin (β eğrisinin) ileri kinematiğini inceleyeceğiz. (Şekil 6.8)



Şekil 6.8. Lorentziyen birim silindirin timelike düzlem üzerinde kaymaksızın dönme-yuvarlanma hareketi

α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. Timelike karakterde olan birim silindirin (S_2 yüzeyinin) parametrik denklemini

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (-\bar{v}, \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

biçiminde verelim. β eğrisi olarak $\bar{v}=0$ a karşılık gelen $\bar{u}$ -parametre eğrisini (Lorentziyen birim çemberini) alalım. Bu durumda β eğrisinin parametrik denklemi

$$\beta(\bar{u}) = y(\bar{u}, 0) = (0, \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

dır. Burada $\frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \left\| \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\| = 1$ olduğundan β timelike eğrisinin birim hızlı olduğunu

ifade edelim. Önce β eğrisinin $(\bar{T}, \bar{g}, \bar{n})$ Darboux çatısını bulalım. β nın birim teğet vektörü

$$\bar{T} = (0, \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

dır. Burada $\bar{T}$ nin timelike bir vektör olduğu açıktır. Hareketli Lorentziyen birim silindirin yüzey normali içe doğru alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\bar{n} = -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -\cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü ise

$$\bar{g} = -\bar{n} \times \bar{T} = -\begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & -\cosh \bar{u} & -\sinh \bar{u} \\ 0 & \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \end{vmatrix} = (-1, 0, 0)$$

biçiminde bulunur. Buradan, elde edilen Darboux çatısına göre geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma, sırasıyla,

$$\bar{k}_g = \left\langle d\bar{T}/d\bar{u}, \bar{g} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \frac{\langle (0, \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u}), (-1, 0, 0) \rangle}{1} = 0,$$

$$\bar{k}_n = \left\langle d\bar{T}/d\bar{u}, \bar{n} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = \frac{\langle (0, \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u}), (0, -\cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u}) \rangle}{1} = -1,$$

$$\bar{\tau}_g = -\left\langle d\bar{g}/d\bar{u}, \bar{n} \right\rangle \frac{d\bar{s}}{d\bar{u}} = -\frac{\langle (0, 0, 0), (0, -\cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u}) \rangle}{1} = 0$$

elde edilir. Buna göre β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

Şimdi, sabit timelike düzlem (S_1 yüzeyi) olarak parametrik denklemi

$$x(u, v) = (v, 1, u)$$

ile verilen düzlemi alalım. Bu düzlem üzerinde yatan timelike α elips eğrisini

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = (-1 + \cosh t, 1, 2 \sinh t)$$

olarak alalım. $x(u,v)$ düzlemi üzerinde yatan α eğrisinin Darboux çatısını (T, g, n) ile gösterelim (Şekil 6.8). $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{1+3\cosh^2 t}$$

dir. Buradan, α eğrisinin timelike birim teğet vektörü

$$T = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \bigg/ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} (\sinh t, 0, 2 \cosh t)$$

olarak bulunur. Sabit timelike düzlemin spacelike yüzey normali dışa doğru alındığından, birim yüzey normal vektörü

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

biçiminde bulunur. Düzlemin n normal vektörü eğri boyunca da aynıdır. Düzlemin spacelike birim geodezik normal vektörü de

$$g = -n \times T = \frac{-1}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 2 \cosh t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} (-2 \cosh t, 0, -\sinh t)$$

biçiminde bulunur. Buradan $x(u,v)$ timelike düzlemi üzerinde yatan timelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla,

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{dT}{dt}, g \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{\left\langle \left(\frac{4 \cosh t}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}}, 0, \frac{2 \sinh t}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}} \right), \left(\frac{-2 \cosh t}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}}, 0, \frac{-\sinh t}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} \right) \right\rangle}{\sqrt{1+3\cosh^2 t}} \\ &= \frac{-2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}}, \\ k_n &= \left\langle \frac{dT}{dt}, n \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} = 0, \\ \tau_g &= -\left\langle \frac{dg}{dt}, n \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} = 0 \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Buna göre α eğrisinin hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi olduğu açıktır.

Lorentziyen birim çemberin açısal hızı ise (6.41) den

$$\omega = \sigma \left(\mathbf{g} + \frac{2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \quad (6.42)$$

biçiminde elde edilir. Şekil 6.8 deki M kontak noktasında $(T, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısındaki P , timelike karakterdeki Lorentziyen birim çemberin merkez noktasıdır. (6.39) ve (6.40) dan P noktasının hızı

$$\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}_{MP} = \sigma \left(\mathbf{g} + \frac{2}{(1+3\cosh^2 t)^{3/2}} \mathbf{n} \right) \times (\mathbf{n}) = \sigma \mathbf{T}$$

biçiminde bulunur. Burada $\mathbf{v}_P$ hız vektörünün timelike bir vektör olduğu aşıkardır.

Timelike düzlem üzerindeki α timelike yörünge eğrisini takip eden hareketli Lorentziyen birim çemberi kontrol etmek için (6.42) ile verilen açısal hız denkleminde yararlanılır. Lorentziyen birim silindirin 2 serbestlik derecesi vardır. Herhangi bir anda, (6.42) in ilk ifadesi olan σ , Lorentziyen birim silindire dik olan eksen etrafında açısal hızı sağlar ve ikinci ifadesi olan $2\sigma / (1+3\cosh^2 t)^{3/2}$, Lorentziyen birim silindir üzerindeki Lorentziyen birim çemberin α eğrisini takip etmesi için ne kadar hızla döndüğü hakkında bilgi sağlar ve böylece α yörüngesinin yeni teğet yönünü verir. Bu bilgi, hareketli Lorentziyen birim çemberin α yörünge eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi için kontrol sisteminin girdileri olarak kullanılabilir.

Örnek 6.6.

Bu örnekte Lorentziyen birim kürenin, yarıçapı 1/2 olan timelike silindir üzerinde β ve α timelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketinin ileri kinematiği incelenecektir (Şekil 6.9). Sabit S_1 yüzeyi olarak

$$x(u, v) = \left(\frac{1+\cos v}{2}, \frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{\sin v}{\sqrt{3}}, \frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{\sin v}{2\sqrt{3}} \right)$$

parametrik denklemiyle verilen timelike silindirini alalım. Bu yüzeyin,

$$x_1(u, v) = \left(\frac{1+\cos v}{2}, -\frac{\sin v}{2}, u \right)$$
 timelike silindirinin x eksen etrafında negatif yönde

$\operatorname{arccosh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ hiperbolik açıyla döndürülmesiyle elde edilebileceğini not edelim.

S_1 yüzeyi üzerindeki α eğrisini de

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)) = x(t, t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}, \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right)$$

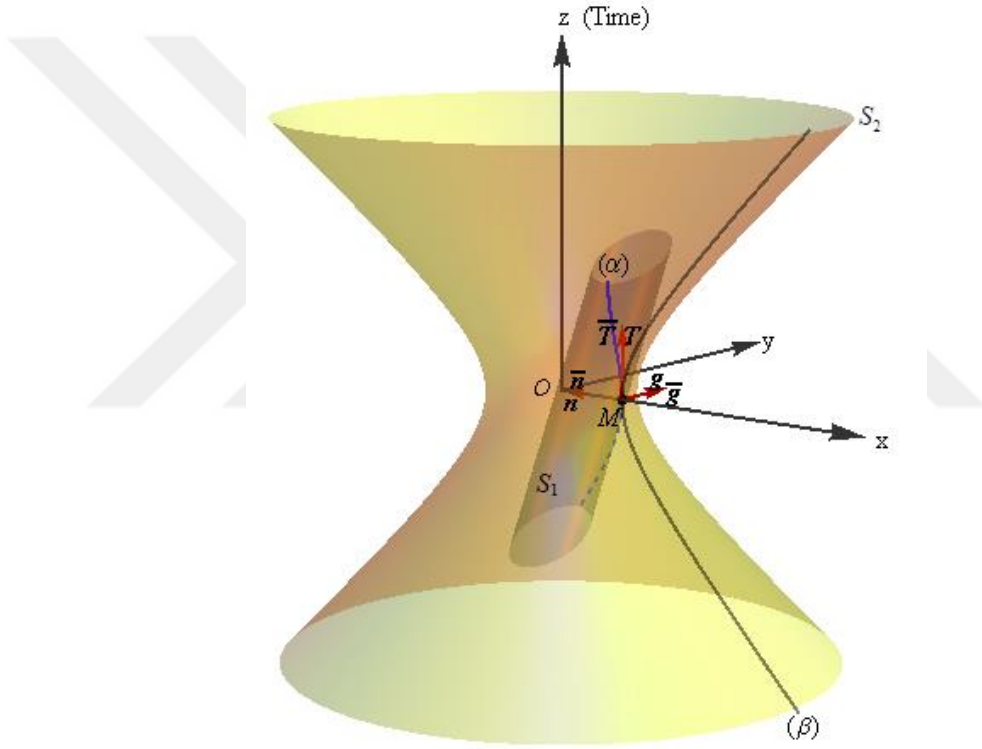
parametrik denklemleriyle verilen bir timelike helis eğrisi olarak alalım. Hareketli S_2 yüzeyi olarak da

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

parametrik denklemleriyle verilen timelike S_1^2 Lorentziyen küresini ve bu yüzey üzerinde $\bar{v} = 0$ değerine karşılık gelen

$$\beta(\bar{u}) = y(\bar{u}, 0) = (\cosh \bar{u}, 0, \sinh \bar{u})$$

spacelike $\bar{u}$ -parametre eğrisini alalım (Şekil 6.9).



Şekil 6.9. Lorentziyen birim kürenin yarıçapı 1/2 olan timelike silindir üzerinde β ve α timelike eğrileri boyunca kaymaksızın has-yuvarlanma hareketi

S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde sırasıyla β ve α eğrileri boyunca kaymaksızın yuvarlandığını varsayalım. Şekil 6.9 da görüldüğü gibi bir M kontak noktasını alalım. α ve β eğrilerinin sırasıyla s ve $\bar{s}$ yay uzunluklarıyla parametrelendirildiklerini varsayalım. $\alpha(t)$ eğrisinin s yay uzunluğunun t ye göre türevi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dir. Buna göre α eğrisinin timelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\cos t}{2\sqrt{3}} \right)$$

biçiminde bulunur. Sabit silindirin yüzey normali dışa doğru alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sin v}{2} & -\frac{\cos v}{\sqrt{3}} & -\frac{\cos v}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\cos v}{2}, \frac{\sin v}{\sqrt{3}}, \frac{\sin v}{2\sqrt{3}} \right) \Big/ \frac{1}{2} \\ &= \left(-\cos v, \frac{2\sin v}{\sqrt{3}}, \frac{\sin v}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Buradan α eğrisi boyunca yüzey normali

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t, t) = \left(-\cos t, \frac{2\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \mathbf{g}(t, t) &= -\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos t & \frac{2\sin t}{\sqrt{3}} & \frac{\sin t}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sin t}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\cos t}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\cos t}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin t, \frac{-1+4\cos t}{2\sqrt{3}}, \frac{-1+\cos t}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $x(u, v)$ silindiri üzerinde yatan timelike α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{g} \right\rangle \Big/ \frac{ds}{dt} \\ &= \left\langle \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right), \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin t, \frac{-1+4\cos t}{2\sqrt{3}}, \frac{-1+\cos t}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \Big/ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$=0,$$

$$\begin{aligned} k_n &= \left\langle d\mathbf{T}/dt, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} \\ &= \left\langle \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{-\cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{2\sqrt{3}} \right), \left(-\cos t, \frac{2\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \bigg/ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\left\langle d\mathbf{g}/dt, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds}{dt} \\ &= -\left\langle \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos t, \frac{-2\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{3}} \right), \left(-\cos t, \frac{2\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \bigg/ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda α eğrisi bir geodezik çizgidir.

Benzer şekilde, Lorentziyen birim küre (S_2 yüzeyi) üzerindeki β timelike eğrisi için

$$\left\| \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta}{d\bar{u}}, \frac{d\beta}{d\bar{u}} \right\rangle} = 1$$

olduğu açıktır. Böylece birim hızlı β eğrisinin timelike birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\beta}{d\bar{u}} = (\sinh \bar{u}, 0, \cosh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Hareketli Lorentziyen birim kürenin yüzey normali içe alındığından spacelike birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos \bar{v} \sinh \bar{u} & \sin \bar{v} \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \\ -\sin \bar{v} \cosh \bar{u} & \cos \bar{v} \cosh \bar{u} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(\cos \bar{v} \cosh^2 \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh^2 \bar{u}, \cosh \bar{u} \sinh \bar{u}) / \cosh \bar{u} \\ &= (-\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, -\sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u}) \\ \bar{\mathbf{n}} &= (-\cosh \bar{u}, 0, -\sinh \bar{u}) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\bar{\mathbf{g}} = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}} = -\begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cosh \bar{u} & 0 & -\sinh \bar{u} \\ \sinh \bar{u} & 0 & \cosh \bar{u} \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

biçiminde bulunur. $y(\bar{u}, \bar{v})$ Lorentziyen birim küre üzerinde yatan timelike β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{aligned}\bar{k}_g &= \langle d\bar{T}/d\bar{u}, \bar{g} \rangle = \langle (\cosh \bar{u}, 0, \sinh \bar{u}), (0, 1, 0) \rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_n &= \langle d\bar{T}/d\bar{u}, \bar{n} \rangle = \langle (\cosh \bar{u}, 0, \sinh \bar{u}), (-\cosh \bar{u}, 0, -\sinh \bar{u}) \rangle \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_g = -\langle d\bar{g}/d\bar{u}, \bar{n} \rangle = 0$$

biçiminde bulunur. Bu durumda β eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisidir.

(6.38) ve (6.41) den timelike silindir üzerinde yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin açısal hızı

$$\omega = \sigma \left(\frac{4}{3} T + \frac{5}{3} g \right)$$

biçiminde bulunur. Bu örnekteki türetmeden, önerilen Darboux çatı metodunun keyfi parametrik yüzeylere ve eğrilere kolaylıkla uygulanabilen geometrik değişmezler (invariantlar) cinsinden ifade edildiği görülebilir.

7. IR_1^3 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA KONTAK YUVARLANMANIN TERS KİNEMATİĞİ

Bu bölümde IR_1^3 Lorentziyen 3-uzayında hareketli bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzeyin sabit bir spacelike (sırasıyla, timelike) yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanma hareketinin ters kinematığı incelenecektir. Ayrıca kontak yuvarlanma hareketinin ters kinematığına örnekler verilecektir.

7.1. Spacelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı

7.1.1. Spacelike Yüzeylerde Darboux Çatı Metodu

S , IR_1^3 de yönlendirilmiş bir spacelike yüzey ve α eğrisi de S üzerinde yönlendirilmiş bir spacelike eğri olsun. α eğrisi S yüzeyi üzerinde olduğundan, α eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir sağ-el ortonormal (T, g, n) çatısı mevcuttur. Burada T , α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü; n , S yüzeyinin timelike birim normal vektörü ve g de S yüzeyinin spacelike birim geodezik normal vektörüdür ve $g = -n \times T$ dir. Çatıların hareket denklemleri

$$dm = dsT, \quad d \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

biçimindedir. Burada m koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (3 causal karaktere sahip) konum vektörü; s , α eğrisinin yay uzunluğu olup ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır. Bu diferansiyel 1-formlardan, (T, g, n) Darboux çatısının spacelike T birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_g = \frac{\omega_{12}}{ds}, \quad k_n = \frac{\omega_{13}}{ds}, \quad \tau_g = \frac{\omega_{23}}{ds}$$

biçiminde verilir.

Örnek 7.1. (Bir Hiperbolik Küresel Eğrinin 1-Formları)

Bu örnekte bir α hiperbolik küresel eğrisine bağlı hareketli bir çatının 1-formları verilmektedir. H_0^2 hiperbolik birim kürenin parametrik denklemi

$$H_0^2: x(u, v) = (\cos v \sinh u, \sin v \sinh u, \cosh u)$$

ile verilebilir. α spacelike eğrisi üzerinde keyfi bir nokta M olsun. α eğrisi t zamanının bir fonksiyonu olarak parametrik denklemi

$$\mathbf{m}(t) = (\cos v(t) \sinh u_0, \sin v(t) \sinh u_0, \cosh u_0), \quad u = u_0 = \text{sbt.}$$

olan bir spacelike çembere karşılık gelsin (Şekil 7.1). Buradan

$$d\mathbf{m}(t) = (-\sin v(t), \cos v(t), 0) \sinh u_0 dv(t) = ds(t) \mathbf{T}(t)$$

elde edilir. Böylece ds 1-formu ve $\mathbf{T}$ spacelike birim teğet vektörü

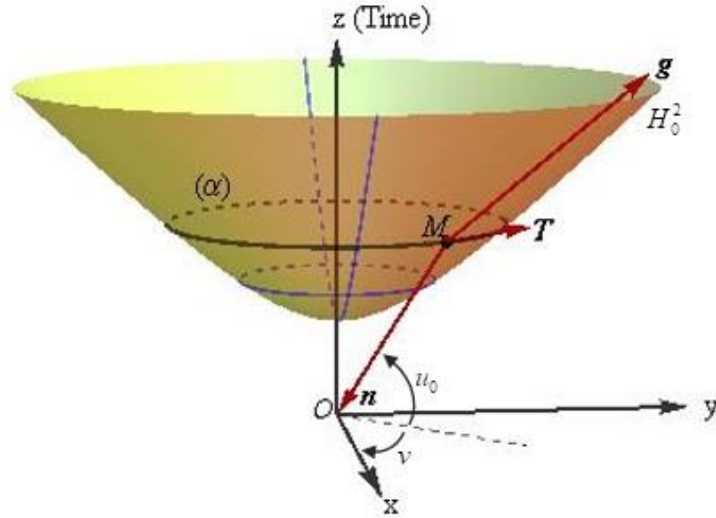
$$ds(t) = \sinh u_0 dv(t), \quad \mathbf{T}(t) = (-\sin v(t), \cos v(t), 0)$$

olarak bulunur. Yüzeyin $\mathbf{n}$ timelike birim normal vektörünü M noktasında içe doğru (yani, orijine doğru) yönelen bir vektör olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{n}(t) = -\mathbf{m}(t) = (-\cos v(t) \sinh u_0, -\sin v(t) \sinh u_0, -\cosh u_0)$$

$$\mathbf{g}(t) = -\mathbf{n}(t) \times \mathbf{T}(t) = (\cos v(t) \cosh u_0, \sin v(t) \cosh u_0, \sinh u_0)$$

bulunur. Böylece $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri M noktasına bağlı bir hareketli çatı olan Darboux çatısını oluştururlar.



