

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KALINLIK YÖNÜNDE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PALLERİN
TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif KARAHAN

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2019

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KALINLIK YÖNÜNDE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PALLERİN
TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Elif KARAHAN
(511141116)**

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Dr. Öğrt. Üyesi Özge ÖZDEMİR

HAZİRAN 2019

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511141116 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Elif KARAHAN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “KALINLIK YÖNÜNDE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PALLERİN TİTREŞİM ANALİZİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Dr. Öğrt.Üyesi Özge ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Baha ZAFER
İstanbul Üniversitesi

Dr. Öğrt. Üyesi Özge ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 03 Mayıs 2019
Savunma Tarihi : 12 Haziran 2019





Hayatımın her anında, tüm koşullarda hep yanımda olan, bu süreçte de beni yalnız bırakmayan canım ailem ve canım eşim Yusuf Karahan'a, varlığı ile hep mutlu olduğum, sevgisini, güvenini sonsuz hissettiğim, canım babam Remzi Demirsoy'a



ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesinden tezin son aşamasına gelene kadar, bu çalışmanın araştırılması ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, değerli bilgi ve tecrübelerini bizimle paylaşan saygıdeğer Dr. Öğrt. Üyesi Özge ÖZDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans hayatım boyunca beni destekleyen, hayatımın her anında yanımda olan, ilgi ve sevgileri ile her zaman ve her koşulda yanımda olduklarını hissettiğim, hayatımdaki varlıkları ile benim mutluluk kaynağım canım aileme çok teşekkür ederim. Çalışma sürecinde ve zorluklarında daima yanımda olan, olumlu ve yapıcı sözleri ile desteğini, sevgisini her zaman hissettiğim sevgili eşim Yusuf KARAHAN'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitim hayatına birlikte başladığım ve eğitim hayatım boyunca yanımda olan, desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Selim ŞAHİN ve Burak KILIÇ'a teşekkürü borç bilirim.

Mayıs 2019

Elif Karahan



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ	xvii
ŞEKİL LİSTESİ	xix
ÖZET	xxi
SUMMARY	xxiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Tezin Amacı	1
1.2 Literatür Çalışması	2
2. HELİKOPTER PALLERİ VE TİTREŞİM	5
3. FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEMELER VE KULLANIM ALANLARI	7
3.1 Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemelerin Tanımı ve Çıkış Sebepleri	7
3.2 Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemelerin Kullanım Alanları	8
4. SONLU ELEMANLAR METODU	11
5. KİRİŞ TEORİLERİ	13
5.1 Helikopter Pali için Kiriş Modeli ve Formülasyonları	15
5.2 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi	18
5.2.1 Euler-Bernoulli kiriş teorisi için enerji denklemleri	18
5.2.1.1 Merkezkaç kuvveti ve denklem çıkarımı	25
5.2.2 Euler-Bernoulli kirişi için sonlu elemanlar formülasyonu	26
5.2.3 Katılık ve kütle matrislerinin elde edilmesi	30
5.3 Timoshenko Kiriş Teorisi	31
5.3.1 Timoshenko kiriş teorisi için enerji denklemleri	32
5.3.2 Timoshenko kiriş için sonlu elemanlar formülasyonu	38
5.3.3 Katılık ve kütle matrislerinin elde edilmesi	40
6. KİRİŞ MODELLERİ İÇİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ SONUÇLARI	43
6.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi için Sayısal Sonuçlar	44
6.2 Timoshenko Kiriş Teorisi için Sayısal Sonuçlar	50
7. SONUÇ VE YORUMLAR	55
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	63



KISALTMALAR

SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
FGM	: Functionally Graded Material
FDM	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
FEM	: Finite Element Method
FGB	: Functionally Graded Beam
TBT	: Timoshenko Beam Theory



SEMBOLLER

b	: Kiriş genişliği
E	: Elastisite modülü
e₁	: Geometrik merkez ile elastik eksen arasındaki y eksen yönündeki mesafe
e₂	: Geometrik merkez ile elastik eksen arasındaki z eksen yönündeki mesafe
F_{MK(x)}	: Merkezkaç kuvveti
G	: Kayma modülü
h	: Kiriş kalınlığı
I_y	: Kiriş atalet momenti
K^e	: Eleman katılık matrisi
K^G	: Global katılık matrisi
K^s	: İndirgenmiş katılık matrisi
L	: Kiriş uzunluğu
L_e	: Kiriş sonlu elemanlar modelinde her bir elemanın uzunluğu
L_i	: Kiriş sonlu elemanlar modelinde her bir elemanın dönme merkezinden uzaklığı
M^e	: Eleman kütle matrisi
M^G	: Global kütle matrisi
N_U, N_w, N_θ, N_φ	: Şekil fonksiyonları
P₀	: Şekil değişimi öncesi referans noktanın konumu
P	: Şekil değişimi sonrası referans noktanın konumu
q	: Yer değiştirme vektörü
q_e	: Düğüm noktaları yer değiştirme vektörü
R	: Rotor yarıçapı
r	: Narinlik oranı
$\vec{r}_0$	: Şekil değişimi öncesi referans noktanın konum vektörü
$\vec{r}_1$	: Şekil değişimi sonrası referans noktanın konum vektörü
T	: Kinetik enerji
u₀	: Dönme kaynaklı uzama

U	: Potansiyel enerji
V_x, V_y, V_z	: Eksenlere göre hız bileşenleri
$\vec{V}$	: Hız vektörü
w	: Eğilme kaynaklı yer değiştirme
w_1	: Birinci düğüm noktasındaki eğilme kaynaklı yer değiştirme miktarı
w_2	: İkinci düğüm noktasındaki eğilme kaynaklı yer değiştirme miktarı
x_0	: Şekil değişimi öncesi referans noktanın x eksenindeki konumu
x_1	: Şekil değişimi sonrası referans noktanın x eksenindeki konumu
y_0	: Şekil değişimi öncesi referans noktanın y eksenindeki konumu
z_0	: Şekil değişimi öncesi referans noktanın z eksenindeki konumu
z_1	: Şekil değişimi sonrası referans noktanın z eksenindeki konumu
ν	: Poisson oranı
λ	: Boyutsuz doğal frekans
ω	: Doğal frekans
ρ	: Kiriş malzemesinin yoğunluğu
Ω	: Açısal dönme hızı
$\bar{\Omega}$	: Boyutsuz açısal dönme hızı
ξ	: Referans noktanın orta düzlemden uzaklığı
η	: Referans noktanın z ekseninden uzaklığı
φ	: Kayma açısı
θ	: Eğilme kaynaklı açı değişikliği
θ_1	: Birinci düğüm noktasındaki eğilme kaynaklı açı değişikliği
θ_2	: İkinci düğüm noktasındaki eğilme kaynaklı açı değişikliği
φ_1	: Birinci düğüm noktasındaki kayma açısı
φ_2	: İkinci düğüm noktasındaki kayma açısı
ε_{ij}	: Birim şekil değişikliği tansörü
ε_0	: Düzgün birim şekil değişikliği
σ_{ij}	: Gerilim tansörü
x, y, z	: Koordinat sistemi
$P(z)$	: Kirişin malzeme özellik fonksiyonu
P_b	: Kirişin alt yüzeylerindeki malzeme özelliği
P_t	: Kirişin üst yüzeylerindeki malzeme özelliği
V_b	: Kirişin alt yüzeyindeki hacimsel malzeme miktarı
V_t	: Kirişin üst yüzeyindeki hacimsel malzeme miktarı
E_t	: Kirişin üst yüzeyindeki malzemenin elastik modülü

ρ_t	: Kirişin üst yüzeyindeki malzemenin yoğunluğu
E_b	: Kirişin alt yüzeyindeki malzemenin elastise modülü
ρ_b	: Kirişin alt yüzeyindeki malzemenin yoğunluğu
N	: Kirişin orta düzlemindeki tabaka üzerine etkiyen aksenal kuvvet
M	: Eğilme momenti
Q	: Kesme kuvveti





ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Mertebe şeması.....	22
Çizelge 5.2 : Potansiyel enerji denklemi için alan integralleri.	22
Çizelge 5.3 : Kinetik enerji denklemi hesabı için alan integralleri.....	25
Çizelge 5.4 : Timoshenko kirişi mertebe şeması.	35
Çizelge 6.1 : Boyutsuz parametreler.....	43
Çizelge 6.2 : Euler-Bernoulli kirişi özellikleri.	44
Çizelge 6.3 : Dönmeyen, homojen Alüminyum Euler-Bernoulli kirişinin değişen L / h oranına göre boyutsuz doğal frekanslara sınır koşullarının etkisi.	45
Çizelge 6.4 : Değişen güç yasası indisine göre dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz doğal frekansların karşılaştırılması.....	46
Çizelge 6.5 : Ankastre, dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.	48
Çizelge 6.6 : Sabit-sabit sınır koşullu, dönmeyen, FD Euler-Bernoulli kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.	49
Çizelge 6.7 : Fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişi için farklı sınır şartlarında boyutsuz doğal frekansların karşılaştırılması ($L/h=5$).	50
Çizelge 6.8 : Ankastre, dönmeyen, FD Timoshenko kirişinin doğal frekansları üzerinde narinlik oranı ve güç yasası indisi etkisi.....	51
Çizelge 6.9 : Ankastre, dönen, FD Timoshenko kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.....	52



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : FGM dağılımı örneği.....	8
Şekil 5.1:Euler-Bernoulli teorisine göre düzlemdışı eğilme hareketi ve dönme açısı.....	13
Şekil 5.2:a)Euler-Bernoulli ve b)Timoshenko kiriş teorisine göre deformasyon gösterimi.	14
Şekil 5.3 : Fonksiyonel derecelenmiş kiriş modeli.....	15
Şekil 5.4 : Fonksiyonel derecelenmiş kiriş ve malzeme dağılımları.	16
Şekil 5.5: Euler-Bernoulli kirişinin deformasyon öncesi-sonrası y-z kesit görünüşü.	18
Şekil 5.6: Euler-Bernoulli kirişinin deformasyon öncesi-sonrası x-z kesit görünüşü.	19
Şekil 5.7: Merkezkaç kuvveti.	26
Şekil 5.8: Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin sonlu elemanlar modeli.....	27
Şekil 5.9: Euler-Bernoulli kiriş elemanı modeli.	27
Şekil 5.10: Merkezkaç kuvvetinin sonlu elemanlar gösterimi.....	30
Şekil 5.11: Timoshenko kirişinin deformasyon öncesi-sonrası y-z kesit görünüşü. .	32
Şekil 5.12: Timoshenko kirişinin deformasyon öncesi-sonrası x-z kesit görünüşü. .	33
Şekil 5.13: Timoshenko kiriş elemanı modeli.	38
Şekil 6.1: Fonksiyonel FD malzeme için hacimsel dağılım oranları.....	44
Şekil 6.2:Farklı sınır koşulları için değişen güç yasası indisine göre dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz doğal frekanslar.	47
Şekil 6.3: $L/h=10$ için ankastre kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş modeli hesaplanan boyutsuz doğal frekans kıyaslaması.	53
Şekil 6.4: Ankastre kalınlık yönünde FD dönen ve dönmeyen Timoshenko kirişi için hesaplanan doğal frekanslar.	53



KALINLIK YÖNÜNDE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PALLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Endüstri ve pek çok mühendislik uygulamalarında dönen parçaların kullanım alanı oldukça geniştir. Bu parçaların tasarımı, malzeme özellikleri ve dinamik özellikleri sistemin verimliliğini etkilemektedir. Bir müzik aletinde enstrümanın doğal frekanslarına denk gelecek şekilde yapıyı titreterek rezonans özelliği kullanılmak istenirken, farklı bir çok uygulamada, yapıya vereceği geçici ya da kalıcı tahribattan dolayı rezonanstan uzak kalınmak istenir. Bu yüzden sistemin özellikleri tanımlanırken frekanslar ve mod şekilleri kullanılır.

Bu çalışmanın asıl amacı, kalınlık yönünde farklı malzeme özellikleri dağılımına sahip fonksiyonel derecelenmiş (functionally graded material, FGM) bir helikopter palinin titreşim analizi için sonlu elemanlar yöntemi ile bir bilgisayar programı geliştirerek incelemektir. Hem homojen malzeme dağılımına sahip ve hem de bir fonksiyona bağlı değişen malzeme özellikleri için farklı malzeme dağılımına sahip helikopter palinin doğal frekans değerleri üzerine etkisi gösterilmektedir.

Bu tez çalışmasını oluşturan temel bölümler giriş, kiriş teorileri, enerji denklemleri ile titreşim denkleminin modellenmesi ve sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonlarının oluşturulması olarak sıralanabilir.

Giriş bölümünde helikopter pallerinde titreşimi oluşturabilecek sebepler, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ve kullanım alanları, sonlu elemanlar metodu ve kiriş teorileri gibi konulara yer verilmiştir. Bu çalışmada bahsedilen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin ortaya çıkış sebepleri ve kiriş teorileri için literatürde yapılan çalışmalar hakkında bilgiler paylaşılmaktadır. Bu sayede diğer bölümlerde çalışılacak olan konular için temel alt yapı bilgileri oluşturulmaktadır.

Yapının doğal frekanslarının belirlenmesi için helikopter pali bir kiriş olarak modellenmiş ve analitik formülasyon ile sonlu elemanlar formülasyonunu üzerine çalışılmıştır. Tezde kullanılan kiriş modelleri hakkında detaylı bilgi verilmiştir. İlk olarak kayma gerilmelerinin etkisinin düşünülmediği, şekil değişimi öncesi ve sonrası kiriş kesitinin düzlemsel ve kiriş eksenine dik kaldığı Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile helikopter pali modeli çalışılmıştır. Helikopter pali, uzama ve düzlemsel eğilme hareketi için düzgün, homojen, izotropik bir malzeme ve düzgün, bir fonksiyona bağlı kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olarak düşünülüp Euler-Bernoulli kiriş modeli oluşturulmuştur. Kısa ve kalın kirişlerde kayma gerilmelerinin etkisinin sistem üzerinde baskın özelliği vardır. Bu kayma gerilmelerini modellemek için ise Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Timoshenko kiriş teorisinde şekil değişimi öncesi ve sonrası kiriş kesiti düzlemselliğini korurken; deformasyon sonrası kayma gerilmelerinin etkisi ile kiriş kesiti artık düzleme dik olamayacaktır. Timoshenko kiriş teorisi ile uzama, düzlemsel eğilme ve kayma gerilmelerinin etkisinde düzgün, homojen, izotropik bir malzeme ve prizmatik, bir fonksiyona bağlı kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olarak kiriş modellenmiştir.

Bu kiriş teorilerinde oluşturulan modeller için potansiyel enerji ve kinetik enerji denklemleri çıkarılmıştır. Potansiyel ve kinetik enerji denklemlerini daha basit denklemler ile ifade edebilmek için alan integral formülleri kullanılmış ve mertebe analizi yapılmıştır.

Kiriş teorileri ile oluşturulan analitik modellerin çözümü için sonlu elemanlar metodu (SEM) kullanılmıştır. İlgili potansiyel enerji ve kinetik enerji ifadeleri için sonlu elemanlar yöntemi ile katılık ve kütle matrisleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile modellenen kirişi oluşturan her bir küçük eleman için düğüm noktalarında, elde edilen denklemler için çözüm yapılarak tüm kiriş için doğal frekanslar bulunmuştur. Düğüm noktaları arasındaki bağlantı şekil fonksiyonları ile yapılmıştır. Elde edilen şekil fonksiyonları enerji denklemlerinde yerine konmuş ve her bir düğüm noktası için katılık ve kütle matrisleri bulunmuştur. Bu yönetime uygun şekilde her bir eleman için oluşturulan eleman katılık ve eleman kütle matrislerinden tüm kiriş için geçerli olacak global katılık ve global kütle matrisleri elde edilmiştir. Bu global matrislere sınır şartları uygulanarak indirgenmiş katılık ve kütle matrisleri bulunmuştur. İndirgenmiş global katılık ve global kütle matrislerine modal analiz uygulanmış ve çözümler bulunmuştur.

Serbest titreşim analizi yapılan, ankastre, kiriş modelleri için dönme hızı, Güç Yasasına göre oluşturulan kalınlık yönünde değişen malzeme fonksiyonları, sınır şartları ve kayma gerilmeleri gibi çeşitli değişkenlerin kirişin doğal frekansları üzerine etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde bulunan örnek çalışmalar ile karşılaştırılmıştır ve literatürdeki örnekleri ile uyumlu sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Hacimsel dağılım fonksiyonuna göre oluşturulan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için değişen fonksiyonel derecelendirme katsayıları ve kirişin değişen uzunluk-kalınlık oranına göre doğal frekans grafikleri çizdirilmiştir.

VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED ROTOR BLADES THROUGH THICKNESS DIRECTION

SUMMARY

In industry and lots of engineering applications, rotating components, turbines, helicopter blades, rotors belong to large usage area. Design, material properties and dynamic properties of these structures or components are so significant with respect to efficiency. While the resonance property which the component vibrates at its natural frequencies is desired for a musical instrument, resonance is avoided in many different applications because it can damage the structure as permanent or temporary. Helicopters have different vibration problems because they consist of many components that connect with each other and complex rotating system. Some properties like air speed, helicopter blade rotation speed, quantity, shape and material of blades have significant effect on the characteristic of vibration. Therefore, frequencies and mode shapes are used to determine dynamic properties of these structures.

The main aim of this study is to develop a computer programme code by using finite element method for vibration analyses of a functionally graded helicopter rotor blade whose material properties change in the direction of thickness. Functionally graded materials (FGMs) that are new materials are used to increase functional performance which will have desired gradient of the material properties. This variation provides continuous stress distribution in the FG structures, whereas discontinuous stress distribution appears in another type of advanced materials, i.e. laminated composites. Material properties of the beam such as elastic modulus, shear modulus, Poisson's ratio, material density which are assumed to change continuously through the thickness direction of the beam, as a function of volume fraction and properties of the materials according to a simple power law.

FGM has gained widespread application. FGMs consisting of metallic and ceramic components are well-known to improve the properties such as thermal-barrier systems. On the other hand, the other important property of functionally graded material is that it may reduce failures arising from buckling, large amplitude deflections. Structures subjected to aerothermal loads, inter-stages and recycling vehicle of missiles, supporting structures for antennas, structures subjected to severe thermal gradients in nuclear and steel industry can be the more specific examples of the use of FGM's. The mentioned structural systems involve many different structural members. Some of these structural members can be idealized as beams, whereas the others can be idealized as plates and shells. In this study, helicopter rotor blades are modeled as beams to analyze the dynamic behavior.

In the introduction part, the reasons that can cause vibration in helicopter rotor blades, functionally graded materials, their usage areas, finite element method and beam theories are mentioned. Literature research of functionally graded materials and beam theories which will be mentioned in this study are shared. In this way, basic

information are obtained for the other subjects which will be studied in the following sections.

To determine the natural frequencies of the structure, the helicopter rotor blade is modeled as a beam and the finite element formulation is studied. Detailed information about the beam models used in the thesis is given. Firstly, Euler-Bernoulli beam theory which neglects the effect of shear strains and where both the section of the beam is plane and perpendicular to beam axis before and after deformation, is studied for the rotor blade model. Helicopter rotor blade is supposed to be uniform, homogenous and isotropic in one case and functionally graded material varying along thickness in the other case. Euler-Bernoulli beam model is created for elongation and flapwise bending.

