



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İLERİ İTME VE GERİ ÇEKME ÇAPRAZLANMIŞ POLİMODÜLLER

MUTLUHAN YAKAR

Mart 2018

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İLERİ İTME VE GERİ ÇEKME ÇAPRAZLANMIŞ POLİMODÜLLER

MUTLUHAN YAKAR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nurettin IRMAK

Mart 2018

Mutluhan YAKAR tarafından **Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK** danışmanlığında hazırlanan “**İleri İtme ve Geri Çekme Çaprazlanmış Polimodüller**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Doç. Dr. Halis BİLGİL



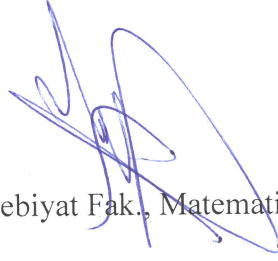
(Aksaray Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

Üye : Doç. Dr. Adnan TUNA



(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK



(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

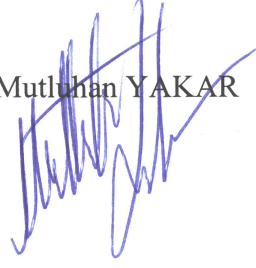
...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mutluhan YAKAR



ÖZET

İLERİ İTME VE GERİ ÇEKME ÇAPRAZLANMIŞ POLİMODÜLLER

YAKAR, Mutluhan

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman

: Dr. Öğr. Üyesi Nurettin IRMAK

Mart 2018, 56 sayfa

Bu yüksek lisans tezinde, Murat ALP ve Bijan DAVVAZ tarafından tanımlanan ileri itme ve geri çekme çaprazlanmış polimodüller hakkında bilgi verilmesi amaçlanmıştır. İlk olarak çaprazlanmış modül kavramı incelenmiştir. Daha sonra poli-gruplar ve polimodüller ile ilgili genel bilgiler, özellikleri ve örnekleri ele alınmıştır. Ayrıca konumuza temel teşkil eden çaprazlanmış polimodüller, Cat^1 -Poli-Gruplar incelenmiş ve Cat^1 -Poli-Grupların geri çekmelerine değinilmiştir. Tüm bu yaklaşımlar çerçevesinde geri çekme çaprazlanmış polimodüller ve ileri itme çaprazlanmış polimodüller incelenerek örneklenmeye çalışılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Çaprazlanmış Polimodül, İleri İtme Çaprazlanmış Polimodül, Geri çekme Çaprazlanmış Polimodül.

SUMMARY

PULLBACK AND PUSHOUT CROSSED POLYMODULES

YAKAR, Mutluhan

Nigde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor

: Asist. Prof. Dr. Nurettin IRMAK

March 2018, 56 pages

The aim of this study, give information about pushout and pullback crossed polymodules due to ALP and DAVVAZ. Firstly the term of crossed modUle was investigated. The short theory of Polygroup and polymodule was given. The other issue is crossed polymodules Cat^1 -Polygroups and pushback Cat^1 -polygroups which linet he main borders of pullback and pushout crossed polymodules According to the above information pullback and pushout crossed polymodules and their examples were given.

Keywords: Crossed pulymodule, Pullback Crossed polymodule, Pushout Crossed polymodule

ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans tezinde, Murat ALP ve Bijan DAVVAZ tarafından tanımlanan ileri itme ve geri çekme çaprazlanmış polimodüller hakkında bilgi verilmesi amaçlanmıştır.

İlk olarak çaprazlanmış modül kavramı incelenmiştir. Daha sonra poli-gruplar ve polimodüller ile ilgili genel bilgiler, özellikleri ve örnekleri ele alınmıştır. Ayrıca konumuza temel teşkil eden çaprazlanmış polimodüller, Cat¹-Poli-Gruplar incelenmiş ve Cat¹-Poli-Grupların geri çekmelerine değinilmiştir. Tüm bu yaklaşımlar çerçevesinde geri çekme çaprazlanmış polimodüller ve ileri itme çaprazlanmış polimodüller incelenerek örneklenmeye çalışılmıştır.

Bu tezde verilen tüm bilgiler Alp ve Davvaz (Alp, 1998; Alp ve Davvaz, 2014; Alp ve Davvaz, 2015; Davvaz, 2007b; Davvaz, 2013; Davvaz ve Alp, 2014) çalışmalarına dayanmaktadır. Yapılan bu çalışmaların Türkçe olarak literatüre kazandırılması ve farklı grup yapılarının çaprazlanmış modül teorisine uygulanmasının temel yollarını göstermek ve uygulanabilir olduğunu ispatlamak amaçlanmıştır.

Bu konunun kapılarını bana açarak, bu çalışmayı hazırlamama sebep olan, yüksek lisans dönemim öncesi ve sonrasında yardımlarını hiçbir koşulda esirgemeyen değerli hocalarım Sayın **Prof. Dr. Murat ALP**, **Dr. Öğr. Üyesi Nurettin IRMAK'a** ve her koşulda arkamda hissettiğim maddi manevi destekleri için sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
BÖLÜM I GİRİŞ	1
1.1 Genel Bilgiler.....	1
BÖLÜM II ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	4
BÖLÜM III POLİ-GRUPLAR VE POLİMODÜLLER.....	6
3.1 Poli-Gruplar	6
3.2 Poli-Grup Etkisi	16
3.3 Çaprazlanmış Polimodüller.....	19
3.4 Çaprazlanmış Polimodüllerden Türetilen Çaprazlanmış Modüller	26
3.5 Cat ¹ -Poli-Gruplar	30
3.6 Geri Çekme Cat ¹ -Poli-Gruplar.....	35
BÖLÜM IV GERİ ÇEKME VE İLERİ İTME ÇAPRAZLANMIŞ POLİMODÜLLER.	41
4.1 Geri Çekme Çaprazlanmış Polimodüller	41
4.2 İleri İtme Çaprazlanmış Polimodüller	45
BÖLÜM V SONUÇLAR.....	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	55

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1 Genel Bilgiler

Çaprazlanmış modül kavramı J. H. C. Whitehead (1949) tarafından kombinatoriyel homotopi teori üzerine yaptığı çalışmasında ortaya çıkmış ve ilk kez Whitehead (1949) tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modüller ve uygulamaları, kategori teori, homotopi teori, grupların homoloji ve kohomolojileri, cebir, K-teori gibi birçok alanda etkinlik kazanmış ve önemli bir yere sahip oldukları görülmüştür. Çaprazlanmış modüllerin, aktör çaprazlanmış modül, geri çekme çaprazlanmış modül, ve indirgenmiş çaprazlanmış modüller gibi farklı örnekleri mevcuttur (Davvaz ve Alp, 2014).

Geri çekme çaprazlanmış modüller Brown ve Wensley (1995; 1996) tarafından tanımlanmış ve geri çekme çaprazlanmış modüllerle ilgili birçok örnek ve uygulama ortaya koyulmuştur (Alp ve Davvaz, 2014).

İleri itme çaprazlanmış modüller Korkes ve Porter (1986) tarafından tanımlanmış ve bu çalışmada çaprazlanmış modüllerin güzel bir örneği olarak ortaya koyulmuştur. Yine Norrie (1990) çalışmasında Aktör çaprazlanmış modül kavramını açıklayarak, çaprazlanmış modüllerin bir örneğini oluşturmuştur (Alp ve Davvaz, 2015).

Loday'in (1982) Cat^1 -grupların, çaprazlanmış modül kategorisine denkliğini fark etmesi ile çaprazlanmış modül kategorisi yeni bir yön kazanmıştır. Bilgisayar yazılımlarının ve matematiksel araçların da geliştirilmesi de çaprazlanmış modül kategorisine, Cat^1 -grup kategorisine ve aktör çaprazlanmış modül kategorisine farklı bakış açıları kazandırmıştır. Tüm bu kategoriler GAP (Group Algorithm Programming) (Alp ve Davvaz, 2012) XMod (Alp ve Wensley, 2007) paketiyle de hesaplanmıştır (Alp ve Davvaz, 2015).

Poli-grup teorisi, grup teorisinin bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıkmıştır. Gruplarda iki elemanın işlemlenmesinin sonucu yine grubun bir elemanı iken poli-gruplarda iki elemanın işlemlenmesinin sonucu bir küme oluşturur. Poli-grupların uygulamaları geometri, latisler, kombinatorikler ve renk skalaları gibi matematiğin birçok alanında hayat bulmuştur. Bu yüzden poli-gruplar geniş bir kaynakçaya sahiptir. Bu konudaki en önemli yayınlardan birisi B. Davvaz (2013) tarafından yayınlanan "Polygroup Theory

and Related Systems” isimli kitaptır ki konu ile ilgili birçok bilgi, temel tanımları, örnekleri ve teoremin temel sonuçlarını içeren bu kitapta bulunabilir. Bu noktadan sonraki en önemli kavramlardan birisi poli-grup etkisidir ki Alp ve Davvaz (2015) çalışmalarında poli-grup etkisi ve poli-grup kavramlarını kullanarak çaprazlanmış modülleri elde etmişlerdir.

Poli-gruplar yardımıyla çaprazlanmış modüller elde edilirken ortaya çıkan başka bir önemli nokta da çaprazlanmış polimodüllerdir. Bu çalışmada çaprazlanmış polimodül kavramının özelliklerini ve örneklerini detaylı olarak inceleyeceğiz ve temel bağıntıları kullanarak çaprazlanmış polimodül yapısı ile çaprazlanmış modülleri elde edecek ve bunlar arasındaki çaprazlanmış modül morfizmini vereceğiz (Alp ve Davvaz, 2015).

Çaprazlanmış modül ile ilgili diğer bir önemli uygulama da ileri itme ve geri çekme çaprazlanmış modüllerin tanımlanması olmuştur. Geri çekme çaprazlanmış modül Brown ve Wensley (1995; 1996) tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmalarında geri çekme çaprazlanmış modül ile ilgili bir çok örnekleme ve uygulamayı da vermişlerdir. Başka bir Cat^1 -grup uygulaması da Alp tarafından çaprazlanmış modül kategorisiyle, Cat^1 -grup kategorisinin denkliği kullanılarak yapılan geri çekme Cat^1 -grup kavramının oluşturulmasıdır. (Alp, 1998) Bu kategorilerle ilgili GAP (2012) uygulamaları yine Alp ve Wensley (2007) tarafından gösterilmiştir. Çaprazlanmış polimodül, çaprazlanmış polimodül uygulamaları, derivasyonları ve aktör çaprazlanmış modül Alp ve Davvaz (2014) tarafından tanımlanmıştır.

Cat^1 -poli-grup ve geri çekme Cat^1 -poli-grupları tanımlayan Loday ve Alp’in yöntemleri ile paralel düşünceyle hareket ederek çaprazlanmış polimodülleri ve Cat^1 -polimodüller arasındaki bağlantılar Alp ve Davvaz tarafından (2014) ortaya koyulmuştur. Geri çekme Cat^1 -poli-grup kavramını ve bunun detaylı örneklerinin incelenmesi ve geri çekme Cat^1 -poli-grup yardımıyla Cat^1 -grup yapısının elde edilmesi yine aynı çalışmada yer almıştır (Davvaz ve Alp, 2014).

Bu tezde verilen tüm bilgiler Alp ve Davvaz (Alp ve Davvaz; Alp, 1998; Alp ve Davvaz, 2014; Alp ve Davvaz, 2015; Davvaz, 2007b; Davvaz, 2013; Davvaz ve Alp, 2014) çalışmalarına dayanmaktadır. Bu tezde, yapılan bu çalışmaların Türkçe olarak literatüre kazandırılması ve farklı grup yapılarının çaprazlanmış modül teorisine

uygulanmasının temel yollarını göstermek ve uygulanabilir olduğunu ispatlamak amaçlanmıştır.

Bu tez toplam 4 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde yukarıda anlatılan çalışmalara paralel olarak çaprazlanmış modül kavramının tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde konumuzun temelini oluşturacak olan poli-gruplar ve polimodüllerle ilgili detaylı bilgiler verilmiş ve örnekleri incelenmiştir. Özellikle poli-grup, alt poli-grup, normal alt poli-grup, güçlü homomorfizm, kapalı çekirdek homomorfizmi, poli-grup etkisi kavramlarının üzerinde durulmuştur. Daha sonra çaprazlanmış polimodül tanımı yapılarak ön çaprazlanmış polimodül tanımı verilmiştir. Son olarak Cat^1 -Poli-grupların özellikleri incelenerek Cat^1 -grup, Cat^1 -Poli-grup, çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış polimodül sınıflarının denkliği gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise geri çekme ve ileri itme Cat^1 -polimodüllerin özellikler incelenmiştir.

BÖLÜM II

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Brown ve Mosa'nın cebirlerin yerine algebroidleri getirmesi ve algebroidlerin çaprazlanmış modüllerini tanımlamaları gibi çaprazlanmış modüllerin birçok uygulaması mevcuttur. Algebroidlerin aktör çaprazlanmış modülleri Alp tarafından, geri çekme çaprazlanmış modüller Brown ve Wensley tarafından, algebroidlerin geri çekme çaprazlanmış modülleri Alp tarafından tanımlanmıştır. Yarı sonlu grupların ileri itme çaprazlanmış modülleri Korkes ve Porter tarafından ortaya koyulmuştur. İleri itme Cat^1 -yarı sonlu gruplar, ileri itme Cat^1 -Lie cebirleri ve ileri itme Cat^1 -değişmeli cebirler Alp ve Gürmen tarafından gösterilmiştir. Çaprazlanmış modül kategorisi ve Cat^1 -grup kategorisi hakkında daha fazla bilgi edinmek için Alp ve Gürmen, (2003), Alp, (2005), Alp, (2008a), Alp, (2008b), Brown ve Mosa, (1988), Brown ve Wensley, (1995), Korkes ve Porter, (1986), Whitehead, (1949) incelenebilir (Alp ve Davvaz, 2015). Bir çaprazlanmış modül inşa etmek için bir etki ve sıfır homomorfizmini tanımlamalıyız. Bu bölümde grup etkisi ve çaprazlanmış modül tanımlarını hatırlayacağız. Bu hatırlatmaların hepsi poli-gruplar ekseninde ele alınacaktır.

Tanım 2.1 ((Sol) Grup Etkisi G Bir grup ve $\Omega \neq \emptyset$ olsun. Bir **(sol) grup etkisi** $\tau: G \times \Omega \rightarrow \Omega$ olacak şekilde tanımlı ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir sıralı ikili işlemdir.

i) $\forall g, h \in G, \omega \in \Omega$ için

$$\tau(gh, \omega) = \tau(g, \tau(h, \omega)) \quad (2.1)$$

ii) $\forall \omega \in \Omega$ için

$$\tau(e, \omega) = \omega \quad (2.2)$$

(Alp ve Davvaz, 2015)

Tanım 2.2 (Çaprazlanmış Modül) M ve G grupları ile tanımlanan $\partial: M \rightarrow G$ homomorfizmi ve M üzerinde tanımlı $\tau: G \times M \rightarrow M$ (sol) etkisinin aşağıdaki şartları sağlaması durumunda $X = (M, G, \partial, \tau)$ bir **çaprazlanmış modül** olarak isimlendirilir (Brown, 1989) .

i) $\forall m \in M, g \in G$ için

$$\partial({}^g m) = g\partial(m)g^{-1} \quad (2.3)$$

ii) $\forall m, m^{-1} \in M$ için

$$\partial(m)m' = mm'm^{-1} \quad (2.4)$$

Çaprazlanmış modüllerin standart örnekleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

1) G üzerindeki M normal alt grubunun, M bir G -modül olduğundan $M \rightarrow G$ sıfır homomorfizmi, $M \rightarrow G$ merkeziyle birlikte $M \hookrightarrow G$ inclusionudur.