Şekil 7.1. H_0^2 üzerinde yatan bir α spacelike eğrisi boyunca Darboux çatısı

Buradan ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_{12}(t) = \langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = -\cosh u_0 dv(t),$$

$$\omega_{13}(t) = -\langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = -\sinh u_0 dv(t),$$

$$\omega_{23}(t) = -\langle d\mathbf{g}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0.$$

(7.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
d \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & \omega_{13}(t) \\ -\omega_{12}(t) & 0 & \omega_{23}(t) \\ \omega_{13}(t) & \omega_{23}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\cosh u_0 dv(t) & -\sinh u_0 dv(t) \\ \cosh u_0 dv(t) & 0 & 0 \\ -\sinh u_0 dv(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına bağlı geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma sırasıyla

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{\omega_{12}}{ds} = \frac{-\cosh u_0 dv(t)}{\sinh u_0 dv(t)} = -\coth u_0, \\
k_n &= \frac{\omega_{13}}{ds} = \frac{-\sinh u_0 dv(t)}{\sinh u_0 dv(t)} = -1, \\
\tau_g &= \frac{\omega_{23}}{ds} = \frac{0}{\sinh u_0 dv(t)} = 0
\end{aligned}$$

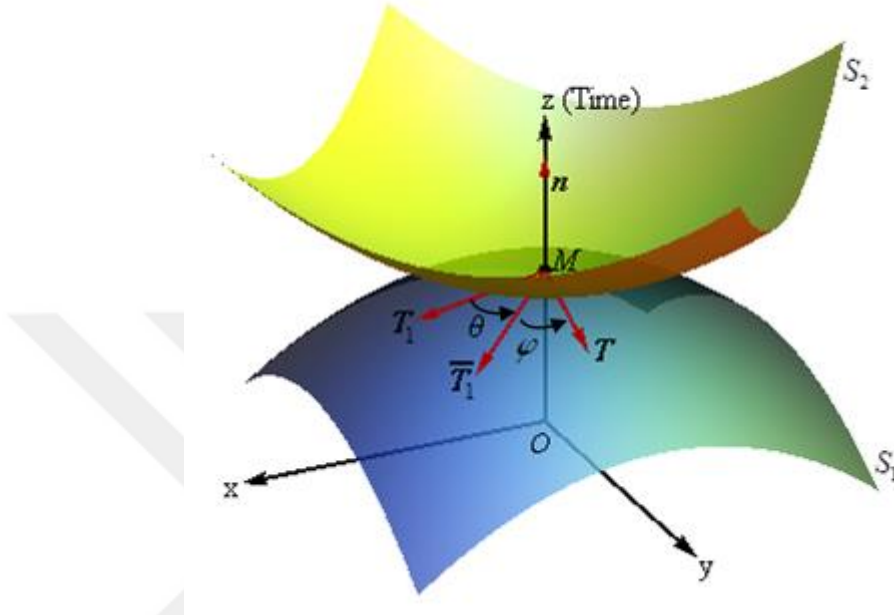
biçiminde elde edilir. Tensör analizinde $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri $(1,0)$ tensörler olduklarını ve ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} 1-formları $(0,1)$ tensörler olduklarını not edelim. Ayrıca bunlar belirli bir koordinat sistemi seçiminden bağımsızdırlar.

7.1.2. Spacelike Yüzeylerde Kontak Denklemler

Bu bölümde spacelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve eğriliklere göre kontak denklemler verilecektir.

İlk olarak spacelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hızı belirleyelim. Parametre eğrileri dik olan sabit bir $x(u,v)$ spacelike yüzeyini S_1 ve hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ spacelike yüzeyini de S_2 ile gösterelim. S_1 yüzeyinin u -koordinat eğrisi (α_1 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\mathbf{T}_1$, v -koordinat eğrisi (α_2 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\mathbf{T}_2$; S_2 yüzeyinin $\bar{u}$ -koordinat eğrisi (β_1 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\bar{\mathbf{T}}_1$, $\bar{v}$ -koordinat eğrisi (β_2 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\bar{\mathbf{T}}_2$ ve $\mathbf{T}_1$ ile $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörleri arasındaki spacelike açı θ olsun. Hareketli S_2 spacelike yüzeyinin $\mathbf{T}$ spacelike birim teğet vektörü yönünde yuvarlandığını belirtelim. $\mathbf{T}$ vektörü ile $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörü arasındaki spacelike açı φ olsun (Şekil 7.2). $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ ve $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörleri aynı spacelike teğet düzlemde yatarlar. Bundan dolayı $\mathbf{T}$ vektörü ile $\mathbf{T}_1$ vektörü arasındaki

spacelike açı da $(\varphi + \theta)$ olur. Burada sabit S_1 yüzeyinin $\mathbf{n}$ birim yüzey normal vektörünün timelike, $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ birim vektörlerinin spacelike olduklarını ve hareketli S_2 yüzeyinin de $\bar{\mathbf{n}}$ birim yüzey normal vektörünün timelike, $\bar{\mathbf{g}}_1$ ve $\bar{\mathbf{g}}_2$ birim vektörlerinin spacelike olduklarını belirtelim.



Şekil 7.2. S_1 spacelike yüzeyi üzerinde $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 spacelike yüzeyi

Spacelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve kontak denklemleri vermeden önce hareketli ve sabit spacelike yüzeyler üzerindeki parametre eğrilerinin Darboux çatılarının hareket denklemlerini (türev formüllerini) oluşturalım.

Hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ yüzeyi üzerindeki β_1 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{n}})$ ve β_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{n}})$ olsun. Bu durumda β_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{\mathbf{m}}_1 = d\bar{s}_1 \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0), \quad d \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ -\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{g}}_1 = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{\mathbf{T}}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde β_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{\mathbf{m}}_2 = d\bar{s}_2 \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}), \quad d \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ -\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{g}}_2 = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{\mathbf{T}}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{k}_{n2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{\tau}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$$

biçimindedir. Burada $\bar{\mathbf{m}}_1$ ve $\bar{\mathbf{m}}_2$, sırasıyla, β_1 ve β_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; $\bar{s}_1$, β_1 eğrisinin yay uzunluğu ve $\bar{s}_2$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu olup $d\bar{s}_1$, $d\bar{s}_2$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$ ve $\bar{\omega}_{23}$ koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Sabit $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki α_1 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve α_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ olsun. Bu durumda α_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_1 = ds_1 \mathbf{T}_1(u, v_0), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u, v_0) & \omega_{13}(u, v_0) \\ -\omega_{12}(u, v_0) & 0 & \omega_{23}(u, v_0) \\ \omega_{13}(u, v_0) & \omega_{23}(u, v_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ Darboux çatısının spacelike $\mathbf{T}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}, \quad k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}, \quad \tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde α_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_2 = ds_2 \mathbf{T}_2(u_0, v), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u_0, v) & \omega_{13}(u_0, v) \\ -\omega_{12}(u_0, v) & 0 & \omega_{23}(u_0, v) \\ \omega_{13}(u_0, v) & \omega_{23}(u_0, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{n} \times \mathbf{T}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux çatısının spacelike $\mathbf{T}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}, \quad k_{n2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}, \quad \tau_{g2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$$

Burada $\mathbf{m}_1$ ve $\mathbf{m}_2$, sırasıyla, α_1 ve α_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; s_1 , α_1 eğrisinin yay uzunluğu ve s_2 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu olup ds_1 , ds_2 , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Şimdi ise spacelike yüzeylerde kontak denklemleri verelim. $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde S_2 spacelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin $\bar{k}_n$ normal eğriliği, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulması ve $\bar{k}_g$ geodezik eğriliği (5.15) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_n &= \bar{k}_{n1} \cos^2 \varphi + (\bar{\tau}_{g1} - \bar{\tau}_{g2}) \cos \varphi \sin \varphi + \bar{k}_{n2} \sin^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_g &= \bar{\tau}_{g1} \cos^2 \varphi + (\bar{k}_{n2} - \bar{k}_{n1}) \cos \varphi \sin \varphi + \bar{\tau}_{g2} \sin^2 \varphi, \\ \bar{k}_g &= \bar{k}_{g1} \cos \varphi + \bar{k}_{g2} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Burada $\bar{s}$, S_2 spacelike yüzeyi üzerinde bulunan $\mathbf{T}$ spacelike vektörünün yönünde kontak geometrik yerin yay uzunluğudur. $\bar{k}_{n1}$, $\bar{k}_{n2}$, $\bar{\tau}_{g1}$, $\bar{\tau}_{g2}$, $\bar{k}_{g1}$ ve $\bar{k}_{g2}$, S_2 yüzeyinin M kontak noktasındaki $\bar{u}$ - spacelike parametrik ve $\bar{v}$ - spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

s , S_1 spacelike yüzeyi üzerindeki kontak geometrik yerin yay uzunluğu olsun. Kontak yuvarlanmanın kısıtlarından dolayı, s ve $\bar{s}$ yay uzunlukları birbirine eşittir ve ayrıca $\mathbf{T}$ vektörü S_1 yüzeyi üzerinde etki eden kontak geometrik yerin teğet vektörüdür. $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde S_1 spacelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin k_n normal eğriliği, τ_g geodezik burulması ve k_g geodezik eğriliği (5.15) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= k_{n1} \cos^2(\varphi + \theta) + (\tau_{g1} - \tau_{g2}) \cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta) + k_{n2} \sin^2(\varphi + \theta), \\ \tau_g &= \tau_{g1} \cos^2(\varphi + \theta) + (k_{n2} - k_{n1}) \cos(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta) + \tau_{g2} \sin^2(\varphi + \theta), \\ k_g &= k_{g1} \cos(\varphi + \theta) + k_{g2} \sin(\varphi + \theta) + \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Burada k_{n1} , k_{n2} , τ_{g1} , τ_{g2} , k_{g1} ve k_{g2} , S_1 yüzeyinin M kontak noktasındaki u -spacelike parametrik ve v -spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

Kontak geometrik yerler verildiğinde, hareketli spacelike yüzeyin Darboux ani dönme vektörü (açısal hızı) denklem (6.13) den

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(-\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} + k_g^* \mathbf{n})$$

biçiminde verilmektedir. Burada

$$\sigma = \frac{ds}{dt}, \quad k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$$

dır ve σ , yuvarlanma oranını temsil eder.

Şekil 7.2 de görüldüğü üzere $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}_1$ spacelike birim vektörleri arasındaki $(\varphi + \theta)$ açısı bir spacelike açıdır. Bu durumda (5.11) göz önüne alındığında $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \sin(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= -\sin(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \cos(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlikler (6.13) de elde edilen $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısındaki $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız denkleminde yerlerine yazıldığında $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısındaki açısal hız denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\omega = & \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) \tau_g^* - \sin(\varphi + \theta) k_n^* \right) \mathbf{T}_1 \\ & + \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cos(\varphi + \theta) k_n^* \right) \mathbf{T}_2 + \sigma k_g^* \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Şimdi ise spacelike yüzeylerde eğriliklere göre kontak denklemleri oluşturalım. (7.4) eşitliğinde

$$\left. \begin{aligned}\omega_1 &= \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) \tau_g^* - \sin(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cos(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_3 &= \sigma k_g^*\end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

denilirse S_2 spacelike yüzeyinin açılal hızı $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısına göre

$$\omega = \omega_1 \mathbf{T}_1 + \omega_2 \mathbf{T}_2 + \omega_3 \mathbf{n}.$$

şeklinde ifade edilir. (7.2) ve (7.3) denklemlerini kullanarak $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kontak denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$\mathbf{T}_1$ spacelike vektörü yönündeki ilk kontak denklem

$$\omega_1 = \sigma \left(\begin{aligned} & A_1 \cos^3 \varphi + A_2 \sin^3 \varphi + A_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ & + A_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + A_5 \cos \varphi + A_6 \sin \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.6)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}A_1 = A_4 &= -\bar{\tau}_{g1} \cos \theta - \bar{k}_{n1} \sin \theta, \quad A_2 = A_3 = \bar{\tau}_{g2} \sin \theta - \bar{k}_{n2} \cos \theta, \\ A_5 &= \tau_{g1} \cos \theta + k_{n2} \sin \theta, \quad A_6 = -\tau_{g1} \sin \theta + k_{n2} \cos \theta\end{aligned}$$

dır. $\mathbf{T}_2$ spacelike vektörü yönündeki ikinci kontak denklem

$$\omega_2 = \sigma \left(\begin{aligned} & B_1 \cos^3 \varphi + B_2 \sin^3 \varphi + B_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ & + B_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + B_5 \cos \varphi + B_6 \sin \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.7)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}B_1 = B_4 &= -\bar{\tau}_{g1} \sin \theta + \bar{k}_{n1} \cos \theta, \quad B_2 = B_3 = -\bar{\tau}_{g2} \cos \theta - \bar{k}_{n2} \sin \theta, \\ B_5 &= \tau_{g2} \sin \theta - k_{n1} \cos \theta, \quad B_6 = \tau_{g2} \cos \theta + k_{n1} \sin \theta\end{aligned}$$

dır. Son olarak $\mathbf{n}$ timelike vektörü yönündeki üçüncü kontak denklem

$$\omega_3 = \sigma (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi) + \hat{\omega}_3 \quad (7.8)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}C_1 &= \bar{k}_{g1} - k_{g1} \cos \theta - k_{g2} \sin \theta, \\ C_2 &= \bar{k}_{g2} + k_{g1} \sin \theta - k_{g2} \cos \theta, \\ \hat{\omega}_3 &= -d\theta / dt\end{aligned}$$

dır. (7.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk ifade olan $\sigma(C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi)$ terim iki spacelike yüzeyin geodezik eğriliklerinin farkı tarafından indirgenen dönme oranıdır. Dolayısıyla, son ifade olan $\hat{\omega}_3$, indirgenen dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farkı telafi eden dönme oranıdır (yani, telafi edici dönme oranıdır).

7.1.3. Spacelike Yüzeylerde Kontak Yuvarlanmanın Ters Kinematığı

(7.6), (7.7) ve (7.8) denklemlerindeki $A_1, \dots, A_6$, $B_1, \dots, B_6$ ve C_1, C_2 katsayılarının koordinat eğrilerinin eğriliklerine ve iki koordinat çatısı ile kesişen spacelike θ açısına göre ifade edildiklerini dikkate alalım. Dolayısıyla bu katsayıların ve θ açısının, verilen bir kontak noktaya ait oldukları açıktır.

ω_1 , ω_2 ve ω_3 açısal hız bileşenlerinin verilmesiyle üç bilinmeyen değer hesaplanacaktır. Bu bilinmeyenler φ yuvarlanma yönü, σ yuvarlanma oranı ve $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranıdır (Bakınız Şekil 4.3).

İlk çıktı olan φ yuvarlanma yönü aşağıdaki gibi elde edilir:

(7.6) ve (7.7) deki eşitliklerde ortak olan σ yuvarlanma oranı yok edilip eşitleme yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} B_1 \cos^3 \varphi + B_2 \sin^3 \varphi + B_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ + B_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + B_5 \cos \varphi + B_6 \sin \varphi \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} A_1 \cos^3 \varphi + A_2 \sin^3 \varphi + A_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ + A_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + A_5 \cos \varphi + A_6 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Eşitliğin sol tarafı sağ tarafa geçirildiğinde

$$\begin{aligned} & (A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1) \cos^3 \varphi + (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1) \sin^3 \varphi + (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1) \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ & + (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1) \cos \varphi \sin^2 \varphi + (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1) \cos \varphi + (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1) \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $P_1 = A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1$, $P_2 = (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1)$,

$P_3 = (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1)$, $P_4 = (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1)$, $P_5 = (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1)$ ve $P_6 = (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1)$

olmak üzere polinomu

$$\begin{aligned} & P_1 \cos^3 \varphi + P_2 \sin^3 \varphi + P_3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ & + P_4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + P_5 \cos \varphi + P_6 \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikte $x = \tan(\varphi / 2)$ alındığında altıncı dereceden

$$\begin{aligned} & (-P_1 - P_5)x^6 + (2P_3 + 2P_6)x^5 + (3P_1 - 4P_4 - P_5)x^4 + (8P_2 - 4P_3 + 4P_6)x^3 \\ & + (-3P_1 + 4P_4 + P_5)x^2 + (2P_3 + 2P_6)x + P_1 + P_5 = 0. \end{aligned}$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun çözümü, hareketli spacelike yüzeyin yuvarlanabileceği bütün yönleri verir. Tüm çözümlerin kompleks sayı olması durumunda istenen hareketi oluşturabilmenin hiçbir yolunun olmayacağını not edelim.

İkinci çıktı olan σ yuvarlanma oranı, (7.6) veya (7.7) de φ spacelike açısının yerine konulmasıyla elde edilir. Bu iki çıktı, has-yuvarlanmanın dönme hareketini belirler. Ayrıca (7.5) in ilk iki eşitliğinin kareleri alınıp taraf tarafa toplandığında

$$\sigma^2 = \frac{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}$$

elde edilir. Fiziksel olarak σ yuvarlanma oranı pozitif olmalıdır. Eşitliğin her iki tarafın karekökleri alındığında σ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}}.$$

Üçüncü çıktı olan $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranı, σ ve φ değerlerinin denklem (7.8) de yerlerine koyulmasıyla elde edilir. Bu üç parametre, hareketli spacelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketini belirler.

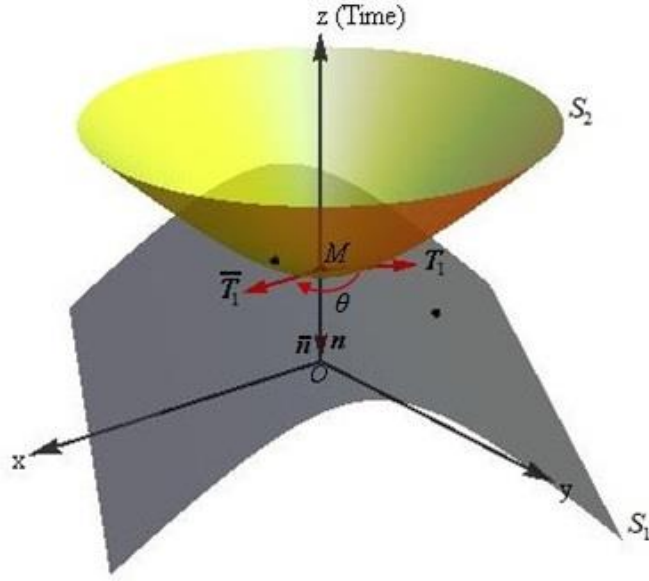
Örnek 7.2.

