T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EPİSTEMİK OYUN KURAMI: FAYDAYLA ORANTILI İNANÇLAR

İHSAN GÜLEZ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
UYGULAMALI YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI BİLİM DALI

TEMMUZ 2019

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

EPİSTEMİK OYUN KURAMI: FAYDAYLA ORANTILI İNANÇLAR

İhsan GÜLEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

UYGULAMALI YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ – 2019

İhsan GÜLEZ tarafından hazırlanan "Epistemik Oyun Kuramı: Faydayla Orantılı İnançlar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/~~OY ÇOKLUĞU~~ ile Gazi Üniversitesi Ekonometri Anabilim Dalı Uygulamalı Yöneylem Araştırması Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman (Başkan) : Doç. Dr. Sibel ATAN
Ekonometri Anabilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~ ....

Üye: Prof. Dr. Funda YURDAKUL
Ekonometri Anabilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~..........

Üye: Doç. Dr. H. Hasan ÖRKÇÜ
İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/~~onaylamıyorum~~..........

Tez Savunma Tarihi:04/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Figen ZAİF
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

(Adı Soyadı)

(Tarih)

İhsan Güler

04.07.2019

EPİSTEMİK OYUN KURAMI: FAYDAYLA ORANTILI İNANÇLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

İhsan GÜLEZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Oyun kuramı, verilen kararlara ilişkin sonuçların başkalarının kararlarına bağlı olduğu durumları inceleyen bir yaklaşımdır. 1928 yılında minimax teoreminin kanıtlanmasıyla özgün bir alan olarak kabul edilmiştir. Minimax yaklaşımıyla oluşturulmuş Nash dengesi oyun kuramındaki en popüler çözüm yöntemidir. Ancak oyun kuramı gelişimini sürdürürken Nash dengesinin, rakip mantığını hesaba almayışı tartışmalara konu olmuştur. Çünkü "mantık" oyunların temel faktörüdür. Buradan hareketle, mantık kavramının merkeze alındığı "epistemik oyun kuramı" adı altında modern bir alt dal oluşmuştur. Epistemik oyun kuramı, oyuncuların birbirleri hakkında yürüttüğü mantığın ve birbirlerinin mantığı hakkında yürüttükleri mantığın oyunu nasıl etkilediğini anlamaktadır. Bu tezin amacı, Christian W. Bach ve Andres Perea'nın 2014 yılında tanıttığı epistemik yaklaşıma sahip "faydayla orantılı inançlar" kavramıyla oluşturulmuş çözüm yönteminin gerçek hayat oyuncularının kararlarına, klasik çözüm yöntemlerinden daha yakın olduğunu göstermektir. Gerçek hayat oyuncularının kararlarının incelenebilmesi için gerçekleştirilen deneyde 19 kişiye "ortalamanın ¾'ü" oyunu oynatılmıştır. Oyunda yer alan faydaların, denekler açısından önem arz edebilmesi için maddi teşvik kullanılmıştır. Faydayla orantılı inançlara ortak inanca sahip oyuncuların rasyonel seçeneklerinin bulunabilmesi için de bir C# algoritması geliştirilmiştir. Sonuç olarak deneyde yer alan oyuncuların yaptıkları seçimlerin klasik çözüm yöntemleri yerine, faydayla orantılı inançlar kavramıyla çözüm yapan bu algoritmanın seçimleriyle daha tutarlı olduğu görülmüştür. Bu durumun sebebi, klasik yöntemlerde rakiplerin irrasyonel seçim yapmasına 0 ihtimal verilirken, faydayla orantılı inançlar kavramının tedbirli mantığı kullanmasıdır. Rakibin irrasyonel seçeneklerini seçme ihtimalini de hesaba katan tedbirli mantığa gerçek hayat oyuncularının mantığı daha yakındır.

Bilim Kodu: 112115, 112304, 110601

Anahtar Kelimeler: Epistemik Oyun Kuramı, C# Algoritması, Çözüm Kavramları, Faydayla Orantılı İnançlar.