2) Eğer $F \rightarrow E \rightarrow B$ belirtilen uzayda bir fibrasyon dizisi ise, temel grupların indirgenmiş homomorfizmi $\pi_1 F \rightarrow \pi_2 E$ doğal olarak bir çaprazlanmış modüldür.

BÖLÜM III

POLİ-GRUPLAR VE POLİMODÜLLER

3.1 Poli-Gruplar

Poli-grup teorisi, grup teorisinin doğal bir genellemesidir. Gruplarda iki elemanın işleme sokulmasının sonucu yine aynı grubun bir elemanı olurken, poli-gruplarda iki elemanın işleme sokulmasıyla bir küme oluşur. Poli-gruplar geometri, latis teori, kombinatorik ve renk skalaları gibi birçok alanda kabul görmüşlerdir ve geniş bir kaynakçaya sahiptir. Bu konu hakkında detaylı bilgi için Davvaz (2013) tarafından yayımlanan (Polygroup Theory and Related Systems) isimli kaynağa bakılabilir. Bahsedilen kitapta poli-grup teorisinin, örneklerle desteklenen temel tanımları ve basit sonuçları yer almaktadır. Comer (1984) tarafından çalışılan Hipergrup uygulamaları, poli-gruplar gibi özel alt sınıflarda ortaya çıkar. Ayrıca Davvaz (2012; 2013), Comer ve Davvaz (2007) poli-grupların cebirsel teorisini geliştirdiler. Bir poli-grup tamamen düzenli, kendi üzerine terslenebilen bir multigruptur (Davvaz ve Alp, 2014).

Kabul edelim ki $H \neq \emptyset$ ve $\mathcal{P}^*(H)$, H ' in boştan farklı tüm alt kümelerinin kümesi olsun. $i \in (1, 2, \dots, n)$, $(n \in \mathbb{N}^+)$ için $f_i : H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ olacak şekilde tanımlanan f_i fonksiyonlarına **(ikili) hiper işlemler** denir. $\forall x, y \in H$ için $f_i(x, y)$ fonksiyonlarına, x ve y 'nin **(ikili) hiper çarpımı** denir. Genellikle $n=1$ ve $n=2$ için $(H, f_1, \dots, f_n)$ cebirsel sistemi **(ikili) hiper yapı** olarak isimlendirilir. Mevcut şartlar altında f_i fonksiyonları üzerinde tanımlı yarı hipergrupları, hipergrupları, hiper halkaları ve hiper cisimleri elde ederiz (Alp ve Davvaz, 2015).

Bazen, $R \neq H$ olmak üzere $h : R \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ şeklindeki fonksiyonlar düşünüldüğünde **dış hiperoperatörler** elde edilir (Alp ve Davvaz, 2015).

Bir iç hiperoperatör ve bir dış hiperoperatörle birlikte verilen hipermodül, hipergruplara bir örnek olarak verilebilir. Hipergrupların uygulamaları poli-gruplar gibi özel alt sınıflarda ortaya çıkar. (Comer v.d., 1984; Davvaz, 2007a; Davvaz, 2012; Freni, 1991)

Tanım 3.1.1 Bir poli-grup birden çok değerli bir sistemdir (Davvaz ve Alp, 2014).

Tanım 3.1.2 $e \in P$ için $()^{-1}: P \rightarrow P$, $\circ: P \times P \rightarrow \mathcal{P}^*(P)$ olmak üzere $\mathcal{M} = \langle P, \circ, e, ()^{-1} \rangle$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall x, y, z \in P$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır (Davvaz ve Alp, 2014) .

$$(1) \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (3.1)$$

$$(2) \quad e \circ x = x \circ e = x \quad (3.2)$$

$$(3) \quad x \in y \circ z \text{ önermesi ile } y \in x \circ z^{-1} \text{ ve } z \in y^{-1} \circ x \text{ önermeleri denktir.}$$

Burada $\mathcal{P}^*(P)$, P 'nin boş olmayan alt kümelerinin kümesi ve $x \in P$ ve $\emptyset \neq A, B \subset P$ olduğunda

$$\begin{aligned} A \circ B &= \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b \\ x \circ B &= \{x\} \circ B \\ A \circ x &= A \circ \{x\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

olur. Buradan poli-grupların temel durumları için aşağıdaki aksiyomun varlığı söylenebilir.

$$\textbf{Tanım 3.1.3} \quad e \in x \circ x^{-1} \cap x^{-1} \circ x, \quad e^{-1} = e, \quad (x^{-1})^{-1} = x. \quad (3.4)$$

Bu bölümün geri kalan kısmında, takip eden bölümlerdeki bilgilerin temelini oluşturacak olan poli-gruplarla ilgili unsurları inceleyeceğiz. Daha detaylı bilgi için Davvaz (2013) incelenebilir. Poli-gruplarla ilgili çift koset cebiri, Prenowitz cebiri, poli-grupların eşlenik sınıfları, karakter poli-grup, poli-grupların genişlemesi ve kromatik poli-gruplar gibi birçok önemli örnek Davvaz' ın kitabında bulunabilir (Davvaz ve Alp, 2014).

Yarı doğal hipergruplar P. Corsini tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Corsini, P. Bonansanga ve C. Massouros'la birlikte yarı doğal hiper gruplarla ilgili çalışmalarında doğal hiper gruplarla ilgili tüm durumları ortaya koymuşlardır. S. Comer ise hipergrupların bu sınıfını poli-grup ismiyle tanımlayıp başlı başına incelemiştir. Poli-

grupların önemini, Boolean ve silindirik cebirlerle ilişkisini grafikler ve bağıntılarla analiz ederek vurgulamıştır (Davvaz, 2007b).

Poli-gruplarla yapay zekâ arasındaki ilişki G. Ligozat tarafından ortaya konulup analiz edilmiştir. Bu sonuçların bazıları (Corsini ve Leoreanu, 2003) da bulunabilir. Çift koset hiper gruplar, kısmen yarı doğal hipergruplardır ve K. Drbohlav, D. K. Harrison ve S. Comer tarafından incelenmiştir. Doğal hipergruplara benzer olarak, yarı doğal hipergrupların alt gruplarının da yarıdoğal olması gerekli değildir (Davvaz, 2007b)

Teorem 3.1.1 H , n -elemanlı bir yarı doğal hipergrup (poli-grup), S 'de H 'nin poli-grup olmayan bir alt hiper grubu olsun. Eğer

$$n \text{ tek sayı ise, } k = \frac{(n-1)}{2}; \quad (3.5)$$

$$n \text{ çift sayı ise } k = \frac{(n-2)}{2} \quad (3.6)$$

şartını sağlayan k sayısı için, S en fazla k -elemanlıdır (Davvaz, 2007b).

İspat: $n = 2k + 1$ olsun. $i > 1$ olmak üzere S 'nin $k + i$ elemanlı olduğunu gösterelim. $H \setminus S$ 'nin büyüklüğü

$$|H \setminus S| = 2k + 1 - k - i \leq k \quad (3.7)$$

olmalıdır. Diğer taraftan $\forall x \in S$ için e birim eleman olduğundan $e \in H \setminus S$ ve $x^{-1} \in H \setminus S$ elde edilir. Buradan

$$|H \setminus S| \geq k + i + 1 \geq k + 2 \quad (3.8)$$

bağıntısıyla bir çelişki elde edilir.

$n = 2k + 2$ olsun. $i > 1$ olmak üzere S 'nin $k + i$ elemanlı olduğunu gösterelim. Yukarıdakine benzer olarak $|H \setminus S| \leq k + 2$ elde edilip yine bir çelişki ortaya çıkar ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi poli-grupların bazı örneklerini inceleyelim.

Örnek 3.1.1 Klasik poli-grup yapıları:

(1) Çift koset cebiri (Dresher ve Ore, 1938)

H, G grubunun alt grubu olsun. $G//H = \langle \{HgH \mid g \in G\}, *, H, {}^{-1} \rangle$ ile tanımlı sistem için

$$\begin{aligned} (HgH)^{-1} &= Hg^{-1}H & \text{ve} \\ (Hg_1H) * (Hg_2H) &= \{Hg_1hg_2H \mid h \in H\} & \text{'dir.} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bu durumda çift koset cebiri $G//H$ bir poli-gruptur. Dresher ve Ore (1938) tarafından tanımlanmıştır. Ben-Yaacov'da poli-gruplarla ilgilenmiştir (Ben-Yacoov, 2003). Bu çalışmada çekirdeksiz poli-grupların, $G//H$ çift bölüm uzayına denk olduğunu gösteren bir yapısal teorem ve poli-grup yığın teoremini elde etmiştir.

Bir poli-grubun kromatik poli-grup olarak isimlendirilebilmesi için bazı renk gruplarının renk cebirine izomorfik olması gereklidir. Kromatik poli-grupların güzel bir özelliği vardır. Kromatik poli-gruplar, genelleştirilmiş permütasyonların düzenli poli-grupları gibi birebir temsili olan kesin poli-gruplardır.

(2) Prenowitz cebiri (1943)

Kabul edelim ki $G, p \neq q$ olacak şekilde ki P nokta kümesi ile birlikte, projektif geometri olsun. p' den q' ya kadar tüm noktaların kümesi $\overline{pq}$ ile gösterilsin. $I \notin P$ için

$$\begin{aligned} \forall x \in P \cup \{I\} \text{ ve } p, q \in P \text{ için} \\ x^{-1} &= x \\ I \cdot x &= x \cdot I = x \end{aligned} \quad (3.10)$$

olacak şekilde

$$p \cdot q = \begin{cases} \overline{pq} \setminus \{p, q\} & , \quad p \neq q \\ \{p, I\} & , \quad p = q. \end{cases} \quad (3.11)$$

ile tanımlı $P_G = \langle P \cup \{I\}, \cdot, I, {}^{-1} \rangle$ yapısı bir poli-gruptur.

(3) Poli-grupların, Poli-gruplarla genişlemesi (Comer, 1982)

Poli-grupların, poli-gruplar yardımıyla genişlemesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Kabul edelim ki $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\mathcal{B} = \langle B, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ birer poli-grup olsun. Burada $A \cap B = \{e\}$ olsun. $\mathcal{A}[\mathcal{B}] = \langle M, *, e, {}^I \rangle$ şekilde tanımlanan yeni sistem $\mathcal{A}$ 'nın $\mathcal{B}$ ile bir genişlemesidir.

$$\begin{aligned} M &= A \cup B \text{ olmak üzere} \\ \forall x \in M \text{ ve } \forall x, y \in M \setminus \{e\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

için

$$\begin{aligned} e^I &= e \\ x^I &= x^{-1} \\ e * x &= x * e = x \end{aligned} \quad (3.13)$$

olmak üzere

$$x * y = \begin{cases} x \cdot y & , & x, y \in A \\ x & , & x \in B, y \in A \\ y & , & x \in A, y \in B \\ x \cdot y & , & x, y \in B, y \neq x^{-1} \\ x \cdot y \cup A & , & x, y \in B, y = x^{-1}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Bu durumda $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$, $\mathcal{A}$ 'nın $\mathcal{B}$ ile bir genişlemesi olarak isimlendirilen cebirsel yapı bir poli-gruptur.

(4) Konjügasyon sınıfı poli-gruplar (Alp, 2005).

Simetrik gruplarla ilgilenirken, iki (muhtemelen) farklı koordinat sisteminden birisi, grubun bir elemanı ile diğer koordinat sistemine dönüşüyorsa, aynı fonksiyona bağlı iki simetrik operatör aynı sınıfa aittir denir. Grup teorisi dilinde bir $a = gbg^{-1}$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G simetrik grubunun a ve b elemanları aynı sınıfa aittir

anlamına gelir. Bu durumda a ve b eşleniktir. G'nin tüm eşlenik sınıflarının birleşimi $\overline{G}$ ile gösterilir ve e, G'nin birimi olmak üzere $\langle \overline{G}, *, \{e\}, ^{-1} \rangle$ sistemi bir poli-gruptur. A ve B eşlenik sınıflarının bir çarpımı $A * B$, AB çarpımının eleman eleman çarpımını içeren tüm eşlenik sınıflardan oluşur. Bu hipergrup Campaigne (1940) ve Dietzman (1946) tarafından çalışılmıştır.

Şimdi D_4 dihedral grupları kullanarak birkaç örnek verelim. Bu grup r'nin saat yönünün tersine 90° döndürülmesi ve h'nin yatay yansımasıyla üretilir. Sekiz simetriden oluşur.

$$\{1 = r^0, r, r^2 = s, r^3 = t, h, hr = d, hr^2 = v, hr^3 = f\} \quad (3.15)$$

Dihedral gruplar çoğunlukla sanat ve doğada göz önüne çıkar. Yer kaplamalarında, toprak kaplarda ve binalarda bulunan bir çok dekoratif dizayn, dihedral grupların grup simetrisini içerir. Dihedral grubunun D_4 olması durumunda beş eşlenik sınıf oluşur:

$$\{1\}, \{s\}, \{r, t\}, \{d, f\}, \{h, v\} \quad (3.16)$$

Bu sınıfları sırasıyla $C_1, \dots, C_n$ ile gösterelim. Bu durumda $\overline{D_4}$ poli-grubu

*	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_2	C_2	C_1	C_3	C_4	C_5
C_3	C_3	C_3	C_1, C_2	C_5	C_4
C_4	C_4	C_4	C_5	C_1, C_2	C_3
C_5	C_5	C_5	C_4	C_3	C_1, C_2

olur. Tablonun nasıl oluşturulduğunu göstermek için bir örnek vermemiz gerekirse, $C_3 \cdot C_3$ örneğini göz önüne alalım. Bu çarpımı saptamak için bu eşlenik sınıflarını eleman eleman çarpalım. $\{r, t\} \{r, t\} = \{s, 1\} = C_1 \cup C_2$. Böylelikle $C_3 \cdot C_3$, C_1, C_2 iki eşlenik sınıfından oluşur.

(5) Karakter poli-gruplar (Davvaz, 2007b)

Sonlu grupların eşlenik sınıfları, sonlu grupların karakterleridir. χ_1 keyfi bir karakter olmak üzere $G = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$ G sonlu grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesi olsun. G' nin G karakter poli-grubu, $\chi_i * \chi_j$ çarpımı $\chi_i \chi_j$ eleman eleman çarpımının indirgenemeyen içeriklerinin kümesi olmak üzere, $\langle G, *, \chi_1^{-1} \rangle$ dur. Bu G sistemi R.Roth (1975) tarafından incelenmiştir ve G ve $\bar{G}$ yapıları arasındaki denklik gösterilmiştir.

D_4 incelenmeden önce D_4 dihedral grubunun indirgenemeyen beş karakterini bilmemiz gereklidir. Bu beş karakter aşağıdaki karakter tablosuyla ifade edilebilir. (karakterler eşlenik sınıflarında sabit olduğundan, sadece eşlenik sınıflarını, tablonun üstünden itibaren listelemek olağandır.)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1:$	1	1	1	1	1
$\chi_2:$	1	1	-1	1	-1
$\chi_3:$	1	1	-1	-1	1
$\chi_4:$	1	1	1	-1	-1
$\chi_5:$	2	-2	0	0	0

Poli-grup çarpımının hesaplanışını, $\chi_5 * \chi_5$ çarpımını göz önüne alarak iki karakter ile örnekleyelim. χ_5 'in kendisiyle noktasal çarpımı, aşağıdaki (indirgenemez olmayan) karakterle uyum sağlar.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_5 \chi_5 :$	4	4	0	0	0

Bu karakter indirgenemez karakterlerin toplamı olarak sadece bir yolla yazılabilir: $\chi_5 \chi_5 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$. Bu eşitlik D_4 için oluşturulan poli-grup tablosunun sağ alt köşesindeki girdi ile belirtilmiştir. Genelde iki karakterin $\chi_i * \chi_j$ poli-grup çarpımı, $\chi_i \chi_j$ çarpımındaki hangi karakterlerin indirgenemez karakterler olduğunu belirler. χ_i karakterindeki i' yi kullanarak D_4 poli-grubu şu şekilde oluşturulur.