Bu örnekte hareketli bir spacelike yüzey olarak göz önüne alınan H_0^2 hiperbolik birim kürenin (S_2 yüzeyinin) sabit bir spacelike yüzey olarak göz önüne alınan hiperbolik birim silindir (S_1 yüzeyi) üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematiği verilmektedir (Şekil 7.3). Bu iki spacelike yüzeyin ters kinematiği incelenirken ilk olarak kontak denklemler bulunur. Daha sonra da nümerik kök yaklaşımları metodu uygulanır.

H_0^2 üzerindeki keyfi iki (spacelike) parametre eğrisi β_1 ve β_2 olsun. β_1 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_1$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_2$ biçiminde verilsin. H_0^2 hiperbolik birim küreyi

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \sinh \bar{u}, \sin \bar{v} \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

parametrik denklemi ile verelim.



Şekil 7.3. Hiperbolik birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan H_0^2 hiperbolik birim küresi

H_0^2 üzerindeki $\beta_1 = \beta_1(\bar{u})$ eğrisini $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_1(\bar{u}) = y(\bar{u}, \bar{v}_0) = (\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

biçiminde alalım. $\beta_1(\bar{u})$ eğrisinin $\bar{s}_1$ yay uzunluğunun $\bar{u}$ ya göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_1}{d\bar{u}}, \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \right\rangle} = 1$$

dir. β_1 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = \frac{d\beta_1}{d\bar{s}_1} = \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \Big/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = (\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Hareketli bir yüzey olan hiperbolik birim kürenin yüzey normali içe doğru alınsın. Bu durumda birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \bar{n} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos \bar{v} \cosh \bar{u} & \sin \bar{v} \cosh \bar{u} & \sinh \bar{u} \\ -\sin \bar{v} \sinh \bar{u} & \cos \bar{v} \sinh \bar{u} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos \bar{v} \sinh \bar{u}, -\sin \bar{v} \sinh \bar{u}, -\cosh \bar{u}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

olarak bulunur. Burada $\bar{n}$ vektörü bir timelike vektördür. β_1 eğrisi, $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (7.9) daki birim yüzey normal vektörü

$$\bar{n} = \bar{n}(\bar{u}, \bar{v}_0) = (-\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, -\sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, -\cosh \bar{u})$$

biçimindedir. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 = \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) &= -\bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \times \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u} & -\sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u} & -\cosh \bar{u} \\ \cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u} & \sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u} & \sinh \bar{u} \end{vmatrix} \\ &= (\sin \bar{v}_0, -\cos \bar{v}_0, 0)\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$ olmak üzere

β_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned}\bar{k}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}}_1 \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0, \\ \bar{k}_{n1} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = -\left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = -1, \\ \bar{\tau}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = -\left\langle d\bar{\mathbf{g}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0\end{aligned}\right\} \quad (7.10)$$

biçiminde bulunur.

Benzer şekilde, H_0^2 üzerindeki $\beta_2 = \beta_2(\bar{v})$ eğrisini $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_2(\bar{v}) = y(\bar{u}_0, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \sinh \bar{u}_0, \sin \bar{v} \sinh \bar{u}_0, \cosh \bar{u}_0)$$

biçiminde alalım. $\beta_2(\bar{v})$ eğrisinin $\bar{s}_2$ yay uzunluğunun $\bar{v}$ ye göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_2}{d\bar{v}}, \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} \right\rangle} = \sinh \bar{u}_0$$

dir. β_2 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}}_2 = \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = \frac{d\beta_2}{d\bar{s}_2} = \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = (-\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0)$$

biçiminde bulunur. β_2 eğrisi, $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (7.9) daki

birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) = (-\cos \bar{v} \sinh \bar{u}_0, -\sin \bar{v} \sinh \bar{u}_0, -\cosh \bar{u}_0)$$

biçimindedir. Spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) &= -\bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \times \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos \bar{v} \sinh \bar{u}_0 & -\sin \bar{v} \sinh \bar{u}_0 & -\cosh \bar{u}_0 \\ -\sin \bar{v} & \cos \bar{v} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}_0, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}_0, \sinh \bar{u}_0)\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{k}_{n2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{\tau}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$ olmak üzere

β_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{g2} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = \left\langle d\bar{T}_2/d\bar{v}, \bar{g}_2 \right\rangle / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = -\coth \bar{u}_0, \\ \bar{k}_{n2} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = -\left\langle d\bar{T}_2/d\bar{v}, \bar{n} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = -1, \\ \bar{\tau}_{g2} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = -\left\langle d\bar{g}_2/d\bar{v}, \bar{n} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

biçiminde bulunur.

Sabit bir spacelike yüzey olan hiperbolik birim silindir üzerindeki parametre eğrileri α_1 ve α_2 olsun. Burada α_1 ve α_2 eğrileri spacelike eğrilerdir. α_1 eğrisinin yay uzunluğu s_1 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu s_2 biçiminde verilsin. Parametrik denklemi $x_1(u, v) = (-\sinh u, v, 2 - \cosh u)$ olacak şekilde bir hiperbolik birim silindir alalım. Bu silindiri z eksenine etrafında saat yönünde $\pi/6$ derecelik spacelike açıyla döndürelim (Şekil 7.3). Bu durumda dönme sonucu oluşan hiperbolik birim silindir

$$x(u, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u + \frac{1}{2} v, \frac{1}{2} \sinh u + \frac{\sqrt{3}}{2} v, 2 - \cosh u \right)$$

biçiminde parametrelendirilir. Dolayısıyla, hiperbolik birim silindir üzerindeki $\alpha_1 = \alpha_1(u)$ parametre eğrisi de

$$\alpha_1(u) = \alpha_1(u, v_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u + \frac{1}{2} v_0, \frac{1}{2} \sinh u + \frac{\sqrt{3}}{2} v_0, 2 - \cosh u \right)$$

biçimindedir. $\alpha_1(u)$ eğrisinin s_1 yay uzunluğunun u ya göre türevi

$$\frac{ds_1}{du} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_1}{du}, \frac{d\alpha_1}{du} \right\rangle} = 1$$

dir. α_1 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$T_1 = T_1(u, v_0) = \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{du} / \frac{ds_1}{du} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u, \frac{1}{2} \cosh u, -\sinh u \right)$$

biçiminde bulunur. Hiperbolik birim silindir, sabit bir yüzey olduğu için yüzey normali dışa doğrudur. Bu durumda birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u & \frac{1}{2} \cosh u & -\sinh u \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.12)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u, \frac{1}{2} \sinh u, -\cosh u \right)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{n}$ vektörü bir timelike vektördür. α_1 eğrisi, u -parametre eğrisi olarak alındığından (7.12) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u, \frac{1}{2} \sinh u, -\cosh u \right)$$

biçiminde bulunur. Spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1(u, v_0) = -\mathbf{n}(u, v_0) \times \mathbf{T}_1(u, v_0) = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u & \frac{1}{2} \sinh u & -\cosh u \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u & \frac{1}{2} \cosh u & -\sinh u \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

biçiminde bulunur. $k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}$, $k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}$, $\tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$ olmak üzere

α_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g1} &= \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \left\langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{g}_1 \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 0, \\ k_{n1} &= \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = -\left\langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 1, \\ \tau_{g1} &= \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = -\left\langle d\mathbf{g}_1/du, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

biçiminde bulunur.

Hiperbolik birim silindir üzerindeki $\alpha_2 = \alpha_2(v)$ eğrisini de

$$\alpha_2(v) = \alpha_2(u_0, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u_0 + \frac{1}{2} v, \frac{1}{2} \sinh u_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} v, 2 - \cosh u_0 \right)$$

biçiminde alalım. $\alpha_2(v)$ eğrisinin s_2 yay uzunluğunun v ye göre türevi

$$\frac{ds_2}{dv} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_2}{dv}, \frac{d\alpha_2}{dv} \right\rangle} = 1$$

dir. α_2 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(u_0, v) = \frac{d\alpha_2}{ds_2} = \frac{d\alpha_2}{dv} \Big/ \frac{ds_2}{dv} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

biçiminde bulunur. α_2 eğrisi, v -parametre eğrisi olarak alındığından (7.12) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u_0, v) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u_0, \frac{1}{2} \sinh u_0, -\cosh u_0 \right)$$

biçimindedir. Spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2(u_0, v) &= -\mathbf{n}(u_0, v) \times \mathbf{T}_2(u_0, v) = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh u_0 & \frac{1}{2} \sinh u_0 & -\cosh u_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u_0, -\frac{1}{2} \cosh u_0, \sinh u_0 \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $k_{g2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}$, $k_{n2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}$, $\tau_{g2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$ olmak üzere

α_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g2} &= \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2} = \left\langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{g}_2 \right\rangle \Big/ \frac{ds_2}{dv} = 0, \\ k_{n2} &= \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2} = -\left\langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{n} \right\rangle \Big/ \frac{ds_2}{dv} = 0, \\ \tau_{g2} &= \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2} = -\left\langle d\mathbf{g}_2/dv, \mathbf{n} \right\rangle \Big/ \frac{ds_2}{dv} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

biçiminde bulunur.

(7.10) ve (7.11) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (7.2) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde hareketli hiperbolik birim küre üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$\bar{k}_n = -1, \quad \bar{\tau}_g = 0, \quad \bar{k}_g = -\coth \bar{u} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}$$

biçiminde bulunur. (7.13) ve (7.14) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (7.3) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde T spacelike vektörü yönünde sabit hiperbolik birim silindir üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$k_n = \cos^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g = -\cos(\varphi + \theta)\sin(\varphi + \theta), \quad k_g = \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}$$

biçiminde bulunur. $k_n^* = \bar{k}_n - k_n$, $\tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$, $k_g^* = \bar{k}_g - k_g$ eşitlikleriyle verilen indirgenmiş eğrilikler

$$k_n^* = -1 - \cos^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g^* = \cos(\varphi + \theta)\sin(\varphi + \theta), \quad k_g^* = -\coth \bar{u} \sin \varphi - \frac{d\theta}{ds}$$

olarak bulunur. Hareketli H_0^2 hiperbolik birim kürenin eğrilikleri ile sabit hiperbolik birim silindirin eğrilikleri farkı sonucu elde edilen k_n^* , τ_g^* ve k_g^* indirgenmiş eğrilikleri (7.5) de yerlerine yerleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \left(-\cos(\varphi + \theta) [\cos(\varphi + \theta)\sin(\varphi + \theta)] - \sin(\varphi + \theta) [-1 - \cos^2(\varphi + \theta)] \right) \\ &= \sigma \sin(\varphi + \theta) \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sin(\varphi + \theta) [\cos(\varphi + \theta)\sin(\varphi + \theta)] + \cos(\varphi + \theta) [-1 - \cos^2(\varphi + \theta)] \right) \\ &= -2\sigma \cos(\varphi + \theta) \\ \omega_3 &= \sigma \left(-\coth \bar{u} \sin \varphi - \frac{d\theta}{ds} \right) = \sigma (-\coth \bar{u} \sin \varphi) + \hat{\omega}_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

biçiminde üç kontak denklem elde edilir. (7.15) deki ilk iki eşitliğe, σ yuvarlanma oranının yok edilmesiyle çarpaz çarpım işlemi uygulandığında

$$P_1 \cos(\varphi + \theta) + P_2 \sin(\varphi + \theta) = 0 \quad (7.16)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\omega_1 \\ P_2 &= \omega_2 \end{aligned}$$

dır.

(7.16) daki denklemi çözmek için, kapalı-form çözümü elde edilemediğinden, nümerik metot kullanılmalıdır. $x = \tan((\varphi + \theta)/2)$ alınıp (7.16) da yerine yerleştirildiğinde

$$P_1(1 + x^2 - x^4 - x^6) + P_2(2x + 4x^3 + 2x^5) = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde aşağıdaki gibi P_1 ve P_2 katsayılarına bağlı altıncı dereceden bir polinom elde edilir.

$$(-P_1)x^6 + (2P_2)x^5 + (-P_1)x^4 + (4P_2)x^3 + (P_1)x^2 + (2P_2)x + P_1 = 0.$$

Hiperbolik birim küre ile hiperbolik birim silindirin kontak noktası M olmak üzere, hiperbolik birim silindir üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($u=1$ ve $v=0$), hiperbolik birim küre üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($\bar{u}=1$ ve $\bar{v}=\pi/6$), ve istenen açısal hızın $\omega_{\text{istenen}} = 2T_1 + 1T_2 - 3n$ olduklarını varsayalım. Burada $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ ve $\omega_3 = -3$ dür. Bu durumda $P_1 = 2\omega_1$ ve $P_2 = \omega_2$ olduğundan $P_1 = 4$ ve $P_2 = 1$ olarak elde edilir. Bu parametreler polinom denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde

$$-4x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

biçiminde altıncı dereceden polinom elde edilir. Polinomun köklerinin nümerik yaklaşımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$x_1 = -0.78078, \quad x_2 = 1.28078, \quad x_3 = x_5 = i, \quad x_4 = x_6 = -i.$$

Burada son dört kök sanal kısımlardan oluştuğundan bu kökler göz ardı edilir. Reel kökler, muhtemel yuvarlanma yönlerini verir. x_1 ilk reel kökü ile x_2 ikinci reel kökünü (7.15) deki ilk denklemde yerlerine yerleştirdiğimizde σ yuvarlanma oranlarının değerleri sırasıyla

$$\sigma = \frac{\omega_1}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{(1+x_1^2)}{x_1} \Rightarrow \sigma = -2.06155$$

$$\sigma = \frac{\omega_1}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{(1+x_2^2)}{x_2} \Rightarrow \sigma = 2.06155$$

biçiminde elde edilir. Fiziksel olarak, yuvarlanma oranı yalnızca pozitif olabilir. Dolayısıyla, negatif çözüm göz ardı edilir. Burada σ yuvarlanma oranını pozitif yapan değer x_2 reel kökü olduğundan bundan sonraki işlemlerde $x_2 = 1.28078$ değerine göre hesaplamalar yapılmaktadır.

T_1 ile $\bar{T}_1$ spacelike vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olup, bu vektörlerin iç çarpımı

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \langle \mathbf{T}_1, \bar{\mathbf{T}}_1 \rangle = \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u, \frac{1}{2} \cosh u, -\sinh u \right), (\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u}) \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh u \cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u} + \frac{1}{2} \cosh u \sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u} + \sinh u \sinh \bar{u}\end{aligned}$$

biçimindedir. ($u=1$ ve $v=0$) ve ($\bar{u}=1$ ve $\bar{v}=\pi/6$) değerleri iç çarpımda yerlerine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(1) \cos(\pi/6) \cosh(1) + \frac{1}{2} \cosh(1) \sin(\pi/6) \cosh(1) + \sinh(1) \sinh(1) \\ &= 0.19054\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\mathbf{T}_1$ vektörü ile $\bar{\mathbf{T}}_1$ vektörü arasındaki spacelike açının radyan cinsinden değeri

$$\theta = 1.37908$$

biçiminde bulunur. Bu durumda φ yuvarlanma yönü

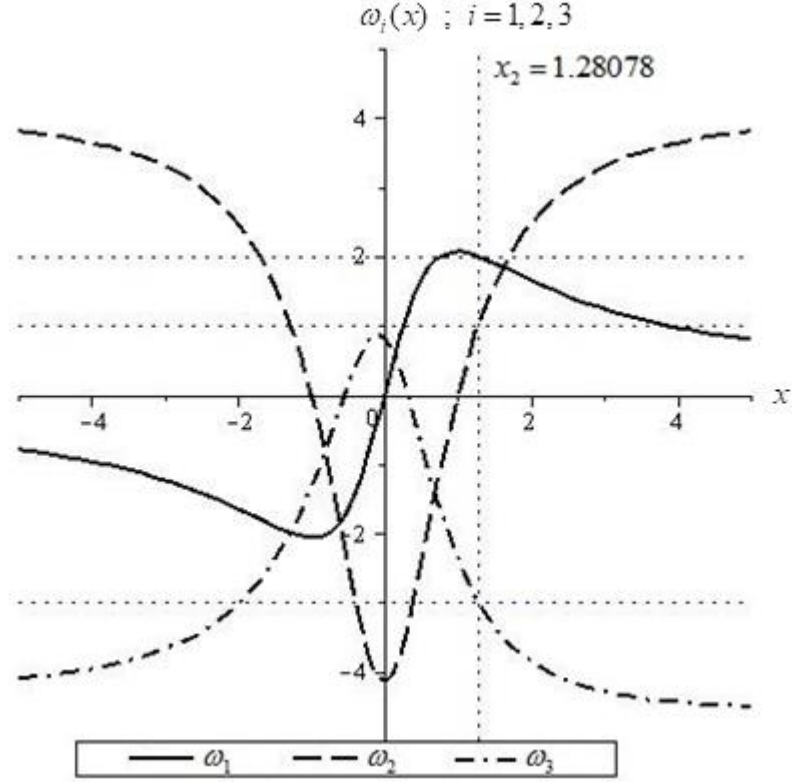
$$\varphi = 2\arctan(x_2) - \theta = 0.43670$$

biçiminde elde edilir.

$\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme hızı, $\varphi = 0.43670$ yuvarlanma yönünün, $\sigma = 2.06155$ yuvarlanma oranının ve $\omega_3 = -3$ istenen dönme oranının (7.15) in üçüncü denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}-\hat{\omega}_3 &= \sigma(-\coth \bar{u} \sin \varphi) - \omega_3 = 2.0616(-\coth(1) \sin(0.43670)) + 3 \\ &= 1.85512.\end{aligned}$$

Burada $\hat{\omega}_3 = -1.85512$ telafi edici dönme oranı, $\sigma(-\coth \bar{u} \sin \varphi) = -1.14488$ indirgenmiş dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farka eşittir. Böylelikle hiperbolik birim kürenin, hiperbolik birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematiği tamamlanmış olur. Açısal hız bileşenlerinin grafiği Şekil 7.4 de verilmiştir.



Şekil 7.4. $x = \tan(\varphi + \theta) / 2$ için hiperbolik birim silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan hiperbolik birim kürenin T spacelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri

7.2. Timelike Yüzeylerin Kontak Yuvarlanmasının Ters Kinematığı

Bu bölümde hareketli bir timelike yüzeyin sabit bir timelike yüzey üzerinde kaymaksızın kontak yuvarlanmasının ters kinematığı iki alt bölüm ile incelenecektir.