The shear strain effect is dominant at short and thick beams contrary to Euler-Bernoulli theory. Therefore, to add the shear effects to the model, Timoshenko beam theory is used. While the beam section is plane and perpendicular to the beam axis before deformation, after deformation, the beam section is still plane but is not perpendicular to the beam axis for the Timoshenko beam model. Helicopter rotor blade is supposed to be as uniform, homogenous and isotropic in one case and uniform, functionally graded material varying along thickness in the other case. Timoshenko beam model is studied for elongation, flapwise bending and transverse shear. Potential energy and kinetic energy expressions are obtained for both Euler-Bernoulli beam theory and Timoshenko beam theory. The area integral formulations and the order analyses are used for potential and kinetic energy equations to state a simple form of equation.

Finite element method is studied to get solutions for models which are obtained with beam theories. Finite element procedures are an important part of engineering analysis and design. Finite element computer programs are now widely used in practically all branches of engineering for the analysis of structures, solids, and fluids.

In the finite element method, the stiffness matrix, mass matrix and shape functions are important terms. The idealization of the physical problem to a mathematical model requires certain assumptions that together lead to differential equations governing the mathematical model. Therefore, potential and kinetic energy equations written with respect to some assumptions to solve the mathematical model with finite element method.

For related potential and kinetic energy equations, the stiffness and mass matrices are derived with finite element method. The natural frequencies are found by making a solution for the obtained equations of the whole beam that is formed from small elements by using finite element method. Thanks to finite element formulation, the relationship between the element displacements at any point and the element nodal point displacements are obtained through the use of shape functions which means like interpolation functions. Therefore, the relation among each node on the beam is provided with shape functions. These shape functions are replaced in the energy equations and stiffness and mass matrices were found for each node. In accordance with this method, the element stiffness and element mass matrices are created for each element and the global stiffness and global mass matrices which will be applicable for the entire beam are obtained from the element mass and stiffness matrices. Reduced global mass and stiffness matrices are obtained with applying boundary conditions. The solutions are found with modal analyses to solve the matrix equations and the results that are obtained by solving these matrix equations of motion.

The effects of various parameters such as rotational speed, functionally graded material varying in the direction of thickness formed according to power law exponent form, boundary conditions and shear stresses are investigated on natural frequencies of beam. It is observed that transverse shear significantly affects the fundamental frequency for lower length to thickness ratios of functionally graded beams.

The results are compared in the open literature and it is observed that the results are consistent with the examples in the literature. Natural frequency graphs are drawn according to the changing power law index parameter and the slenderness ratio for the functionally graded materials.





1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Tezin Amacı

Endüstride ve birçok mühendislik uygulamasında, dönen parçalar, türbinler, helikopter palleri, rotorlar gibi komponentler geniş kullanım alanına sahiptir. Sistemin verimliliği için yapıların ya da sistemlerin tasarımı, malzeme özellikleri ve dinamik özellikleri oldukça önemlidir. Teknolojinin gelişimiyle birlikte ihtiyaçların karşılanabilmesi için malzemelerde de geliştirmeye ihtiyaç duyulmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) birbirleri ile birleştirilmiş, fiziksel ve kimyasal olarak birbirlerinden farklı özellikler taşıyan malzemeleri bir araya getirerek malzeme özelliklerince daha üstün yeni bir malzeme ortaya çıkartmak için oluşturulmuş yeni nesil malzemelerdir. Farklı ısı genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısı gerilmeleri derecelendirerek etkisini azaltır ve fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı oluşabilecek problemleri minimuma indirirler.

Mühendislikte, yapıların veya sistemlerin maruz kaldıkları titreşimlerin ve bu titreşimler sonucu oluşan sonuçlar üzerine çalışılmaktadır. Frekanslar ve mod şekilleri yapıların dinamik özellikleri belirlemekte kullanılırlar. Bu çalışmada, sonlu elemanlar metodu (finite element method, FEM) kullanılarak fonksiyonel derecelenmiş (functionally graded beam, FGB) kirişin uzama ve düzlemdışı eğilme hareketi için serbest titreşim analizi yapılmıştır. Son yıllarda fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler (FGM'ler) kiriş formlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler, sıcaklık dayanımı, yüksek mukavemet, korozyon dayanımı, tokluk gibi özelliklerde avantaj sağlamaktadır. Fonksiyonel derecelenmiş, uzama ve düzlemdışı eğilmeye maruz kalan kirişteki malzeme özellikleri, kirişin kalınlığı boyunca güç yasası dağılımlarına göre değişmektedir. Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş modelleri üzerine çalışılmıştır ve fonksiyonel derecelenmiş kiriş, her iki teoreme göre de modellenmiştir.

Kiriş yapılarının analizinde tercih edilen teorilerden biri Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi'dir. Bu teoride, şekil değişimi öncesinde ve sonrasında tarafsız eksen yine

kirişin orta düzleminde olduğu kabul edilir. Euler-Bernoulli Teorisi, uzun ince kirişlerde daha doğru sonuçlar vermektedir. Yüksek h/L oranı veya yüksek frekanslı kirişlerde kayma gerilmeleri önem kazanmaktadır. Kayma şekil değiştirme etkisinin etkin olduğu kirişlerde Timoshenko kiriş modeli kullanılmaktadır.

Serbest titreşim analizi için potansiyel ve kinetik enerji denklemlerinin çıkarımı yapılmıştır. Bu denklemler sayesinde eleman katılık matrisleri ve eleman kütle matrisleri elde edilmiştir. Ankastre kiriş için şekil fonksiyonları elde edilmiş ve doğal frekansların çözümü, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Sonlu elemanlar yönteminde kiriş i , eleman sayısına bölünerek, her bir elemandaki düğüm noktası için bahsedilen matrisler bulunmuştur. Sonlu elemanlar yöntemine uygun olarak eleman matrisleri bir araya getirilerek kiriş için global matrisler elde edilmiştir. Mathematica programında bir sonlu elemanlar kodu, serbest titreşim analizi için geliştirilmiştir. Bu süreçte, literatürde bulunan kaynakların sonuçları ile yapılan çalışmadaki sonuçlar karşılaştırılmış ve parametreler değiştirilerek çıkan sonuçlar yorumlanmıştır.

1.2 Literatür Çalışması

Yüksek sıcaklıklara maruz kalan malzemelerde oluşan sorunların çözümü için Japonya'da bir üniversite 1984-1985 yıllarında uzay araçları ve hava taşıtlarının çalışmalarında fonksiyonel derecelenmiş malzeme geliştirmelerine başlamıştır. Daha sonra ısı yük altındaki gerilmeler için FDM üretim metotları, tasarımları araştırılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan üretilmiş kirişlerin eğilme, titreşim ve statik özellikleri hakkında araştırmacıların yaptığı birçok çalışma mevcuttur. Döner atalet, ilk olarak kiriş teorisinde Rayleigh tarafından düşünülmüştür [1]. Bu sayede, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin doğruluğu artmıştır. Bresse [2], kiriş modeline kayma deformasyon etkilerini ekleyen ilk araştırmacıdır ve daha sonra Timoshenko [3], şuan Timoshenko kiriş teorisi (TBT) olarak bilinen teoride hem döner atalet hem de kayma deformasyon etkilerini kullanmıştır. Bu teori birçok statik ve dinamik problemin analizinde kullanılmıştır. Elishakoff ve diğerleri [4], Bresse-TBT ve onun alternatif versiyonunu uygulayarak bir kirişin serbest titreşim analizini yapmışlardır. Bresse-TBT modeli, orijinal Bresse-Timoshenko kiriş modelinin aksine dördüncü dereceden zaman türevini içermektedir. Analizde, Pasternak temel modelini kullanılmıştır. Elishakoff ve Livshits [5] ve Elishakoff [6], yüksek dereceli

frekansların önemini göz önüne alarak Timoshenko kirişinin rastgele titreşimlerini araştırmıştır. Timoshenko kirişlerinin bölgesel olmayan etkiye dayalı titreşimleri Zhang tarafından çalışılmıştır [7]. Kritik uzunluk, TBT'nin iki frekans spektrumu göz önüne alınarak tanımlanmıştır. Bu ikinci küme, bazı araştırmacılar tarafından “ikinci spektrum” olarak adlandırılmaktadır. Bu araştırma ilk önce Traill-Nash ve Collar [8] tarafından çalışılmıştır. Manevich [15], TBT'nin dalga yayılımını, elastik temel etkisini dikkate alarak analiz etmiştir. TBT'nin iki frekans spektrumu için faz ilişkileri araştırılmış ve ikinci spektrumun fiziksel anlamı ve önemi, bu dalga dağılım analizine dayanarak detaylı bir şekilde değerlendirilmiştir.

Son zamanlarda, Gül ve Aydoğdu [16], Reddy kiriş teorisi üzerine çalışmalar yapmışlardır. TBT gibi Reddy kiriş modelinin dalga yayılım analizinde iki spectrum gözlemlenilmiştir.

Fonksiyonel derecelenmiş (FGB) kirişlerin titreşim analizi, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modelleri üzerine sıkça çalışılmıştır. Aydoğdu ve Taşkın [20], farklı malzemeler ve L/h oranları için fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerinin serbest titreşim analizini araştırmıştır. Doğal frekansları elde etmek için Navier tipi çözüm uygulayarak farklı yüksek dereceli kayma deformasyon teorileri ve klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanmışlardır. Shahba ve Rajasekaran [21], diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş konik Euler-Bernoulli kirişlerinin burulma ve serbest titreşim analizini çalışmışlar ve konik EB kirişleri için eksenel ve eğilme frekansları ve kritik burulma yükleri elde etmişlerdir. Karacam ve Aydoğdu [22], klasik EB kiriş teorisini kullanarak Winkler temeline dayalı FG çift kirişin dalga yayılma karakteristik özelliklerini incelemiştir. Farklı dalga sayıları ve malzeme özellikleri için dalga frekansı, faz ve grup hızları gibi dalga dağılım özelliklerini elde etmişlerdir. Shvartsman ve Majak [23], genel sınır koşulları için eksenel FG EB kirişlerinin serbest titreşimini diferansiyel formdaki başlangıç parametreler yöntemi ile araştırmıştır. Sonuçları literatürdeki diğer sayısal ve kesin çözümlerle kıyaslamıştır. Kayma deformasyonu ve döner atalet etkilerini incelemek için TBT önerilmiştir. FG kirişlerinin TBT ile dinamik analizi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Huang ve diğ. [24], eksenel FG Timoshenko kirişlerinin düzgün olmayan kesitli titreşimlerini incelemiştir. Değişken katsayıları kullanarak yardımcı fonksiyon ile sapma ve dönme için oluşturdukları denklemlerden tek bir denkleme indirgeme yapmışlardır. Ayrıca, bilinmeyen fonksiyon için güç serileri

kullanılarak, tek denklem, lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş ve farklı sınır koşulları için karakteristik denklemler elde edilmiştir. Pradhan ve Chakraverty [25], farklı kesme deformasyon teorilerine dayanarak FG kirişlerinin serbest titreşimlerini incelemiştir. Farklı sınır koşullarında frekans parametrelerini tahmin etmek için Rayleigh-Ritz yöntemi kullanılmıştır. Vo ve diğ. [26] FG kirişlerinin statik ve titreşim analizi için kayma deformasyon teorisine çalıştılar ve Hamilton prensibini kullanarak hareket denklemlerini elde etmişler ve eksenel-eğilme çiftinin analizini gerçekleştirmişlerdir. Su ve Banerjee [27], dinamik sertlik yöntemine dayanarak FG Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimini araştırmıştır. Kirişin malzeme özelliklerinin kalınlık yönünde sürekli değiştiğini varsaymışlar ve kayma kuvveti, eksenel kuvvet ve eğilme momentini hareket denklemlerinden türetmişlerdir. Ngoc ve Nguyen [28], nötr düzlemin gerçek konumunu göz önüne alarak FG Timoshenko kirişinin frekans alanındaki dinamik analizini formüle etmişlerdir. Böylece, genel sınır koşulları için kirişin frekans denklemini ve doğal frekans modlarını elde etmişlerdir. Paul ve Das [30], güç yasası değişimini dikkate alarak önerilmeli FG Timoshenko kirişin serbest titreşimi üzerine teorik bir çalışma yapmışlardır. Von Karman'ın doğrusal olmayan gerinim-yer değiştirme (strain-displacement) ilişkisi göz önünde bulundurulmuş ve minimum potansiyel enerji prensibi kullanılarak statik denklemler ve Hamilton prensibi kullanılarak dinamik denklem elde edilmiştir. Banerjee ve Ananthapuvirajah [31], dinamik sertlik yöntemini dikkate alarak FG kirişlerinin serbest titreşim analizini incelemiştir. Harmonik hareket varsayılarak, titreşim frekansları analitik formda hesaplanmıştır. Xu ve diğ. [32], stokastik sonlu elemanlar modelini kullanarak bir FG kirişin, serbest titreşim özelliklerini incelemiştir. Birinci dereceden pertürbasyon tekniğini kullanarak, malzeme özelliklerinin yapının stokastik çalışmasına etkisi analizlerde gösterilmiştir. Deng ve diğ. [33], Winkler-Pasternak temel modelini göz önüne alarak FG Timoshenko kirişinin dinamik katılık matrisini oluşturdular. Ayrıca, farklı sınır koşulları ve yükleme durumlarında FGB'lere sayısal ve yarı analitik yöntemler uygulanmıştır. Fantuzzi ve diğ. [39], FG silindirik ve küresel panellerin titreşimini araştırmıştır. 2-D ve 3-D kabuk modelleri kullanılmış ve farklı yapı geometrisi ve frekans sırası ile karşılaştırma yapılmıştır. Ferreira ve diğ. [40], genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur tekniği ile kalın izotropik ve çapraz katlı lamine plakaların statik ve dinamik davranışlarını incelemiştir.

2. HELİKOPTER PALLERİ VE TİTREŞİM

Helikopter pallerinin motordan tahrik edilmesi ile dönerek hızlanması sonucunda pallerde dönme düzlemine dik aerodinamik kuvvet oluşmaktadır. Pallerde oluşan taşıma kuvveti helikopter ağırlığından büyük olduğunda helikopter irtifa kazanacaktır. Eşit olduğunda askıda kalma hareketi yapacak ve alçalma hareketinde ise taşıma kuvveti ağırlıktan küçük olacaktır. Paller, hava içerisinde dönme hareketi yaparken üst yüzeylerinde alçak basınç, alt yüzeylerinde ise yüksek basınç oluşmaktadır. Oluşan bu basınç farkı taşıma kuvvetini meydana getirmektedir. Helikopter kanatları yani paller, yüksek hızlara ulaştıklarında, sürtünme kuvvetini en aza indirmek amacıyla kanat yapıları ince olmalıdır. Klasik helikopterler iki palden oluşmaktadır ve sistemi birbirlerine zıt yönde olacak şekilde hareket ettirme eğilimindedirler. Ana helikopter palleri yüksek hızda dönerken helikopter gövdesi bu harekete ters yönde dönmek ister. Bunu engellemek ve dengelemek amacı ile arka bölüme farklı çapta ve hızda paller eklenmektedir.

Helikopter, üzerinde dönen sistem ve birbirine bağlı birçok parçadan oluşuyor olması farklı karakteristiklerde sarsıntı ve titreşim problemlerine sebep olmaktadır. En fazla titreşim ana rotor sistemindedir. İrtifa, hava hızı ve ağırlığın artması ile artan dönüş hızı, ana rotor pallerinin sayısı titreşime sebep olan etkenlerdir.

Helikopter pallerinin tasarımında, doğal frekansların belirlenmesi ve titreşim mod şekilleri önem arz etmektedir. Bu tezde sonlu elemanlar metodu ile modellenmiş, fonksiyonel derecelendirilmiş kalınlık yönünde malzeme geçişi olan bir palin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmektedir.



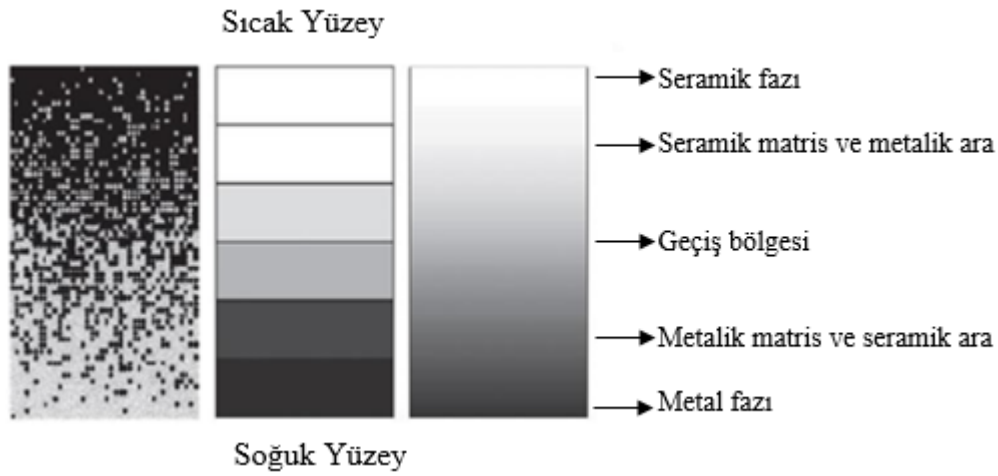
3. FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEMELER VE KULLANIM ALANLARI

Bu bölümde fonksiyonel derecelenmiş malzemeler hakkında temel bilgiler verilmektedir.

3.1 Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemelerin Tanımı ve Çıkış Sebepleri

Yüksek sıcaklık uygulamaları, uzay araçları veya endüstriyel uygulamalarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanımından önce kompozitler, alaşımlar, yarı iletkenler ve ince film kaplamalı malzemeler gibi talep edilen mekanik özelliklerde yeni malzeme ortaya çıkartma üzerine çalışmalar yapılmıştır. Metal ve seramiklerin birlikte kullanıldıkları kompozitlerin, yüksek sıcaklık uygulamalarında metal-seramik katmanları arasındaki süreksizlik nedeniyle oluşan ısıl ve artık gerilmeler, tabakalar arasında yırtılmalar ve çatlaklar oluşmasına sebep olmaktadır. Bu tip tabakalı kompozitlerin seramik kısmının düşük toklukta olması ve metal kısmının yüksek sıcaklıkta aşınması ve oksitlenmesi gibi zayıf özelliklerinin ortaya çıkması yeni malzeme arayışlarına neden olmuştur. Bu sebeple metalin tokluk özelliğini ve seramiğin yüksek ısıl dayanımını kullanmak amaçlı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı ortaya çıkmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler iki veya daha fazla malzemenin belli bir hacimsel oranda karıştırılmasıyla elde edilmekte ve malzeme dağılımları, malzeme kalınlığı ya da eksenî doğrultusunda bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. FDM'nin en büyük avantajı, yapı boyunca tokluk ve diğer malzeme özelliklerine ait dereceli fonksiyonlar içermesidir. Değişken özelliklere sahip malzeme veya malzeme sistemleri kullanılarak sistemin çalışma sıcaklığı yükseltilmiş, malzemenin sağlamlık, tokluk, korozyon dayanımı gibi özelliklerinin artırılması sağlanmaktadır [42]. Bu yöntem sayesinde malzemelerin birbiriyle derecelendirilmiş olarak dağılımı, sürekli bir değişime sebep olduğundan malzemeler arasında çatlakların gelişebileceği bir ara yüzey oluşmasını engellemekte ve FDM'leri ileri teknolojik uygulamalar için tercih edilen malzemeler haline getirmektedir. İhtiyaca ve seçilen üretim tekniğine bağlı olarak FDM'lerde dereceli yapı tabakalı veya devamlı derecelendirilmiş olabilmektedir. Devamlı derecelendirilmiş malzemelerde iki önemli

özellik vardır. Birincisi; seramiğin kısmi hacmi; ara yüzde %0' dan yüzeyde %100'e kadar değiştiğinden, malzemeler arasındaki bağlanma, malzeme uyumluluğundan dolayı daha iyi olacaktır. İkinci olarak; malzeme özellikleri dağılımlarının düzgün olması sebebiyle FDM kaplı ara katmanda gerilmeler, tabakalı homojen kaplamalara göre daha düşük olacaktır [42]. Farklı derecelendirme seçeneklerine göre oluşan malzemelerde pek çok farklı fiziksel ve mekanik özellik elde edilebilir. Farklı derecelendirme seçeneklerine örnek olarak parçacık büyüklükleri, kimyasal kompozisyon, hacimsel parçacık yüzdeleri verilebilir. Şekil 3.1'de fonksiyonel derecelendirilmiş bir malzemenin hacimsel dağılım örneği verilmiştir.