Sayfa Adedi: 157

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel ATAN

EPISTEMIC GAME THEORY: UTILITY PROPORTIONAL BELIEFS

(M.Sc. Thesis)

İhsan GÜLEZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF SOCIAL SCİENCES

July 2019

ABSTRACT

Game theory is an approach which concerns about the situations where an outcome by one decision is determined by someone else's decision. It recognized as a unique field when minimax theorem was proved in 1928. The most popular solution concept of game theory is Nash equilibrium which is a product of minimax approach. But during the game theory's evolvement, the fact that Nash equilibrium doesn't concerns about the opponent's reasoning process became subject of many debates. Because "reasoning" aspect is essential for games. From here, "epistemic game theory" which puts reasoning aspect at center stage, initiated as a modern subfield of game theory. Epistemic game theory understands the effects of how players reason about one another and how they reason about other players reasoning in games. This study's objective is to show that the solution method which uses an epistemic approach called "utility proportional beliefs" introduced by Christian W. Bach and Andres Perea in 2014, is closer to real-life players' decisions than the classical solution methods. To observe the real-life players' decisions, an experiment with 19 participants involving the game called "¾ of the average" was conducted. In order to participants to understand the significance differences of the outcomes in the game, financial incentives were used. To find the players' rational decisions under common belief in utility proportional beliefs, a C# algorithm had been developed. As a result, we find that the decisions made by participants were more consistent with the algorithm's decisions which uses the concept of utility proportional beliefs than the classical solution methods. It's because the fact that while classical solution methods assigns 0 probability to opponents' irrational choices, utility proportional beliefs concept uses cautious reasoning. The way that real-life players reason is closer to cautious reasoning which considers the possibility that opponents might choose irrationally.

Science Code: 112115, 112304, 110601

Key Words: Epistemic Game Theory, C# Algorithm, Solution Concepts, Utility Proportional Beliefs.

Page Number: 157

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sibel ATAN

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim **Sayfa**

1. GİRİŞ

Karar bilimleri, bir dizi alternatif arasından seçim yapma problemiyle ilgilenir. Bu problem en basit şekliyle, her seçeneğin tek bir spesifik sonuca ulaştırdığı durumlarda karşımıza çıkar. Bu tip durumlarda seçenekler arasından seçim yapmak aslında sonuçlar arasından seçim yapmaktır. Ancak çoğu karar problemi bu kadar basit değildir. Bazen bir seçim, farklı sonuçlar ortaya çıkarabilir. Eğer bu farklı sonuçlar tamamen şansa dayalıysa, olasılık kuramı çok kullanışlı bir araçtır. Bazı durumlarda ise bir seçimin ulaştırdığı sonuç şansa değil başka birisinin seçimine bağlıdır. Bu durumlar tam olarak oyun kuramının merceği altına düşer (Rapoport, 1966:16-17).

Oyun, kendi çıkarlarıyla ilgilenen birimleri içeren herhangi bir etkileşimli durumu ifade eder. Oyunların ayırt edici özelliği, oyuncuların birbirlerinden etkilendiği bir karar probleminde bulunmasıdır (Pacuit ve Roy, 2015). Ekonomist Kenneth Boulding, oyun kuramını bir x-ray cihazına benzetmiştir. Çünkü oyun kuramı, kararların etkileşim içinde olduğu sosyal sistemlerin iskelet yapısını ortaya koyar. Böylece çatışma ve iş birliği kavramlarının temel yapısını anlamamızı sağlar. Oyun kuramının önemi, akademisyenler tarafından uzun zaman önce kavranmış olsa da dünyadaki önemli karar vericiler -CEO'lar, yasa koyucular, komutanlar vb.- sadece sosyal bilimlerin herhangi bir alanı olarak görmüştür. Ancak oyun kuramsal bulguların, topluma faydalı etkileri göz ardı edilemeyecek duruma gelmesiyle bu görüş değişmiştir (Binmore, 2007:2).

Örnek olarak İngiltere'nin cep telefonu frekansı kullanım haklarını şirketlere satarken, ünlü oyun kuramcısı Ken Binmore'u açık arttırma modelini tasarlaması için göreve getirmesi gösterilebilir. Medya ve devlet, önceden bu açık arttırma sonucunda 5 milyar £ kazanılacağını tahmin etmiş ancak gerçekte kazanılan 22,5 milyar £ olmuştur. Hepsi, oyun kuramındaki gelişmelerle yapılan basit bir düzenleme sayesindedir. Başarısından dolayı Binmore'a, *Newsweek* dergisi "telekom şirketlerini çökerten amansız ekonomist" demiştir. Aslında Binmore'un yaptığı şirketleri çökertmek değil, uygun çatışma ortamını yaratıp kodamanların az, toplumun çok para kazanmasını sağlamak olmuştur. Açık arttırmalar bir oyundur çünkü katılımcıların kararları birbirlerinden etkilenir. Farklı açık arttırmaların farklı özellikleri olduğundan, raftan standart bir model indirip kullanmak, istenmeyen sonuçlar doğurur. Türkiye'de yapılan cep telefonu frekanslarının açık arttırmasında ise tam olarak bu olmuş ve devlet açık arttırma sırasında kuralları değiştirmek zorunda kalarak gelecekteki satışlar için güvenleri zedelemiştir (Binmore ve Klemperer, 2002).