7.2.1. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Darboux Çatı Metodu

S , IR_1^3 de yönlendirilmiş bir timelike yüzey ve α eğrisi de S üzerinde yönlendirilmiş bir spacelike eğri olsun. α eğrisi S yüzeyi üzerinde olduğundan, α eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir sağ-el ortonormal (T, g, n) çatısı mevcuttur. Burada T , α eğrisinin spacelike birim teğet vektörü; n , S yüzeyinin spacelike birim normal vektörü ve g de S yüzeyinin timelike birim geodezik normal vektörüdür ve $g = n \times T$ dir. Çatıların hareket denklemleri

$$d\mathbf{m} = ds\mathbf{T}, \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{m}$ koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (3 causal karaktere sahip) konum vektörü; s , α eğrisinin yay uzunluğu olup ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux çatısının spacelike $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_g = \frac{\omega_{12}}{ds}, \quad k_n = \frac{\omega_{13}}{ds}, \quad \tau_g = \frac{\omega_{23}}{ds}$$

biçiminde verilir.

Örnek 7.3. (Bir Lorentziyen Küresel Eğrinin 1-Formları)

Bu örnekte bir α Lorentziyen küresel eğrisine bağlı hareketli bir çatının 1-formları verilmektedir. S_1^2 Lorentziyen birim kürenin parametrik denklemi

$$S_1^2: x(u, v) = (\cos v \cosh u, \sin v \cosh u, \sinh u)$$

ile verilebilir. α spacelike eğrisi üzerinde keyfî bir nokta M olsun. α eğrisi t zamanının bir fonksiyonu olarak parametrik denklemi

$$\mathbf{m}(t) = (\cos v(t) \cosh u_0, \sin v(t) \cosh u_0, \sinh u_0), \quad u = u_0 = \text{sbt.}$$

olan bir spacelike çembere karşılık gelsin (Şekil 7.5). Buradan

$$d\mathbf{m}(t) = (-\sin v(t), \cos v(t), 0) \cosh u_0 dv(t) = ds(t) \mathbf{T}(t)$$

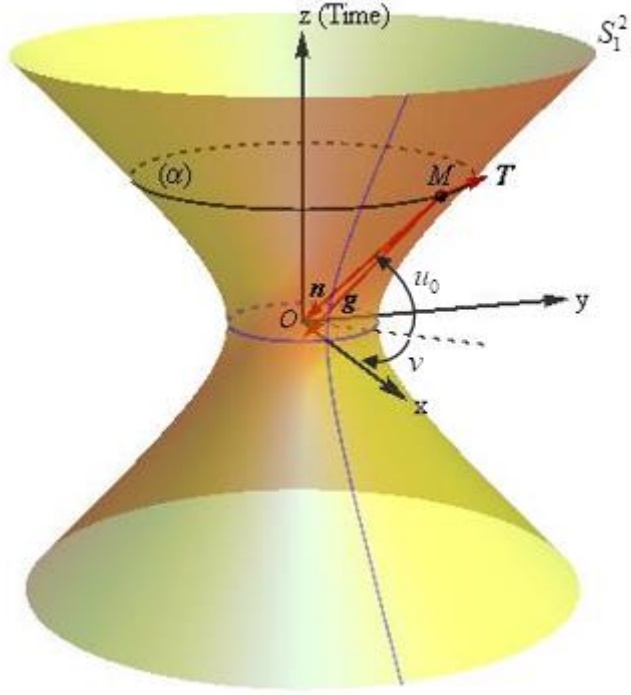
elde edilir. Böylece ds 1-formu ve $\mathbf{T}$ spacelike birim teğet vektörü

$$ds(t) = \cosh u_0 dv(t), \quad \mathbf{T}(t) = (-\sin v(t), \cos v(t), 0)$$

olarak bulunur. Yüzeyin $\mathbf{n}$ spacelike birim normal vektörünü M noktasında içe doğru (yani, orijine doğru) yönelen bir vektör olarak alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t) &= -\mathbf{m}(t) = (-\cos v(t) \cosh u_0, -\sin v(t) \cosh u_0, -\sinh u_0) \\ \mathbf{g}(t) &= \mathbf{n}(t) \times \mathbf{T}(t) = (-\cos v(t) \sinh u_0, -\sin v(t) \sinh u_0, -\cosh u_0) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri M noktasına bağlı bir hareketli çatı olan Darboux çatısını oluştururlar.



Şekil 7.5. S_1^2 üzerinde yatan bir α spacelike eğrisi boyunca Darboux çatısı

Buradan ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega_{12}(t) = -\langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = -\sinh u_0 dv(t),$$

$$\omega_{13}(t) = -\langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = -\cosh u_0 dv(t),$$

$$\omega_{23}(t) = \langle d\mathbf{g}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = 0.$$

(7.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & -\omega_{13}(t) \\ \omega_{12}(t) & 0 & \omega_{23}(t) \\ \omega_{13}(t) & \omega_{23}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sinh u_0 dv(t) & \cosh u_0 dv(t) \\ -\sinh u_0 dv(t) & 0 & 0 \\ -\cosh u_0 dv(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına bağlı geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma sırasıyla

$$k_g = \frac{\omega_{12}}{ds} = \frac{-\sinh u_0 dv(t)}{\cosh u_0 dv(t)} = -\tanh u_0,$$

$$k_n = \frac{\omega_{13}}{ds} = \frac{-\cosh u_0 dv(t)}{\cosh u_0 dv(t)} = -1,$$

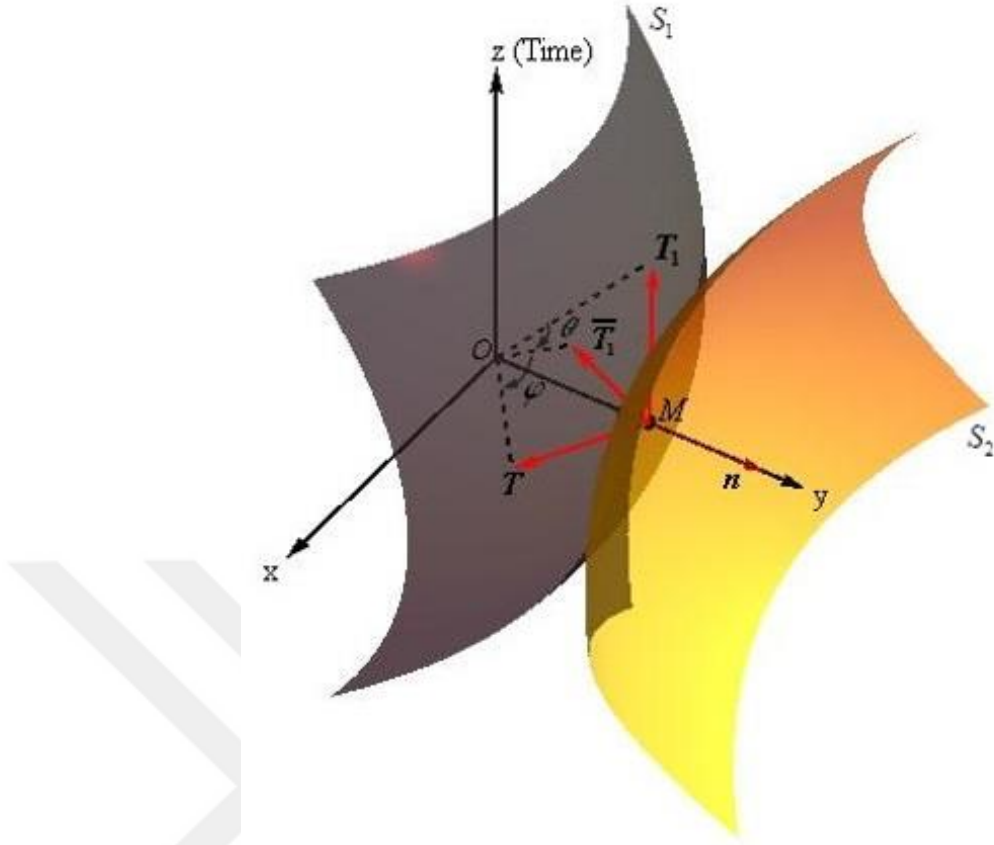
$$\tau_g = \frac{\omega_{23}}{ds} = \frac{0}{\cosh u_0 dv(t)} = 0$$

biçiminde elde edilir. Tensör analizinde T , g ve n vektörleri (1,0) tensörler olduklarını ve ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} 1-formları (0,1) tensörler olduklarını not edelim. Ayrıca bunlar belirli bir koordinat sistemi seçiminden bağımsızdırlar.

7.2.2. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Denklemler

Bu bölümde timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve eğriliklere göre kontak denklemler verilecektir.

İlk olarak timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hızı belirleyelim. Parametre eğrileri dik olan sabit bir $x(u,v)$ timelike yüzeyini S_1 ve hareketli $y(\bar{u},\bar{v})$ timelike yüzeyini de S_2 ile gösterelim. S_1 yüzeyinin u -koordinat eğrisi (α_1 eğrisi) boyunca timelike birim teğet vektörü T_1 , v -koordinat eğrisi (α_2 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü T_2 ; S_2 yüzeyinin $\bar{u}$ -koordinat eğrisi (β_1 eğrisi) boyunca timelike birim teğet vektörü $\bar{T}_1$, $\bar{v}$ -koordinat eğrisi (β_2 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\bar{T}_2$ ve T_1 ile $\bar{T}_1$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı θ olsun. Hareketli S_2 timelike yüzeyinin T spacelike birim teğet vektörü yönünde yuvarlandığını belirtelim. T vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörü arasındaki Lorentziyen timelike açı φ olsun (Şekil 7.6). T , T_1 ve $\bar{T}_1$ vektörleri aynı timelike teğet düzlemde yatarlar. Bundan dolayı T vektörü ile T_1 vektörü arasındaki Lorentziyen timelike açı da $(\varphi + \theta)$ olur. Burada sabit S_1 yüzeyinin n birim yüzey normal vektörünün spacelike, g_1 birim vektörünün spacelike ve g_2 birim vektörünün timelike olduklarını ve hareketli S_2 yüzeyinin de $\bar{n}$ birim yüzey normal vektörünün spacelike, $\bar{g}_1$ birim vektörünün spacelike ve $\bar{g}_2$ birim vektörünün timelike olduklarını belirtelim.



Şekil 7.6. S_1 timelike yüzeyi üzerinde T spacelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 timelike yüzeyi

Timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve kontak denklemleri vermeden önce hareketli ve sabit timelike yüzeyler üzerindeki parametre eğrilerinin Darboux çatılarının hareket denklemlerini (türev formüllerini) oluşturalım.

Hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ yüzeyi üzerindeki β_1 timelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_1, \bar{g}_1, \bar{n})$ ve β_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_2, \bar{g}_2, \bar{n})$ olsun. Bu durumda β_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{\mathbf{m}}_1 = d\bar{s}_1 \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0), \quad d \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 & -\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{g}}_1 = -\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{\mathbf{T}}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde β_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{\mathbf{m}}_2 = d\bar{s}_2 \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}), \quad d \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & -\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{T}}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{\mathbf{T}}_2, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{n}})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{\mathbf{T}}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{k}_{n2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{\tau}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$$

biçimindedir. Burada $\bar{\mathbf{m}}_1$ ve $\bar{\mathbf{m}}_2$, sırasıyla, β_1 ve β_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; $\bar{s}_1$, β_1 eğrisinin yay uzunluğu ve $\bar{s}_2$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu olup $d\bar{s}_1$, $d\bar{s}_2$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$ ve $\bar{\omega}_{23}$ koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Sabit $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki α_1 timelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ ve α_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ olsun. Bu durumda α_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_1 = ds_1 \mathbf{T}_1(u, v_0), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u, v_0) & \omega_{13}(u, v_0) \\ \omega_{12}(u, v_0) & 0 & -\omega_{23}(u, v_0) \\ \omega_{13}(u, v_0) & \omega_{23}(u, v_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v_0) \\ \mathbf{g}_1(u, v_0) \\ \mathbf{n}(u, v_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{T}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{n})$ Darboux çatısının spacelike $\mathbf{T}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}, \quad k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}, \quad \tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde α_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_2 = ds_2 \mathbf{T}_2(u_0, v), \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u_0, v) & -\omega_{13}(u_0, v) \\ \omega_{12}(u_0, v) & 0 & \omega_{23}(u_0, v) \\ \omega_{13}(u_0, v) & \omega_{23}(u_0, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(u_0, v) \\ \mathbf{g}_2(u_0, v) \\ \mathbf{n}(u_0, v) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\mathbf{g}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\mathbf{T}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{n})$ Darboux çatısının spacelike $\mathbf{T}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}, \quad k_{n2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}, \quad \tau_{g2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$$

Burada $\mathbf{m}_1$ ve $\mathbf{m}_2$, sırasıyla, α_1 ve α_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; s_1 , α_1 eğrisinin yay uzunluğu ve s_2 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu olup ds_1 , ds_2 , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Şimdi ise timelike yüzeylerde kontak denklemleri verelim. $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde S_2 timelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin $\bar{k}_n$ normal eğriliği, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulması ve $\bar{k}_g$ geodezik eğriliği (5.31) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_n &= -\bar{k}_{n1} \sinh^2 \varphi - (\bar{\tau}_{g1} + \bar{\tau}_{g2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + \bar{k}_{n2} \cosh^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_g &= \bar{\tau}_{g1} \sinh^2 \varphi + (\bar{k}_{n1} - \bar{k}_{n2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + \bar{\tau}_{g2} \cosh^2 \varphi, \\ \bar{k}_g &= -\bar{k}_{g1} \sinh \varphi + \bar{k}_{g2} \cosh \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Burada $\bar{s}$, S_2 timelike yüzeyi üzerinde bulunan $\mathbf{T}$ spacelike vektörünün yönünde kontak geometrik yerin yay uzunluğudur. $\bar{k}_{n1}$, $\bar{k}_{n2}$, $\bar{\tau}_{g1}$, $\bar{\tau}_{g2}$, $\bar{k}_{g1}$ ve $\bar{k}_{g2}$, S_2 yüzeyinin M kontak noktasındaki $\bar{u}$ - timelike parametrik ve $\bar{v}$ - spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

s , S_1 timelike yüzeyi üzerindeki kontak geometrik yerin yay uzunluğu olsun. Kontak yuvarlanmanın kısıtlarından dolayı, s ve $\bar{s}$ yay uzunlukları birbirine eşittir ve ayrıca $\mathbf{T}$ vektörü S_1 yüzeyi üzerinde etki eden kontak geometrik yerin teğet vektörüdür. $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde S_1 timelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin k_n normal eğriliği, τ_g geodezik burulması ve k_g geodezik eğriliği (5.31) den aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= -k_{n1} \sinh^2(\varphi + \theta) - (\tau_{g1} + \tau_{g2}) \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta) + k_{n2} \cosh^2(\varphi + \theta), \\ \tau_g &= \tau_{g1} \sinh^2(\varphi + \theta) + (k_{n1} - k_{n2}) \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta) + \tau_{g2} \cosh^2(\varphi + \theta), \\ k_g &= -k_{g1} \sinh(\varphi + \theta) + k_{g2} \cosh(\varphi + \theta) + \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Burada k_{n1} , k_{n2} , τ_{g1} , τ_{g2} , k_{g1} ve k_{g2} , S_1 yüzeyinin M kontak noktasındaki u -timelike parametrik ve v - spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

Kontak geometrik yerler verildiğinde, hareketli timelike yüzeyin Darboux ani dönme vektörü (açısal hızı) denklem (6.27) den

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(\tau_g^* \mathbf{T} + k_n^* \mathbf{g} - k_g^* \mathbf{n})$$

biçiminde verilmektedir. Burada

$$\sigma = \frac{ds}{dt}, \quad k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$$

dır ve σ , yuvarlanma oranını temsil eder.

Şekil 7.6 da görüldüğü üzere $\mathbf{T}$ spacelike vektörü ile $\mathbf{T}_1$ timelike birim vektörleri arasındaki $(\varphi + \theta)$ açısı bir Lorentziyen timelike açıdır. Bu durumda (5.27) göz önüne alındığında $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ Darboux üçyüzlüsü $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \sinh(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \cosh(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{g} &= \cosh(\varphi + \theta) \mathbf{T}_1 + \sinh(\varphi + \theta) \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlikler (6.27) de elde edilen $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısındaki $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız denkleminde yerlerine yazıldığında $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{n})$ çatısındaki açısal hız denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\omega = & \sigma \left(\sinh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cosh(\varphi + \theta) k_n^* \right) T_1 \\ & + \sigma \left(\cosh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \sinh(\varphi + \theta) k_n^* \right) T_2 - \sigma k_g^* n.\end{aligned}\quad (7.20)$$

Şimdi ise timelike yüzeylerde eğriliklere göre kontak denklemleri oluşturalım. (7.20) eşitliğinde

$$\left. \begin{aligned}\omega_1 &= \sigma \left(\sinh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cosh(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_2 &= \sigma \left(\cosh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \sinh(\varphi + \theta) k_n^* \right), \\ \omega_3 &= -\sigma k_g^*\end{aligned}\right\} \quad (7.21)$$

denilirse S_2 timelike yüzeyinin açılmal hızı (T_1, T_2, n) çatısına göre

$$\omega = \omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 n.$$

şeklinde ifade edilir. (7.18) ve (7.19) denklemlerini kullanarak $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kontak denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

T_1 timelike vektörü yönündeki ilk kontak denklem

$$\omega_1 = \sigma \left(\begin{aligned} & A_1 \cosh^3 \varphi + A_2 \sinh^3 \varphi + A_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ & + A_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + A_5 \cosh \varphi + A_6 \sinh \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.22)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}A_1 = -A_4 &= \bar{\tau}_{g_2} \sinh \theta + \bar{k}_{n_2} \cosh \theta, \quad A_2 = -A_3 = \bar{\tau}_{g_1} \cosh \theta - \bar{k}_{n_1} \sinh \theta, \\ A_5 &= \tau_{g_1} \sinh \theta - k_{n_2} \cosh \theta, \quad A_6 = \tau_{g_1} \cosh \theta - k_{n_2} \sinh \theta\end{aligned}$$

dır. T_2 spacelike vektörü yönündeki ikinci kontak denklem

$$\omega_2 = \sigma \left(\begin{aligned} & B_1 \cosh^3 \varphi + B_2 \sinh^3 \varphi + B_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ & + B_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + B_5 \cosh \varphi + B_6 \sinh \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.23)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}B_1 = -B_4 &= \bar{\tau}_{g_2} \cosh \theta + \bar{k}_{n_2} \sinh \theta, \quad B_2 = -B_3 = \bar{\tau}_{g_1} \sinh \theta - \bar{k}_{n_1} \cosh \theta, \\ B_5 &= -\tau_{g_2} \cosh \theta - k_{n_1} \sinh \theta, \quad B_6 = -\tau_{g_2} \sinh \theta - k_{n_1} \cosh \theta\end{aligned}$$

dır. Son olarak n spacelike vektörü yönündeki üçüncü kontak denklem

$$\omega_3 = \sigma (C_1 \cosh \varphi + C_2 \sinh \varphi) + \hat{\omega}_3 \quad (7.24)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}C_1 &= -\bar{k}_{g_2} - k_{g_1} \sinh \theta + k_{g_2} \cosh \theta, \\ C_2 &= \bar{k}_{g_1} - k_{g_1} \cosh \theta + k_{g_2} \sinh \theta, \\ \hat{\omega}_3 &= d\theta / dt\end{aligned}$$

dır. (7.24) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk ifade olan $\sigma(C_1 \cosh \varphi + C_2 \sinh \varphi)$ terim iki timelike yüzeyin geodezik eğriliklerinin farkı tarafından indirgenen dönme oranıdır. Dolayısıyla, son ifade olan $\hat{\omega}_3$, indirgenen dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farkı telafi eden dönme oranıdır (yani, telafi edici dönme oranıdır).