Şekil 3.1 : FGM dağılımı örneği [43].

3.2 Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemelerin Kullanım Alanları

Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler ilk olarak uzay taşıtları alanında kullanılması için tasarlanmıştır. Zorlayıcı koşulların olduğu uzay araçlarında birbirine zıt, farklı malzeme özelliklerinin bir arada bulunması gerekmektedir.

İyi ısı iletkenlik ve ısı direnç özelliğinin bir arada bulundurabilen FDM'ler, hafiflik, tokluk, sağlamlık gibi özellikleri de bu tasarımlar için sağlayabilmektedir. Roket yapımı ve motor dış duvarlarına da uygulanmaktadır [44].

Japonya'daki uzay istasyonu Kibo'da test olarak FDM, bir fişek ve geri kullanılabilir bir roket motoru olarak kullanılmıştır. Yapılan çalışmalarda amaç sistemlerin geri kazanılması içindir. İleri Uzay Teknolojileri, elektroform teknolojisinde kullanılabilecek içten yanmalı motorların üretimi ve geliştirilmesi ile ilgili yanma odası elektroform tekniğine çalışmaktadır [44].

Endüstriyel pek çok alanda da DM'ler kullanılmaktadır. Mukavemet ve ısı direnç olarak daha iyi malzemelere ihtiyaç duyulan kesici kalemler için derecelenmiş malzemeler geliştirilmiştir. Aşınma direnci ve sertlik olarak yüksek malzemeler elde edilmiştir. İç kısmı çelik yoğunluğunda, dış kısmına doğru elmas yoğunluğundadır. Mitsubishi Material Corp, UE6020 koduyla katlı CVD malzemesini üretmiştir. Bu malzeme FDM'nin yapısına yani dereceli yüzey yapısına sahiptir. Sumitomo Elektrik Endüstriyel Ltd. FDM tekniğini karbit kalemlerinde kullanmaktadır [4]. Yüksek hızlı kalemlerde ise üretim tekniklerindeki sınırlamalardan kaynaklı belli bir boyuta kadar örnekleri mevcuttur. Endüstride günlük yaşantımız için üretilen pek çok üründe malzeme özelliklerinden dolayı FDM tercih edilmektedir. Beyzbol ayakkabısı, traş makinesi bıçağı gibi ürünlerde de kullanılmaktadır.

Savunma sanayide de FDM kullanımı oldukça önemli yer tutmaktadır. Zırh, kurşun geçirmez yelekler gibi yüksek direnç gerektiren malzemelerde kullanılmaktadır. Termal bariyer sağlama özelliği ile gaz türbini motorlarının türbin kanatlarında koruyucu kaplama malzemesi olarak kullanılır.

İletişim alanında ise görsel ve sesli iletişim düzeyine ulaşabilmek için FDM'lerde daha fazla geliştirmeye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sistemlerde, FDM teknolojisi devir frenleyici, bağlantı kesici anahtarı olan Gaz Yalıtım Anahtarı (GIS-Gas Insulated Switchgear) için kullanılmaktadır. Bu elementte dışarıdan içeriye ısı gerilme kontrolü ve enerji emme kabiliyetinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir [44].

Çevre sorunları arasında önemli yere sahip olan CO_2 gazlarının birikmesi, ozon tabakasını delinmesi ve çöplerin yığılmasını engellemek için Termoelektrik Güç Üreticileri kullanılmaktadır. Bu yapıda yüksek ve düşük sıcaklığa maruz kalan yerlerde FDM kullanılmaktadır.

FDM'ler biyomalzemeler olarak da kullanılmaktadırlar. Vücutta bulunan kemik ve eklemlerin ihtiyaç duyulduğunda yerine kullanılabilecek FDM malzemeler geliştirilmiştir. Yüksek sertlik, korozyon direnci ve biyolojik sisteme zarar vermemesinden dolayı suni kemik, eklem ve diş olarak FDM malzemeler kullanılabilir [44].



4. SONLU ELEMENLAR METODU

Mühendislikte karşılaşılan her problem, fizik kanunları ve matematik yardımı ile cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler ile ifade edilmeye çalışılır. Genellikle her problem, bilinen veya çözülmesi daha kolay bir alt probleme indirgenerek çalışılır ve ana denkleme bu şekilde çözüm bulunabilir.

Sonlu elemanlar metodu, karmaşık mühendislik problemlerinin basitleştirilerek, hassas çözümler elde edilmesi için kullanılan sayısal bir metottur. Analitik olarak modellenmesi zor ve karmaşık olan problemlerin aynı özellikleri taşıyan daha basit parçalara bölünerek, her bir parçanın kendi içerisinde çözülmesiyle genel problemin çözümünün bulunduğu bir analiz metodudur.

Yapısal analiz, termal analiz, akışkanlar mekaniği, uçak mühendisliği, nükleer mühendislik, elektrik ve elektromanyetik alanlar gibi birçok mühendislik ve fizik problemlerinin çözümünde kullanılır. Köprüler, havacılık, otomotiv, biyomedikal gibi sektörlerde problem çözümleri için bu yöntem kullanılmaktadır.

Bu yöntemdeki temel prensip, problemleri basit alt problemlere indirgeyerek çözüm elde etmektir. Bu yöntemde uygulanan basamaklar aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

- Problem, çok sayıda elemana ayrılıp, düğüm noktaları (nodes) oluşturularak, tüm problem bir büyük ağ (mesh) halinde modellenir.
- Model üzerinde etkisi olan girdi verileri; termal ve mekanik alanda gerilme, yer-değiştirme, sıcaklık ve deplasman gibi değişkenlerle tanımlanır.
- Karmaşık bir problemde modelin yük altındaki davranışı kesin tahmin edilmesi mümkün olmadığı için, bir eleman için, bilinmeyen çözümü yaklaşık olarak ifade edebilecek uygun bir matematiksel model oluşturulur.
- Denge denklemleri veya varyasyonel prensipler ve yaklaşık deplasman modeli kullanılarak eleman katılık matrisleri ve yük vektörleri bulunur. Genellikle matris denklemleri şeklinde olan bu denge denklemlerin çözülmesiyle değişkenlerin düğüm noktalarındaki değerleri elde edilir.

- Her bir düğüm noktasının birbirleri ile bağlantısı şekil fonksiyonları ile sağlanır. Şekil fonksiyonları problem çözümünde kullanılması planlanan modele uygun polinomlar ile ifade edilir. Şekil fonksiyonları herhangi bir noktada eleman yer değiştirmeleri ile eleman düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.
- Bu denge denklemlerinin her bir eleman için çözülmesi ile elemanların davranışları elde edilmektedir.

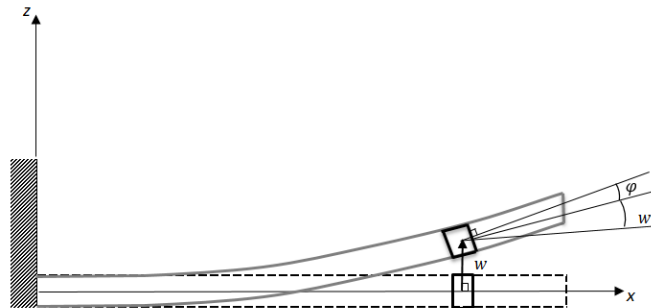


5. KİRİŞ TEORİLERİ

Pek çok mühendislik uygulamasında, problemlerin modellenmesinde ve analizinde kiriş teorileri kullanılmaktadır. Kirişlerin, dinamik özellikleri olan frekanslar ve mod şekilleri, yapılara uygulanan titreşimlerin ve bu titreşimler sonucu yapının verdiği cevapları incelenmesinde kullanılır. Bu tezde çalışılan helikopter rotor pallerinin, dinamik incelemesi için Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanılarak, kiriş olarak modellenen palin doğal frekanslarına etkisini incelenmektedir.

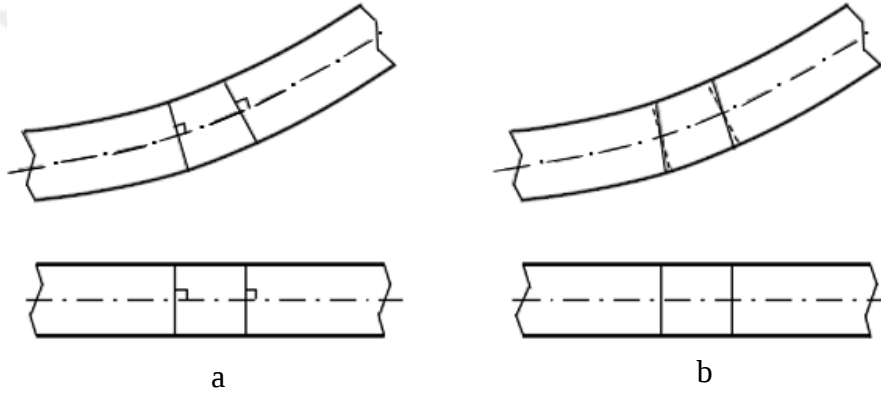
Kiriş teorileri, bir boyutu diğer boyutlarına göre çok daha uzun olan yapılar için kullanılan tek boyutlu modellerdir. Titreşimler, yapı içerisinde birbirleri ile etkileşim halinde olabilirler. Simetrik kesitli ve izotropik kirişlerde, iki ana düzlemdeki titreşimler etkileşim içinde değildir. Ancak, izotropik olmayan ve/veya sadece bir eksene göre simetrik olan kesitlere sahip kirişlerde eğilme-eğilme veya eğilme-burulma etkileşimi olduğu için iki ana düzlemdeki titreşimler de birbirleri ile etkileşir [45]. Temel kiriş teorileri arasında Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri bulunmaktadır.

Euler-Bernoulli kiriş teorisi, bir kirişin elastikliğinin basitleştirilmiş bir ifadesidir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, düzlemdışı eğilmeden önce düzlem ve kiriş eksenine dik olan kesitlerin, düzlemdışı eğilmeden sonra yine düzlem ve kiriş eksenine dik kaldığını ifade eder. Dolayısıyla bu teoremden kayma şekil değiştirmelerinin etkisini ihmal edilmiş olur ($\varphi = 0$). Bu durum Şekil 5.1’de gösterilmektedir.



Şekil 5.1 : Euler-Bernoulli teorisine göre düzlemdışı eğilme hareketi ve dönme açısı.

Timoshenko kiriş modelinde ise eğilmeden önce düzlem ve tarafsız eksene dik olan kesitlerin eğilmeden sonra da düzlem olarak kaldığı, ancak kesitlerin artık kiriş eksenine dik olmadığı ve kesitlerin bir ϕ açısı kadar döndüğü kabul edilir. Bu sayede kayma şekil değiştirmelerinin veya kayma gerilmelerinin kirişin eğilme davranışına etkisi yapıya katılmış olur. Eğilme öncesi ve sonrası kesitlerin düzlem olarak kaldığı varsayıldığı için kayma açısı da sabit kalacaktır. Kayma gerilmesi dağılımının kesit yüksekliği boyunca sabit olması ve kayma açısı değerinin sabit kalmasından dolayı oluşacak hatayı düzeltmek adına kayma gerilmesi dağılımı düzeltme katsayısı (shear corection factor) kullanılır. Şekil 5.2’de iki teoriye göre kirişlerde oluşan şekil değişimleri gösterilmektedir.



Şekil 5.2 : a) Euler-Bernoulli ve b) Timoshenko kiriş teorisine göre şekil değişimi gösterimi.

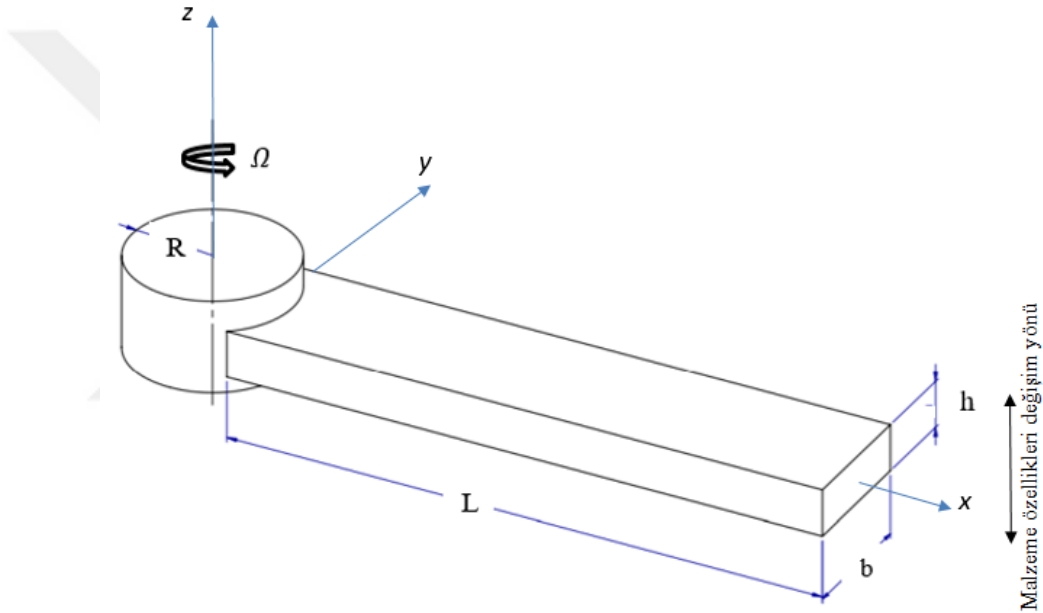
Tek taraftan mesnetli, basit bir kiriş düzeneğinde, serbest uçtan uygulanacak tekil bir yük için Euler-Bernoulli teorisine göre sadece bu kuvvetin oluşturduğu momentten kaynaklı eğilme hesaba katılır. Timoshenko kiriş teorisinde ise, bu kuvvetin oluşturduğu moment ile beraber kirişte oluşan deformasyonlar, dikey kuvvetler sebebiyle oluşan kayma gerilmeleri ve eğilme sonucunda dönme etkisiyle ortaya çıkan eylemsizlik momenti de hesaba katılır. Bu nedenle Timoshenko teorisi ile çözümlenen bir kirişin Euler-Bernoulli teorisine göre daha doğru sonuçlar vermesi beklenir. Timoshenko teorisi “kalın kiriş teorisi” olarak da adlandırılır. Bunun sebebi, Timoshenko teorisi kalın kirişlerde 6 kata kadar daha doğru sonuç vermesidir [46]. Kiriş incelendiğinde ise, iki teori arasındaki sonuç farkı azalmaktadır ve ince kirişlerde çok daha yakın sonuçlar elde edilmektedir.

Bu tezde çalışılacak kiriş modelinin izotropik, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş olduğu kabul edilmektedir.

5.1 Helikopter Pali için Kiriş Modeli ve Formülasyonları

Bu tezde çalışılacak kiriş, dönen ve dönmeyen, prizmatik, ankastre, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelenmiş bir kırıştır. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kırışleri için kinetik ve potansiyel enerji denklemleri çıkarımları yapılacaktır. Kırışler üzerinde malzeme özellikleri ve kırış sınır şartları değiştirilerek kırışe ait doğal frekans değerleri geliştirilen kod ile bulunacaktır.

şekil 5.3’de gösterilen fonksiyonel derecelenmiş kırış modelinde h ve b kırışin kalınlık ve genişliğini, L kırış uzunluğunu ve R ise helikopter göbek yarı çapını göstermektedir. Saat yönünün tersi yönünde Ω sabit açısal hızı ifade etmektedir.

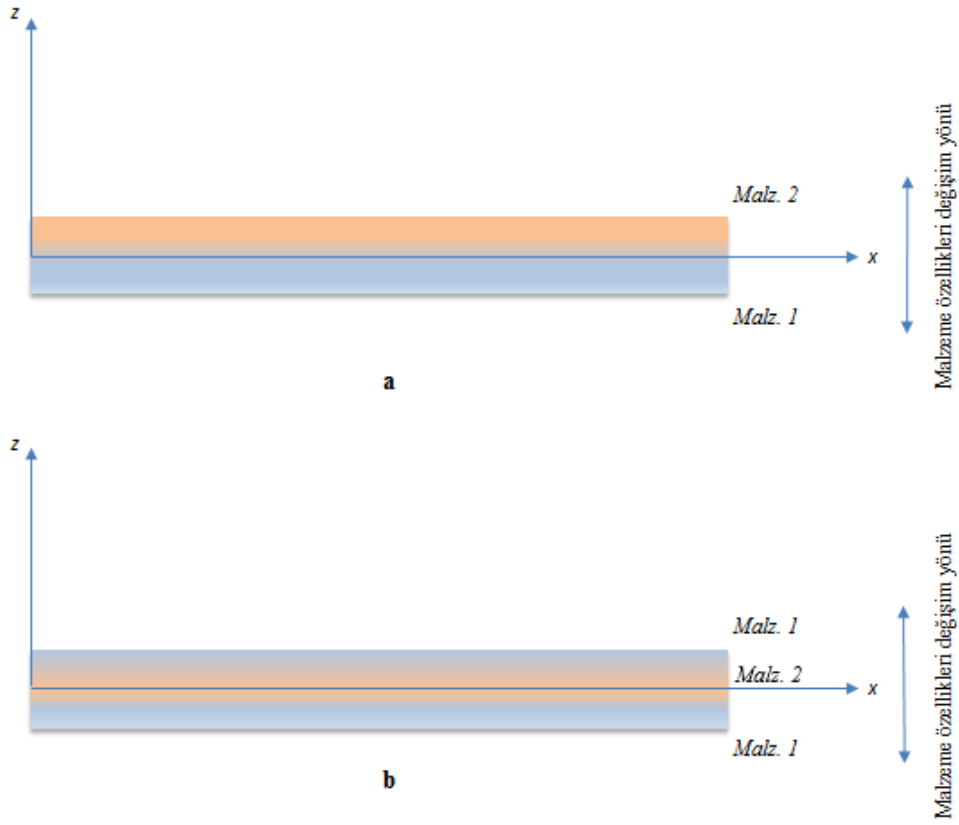


şekil 5.3 : Fonksiyonel derecelenmiş kırış modeli.