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	3	5
3	3	4	1	2	5
4	4	3	2	1	5
5	5	2	5	5	1,2,3,4

Lemma 3.1.1 Her grup bir poli-gruptur (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.4 (Alt Poli-grup) $\emptyset \neq K \subset P$ için $e \in K$ ve $\langle K, \circ, e, (), {}^{-1} \rangle$ yapısı bir poli-grup ise K' ya P'nin bir **alt poli-grubu** denir (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.5 (Normal Alt Poli-grup) $\forall a \in P$ için $a^{-1} \circ N \circ a \subseteq N$ olacak şekilde P'nin bir N alt poli-grubu var ise N' ye P' nin **normal alt poli-grubu** denir (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.6 N, P'nin alt poli-grubu ise aşağıdaki aksiyomların sağlandığı kolayca görülebilir (Alp ve Davvaz, 2015).

i) $\forall a \in P$ için

$$N \circ a = a \circ N \quad (3.17)$$

ii) $\forall a, b \in P$ için

$$(N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ a \circ b \quad (3.18)$$

iii) $\forall b \in N \circ a$ için

$$N \circ a = N \circ b \quad (3.19)$$

Tanım 3.1.7 N , P 'nin bir normal alt poli-grubu olsun.

$$N \circ a \bullet B \circ b = \{N \circ c \mid c \in N \circ a \circ b\} \quad (3.20)$$

ve

$$(N \circ a)^{-1} = N \circ a^{-1} \quad (3.21)$$

olacak şekilde tanımlanan $\langle P/N, \bullet, N, {}^{-1} \rangle$ cebirsel yapısı bir poli-gruptur (Davvaz, 2013).

Poli-gruplar arasında birçok homomorfizmler vardır . Bu çalışmanın devamında sadece güçlü homomorfizm yapısı üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.1.8 (Güçlü homomorfizm) $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P', \star, e, {}^{-1} \rangle$ iki poli-grup olsun.

$$\begin{aligned} \partial: P &\rightarrow P \\ \partial(e) &= e \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$\forall a, b \in P \quad \text{için} \quad \partial(a \circ b) = \partial(a) \star \partial(b) \quad (3.23)$$

oluyorsa ∂ dönüşümüne bir **güçlü homomorfizm** denir (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.9 (İzomorfizm) ∂ güçlü homomorfizmi birebir ve örten ise izomorfizm olarak isimlendirilir. Bu durumda P ve P' izomorfiktirler denir (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.10 Güçlü homomorfizmler için tanımlanan işlem kümeler içinde geçerlidir. Yani $\emptyset \neq A, B \subset P$ için $f(A \circ B) = f(A) \star f(B)$ olur (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.11 (Güçlü Homomorfizmin Çekirdeği) $\partial: P \rightarrow P'$ bir güçlü homomorfizm olsun. Bu durumda ∂ 'nin çekirdeği

$$\ker \partial = \{x \in P \mid \partial(x) = e\} \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanır. $\ker \partial$ 'nin P 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Ancak genellikle normali değildir (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.1.12 (Kapalı Çekirdek Homomorfizmi) $\forall x \in P$ için $x \circ x^{-1} \subseteq \ker \partial$ olması durumunda ∂ 'ye **kapalı çekirdek homomorfizmi** denir (Davvaz, 2013).

∂ kapalı çekirdek homomorfizmi olduğunda $\ker \partial$, P 'nin normali olur ve $P / \ker \partial \cong \text{Im} \partial$ şeklide ifade edilebilir.

Tanım 3.1.13 $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup olsun. β_p^* bağıntısını, P üzerinde en küçük denklik bağıntısı olarak tanımlayalım. Öyle ki P / β_p^* bölüm grubu, tüm denklik sınıflarının kümesi, bir gruptur. Bu yüzden β_p^* , P üzerinde **temel denklik bağıntısı**, P / β_p^* ise **temel grup** olarak tanımlanır (Alp ve Davvaz, 2014).

β_p^* bağıntısı üzerinde $\odot$ çarpımı $\forall z \in \beta_p^*(x) \circ \beta_p^*(y)$ için $\beta_p^*(x) \odot \beta_p^*(y) = \beta_p^*(z)$ şeklinde tanımlansın. Bu bağıntı Koskas (1970) tarafından tanımlanmış ve temel olarak Corsini ve Leoreanu, (2003) tarafından çalışılmıştır.

Leoreanu-Fotea (1998), Koskas (1970) ve Freni (1991; 2004) hipergruplarla ilgili, Vougiouklis (1994) H_g – gruplarla ve Davvaz (2010; 2012) poli-gruplarla ilgilenmiştir.

β_p bağıntısını $x \beta_p y \Leftrightarrow z_1, \dots, z_n$ için $\{x, y\} \subseteq \circ \prod_{i=1}^n z_i$ şeklinde tanımlayalım. Freni (1991) hipergruplar için $\beta = \beta^*$ olduğunu ispatlamıştır. Poli-gruplar da hipergrupların kesin alt sınıfları olduğundan $\beta_p = \beta_p^*$ olduğu söylenebilir (Alp ve Davvaz, 2014).

$\partial_p : P \rightarrow P / \beta_p^*$ doğal dönüşümünün çekirdeği, P 'nin çekirdeği olarak isimlendirilir ve ω_p ile gösterilir. ω_p ile P / β_p^* 'nin biriminin gösterildiği de söylenebilir. Bu durumda $\omega_p = \beta_p^*(e)$ ve $\forall x \in P$ için $\beta_p^*(x)^{-1} = \beta_p^*(x^{-1})$ olduğu aşikârdır (Alp ve Davvaz, 2014).

Genelleştirilmiş permütasyon yöntemini kullanan Davvaz, permütasyon gruplarını ve bir poli-grubun bir küme üzerindeki etkisini tanımlamıştır (Davvaz, 2000).

Çaprazlanmış polimodül tanımı için, önce poli-grup etkisini tanımlamalıyız.

3.2 Poli-grup Etkisi

Permütasyonların genelleştirilmesi yöntemini kullanarak Davvaz (2000) permütasyon gruplarını ve poli-grupların kümeler üzerindeki etkisini tanımlamıştır. Çaprazlanmış polimodül tanımı için poli-grup etkisi kavramına ihtiyacımız vardır (Alp ve Davvaz, 2015).

Tanım 3.2.1 (Poli-grup Etkisi) $\mathcal{P}=\langle P, \circ, e, ^{-1} \rangle$ bir poli-grup ve $\Omega \neq \emptyset$ olacak şekilde bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomların sağlanması durumunda $\alpha: P \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}^*(\Omega)$ dönüşümüne Ω üzerinde **(sol) poli-grup etkisi** denir (Davvaz, 2000).

$$i) \quad \forall \omega \in \Omega \text{ için}$$

$$\alpha(e, \omega) = \{\omega\} \quad (3.25)$$

$$ii) \quad \forall g, h \in P \text{ ve } \omega \in \Omega \text{ için}$$

$$\alpha(h, \alpha(g, \omega)) = \bigcup_{x \in h \circ g} \alpha(x, \omega) \quad (3.26)$$

$$iii) \quad \forall g \in P \text{ için}$$

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} \alpha(g, \omega) = \Omega \quad (3.27)$$

$$iv) \quad \forall g \in P \text{ için}$$

$$x \in \alpha(g, y) \Rightarrow \alpha(g^{-1}, x) \quad (3.28)$$

İkinci aksiyomdan $\forall \omega \in \Omega$ için $\bigcup_{\omega_0 \in \alpha(g, \omega)} \alpha(h, \omega_0) = \bigcup_{x \in h \circ g} \alpha(x, \omega)$ elde edilir. Bu durumda

$$i) \quad {}^e \omega = \omega \quad (3.29)$$

$$ii) \quad \forall A \subseteq \Omega \text{ ve } \forall B \subseteq P \text{ için}$$

$${}^g A = \bigcup_{a \in A} {}^g a \text{ ve } {}^B \omega = \bigcup_{b \in B} {}^b \omega \text{ olduğunda} \quad (3.30)$$

$$h({}^g \omega) = h \circ g \omega \quad (3.31)$$

$$\text{iii)} \quad \bigcup_{\omega \in \Omega} {}^g \omega = \Omega \quad (3.32)$$

$$\text{iv)} \quad \forall g \in P \text{ için}$$

$$a \in {}^g b \Rightarrow b \in {}^{g^{-1}} a \quad (3.33)$$

Örnek 3.2.1 $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup olsun.

$$\forall x, g \in P \text{ için } {}^g x := x \circ g^{-1} \text{ veya } {}^g x := g \circ x \quad (3.34)$$

olarak tanımlanırsa P kendi üzerine etki eder denir (Alp ve Davvaz, 2015).

Örnek 3.2.2 $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup olsun. P bir konjügasyonla kendi üzerine etki eder denir (Alp ve Davvaz, 2015). Gerçekten de

$$\begin{aligned} \alpha &: P \times P \rightarrow \mathcal{P}^*(P) \\ \alpha(g, x) &= {}^g x := g \circ x \circ g^{-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ile verilen fonksiyonu göz önüne alırsak,

$$\text{i)} \quad {}^e x = x \quad (3.36)$$

$$\text{ii)} \quad h({}^g x) = h(g \circ x \circ g^{-1}) \quad (3.37)$$

$$= h \circ g \circ x \circ g^{-1} \circ h^{-1} \quad (3.37a)$$

$$= (h \circ g) \circ x \circ (g \circ h)^{-1} \quad (3.37b)$$

$$= \bigcup_{b \in h \circ g} (b \circ x \circ b^{-1}) \quad (3.37c)$$

$$= \bigcup_{b \in h \circ g} {}^b x \quad (3.37d)$$

$$= {}^{h \circ g} x \quad (3.37e)$$

$$\text{iii)} \quad \bigcup_{x \in P} {}^g x = \bigcup_{x \in P} g \circ x \circ g^{-1} = P \quad (3.38)$$

iv) $a \in {}^g b = g \circ b \circ g^{-1}$ ve $g \in a \circ g \circ b^{-1}$ olduğunda $b^{-1} \in g^{-1} \circ a^{-1} \circ g$ olur. Bu da $b \in g^{-1} \circ a \circ g$ anlamına gelir.

Yukarıdaki tanımın grup etkisinin bir genellemesi olduğuna dikkat edilmelidir (Davvaz ve Alp, 2014).

G bir grup ve Ω boş olmayan bir küme olsun. Bir (sol) grup etkisi, $G \times \Omega \rightarrow \Omega$ bir ikili işlemi $\forall g, h \in G$ ve $\omega \in \Omega$ için aşağıdaki iki aksiyomu sağlar (Davvaz ve Alp, 2014).

$$\text{i)} \quad {}^{gh} \omega = g({}^h \omega) \quad (3.39)$$

$$\text{ii)} \quad {}^e \omega = \omega \quad (3.40)$$

Örnek 3.2.3 $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup, N 'de P 'nin bir normal alt poli-grubu ve Ω tüm sağ kosetlerin kümesi olsun. $N \circ x$ ($x \in P$)

$${}^g(N \circ x) = \{N \circ z \mid z \in N \circ x \circ g^{-1}\} \quad (3.41)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Ω üzerinde (sol) poli-grup etkisi elde ederiz (Alp ve Davvaz, 2015). Gerçekten de

$$\text{i)} \quad {}^e(N \circ x) = N \circ x \quad (3.42)$$

$$\text{ii)} \quad {}^h({}^g(x)) = {}^h(\{N \circ z \mid z \in N \circ x \circ g^{-1}\}) \quad (3.42)$$

$$= \bigcup_{x \in N \circ x \circ g^{-1}} \{N \circ t \mid t \in N \circ z \circ h^{-1}\} \quad (3.42a)$$

$$= \{N \circ t \mid t \in N \circ x \circ g^{-1} \circ h^{-1}\} \quad (3.42b)$$

$$= \bigcup_{a \in h \circ g} {}^a(N \circ x) \quad (3.42c)$$

$$= {}^{h \circ g}(N \circ x) \quad (3.42d)$$

iii) Kabul edelim ki $y \in P$ olmak üzere $N \circ y \in \Omega$ olsun. $\forall g \in P$ için $y \in a \circ g^{-1}$ olacak şekilde bir $a \in P$ vardır. Bu da $y \in N \circ a \circ g^{-1}$ olduğu anlamına gelir. Böylelikle $N \circ y \in {}^g(N \circ a)$ elde edilir. Buradan $N \circ y \in \bigcup_{N \circ x \in \Omega} {}^g(N \circ x)$ elde edilir.

iv) $N \circ x \in {}^g(N \circ y) \Rightarrow N \circ y \in {}^{g^{-1}}(N \circ x)$ olduğunu gösterelim. $N \circ x \in \{N \circ z \mid z \in N \circ y \circ g^{-1}\}$ olduğundan, $N \circ x = N \circ z_0$ olacak şekilde bir $z_0 \in N \circ y \circ g^{-1}$ elemanı vardır. z_0 tanımından $g^{-1} \in y^{-1} \circ N \circ z_0$ elde edilir. Böylelikle $y^{-1} \in g^{-1} \circ z_0^{-1} \circ N$ ve $y \in N \circ z_0 \circ g$ olur ki $y \in N \circ x \circ g$ olup $N \circ y \in {}^{g^{-1}}(N \circ x)$ anlamına gelir.

3.3 Çaprazlanmış Polimodüller

Bu bölümde çaprazlanmış polimodül kavramını inceleyeceğiz. Çaprazlanmış polimodülleri tanımlayabilmek için poli-grup etkisi ve güçlü boundary dönüşümü kavramlarını incelemeliyiz.

Tanım 3.3.1 $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ poli-grupları, $\partial: C \rightarrow P$ güçlü homomorfizmi ve C üzerinde $\alpha: P \times C \rightarrow \mathcal{P}^*(P)$ (sol) etkisinden oluşan $\mathcal{N} = (C, P, \partial, \alpha)$ polimodülü aşağıdaki aksiyomları sağlar (Alp ve Davvaz, 2015).

i) $\forall c \in C, p \in P$ için

$$\partial({}^p c) = p \circ \partial(c) \circ p^{-1} \quad (3.43)$$

ii) $\forall c, c' \in C$ için

$$\partial({}^{(c)} c') = c \star c' \star c^{-1} \quad (3.44)$$

P' 'nin değer kümesi olduğu vurgulanmak istenirse $\mathcal{A}'$ e çaprazlanmış P -polimodül denmelidir.

Eğer $\partial: C \rightarrow P$ homomorfizmi boundary dönüşümü ise C ve P poli-grupları sırasıyla **üst poli-grup** ve **çaprazlanmış polimodülün temeli** olarak isimlendirilirler. Bu şekilde tanımlanan yapı bir çaprazlanmış polimodül yapısı oluşturur ve Tanım 3.3.1' deki ilk şartı sağlar ancak ikinci şartı sağlamazsa **ön çaprazlanmış polimodül** olarak isimlendirilir (Alp ve Davvaz, 2015).