7.2.3. Timelike Yüzeylerde Spacelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Yuvarlanmanın Ters Kinematığı

(7.22), (7.23) ve (7.24) denklemlerindeki $A_1, \dots, A_6$, $B_1, \dots, B_6$ ve C_1, C_2 katsayılarının koordinat eğrilerinin eğriliklerine ve iki koordinat çatısı ile kesişen hiperbolik θ açısına göre ifade edildiklerini dikkate alalım. Dolayısıyla bu katsayıların ve θ açısının, verilen bir kontak noktaya ait oldukları açıktır.

ω_1 , ω_2 ve ω_3 açısal hız bileşenlerinin verilmesiyle üç bilinmeyen değer hesaplanacaktır. Bu bilinmeyenler φ yuvarlanma yönü, σ yuvarlanma oranı ve $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranıdır (Bakınız Şekil 4.3).

İlk çıktığı olan φ yuvarlanma yönü aşağıdaki gibi elde edilir:

(7.22) ve (7.23) deki eşitliklerde ortak olan σ yuvarlanma oranı yok edilip eşitleme yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \omega_1 \left(B_1 \cosh^3 \varphi + B_2 \sinh^3 \varphi + B_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \right. \\ \left. + B_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + B_5 \cosh \varphi + B_6 \sinh \varphi \right) \\ = \omega_2 \left(A_1 \cosh^3 \varphi + A_2 \sinh^3 \varphi + A_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \right. \\ \left. + A_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + A_5 \cosh \varphi + A_6 \sinh \varphi \right). \end{aligned}$$

Eşitliğin sol tarafı sağ tarafa geçirildiğinde

$$\begin{aligned} (A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1) \cosh^3 \varphi + (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1) \sinh^3 \varphi + (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1) \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ + (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1) \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1) \cosh \varphi + (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1) \sinh \varphi = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $P_1 = A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1$, $P_2 = (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1)$,

$P_3 = (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1)$, $P_4 = (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1)$, $P_5 = (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1)$ ve $P_6 = (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1)$

olmak üzere polinomu

$$\begin{aligned} P_1 \cosh^3 \varphi + P_2 \sinh^3 \varphi + P_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ + P_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + P_5 \cosh \varphi + P_6 \sinh \varphi = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikte $x = \tanh(\varphi / 2)$ alındığında altıncı dereceden

$$(P_1 + P_5)x^6 + (2P_3 + 2P_6)x^5 + (3P_1 + 4P_4 - P_5)x^4 + (8P_2 + 4P_3 - 4P_6)x^3 + (3P_1 + 4P_4 - P_5)x^2 + (2P_3 + 2P_6)x + P_1 + P_5 = 0.$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun çözümü, hareketli timelike yüzeyin yuvarlanabileceği bütün yönleri verir. Tüm çözümlerin kompleks sayı olması durumunda istenen hareketi oluşturabilmenin hiçbir yolunun olmayacağını not edelim.

İkinci çıktı olan σ yuvarlanma oranı, (7.22) veya (7.23) de φ Lorentziyen timelike açısının yerine konulmasıyla elde edilir. Bu iki çıktı, has-yuvarlanmanın dönme hareketini belirler. Ayrıca (7.21) in ilk iki eşitliğinin kareleri alınıp taraf tarafa toplandığında

$$\sigma^2 = \frac{(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2}{-(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}$$

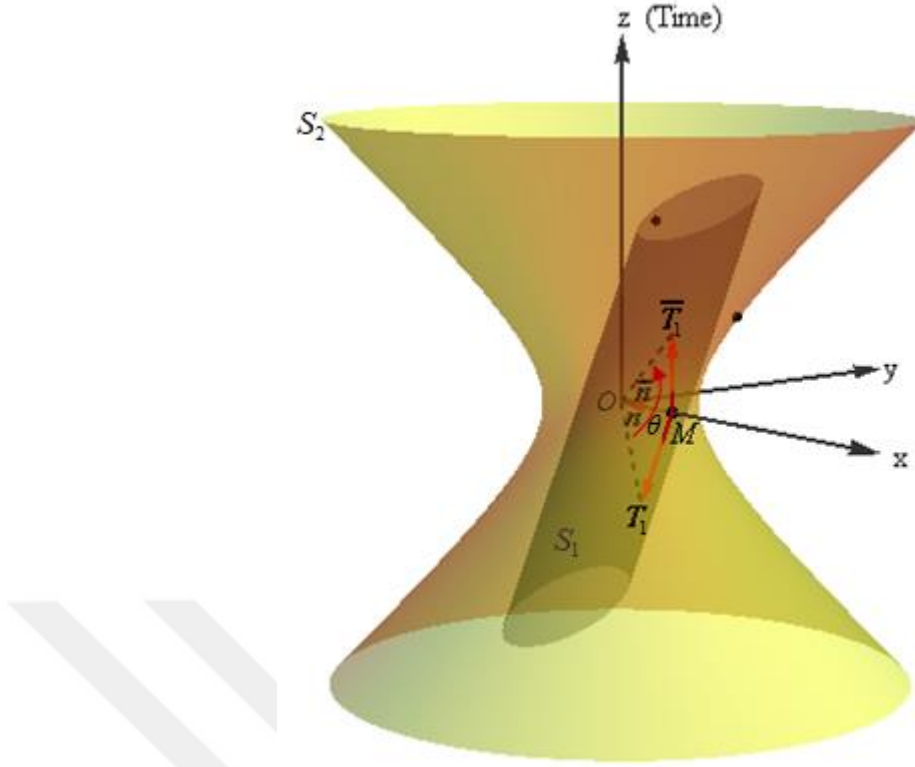
elde edilir. Fiziksel olarak σ yuvarlanma oranı pozitif olmalıdır. Eşitliğin her iki tarafın karekökleri alındığında σ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2}{-(\tau_g^*)^2 + (k_n^*)^2}}.$$

Üçüncü çıktı olan $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranı, σ ve φ değerlerinin denklem (7.24) de yerlerine koyulmasıyla elde edilir. Bu üç parametre, hareketli timelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketini belirler.

Örnek 7.4.

Bu örnekte hareketli bir timelike yüzey olarak göz önüne alınan S_1^2 Lorentziyen birim kürenin (S_2 yüzeyinin) sabit bir timelike yüzey olarak göz önüne alınan ve yarıçapı $3/4$ olan silindir (S_1 yüzeyi) üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematiği verilmektedir (Şekil 7.7). Bu iki timelike yüzeyin ters kinematiği incelenirken ilk olarak kontak denklemler bulunur. Daha sonra da nümerik kök yaklaşımları metodu uygulanır.



Şekil 7.7. Timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan S_1^2 Lorentziyen birim küresi

S_1^2 üzerindeki keyfi iki parametre eğrisi β_1 (timelike) ve β_2 (spacelike) olsun. β_1 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_1$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_2$ biçiminde verilsin. S_1^2 Lorentziyen birim küreyi

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

parametrik denklemi ile verelim.

S_1^2 üzerindeki $\beta_1 = \beta_1(\bar{u})$ eğrisini $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_1(\bar{u}) = y(\bar{u}, \bar{v}_0) = (\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

biçiminde alalım. $\beta_1(\bar{u})$ eğrisinin $\bar{s}_1$ yay uzunluğunun $\bar{u}$ ya göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_1}{d\bar{u}}, \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \right\rangle} = 1$$

dır. β_1 eğrisinin timelike birim teğet vektörü

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = \frac{d\beta_1}{d\bar{s}_1} = \frac{d\beta_1}{d\bar{u}} \Big/ \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = (\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u})$$

biçiminde bulunur. Hareketli bir yüzey olan Lorentziyen birim kürenin yüzey normali içe doğru alınsın. Bu durumda birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{y}_{\bar{u}} \times \mathbf{y}_{\bar{v}}\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos \bar{v} \sinh \bar{u} & \sin \bar{v} \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \\ -\sin \bar{v} \cosh \bar{u} & \cos \bar{v} \cosh \bar{u} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos \bar{v} \cosh \bar{u}, -\sin \bar{v} \cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u})\end{aligned}\quad (7.25)$$

olarak bulunur. Burada $\bar{\mathbf{n}}$ vektörü bir spacelike vektördür. β_1 eğrisi, $\bar{u}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (7.25) deki birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) = (-\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, -\sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u}, -\sinh \bar{u})$$

biçimindedir. Yüzeyin spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \bar{\mathbf{g}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = -\bar{\mathbf{n}}(\bar{u}, \bar{v}_0) \times \bar{\mathbf{T}}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) = -\begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos \bar{v}_0 \cosh \bar{u} & -\sin \bar{v}_0 \cosh \bar{u} & -\sinh \bar{u} \\ \cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u} & \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u} & \cosh \bar{u} \end{vmatrix} \\ &= (-\sin \bar{v}_0, \cos \bar{v}_0, 0)\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$, $\bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$ olmak üzere

β_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned}\bar{k}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{g}}_1 \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0, \\ \bar{k}_{n1} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = \left\langle d\bar{\mathbf{T}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = -1, \\ \bar{\tau}_{g1} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1} = -\left\langle d\bar{\mathbf{g}}_1/d\bar{u}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle / \frac{d\bar{s}_1}{d\bar{u}} = 0\end{aligned}\right\} \quad (7.26)$$

biçiminde bulunur.

Benzer şekilde, S_1^2 üzerindeki $\beta_2 = \beta_2(\bar{v})$ eğrisini $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak

$$\beta_2(\bar{v}) = y(\bar{u}_0, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}_0, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}_0, \sinh \bar{u}_0)$$

biçiminde alalım. $\beta_2(\bar{v})$ eğrisinin $\bar{s}_2$ yay uzunluğunun $\bar{v}$ ye göre türevi

$$\frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = \sqrt{\left\langle \frac{d\beta_2}{d\bar{v}}, \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} \right\rangle} = \cosh \bar{u}_0$$

dır. β_2 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\bar{\mathbf{T}}_2 = \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = \frac{d\beta_2}{d\bar{s}_2} = \frac{d\beta_2}{d\bar{v}} / \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = (-\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0)$$

biçiminde bulunur. β_2 eğrisi, $\bar{v}$ -parametre eğrisi olarak alındığından (7.25) deki birim yüzey normal vektörü

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) = (-\cos \bar{v} \cosh \bar{u}_0, -\sin \bar{v} \cosh \bar{u}_0, -\sinh \bar{u}_0)$$

biçimindedir. Timelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) &= \bar{\mathbf{n}}(\bar{u}_0, \bar{v}) \times \bar{\mathbf{T}}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos \bar{v} \cosh \bar{u}_0 & -\sin \bar{v} \cosh \bar{u}_0 & -\sinh \bar{u}_0 \\ -\sin \bar{v} & \cos \bar{v} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos \bar{v} \sinh \bar{u}_0, -\sin \bar{v} \sinh \bar{u}_0, -\cosh \bar{u}_0) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $\bar{k}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{k}_{n2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$, $\bar{\tau}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$ olmak üzere

β_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{g2} &= \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = -\left\langle d\bar{\mathbf{T}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{g}}_2 \right\rangle \Big/ \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = -\tanh \bar{u}_0, \\ \bar{k}_{n2} &= \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = -\left\langle d\bar{\mathbf{T}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \Big/ \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = -1, \\ \bar{\tau}_{g2} &= \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2} = \left\langle d\bar{\mathbf{g}}_2/d\bar{v}, \bar{\mathbf{n}} \right\rangle \Big/ \frac{d\bar{s}_2}{d\bar{v}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

biçiminde bulunur.

Sabit bir S_1 yüzeyi olarak 3/4 yarıçaplı timelike silindiri alalım (Şekil 7.7).

Bu yüzey üzerindeki parametre eğrileri de α_1 ve α_2 olsun. Burada α_1 eğrisi bir timelike eğri ve α_2 eğrisi de bir spacelike eğridir. α_1 eğrisinin yay uzunluğu s_1 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu s_2 biçiminde verilsin. Timelike silindirin parametrik denklemini

$$x(u, v) = \left(\frac{1+3\cos v}{4}, \frac{3\sqrt{5}\sin v}{8} - \frac{u}{2}, \frac{3\sin v}{8} - \frac{\sqrt{5}u}{2} \right)$$

olarak alalım. Bu yüzeyin, yarıçapı 3/4 olan $x_1(u, v) = \left(\frac{1+3\cos v}{4}, \frac{3\sin v}{4}, -u \right)$

timelike silindirinin x eksenini etrafında negatif yönde $\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ hiperbolik

açısıyla döndürülmesiyle elde edilebileceğini not edelim. Silindir üzerindeki

$\alpha_1 = \alpha_1(u)$ parametre eğrisi

$$\alpha_1(u) = \alpha_1(u, v_0) = \left(\frac{1+3\cos v_0}{4}, \frac{3\sqrt{5}\sin v_0}{8} - \frac{u}{2}, \frac{3\sin v_0}{8} - \frac{\sqrt{5}u}{2} \right)$$

biçimindedir. $\alpha_1(u)$ eğrisinin s_1 yay uzunluğunun u ya göre türevi

$$\frac{ds_1}{du} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_1}{du}, \frac{d\alpha_1}{du} \right\rangle} = 1$$

dır. α_1 eğrisinin timelike birim teğet vektörü

$$T_1 = T_1(u, v_0) = \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{du} \Big/ \frac{ds_1}{du} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

biçiminde bulunur. Sabit bir yüzey olan timelike silindirin birim yüzey normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{3}{4}\sin v & \frac{3\sqrt{5}}{8}\cos v & \frac{3}{8}\cos v \end{vmatrix} \\ &= \left(-\cos v, -\frac{\sqrt{5}}{2}\sin v, -\frac{1}{2}\sin v \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{n}$ vektörü bir spacelike vektördür ve silindirin içine doğru yönelmiştir. α_1 eğrisi, u -parametre eğrisi olarak alındığından (7.28) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v_0) = \left(-\cos v_0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\sin v_0, -\frac{1}{2}\sin v_0 \right)$$

biçiminde bulunur. Spacelike birim geodezik normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1(u, v_0) &= -\mathbf{n}(u, v_0) \times \mathbf{T}_1(u, v_0) = - \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos v_0 & -\frac{\sqrt{5}}{2}\sin v_0 & -\frac{1}{2}\sin v_0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\sin v_0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\cos v_0, -\frac{1}{2}\cos v_0 \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. $k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}$, $k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}$, $\tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$ olmak üzere

α_1 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g1} &= \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1} = \left\langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{g}_1 \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 0, \\ k_{n1} &= \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1} = \left\langle d\mathbf{T}_1/du, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 0, \\ \tau_{g1} &= \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1} = -\left\langle d\mathbf{g}_1/du, \mathbf{n} \right\rangle \bigg/ \frac{ds_1}{du} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

biçiminde bulunur.

Timelike silindir üzerindeki $\alpha_2 = \alpha_2(v)$ eğrisini de

$$\alpha_2(v) = \alpha_2(u_0, v) = \left(\frac{1+3\cos v}{4}, \frac{3\sqrt{5}\sin v}{8} - \frac{u_0}{2}, \frac{3\sin v}{8} - \frac{\sqrt{5}u_0}{2} \right)$$

biçiminde alalım. $\alpha_2(v)$ eğrisinin s_2 yay uzunluğunun v ye göre türevi

$$\frac{ds_2}{dv} = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha_2}{dv}, \frac{d\alpha_2}{dv} \right\rangle} = \frac{3}{4}$$

dır. α_2 eğrisinin spacelike birim teğet vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(u_0, v) &= \frac{d\alpha_2}{ds_2} = \frac{d\alpha_2}{dv} \bigg/ \frac{ds_2}{dv} = \left(\frac{-3\sin v}{4}, \frac{3\sqrt{5}\cos v}{8}, \frac{3\cos v}{8} \right) \bigg/ \frac{3}{4} \\ &= \left(-\sin v, \frac{\sqrt{5}\cos v}{2}, \frac{\cos v}{2} \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. α_2 eğrisi, v -parametre eğrisi olarak alındığından (7.28) deki birim yüzey normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u_0, v) = \left(-\cos v, -\frac{\sqrt{5}}{2}\sin v, -\frac{1}{2}\sin v \right)$$

biçimindedir. Timelike birim geodezik normal vektörü

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2(u_0, v) = \mathbf{n}(u_0, v) \times \mathbf{T}_2(u_0, v) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ -\cos v & -\frac{\sqrt{5}}{2}\sin v & -\frac{1}{2}\sin v \\ -\sin v & \frac{\sqrt{5}\cos v}{2} & \frac{\cos v}{2} \end{vmatrix} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

biçiminde bulunur. $k_{g_2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}$, $k_{n_2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}$, $\tau_{g_2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$ olmak üzere

α_2 eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} k_{g_2} &= \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2} = -\langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{g}_2 \rangle \bigg/ \frac{ds_2}{dv} = 0, \\ k_{n_2} &= \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2} = -\langle d\mathbf{T}_2/dv, \mathbf{n} \rangle \bigg/ \frac{ds_2}{dv} = -\frac{4}{3}, \\ \tau_{g_2} &= \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2} = \langle d\mathbf{g}_2/dv, \mathbf{n} \rangle \bigg/ \frac{ds_2}{dv} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

biçiminde bulunur.