Uzama ve düzlemdışı eğilme serbest titreşimi incelenecek kırış için kalınlık yönünde fonksiyonel derecelenmiş malzeme kullanılacaktır. şekil 5.4 (a)’da, malzeme özellikleri kırış kalınlığı yönünde değişen, alt yüzeyi malzeme 1, üst yüzeyi malzeme 2 olacak şekilde değişmektedir. şekil 5.4 (b)’de ise kırışin alt ve üst yüzeylerinde aynı malzeme, orta yüzeyinde farklı malzeme bulunmaktadır.

Kırış özellikleri kesit boyunca aynı olacaktır. Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kırış için malzeme özelliklerine bağlı parametreler tanımlanacak derecelendirme fonksiyonlarına göre formüle edilecektir.

Malzemeler arasındaki geçiş aşağıda ifade edilen hacimsel dağılım formülüne göre.



Şekil 5.4 : Fonksiyonel derecelenmiş kiriş ve malzeme dağılımları.

Kirişin malzeme özellikleri, elastisite modülü, E , kesme modülü, G , Poisson oranı, ν ve yoğunluk, ρ için kirişin kalınlığı yönündeki değişimi, hacim oran dağılımının fonksiyonudur. Güç yasasına göre oluşturulan ve $P(z)$ ile gösterilen kirişin malzeme özellikleri aşağıdaki formül ile ifade edilir.

$$P(z) = P_b V_b + P_t V_t \quad (5.1)$$

$$V_b + V_t = 1 \quad (5.2)$$

Yukarıdaki formülasyonda P_b ve P_t sırasıyla kirişin alt ve üst yüzeylerindeki malzeme özelliklerini V_b ve V_t alt ve üst yüzeylerdeki hacimleri göstermektedir.

Kirişi oluşturan malzemelerin hacimsel oranları dağılımı, V_t için kullanılacak denklem güç yasasına göre aşağıdaki gibidir:

$$V_t = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (5.3)$$

Burada n , negatif sayıdan farklı Güç Yasası indisidir ve kirişin kalınlığı boyunca malzemelerin dağılım profilini belirler.

(5.3) ile ifade edilen denklem, (5.1) ve (5.2) denklemlerinde yerine konularak düzenlendiğinde elde edilen yeni denklem aşağıdaki gibidir:

$$P(z) = (P_t - P_b)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + P_b \quad (5.4)$$

Bu çalışmada, (5.4) ile elde edilen denklem, elastisite modülü, E ve yoğunluk, ρ için kuvvet yasasına göre düzenlendiğinde oluşan denklemler:

$$E(z) = (E_t - E_b)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_b \quad (5.5)$$

$$\rho(z) = (\rho_t - \rho_b)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + \rho_b \quad (5.5)$$

Burada E_t ve ρ_t kirişin üst yüzeyindeki malzemenin elastise modülü ve yoğunluğunu tanımlarken; E_b ve ρ_b kirişin alt yüzeyindeki malzemenin elastise modülü ve yoğunluğunu tanımlamaktadır. Güç yasası indisi, n değeri sıfır olduğunda kirişin kalınlık yönünde malzemesinin değişmediği, tek bir malzeme özelliği gösterdiği homojen ve izotropik durumu ifade eder.

(5.3)-(5.5) numaralı denklemler, Şekil 5.4 (a)'da gösterilen malzeme dağılımı için oluşturulan formüllerdir. Şekil 5.4 (b)'deki gibi malzeme dağılımı için (5.3) ile ifade edilen denklemdeki malzeme hacimsel dağılım oranı formülü değişecektir. Diğer denklemler ise bu malzeme dağılımı için de kullanılır. Şekil 5.4 (b) için hacim oranı formülü aşağıdaki gibidir:

$$V_b = \left(\frac{z}{h}\right)^n \quad (5.6)$$

Malzeme özellikleri için yazılan (5.1) numaralı denklem, (5.6) denklemine göre yeniden düzenlendiğinde elde edilen yeni denklem ve bu denklemin malzeme özellikleri için yazılmış ifadeler aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$P_2(z) = (P_t - P_b)\left(\frac{z}{h}\right)^n + P_b \quad (5.7)$$

$$E(z) = (E_t - E_b)\left(\frac{z}{h}\right)^n + E_b \quad (5.8)$$

$$\rho(z) = (\rho_t - \rho_b)\left(\frac{z}{h}\right)^n + \rho_b \quad (5.9)$$

5.2 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

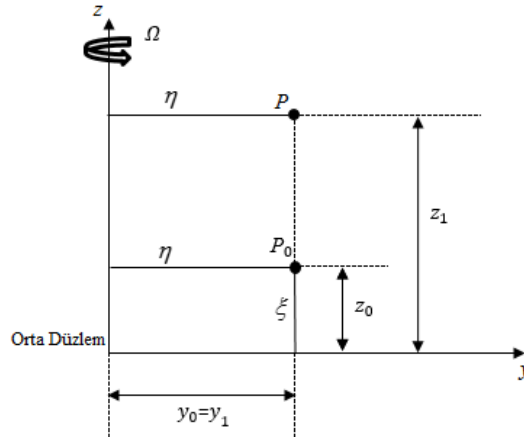
Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre çalışılacak helikopter pal modeli için kiriş kesitinin deformasyon öncesi ve sonrası düzlemselliğini koruduğu ve kiriş eksenine dik kaldığı; kiriş uzunluğunun da değişmediği kabul edilir. Deformasyon sırasında oluşacak yer değiştirmeler oldukça küçük olacaktır ve kayma etkisinden kaynaklı kayma gerilmeleri ihmal edilir.

5.2.1 Euler-Bernoulli kiriş teorisi için enerji denklemleri

Bu bölümde, hem düzgün ve homojen bir kiriş hem de düzgün ve kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme geçişi olan kiriş için uzama ve düzlemsel eğilme hareketi sonucu potansiyel ve kinetik enerji denklemlerinin çıkarımı yapılacaktır. Kirişin kesit ve uzunluk boyunca görünüşü Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da verilmiştir.

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da şekil değişimi öncesi referans noktası olarak gösterilen P_0 , şekil değişimi sonrası P ile gösterilmektedir.

Potansiyel ve kinetik enerji denklemlerinin çıkarımında, yer değiştirme ve gerinim ifadelerinin yazımı için Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'dan faydalanılacaktır.



Şekil 5.5 : Euler-Bernoulli kirişinin deformasyon öncesi-sonrası y-z kesit görünüşü.

Şekil 5.6 : Euler-Bernoulli kirişinin deformasyon öncesi-sonrası x-z ke

Deformasyon öncesi, P_0 referans noktasının konum denklemleri:

$$x_0 = R + \chi \quad (5.10)$$

$$y_0 = \eta \tag{5.11}$$

$$z_0 = \xi \quad (5.12)$$

Deformasyon sonrası, P referans noktasına göre konum denklemleri ise:

$$x_1 = R + x + u_0 - \xi w' \quad (5.13)$$

$$y_1 = \eta \quad (5.14)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (5.15)$$

Şekil değişimi öncesi ve sonrası referans noktaları için pozisyon vektörleri, r_0 ve r_1 ile gösterilerek; birim uzamalar için aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$d\vec{r}_0 = dx_0\vec{i} + dy_0\vec{j} + dz_0\vec{k} \quad (5.16)$$

$$d\vec{r}_1 = dx_1\vec{i} + dy_1\vec{j} + dz_1\vec{k} \quad (5.17)$$

Kanat uzunluğu, x boyunca (5.10)-(5.15) denklemlerinin türevleri alındığında elde edilen ifadeler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$dx_0 = dx \quad (5.18)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (5.19)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (5.20)$$

$$dx_1 = (1 + u'_0 - \xi w'')dx - w'd\xi \quad (5.21)$$

$$dy_1 = d\eta \quad (5.22)$$

$$dz_1 = w'dx + d\xi \quad (5.23)$$

(5.18) ve (5.23) denklemleri, (5.16) ve (5.17) denklemlerinde yerine yazıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$d\vec{r}_0 = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (5.24)$$

$$d\vec{r}_1 = [(1 + u'_0 - \xi w'') - w'd\xi]\vec{i} + d\eta\vec{j} + (w'dx + d\xi)\vec{k} \quad (5.25)$$

Gerinim tansörü, $[\varepsilon_{ij}]$, (5.26) numaralı denklem kullanılarak elde edilebilir [47].

$$d\bar{r}_1.d\bar{r}_1 - d\bar{r}_0.d\bar{r}_0 = 2 \begin{bmatrix} dx & d\eta & d\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ d\eta \\ d\xi \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Gerinim tansörünün matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x\eta} & \varepsilon_{x\xi} \\ \varepsilon_{\eta x} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\xi} \\ \varepsilon_{\xi x} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\xi} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

(5.24) ve (5.25) denklemleri, (5.26) denkleminde yerine konularak gerekli işlemler ve düzenlemeler yapıldığında gerinim tansörü için aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir:

$$\varepsilon_{xx} = u'_0 - \xi w'' - u_0 w'' \xi + \frac{(u'_0)^2}{2} + \frac{\xi^2 (w'')^2}{2} + \frac{(w')^2}{2} \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_{x\eta} = 0 \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_{x\xi} = \xi w' w'' - u'_0 w' \quad (5.30)$$

Burada ε_{xx} eksenel gerinim, $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ yanal kesme gerinimleridir.

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre $w' = \theta$ olacaktır.

(5.25)-(5.30) denklemleri, gerinim tensöründe bulunan $dx dx$, $dx d\eta$ ve $dx d\xi$ 'nin katsayıları olan ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ terimleri için yazılmıştır. Çünkü ince ve uzun kirişlerde eksenel gerileme ε_{xx} , yanal gerinmelere, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ve $\varepsilon_{\xi\xi}$, göre daha etkindir. Bundan dolayı, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ve $\varepsilon_{\xi\xi}$ yani yanal birim şekil değiştirmeler ihmal edilir.

Mertebe analizi yapıldığında $\varepsilon_{\eta\xi}$ kayma birim şekil değiştirmesi, diğer kayma birim şekil değiştirmeleri $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ 'ye göre $O(\varepsilon^2)$ mertebesinde olduğu için diğer terimlere göre daha küçüktür ve ihmal edilebilir [48].

İhmal edilecek terimler dışında kalan ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ birim şekil değiştirme ifadelerinin bulunduğu denklemleri sadeleştirmek adına Çizelge 5.1'de gösterilen mertebe analizi yapılacaktır.

(5.28)-(5.30) denklemleri düzenlendiğinde aşağıdaki gibi olacaktır.

Çizelge 5.1 : Mertebe şeması.

$\frac{x}{L} = O(1)$	$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{u_0}{L} = O(\varepsilon^2)$	
$w' \approx O(\varepsilon)$	$\theta' \approx O(\varepsilon^2)$	$u' \approx O(\varepsilon^2)$

$$\varepsilon_{xx} = u'_0 - \xi w'' + \frac{(w')^2}{2} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_{x\eta} = 0 \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_{x\xi} = 0 \quad (5.33)$$

Mertebe analizinin sonucu olarak (5.32) ve (5.33) denklemlerinin sonuçları sıfırdır. Potansiyel enerji denkleminin genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\iint_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d\eta d\xi \right) dx \quad (5.34)$$

Alan integrali formülasyonu Çizelge 5.2’de verilmiştir [48]. Potansiyel enerji denkleminde kullanılacaktır. Çizelge 5.2’de bahsedilen e_1 ve e_2 terimleri, kesit alanının merkezinden geçen eksenlerle, elastik eksen arasındaki mesafedir ve bu tezde bahsedilen kiriş modeli iki eksenle simetrik olduğundan dolayı e_1 ve e_2 sıfıra eşittir.

Kirişin geometrik merkezlerinden geçen eksen; orta düzlemde deformasyon sıfır olacaktır.

Çizelge 5.2 : Potansiyel enerji denklemi için alan integralleri.

$\iint_A d\eta d\xi = A$	$\iint_A \xi^2 d\eta d\xi = I_y$	$\iint_A \eta^2 d\eta d\xi = I_z$
$\iint_A (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi = J$	$\iint_A \eta d\eta d\xi = Ae_1 = 0$	$\iint_A \xi d\eta d\xi = Ae_2 = 0$
$\iint_A \xi \eta d\eta d\xi = I_{yz} = 0$		

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz \quad (5.35)$$

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma dz \quad (5.36)$$

Kirişin orta düzlemindeki tabaka üzerine etkiyen eksenel kuvvet, N , eğilme momenti, M ve kayma kuvveti, Q aşağıdaki şekilde ifade edilir [49]. Euler-Bernoulli kiriş modeli üzerine çalışıldığı için kayma gerilmeleri ihmal edilmektedir.

(5.31)-(5.33) denklemleri (5.34) numaralı denklemde (5.35) ve (5.36)'da verilen bilgiler doğrultusunda yerine konduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left\{ N_x u'_0 + \frac{(w')^2}{2} \right\} + M_x \theta' \right] dx \quad (5.37)$$

$$N_x = \bar{A}_{11} u'_0 + \bar{B}_{11} \theta' \quad (5.38)$$

$$M_x = \bar{B}_{11} u'_0 + \bar{D}_{11} \theta' \quad (5.39)$$

Katılık katsayıları ise aşağıdaki gibidir:

$$\bar{A}_{11} = \int_A E(z) dA \quad (5.40)$$

$$\bar{B}_{11} = \int_A z E(z) dA \quad (5.41)$$

$$\bar{D}_{11} = \int_A z^2 E(z) dA \quad (5.41)$$

Katılık katsayıları $\bar{A}_{11}$, elastik modülü ile kiriş kesit alanının çarpımını, $\bar{B}_{11}$, uzama ve düzlemdışı eğilme kaynaklı oluşan terim ve $\bar{D}_{11}$, elastik modülü ile eylemsizlik momentinin çarpımını gösteren terimdir.

(5.37) numaralı denkleme, (5.38) ve (5.39) numaralı denklemler yerleştirilip merteye analizi yapılarak düzenlendiğinde elde edilen potansiyel enerji denklemi:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \bar{A}_{11} (u'_0)^2 + 2\bar{B}_{11} u'_0 \theta' + \bar{D}_{11} (\theta')^2 \right\} dx + A_1 \quad (5.42)$$

Kirişin dönmesinden dolayı oluşan merkezkaç kuvveti, $F_{MK}(x)$, eksenel uzama, u_0 ve düzgün birim şekil değişimi, ε_0 ile bağıntılıdır [50].

$$u'_0(x) = \varepsilon_0(x) = \frac{F_{MK}(x)}{EA} = \frac{F_{MK}(x)}{\bar{A}_{11}} \quad (5.43)$$

Dönen kiriş için (5.42) numaralı potansiyel enerji denklemi tekrar düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \bar{D}_{11}(\theta')^2 + F_{MK}(x)(w')^2 \} dx + A_1 \quad (5.44)$$

A_1 terimi $\frac{1}{2} \int_0^{L_e} \frac{F_{CF}^2(x)}{EA} dx$ ile gösterilir ve kiriş sabit hızla döndüğü için merkezkaç kuvvetine bağlı olarak ifade edilen A_1 sabit bir terim olarak yer alır. Kinetik enerji denklemini için deplasman hızlarının oluşturulması gerekecektir. Dönen kiriş için sırasıyla pozisyon ve hız vektörü denklemi aşağıdaki gibidir [50].

$$\vec{r} = (x + u_0 + \xi w')\vec{i} + w\vec{k} \quad (5.45)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega \vec{k} \times \vec{r} \quad (5.46)$$

Hız bileşenleri için (5.10)-(5.15) denklemlerinin zamana göre türevleri alınarak (5.46) denkleminde yerine konulursa hız bileşenleri aşağıdaki gibi olacaktır [50].

$$V_x = \dot{u}_0 - \xi \dot{w}' - \Omega \eta \quad (5.47)$$

$$V_y = (R + x + u_0 - \xi w')\Omega \quad (5.48)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} \quad (5.49)$$

Elde edilen hız terimlerinden sisteme ait kinetik enerji formülasyonu şu şekilde ifade edilmektedir [51].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\iint_A \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) d\eta d\xi \right) dx \quad (5.50)$$

Kinetik enerji hesabı için Çizelge 5.3’de alan integrallerini içeren tablo bulunmaktadır.

Çizelge 5.3 : Kinetik enerji denklemi hesabı için alan integralleri.

$\iint_A \rho d\eta d\xi = m$	$\iint_A \rho \eta^2 d\eta d\xi = \rho I_z$	$\iint_A \rho \xi^2 d\eta d\xi = \rho I_y$
$\iint_A \rho \xi d\eta d\xi = 0$	$\iint_A \rho \eta d\eta d\xi = me$	$\iint_A \rho \xi \eta d\eta d\xi = me_1 = 0$

(5.50) numaralı denklem ifadesinde hız bileşenleri yerine koymadan önce Çizelge 5.1 ile mertebe analizi yapıldığında, mertebe olarak daha küçük terimler ihmal edilir. e , kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen ile elastik eksen arasındaki uzaklıktır ve bu değer sıfırdır.

Çizelge 5.3’de ifade edilen alan integralleri ve mertebe analizine göre (5.50) denklemi düzenlenerek tekrar yazıldığında kinetik enerji formülasyonu aşağıdaki gibi olacaktır [50].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (I_1 (\dot{u}_0)^2 + I_1 (\dot{w})^2 + 2I_2 \dot{u}_0 \dot{\theta} + I_3 (\dot{\theta})^2) dx + A_2 \quad (5.51)$$

$\rho A(R+x+u_0)$ ve $\rho I_z \Omega^2$ terimleri sabit terimlerdir ve A_2 terimi ile ifade edilir.

Eylemsizlik katsayılarının denklemleri ise aşağıdaki gibidir:

$$I_1 = \int_A \rho(z) dA \quad (5.52)$$

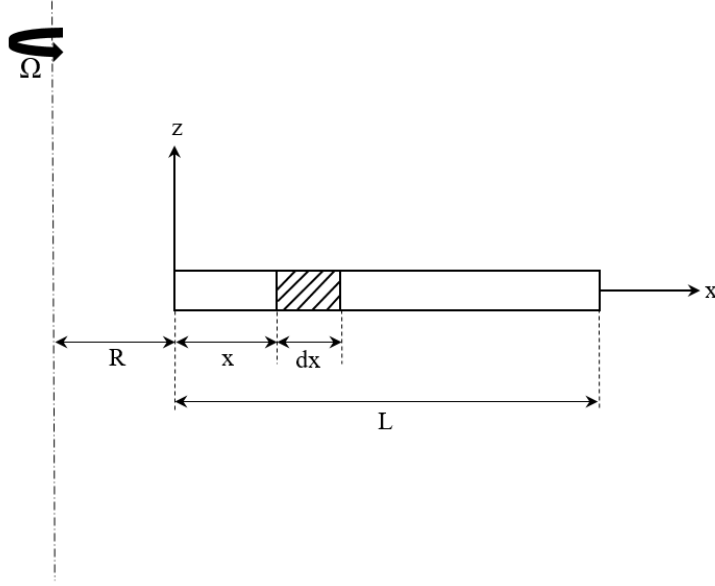
$$I_2 = \int_A \rho(z) z dA \quad (5.53)$$

$$I_3 = \int_A \rho(z) z^2 dA \quad (5.54)$$

5.2.1.1 Merkezkaç kuvveti ve denklem çıkarımı

Dönen kirişlerde harekete bağlı olarak merkezkaç kuvveti oluşmaktadır ve bu kuvvet, herhangi bir nokta etrafında dönen rijit cismin, dönme ekseninden dışarıya doğru, eksenenden uzaklaşma eğilimi olarak tanımlanır.