Örnek 3.3.1 Bir konjugasyon çaprazlanmış polimodül, P' nin N normal alt poli-grubunun bir kapsamasıdır. Özellikle herhangi bir poli-grubu için $Id_P: P \rightarrow P$ özdeşlik dönüşümü P' nin kendi üzerindeki konjugasyonla birlikte etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış polimodüldür. Gerçekten de bir P poli-grubunun çaprazlanmış polimodül olduğunu gösterebilmek için iki farklı yöntem vardır. Bunlar özdeşlik dönüşümü ve alt poli-grubun kapsaması olarak ifade edilebilir (Alp ve Davvaz, 2015).

Örnek 3.3.2 C bir P -polimodül, C üzerinde P 'nin iyi tanımlı bir etkisi α olsun. Sıfır homomorfizmiyle birlikte $(C, P, 0, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül oluşur (Alp ve Davvaz, 2015).

Teorem 3.3.1 Her çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış polimodüldür (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat: Her grup bir poli-grup olduğundan teorem aşikârdır. $\square$

Örnek 3.3.3 $C_1 \times C_2 \rightarrow P_1 \times P_2$ tanımlı, $\mathcal{A}'_1 \times \mathcal{A}'_2$ iki çaprazlanmış polimodülün direk çarpımı, $\partial_1 \times \partial_2$ boundary dönüşümü ile $C_1 \times C_2$ üzerine $P_1 \times P_2$ ile etki ettiği aşikârdır (Alp ve Davvaz, 2014).

Yukarıdaki tanımın çaprazlanmış modül kavramının bir gerektirmesi olduğuna dikkat edilmelidir (Alp ve Davvaz, 2014).

Bir $\mathcal{A} = (M, G, \partial, \tau)$ çaprazlanmış modülü M ve G grupları ve $\partial: M \rightarrow G$ homomorfizmi ve M üzerine $\tau: G \times M \rightarrow M$ (sol) etkisinden oluşur ve aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

i) $\forall m \in M, g \in G$ için

$$\partial({}^g m) = g g^{-1} \quad (3.45)$$

ii) $\forall m, m^{-1} \in M$ için

$$\partial(m) m' = m m' m^{-1} \quad (3.46)$$

Çaprazlanmış polimodül aksiyomları çekirdek üzerinde ve güçlü boundary dönüşümünün görüntüsü üzerinde bazı sınırlamalara sebep olur. (Alp ve Davvaz, 2014; Alp ve Davvaz, 2015)

Önerme 3.3.1 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül olsun. Bu durumda $\partial(C)$, P 'nin bir normal alt grubudur (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: $\partial(C) = \{\partial(c) \mid c \in C\}$ dönüşümünün P 'nin bir alt poli-grubu olduğu açıktır. Kabul edelim ki $x \in \partial(C)$ ve $p \in P$ olsun. $\exists c \in C$ için $x = \partial(c)$ ve $p \circ \partial(c) \circ p^{-1} = \partial({}^p c)$ olur. ${}^p c \in C$ ve $p \circ \partial(c) \circ p^{-1} \in \partial(C)$ olup ispat tamamlanır. $\square$

Burada bu önermenin sadece Tanım 3.3.1'deki birinci aksiyomla ilgili olduğuna dikkat edilmelidir ve bu önerme her ön çaprazlanmış polimodül için geçerlidir.

Önerme 3.3.2 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül olsun. $\ker \partial$, C üzerinde merkezidir (Alp ve Gürmen, 2003).

İspat: $\ker \partial$ 'nin C 'nin alt poli-grubu olduğu aşikârdır. Kabul edelim ki $c \in C$ ve $k \in \ker \partial$ olsun. Bu durumda $\partial(k)c = k \star c \star k^{-1}$ olur. Fakat $\partial(k) = e$ 'dir. Bu sebeple $\partial(k)c = e c = c$ elde edilir. Böylelikle $c \star k = k \star c \star k^{-1} \star k$ olup, $e \in k^{-1} \star k$ olduğundan $k \star c \in c \star k$ elde edilir. Benzer şekilde $k^{-1} \star c = k^{-1} \star k \star c \star k^{-1}$ ve $e \in k^{-1} \star k$ olduğundan $\forall k \in \ker \partial$ için $c \star k^{-1} \in k^{-1} \star c$ elde edilir ve $c \star k \in k \star c$ olup ispat tamamlanır. $\square$

$\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup olsun β_p^* bağıntısını, P üzerinde P / β_p^* bölüm grubunu denklik sınıflarının kümesi olarak tanımlanan en küçük denklik bağıntısı bir gruptur. Bu

durumda β_p^* , P üzerinde **temel denklik bağıntısı**, P/β_p^* **temel grup** olarak isimlendirilir. P/β_p^* üzerindeki $\odot$ çarpımı $\forall z \in \beta_p^*(x) \circ \beta_p^*(y)$ için $\beta_p^*(x) \odot \beta_p^*(y) = \beta_p^*(z)$ şeklinde tanımlansın. Bu bağıntı Koskas (1970) tarafından geliştirilmiş ve Corsini (1993) tarafından çalışılmıştır. (Leoreanu-Fotea (1998) ve Freni (1991) hipergruplar, Vougiouklis (1994) H_v – gruplar, Davvaz (2010) poli-gruplar ile ilgilenmişlerdir.) (Alp ve Davvaz, 2015)

β_p bağıntısını şu şekilde tanımlayalım.

$$x \beta_p y \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq \circ \prod_{i=1}^n z_i \text{ olacak şekilde } z_1, \dots, z_n \text{ vardır.} \quad (3.47)$$

Freni (1991) hipergruplar için $\beta = \beta^*$ olduğunu ispatlamıştır. Poli-gruplar hipergrupların aşikâr alt sınıfları olduğundan poli-gruplar içinde $\beta_p = \beta_p^*$ elde edilir. $\varphi_p : P \rightarrow P/\beta_p^*$ **doğal dönüşümünün çekirdeği**, P 'nin (φ_p tarafından gösterilen) **merkezi** denir. ω_p ile P/β_p^* 'nin birimini ifade edelim. Aşağıdaki aksiyomların ispatı açıktır (Alp ve Davvaz, 2015).

$\forall x \in P$ için

$$i) \quad \omega_p = \beta_p^*(e) \quad (3.48)$$

$$ii) \quad \beta_p^*(x)^{-1} = \beta_p^*(x^{-1}) \quad (3.49)$$

Lemma 3.3.1 ω_p , P 'nin bir alt poli-grubudur (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: Kabul edelim ki $x, y \in \omega_p$ keyfi iki eleman olsun. Bu durumda $\beta_p^*(x) = \beta_p^*(y) = \omega_p$ olup, $\beta_p^*(x \circ y) = \beta_p^*(x) \circ \beta_p^*(y) = \omega_p$ olur. Böylelikle $x \circ y \subseteq \omega_p$ ve $x^{-1} \in \omega_p$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.3.2 $\forall p \in P$ için $p \circ p^{-1} \subseteq \omega_p$ 'dir (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: $x \in p \circ p^{-1}$ keyfi bir eleman olduğunu kabul edelim. $x \in p \circ p^{-1}$ olduğundan

$\beta_p^*(e) = \beta_p^*(x)$ ve $\omega_p = \beta_p^*(x)$ olur. Bu da $x \in \omega_p$ olması anlamına gelir. $\square$

Bundan böyle P/β_p^* ve C/β_c^* temel gruplarının ikili işlemlerini sırasıyla $\odot$ ve $\otimes$ ile ifade edilecektir. Şimdi poli-grupların güçlü homomorfizmlerinin çekirdeği kavramını göz önüne alalım.

$\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ iki poli-grup, $\partial: C \rightarrow P$ güçlü homomorfizm olsun. ∂' nin çekirdeği

$$\ker^* \partial = \{x \in C \mid \partial(x) \in \omega_p\} \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanır (Alp ve Davvaz, 2015).

Lemma 3.3.3 $\ker^* \partial$, C'nin bir normal alt poli-grubudur (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: $x, y \in \ker^* \partial$ iki keyfi eleman olsun. Bu durumda $\partial(x), \partial(y) \in \omega_p$ olur. Lemma 3.1.1. den ω_p , P'nin bir alt poli-grubudur. Bu yüzden $x \star y \in \ker^* \partial$ ve $x^{-1} \in \ker^* \partial$ olur. Kabul edelim ki $c \in C$ ve $x \in \ker^* \partial$ keyfi olsun. $\partial(c \star x \star c^{-1}) = \partial(c) \circ \partial(x) \circ \partial(c^{-1}) \subseteq \omega_p$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \beta_p^*(\partial(c) \circ \partial(x) \circ \partial(c^{-1})) &= \beta_p^*(\partial(c)) \odot \beta_p^*(\partial(x)) \odot \beta_p^*(\partial(c^{-1})) \\ &= \beta_p^*(\partial(c)) \odot \omega_p \odot \beta_p^*(\partial(c^{-1})) \\ &= \beta_p^*(\partial(c)) \odot \beta_p^*(\partial(c^{-1})) \\ &= \beta_p^*(\partial(c) \circ \partial(c^{-1})) \\ &= \beta_p^*(\partial(c \star c^{-1})) \\ &= \beta_p^*(\partial(e)) \quad (\because e \in c \star c^{-1}) \\ &= \beta_p^*(e) = \omega_p \end{aligned} \quad (3.51)$$

olur ki bu da $\partial(c) \circ \partial(x) \circ \partial(c^{-1}) \subseteq \omega_p$ olması anlamına gelir. Böylelikle ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3.2 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül olsun. $ker^* \partial$ bir $P / \partial(C)$ -polimodüldür (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: P'nin C üzerindeki etkisi P'nin $ker^* \partial$ üzerindeki etkisine indirgenebilir. $\forall k \in ker^* \partial$ için ${}^p k \in ker^* \partial$ olup olmadığını kontrol etmek yeterli olacaktır. Bunun için $\partial({}^p k) = p \circ \partial(k) \circ p^{-1}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \beta_p^* (p \circ \partial(k) \circ p^{-1}) &= \beta_p^* (p) \odot \beta_p^* (\partial(k)) \odot \beta_p^* (p^{-1}) \\ &= \beta_p^* (p) \odot \omega_p \odot \beta_p^* (p^{-1}) \\ &= \beta_p^* (p) \odot \beta_p^* (p^{-1}) \\ &= \omega_p \end{aligned} \tag{3.52}$$

olur ki bu da $p \circ \partial(k) \circ p^{-1} \subseteq \omega_p$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda $\partial({}^p k) \subseteq \omega_p$ ve ${}^p k \in ker^* \partial$ olur. Bu yüzden $ker^* \partial$ bir P-polimodüldür. Önerme 3.3.2 den $\partial(C)$ P'nin bir normal alt poli-grubudur ve $P / \partial(C)$ tanımlanmış olur. P'nin $ker^* \partial$ üzerindeki etkisi, $P / \partial(C)$ 'nin $\forall p \in P$ ve $k \in ker^* \partial$ için, $ker^* \partial$ üzerindeki $\varphi(p)k = {}^p k$ etkisine sebep olur ki buradaki φ dönüşümü $\varphi: P \rightarrow P / \partial(C)$ tanımlı doğal dönüşümdür. $q \in P$ ve $\varphi(p) = \varphi(q)$ şartları sağlandığında bu etkiye iyi tanımlıdır denilebilir. Böylelikle

$$\begin{aligned} {}^q k &= \varphi(q)k \\ &= \{ {}^x k \mid x \in \varphi(q) \} \\ &= \{ {}^x k \mid x \in \varphi(p) \} \\ &= \varphi(p)k \\ &= {}^p k \end{aligned} \tag{3.53}$$

olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Bu teorem Tanım 3.3.1'in ikinci şartını kullanır. Bu yüzden genel ön çaprazlanmış polimodüller için doğru olması gerekmez.

Tanım 3.3.2 $(A, B, \partial', \alpha')$ cebirsel yapısının, (C, P, ∂, α) çaprazlanmış polimodülünün bir alt çaprazlanmış polimodülü olması için aşağıdaki şartların sağlanıyor olması yeterlidir (Alp ve Davvaz, 2015).

- (1) A, C' 'nin alt poli-grubu ve B, P' 'nin bir alt poli-grubudur.
- (2) ∂', ∂ 'nin A 'ya bir kısıtlamasıdır.
- (3) B 'nin A üzerindeki etkisi, P 'nin C üzerindeki etkisi tarafından üretilmiştir.

$(A, B, \partial', \alpha')$ alt çaprazlanmış polimodülünün, (C, P, ∂, α) çaprazlanmış polimodülünün normali olması için aşağıdaki şartların sağlanıyor olması yeterlidir.

- (1) B, P' 'nin normal alt poli-grubudur.
- (2) $\forall p \in P, a \in A$ için ${}^p a \in A$
- (3) $\forall b \in B, c \in C$ için ${}^b c \star c^{-1} \in A$

Tanım 3.3.3 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ ve $\mathcal{A}' = (C', P', \partial', \alpha')$ birer çaprazlanmış polimodül olsun.

$$\langle \theta, \varphi \rangle : (C, P, \partial, \alpha) \rightarrow (C', P', \partial', \alpha') \quad \forall p \in P, c \in C \text{ için}$$

$$\theta({}^p c) = {}^{\varphi(p)} \theta(c) \quad (3.54)$$

olacak şekilde tanımlı çaprazlanmış polimodül morfizmi için poli-grupların güçlü homomorfizmlerinin aşağıdaki diyagramı değişmelidir (Alp ve Davvaz, 2015).

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ P & \xrightarrow{\varphi} & P' \end{array}$$

θ ve φ birer izomorfizm ise $\langle \theta, \varphi \rangle$ ' de bir izomorfizmdir denir. Benzer şekilde polimodüller için monomorfizm, epimorfizm ve otomorfizmleri de tanımlayabiliriz.

3.4 Çaprazlanmış Polimodüllerden Türetilen Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde çaprazlanmış polimodülleri göz önüne alıp, temel bağıntılar kullanılarak çaprazlanmış modülleri elde edeceğiz ve bunlar arasındaki çaprazlanmış polimodül morfizmlerini vereceğiz.

Önerme 3.4.1 (Çarpımsal Etki) $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ iki poli-grup ve $\partial: C \rightarrow P$ bir güçlü homomorfizm olsun. Bu durumda ∂ bir grup homomorfizmine neden olur.

$\forall c \in C$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: C / \beta_C^* &\rightarrow P / \beta_P^* \\ c &\rightarrow \mathcal{D}(\beta_C^*(c)) = \beta_P^*(\partial(c)) \end{aligned}$$

$\forall c \in C$ ve $p \in P$ için C üzerinde ${}^p c = c_1 \star \dots \star c_n$ olacak şekilde bir $c_1, \dots, c_n$ varsa P 'nin C üzerindeki etkisine **çarpımsal etki** denir (Alp ve Davvaz).