(7.26) ve (7.27) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (7.18) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde hareketli Lorentziyen birim küre üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$\bar{k}_n = -1, \quad \bar{\tau}_g = 0, \quad \bar{k}_g = -\tanh \bar{u} \cosh \varphi + \frac{d\varphi}{d\bar{s}}$$

biçiminde bulunur. (7.29) ve (7.30) eşitliklerinde elde edilen eğrilikler (7.19) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde $\mathbf{T}$ spacelike vektörü yönünde sabit timelike silindir üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$k_n = -\frac{4}{3} \cosh^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g = \frac{4}{3} \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta), \quad k_g = \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}$$

biçiminde bulunur. $k_n^* = \bar{k}_n - k_n$, $\tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$, $k_g^* = \bar{k}_g - k_g$ eşitlikleriyle verilen indirgenmiş eğrilikler

$$k_n^* = -1 + \frac{4}{3} \cosh^2(\varphi + \theta), \quad \tau_g^* = -\frac{4}{3} \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta), \quad k_g^* = -\tanh \bar{u} \cosh \varphi - \frac{d\theta}{ds}$$

olarak bulunur. Hareketli S_1^2 Lorentziyen birim kürenin eğrilikleri ile sabit timelike silindirin eğrilikleri farkı sonucu elde edilen k_n^* , τ_g^* ve k_g^* indirgenmiş eğrilikleri (7.21) de yerlerine yerleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \cosh(\varphi + \theta)/3 \\ \omega_2 &= -\sigma \sinh(\varphi + \theta) \\ \omega_3 &= -\sigma \left[-\tanh \bar{u} \cosh \varphi - \frac{d\theta}{ds} \right] = \sigma (\tanh \bar{u} \cosh \varphi) + \hat{\omega}_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

biçiminde üç kontak denklem elde edilir. (7.31) deki ilk iki eşitliğe, σ yuvarlanma oranının yok edilmesiyle çapraz çarpım işlemi uygulandığında

$$P_1 \cosh(\varphi + \theta) + P_2 \sinh(\varphi + \theta) = 0 \quad (7.32)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} P_1 &= \omega_2 \\ P_2 &= 3\omega_1 \end{aligned}$$

dır.

(7.32) deki denklemi çözmek için, kapalı-form çözümü elde edilemediğinden, nümerik metot kullanılmalıdır. $x = \tanh((\varphi + \theta)/2)$ alınıp (7.32) de yerine yerleştirildiğinde

$$P_1(1 - x^2 - x^4 + x^6) + P_2(2x - 4x^3 + 2x^5) = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde aşağıdaki gibi P_1 ve P_2 katsayılarına bağlı altıncı dereceden bir polinom elde edilir.

$$(P_1)x^6 + (2P_2)x^5 + (-P_1)x^4 + (-4P_2)x^3 + (-P_1)x^2 + (2P_2)x + P_1 = 0.$$

Lorentziyen birim küre ile timelike silindirin kontak noktası M olmak üzere, silindir üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($u = -2$ ve $v = -\pi$), Lorentziyen birim küre üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($\bar{u} = 1$ ve $\bar{v} = \pi/6$), ve istenen açısal hızın $\omega_{\text{istenen}} = 2T_1 - 3T_2 - 1n$ olduklarını varsayalım. Burada $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = -3$ ve $\omega_3 = -1$ dir. Bu durumda $P_1 = \omega_2$ ve $P_2 = 3\omega_1$ olduğundan $P_1 = -3$ ve $P_2 = 6$ olarak elde edilir. Bu parametreler polinom denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde

$$x^6 - 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

biçiminde altıncı dereceden polinom elde edilir. Polinomun köklerinin nümerik yaklaşımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$x_1 = 0.26795, \quad x_2 = 3.73205, \quad x_3 = x_4 = 1, \quad x_5 = x_6 = -1.$$

Burada elde edilen bütün kökler reel köklerdir. Eğer elde edilen kök sanal kısımlardan oluşuyorsa bu kök göz ardı edilir. Reel kökler, muhtemel yuvarlanma yönlerini verir. x_1 ilk reel kökü ile x_2 ikinci reel kökünü (7.31) deki ilk denklemde yerlerine yerleştirdiğimizde σ yuvarlanma oranlarının değerleri sırasıyla

$$\sigma = \frac{3\omega_1}{\cosh(\varphi + \theta)} = \frac{6(1-x_1^2)}{1+x_1^2} \Rightarrow \sigma = 5.19615$$

$$\sigma = \frac{3\omega_1}{\cosh(\varphi + \theta)} = \frac{6(1-x_2^2)}{1+x_2^2} \Rightarrow \sigma = -5.19615$$

biçiminde elde edilir. Fiziksel olarak, yuvarlanma oranı yalnızca pozitif olabilir. Dolayısıyla, pozitif olmayan çözüm göz ardı edilir. Burada σ yuvarlanma oranını pozitif yapan değer x_1 reel kökü olduğundan bundan sonraki işlemlerde $x_1 = 0.26795$ değerine göre hesaplamalar yapılmaktadır.

T_1 ile $\bar{T}_1$ timelike vektörleri aynı time koni içinde vektörler olduğunda bu iki vektörün gerdiği düzlem timelike düzlemidir ve T_1 ile $\bar{T}_1$ vektörlerinin iç çarpımı $\cosh \theta = -\langle T_1, \bar{T}_1 \rangle$ olarak verilir. Şekil 7.7 de görüldüğü gibi T_1 ile $\bar{T}_1$ timelike vektörleri aynı time koni içinde değildir ve geldikleri düzlem timelike düzlemidir. Dolayısıyla, bu iki vektörün iç çarpımı

$$\cosh \theta = \langle T_1, \bar{T}_1 \rangle = \left\langle \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right), (\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}) \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh \bar{u}$$

biçimindedir. ($u = -2$ ve $v = -\pi$) ve ($\bar{u} = 1$ ve $\bar{v} = \pi/6$) değerleri iç çarpımda yerlerine yerleştirildiğinde

$$\cosh \theta = -\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \sinh(1) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh(1)$$

$$= 1.43142$$

bulunur. Buradan T_1 vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörü arasındaki hiperbolik açının radyan cinsinden değeri

$$\theta = 0.89837$$

biçiminde bulunur. Bu durumda φ yuvarlanma yönü

$$\varphi = 2\arctanh(x_1) - \theta = -0.34906$$

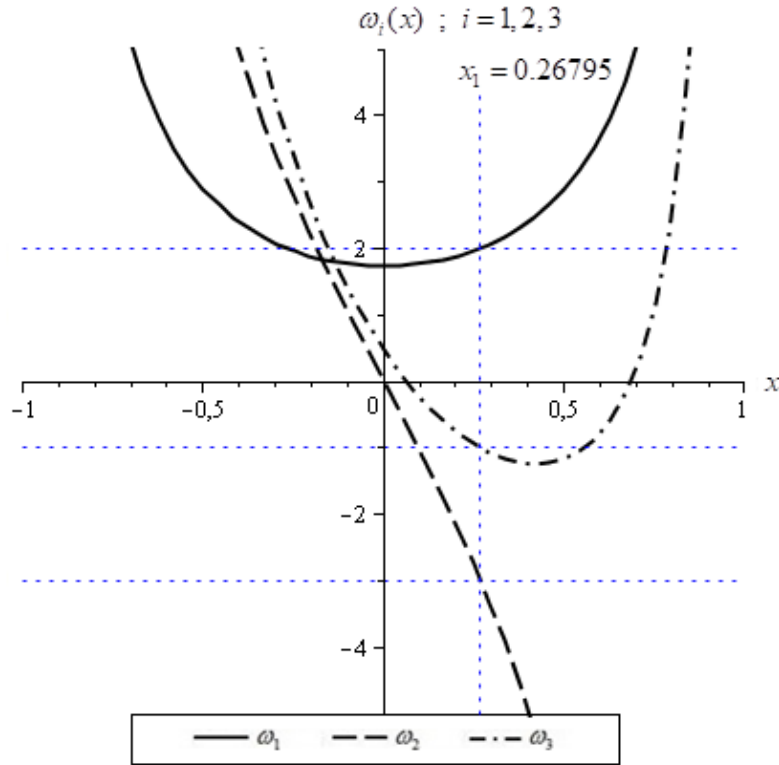
biçiminde elde edilir.

$\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme hızı, $\varphi = -0.34906$ yuvarlanma yönünün, $\sigma = 5.19615$ yuvarlanma oranının ve $\omega_3 = -1$ istenen dönme oranının (7.31) in üçüncü denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_3 &= \omega_3 - \sigma (\tanh \bar{u} \cosh \varphi) = -1 - 5.19615 (\tanh(1) \cosh(-0.34906)) \\ &= -5.20090.\end{aligned}$$

Burada $\hat{\omega}_3 = -5.20090$ telafi edici dönme oranı, $\sigma (\tanh \bar{u} \cosh \varphi) = 4.20090$ indirgenmiş dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farka eşittir.

Böylelikle Lorentziyen birim kürenin, timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematiği tamamlanmış olur. Açısal hız bileşenlerinin grafiği Şekil 7.8 de verilmiştir.



Şekil 7.8. $x = \tanh(\varphi + \theta)/2$ için $3/4$ yarıçaplı timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin T spacelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri

7.2.4. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Darboux Çatı Metodu

S, IR_1^3 de yönlendirilmiş bir timelike yüzey ve α eğrisi de S üzerinde yönlendirilmiş bir timelike eğri olsun. α eğrisi S yüzeyi üzerinde olduğundan, α eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir sağ-el ortonormal (T, g, n) çatısı mevcuttur. Burada T , α eğrisinin timelike birim teğet vektörü; n , S yüzeyinin spacelike birim normal vektörü ve g de S yüzeyinin spacelike birim geodezik normal vektörüdür ve $g = -n \times T$ dir. Çatıların hareket denklemleri

$$dm = dsT, \quad d \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

biçimindedir. Burada m koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (3 causal karaktere sahip) konum vektörü; s , α eğrisinin yay uzunluğu olup ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır. Bu diferansiyel 1-formlardan, (T, g, n) Darboux çatısının spacelike T birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_g = \frac{\omega_{12}}{ds}, \quad k_n = \frac{\omega_{13}}{ds}, \quad \tau_g = \frac{\omega_{23}}{ds}$$

biçiminde verilir.

Örnek 7.5. (Bir Lorentziyen Küresel Eğrinin 1-Formları)

Bu örnekte bir α Lorentziyen küresel eğrisine bağlı hareketli bir çatının 1-formları verilmektedir. S_1^2 Lorentziyen birim kürenin parametrik denklemi

$$S_1^2 : x(u, v) = (\cos v \cosh u, \sin v \cosh u, \sinh u)$$

ile verilebilir. α timelike eğrisi üzerinde keyfi bir nokta M olsun. α eğrisi t zamanının bir fonksiyonu olarak parametrik denklemi

$$m(t) = (\cos v_0 \cosh u(t), \sin v_0 \cosh u(t), \sinh u(t)), \quad v = v_0 = \text{sbt.}$$

olan bir Lorentziyen birim çembere karşılık gelsin (Şekil 7.9). Buradan

$$dm(t) = (\cos v_0 \sinh u(t), \sin v_0 \sinh u(t), \cosh u(t)) du(t) = ds(t)T(t)$$

elde edilir. Böylece ds 1-formu ve T timelike birim teğet vektörü

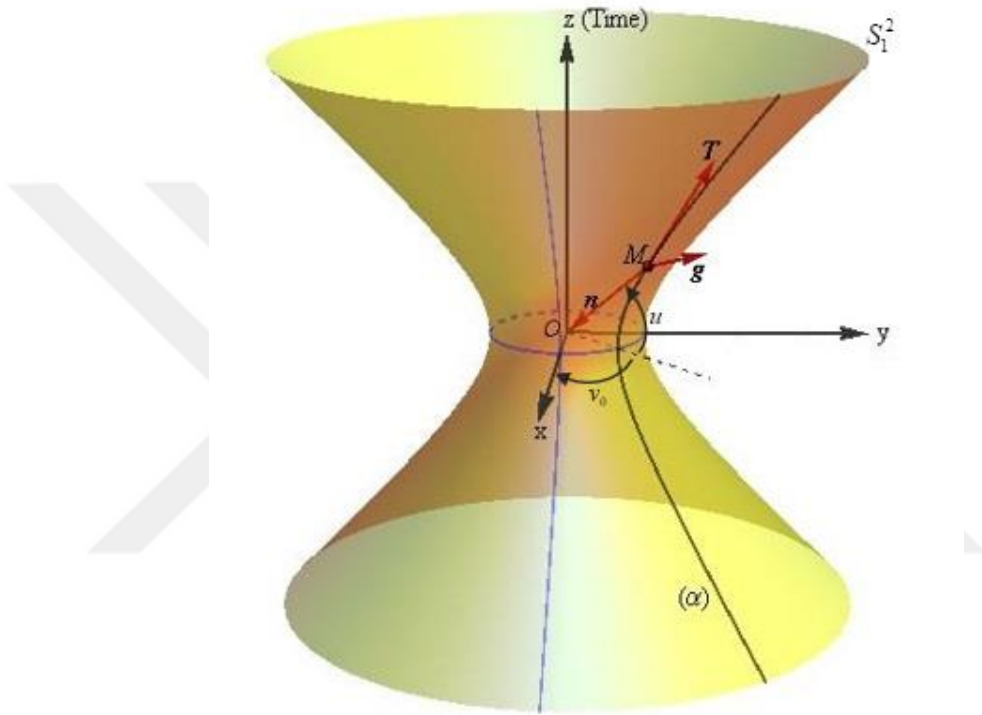
$$ds(t) = du(t), \quad T(t) = (\cos v_0 \sinh u(t), \sin v_0 \sinh u(t), \cosh u(t))$$

olarak bulunur. Yüzeyin $\mathbf{n}$ spacelike birim normal vektörünü M noktasında içe doğru (yani, orijine doğru) yönelen bir vektör olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{n}(t) = -\mathbf{m}(t) = (-\cos v_0 \cosh u(t), -\sin v_0 \cosh u(t), -\sinh u(t))$$

$$\mathbf{g}(t) = -\mathbf{n}(t) \times \mathbf{T}(t) = (-\sin v_0, \cos v_0, 0)$$

bulunur. Böylece $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri M noktasına bağlı bir hareketli çatı olan Darboux çatısını oluştururlar.



Şekil 7.9. S_1^2 üzerinde yatan bir α timelike eğrisi boyunca Darboux çatısı

Buradan ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} diferansiyel 1-formları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \omega_{12}(t) &= \langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{g}(t) \rangle \\ &= \langle (\cos v_0 \cosh u(t), \sin v_0 \cosh u(t), \sinh u(t)) du(t), (-\sin v_0, \cos v_0, 0) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{13}(t) &= \langle d\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t) \rangle \\ &= \left\langle (\cos v_0 \cosh u(t), \sin v_0 \cosh u(t), \sinh u(t)) du(t), \right. \\ &\quad \left. (-\cos v_0 \cosh u(t), -\sin v_0 \cosh u(t), -\sinh u(t)) \right\rangle \\ &= -du(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{23}(t) &= -\langle d\mathbf{g}(t), \mathbf{n}(t) \rangle \\
&= -\langle (0, 0, 0), (-\cos v_0 \cosh u(t), -\sin v_0 \cosh u(t), -\sinh u(t)) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(7.33) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
d \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & \omega_{13}(t) \\ \omega_{12}(t) & 0 & -\omega_{23}(t) \\ \omega_{13}(t) & \omega_{23}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -du(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -du(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $(\mathbf{T}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ çatısına bağlı geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma sırasıyla

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{\omega_{12}}{ds} = \frac{0}{du(t)} = 0, \\
k_n &= \frac{\omega_{13}}{ds} = \frac{-du(t)}{du(t)} = -1, \\
\tau_g &= \frac{\omega_{23}}{ds} = \frac{0}{du(t)} = 0
\end{aligned}$$

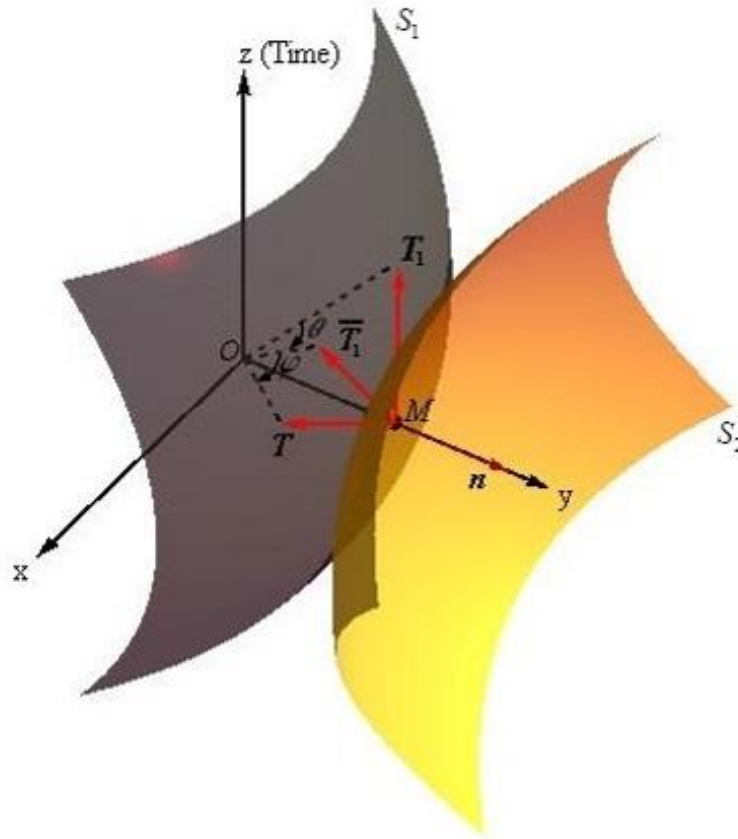
biçiminde elde edilir. Tensör analizinde $\mathbf{T}$, $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{n}$ vektörleri $(1,0)$ tensörler olduklarını ve ds , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} 1-formları $(0,1)$ tensörler olduklarını not edelim. Ayrıca bunlar belirli bir koordinat sistemi seçiminden bağımsızdırlar.

7.2.5. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Denklemler

Bu bölümde timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve eğriliklere göre kontak denklemler verilecektir.