Şekil 5.7’de kiriş elemanı üzerine etkiyen merkezkaç kuvveti gösterilmektedir.



Şekil 5.7 : Merkezkaç kuvveti.

Sabit Ω açısal hızıyla dönen, R yarıçaplı, L uzunluğunda düzgün ankastre kiriş için x kadar uzaklıktaki küçük bir elemanın çizgisel hızı ve kiriş elemanı üzerine etkileyen merkezkaç kuvveti:

$$V = \Omega(R + x) \quad (5.55)$$

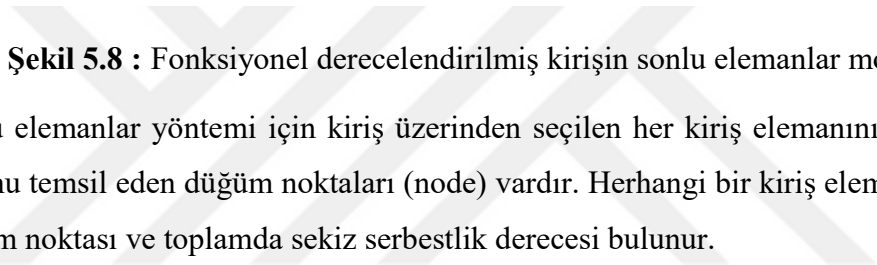
$$F_{MK}(x) = \frac{mV^2}{(R + x)} = \rho A \Omega^2 (R + x) \quad (5.56)$$

Kiriş üzerine etkileyen kuvvetlerin x doğrultusunda dinamik denge denklemleri yazıldığında, kiriş boyunca değişen merkezkaç kuvvetinin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$F_{MK} = \int_0^L \rho A \Omega^2 (R + x) dx = \int_0^L I_1 \Omega^2 (R + x) dx \quad (5.57)$$

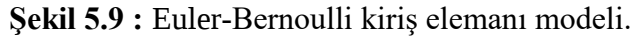
5.2.2 Euler-Bernoulli kirişi için sonlu elemanlar formülasyonu

Bu bölümde, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş düzgün, ankastre kiriş için uzama ve düzlemsiz eğilme kaynaklı sapma (deflection) için sonlu elemanlar formülasyonu tanımlanacaktır. Sonlu elemanlar formülü için L uzunluğundaki bir kiriş üzerinde z eksenine x_i kadar uzaklıkta, L_e uzunluğundaki küçük eleman gösterimi Şekil 5.8’de verilmiştir. Her bir küçük eleman için tanımlanacak potansiyel ve kinetik enerji denklemleri için yapılacak işlemler sonucunda tüm kiriş için enerji



elemanlar yöntemi için giriş üzerinden seçilen her giriş elemanını temsil eden düğüm noktaları (node) vardır. Herhangi bir giriş elemanı bir giriş noktası ve toplamda sekiz serbestlik derecesi bulunur.

Uzama ve düzlemdışı eğilme durumu için Euler-Bernoulli kiriş elemanının her bir düğüm noktasında üç serbestlik derecesi olacaktır. Şekil 5.8’de kiriş üzerinde seçilen kiriş elemanı için serbestlik dereceleri Şekil 5.9’da gösterilmektedir.



27

Şekil 5.9’da da gösterildiği gibi 2 düğüm noktası için toplam 6 serbestlik derecesi vardır. Sonlu elemanlar yönteminde, düğümler arası bağlantıyı tanımlamak için oluşturulan şekil fonksiyonları modele uygun mertebeden polinomlar ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [52].

$$u = a_0 + a_1 x \quad (5.58)$$

$$w = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3 \quad (5.59)$$

$$\theta = w' = a_3 + 2a_4 x + 3a_5 x^2 \quad (5.60)$$

L_e uzunluğundaki küçük kiriş elemanının düğüm noktalarındaki yer değiştirme miktarlarını bulabilmek için $x=0$ ve $x=L_e$ değerleri (5.58)-(5.60) numaralı denklemlerde yerlerine konulduğunda elde edilen matris aşağıdaki gibidir:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

Kiriş boyunca oluşan deplasman miktarı, her bir düğüm noktasındaki deplasman miktarları cinsinden yazılabilir.

$$\{q\} = [N] \{q_e\} \quad (5.62)$$

Denklem (5.62)’de ifade edilen, $\{q\}$ deplasman matrisi, $[N]$ şekil fonksiyonları matrisini, $\{q_e\}$ düğüm noktası deplasman matrisini göstermektedir. Yerdeğiştirme alanı her bir düğüm noktasındaki yer değiştirme alanı ve şekil fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Her bir ifadenin düğüm noktalarındaki matris gösterimi ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\{q\} = \{u \quad w \quad \theta\}^T \quad (5.63)$$

$$[N] = [N_u \quad N_w \quad N_\theta]^T \quad (5.64)$$

$$\{q_e\} = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (5.65)$$

Uzama, düzlemdışı eğilmeden kaynaklı yerdeğiştirme ve düzlemdışı eğilmeden kaynaklı açı değişimlerinin gösterimi kiriş boyunca deplasman miktarı, şekil fonkdiyoları ve düğüm noktalarındaki deplasman miktarları cinsinden (5.63)-(5.65) numaralı denklemlerde gösterilmektedir.

(5.61) ve (5.62) numaralı denklemlerden elde edilen şekil fonksiyonu matrisleri:

$$[N_u] = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (5.66)$$

$$[N_w] = \left\{ 0 \quad 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3} \quad x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \quad 0 \quad \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3} \quad -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \right\} \quad (5.67)$$

$$[N_\theta] = \left\{ 0 \quad -\frac{6x}{L_e^2} + \frac{6x^2}{L_e^3} \quad 1 - \frac{4x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} \quad 0 \quad \frac{6x}{L_e^2} - \frac{6x^2}{L_e^3} \quad -\frac{2x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} \right\} \quad (5.68)$$

$[N_u]$, $[N_w]$ ve $[N_\theta]$ sırasıyla uzama, u, düzlemdışı eğilme, w ve düzlemdışı eğilme kaynaklı açı değişimi, θ için şekil fonksiyonlarıdır.

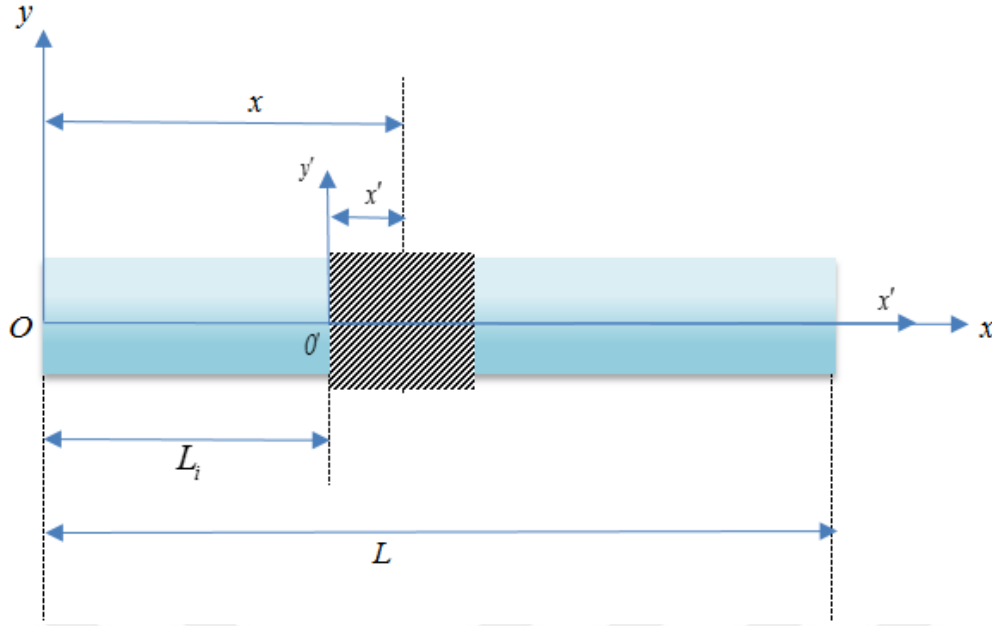
Dönen kiriş için (5.57) numaralı denklemde, yayılı yük için ifade edilen merkezkaç kuvveti, eleman matrislerini etkiler. Şekil 5.10'da, kiriş üzerinde her küçük kiriş elemanının dönme eksenine uzaklığı L_i ve global ile lokal koordinat sistemlerinin konumu gösterilmektedir.

n parçaya bölündüğü varsayılan bir kiriş için kiriş elemanının dönme eksenine olan uzaklığının, toplam kiriş boyu L , üzerinden ifadesi:

$$L_i = (i-1) \frac{L}{n} \quad (5.69)$$

(5.57) numaralı denklem için sonlu elemanlar formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$F_{CF}(x) = I_1 \Omega^2 \left[R(L - L_i - x') + \frac{1}{2}(L - L_i - x')(L + L_i + x') \right] \quad (5.70)$$



Şekil 5.10 : Merkezkaç kuvvetinin sonlu elemanlar gösterimi.

5.2.3 Katılık ve kütle matrislerinin elde edilmesi

Serbest titreşim analizi yapılacak olan ankastre, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş, düzgün kiriş için katılık ve kütle matrislerine ihtiyaç vardır. Kiriş boyunca oluşan deplasman miktarını her bir düğüm noktasındaki deplasman miktarlarından elde edileceğini gösteren (5.62) numaralı denklemin konum (x) ve zamana (t) bağlı türevleri alınarak katılık ve kütle matrisleri yazılacaktır.

$$\{q\}' = [N]' \{q_e\} \quad (5.71)$$

$$\{\dot{q}\} = [N] \{\dot{q}_e\} \quad (5.72)$$

Burada $\{q\}'$ deplasman matrisinin konuma bağlı türevini ve $\{\dot{q}\}$ ise zamana bağlı türevini göstermektedir. (5.42) ve (5.51) numaralı denklemlerde ifade edilen enerji denklemlerine, yukarıda belirtilen türev tanımları ile birlikte, (5.66)-(5.68) numaralı denklemlerinde belirtilen şekil fonksiyon matrisleri yerine yazılırsa, her bir düğüm noktası için eleman katılık ve eleman kütle matrisleri elde edilir.

Potansiyel enerji ve kinetik enerji formüllerinde denklemler yerine konularak tekrar düzenlendiğinde elde edilen eleman katılık ve eleman kütle denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} [K^e] = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} & (\bar{A}_{11} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + 2\bar{B}_{11} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right] \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \\ & + \bar{D}_{11} \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]) dx \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$[M^e] = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} (I_1 [N_u]^T [N_u] + I_1 [N_w]^T [N_w] + 2I_2 [N_u]^T [N_u] [N_\theta]^T [N_\theta] + I_3 [N_\theta]^T [N_\theta]) dx \quad (5.74)$$

Burada $[K^e]$ katılık eleman matrisi, $[M^e]$ kütle eleman matrisidir ve L_e kiriş üzerindeki küçük bir elemanın uzunluğunu ifade eder. Denklemlerden elde edilen eleman matrisleri, kirişi oluşturan her bir eleman için sonlu elemanlar yöntemine uygun olacak şekilde bir araya getirilerek global katılık ve global kütle matrisleri elde edilir. Serbest titreşim analizi yapılacak ankastre kiriş için doğal frekansların bulunacağı denklem:

$$[M^s] \{\ddot{q}\} + [K^s] \{q\} = 0 \quad (5.75)$$

Doğal frekansları hesaplayabilmek için sisteme ait öz değer denklemi:

$$\det \left[[M^s]^{-1} [K^s] - \omega^2 [I] \right] = 0 \quad (5.76)$$

Ankastre kiriş için $x=0$ noktasında uzama, $u(x)$, düzlemdışı eğilme, $w(x)$ ve düzlemdışı eğilme kaynaklı oluşan açı, $\theta(x)$ sıfır olacaktır. Bu durum sonlu elemanlar yönteminde düğüm noktası için tanımlandığında üç serbestlik derecesinin sıfır olmasından dolayı global matrisin ilk üç satır ve sütunu sıfır olacaktır. Matris işlemlerine etkisi olmayacağı için bu ilk üç satır ve sütun silinerek indirgenmiş katılık ve kütle matrisleri bulunur. Serbest titreşim analizi için doğal frekanslar denklem (5.76)'dan hesaplanacaktır.

5.3 Timoshenko Kiriş Teorisi

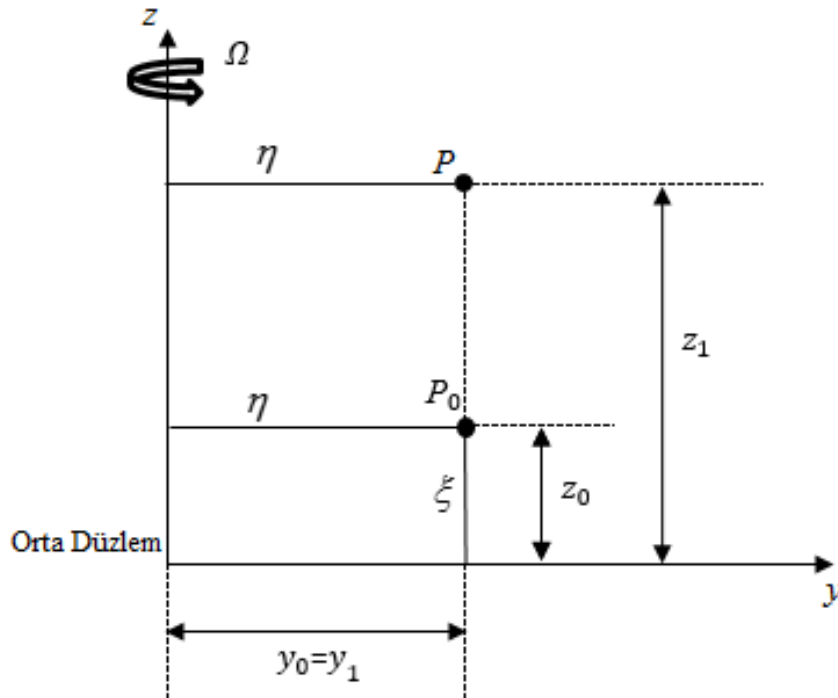
Kiriş uzunluğunun, kiriş kalınlığına oranı küçük olduğu yani kirişin kalınlığının arttığı durumlarda kayma gerilmelerinin etkisi önem kazanmaktadır. Basit mesnetli kiriş üzerine düzgün yayılı yükün oluşturduğu gerilmelerde, yanal kayma gerilmelerinin, yüksek açıklık oranı olan kirişlerde, h/L , veya yüksek frekanslı kirişlerde etkin olduğu görülmüştür. Timoshenko kiriş teorisi kayma şekil değiştirmesini içeren bir teoridir.

Deplasman öncesi kiriş eksenine dik olan kiriş kesiti, deplasman sonrasında düzlemselliğini korur ancak kiriş eksenine dikliğini kaybeder. Kayma gerilmeleri kiriş üzerinde düzgün dağılmadığı için kayma düzeltme katsayısı (shear corection factor) kullanılır.

Bu çalışmada titreşim modellemesi için Timoshenko kiriş teorisi de kullanılmıştır. Timoshenko kiriş teorisine göre çalışılacak helikopter pal modeli için deformasyon öncesi ve sonrası kiriş uzunluğunun da değişmediği kabul edilir. Deformasyon sırasında oluşacak yer değiştirmeler oldukça küçük olacaktır. Kayma etkisinden kaynaklı kayma gerilmeleri modele eklenecektir.

5.3.1 Timoshenko kiriş teorisi için enerji denklemleri

Bu bölümde dönen ve dönmeyen, homojen, düzgün ve ankastre Timoshenko kirişlerinin uzama ve düzlemdışı eğilme hareketi için potansiyel ve kinetik enerji denklemlerinin çıkarımı yapılacaktır. Kirişin kesit ve uzunluk boyunca görünüşü Şekil 5.11 ve Şekil 5.12’de verilmiştir. Şekil 5.11 ve Şekil 5.12’de deformasyon öncesi referans noktası olarak gösterilen P_0 , deformasyon sonrası P ile gösterilmektedir. Potansiyel ve kinetik enerji denklemlerinin çıkarımında, yer değiştirme ve gerinim ifadelerinin yazımı için Şekil 5.11 ve 5.12’den faydalanacaktır.



Şekil 5.11 : Timoshenko kirişinin deformasyon öncesi-sonrası y-z kesit görünüşü.

$$x_1 = R + x + u_0 - \xi\theta \quad (5.80)$$

$$y_1 = \eta \quad (5.81)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (5.82)$$

Deformasyon öncesi ve sonrası referans noktaları için pozisyon vektörleri r_0 ve r_1 için (5.16) ve (5.17) denklemleri ve (5.18)-(5.23) denklemleri kullanılarak, birim uzama ve açı değişimleri için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$d\vec{r}_0 = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (5.83)$$

$$d\vec{r}_1 = [(1+u'_0 - \xi\theta') - \theta d\xi]\vec{i} + d\eta\vec{j} + (\theta dx + d\xi)\vec{k} \quad (5.84)$$

Gerinim tensörü, $[\varepsilon_{ij}]$ matrisinin formu (5.27)'de gösterilmiştir. (5.83) ve (5.84) denklemleri, (5.26) denklemine yerine konularak gerekli işlemler ve düzenlemeler yapıldığında gerinim tensörü için aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir:

$$\varepsilon_{xx} = u'_0 - \xi w'' + \frac{(u'_0)^2}{2} + \frac{\xi^2 (\theta')^2}{2} - u'_0 \theta' \xi + \frac{w'^2}{2} \quad (5.85)$$

$$\varepsilon_{x\eta} = 0 \quad (5.86)$$

$$\varepsilon_{x\xi} = (w' - \theta) + \xi\theta\theta' - u'_0\theta \quad (5.87)$$

Burada, ε_{xx} eksenel gerinim, $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ kesme gerinimleridir.

(5.26) numaralı denklemde $dx dx$, $dx d\eta$ ve $dx d\xi$ terimlerinin katsayıları olan ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ hesaplamalarda kullanılacaktır. Eksenel gerinme ε_{xx} , yanal gerinmelere, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ve $\varepsilon_{\xi\xi}$, göre daha etkindir. Bundan dolayı $\varepsilon_{\eta\eta}$ ve $\varepsilon_{\xi\xi}$ yani yanal birim şekil değiştirmeler ihmal edilebilir. Mertebe analizi yapıldığında $\varepsilon_{\eta\xi}$ kayma birim şekil değiştirmesi, diğer kayma birim şekil değiştirmeleri $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ 'ye göre $O(\varepsilon^2)$ mertebesinde olduğu için diğer terimlere göre daha küçüktür ve ihmal edilebilir [48]. Hesaplamalarda kullanılacak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ birim şekil değiştirme ifadelerinin

bulunduğu denklemleri sadeleştirmek adına Çizelge 5.4’de mertebe şeması verilmiştir. (5.85)-(5.87) denklemleri için mertebe analizi yapıldığında (5.88)-(5.90) denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır.