İspat: Önce $\mathcal{D}$ 'nin iyi tanımlı olduğunu göstereyim. Kabul edelim ki $\beta_C^*(c_1) = \beta_C^*(c_2)$ olsun. Bu durumda

$$\{c_1, c_2\} \subseteq \star \prod_{i=1}^n a_i \tag{3.55}$$

olacak şekilde $a_1, \dots, a_n$ vardır.

$$\{\partial(c_1), \partial(c_2)\} \subseteq \partial \left(\star \prod_{i=1}^n a_i \right) = \circ \prod_{i=1}^n \partial(a_i) \tag{3.56}$$

olur. Buradan $\beta_P^*(\partial(c_1)) = \beta_P^*(\partial(c_2))$ elde edilir ki bu da $\mathcal{D}(\beta_C^*(c_1)) = \mathcal{D}(\beta_C^*(c_2))$ olması anlamına gelir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\beta_c^*(c_1) \otimes \beta_c^*(c_2)) &= \mathcal{D}(\beta_c^*(c_1 \star c_2)) \\
&= \beta_p^*(\partial(c_1 \star c_2)) \\
&= \beta_p^*(\partial(c_1) \circ \partial(c_2)) \\
&= \beta_p^*(\partial(c_1)) \odot \beta_p^*(\partial(c_2)) \\
&= \mathcal{D}(\beta_c^*(c_1)) \odot \mathcal{D}(\beta_c^*(c_2))
\end{aligned} \tag{3.57}$$

olup ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 3.4.1 Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.2’de tanımlanan etkiler çarpımsal etkidir (Alp ve Davvaz, 2015).

Lemma 3.4.1 ω_p , ω_Q ve $\omega_{P \times Q}$ sırasıyla P,Q ve $P \times Q$ ’ nun çekirdekleri olsun. Bu durumda $\omega_{P \times Q} = \omega_p \times \omega_Q$ olur (Davvaz, 2000).

$\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ iki poli-grup, $\alpha : P \times C \rightarrow \mathcal{P}^*(C)$ etkisi C üzerinde bir çarpımsal etki olsun. $\psi : P / \beta_p^* \times C / \beta_c^* \rightarrow \mathcal{P}^*(P / \beta_c^*)$ fonksiyonu ise

$$\psi(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c)) = \left\{ \beta_c^*(x) \mid x \in \bigcup_{\substack{y \in \beta_c^*(c) \\ x \in \beta_p^*(p)}} {}^z y \right\} \tag{3.58}$$

şeklinde tanımlansın.

β_c^* tanımından ve P’ nin C üzerindeki etkisi çarpımsal etki olduğundan $\psi(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c))$ fonksiyonunun singleton fonksiyon olduğu görülür. Böylelikle

$$\forall x \in \bigcup_{\substack{y \in \beta_c^*(c) \\ x \in \beta_p^*(p)}} {}^z y \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
\psi : P / \beta_p^* \times C / \beta_c^* &\rightarrow P / \beta_c^* \\
\psi(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c)) &= \beta_c^*(x)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

elde edilir. Şimdi

$$\psi(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c)) = [\beta_p^*(p)] [\beta_c^*(c)] \quad (3.60)$$

olduğunu gösterelim.

Önerme 3.4.2 $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ iki poli-grup, $\alpha: P \times C \rightarrow \mathcal{P}^*(C)$ etkisi C üzerinde bir çarpımsal etki olsun. Bu durumda ψ , P/β_p^* grubunun C/β_c^* grubu üzerindeki etkisi olur (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: Kabul edelim ki $g, h \in P$ ve $c \in C$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi(\beta_p^*(h) \odot \beta_p^*(g), \beta_c^*(c)) &= \psi(\beta_p^*(h \circ g), \beta_c^*(c)) \\ &= [\beta_p^*(h \circ g)] [\beta_c^*(c)] \end{aligned} \quad (3.61)$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(\beta_p^*(h), \psi(\beta_p^*(g), \beta_c^*(c))) &= \psi(\beta_p^*(h), [\beta_p^*(g)] [\beta_c^*(c)]) \\ &= [\beta_p^*(h)] ([\beta_p^*(g)] [\beta_c^*(c)]) \end{aligned} \quad (3.62)$$

olur. Tanım 3.2.1'deki ikinci şart sebebiyle $h({}^g c) = {}^{h \circ g} c$ elde edilir. Böylelikle

$$[\beta_p^*(h \circ g)] [\beta_c^*(c)] = [\beta_p^*(h)] ([\beta_p^*(g)] [\beta_c^*(c)]) \quad (3.63)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.1 P' nin C üzerindeki etkisi çarpımsal etki olacak şekilde $\mathcal{A}' = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül olsun. Bu durumda

$$X = (C/\beta_c^*, P/\beta_p^*, \mathcal{D}, \psi)$$

bir çaprazlanmış modül olur (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: Önerme 3.4.1 ve Önerme 3.4.2'den Tanım 2.2'nin şartlarını sağladığını göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $c \in C$ ve $p \in P$ keyfi iki eleman olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
[\beta_p^*(p)] \mathcal{D}([\beta_c^*(c)]) &= \mathcal{D}(\beta_c^*(z)) & (\forall z \in {}^p c \text{ için}) \\
&= \beta_p^*(\partial(z)) & (\forall z \in {}^p c \text{ için}) \\
&= \beta_p^*(\partial({}^p c)) \\
&= \beta_p^*(p \circ \partial(c) \circ p^{-1}) \\
&= \beta_p^*(p) \odot \beta_p^*(\partial(c)) \odot \beta_p^*(p^{-1}) \\
&= \beta_p^*(p) \odot \mathcal{D}(\beta_p^*(c)) \odot (\beta_p^*(p))^{-1}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

olur. Böylelikle Tanım 2.2'nin birinci şartı sağlanır. İkinci şart için $c, c' \in C$ iki keyfi eleman olsun.

$$\begin{aligned}
[D(\beta_c^*(c))][\beta_c^*(c')] &= [\beta_p^*(\partial(c))][\beta_c^*(c')] \\
&= \beta_c^*(z) & (\forall z \in {}^{\partial(c)} c' \text{ için}) \\
&= \beta_c^*(z) & (\forall z \in c \star c' \star c \text{ için}) \\
&= \beta_c^*(c \star c' \star c) \\
&= \beta_c^*(c) \otimes \beta_c^*(c') \otimes \beta_c^*(c)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

olup ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.2 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül ve φ_p ve φ_c doğal dönüşümler olsun. Bu durumda $\langle \varphi_p, \varphi_c \rangle$ bir çaprazlanmış polimodül morfizmidir (Alp ve Davvaz, 2015).

İspat: Teorem 3.4.1' e göre $(C/\beta_c^*, P/\beta_p^*, \mathcal{D}, \varphi)$ bir çaprazlanmış polimodül olur. Bu durumda aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\varphi_c} & C/\beta_c^* \\
\partial \downarrow & & \downarrow \mathcal{D} \\
P & \xrightarrow{\varphi_p} & P/\beta_p^*
\end{array}$$

Gerçekten de $\forall c \in C$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\varphi_C}(c) &= \mathcal{D}(\beta_C^*(c)) \\ &= \beta_P^*(\partial(c)) \\ &= \varphi_P \partial(c)\end{aligned}\tag{3.66}$$

olur. Ayrıca $\forall c \in C, p \in P$ için

$$\begin{aligned}\varphi_C({}^p c) &= \beta_C^*({}^p c) \\ &= [\beta_P^*(p)] [\beta_C^*(c)] \\ &= \varphi_P({}^p c)\end{aligned}\tag{3.67}$$

elde edilir. Bu nedenle $\langle \varphi_P, \varphi_C \rangle$ bir çaprazlanmış polimodül morfizmidir. $\square$

Aşağıdaki örnek temel gruplar üzerinde başka bir çaprazlanmış modül yapısı verir.

Örnek 3.4.2 $\langle P, \circ, {}^{-1} \rangle$ herhangi bir poli-grup olsun. P/β_P^* 'de bir gruptur. Kabul edelim ki $\text{Aut}(P/\beta_P^*)$ bu grubun otomorfizmlerinin grubu olsun. α , $\text{Aut}(P/\beta_P^*)$ 'nin P/β_P^* üzerinde bir aşıkâr etkisi vardır (Alp ve Davvaz, 2015).

$\partial: P/\beta_P^* \rightarrow \text{Aut}(P/\beta_P^*)$ dönüşümü, her $\beta_P^*(p) \in P/\beta_P^*$ elemanını $\beta_P^*(p)$ konjugasyonunun iç otomorfizmine dönüştürür.

Bu yapılar birlikte $(P/\beta_P^*, \text{Aut}(P/\beta_P^*), \partial, \alpha)$ olacak şekilde bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

3.5 Cat¹-Poli-gruplar

n-tip homotopilerin ilk modeli olan Cat¹-gruplar Loday tarafından tanımlanmıştır. Loday'in (1982) Cat¹-grup tanımına göre G ve S gruplarında oluşan $k: G \rightarrow S$ bir inclusion, $t, h: G \rightarrow S$ birer epimorfizm olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

$$\text{i)} \quad tk = hk = Id_S \tag{3.68}$$

$$\text{ii)} \quad [\ker t, \ker h] = \{1_G\} \tag{3.69}$$

Şimdi Loday'in tanımının genellemesini yapalım. Özellikle poli-grupların çekirdek homomorfizminin tanımını verelim. $\langle C, \star, e, ()^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, ()^{-1} \rangle$ iki poli-grup olsun. $\partial: P \rightarrow C$ bir güçlü homomorfizm olsun. ∂ 'nin çekirdeği;

$$\ker^* \partial = \{x \in P \mid \partial(x) \in \omega_C\} \quad (3.70)$$

şeklinde tanımlanır (Davvaz ve Alp, 2014).

Tanım 3.5.1 $[x, y] = \{z \mid z \in x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1}\}$, $t, h: P \rightarrow C$ iki güçlü epimorfizm $k: C \rightarrow P$ bir inclusion olmak üzere P ve C gruplarından oluşan $C = (k; t, h: P \rightarrow C)$ yapısının bir poli-grup olması için gerek ve yeter şart;

$$\text{CAT-P-1: } tk = hk = Id_C$$

$$\text{CAT-P-2: } \forall x, y \in \ker^* t, \forall y \in \ker^* h \text{ için } [x, y] \subseteq \omega_p \text{ olmasıdır.}$$

t ve h fonksiyonları **kuyruk** ve **baş homomorfizmleri** olarak isimlendirilir (Davvaz ve Alp, 2014).

Lemma 3.5.1 $\forall x, y \in P$ için CAT-P-2 şartı $[\beta_p^*(x), \beta_p^*(y)] = \omega_p = 1_p / \beta_p^*$ ile denktir (Davvaz ve Alp, 2014).

$$\text{İspat: } [x, y] \subseteq \omega_p \Leftrightarrow x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} \subseteq \omega_p \quad (3.71)$$

$$\Leftrightarrow \beta_p^*(x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1}) = \omega_p \quad (3.71a)$$

$$\Leftrightarrow \beta_p^*(x) \otimes \beta_p^*(y) \otimes \beta_p^*(x^{-1}) \otimes \beta_p^*(y^{-1}) = \omega_p \quad (3.71b)$$

$$\Leftrightarrow \beta_p^*(x) \otimes \beta_p^*(y) \otimes \beta_p^*(x)^{-1} \otimes \beta_p^*(y)^{-1} = \omega_p \quad \square \quad (3.71c)$$

Teorem 3.5.1 Her Cat^1 -grup bir Cat^1 -poli-gruptur (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat: P ve C birer grup olduğundan

$$\omega_p = \{e\} \quad (3.72)$$

ve

$$\ker^* t = \ker t \quad (3.73)$$

$$\ker^* h = \ker h \quad \square \quad (3.74)$$

Teorem 3.5.2 $\mathcal{A} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(k; t, h: P / \beta_p^* \times P / \beta_c^* \rightarrow P / \beta_p^*)$ bir Cat^1 -poligruptur (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat: Teorem 3.4.1'den $(C / \beta_c^*, P / \beta_p^*, \mathcal{D}, \psi)$ 'nın bir çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} h(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c)) &= \mathcal{D}(\beta_c^*(c)) \odot \beta_p^*(p) \\ t(\beta_p^*(p), \beta_c^*(c)) &= \beta_p^*(p) \\ k(\beta_p^*(p)) &= (\beta_p^*(p) \cdot \omega_c) \end{aligned} \quad (3.75)$$

olacak şekilde

$$\begin{array}{ccc} & & h \\ P / \beta_p^* \times P / \beta_c^* & \xrightarrow{\quad} & P / \beta_p^* \\ & \xleftarrow{\quad t \quad} & \\ & \xleftarrow{\quad k \quad} & \end{array}$$

olur. Bu durumda $h|_{P / \beta_p^*} = t|_{P / \beta_p^*} = Id_P$ ve $[kerh, kert] = 1_{P / \beta_p^* \times C / \beta_c^*}$ olup Cat^1 -grup şartları sağlanır. $\square$

Lemma 3.5.2

$$\begin{aligned} t^*: P / \beta_p^* &\rightarrow C / \beta_c^* \\ t^*(\beta_p^*(p)) &= \beta_c^*(t(p)) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned}
k^* : C / \beta_C^* &\rightarrow P / \beta_P^* \\
k^*(\beta_C^*(c)) &= \beta_P^*(k(c))
\end{aligned} \tag{3.77}$$

olacak şekilde tanımlanan $C = (k; t, h : P \rightarrow C)$ Cat¹-poli-gurubu için

$$P / \beta_P^* \cong \ker^* \rtimes C / \beta_C^* \text{ 'dir (Dietzman, 1946).} \tag{3.78}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
f : P / \beta_P^* &\rightarrow \ker^* \rtimes C / \beta_C^* \\
f(\beta_P^*(p)) &= (k^* t^*(\beta_P^*(p)) \otimes \beta_P^*(p), t^*(\beta_P^*(p)))
\end{aligned} \tag{3.79}$$

ve

$$\begin{aligned}
g : \ker^* \rtimes C / \beta_C^* &\rightarrow P / \beta_P^* \\
g(\beta_P^*(p), \beta_C^*(c)) &= k^*(\beta_P^*(p) / \beta_C^*(c))
\end{aligned} \tag{3.80}$$

olacak şekilde tanımlayalım. f ve g' nin homomorfizm olduğu açıktır. $\square$

Burada $\ker^* \leq P / \beta_P^*$ ve $k^*(C / \beta_C^*) \leq P / \beta_P^*$ olduğunda $k^*(C / \beta_C^*)$ 'nin $\ker^*$ üzerine bir etkisi vardır. Bu yüzden $\ker^* \rtimes C / \beta_C^*$ yarı direkt çarpımının tanımlandığı unutulmamalıdır. $\square$