İlk olarak timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hızı belirleyelim. Parametre eğrileri dik olan sabit bir $x(u, v)$ timelike yüzeyini S_1 ve hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ timelike yüzeyini de S_2 ile gösterelim. S_1 yüzeyinin u -koordinat eğrisi (α_1 eğrisi) boyunca timelike birim teğet vektörü $\mathbf{T}_1$, v -koordinat eğrisi (α_2 eğrisi) boyunca spacelike birim teğet vektörü $\mathbf{T}_2$; S_2 yüzeyinin $\bar{u}$ -koordinat eğrisi (β_1 eğrisi) boyunca timelike birim teğet vektörü $\bar{\mathbf{T}}_1$, $\bar{v}$ -koordinat eğrisi (β_2 eğrisi)

boyunca spacelike birim teğet vektörü $\bar{T}_2$ ve T_1 ile $\bar{T}_1$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı θ olsun. Hareketli S_2 timelike yüzeyinin T timelike birim teğet vektörü yönünde yuvarlandığını belirtelim. T vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörü arasındaki hiperbolik açı φ olsun (Şekil 7.10). T , T_1 ve $\bar{T}_1$ vektörleri aynı timelike teğet düzlemde yatarlar. Bundan dolayı T vektörü ile T_1 vektörü arasındaki hiperbolik açı da $(\varphi + \theta)$ olur. Burada sabit S_1 yüzeyinin n birim yüzey normal vektörünün spacelike, g_1 birim vektörünün spacelike ve g_2 birim vektörünün timelike olduklarını ve hareketli S_2 yüzeyinin de $\bar{n}$ birim yüzey normal vektörünün spacelike, $\bar{g}_1$ birim vektörünün spacelike ve $\bar{g}_2$ birim vektörünün timelike olduklarını belirtelim.



Şekil 7.10. S_1 timelike yüzeyi üzerinde T timelike vektörü yönünde kaymaksızın yuvarlanan S_2 timelike yüzeyi

Timelike yüzeylerde kontak geometrik yerlere göre açısal hız ve kontak denklemleri vermeden önce hareketli ve sabit timelike yüzeyler üzerindeki parametre

eğrilerinin Darboux çatılarının hareket denklemlerini (türev formüllerini) oluşturalım.

Hareketli $y(\bar{u}, \bar{v})$ yüzeyi üzerindeki β_1 timelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_1, \bar{g}_1, \bar{n})$ ve β_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı $(\bar{T}_2, \bar{g}_2, \bar{n})$ olsun. Bu durumda β_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{m}_1 = d\bar{s}_1 \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0), \quad d \begin{bmatrix} \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{g}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{n}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 & -\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{g}_1(\bar{u}, \bar{v}_0) \\ \bar{n}(\bar{u}, \bar{v}_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{g}_1 = -\bar{n} \times \bar{T}_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{T}_1, \bar{g}_1, \bar{n})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{T}_1$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{k}_{n1} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}, \quad \bar{\tau}_{g1} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}, \bar{v}_0)}{d\bar{s}_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde β_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\bar{m}_2 = d\bar{s}_2 \bar{T}_2(\bar{u}_0, \bar{v}), \quad d \begin{bmatrix} \bar{T}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{g}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{n}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & -\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v}) & \bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{g}_2(\bar{u}_0, \bar{v}) \\ \bar{n}(\bar{u}_0, \bar{v}) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $\bar{g}_2 = \bar{n} \times \bar{T}_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, $(\bar{T}_2, \bar{g}_2, \bar{n})$ Darboux çatısının spacelike $\bar{T}_2$ birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$\bar{k}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{12}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{k}_{n2} = \frac{\bar{\omega}_{13}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}, \quad \bar{\tau}_{g2} = \frac{\bar{\omega}_{23}(\bar{u}_0, \bar{v})}{d\bar{s}_2}$$

biçimindedir. Burada $\bar{m}_1$ ve $\bar{m}_2$, sırasıyla, β_1 ve β_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; $\bar{s}_1$, β_1 eğrisinin yay uzunluğu ve $\bar{s}_2$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu olup $d\bar{s}_1$, $d\bar{s}_2$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$ ve $\bar{\omega}_{23}$ koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Sabit $x(u, v)$ yüzeyi üzerindeki α_1 timelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı (T_1, g_1, n) ve α_2 spacelike eğrisi üzerindeki her bir M noktasına bağlı Darboux çatısı (T_2, g_2, n) olsun. Bu durumda α_1 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_1 = ds_1 T_1(u, v_0), \quad d \begin{bmatrix} T_1(u, v_0) \\ g_1(u, v_0) \\ n(u, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u, v_0) & \omega_{13}(u, v_0) \\ \omega_{12}(u, v_0) & 0 & -\omega_{23}(u, v_0) \\ \omega_{13}(u, v_0) & \omega_{23}(u, v_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(u, v_0) \\ g_1(u, v_0) \\ n(u, v_0) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $g_1 = -n \times T_1$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, (T_1, g_1, n) Darboux çatısının spacelike T_1 birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g1} = \frac{\omega_{12}(u, v_0)}{ds_1}, \quad k_{n1} = \frac{\omega_{13}(u, v_0)}{ds_1}, \quad \tau_{g1} = \frac{\omega_{23}(u, v_0)}{ds_1}$$

biçiminde verilir. Benzer şekilde α_2 parametre eğrisinin Darboux çatısının hareket denklemleri

$$d\mathbf{m}_2 = ds_2 T_2(u_0, v), \quad d \begin{bmatrix} T_2(u_0, v) \\ g_2(u_0, v) \\ n(u_0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(u_0, v) & -\omega_{13}(u_0, v) \\ \omega_{12}(u_0, v) & 0 & \omega_{23}(u_0, v) \\ \omega_{13}(u_0, v) & \omega_{23}(u_0, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(u_0, v) \\ g_2(u_0, v) \\ n(u_0, v) \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve $g_2 = n \times T_2$ dir. Bu diferansiyel 1-formlardan, (T_2, g_2, n) Darboux çatısının spacelike T_2 birim teğet vektörü yönündeki geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma

$$k_{g2} = \frac{\omega_{12}(u_0, v)}{ds_2}, \quad k_{n2} = \frac{\omega_{13}(u_0, v)}{ds_2}, \quad \tau_{g2} = \frac{\omega_{23}(u_0, v)}{ds_2}$$

Burada m_1 ve m_2 , sırasıyla, α_1 ve α_2 eğrileri boyunca koordinat seçimine bağlı bir M noktasının (üç causal karaktere sahip) konum vektörü; s_1 , α_1 eğrisinin yay uzunluğu ve s_2 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu olup ds_1 , ds_2 , ω_{12} , ω_{13} ve ω_{23} koordinatlardan bağımsız 1-formlardır.

Şimdi ise timelike yüzeylerde kontak denklemleri verelim. T timelike vektörü yönünde S_2 timelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin $\bar{k}_n$ normal eğriliği, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulması ve $\bar{k}_g$ geodezik eğriliği (5.46) dan aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_n &= \bar{k}_{n1} \cosh^2 \varphi + (\bar{\tau}_{g1} + \bar{\tau}_{g2}) \cosh \varphi \sinh \varphi - \bar{k}_{n2} \sinh^2 \varphi, \\ \bar{\tau}_g &= \bar{\tau}_{g1} \cosh^2 \varphi + (\bar{k}_{n1} - \bar{k}_{n2}) \cosh \varphi \sinh \varphi + \bar{\tau}_{g2} \sinh^2 \varphi, \\ \bar{k}_g &= \bar{k}_{g1} \cosh \varphi - \bar{k}_{g2} \sinh \varphi - \frac{d\varphi}{d\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Burada $\bar{s}$, S_2 timelike yüzeyi üzerinde bulunan T timelike vektörünün yönünde kontak geometrik yerin yay uzunluğudur. $\bar{k}_{n1}$, $\bar{k}_{n2}$, $\bar{\tau}_{g1}$, $\bar{\tau}_{g2}$, $\bar{k}_{g1}$ ve $\bar{k}_{g2}$, S_2 yüzeyinin M kontak noktasındaki $\bar{u}$ - timelike parametrik ve $\bar{v}$ - spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

s , S_1 timelike yüzeyi üzerindeki kontak geometrik yerin yay uzunluğu olsun. Kontak yuvarlanmanın kısıtlarından dolayı, s ve $\bar{s}$ yay uzunlukları birbirine eşittir ve ayrıca T vektörü S_1 yüzeyi üzerinde etki eden kontak geometrik yerin teğet vektörüdür. T timelike vektörü yönünde S_1 timelike yüzeyi üzerindeki geometrik yerin k_n normal eğriliği, τ_g geodezik burulması ve k_g geodezik eğriliği (5.46) dan aşağıdaki gibi verilir:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= k_{n1} \cosh^2(\varphi + \theta) + (\tau_{g1} + \tau_{g2}) \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta) - k_{n2} \sinh^2(\varphi + \theta), \\ \tau_g &= \tau_{g1} \cosh^2(\varphi + \theta) + (k_{n1} - k_{n2}) \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta) + \tau_{g2} \sinh^2(\varphi + \theta), \\ k_g &= k_{g1} \cosh(\varphi + \theta) - k_{g2} \sinh(\varphi + \theta) - \frac{d(\varphi + \theta)}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Burada k_{n1} , k_{n2} , τ_{g1} , τ_{g2} , k_{g1} ve k_{g2} , S_1 yüzeyinin M kontak noktasındaki u - timelike parametrik ve v - spacelike parametrik eğrilerinin normal eğrilikleri, geodezik burulmaları ve geodezik eğrilikleridir.

Kontak geometrik yerler verildiğinde, hareketli timelike yüzeyin Darboux ani dönme vektörü (açısal hızı) denklem (6.41) den

$$\omega = \sigma(-\tau_g^* T - k_n^* g + k_g^* n)$$

biçiminde verilmektedir. Burada

$$\sigma = \frac{ds}{dt}, \quad k_g^* = \bar{k}_g - k_g, \quad k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \quad \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g$$

dır ve σ , yuvarlanma oranını temsil eder.

Şekil 7.10 da görüldüğü üzere T timelike vektörü ile T_1 timelike birim vektörleri arasındaki $(\varphi + \theta)$ açısı bir hiperbolik açıdır. Bu durumda (5.42) göz önüne alındığında (T, g, n) Darboux üçyüzlüsü T_1 , T_2 ve n vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} T &= \cosh(\varphi + \theta)T_1 + \sinh(\varphi + \theta)T_2 \\ g &= -\sinh(\varphi + \theta)T_1 - \cosh(\varphi + \theta)T_2 \\ n &= n \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlikler (6.41) de elde edilen (T, g, n) çatısındaki ω açısal hız denkleminde yerlerine yazıldığında (T_1, T_2, n) çatısındaki açısal hız denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma \left(-\cosh(\varphi + \theta)\tau_g^* + \sinh(\varphi + \theta)k_n^* \right) T_1 \\ &+ \sigma \left(-\sinh(\varphi + \theta)\tau_g^* + \cosh(\varphi + \theta)k_n^* \right) T_2 + \sigma k_g^* n. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Şimdi ise timelike yüzeylerde eğriliklere göre kontak denklemleri oluşturalım. (7.36) eşitliğinde

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \left(-\cosh(\varphi + \theta)\tau_g^* + \sinh(\varphi + \theta)k_n^* \right), \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sinh(\varphi + \theta)\tau_g^* + \cosh(\varphi + \theta)k_n^* \right), \\ \omega_3 &= \sigma k_g^* \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

denilirse S_2 timelike yüzeyinin açısal hızı (T_1, T_2, n) çatısına göre

$$\omega = \omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 n.$$

şeklinde ifade edilir. (7.34) ve (7.35) denklemlerini kullanarak $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kontak denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

T_1 timelike vektörü yönündeki ilk kontak denklem

$$\omega_1 = \sigma \left(\begin{aligned} &A_1 \cosh^3 \varphi + A_2 \sinh^3 \varphi + A_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ &+ A_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + A_5 \cosh \varphi + A_6 \sinh \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.38)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_4 = -\bar{\tau}_{g1} \cosh \theta + \bar{k}_{n1} \sinh \theta, \quad A_2 = -A_3 = -\bar{\tau}_{g2} \sinh \theta - \bar{k}_{n2} \cosh \theta, \\ A_5 &= \tau_{g1} \cosh \theta - k_{n2} \sinh \theta, \quad A_6 = \tau_{g1} \sinh \theta - k_{n2} \cosh \theta \end{aligned}$$

dır. T_2 spacelike vektörü yönündeki ikinci kontak denklem

$$\omega_2 = \sigma \left(\begin{aligned} &B_1 \cosh^3 \varphi + B_2 \sinh^3 \varphi + B_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ &+ B_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + B_5 \cosh \varphi + B_6 \sinh \varphi \end{aligned} \right) \quad (7.39)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} B_1 &= -B_4 = -\bar{\tau}_{g1} \sinh \theta + \bar{k}_{n1} \cosh \theta, \quad B_2 = -B_3 = -\bar{\tau}_{g2} \cosh \theta - \bar{k}_{n2} \sinh \theta, \\ B_5 &= -\tau_{g2} \sinh \theta - k_{n1} \cosh \theta, \quad B_6 = -\tau_{g2} \cosh \theta - k_{n1} \sinh \theta \end{aligned}$$

dır. Son olarak $\mathbf{n}$ spacelike vektörü yönündeki üçüncü kontak denklem

$$\omega_3 = \sigma(C_1 \cosh \varphi + C_2 \sinh \varphi) + \hat{\omega}_3 \quad (7.40)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} C_1 &= \bar{k}_{g1} - k_{g1} \cosh \theta + k_{g2} \sinh \theta \\ C_2 &= -\bar{k}_{g2} - k_{g1} \sinh \theta + k_{g2} \cosh \theta \\ \hat{\omega}_3 &= d\theta / dt \end{aligned}$$

dır. (7.40) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk ifade olan $\sigma(C_1 \cosh \varphi + C_2 \sinh \varphi)$ terim iki timelike yüzeyin geodezik eğriliklerinin farkı tarafından indirgenen dönme oranıdır. Dolayısıyla, son ifade olan $\hat{\omega}_3$, indirgenen dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farkı telafi eden dönme oranıdır (yani, telafi edici dönme oranıdır).

7.2.6. Timelike Yüzeylerde Timelike Yörünge Eğrisi Boyunca Kontak Yuvarlanmanın Ters Kinematığı

(7.38), (7.39) ve (7.40) denklemlerindeki $A_1, \dots, A_6$, $B_1, \dots, B_6$ ve C_1, C_2 katsayılarının koordinat eğrilerinin eğriliklerine ve iki koordinat çatısı ile kesişen hiperbolik θ açısına göre ifade edildiklerini dikkate alalım. Dolayısıyla bu katsayıların ve θ açısının, verilen bir kontak noktaya ait oldukları açıktır.

ω_1 , ω_2 ve ω_3 açısal hız bileşenlerinin verilmesiyle üç bilinmeyen değer hesaplanacaktır. Bu bilinmeyenler φ yuvarlanma yönü, σ yuvarlanma oranı ve $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranıdır (Bakınız Şekil 4.3).

İlk çıktığı olan φ yuvarlanma yönü aşağıdaki gibi elde edilir:

(7.38) ve (7.39) daki eşitliklerde ortak olan σ yuvarlanma oranı yok edilip eşitleme yapıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \omega_1 \left(B_1 \cosh^3 \varphi + B_2 \sinh^3 \varphi + B_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \right. \\ & \quad \left. + B_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + B_5 \cosh \varphi + B_6 \sinh \varphi \right) \\ & = \omega_2 \left(A_1 \cosh^3 \varphi + A_2 \sinh^3 \varphi + A_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \right. \\ & \quad \left. + A_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + A_5 \cosh \varphi + A_6 \sinh \varphi \right). \end{aligned}$$

Eşitliğin sol tarafı sağ tarafa geçirildiğinde

$$\begin{aligned} & (A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1) \cosh^3 \varphi + (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1) \sinh^3 \varphi + (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1) \cosh^2 \varphi \sinh \varphi \\ & + (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1) \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1) \cosh \varphi + (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1) \sinh \varphi = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $P_1 = A_1 \omega_2 - B_1 \omega_1$, $P_2 = (A_2 \omega_2 - B_2 \omega_1)$,

$P_3 = (A_3 \omega_2 - B_3 \omega_1)$, $P_4 = (A_4 \omega_2 - B_4 \omega_1)$, $P_5 = (A_5 \omega_2 - B_5 \omega_1)$ ve $P_6 = (A_6 \omega_2 - B_6 \omega_1)$

olmak üzere polinomu

$$P_1 \cosh^3 \varphi + P_2 \sinh^3 \varphi + P_3 \cosh^2 \varphi \sinh \varphi + P_4 \cosh \varphi \sinh^2 \varphi + P_5 \cosh \varphi + P_6 \sinh \varphi = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikte $x = \tanh(\varphi / 2)$ alındığında altıncı dereceden

$$\begin{aligned} & (P_1 + P_5) x^6 + (2P_3 + 2P_6) x^5 + (3P_1 + 4P_4 - P_5) x^4 \\ & + (8P_2 + 4P_3 - 4P_6) x^3 + (3P_1 + 4P_4 - P_5) x^2 + (2P_3 + 2P_6) x + P_1 + P_5 = 0. \end{aligned}$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun çözümü, hareketli timelike yüzeyin yuvarlanabileceği bütün yönleri verir. Tüm çözümlerin kompleks sayı olması durumunda istenen hareketi oluşturabilmenin hiçbir yolunun olmayacağını not edelim.

İkinci çıktı olan σ yuvarlanma oranı, (7.38) veya (7.39) da φ hiperbolik açısının yerine konulmasıyla elde edilir. Bu iki çıktı, has-yuvarlanmanın dönme hareketini belirler. Ayrıca (7.37) nin ilk iki eşitliğinin kareleri alınıp taraf tarafa toplandığında

$$\sigma^2 = \frac{(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 - (k_n^*)^2}$$

elde edilir. Fiziksel olarak σ yuvarlanma oranı pozitif olmalıdır. Eşitliğin her iki tarafın karekökleri alındığında σ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2}{(\tau_g^*)^2 - (k_n^*)^2}}.$$

Üçüncü çıktı olan $\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme oranı, σ ve φ değerlerinin denklem (7.40) da yerlerine koyulmasıyla elde edilir. Bu üç parametre, hareketli timelike yüzeyin dönme-yuvarlanma hareketini belirler.

Örnek 7.6.