Çizelge 5.4 : Timoshenko kirişi mertebe şeması.

$\frac{x}{L} = O(1)$	$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$	$\theta = O(\varepsilon)$	$\frac{u_0}{L} = O(\varepsilon^2)$
$\varphi = w' - \theta = O(\varepsilon^2)$	$u'_0 \approx O(\varepsilon^2)$	$\theta' \approx O(\varepsilon^2)$

$$\varepsilon_{xx} = u'_0 - \xi w'' + \frac{(w')^2}{2} \quad (5.88)$$

$$\varepsilon_{x\eta} = 0 \quad (5.89)$$

$$\varepsilon_{x\xi} = w' - \theta \quad (5.90)$$

Potansiyel enerji denkleminin genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\iint_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{x\xi} \varepsilon_{x\xi}) d\eta d\xi \right) dx \quad (5.91)$$

Çizelge 5.2’de verilen alan integrali formülasyonları potansiyel enerji denkleminde kullanılacaktır. Kirişin orta düzlemindeki tabaka üzerine etkiyen eksenel kuvvet, N , eğilme momenti, M ve kayma kuvveti, Q aşağıdaki şekilde ifade edilir [49]. Timoshenko kiriş modelinin Euler-Bernoulli kiriş modelinden farkı kayma gerilmeleri etkisinin de hesaba katılmasıdır.

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz \quad (5.92)$$

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma dz \quad (5.93)$$

$$Q = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz \quad (5.94)$$

(5.88)-(5.90) denklemleri (5.91) numaralı denklemde (5.92) ve (5.94)'de verilen bilgiler doğrultusunda yerine konduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[N_x \left\{ u'_0 + \frac{(w')^2}{2} \right\} + M_x \theta' + Q_{xz} (w' - \theta) \right] dx \quad (5.95)$$

$$N_x = \bar{A}_{11} u'_0 + \bar{B}_{11} \theta' \quad (5.96)$$

$$M_x = \bar{B}_{11} u'_0 + \bar{D}_{11} \theta' \quad (5.97)$$

$$Q = \bar{A}_{55} \epsilon_{xz} \quad (5.98)$$

Katılık katsayıları aşağıdaki şekilde ifade edilir. (5.102) numaralı denklem kayma etkisi kaynaklı potansiyel enerji denklemini ifade eder. Kayma gerilmelerinin kiriş üzerinde düzgün dağılmamasından kaynaklı, kayma gerilmesi düzeltme katsayısı, k (shear corection factor) kullanılır.

$$\bar{A}_{11} = \int_A E(z) dA \quad (5.99)$$

$$\bar{B}_{11} = \int_A z E(z) dA \quad (5.100)$$

$$\bar{D}_{11} = \int_A z^2 E(z) dA \quad (5.101)$$

$$\bar{A}_{55} = k \int_A G(z) dA \quad (5.102)$$

Bu durumda hem uzama ve düzlemdışı eğilme hem de kayma gerilmeleri etkisinden oluşan potansiyel enerji formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \bar{A}_{11} (u'_0)^2 + 2\bar{B}_{11} u'_0 \theta' + \bar{D}_{11} (\theta')^2 + \bar{A}_{55} (w' - \theta)^2 \right\} dx \quad (5.103)$$

Katılık katsayıları $\bar{A}_{11}$, elastik modülü ile kiriş kesit alanının çarpımını, $\bar{B}_{11}$, uzama ve düzlemdışı eğilme kaynaklı oluşan katsayı, $\bar{D}_{11}$, elastik modülü ile eylemsizlik

momentinin çarpımını ve $\bar{A}_{55}$, kayma düzeltme katsayısı, k , kiriş kesit alanı ile kayma modülüsü çarpımını ifade etmektedir. Kalınlık, z , yönünde değişen elastik modülüs ve kayma modülü için $\bar{A}_{11}$, $\bar{B}_{11}$, $\bar{D}_{11}$ ve $\bar{A}_{55}$ aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için $G(z)$ kayma modülü ve $E(z)$ elastisite modülü fonksiyonunu göstermektedir.

Kirişe ait kinetik enerji formülasyonu için (5.45) ve (5.46) numaralı denklemlerde pozisyon ve hız vektörü denklemleri ifade edilmişti. Konum denklemlerinin zamana göre türevlerinin alınarak (5.46) numaralı denklemde yerine konması ile elde edilen hız vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$V_x = \dot{u}_0 - \xi \dot{\theta} - \Omega \eta \quad (5.104)$$

$$V_y = (R + x + u_0 - \xi \theta) \Omega \quad (5.105)$$

$$V_z = \dot{w} \quad (5.106)$$

(5.50) numaralı kinetik enerji denklemine, elde edilen (5.104)-(5.106) denklemleri eklendiğinde ve çizelge 5.3'deki kinetik enerji için alan integralleri formülleri uygulanarak denklem sadeleştirilip düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilecektir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (I_1 (\dot{u}_0)^2 + I_1 (\dot{w})^2 + 2I_2 \dot{u}_0 \dot{\theta} + I_3 (\dot{\theta})^2) dx \quad (5.107)$$

Burada, eylemsizlik momenti katsayıları I_1 , yoğunluk ile kiriş kesit alanının çarpımını, I_2 , uzama ve düzlemsiz eğilme kaynaklı oluşan katsayı, I_3 , yoğunluk ile eylemsizlik momentinin çarpımını ifade etmektedir. Kalınlık, z , yönünde değişen yoğunluk için I_1 , I_2 ve I_3 denklemleri (5.52)-(5.54)'de verilmiştir.

Dönen, düzgün Timoshenko kiriş için merkezkaç kuvveti (5.43) numaralı denklemde verilmişti.

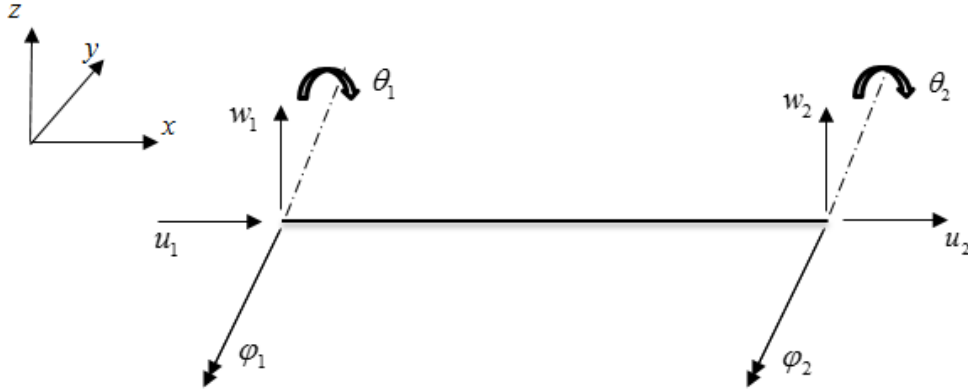
Enerji denklemlerine merkezkaç kuvveti yerleştirilerek düzenlendiğinde dönen kiriş için potansiyel ve kinetik enerji denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \bar{D}_{11} (\theta')^2 + \bar{A}_{55} (w' - \theta)^2 + F_{MK}(x) (w')^2 \} dx \quad (5.108)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (I_1 (\dot{w})^2 + I_3 (\dot{\theta})^2) dx \quad (5.109)$$

5.3.2 Timoshenko kiriş için sonlu elemanlar formülasyonu

Bu bölümde, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş düzgün, ankastre Timoshenko kirişi için kayma gerilmelerinin etkisini de modele ekleyerek uzama, düzlemdışı eğilme kaynaklı yer değiştirme, düzlemdışı eğilme kaynaklı dönme açısı ve kayma şekil değiştirmeden kaynaklı dönme açısı için sonlu elemanlar formülasyonu tanımlanacaktır. Şekil 5.8’de gösterilen fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin sonlu elemanlar modeli göz önüne alınarak her bir küçük elemana tanımlanacak potansiyel ve kinetik enerji denklemleri için yapılacak işlemler sonucunda tüm kiriş için enerji denklemleri yazılacaktır. Uzama, düzlemdışı eğilme ve kayma gerilmeleri için Timoshenko kiriş elemanının her bir düğüm noktasında dört serbestlik derecesi olacaktır. Şekil 5.8’de kiriş üzerinde seçilen kiriş elemanı için serbestlik dereceleri Şekil 5.13’de gösterilmektedir.



Şekil 5.13 : Timoshenko kiriş elemanı modeli.

Timoshenko kirişinde u , uzama, w , düzlemdışı eğilmeden dolayı yer değiştirme, θ düzlemdışı eğilme kaynaklı açı değişimi ve ϕ , kayma gerilmeleri kaynaklı kayma açısını göstermektedir. Kiriş elemanı için Şekil 5.13’de de gösterildiği gibi 2 düğüm noktası için toplam 8 serbestlik derecesi vardır. Sonlu elemanlar yönteminde, düğümler arası bağlantıyı tanımlamak için oluşturulan şekil fonksiyonları modele uygun mertebeden polinomlar ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [52].

$$u = a_0 + a_1 x \quad (5.110)$$

$$w = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3 \quad (5.111)$$

$$\varphi = a_6 + a_7 x \quad (5.112)$$

$$\theta = w' - \varphi = a_3 - a_6 + (2a_4 - a_7)x + 3a_5 x^2 \quad (5.113)$$

L_e uzunluğundaki küçük kiriş elemanının düğüm noktalarındaki yer değiştirme miktarlarını bulabilmek için $x=0$ ve $x=L_e$ değerleri (5.110)-(5.113) denklemlerinde yerlerine konulduğunda elde edilen matris aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 & -1 & -L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_e \end{bmatrix} \quad (5.114)$$

Kiriş boyunca oluşan deplasman miktarı, her bir düğüm noktasındaki deplasman miktarları ve şekil fonksiyonları cinsinden (5.62) numaralı denklemde verilmişti. Her bir matrisi oluşturan elemanlar aşağıdaki gibidir.

$$\{q\} = \{u \quad w \quad \theta \quad \varphi\}^T \quad (5.115)$$

$$[N] = [N_u \quad N_w \quad N_\theta \quad N_\varphi]^T \quad (5.116)$$

$$\{q_e\} = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \varphi_2\}^T \quad (5.117)$$

(5.62) ve (5.114) denklemleri kullanılarak elde edilen şekil fonksiyonları matrisini oluşturan elemanlar ise aşağıdaki gibidir:

$$[N_u] = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (5.118)$$

$$[N_w] = \begin{Bmatrix} 0 & 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3} & x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} & x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \\ 0 & \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3} & -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} & -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \end{Bmatrix} \quad (5.119)$$

$$[N_\theta] = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{6x}{L_e^2} + \frac{6x^2}{L_e^3} & 1 - \frac{4x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} & -\frac{3x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} & 0 \\ \frac{6x}{L_e^2} - \frac{6x^2}{L_e^3} & -\frac{2x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} & -\frac{3x}{L_e} + \frac{3x^2}{L_e^2} \end{Bmatrix} \quad (5.120)$$

$$[N_\varphi] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \quad (5.121)$$

$[N_u]$, $[N_w]$, $[N_\theta]$ ve $[N_\varphi]$ sırasıyla uzama, u, düzlemsiz eğilme, w, düzlemsiz eğilme kaynaklı açı değişimi θ ve kayma gerilmeleri kaynaklı açı değişimi, φ için şekil fonksiyonlarıdır.

Dönen kiriş için sonlu elemanlar formülasyonu (5.57) numaralı denklemde ifade edilmiştir.

5.3.3 Katılık ve kütle matrislerinin elde edilmesi

(5.103) ve (5.107) numaralı denklemlerde ifade edilen enerji denklemlerine, (5.71) ve (5.72) denklemlerinde belirtilen türev ifadelerini kullanarak, (5.118)-(5.121) numaralı denklemlerde belirtilen şekil fonksiyon matrisleri yerine yazıldığında, her bir düğüm noktası için eleman katılık ve eleman kütle matrisleri elde edilir. Potansiyel enerji ve kinetik enerji formüllerinde denklemler yerine konularak tekrar düzenlendiğinde elde edilen eleman katılık ve eleman kütle denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$[K^e] = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} (\bar{A}_{11} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + 2\bar{B}_{11} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right] \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + \bar{D}_{11} \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right] + \bar{A}_{55} \left(\left[\frac{dN_w}{dx} \right] - N_\theta \right)^T \left(\left[\frac{dN_w}{dx} \right] - N_\theta \right)) dx \quad (5.122)$$

$$[M^e] = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} (I_1 [N_u]^T [N_u] + I_1 [N_w]^T [N_w] + 2I_2 [N_u]^T [N_u] [N_\theta]^T [N_\theta] + I_3 [N_\theta]^T [N_\theta]) dx \quad (5.123)$$

Burada $[K^e]$ katılık eleman matrisi, $[M^e]$ kütle eleman matrisidir ve L_e kiriş üzerindeki küçük bir elemanın uzunluğunu ifade etmektedir. Denklemlerden elde edilen eleman matrisleri, kirişi oluşturan her bir eleman için sonlu elemanlar yöntemine uygun olacak şekilde bir araya getirilerek global katılık ve global kütle matrisleri elde edilir. Daha önce belirtildiği gibi serbest titreşim analizi yapılacak ankastre kiriş için doğal frekanslar bulunacaktır. Ankastre kiriş için $x=0$ noktasında uzama, $u(x)$, düzlemsiz eğilme, $w(x)$, düzlemsiz eğilme kaynaklı oluşan açı, $\theta(x)$ ve kayma açısı, $\varphi(x)$ sıfır olacaktır. Bu durum sonlu elemanlar yönteminde düğüm noktası için tanımlandığında dört serbestlik derecesinin sıfır olmasından dolayı global matrisin ilk dört satır ve sütunun sıfır olacaktır. Matris işlemlerine etkisi olmayacağı için bu ilk dört satır ve sütun silinerek indirgenmiş katılık ve kütle matrisleri bulunur. Serbest titreşim analizi için doğal frekanslar denklem (5.76)'dan hesaplanacaktır.



6. KİRİŞ MODELLERİ İÇİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ SONUÇLARI

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde bahsedilen Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre modellenen palin, serbest titreşim analizi için doğal frekans değerleri verilecektir. Sayısal sonuçlar için sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada, yukarıdaki bölümlerde elde edilen denklemler için geliştirilen kod, Mathematica programında yazılmıştır. Geliştirilen kod ile bu tez kapsamında, dönen ve dönmeyen, düzgün, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş modelleri için doğal frekans sonuçları elde edilmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş modeli için kullanılan kiriş malzeme özelliği dağılım fonksiyonu güç yasasına göredir. Güç yasası indisi, n değeri sıfır alındığında düzgün, homojen kiriş için sonuçlar elde edilmiş olur.

Literatürde yapılan benzer çalışmaların sonuçları ile karşılaştırma yapılabilmesi için Çizelge 6.1’de verilen boyutsuzlaştırılmış parametreler kullanılmıştır.

Çizelge 6.1 : Boyutsuz parametreler.

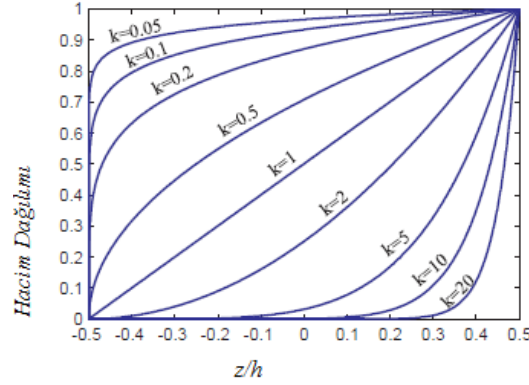
$\bar{x} = \frac{x}{L}$	$\bar{w} = \frac{w}{L}$	$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{L}$
$\bar{\Omega}^2 = \frac{I_1 L^4 \Omega^2}{\bar{D}_{11}}$	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$	$r^2 = \frac{I_3}{I_1 L^2}$

Burada, $\bar{\Omega}$ açısal hız parametresi, λ frekans parametresi ve r ise narinlik oranının tersi, yani kiriş kalınlığının uzunluğuna oranını ifade eden bir parametredir.

Sayısal sonuçlar üzerinde pek çok parametrenin etkisi vardır. Bu çalışmada malzeme dağılım fonksiyonu, açısal hız, Ω , narinlik oranı, L/h ve güç yasası kuvveti, n parametrelerinin etkisi tablolarda paylaşılmıştır. Açık literatürdeki sonuçlar ile bu tablolardaki veriler doğrulanmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için güç yasası indisine göre kirişin kalınlığı boyunca hacimsel dağılım oranları değişimini veren denklem (5.4)’de verilmiştir. Bu

denkleme göre oluşan kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılım grafiği Şekil 6.1’de verilmiştir.



Şekil 6.1 : Fonksiyonel FD malzeme için hacimsel dağılım oranları.

6.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi için Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde teorisi anlatılan ve matematiksel modelinin çıkarıldığı Euler-Bernoulli kirişi için elde edilen sonuçlar ve literatür sonuçları ile karşılaştırılmaları yer almaktadır. Euler-Bernoulli teorisine göre elde edilen enerji denklemlerinden katılık ve kütle matrisleri oluşturularak sonlu elemanlar metoduna göre Mathematica programında kod geliştirilmiştir. İlk olarak serbest titreşim analizi yapılacak kiriş, sadece Alüminyum malzemesinden oluşan, homojen, prizmatik bir yapıdadır. Kirişin özellikleri Çizelge 6.2’de verilmiştir.

Çizelge 6.2 : Euler-Bernouli kirişi özellikleri.

Malzeme özelliği	Alüminyum (Al)	Alümina (Al_2O_3)
Elastik modülüs, E	70 GPa	380 GPa
Yoğunluk, ρ	2702 kg/m ³	3960 kg/m ³
Poisson oranı, ν	0.3	0.3

Euler-Bernoulli Teorisine göre sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan kiriş için dönmeyen, ankastre mesnetlenmiş ve farklı sınır koşullarına göre modellenen boyutsuz doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Çizelge 6.3’de, boyutsuz doğal frekans değerleri, değişen L/h oranı ve farklı sınır koşullarına göre verilmiştir. Kayma etkisinin ihmal edilmesine dayalı olan bu teoride daha önce bahsedildiği gibi L/h oranının yüksek, yani ince kirişler için çalışma yapılmıştır.

Çizelge 6.3 : Dönmeyen, homojen Alüminyum Euler-Bernoulli kirişinin değişen L / h oranına göre boyutsuz doğal frekanslara sınır koşullarının etkisi.

Sınır Koşulları	$\lambda = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}}$	L/h=100		L/h=80		L/h=70		L/h=50		L/h=30		L/h=20	
		Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod
A-S	1	3,5160	3,5160	3,5159	3,5159	3,5159	3,5159	3,5158	3,5157	3,5153	3,5153	3,5143	3,5143
	2	22,032	22,032	22,030	22,030	22,029	22,028	22,023	22,023	22,002	22,002	21,961	21,960
	3	61,678	61,677	61,667	61,666	61,657	61,657	61,618	61,618	61,478	61,478	61,207	61,206
S-S	1	22,372	22,372	22,372	22,372	22,371	22,371	22,369	22,369	22,361	22,361	22,345	22,345
	2	61,661	61,661	61,655	61,654	61,649	61,649	61,626	61,626	61,542	61,542	61,379	61,379
	3	120,85	120,854	120,830	120,826	120,80	120,802	120,71	120,705	120,35	120,354	119,68	119,677

Euler-Bernoulli teorisine göre sonlu elemanlar yöntemi ile oluşturulan kodun literatürdeki çalışmanın sonuçlarına oldukça yakın çıktığı görülmektedir. A-S ve S-S sırasıyla ankastre-serbest ve sabit-sabit sınır koşullarını ifade etmektedir.