Teorem 3.5.3 $C = (k; t, h : P \rightarrow C)$ bir Cat¹-poli-grup olsun. $S = \ker^*$ ve $\mathcal{D} = h^* / \ker^*$ olduğunda bir çaprazlanmış modül yapısı elde edilir (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat: C / β_C^* 'nin S üzerindeki etkisi, P / β_P^* 'de bir konjugasyondur. $\beta_P^*(x) \in \ker^*$ ve $\beta_P^*(y) \in \ker h^*$ olsun. Bu durumda

$$\beta_P^*(x) = (\omega_C, \beta_P^*(a)), \quad \beta_P^*(y) = (\mathcal{D}(\beta_P^*(b)), \beta_P^*(b^{-1})) \tag{3.81}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\beta_p^*(x) \odot \beta_p^*(y) &= (\omega_c, \beta_p^*(a)) \odot (\mathcal{D}(\beta_p^*(b)), \beta_p^*(b^{-1})) \\
&= \left(\mathcal{D}(\beta_p^*(b)), {}^{\mathcal{D}(\beta_p^*(b))} \beta_p^*(a) \odot \beta_p^*(b^{-1}) \right) \\
\beta_p^*(y) \odot \beta_p^*(x) &= (\mathcal{D}(\beta_p^*(b)), \beta_p^*(b^{-1})) \odot (\omega_c, \beta_p^*(a)) \\
&= (\mathcal{D}(\beta_p^*(b)), {}^{\omega_c} \beta_p^*(b^{-1}) \odot \beta_p^*(a)) \\
&= (\mathcal{D}(\beta_p^*(b)), \beta_p^*(b^{-1}) \odot \beta_p^*(a))
\end{aligned} \tag{3.82}$$

olup

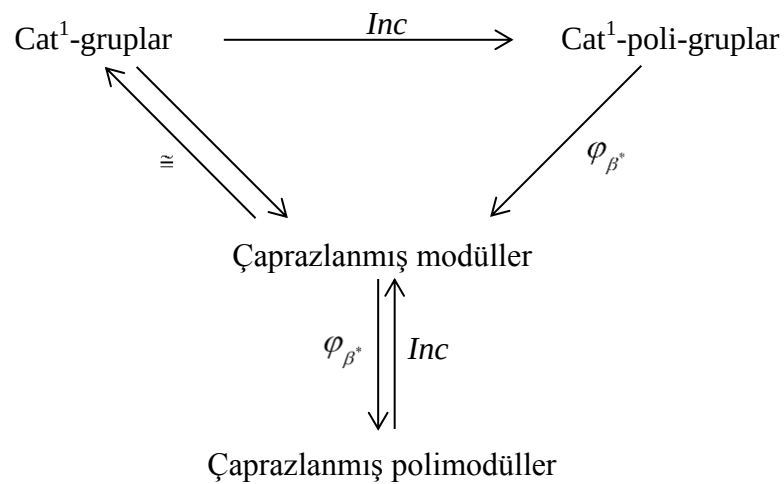
$$\beta_p^*(x) \odot \beta_p^*(y) = \beta_p^*(y) \odot \beta_p^*(x) \tag{3.83}$$

eşitliği ile

$${}^{\mathcal{D}(\beta_p^*(b))} \beta_p^*(a) = \beta_p^*(b^{-1}) \odot \beta_p^*(a) \odot \beta_p^*(b) \tag{3.84}$$

ifadeleri birbirine denktir. $\square$

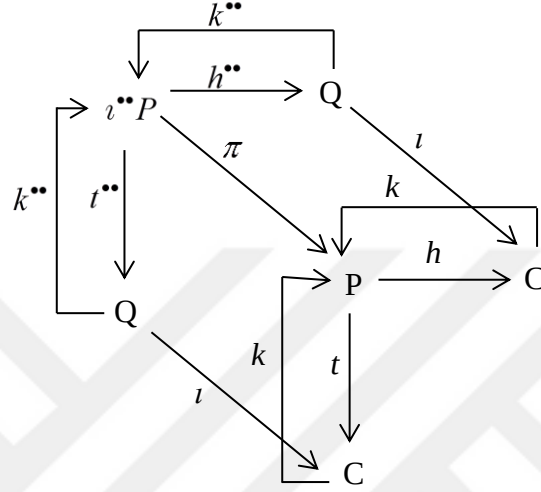
Sonuç 3.5.1 Aşağıdaki diyagram elde edilen tüm sonuçlar ve bunlar arasındaki ilişkileri gösterir (Davvaz ve Alp, 2014).



3.6 Geri Çekme Cat¹-Poli-Gruplar

Bu bölümde geri çekme Cat¹-poli-grupları tanımlayıp bu çerçevede bazı sonuçlar elde edeceğiz. Özel olarak bir geri çekme Cat¹-poligrup ile Cat¹-grup elde edebileceğimizi ispatlayacağız.

Tanım 3.6.1 Bir geri çekme Cat¹-poli-grubu şu şekilde tanımlayabiliriz (Davvaz ve Alp, 2014).



$\mathcal{C} = (k; t, h : P \rightarrow C)$ bir Cat¹-poli-grup ve $i : Q \rightarrow C$ bir güçlü homomorfizm olsun.

$$\begin{aligned} t''(q_1, p, q_2) &= q_1 \\ h''(q_1, p, q_2) &= q_2 \\ k''(q) &= (q, k_z(q), q) \end{aligned} \tag{3.85}$$

ve

$$i''P = \{(q_1, p, q_2) \in Q \times P \times Q \mid i(q_1) = t(p), i(q_2) = h(p)\} \tag{3.86}$$

olsun. Bu durumda $i''C = (k''; t'', h''; i''P \rightarrow Q)$ ile tanımlanan $i''C$, P 'nin bir geri çekmesidir denir ve $i''P$ 'nin çarpımı tersinirdir.

$$\begin{aligned} \pi : i''P &\rightarrow P \\ (q_1, p, q_2) &\mapsto p \end{aligned} \tag{3.87}$$

olacak şekilde tanımlanan (π, ι) ikilisi Cat^1 -poli-grubun bir morfizmidir.

Teorem 3.6.1 Bir geri çekme Cat^1 -poli-grup yapısı ile Cat^1 -poli-grup yapısı elde edilebilir (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat: Cat^1 -poli-grup aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} t^{\bullet\bullet}k^{\bullet\bullet}(q) &= t^{\bullet\bullet}(q, k\iota(q), q) = q \\ h^{\bullet\bullet}k^{\bullet\bullet}(q) &= h^{\bullet\bullet}(q, k\iota(q), q) = q \end{aligned} \quad (3.88)$$

olduğundan $t^{\bullet\bullet}k^{\bullet\bullet} = h^{\bullet\bullet}k^{\bullet\bullet}(q) = Id_Q$ olup CAT-P-1 sağlanır.

CAT-P-2 için

$$\begin{aligned} x &= (q_1', p_1, q_1) \in \ker^* t^{\bullet\bullet} \\ y &= (q_2, p_2, q_2') \in \ker^* h^{\bullet\bullet} \end{aligned} \quad (3.89)$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} t^{\bullet\bullet}(q_1', p_1, q_1) &= q_1' \in \omega_Q \text{ ve} \\ h^{\bullet\bullet}(q_2, p_2, q_2') &= q_2' \in \omega_Q \end{aligned} \quad (3.90)$$

olup Lemma 3.3.1 yardımıyla ω_Q , Q' nun bir alt grubu olur. Bunun aynı zamanda bir normal alt grup olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $b \in Q$ ve $a \in \omega_Q$ keyfi birer eleman olsun.

$\forall z \in b \cdot a \cdot b^{-1}$ için

$$\begin{aligned} \beta_Q^*(z) &= \beta_Q^*(b) \otimes \beta_Q^*(a) \otimes \beta_Q^*(b^{-1}) \\ &= \beta_Q^*(b) \otimes \omega_Q \otimes \beta_Q^*(b^{-1}) \\ &= \beta_Q^*(y) \otimes \beta_Q^*(b^{-1}) \\ &= \beta_Q^*(b \cdot b^{-1}) \\ &= \beta_Q^*(e) = \omega_Q \end{aligned} \quad (3.91)$$

olduğundan $z \in \omega_Q$ olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} q_1^{-1} \cdot q_2 \cdot q_1^{-1} \cdot q_2^{-1} &\subseteq \omega_Q \text{ ve} \\ q_1 \cdot q_2^{-1} \cdot q_1^{-1} \cdot q_2^{-1} &\subseteq \omega_Q \end{aligned} \quad (3.92)$$

sonuçları elde edilir. Diğer taraftan, $\iota^{\bullet\bullet}$ tanımı göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} \iota(q_1') &= t(p_1) \in \iota(\omega_Q) \\ \iota(q_2') &= h(p_2) \in \iota(\omega_Q) \end{aligned} \quad (3.93)$$

elde edilir. Şimdi $\iota(\omega_Q) \subseteq \omega_C$ olduğunu gösterelim. $e \in \omega_Q$ ve $\iota(e) = \omega_C$ olduğu açıktır.

$\exists a \in \omega_Q$ için $\iota(a) = \omega_C$ var olduğunu kabul edelim. $a, e \in \omega_Q$ için $\beta_C^*(\iota(a)) \neq \omega_C$ olur.

Diğer taraftan $\iota(e) = e \in \omega_C$ 'dir. Dolayısıyla $\beta_C^*(\iota(e)) = \omega_C$ olur. Bu eşitliklere dikkat

edildiğinde $\beta_C^*(\iota(e)) \neq \beta_C^*(\iota(a))$ olduğu görülebilir. Bu da $\iota^*(\beta_Q^*(e)) \neq \iota^*(\beta_Q^*(a))$

olması anlamına gelir ki bir çelişki doğurur. Bu yüzden $t(p_1) \in \omega_C$ ve $h(p_2) \in \omega_C$ için

$$p_1 \in \ker^* t \text{ ve } p_2 \in \ker^* h$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} [x, y] &= x \square y \square x^{-1} \square y^{-1} \\ &= \{(q, p, q') \mid q \in q_1^{-1} \cdot q_2 \cdot q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}, p \in [p_1, p_2], q' \in q_1 \cdot q_2^{-1} \cdot q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}\} \\ &\subseteq \omega_Q \times \omega_Q \times \omega_Q \end{aligned} \quad (3.94)$$

olduğundan CAT-P-2 sağlanmış olur. $\square$

Teorem 3.6.2 $\iota^{\bullet} \mathcal{X}$, $\iota: Q \rightarrow P$ üzerinde $\mathcal{X}$ çaprazlanmış poli-modülünün bir geri çekmesi olsun. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sırasıyla $\mathcal{X}$ ve $\iota^{\bullet} \mathcal{X}$ üzerinde Cat^1 -grup yapısını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{B} \cong \iota^{\bullet\bullet} \mathcal{A}$ olur (Davvaz ve Alp, 2014).

İspat:

$$\begin{array}{ccc}
 i^\bullet C & \longrightarrow & C \\
 \downarrow \partial^\bullet & & \downarrow \partial \\
 Q & \xrightarrow{\iota} & P
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 i^\bullet C / \beta_{i^\bullet C}^* & \longrightarrow & C / \beta_C^* \\
 \downarrow \mathcal{D}^\bullet & & \downarrow \mathcal{D} \\
 Q / \beta_Q^* & \xrightarrow{\iota^\bullet} & P / \beta_P^*
 \end{array}$$

$\partial^\bullet : i^\bullet C \rightarrow Q$ olmak üzere $i^\bullet \mathcal{X} = (i^\bullet, Q, \partial^\bullet, \alpha^\bullet)$ geri çekme çaprazlanmış modülünü ele alalım. $\mathcal{B}$ poli-grubunun tanım kümesi $Q / \beta_Q^* \times i^\bullet C / \beta_{i^\bullet C}^*$ olarak tanımlansın.

$$\begin{array}{ccc}
 Q / \beta_Q^* \times i^\bullet C / \beta_{i^\bullet C}^* & \longrightarrow & P / \beta_P^* \times C / \beta_C^* \\
 \downarrow \begin{matrix} t^\bullet \\ h^\bullet \end{matrix} & & \downarrow \begin{matrix} t \\ h \end{matrix} \\
 Q / \beta_Q^* & \xrightarrow{\iota^\bullet} & P / \beta_P^*
 \end{array}$$

sırasıyla $\mathcal{B}$ 'nin kuyruk, baş homomorfizmleri ve inclusion fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$t^\bullet(\beta_Q^*(q'), \beta_{i^\bullet C}^*(q, c)) = \beta_Q^*(q') \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
 h^\bullet(\beta_Q^*(q'), \beta_{i^\bullet C}^*(q, c)) &= \mathcal{D}^\bullet(\beta_{i^\bullet C}^*(q, c)) \odot \beta_Q^*(q') \\
 &= \beta_Q^*(q) \odot \beta_Q^*(q') \\
 &= \beta_Q^*(q \bullet q')
 \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$k^\bullet(\beta_Q^*(q)) = (\beta_Q^*(q), \omega_{i^\bullet C}) \quad (3.97)$$

Şimdi $(\lambda, Id): \mathcal{B} \rightarrow i^{\bullet\bullet} \mathcal{A}$ olacak şekilde Cat^1 -gruplarının bir izomorfizmini tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccccc}
& Q / \beta_Q^* \times_{i^* C} \beta_{i^* C}^* & \xrightarrow{\lambda} & i^{**}(P / \beta_P^* \times C / \beta_C^*) & \\
\begin{array}{c} \downarrow t^* \\ \downarrow h^* \end{array} & & & & \begin{array}{c} \downarrow t^{**} \\ \downarrow k^{**} \end{array} \\
k^* & Q / \beta_Q^* & \xrightarrow{Id} & Q / \beta_Q^* & k^{**}
\end{array}$$

Burada

$$\lambda(\beta_Q^*(q'), \beta_{i^* C}^*(q, c)) = (\beta_Q^*(q'), (\beta_P^*(i(q')), \beta_C^*(c)), \beta_Q^*(q \cdot q')) \quad (3.98)$$

olup,

$$\lambda(\beta_Q^*(q'), \beta_{i^* C}^*) \in i^{**}(P / \beta_P^* \times C / \beta_C^*) \quad (3.99)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Çünkü;

$$t(\beta_P^*(i(q')), \beta_C^*(c)) = \beta_P^*(i(q')) = i^*(\beta_Q^*(q')) \quad (3.100)$$

ve

$$\begin{aligned}
h(\beta_P^*(i(q')), \beta_C^*(c)) &= \mathcal{D}(\beta_C^*(c)) \odot i^*(\beta_Q^*(q')) \\
&= i^*(\beta_Q^*(q)) \odot i^*(\beta_Q^*(q')) \\
&= i^*(\beta_Q^*(q) \odot \beta_Q^*(q')) \\
&= i^*(\beta_Q^*(q \cdot q'))' \text{ dir}
\end{aligned} \quad (3.101)$$

Şimdi λ 'nın bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&\lambda((\beta_Q^*(q_1'), \beta_{i^* C}^*(q_1, c_1))(\beta_Q^*(q_2'), \beta_{i^* C}^*(q_2, c_2))) = \\
&= \left(\beta_Q^*(q_1' \cdot q_2'), \left(i^*(\beta_Q^*(q_1' \cdot q_2')), \left[i^*(\beta_Q^*(q_1')) \right] [\beta_C^*(c_1)] \right), \beta_Q^*(q_1' \cdot q_1 \cdot q_2' \cdot q_2) \right)
\end{aligned} \quad (3.102)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \times (\beta_Q^*(q_1'), \beta_{i,c}^*(q_1, c_1)) \times (\beta_Q^*(q_2'), \beta_{i,c}^*(q_2, c_2)) = \\
& = (\beta_Q^*(q_1'), (\beta_P^*(\iota(q_1')), \beta_C^*(c_1)), \beta_Q^*(q_1 \cdot q_1')) (\beta_Q^*(q_2'), (\beta_P^*(\iota(q_2')), \beta_C^*(c_2)), \beta_Q^*(q_2 \cdot q_2')) \\
& = (\beta_Q^*(q_1) \odot \beta_Q^*(q_2), ((\beta_P^*(\iota(q_1')), \beta_C^*(c_1)) \cdot (\beta_P^*(\iota(q_2')), \beta_C^*(c_2))), \beta_Q^*(q_1 \cdot q_1') \odot \beta_Q^*(q_2 \cdot q_2')) \\
& = (\beta_Q^*(q_1 \cdot q_2), (\iota^*(\beta_Q^*(q_1'), \beta_C^*(c_1)) \cdot (\iota^*(\beta_Q^*(q_2'), \beta_C^*(c_2))), \beta_Q^*(q_1 \cdot q_1' \cdot q_2 \cdot q_2')) \\
& = \left(\beta_Q^*(q_1 \cdot q_2), (\iota^*(\beta_Q^*(q_1')) \odot \iota^*(\beta_Q^*(q_2')), \left([\iota^*(\beta_Q^*(q_1'))] [\beta_C^*(c_1)] \otimes \beta_C^*(c_2) \right), \beta_Q^*(q_1 \cdot q_1' \cdot q_2 \cdot q_2') \right)
\end{aligned}$$

olup $\times$ 'nın homomorfizm olduğu görülebilir. $\times$ 'nın tersi $\times^{-1}$ ile ifade edilsin ve aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\times^{-1}(\beta_Q^*(q_1), (\beta_P^*(p), \beta_C^*(c)), \beta_Q^*(q_2)) = (\beta_Q^*(q_1), (\beta_Q^*(q_1^{-1} \cdot q_2), \beta_C^*(c))) \quad (3.103)$$