Örnek 7.4 de hareketli bir timelike yüzey olarak göz önüne alınan S_1^2 Lorentziyen birim kürenin (S_2 yüzeyinin) sabit bir timelike yüzey olarak göz önüne alınan ve yarıçapı $3/4$ olan silindir (S_1 yüzeyi) üzerinde T spacelike vektörü yönünde kaymaksızın kontak yuvarlanmasının ters kinematiği verilmektedir (Şekil 7.7). Bu örnekte, örnek 7.4 de verilen S_1 ve S_2 yüzeyleri, polinom denklemi (dolayısıyla σ yuvarlanma oranı) ve her iki yüzey üzerindeki M kontak noktasının koordinatları aynı olmak üzere S_2 yüzeyinin S_1 yüzeyi üzerinde T timelike vektörü yönünde kaymaksızın kontak yuvarlanmasının ters kinematiği verilmektedir. Bu iki timelike yüzeyin ters kinematiği incelenirken ilk olarak kontak denklemlerin bulunur. Daha sonra da nümerik kök yaklaşımları metodu uygulanır.

S_1^2 üzerindeki keyfi iki parametre eğrisi β_1 (timelike) ve β_2 (spacelike) olsun. β_1 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_1$, β_2 eğrisinin yay uzunluğu $\bar{s}_2$ biçiminde verilsin. S_1^2 Lorentziyen birim küre

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v} \cosh \bar{u}, \sin \bar{v} \cosh \bar{u}, \sinh \bar{u})$$

parametrik denklemi ile verilmişti. Bu timelike yüzey üzerindeki $\beta_1 = \beta_1(\bar{u})$ ve $\beta_2 = \beta_2(\bar{v})$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları sırasıyla,

$$\begin{aligned}\bar{k}_{n1} &= -1, \quad \bar{\tau}_{g1} = 0, \quad \bar{k}_{g1} = 0 \\ \bar{k}_{n2} &= -1, \quad \bar{\tau}_{g2} = 0, \quad \bar{k}_{g2} = -\tanh \bar{u}_0\end{aligned}$$

biçiminde elde edilmişti. Elde edilen bu eğrilikler (7.34) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde T timelike vektörü yönünde hareketli Lorentziyen birim küre üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$\bar{k}_n = -1, \quad \bar{\tau}_g = 0, \quad \bar{k}_g = \tanh \bar{u} \sinh \varphi - \frac{d\varphi}{d\bar{s}}$$

biçiminde bulunur.

Sabit bir timelike yüzey olan $3/4$ yarıçaplı silindir üzerindeki parametre eğrileri α_1 (timelike) ve α_2 (spacelike) olsun. α_1 eğrisinin yay uzunluğu s_1 , α_2 eğrisinin yay uzunluğu s_2 biçiminde verilsin. Lorentziyen silindir

$$x(u, v) = \left(\frac{1+3\cos v}{4}, \frac{3\sqrt{5}\sin v}{8} - \frac{u}{2}, \frac{3\sin v}{8} - \frac{\sqrt{5}u}{2} \right)$$

biçiminde parametrelendirilmişti. Bu timelike yüzey üzerindeki $\alpha_1 = \alpha_1(u)$ ve $\alpha_2 = \alpha_2(v)$ eğrilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları sırasıyla,

$$k_{n1} = 0, \tau_{g1} = 0, k_{g1} = 0$$

$$k_{n2} = -4/3, \tau_{g2} = 0, k_{g2} = 0$$

biçiminde elde edilmişti. Elde edilen bu eğrilikler (7.35) denklemlerinde yerlerine bir bir yerleştirildiklerinde T timelike vektörü yönünde sabit timelike silindir üzerindeki geometrik yerin eğrilikleri

$$k_n = \frac{4}{3} \sinh^2(\varphi + \theta), \tau_g = \frac{4}{3} \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta), k_g = -\frac{d(\varphi + \theta)}{ds}$$

biçiminde bulunur. $k_n^* = \bar{k}_n - k_n, \tau_g^* = \bar{\tau}_g - \tau_g, k_g^* = \bar{k}_g - k_g$ eşitlikleriyle verilen indirgenmiş eğrilikler

$$k_n^* = -1 - \frac{4}{3} \sinh^2(\varphi + \theta), \tau_g^* = -\frac{4}{3} \cosh(\varphi + \theta) \sinh(\varphi + \theta), k_g^* = \tanh \bar{u} \sinh \varphi + \frac{d\theta}{ds}$$

olarak bulunur. Hareketli S_1^2 Lorentziyen birim kürenin eğrilikleri ile sabit timelike silindirin eğrilikleri farkı sonucu elde edilen k_g^*, k_n^* ve τ_g^* indirgenmiş eğrilikleri (7.37) de yerlerine yerleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sigma \left(-\cosh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \sinh(\varphi + \theta) k_n^* \right) = \sigma \sinh(\varphi + \theta) / 3 \\ \omega_2 &= \sigma \left(-\sinh(\varphi + \theta) \tau_g^* + \cosh(\varphi + \theta) k_n^* \right) = -\sigma \cosh(\varphi + \theta) \\ \omega_3 &= \sigma k_g^* = \sigma \left(\tanh \bar{u} \sinh \varphi \right) + \hat{\omega}_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

biçiminde üç kontak denklem elde edilir. (7.41) deki ilk iki eşitliğe, σ yuvarlanma oranının yok edilmesiyle çapraz çarpım işlemi uygulandığında

$$P_1 \cosh(\varphi + \theta) + P_2 \sinh(\varphi + \theta) = 0 \quad (7.42)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Burada

$$P_1 = -3\omega_1$$

$$P_2 = -\omega_2$$

dir.

Örnek 7.4 de $x = \tanh(\varphi + \theta) / 2$ olmak üzere, $P_1 = -3$ ve $P_2 = 6$ değerleri için altıncı dereceden bir polinom elde edilmiş ve ardından $\sigma = 5.19615$ yuvarlanma oranı bulunmuştu. Bu örnekte de $x = \tanh(\varphi + \theta) / 2$ olması durumunda aynı polinomu elde etmek için $\omega_1 = 1$ ve $\omega_2 = -6$ alınmalıdır. Bu sayede, σ yuvarlanma oranı 5.19615 değerine sahip olur.

(7.42) deki denklemi çözmek için, kapalı-form çözümü elde edilemediğinden, nümerik metot kullanılmalıdır. $x = \tanh(\varphi + \theta) / 2$ alınıp (7.42) de yerine yerleştirildiğinde

$$P_1(1 - x^2 - x^4 + x^6) + P_2(2x - 4x^3 + 2x^5) = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde aşağıdaki gibi P_1 ve P_2 katsayılarına bağlı altıncı dereceden bir polinom elde edilir.

$$(P_1)x^6 + (2P_2)x^5 + (-P_1)x^4 + (-4P_2)x^3 + (-P_1)x^2 + (2P_2)x + P_1 = 0.$$

Lorentziyen birim küre ile timelike silindirin kontak noktası M olmak üzere, silindir üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($u = -2$ ve $v = -\pi$), Lorentziyen birim küre üzerindeki M kontak noktasının koordinatlarının ($\bar{u} = 1$ ve $\bar{v} = \pi / 6$), ve istenen açısal hızın $\omega_{\text{istenen}} = 1T_1 - 6T_2 + 1n$ olduklarını varsayalım. Burada $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -6$ ve $\omega_3 = 1$ dir. Bu da $P_1 = -3\omega_1$ ve $P_2 = -\omega_2$ olduğundan $P_1 = -3$ ve $P_2 = 6$ olması demektir. Bu parametreler polinom denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde

$$x^6 - 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

biçiminde altıncı dereceden polinom elde edilir. Polinomun köklerinin nümerik yaklaşımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$x_1 = 0.26795, \quad x_2 = 3.73205, \quad x_3 = x_4 = 1, \quad x_5 = x_6 = -1.$$

Burada elde edilen bütün kökler reel köklerdir. Eğer elde edilen kök sanal kısımlardan oluşuyorsa bu kök göz ardı edilir. Reel kökler, muhtemel yuvarlanma yönlerini verir. x_1 ilk reel kökü ile x_2 ikinci reel kökünü (7.41) deki ilk denklemde yerlerine yerleştirdiğimizde σ yuvarlanma oranlarının değerleri sırasıyla

$$\sigma = \frac{3\omega_1}{\sinh(\varphi + \theta)} = \frac{3(1-x_1^2)}{2x_1} \Rightarrow \sigma = 5.19615$$

$$\sigma = \frac{3\omega_1}{\sinh(\varphi + \theta)} = \frac{3(1-x_2^2)}{2x_2} \Rightarrow \sigma = -5.19615$$

biçiminde elde edilir. Fiziksel olarak, yuvarlanma oranı yalnızca pozitif olabilir. Dolayısıyla, negatif çözüm göz ardı edilir. Burada σ yuvarlanma oranını pozitif yapan değer x_1 reel kökü olduğundan bundan sonraki işlemlerde $x_1 = 0.26795$ değerine göre hesaplamalar yapılmaktadır.

T_1 ile $\bar{T}_1$ timelike vektörleri aynı time koni içinde vektörler olduğunda bu iki vektörün gerdiği düzlem timelike düzlemidir ve T_1 ile $\bar{T}_1$ vektörlerinin iç çarpımı $\cosh \theta = -\langle T_1, \bar{T}_1 \rangle$ olarak verilir. Şekil 7.7 de görüldüğü gibi T_1 ile $\bar{T}_1$ timelike vektörleri aynı time koni içinde değildir ve geldikleri düzlem timelike düzlemidir. Dolayısıyla, bu iki vektörün iç çarpımı

$$\cosh \theta = \langle T_1, \bar{T}_1 \rangle = \left\langle \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right), (\cos \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u}, \cosh \bar{u}) \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \bar{v}_0 \sinh \bar{u} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh \bar{u}$$

biçimindedir. ($u = -2$ ve $v = -\pi$) ve ($\bar{u} = 1$ ve $\bar{v} = \pi/6$) değerleri iç çarpımda yerlerine yerleştirildiğinde

$$\cosh \theta = -\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \sinh(1) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cosh(1)$$

$$= 1.43142$$

bulunur. Buradan T_1 vektörü ile $\bar{T}_1$ vektörü arasındaki hiperbolik açının radyan cinsinden değeri

$$\theta = 0.89837$$

biçiminde bulunur. Bu durumda φ yuvarlanma yönü

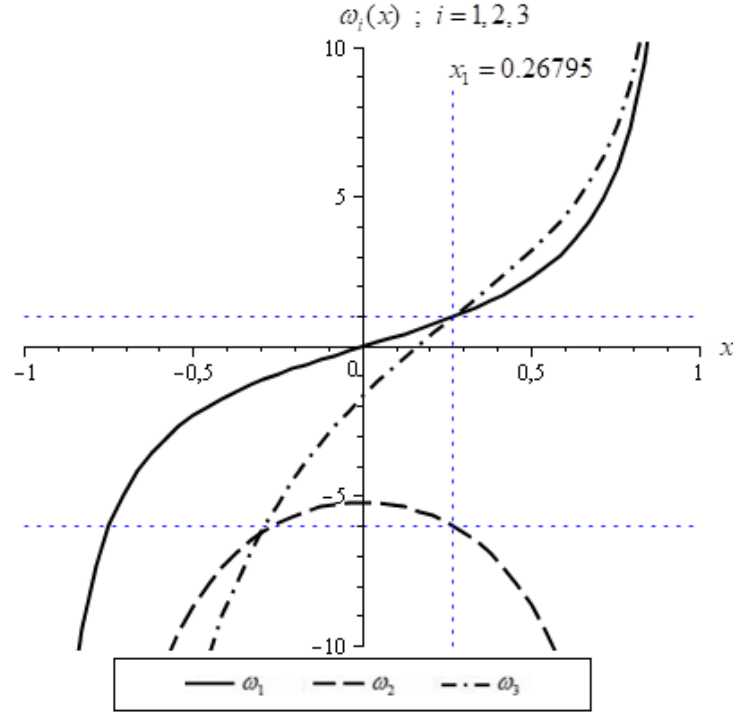
$$\varphi = 2\arctanh(x_1) - \theta = -0.34906$$

biçiminde elde edilir.

$\hat{\omega}_3$ telafi edici dönme hızı, $\varphi = -0.34906$ yuvarlanma yönünün, $\sigma = 5.19615$ yuvarlanma oranının ve $\omega_3 = 1$ istenen dönme oranının (7.41) in üçüncü denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_3 &= \omega_3 - \sigma (\tanh \bar{u} \sinh \varphi) = 1 - 5.19615 (\tanh(1) \sinh(-0.34906)) \\ &= 2.40958.\end{aligned}$$

Burada $\hat{\omega}_3 = 2.40958$ telafi edici dönme oranı, $\sigma (\tanh \bar{u} \sinh \varphi) = -1.40958$ indirgenmiş dönme oranı ile ω_3 istenen dönme oranı arasındaki farka eşittir. Böylelikle Lorentziyen birim kürenin, timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasının ters kinematığı tamamlanmış olur. Açısal hız bileşenlerinin grafiği Şekil 7.11 de verilmiştir.



Şekil 7.11. $x = \tanh(\varphi + \theta)/2$ için $3/4$ yarıçaplı timelike silindir üzerinde kaymaksızın yuvarlanan Lorentziyen birim kürenin T timelike vektörü yönündeki açısal hız bileşenleri

KAYNAKLAR

- [1] Agrachev, A. A., Sachkov, Y. L. An Intrinsic Approach to the Control of Rolling Bodies. In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision&Control, 7-10 Dec., 1999, Phoenix, Arizona USA (431–435).
- [2] Beem J. K. Ehrlich P. E. Global Lorentzian Geometry. Marcel Dekker, New York, 1981.
- [3] Biran, L. Diferensiyel Geometri, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1970.
- [4] Birman, G. S., Nomizu, K. Trigonometry in Lorentzian Geometry. Amer. Math. Monthly. 1984, 91(9), 543-549.
- [5] Bloch, A. M., Baillieul, J., Crouch, P., and Marsden, J. Nonholonomic Mechanics and Control, Springer, New York, 2007.
- [6] Borrás, J., Di Gregorio, R. Polynomial solution to the position analysis of two assur kinematic chains with four loops and the same topology. ASME Journal of Mechanisms and Robotics. 2009, 1(2), 021003.
- [7] Bottema, O., Roth, B. Theoretical Kinematics. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1979, pp. 556.
- [8] Cai, C., Roth, B. On the Spatial Motion of Rigid Bodies with Point Contact. In Proceedings of 1987 International Conference on Robotics and Automation, March, 1987, Raleigh, North Carolina USA (686–695).
- [9] Cai, C., Roth, B. On the planar motion of rigid bodies with point contact. Mechanism and Machine Theory. 1986, 21(6), 453–466.
- [10] Cartan, H. Differential Forms. Hermann, Paris, 1970.
- [11] Chelouah, A., Chitour, Y. On the motion planning of rolling surfaces. Forum Mathematicum. 2003, 15(5), 727–758.
- [12] Cui, L., Dai, J. S. A Darboux-frame-based formulation of spin-rolling motion of rigid objects with point contact. IEEE Transactions on Robotics. 2010, 26(2), 383–388.
- [13] Cui, L. Differential Geometry Based Kinematics of Sliding-Rolling Contact and Its Use for Multifingered Hands. King's College London, University of London, London UK, 2010, pp. 229 (Doctoral dissertation).
- [14] Cui, L., Dai, J. S. A polynomial formulation of inverse kinematics of rolling contact. ASME Journal of Mechanisms and Robotics. 2015, 7(4), 041003_041001–041009.

- [15] DoCarmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [16] Ekmekci, N., Tunçer Y. Gauss and Codazzi-Mainardi formulae. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. Haziran 2007, Sayı: 13 ISSN:1302-3055, 25–30.
- [17] Ekmekci, N., Tunçer Y. On differential geometry of the Lorentz surfaces. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. Haziran 2007, Sayı: 13 ISSN:1302-3055, 20–24.
- [18] Graustein, W. C. Differential Geometry, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1966, pp. 230.
- [19] Hacisalihoğlu, H. H. Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No:2, 1983.
- [20] Karger, A., Novak, J. Space Kinematics and Lie Groups. STNL Publishers of Technical Lit., Prague, Czechoslovakia, 1978.
- [21] Kerr, J., Roth, B. Analysis of multifingered hands. The International Journal of Robotics Research. 1986, 4(4), 3–17.
- [22] Li, Z. X., Canny, J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint. IEEE Trans. Robot. Autom. 1990, 6(1), 62–72.
- [23] Li, Z., Hsu, P., Sastry, S. Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand. Int. J. Rob. Res. 1989, 8(4), 33–50.
- [24] López, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space, arXiv:0810.3351v1 [math.DG], 2008.
- [25] Marigo, A., Bicchi, A. Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and application. IEEE Trans. Autom. Control. 2000, 45(9), 1586–1599.
- [26] McCarthy, J. M. Kinematics, polynomials, and computers—a brief history, ASME J. Mech. Rob. 2011, 3(1), p. 010201.
- [27] Montana, D. J. The kinematics of contact and grasp, Int. J. Rob. Res. 1988, 7(3), 17–32.
- [28] Müller, H. R. Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1963.
- [29] Neimark, J. I., Fufaev, N. A. Dynamics of Nonholonomic Systems, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1972.
- [30] Nelson, E. W., Best, C. L., McLean, W. G. Schaum’s Outline of Theory and Problems of Engineering Mechanics, Statics and Dynamics (5th Ed.), McGraw-Hill, New York, 1997.

- [31] O'Neill, B. Elementary Differential Geometry, Revised Second Edition, Elsevier, London, 2006.
- [32] O'Neill, B. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, London, 1983.
- [33] Ostrowski, J. P., Desai, J. P., and Kumar, V. Optimal gait selection for nonholonomic locomotion systems, Int. J. Rob. Res. 2000, 19(3), 225–237.
- [34] Ratcliffe, J. G. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer, New York, 2006.
- [35] Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 2006.
- [36] Sarkar, N., Kumar, V., Yun, X. Velocity and acceleration analysis of contact between three-dimensional rigid bodies, ASME J. Appl. Mech. 1996, 63(4), 974–984.
- [37] Struik, D. J. Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, 1988.
- [38] Turgut, A. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995, 96 s. (Doktora Tezi).
- [39] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A. Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet AYDINALP

Doğum Yeri ve Yılı : Uşak, 1982

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : aydinalp@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Sekine Evren Anadolu Lisesi, 2001

Lisans : Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2008

Yüksek Lisans : Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012