Artan L/h oranına göre doğal frekans değerlerinde virgül sonrası küçük değişimler olmuştur. Ancak farklı sınır şartları göz önüne alındığında, sabit-sabit sınır şartına sahip olan kirişin ankastre-serbest kirişe göre daha yüksek doğal frekans değerlerine sahip olduğu gözlemlenmektedir.

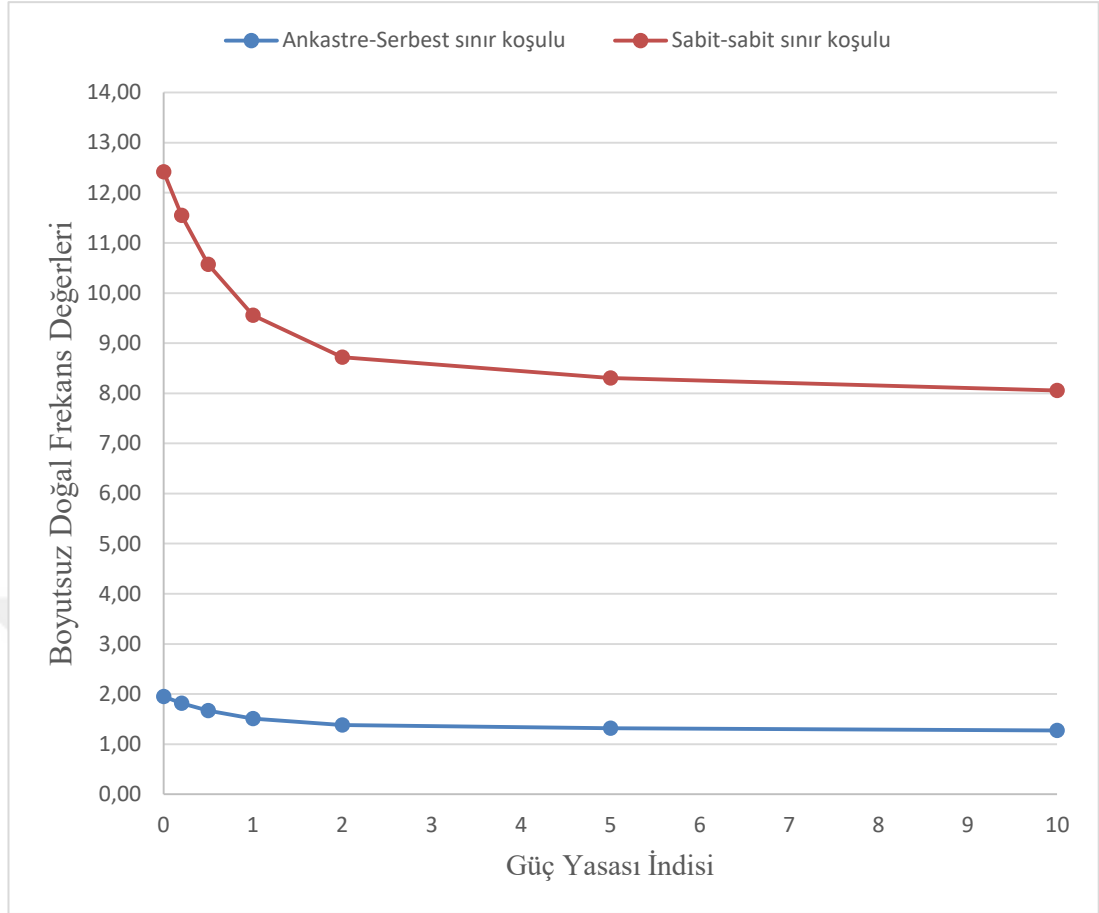
Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için model Şekil 5.4 a’da verilmiştir. Paylaşılan modele göre kirişin alt yüzeyi sadece seramik, üst yüzeyi sadece alüminyum ve kirişin alt ve üst yüzeyindeki malzeme geçişi ise hacimsel oran dağılımına göre değişir. Prizmatik, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş modeli için kullanılan Alumina ve Alüminyum’a ait malzemelerin kiriş özellikleri Çizelge 6.2’de verilmektedir.

Çizelge 6.4’de farklı sınır koşulları ve değişen güç yasası indisi değerine göre serbest titreşim analizi yapılan, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz doğal frekans değerleri paylaşılmıştır. Geliştirilen kod ile literatürdeki doğal frekansların uyumlu olduğu gözükmemektedir.

Çizelge 6.4 : Değişen güç yasası indisine göre dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz doğal frekansların karşılaştırılması.

Sınır Koşulları	L/h	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	n =0	n =0.2	n =0.5	n =1	n =2	n =5	n =10
A-S Ankastre- Serbest	5	Kod	1,93846	1,80485	1,65496	1,50069	1,37274	1,3051	1,26294
		J.W.Lee, J.Y. Lee [53]	1,9385	1,8037	1,6504	1,4914	1,3599	1,2942	1,2565
		Simsek [54]	1,93845	1,80418	1,65057	1,49135	1,35985	1,29416	1,25648
	20	Kod	1,95249	1,8178	1,66704	1,51229	1,38433	1,31667	1,27356
		J.W.Lee, J.Y. Lee [53]	1,9525	1,8167	1,6625	1,5029	1,3714	1,3057	1,2671
		Simsek [54]	1,95248	1,81714	1,66265	1,50293	1,37142	1,30574	1,26713
S-S Sabit- Sabit	5	Kod	12,1826	11,3371	10,3714	9,36547	8,52944	8,11103	7,88057
		J.W.Lee, J.Y. Lee [53]	12,1826	11,3369	10,3708	9,3642	8,5277	8,1096	7,8797
		Simsek [54]	12,1826	11,3398	10,3718	9,36422	8,52772	8,10955	7,87968
	20	Kod	12,4143	11,5509	10,5709	9,55664	8,72028	8,30209	8,05647
		J.W.Lee, J.Y. Lee [53]	12,4143	11,5508	10,5703	9,5554	8,7186	8,3006	8,0556
		Simsek [54]	12,4142	11,5537	10,5713	9,55538	8,71856	8,30064	8,05560

Şekil 6.2’de, geliştirilen kod ile fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için hesaplanan boyutsuz doğal frekansların değişen Güç Yasası indisine göre ankastre-serbest ve sabit-sabit sınır koşullarının etkisi gösterilmektedir.



Şekil 6.2 : Farklı sınır koşulları için değişen güç yasası indisine göre dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz doğal frekanslar.

Çizelge 6.5 ve Çizelge 6.6 sırasıyla ankastre-serbest ve sabit-sabit sınır koşullarına göre oluşturulan tablolardır.

Her iki çizelgede de kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için L/h oranı ve güç yasası indisine göre doğal frekans değerleri verilmektedir. Değişen her bir L/h oranına göre güç yasası indisi, n değeri büyüdükçe doğal frekans değerleri küçülmektedir. Aynı güç yasası indis değerinde, değişen L/h oranının doğal frekanslar üzerinde fazla etkisi olmadığı gözükmemektedir.

Tablolarda verilen boyutsuz doğal frekans değerleri, geliştirilen kod ve literatürdeki doğal frekans değerleri ile kıyaslandığında birbirleriyle uyumlu olduğu gözükmemektedir.

Artan güç yasası değeri, n 'ye göre aynı L/h oranı değeri için boyutsuz doğal frekans değerlerinin birbirlerine yakın değerler olduğu gözükmemektedir. Sonuçlar, literatürdeki değerleri ile kıyaslandığında uyumlu olduğu gözükmemektedir.

Çizelge 6.5 : Ankastre, dönmeyen, kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.

L/h	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	$n=0$		$n=0.2$		$n=1$		$n=5$		$n=10$	
		Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod
10	1	1,9497	1,9497	1,8141	1,8152	1,5006	1,5100	1,3034	1,3143	1,2650	1,27142
	2	12,080	12,0797	11,241	11,2468	9,2892	9,3417	8,0526	8,1129	7,8213	7,85622
	3	30,231	30,8497	28,875	29,4597	25,213	25,6591	19,946	20,3138	18,228	18,57470
	4	33,224	33,2244	30,923	30,9380	25,688	25,8282	22,099	22,2272	21,465	21,54630
	5	63,497	63,4973	59,105	59,1403	48,692	48,9898	41,933	42,2862	40,826	41,03460
30	1	1,9530	1,9530	1,8172	1,8183	1,5034	1,5127	1,3062	1,3171	1,2675	1,27396
	2	12,224	12,2236	11,373	11,3800	9,4085	9,4641	8,1727	8,2377	7,9316	7,96956
	3	34,156	34,1580	31,781	31,7985	26,286	26,4364	22,825	23,0027	22,155	22,25820
	4	66,731	66,7308	62,092	62,1229	51,342	51,6104	44,558	44,8621	43,258	43,42710
	5	90,694	92,5490	86,628	88,3794	76,094	77,4526	59,863	60,9153	54,677	55,71220
100	1	1,9534	1,9534	1,8175	1,8186	1,5037	1,5130	1,3065	1,3174	1,2678	1,27425
	2	12,240	12,2403	11,389	11,3955	9,4222	9,4782	8,1865	8,2520	7,9443	7,98254
	3	34,267	34,2668	31,883	31,9010	26,377	26,5286	22,917	23,0949	22,239	22,34280
	4	67,131	67,1309	62,461	62,4951	51,674	51,9618	44,893	45,2322	43,566	43,76240
	5	110,93	110,933	103,22	103,2720	85,388	85,8570	74,179	74,7332	71,988	72,30760

Çizelge 6.6 : Sabit-sabit sınır koşullu, dönmeyen, FD Euler-Bernoulli kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.

L/h	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	$n=0$		$n=0.2$		$n=1$		$n=5$		$n=10$	
		Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod	Ref.[53]	Kod
10	1	12,3670	12,3669	11,5070	11,5072	9,5163	9,5176	8,2616	8,2630	8,0197	8,02052
	2	33,625	33,6247	31,290	31,2910	25,8470	25,8544	22,3860	22,3950	21,7500	21,7557
	3	60,463	60,4727	57,753	57,7622	49,549	49,5753	39,920	39,9250	36,457	36,4623
	4	64,563	64,5626	60,089	60,0918	50,738	50,7454	42,766	42,7969	41,608	41,6262
	5	103,860	103,859	96,678	96,6863	79,542	79,6094	68,345	68,4257	66,605	66,6546
30	1	12,4230	12,4231	11,5590	11,5591	9,5627	9,5639	8,3079	8,30938	8,0623	8,06317
	2	34,191	34,1914	31,813	31,8144	26,3160	26,3235	22,8570	22,8659	22,1840	22,1888
	3	66,866	66,8662	62,217	62,220	51,455	51,4809	44,675	44,7045	43,365	43,3827
	4	110,170	110,167	102,510	102,517	84,755	84,8202	73,546	73,6218	71,406	71,4505
	5	163,880	163,882	152,490	152,513	126,040	126,179	109,300	109,458	106,140	106,24
100	1	12,4300	12,4295	11,5650	11,5650	9,5680	9,5692	8,3132	8,3147	8,0672	8,06806
	2	34,258	34,2577	31,875	31,8755	26,3710	26,3781	22,9120	22,9206	22,2340	22,2391
	3	67,144	67,144	62,473	62,4764	51,685	51,7101	44,904	44,934	43,576	43,5937
	4	110,960	110,959	103,240	103,249	85,410	85,4740	74,201	74,276	72,008	72,0524
	5	165,69	165,691	154,16	154,183	127,530	127,671	110,790	110,949	107,520	107,6130

6.2 Timoshenko Kiriş Teorisi için Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde teorisi anlatılan ve matematiksel modelinin çıkarıldığı Timoshenko kirişi için elde edilen sonuçlar ve literatür sonuçları ile karşılaştırmaları yer almaktadır.

Timoshenko teorisine göre elde edilen enerji denklemlerinden katılık ve kütle matrisleri oluşturularak, sonlu elemanlar metoduna göre Mathematica programı kullanılarak kodlama yapılmıştır.

Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için Şekil 5.4 a'da ki model kullanılmıştır. Kirişin alt yüzeyi sadece seramik, üst yüzeyi sadece alüminyum ve kirişin alt ve üst yüzeyindeki malzeme geçişi ise hacimsel oran dağılımına göre. Kiriş özellikleri Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.7'de farklı sınır koşulları ve değişen güç yasası indisine göre kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişi için literatürdeki çalışmalar ile boyutsuz doğal frekansların karşılaştırılması yapılmıştır.

Geliştirilen kod ile literatürdeki karşılaştırılan doğal frekansların uyumlu olduğu gözükmemektedir.

Çizelge 6.7 : Fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişi için farklı sınır şartlarında boyutsuz doğal frekansların karşılaştırılması (L/h=5).

<i>Sınır Koşulları</i>	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	<i>n=0</i>	<i>n=0.5</i>	<i>n=1</i>	<i>n=2</i>	<i>n=5</i>	<i>n=10</i>
S-S	Kod	10,015	8,68448	7,91205	7,19908	6,65413	6,32658
	Şimşek [54]	10,0705	8,74674	7,95034	7,17674	6,49349	6,16515
	Nguyen et al. [55]	10,0726	8,7463	7,9518	7,1776	6,4929	6,1658
	Vo et al. [56]	10,0678	8,7457	7,9522	7,1801	6,4961	6,1662
	Vo et al. [57]	10,1851	8,8641	8,0770	7,3039	6,5960	6,2475
A-S	Kod	1,89482	1,61724	1,46304	1,33380	1,26449	1,2240
	Şimşek [54]	1,89523	1,61817	1,46328	1,33254	1,25916	1,21834
	Nguyen et al. [55]	1,8957	1,6182	1,4636	1,3328	1,2594	1,2187
	Vo et al. [56]	1,8952	1,6180	1,4633	1,3326	1,2592	1,2184
	Vo et al. [57]	1,9055	1,6313	1,4804	1,3524	1,2763	1,2308

Ankastre sınır koşulu ve kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için L/h oranının, değişen Güç Yasası indis değerlerine göre elde edilen boyutsuz doğal frekans değerleri Çizelge 6.8'de verilmektedir.

Çizelge 6.8 : Ankastre, dönmeyen, FD Timoshenko kirişinin doğal frekansları üzerinde narinlik oranı ve güç yasası indisi etkisi.

		$n=0$		$n=0.2$		$n=0.5$		$n=1$		$n=2$		$n=5$		$n=10$	
L/h	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod	Ref.[58]	Kod
3	1	1,80329	1,80426	1,6829	1,6838	1,54468	1,54544	1,39885	1,39951	1,27348	1,27409	1,19956	1,20023	1,15684	1,15756
	2	8,21514	8,24811	7,7220	7,75162	7,12189	7,14748	6,44425	6,46585	5,77913	5,79774	5,22620	5,24317	4,96530	4,98158
	3	9,06941	9,06978	8,6750	8,676	8,23136	8,23289	7,7081	7,7103	7,05971	7,06278	6,19459	6,19981	5,64279	5,64912
	4	17,9802	18,0860	16,9703	17,0688	15,7499	15,8399	14,3438	14,4244	12,9094	12,9822	11,6647	11,7337	11,0314	11,0985
	5	26,4033	27,2183	25,1248	25,9698	23,5417	24,4161	21,6204	22,4156	19,4397	20,1514	17,1022	17,5005	15,8590	16,1315
4	1	1,86385	1,86445	1,73735	1,73789	1,59278	1,59325	1,44141	1,44183	1,31344	1,31382	1,24242	1,24285	1,20111	1,20156
	2	9,42868	9,45548	8,8443	8,8685	8,15412	8,17538	7,39468	7,41314	6,68493	6,70166	6,15895	6,17621	5,8858	5,9038
	3	12,0925	12,0930	11,5548	11,5553	10,931	10,932	10,1889	10,1896	9,27327	9,27415	8,07187	8,07312	7,35535	7,35656
	4	21,5877	21,6949	20,3297	20,4284	18,8307	18,9197	17,1413	17,2205	15,4804	15,5526	14,1093	14,1809	13,3796	13,4509
	5	34,5928	34,9727	32,7263	33,0323	30,451	30,699	27,8043	28,0087	25,0665	25,2557	22,6209	22,7765	21,4285	21,4005
5	1	1,89441	1,89482	1,76476	1,76512	1,61692	1,61724	1,46276	1,46304	1,33353	1,33380	1,26419	1,26449	1,2237	1,2240
	2	10,2025	10,2236	9,55154	9,57049	8,79239	8,80907	7,97167	7,98631	7,23018	7,24370	6,72424	6,73862	6,44766	6,46270
	3	15,1157	15,1163	14,4404	14,4100	13,6505	13,6511	12,7061	12,7066	11,5406	11,5412	10,0258	10,0264	9,14605	9,14663
	4	24,2839	24,3819	22,8225	22,9119	21,0981	21,1782	19,1875	19,2587	17,3683	17,4338	15,9509	16,0178	15,1753	15,2429
	5	40,3144	40,5426	38,0031	38,2137	35,2454	35,4369	32,1226	32,2948	29,0171	29,1750	26,3775	26,5296	24,9471	25,0940
10	1	1,93806	1,93817	1,80382	1,80391	1,65126	1,65135	1,49308	1,4932	1,36215	1,36224	1,29547	1,29556	1,25629	1,25638
	2	11,6155	11,6228	10,8294	10,8360	9,92996	9,93594	8,98688	8,9924	8,18692	8,19233	7,73783	7,74364	7,4778	7,4837
	3	30,2314	30,5972	28,5306	28,5710	26,2115	26,2489	23,7423	23,7769	21,5708	21,6036	19,8231	19,8311	18,204	18,205
	4	30,5505	30,5972	28,8901	28,8931	27,3023	27,3041	25,3998	25,4015	23,0609	23,0632	20,4233	20,4522	19,5414	19,5773
	5	55,4176	55,5634	51,8978	52,0303	47,8058	47,9265	43,39	43,5019	39,4041	39,5121	36,6649	36,7764	35,1095	35,2204
15	1	1,94655	1,9466	1,81139	1,81144	1,65791	1,65796	1,49895	1,49900	1,3677	1,3678	1,30157	1,3016	1,26267	1,26272
	2	11,9506	11,9541	11,1299	11,1331	10,1949	10,1980	9,22147	9,22452	8,40836	8,4115	7,97825	7,9815	7,72685	7,72999
	3	32,4399	32,4643	30,247	30,2692	27,7372	27,7583	25,1042	25,1250	22,8681	22,8894	21,6068	21,6288	20,8769	20,8981
	4	45,347	45,3489	43,3142	43,3159	40,921	40,923	38,0455	38,0470	34,4964	34,4976	29,9319	29,933	27,3397	27,3407
	5	60,9894	61,0736	56,9502	57,0270	52,3063	52,3790	47,394	47,466	43,1404	43,2135	40,553	40,6279	39,057	39,1286
20	1	1,94955	1,94958	1,81407	1,81410	1,66026	1,66029	1,50103	1,50107	1,36966	1,36971	1,30373	1,30377	1,26493	1,26496
	2	12,0753	12,0773	11,2415	11,2434	10,293	10,295	9,30821	9,31031	8,49032	8,49261	8,06791	8,07020	7,8202	7,82225
	3	33,2016	33,2162	30,9307	30,9442	28,3406	28,3542	25,6387	25,6533	23,3723	23,388	22,1529	22,1687	21,4418	21,456
	4	60,4627	60,4652	57,7447	57,7473	54,1446	54,1827	49,0496	49,0997	44,62	44,671	39,8473	39,85	36,4316	36,4331
	5	63,4443	63,4969	59,1681	59,2167	54,6767	54,6894	50,7988	50,8025	46,1299	46,136	42,3338	42,3881	40,8514	40,9015

Çizelge 6.8’de oluşturulan tabloya göre artan güç yasası indisi ile doğal frekans değerleri azalmaktadır. Artan güç yasası indisi değeri ile Şekil 5.4 a’ya göre çalışılan model için seramik malzemesinin kiriş içerisindeki hacimsel oranı azalmaktadır. Bu durum, doğal frekans değerlerinde azalmaya sebep olmaktadır.