Buradan;

$$\begin{aligned}
t^{\bullet\bullet} \times (\beta_Q^*(q'), \beta_{i,c}^*(q, c)) &= t^{\bullet\bullet} (\beta_Q^*(q'), (\beta_P^*(\iota(q')), \beta_C^*(c)), \beta_Q^*(q \cdot q')) \\
&= \beta_Q^*(q') \\
&= t^{\bullet} (\beta_Q^*(q'), \beta_{i,c}^*(q, c))
\end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
h^{\bullet\bullet} \times (\beta_Q^*(q'), \beta_{i,c}^*(q, c)) &= h^{\bullet\bullet} (\beta_Q^*(q'), (\beta_P^*(\iota(q')), \beta_C^*(c)), \beta_Q^*(q \cdot q')) \\
&= \beta_Q^*(q \cdot q') \\
&= h^{\bullet} (\beta_Q^*(q'), \beta_{i,c}^*(q, c))
\end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned}
\times k^{\bullet}(\beta_Q^*(q)) &= \times (\beta_Q^*(q), (\omega_Q, \omega_C)) \\
&= (\beta_Q^*(q), (\iota^*(\beta_Q^*(q)), \omega_C), \beta_Q^*(q)) \\
&= k^{\bullet\bullet}(\beta_Q^*(q))
\end{aligned} \quad (3.106)$$

olduğundan diyagramdaki denklikler sağlanmış olur. Buda ispatın tamamlanması anlamına gelir. $\square$

BÖLÜM IV

GERİ ÇEKME VE İLERİ İTME ÇAPRAZLANMIŞ POLİMODÜLLER

4.1 Geri Çekme Çaprazlanmış Polimodüller

Tanım 4.1.1 $\mathcal{X} = (C, P, \partial, \alpha)$ bir çaprazlanmış polimodül ve $\iota: Q \rightarrow P$ bir grup morfizmi olsun. Bu durumda $\iota^*C = \{(q, c) \in Q \times C \mid \iota(q) = \partial(c)\}$ ve $\partial^*(q, c) = q$ olacak şekilde $\iota^*\mathcal{X} = (\iota^*C, Q, \partial^*, \alpha^*)$, ι ile birlikte $\mathcal{X}$ üzerinde bir geri çekmedir.

Q 'nın ι^*C üzerindeki poli-grup etkisi

$${}^q(q_1, c) = \{(x, y) \mid (x, y) \in (q \circ q_1 \circ q^{-1}, {}^q c)\} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki diyagram sağlanır (Alp ve Davvaz, 2014).

$$\begin{array}{ccc} \iota^*C & \xrightarrow{h} & C \\ \downarrow \partial^* & & \downarrow \partial \\ Q & \xrightarrow{\iota} & P \end{array}$$

Yukarıdaki tanımın çaprazlanmış modüllerin geri çekmesinin bir genellemesi olduğu unutulmamalıdır.

Teorem 4.1.1 Her geri çekme çaprazlanmış modül bir geri çekme çaprazlanmış polimodüldür (Alp ve Davvaz, 2014).

İspat: Çaprazlanmış polimodül aksiyomlarının sağlaması aşağıda verilmiştir.

$$(q, c), (q', c') \in \iota^\bullet C \quad \text{için}$$

$$\partial^\bullet(q'(q, c)) = \partial^\bullet(\{x, y\} \mid x \in q' \cdot q \cdot q'^{-1}, y \in {}^{\iota(q')} c\}) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &= \{x \mid x \in q' \cdot q \cdot q'^{-1}\} \\ &= q' \cdot \partial^\bullet(q, c) \cdot q'^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial^\bullet(q', c')(q, c) &= \{(x, y) \mid (x, y) \in \partial^\bullet(q', c')(q, c)\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in q'(q, c)\} & (\because \partial^\bullet \text{tanımından}) \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in (q' \cdot q \cdot q'^{-1}, {}^{\iota(q')} c)\} & (\because \text{etki tanımından}) \\ &= \{(x, y) \mid x \in (q' \cdot q \cdot q'^{-1}), y \in ({}^{\iota(q')} c)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in (q' \cdot q \cdot q'^{-1}), y \in (\partial^\bullet(c') c)\} & (\because \partial(q) = \partial(c)) \\ &= \{(x, y) \mid x \in (q' \cdot q \cdot q'^{-1}), y \in (c' \star c \star c'^{-1})\} \\ &= (q', c') * (q, c) * (q', c')^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

(2)

□

İndirgenmiş polimodüllerin evrensel özelliği Brown ve Wensley (1995) tarafından verilmiştir.

$\mathcal{X} = (\mu: M \rightarrow Q)$ bir çaprazlanmış polimodül ve $\iota: Q \rightarrow P$ homomorfizmi ile indirgenmesi $\iota^\bullet \mathcal{X} = (\delta: \iota^\bullet M \rightarrow P)$ olsun. Diyagramda

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & Q \\ \downarrow \bar{\iota} & & \downarrow \iota \\ \iota^\bullet M & \xrightarrow{\delta} & P \\ f \swarrow & g \swarrow & \searrow \gamma \\ & G & \end{array}$$

$(\iota, \bar{\iota})$ ikilisi çaprazlanmış polimodüllerin bir morfizmidir. Öyle ki herhangi bir çaprazlanmış R-modül $\mathcal{Y} = (\gamma: G \rightarrow P)$ ve çaprazlanmış polimodüllerin bir morfizmi $(f, \iota): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ için çaprazlanmış polimodüllerin $g\bar{\iota} = f$ gibi bir biricik morfizmi $(g, 1): \iota^{\bullet\bullet} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ vardır (Alp ve Davvaz, 2014).

Önerme 4.1.1 $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ birer poli-grup ve $\partial: C \rightarrow P$ bir güçlü homomorfizm olsun. $\forall c \in C$ için $\mathcal{D}(\beta_C^*(c)) = \beta_P^*(\partial(c))$ kısıtlamasıyla ∂ grup homomorfizmini $\mathcal{D}: C/\beta_C^* \rightarrow P/\beta_P^*$ olacak şekilde indirger (Alp ve Davvaz, 2014).

$\forall c \in C, p \in P$ için C üzerinde $c_1, \dots, c_n$ elemanı $c^p = c \star \dots \star c_n$ olacak şekilde mevcutsa C 'nin P üzerindeki etkisi çarpımsal etkidir denir.

Örnek 4.1.1 Örnek 3.2.2.' de tanımlanan etki çarpımsal etkidir (Alp ve Davvaz, 2014).

$\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ birer poli-grup ve $\alpha: P \times C \rightarrow \mathcal{P}^*(C)$ C üzerinde bir çarpımsal etki olsun. $\psi: P/\beta_P^* \times P/\beta_C^* \rightarrow \mathcal{P}^*(P/\beta_C^*)$ dönüşümünü alışılmış biçimde tanımlayalım.

$$\psi(\beta_P^*(p), \beta_C^*(c)) = \left\{ \beta_C^*(x) \mid x \in \bigcup_{\substack{y \in \beta_C^*(c) \\ z \in \beta_P^*(p)}} {}^z y \right\} \quad (4.4)$$

β_C^* tanımında, P 'nin C üzerindeki etkisi çarpımsal etki olup $\psi(\beta_P^*(p), \beta_C^*(c))$ singleton olduğu sonucuna varılır.

$$\begin{aligned} \psi: P/\beta_P^* \times P/\beta_C^* &\rightarrow P/\beta_C^* \\ x \in \bigcup_{\substack{y \in \beta_C^*(c) \\ z \in \beta_P^*(p)}} {}^z y &\text{ için } \psi(\beta_P^*(p), \beta_C^*(c)) = \beta_C^*(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Böylece $\psi(\beta_P^*(p), \beta_C^*(c)) = {}^{[\beta_P^*(p)]} [\beta_C^*(c)]$ olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 4.1.2 $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ birer poli-grup ve $\alpha : P \times C \rightarrow \mathcal{P}^*(C)$ C üzerinde bir çarpımsal etki olsun. ψ , P/β_p^* grubunun P/β_c^* grubu üzerindeki etkisidir (Alp ve Davvaz, 2014).

Teorem 4.1.2 $\mathcal{A}' = (C, P, \partial, \alpha)$ yapısı, P 'nin C üzerindeki etkisi çarpımsal etki olacak şekilde bir polimodül olsun. $\mathcal{X}_{\beta^*} = (C/\beta_c^*, P/\beta_p^*, \mathcal{D}, \psi)$ bir çaprazlanmış modüldür (Alp ve Davvaz, 2014).

Sonuç 4.1.1 $\mathcal{A}' = (C, P, \partial, \alpha)$ P 'nin C üzerindeki etkisi çarpımsal etki olmak üzere bir çaprazlanmış modüldür. $\iota : Q \rightarrow P$ poli-grupların bir morfizmi olsun. $\mathcal{X}_{\beta^*} = (C/\beta_c^*, P/\beta_p^*, \mathcal{D}, \psi)$ 'ün ι^* ile geri çekmesi $((\iota^*)^*(C/\beta_c^*), Q/\beta_q^*, \mathcal{D}^*, \psi^*)$ şeklinde tanımlanır ki burada

$$\begin{aligned} \iota^* : Q/\beta_q^* &\rightarrow P/\beta_p^* \\ \iota_q^*(\beta^*(q)) &= \beta_p^*(\iota(q)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$(\iota^*)^*(C/\beta_c^*) = \{(\beta_q^*(q), \beta_c^*(c)) \mid \iota^*(\beta^*(q)) = \mathcal{D}(\beta_c^*(c))\} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{D}^*(\beta_q^*(q), \beta_c^*(c)) = \beta_q^*(q) \quad (4.8)$$

olur. Ki böylelikle Alp (1998)' deki teorem sağlanmış olur (Alp ve Davvaz, 2014).

Teorem 4.1.3 $(\iota^*)^* = ((\iota^*)^*(C/\beta_c^*), Q/\beta_q^*, \mathcal{D}^*, \psi^*)$ bir çaprazlanmış modüldür (Alp, 1998).

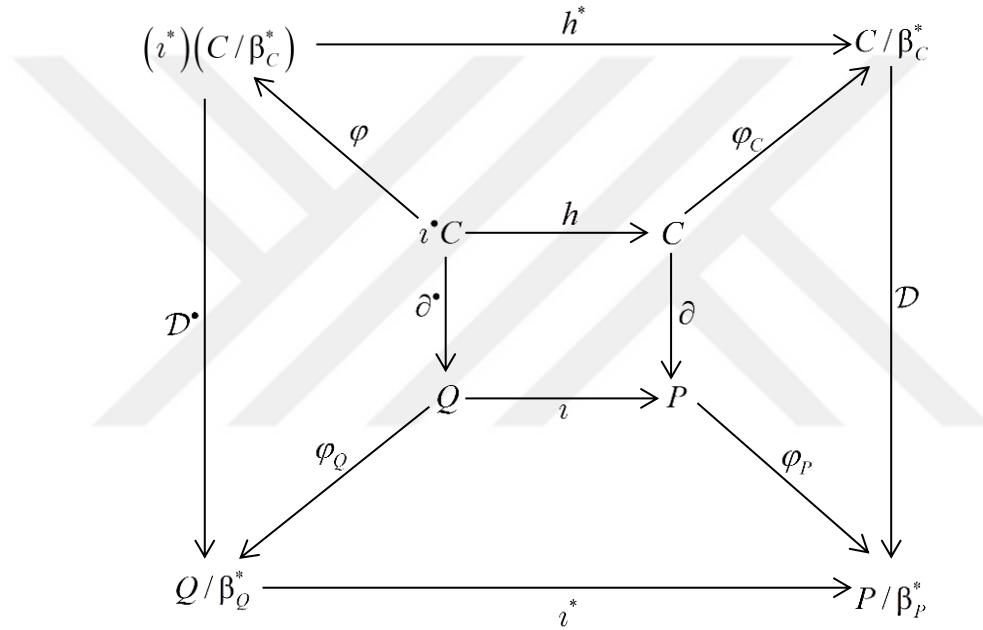
İspat: Çaprazlanmış modüllerin birinci aksiyomunu sağlamak için;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* \left([\beta_q^*(q)] [\beta_q^*(q), \beta_c^*(c)] \right) &= \mathcal{D}^* \left(\beta_q^*(q') \odot \beta_q^*(q) \odot \beta_q^*(q')^{-1}, [\iota^*(\beta_q^*(q))] [\beta_c^*(c)] \right) \\ &= \beta_q^*(q') \odot \beta_q^*(q) \odot \beta_q^*(q')^{-1} \\ &= \beta_q^*(q') \odot \mathcal{D}^*(\beta_q^*(q), \beta_c^*(c)) \odot \beta_q^*(q')^{-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Çaprazlanmış modüllerin ikinci aksiyomunu sağlamak için;

$$\begin{aligned}
& (\beta_Q^*(q'), \beta_C^*(c'))^{-1} \otimes (\beta_Q^*(q), \beta_C^*(c)) \otimes (\beta_Q^*(q'), \beta_C^*(c')) = \\
& = (\beta_Q^*(q')^{-1}, \beta_C^*(c')^{-1}) \otimes (\beta_Q^*(q), \beta_C^*(c)) \otimes (\beta_Q^*(q'), \beta_C^*(c')) \\
& = (\beta_Q^*(q')^{-1} \otimes (\beta_Q^*(q) \otimes (\beta_Q^*(q'), \beta_C^*(c')^{-1} \otimes \beta_C^*(c) \otimes \beta_C^*(c')) \\
& = ([\beta_Q^*(q')] [\beta_Q^*(q)], [\beta_C^*(c')] [\beta_C^*(c)]) \\
& = ([\beta_Q^*(q')] [\beta_Q^*(q)], \beta_C^*(c)) \\
& = [D^*(\beta_Q^*(q), \beta_C^*(c))] [(\beta_Q^*(q), \beta_C^*(c))] \quad \square
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Sonuç 4.1.2 Aşağıdaki diyagram değişmelidir (Alp ve Davvaz, 2014).



4.2 İleri İtme Çaprazlanmış Polimodüller

$X, \langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ poli-grubunun boştan farklı bir alt kümesi ve $\{A_i \mid i \in J\}$ P' nin X' i içeren alt gruplarının bileşkesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in J} A_i$ ifadesi **X tarafından üretilen alt poli-grup** olarak isimlendirilir ve $\langle X \rangle$ ile ifade edilir (Alp ve Davvaz, 2014).

$$\langle X \rangle = \bigcup \{x_1^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ x_k^{\varepsilon_k} \mid x_i \in X, k \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\} \tag{4.11}$$

(C, P, ∂, α) bir çaprazlanmış polimodül ve $\langle H, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ bir poli-grup olsun. Bu durumda $\mathcal{P}^*(H)$ ' in bir monoid olduğu aşikârdır (Alp ve Davvaz, 2014).

Kabul edelim ki H' , $\mathcal{P}^*(H)$ ' in elemanlarının bir grubu olsun. Bu durumda H' bir poli-grup olarak düşünülebilir (Alp ve Davvaz, 2014).

Kabul edelim ki H' , $\mathcal{P}^*(H)$ ' in tersinir ve çift yönlü elemanlarının bir poli-grubu olsun (Alp ve Davvaz, 2014).

Tanım 4.2.1 $\phi: P \rightarrow H'$ poli-grupların sürekli bir güçlü homomorfizmi olsun. $\imath_*(C)$ poli-grubu aşağıdaki bağıntılar ile $C \times H'$ tarafından üretilen bir poli-grup olarak

$$i) \quad (c_1, h) * (c_2, h) = \{(c, h) \mid c \in c_1 \star c_2\} \quad (4.12)$$

$$ii) \quad ({}^p c, h) = (c, h \cdot \phi(p)) \text{ olduğunda}$$

$$\{(c', h) \mid c' \in {}^p c\} = \{(c, h') \mid h' \in h \cdot \phi(p)\} \quad (4.13)$$

$$iii) \quad \forall h, h_1, h_2 \in H', \quad c, c_1, c_2 \in C \text{ ve } p \in P \text{ için}$$

$$(c_1, h_1) * (c_2, h_2) * (c_1, h_1)^{-1} = \{(c_2, h') \mid h' \in h_1 \cdot (\phi \partial(c_1)) \cdot h_1^{-1} \cdot h_2\} \quad (4.14)$$

$\imath_*(C)$ ' nin tümüne etki edecek şekilde $\partial_*: \imath_*(C) \rightarrow H$ homomorfizmini

$$\partial_*(c, h) = h \cdot (\phi \partial(c)) \cdot h^{-1} \quad (4.15)$$

ile tanımlayalım. $\imath_*(C)$ 'ye soldan sürekli H' -poli-grup etkisini

$$\forall h, h_1 \in H', \quad c \in C \text{ için}$$

$${}^h(c, h_1) = \{(c, h') \mid h' \in h \cdot h_1\} \quad (4.16)$$

ile ve ψ sürekli güçlü homomorfizmini

$$\begin{aligned} \psi: C &\rightarrow \imath_*(C) \\ \psi(c) &= (c, e) \end{aligned} \quad (4.17)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki diyagram oluşur (Alp ve Davvaz, 2014).

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\psi} & \iota_{\bullet}(C) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial_{\bullet} \\
 P & \xrightarrow{\phi} & H'
 \end{array}$$

Böylelikle ileri itme çaprazlanmış polimodüllerin $\iota_{\bullet}(C)$ ve $\partial_{\bullet}$ etkileriyle oluştuğu görülebilir.

Önerme 4.2.1 Yukarıdaki tanımda verilen $\partial_{\bullet} : \iota_{\bullet}(C) \rightarrow H'$ cebirsel yapısı H' üzerinde bir çaprazlanmış polimodüldür (Alp ve Davvaz, 2014).

İspat: Çaprazlanmış polimodül aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}
 \partial_{\bullet} \left({}^h(c, h_1) \right) &= \partial_{\bullet} \left(\{ (c, h') \mid h' \in h \cdot h_1 \} \right) \\
 &= \{ \partial_{\bullet}(c, h') \mid h' \in h \cdot h_1 \} \\
 &= \{ h' \cdot (\phi \partial(c)) \cdot h'^{-1} \mid h' \in h \cdot h_1 \} \\
 &= h \cdot h^{-1} \cdot (\partial_{\bullet}(c, h_1)) \cdot h_1^{-1} \cdot h^{-1} \\
 &= h \cdot (\partial_{\bullet}(c, h_1)) \cdot h^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{\bullet}(c, h) \left(c_1, h_1 \right) &= {}^{h(\phi \partial(c)) \cdot h^{-1}}(c_1, h_1) \\
 &= \{ (c_1, h') \mid h' \in h \cdot (\phi \partial(c)) \cdot h^{-1} \cdot h_1 \} \\
 &= (c, h) * (c_1, h_1) * (c, h)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

□

Önerme 4.2.2 $\langle C, \star, e, {}^{-1} \rangle$, $\langle P, \circ, e, {}^{-1} \rangle$ ve $\langle B, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ birer poli-grup, $\partial : C \rightarrow P$ ve $\delta : B \rightarrow P$ birer çaprazlanmış polimodül ve

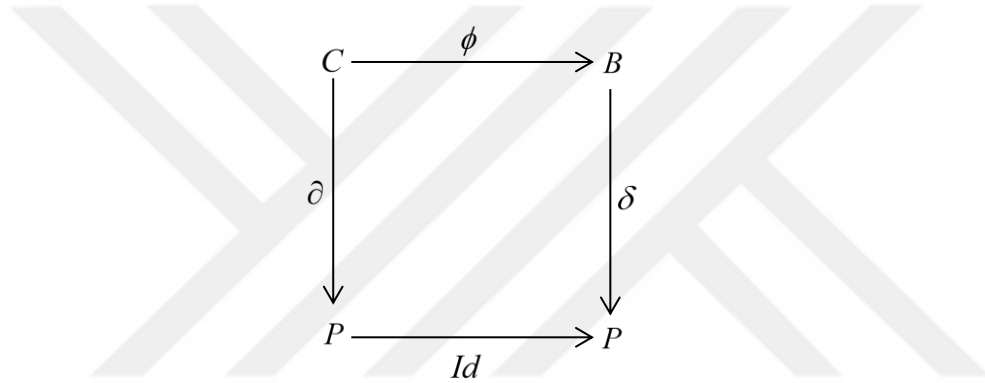
$$(\phi, Id):(\partial:C \rightarrow P) \rightarrow (\delta:B \rightarrow P) \quad (4.20)$$

çaprazlanmış polimodüllerin bir dönüşümü olsun. C üzerinde sürekli bir B -etkisi ${}^b_c = \delta^{(b)}c$ ile tanımlansın. Bu durumda

$$\phi:C \rightarrow B \quad (4.21)$$

bir çaprazlanmış polimodül olarak elde edilir (Alp ve Davvaz, 2014).

İspat: $\partial = \delta\phi$ ve $\phi({}^p_c) = {}^p\phi(c)$ olacak şekilde iki çaprazlanmış modülü aşağıdaki diyagramdaki şekilde gösterebiliriz.



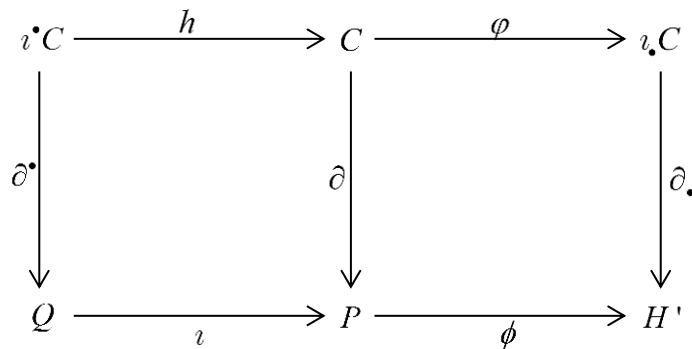
Bu durumda çaprazlanmış polimodül aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$$i) \quad \phi({}^b_c) = \phi(\delta^{(b)}c) = \delta^{(b)}(\phi(c)) = b \cdot \phi(c) \cdot b^{-1} \quad (4.22)$$

$$ii) \quad \phi({}_{c_2}c_1) = \delta^{(\phi(c_2))}(c_1) = \delta\phi(c_2)(c_1) = \partial^{(c_2)}(c_1) = c_2 \star c_1 \star c_2^{-1} \quad (4.23)$$

olup çaprazlanmış polimodül aksiyomları sağlanır.

Eğer geri çekme ve ileri itme diyagramlarını beraber incelemek istersek aşağıdaki diyagram oluşur.



$\phi \iota \partial^\bullet = \partial_\bullet \phi h$ olduğundan diyagramın değişmeli olduğu söylenebilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
 \phi \iota \partial^\bullet (q, c) &= \phi \iota (q) \\
 &= \phi \partial (h(q, c)) \\
 &= \partial_\bullet (h(q, c), e) \\
 &= \partial_\bullet \phi (h(q, c)) \\
 &= \partial_\bullet \phi h(q, c)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

olup aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
 \iota^\bullet C & \xrightarrow{\phi \circ h} & \iota_\bullet C \\
 \downarrow \partial^\bullet & & \downarrow \partial_\bullet \\
 Q & \xrightarrow{\phi \circ \iota} & H'
 \end{array}$$

ve ispat tamamlanır. $\square$

BÖLÜM V

SONUÇ

Bu tezde çaprazlanmış modül kategorisinin ve bu kategoriye denk olan Cat^1 kategorisinin güzel bir uygulaması olan poligrup, çaprazlanmış modül ve Cat^1 -poligrup tanımlamaları yapılmıştır.

Ayrıca bu kategorilerin ileri itme ve geri çekme tanımlamaları da bu tezde verilmiştir.



KAYNAKLAR

Alp, M. and Davvaz, B., Crossed polymodules, to appear.

Alp, M., Pullbacks of Crossed modules and cat^1 -groups, *Turkish J. Math.* 22 (1998), No. 3, 273-281.

Alp, M., and Gürmen, Ö., Pushouts of profinite crossed modules and cat^1 -profinite groups, *Turkish Journal of Mathematics*, 27 (2003), 539-548.

Alp, M., Actor of Crossed modules of Algebroids, *Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc.*, 16 (2005), 6-15.

Alp, M., Pullback Crossed modules of Algebroids, *Iranian J. Sci. & Tech., Transaction A*, 32(A3) (2008a), 175-181.

Alp, M., Pullbacks of profinite crossed modules and CAT^1 -profinite groups, *Algebras Groups Geom.*, 25(2) (2008b), 215-221.

Alp, M., and Wensley, C. D., XMOD, Crossed modules and cat^1 -groups in GAP, version 2.19, (2012) 1-49.

Alp, M., and Davvaz, B., Pullback and pushout crossed polymodules, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, (2014)

Alp, M., and Davvaz, B., Crossed Polymodules And Fundamental Relations, *U.P.B. Sci. Bull.*, Series A, Vol. 77, Iss. 2, (2015) ISSN 1223-7027

Ben-Yacoov, I., On the fine structure of polygroup blow-up, *Arch. Math. Logic*, 42 (2003) 649-663

Brown, B., and Mosa, G. H. , Double categories, R-categories and crossed modules, *U. C. N. W. Maths* , Preprint 88. 11 (1988), 1-18.

Brown, R., and Gilbert, N.D., Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules, *Proc. London Math. Soc.* (3) 59 (1989), 51-73.

- Brown, R., and Wensley, C. D., On finite induced crossed modules, and the homotopy 2-type of mapping cones, *Theory Appl. Categ.*, 1(3) (1995), 54-71.
- Brown, R., and Wensley, C. D., On the computation of induced crossed modules, *Theory Appl. Categ.* 2 (1996) 3-16
- Campagne, H., Partition hypergroups, *Amer. J. Math.*, 6 (1940) 599-612.
- Comer, S.D., Polygroups derived from cogenerated, *J. Algebra*, 89 (1984), 397-405.
- Comer, S. D., Extension of polygroups and their representations using colour schemes, *Lecture notes in Math.*, No 1004, *Universal Algebra and Lattice Theory*, (1982) 91-103.
- Corsini, P., Prolegomena of Hypergroup Theory, *Second edition*, Avaiain editore, 1993.
- Corsini, P. and Leoreanu, V., Applications of Hyperstructure Theory, *Kluwer Academic Publishers*, (2003).
- Davvaz, B., On polygroups and permutation polygroups, *Math. Balkanica* (N.S.) 14(1-2), (2000), 41-58
- Davvaz, B., Applications of the γ^* -relation to polygroups, *Comm. Algebra*, 35 (2007), 2698-2706.
- Davvaz, B. and Leoreanu-Fotea, V., Hyperring theory and applications, *International Academic Press*, (2007)
- Davvaz, B., Isomorphism theorems of polygroups, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* (2), 33(3) (2010), 385-392.
- Davvaz, B., A survey on polygroups and their properties, *Proceedings of the International Conference on Algebra*, 2010, 148-156 World Sci. Publ., Hackensack NJ, 2012.
- Davvaz, B., Polygroup Theory and Related Systems, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Hackensack, 2013.

Davvaz, B., and Alp, M., Cat1-polygroups and pullback cat1-polygroups, **Bulletin of the Iranian Mathematical Society**, Vol. 40 (2014), No. 3, pp. 721-735

Dietzman, P., On the multigroups of complete conjugate sets of elements of a group, **C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)**, 49 (1946) 315-317.

Dresher, M. and Ore, O., Theory of multigroups, **Amer. J. Math.**, 60 (1938) 705-733.

Freni D, A note on the core of a hypergroup and the transitive closure β^* of β , **Riv. Mat. Pura Appl.** 8 (1991) 153–156

Freni D, Strongly transitive geometric spaces: applications to hypergroups and semigroups theory, **Comm. Algebra** 32 (2004) 969–988

GAP4 The GAP Group, GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.5.5, 2012, (<http://www.gap-system.org>),

The GAP Group, GAP { Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.6, 2014, (<http://www.gap-system.org>). 140 Murat Alp, Bijan Davvaz

Korkes, F. J., and Porter, T., Profinite crossed modules (1986) (**U. W. B. Pure Mathematics Preprint** No. 86.11) pp. 1–37

Koskas, M., Groupoids, demi-groupes et hypergroupes, **J. Math. Pures Appl.** 49 (1970) 155–192

Leoreanu-Fotea, V., The heart of some important classes of hypergroups, **Pure Math. Appl.** 9 (1998) 351–360

Leoreanu-Fotea, V., Jafarpour, M., and Mousavi, Sh., The relation δ_n and multisemi-direct hyperproducts of hypergroups, **Commun. Algebra** 40 (2012) 3597–3608

Loday, J. L., Spaces with _nitely many nontrivial homotopy groups, **J. Pure Appl. Algebra** 24 (1982), no. 2, 179{202.

Mirvakili, S., and Davvaz, B., Applications of fundamental relations on nary polygroups, **Bull. Iran. Math. Soc.** 38(1) (2012) 169–184

Norrie, K. J., Actions and automorphisms of crossed modules, ***Bull. Soc. Math. France***, 118 (1990), 129-146.

Prenowitz, W., Projective geometries as multigroups, ***Amer. J. Math.***, 65 (1943) 235-256

Roth, R., Character and conjugacy class hypergroups of finite group, ***Annali di Matematica Pura ed Appl.***, 105 (1975) 295-311.

Vougiouklis, T., Hyperstructures and their representations (1994) (***Palm Harber, USA: Hadronic Press, Inc***) vol. 115

Whitehead, J.H.C., Combinatorial homotopy II, ***Bull. Amer. Math. Soc.***, 55 (1949), 453-496.

ÖZ GEÇMİŞ

Mutluhan YAKAR 23.06.1986 tarihinde Ankara’da doğdu. İlk orta ve lise öğretimini memleketi Çankırı’da tamamladı. 2004 yılında başladığı Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümünden 2008’de mezun oldu. Pedagojik formasyon eğitimini 2012-2013 yılları arasında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesinde tamamladı. Halen Akdeniz Üniversitesinde Psikolojik Danışmanlık ve Rehberlik lisans eğitimine devam etmektedir. Ekim 2008’den beri farklı özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği görevini sürdürmektedir.