Sabit güç yasası indis değeri için artan L/h oranı ile boyutsuz doğal frekans değerlerinde de artış olmaktadır.

Aynı şartlar altında fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre modellenerek sayısal değerlerinin elde edildiği Çizelge 6.5 ile Çizelge 6.8 tabloları incelendiğinde artan L/h oranı ile iki teorinin sonuçlarının birbirine yaklaştığı görülmektedir.

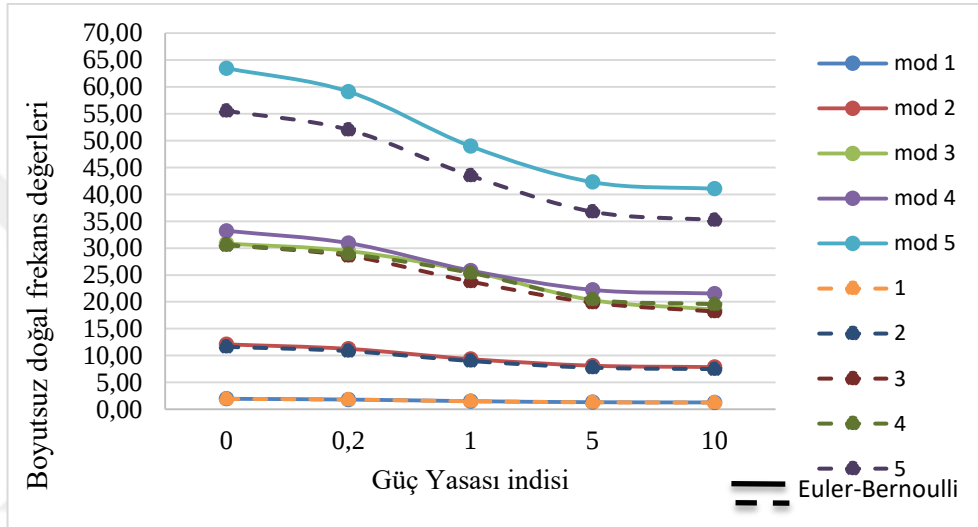
Çizelge 6.9’da ankastre, dönen, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin güç yasası indis değeri arttıkça doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Artan L/h değerlerine göre incelendiğinde doğal frekans değerlerinin çok fazla değişmediği gözlemlenmektedir.

Çizelge 6.9 : Ankastre, dönen, FD Timoshenko kirişinin değişen narinlik oranlarına göre boyutsuz doğal frekanslara güç yasası indisinin etkisi.

		$\bar{\Omega} = 5$							
L/h	$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$	$n = 0$		$n = 0.2$		$n = 0.5$		$n = 1$	
		Ref.[50]	Kod	Ref.[50]	Kod	Ref.[50]	Kod	Ref.[50]	Kod
3	1	3,34825	3,38429	2,7451	2,8394	2,58828	2,71308	2,41723	2,52586
4	1	3,43576	3,45804	2,8159	2,9013	2,65917	2,77534	2,4888	2,58766
5	1	3,48336	3,49837	2,85363	2,93512	2,69678	2,80989	2,52732	2,62267

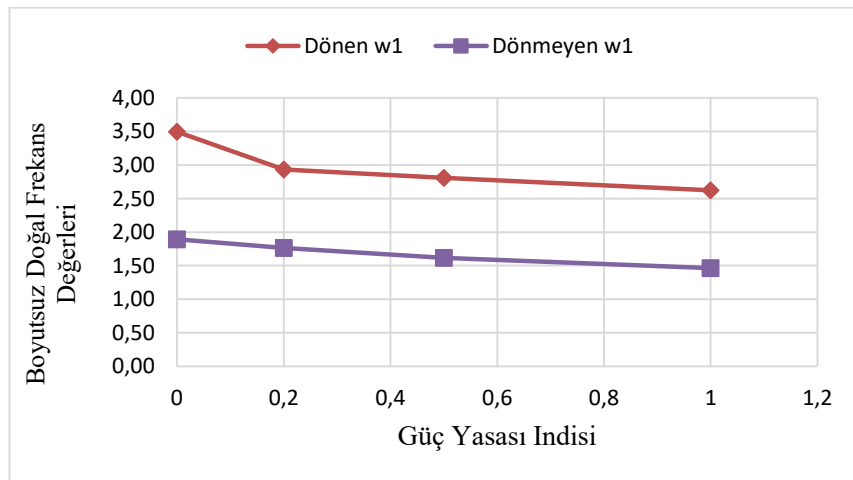
Açısal dönme sonucunda oluşan merkezkaç kuvvetinin kiriş modeline eklenmesi ile dönen ve dönmeyen kiriş modelleri kıyaslandığında dönen kirişte doğal frekans değerlerinin daha yüksek olduğu görülmektedir. Çünkü merkezkaç kuvvetinin kiriş üzerinde katılaştırıcı etkisi mevcuttur. Bu durum Çizelge 6.8 ile Çizelge 6.9'daki tabloların kıyaslanmasından elde edilmektedir.

Şekil 6.3'de ankastre, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş, $L/h=10$ değeri için geliştirilen kod ile hesaplanan boyutsuz doğal frekansların, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modelindeki değerlerini göstermektedir.



Şekil 6.3 : $L/h=10$ için ankastre kalınlık yönünde FD Euler-Bernoulli ve FD Timoshenko Kiriş modeli hesaplanan boyutsuz doğal frekans kıyaslaması.

Şekil 6.4'de ise dönen ve dönmeyen Timoshenko kiriş modeli için hesaplanan boyutsuz doğal frekanslar değerleri gösterilmektedir.



Şekil 6.4 : Ankastre kalınlık yönünde FD dönen ve dönmeyen Timoshenko kirişi için hesaplanan doğal frekanslar.



7. SONUÇ VE YORUMLAR

Bu çalışmada, bir helikopter palinin farklı kiriş teorilerine göre modellenerek serbest titreşim analizi yapılmıştır. Kiriş modellerinde, kalınlık yönünde malzeme geçişi olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler kullanılmış ve kiriş içerisindeki malzeme dağılımı, hacimsel dağılım oranı formülüne göre yapılmıştır. Sayısal çözüm için kullanılacak denklemler, kiriş modelleri için potansiyel ve kinetik enerji formüllerinin belli kabullere göre çıkarımından oluşturulmuştur. Tez kapsamında uygulanan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerinden elde edilen denklemler sonlu elemanlar metoduna uygun olacak şekilde Mathematica programında kodlanmıştır. Geliştirilen kod ile elde edilen sonuçlar, literatürdeki sonuçlar ile kıyaslanmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş modelleri için geliştirilen kod ile elde edilen sonuçlar hem değişen malzeme özelliklerine göre hem de homojen malzeme özelliklerine göre literatür değerleri ile uyumlu sonuçlar vermektedir.

Geliştirilen kod ile malzeme özelliği dışında, farklı kiriş teorileri olan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri, değişen sınır koşulları, kirişin dönme hareketi ve dönmemesi gibi durumlar için doğal frekans değerleri elde edilebilmektedir.

Bu tez kapsamında çalışılan kiriş modelleri için incelenen ve çözüm elde edilerek kıyaslanan durumlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Ankastre, homojen ve düzgün Euler-Bernoulli kirişi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen kod ile elde edilen sonuçlar literatür ile uyumludur.
- Sabit-sabit sınır koşullarına göre elde edilen doğal frekans değerleri ankastre kiriş modeline göre daha yüksektir.
- Değişen L/h oranının Euler-Bernoulli homojen kiriş modelinde doğal frekans değerlerine fazla etkisi olmadığı gözlemlenmiştir.
- Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş Euler-Bernoulli kiriş modelinde ise artan güç yasası indisi ile doğal frekans değerleri azalmıştır.

- Ankastre, dönmeyen ve dönen, prizmatik, kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kiriş için artan güç yasası indisi değeri ile doğal frekans değeri azalmaktadır.
- Dönmenin etkisi ile dönmeyen Timoshenko kiriş modeline göre doğal frekans değeri yükselmektedir.

Sonlu elemanlar metodu ile geliştirilen ve kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş, farklı kiriş teorilerine göre serbest titreşim analizi yapılan çalışmada doğal frekans değeri elde edilmiştir. Literatür ile sonuçlar kıyaslanarak uyumlu sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] **Rayleigh JWS.** (1877). The Theory of Sound. London: Macmillan Publications Co., Inc.
- [2] **Bresse, J. A. C.** (1859). Cours de mecanique appliquee par M. Bresse: Résistance des matériaux et stabilité des constructions (Vol. 1). Mallet-Bachelier: Paris 1859:122–8. (in French).
- [3] **Timoshenko, S. P.** (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., 41, 744-746.
- [4] **Elishakoff, I., Tonzani, G. M., & Marzani, A.** (2018). Three alternative versions of Bresse–Timoshenko theory for beam on pure Pasternak foundation. International Journal of Mechanical Sciences, 149, 1-11.
- [5] **Elishakoff, I., & Livshits, D.** (1984). Some closed-form solutions in random vibration of Timoshenko beams. J Probabilistic Eng Mech 4, 49–54.
- [6] **Elishakoff, I.** (2009). An equation both more consistent and simpler than the Bresse-Timoshenko equation. In Advances in mathematical modeling and experimental methods for materials and structures (pp. 249-254). Springer, Dordrecht.
- [7] **Zhang, Y.** (2017). Frequency spectra of nonlocal Timoshenko beams and an effective method of determining nonlocal effect. International Journal of Mechanical Sciences, 128-129: 572-582.
- [8] **Traill-Nash, R. W., & Collar, A. R.** (1953). The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 6(2), 186-222.
- [9] **Howson, W. P., & Watson, A.** (2018). On the provenance of hinged-hinged frequencies in Timoshenko beam theory. Computers & Structures, 197, 71-81.
- [10] **Stephen, N. G., & Puchegger, S.** (2006). On the valid frequency range of Timoshenko beam theory. Journal of Sound and Vibration, 297(3-5), 1082-1087.
- [11] **Stephen, N. G.** (2006). The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment. Journal of sound and vibration, 292(1-2), 372-389.
- [12] **Bhaskar, A.** (2008). Elastic waves in Timoshenko beams: the ‘lost and found’ of an eigenmode. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 465(2101), 239-255.
- [13] **Méndez-Sánchez, R. A., Morales, A., & Flores, J.** (2005). Experimental check on the accuracy of Timoshenko's beam theory. Journal of Sound Vibration, 279, 508-512.

- [14] **Monsivais, G., Díaz-de-Anda, A., Flores, J., Gutiérrez, L., & Morales, A.** (2016). Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions: Further results. *Journal of Sound and Vibration*, 375, 187-199.
- [15] **Manevich, A. I.** (2015). Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: Phase relations, significance of the second spectrum, stability. *Journal of Sound and Vibration*, 344, 209-220.
- [16] **Gul, U., & Aydogdu, M.** (2018). Wave propagation analysis in beams using shear deformable beam theories considering second spectrum. *Journal of Mechanics*, 34(3), 279-289.
- [17] **Abbas, B. A. H., & Thomas, J.** (1977). The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and vibration*, 51(1), 123-137.
- [18] **Renton, J. D.** (2001). A check on the accuracy of Timoshenko's beam theory. *Journal of Sound Vibration*, 245, 559-561.
- [19] **Júnior, D. A., & Ramos, A. J. A.** (2017). On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum of frequency. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 68(6), 145.
- [20] **Aydogdu, M., & Taskin, V.** (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials & design*, 28(5), 1651-1656.
- [21] **Shahba, A., & Rajasekaran, S.** (2012). Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 36(7), 3094-3111.
- [22] **Karacam, F., & Aydogdu, M.** (2017). Wave propagation characteristics in functionally graded double-beams. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 11(3), 143–149.
- [23] **Shvartsman, B. S., & Majak, J.** (2016). Free vibration analysis of axially functionally graded beams using method of initial parameters in differential form. *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, 9(1), 31-42.
- [24] **Huang, Y., Yang, L. E., & Luo, Q. Z.** (2013). Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1493-1498.
- [25] **Pradhan, K. K., & Chakraverty, S.** (2014). Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 82, 149-160.
- [26] **Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., & Inam, F.** (2014). Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. *Meccanica*, 49(1), 155-168.
- [27] **Su, H., & Banerjee, J. R.** (2015). Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams. *Computers & Structures*, 147, 107-116.

- [28] **Ngoc HN, Nguyen K.** (2017). Modal analysis of functionally graded Timoshenko beam. *Vietnam J Mech*, 39(1), 31-50.
- [29] **Tang, A. Y., Wu, J. X., Li, X. F., & Lee, K. Y.** (2014). Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 1-11.
- [30] **Paul, A., & Das, D.** (2016). Free vibration analysis of pre-stressed FGM Timoshenko beams under large transverse deflection by a variational method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(2), 1003-1017.
- [31] **Banerjee, J. R., & Ananthapuvirajah, A.** (2018). Free vibration of functionally graded beams and frameworks using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 422, 34-47.
- [32] **Xu, Y., Qian, Y., & Song, G.** (2016). Stochastic finite element method for free vibration characteristics of random FGM beams. *Applied Mathematical Modelling*, 40(23-24), 10238-10253.
- [33] **Deng, H., Cheng, W., & Zhao, S.** (2017). Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam system on Winkler-Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*, 160, 152-168.
- [34] **Li, S. R., Cao, D. F., & Wan, Z. Q.** (2013). Bending solutions of FGM Timoshenko beams from those of the homogenous Euler–Bernoulli beams. *Applied Mathematical Modelling*, 37(10-11), 7077-7085.
- [35] **Rahimi, G. H., Gazor, M. S., Hemmatnezhad, M., & Toorani, H.** (2013). On the postbuckling and free vibrations of FG Timoshenko beams. *Composite Structures*, 95, 247-253.
- [36] **Jing, L. L., Ming, P. J., Zhang, W. P., Fu, L. R., & Cao, Y. P.** (2016). Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method. *Composite structures*, 138, 192-213.
- [37] **Thai, H. T., & Vo, T. P.** (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1), 57-66.
- [38] **Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Thai, H. T.** (2013). Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 55, 147-157.
- [39] **Fantuzzi, N., Brischetto, S., Tornabene, F., & Viola, E.** (2016). 2D and 3D shell models for the free vibration investigation of functionally graded cylindrical and spherical panels. *Composite Structures*, 154, 573-590.
- [40] **Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Viola, E., Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Zenkour, A. M.** (2014). Analysis of thick isotropic and cross-ply laminated plates by generalized differential quadrature method and a unified formulation. *Composites Part B: Engineering*, 58, 544-552.
- [41] **Bıçak, M. M. A.** (2004). *Helikopter Pallerinin Titreşimleri* (Doctoral dissertation, Fen Bilimleri Enstitüsü).

- [42] **Yıldırım, B., & Dimitoka, K.** (2003). Katmalı ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalardaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile Hesaplanması. *Mühendis ve Makina*, 525, 34-42.
- [43] **İpci, D.** (2014). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Konik Kesitli Mikro Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi.
- [44] **Konez, A., Alagöz, H., Topal, S., & Gülgeç, M.** (2005). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üretim teknikleri ve kullanım alanları. *Mühendis ve Makine*, 46(547), 39-52.
- [45] **Özdemir, Ö.** (2006). Bir helikopter palinin dinamik ve aeroelastik analizi. (Yüksek lisans tezi).
- [46] **Özdemir, Ö. ve Coşkun, Y.E.** (2016). Kompozit Bir Helikopter Palinin Katman Dizilimlerinin Pal Titreşim Özellikleri Üzerindeki Etkisinin İncelenmesi (UHUK-2016-040).
- [47] **Eringen, A. C.** (1980). *Mechanics of continua*. Huntington, NY, Robert E. Krieger Publishing Co., 1980. 606 p.
- [48] **Hodges, D. H., & Dowell, E. H.** (1974). Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades.
- [49] **Kollar, L. P., & Springer, G. S.** (2003). *Mechanics of composite structures*. Cambridge university press.
- [50] **Özdemir, Ö.** (2019). Vibration Analysis Of Rotating Timoshenko Beams with Different Material Distribution Properties. *Selçuk Üniversitesi Mühendislik, Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 7(2), 272-286.
- [51] **Ozgumus, O. O., & Kaya, M. O.** (2008). Flapwise bending vibration analysis of a rotating double-tapered Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*, 78(5), 379-392.
- [52] **Özgümüş, Ö. Ö.** (2012). Aktif Olarak Kontrol Edilen Firar Kenarı Flabına Sahip Bir Helikopter Palinin İleri Uçuş Şartları Altında Dinamik Ve Aeroelastik İncelemesi (Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- [53] **Lee, J. W., & Lee, J. Y.** (2017). Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 122, 1-17.
- [54] **Şimşek, M.** (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697-705.
- [55] **Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T.** (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- [56] **Barretta, R., Feo, L., Luciano, R., & de Sciarra, F. M.** (2015). Variational formulations for functionally graded nonlocal Bernoulli-Euler nanobeams. *Composite Structures*, 129, 80-89.

- [57] **Barretta, R., Feo, L., Luciano, R., de Sciarra, F. M., & Penna, R.** (2016). Functionally graded Timoshenko nanobeams: a novel nonlocal gradient formulation. *Composites Part B: Engineering*, 100, 208-219.
- [58] **Özdemir, Ö.** (2016). Application of the differential transform method to the free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(4), 1205-1217.





ÖZGEÇMİŞ

VESİKALIK
FOTO

Ad-Soyad : Elif Karahan
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.01.1988 - Adapazarı
E-posta : elifdemirsoy54@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Yeditepe Üniversitesi (%100 YÖK Burslu), Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Lisans** : 2012, Yeditepe Üniversitesi (%100 YÖK Burslu), Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği (ÇAP)

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- Mühendislik fakültesi ikincilik ile bitirilmiştir.
- Makine mühendisliği bölümü birincilik ile bitirilmiştir.
- 2013 yılından beri Dalgakıran Kompresör firmasında çalışmaktadır.
- 2017 yılından beri Dalgakıran firmasında Teknik Yönetici olarak çalışmaktadır.

YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Şahin S., Karahan E., Kılıç B.** 2019. Finite Element Method for Vibration Analysis of Timoshenko Beams. RAST Congress, June 10-14, 2019 Istanbul, Turkey.