Oyun kuramı birçok ekonomik modelin temelinde olduğu gibi en yaygın kullanıldığı alanlara siyasi bilimler, savunma, sosyoloji ve hatta biyoloji bile girer. Ancak bu tezde oyun kuramının uygulandığı farklı alanlara değil, oyun kuramının temelindeki problemlere odaklanılmıştır.

Oyun kuramının karar bilimlerinin diğer alanlarından ayrılan önemli bir özelliği, kısıtları insan zihninin oluşturuyor olmasıdır. Örneğin envanter kuramında kısıtları stok kapasitesi, tedarikçi maliyeti, talep miktarı gibi net bir şekilde ortaya koyulabilen değişkenler oluşturur veya kuyruk kuramında birimlerin geliş hızı, servis hızı, kuyruk modeli gibi belirgin kısıtlar doğrultusunda karar verilir. Ancak oyunlarda bu kısıtları rakip mantığı oluşturmaktadır. Rakip mantığı modellenmesi zor bir konudur. Tam da bu zorluk yüzünden oyun kuramının ilk dönemlerinde rakip mantığı hesaplara alınmadan çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler çoğu zaman deneysel çalışmalarla ve sezgilerle çelişmektedir (Perea ve Bach, 2014).

Çelişki, bilimsel fikirler için güçlü bir uyarıcıdır. Bilimsel gelişmelerin, çelişkilerden doğduğu örneklere tarihte sıkça rastlarız. Zenon'un "Aşil ve kaplumbağa yarışı" paradoksundan, yakınsak sonsuz seriler doğmuştur veya Michelson-Morley'nin ışık hızı deneyine ilişkin çelişkili sonuçlar, görelilik kuramının oluşmasına zemin hazırlamıştır (Rapoport, 1967). Benzer şekilde oyun kuramındaki klasik çözüm yöntemlerinin sezgilerle ve deneylerle çelişen sonuçlar ortaya çıkartması, oyunun temelindekilere odaklanılmasını sağlamıştır. Bu süreçte oyun kuramı epistemolojik açıdan incelenmiş ve "rakip mantığı" 'nın olmazsa olmaz bir faktör olduğu fikri ortaya çıkmıştır. Böylece rakip mantığının merkeze koyulduğu, epistemik oyun kuramı adında modern bir alt oluşmuştur.

Bu tezin konusu epistemik yaklaşıma sahip faydayla orantılı inançlar yöntemidir. Bu yöntem Andres Perea ve Christian W. Bach'ın (2014)'deki çalışmasıyla literatürde yer almıştır. Perea ve Bach basit bir düşünceyle bu çözüm yöntemini geliştirmiştir: Oyuncular, yüksek kazançlar getirecek seçeneklerini diğerlerinden daha yüksek olasılıklarla seçer. Bu yöntemin Nash dengesi gibi klasik çözüm yöntemlerinden en ayırt edici özelliği, rakibin irrasyonel seçeneklerini seçmesine de ihtimal vermesidir.

Faydayla orantılı inançlar yöntemi, her ne kadar basit bir düşünceye sahip olsa da işlem yükü ağır bir yöntemdir. Ayrıca literatürde bu yöntemin nasıl uygulandığını gösteren bir çalışma bulunmamaktadır. Sadece Perea ve Bach'ın (2014)'deki çalışmasında bu yöntemin uyması gereken teoremlere yer verilmiştir. Bu tezin amaçlarından birisi bu yöntemin nasıl uygulandığını gösteren algoritmayı tanıtmaktır. Algoritmaya olan güvenleri artırabilmek için Perea ve Bach'ın (2014)'deki analizlerinde bulunan oyunlar üzerinde test edilip aynı sonuçlara ulaşıldığı görülebilir. İşlem yükü ağır olduğu için faydayla orantılı inançlar yöntemini uygulayan bir bilgisayar programı, Visual Studio geliştirme ortamında C# dilinde yazılmış ve EK-1'de verilmiştir. Bu program; 2-oyunculu, statik, tam bilgili, işbirliksiz oyunlarda faydayla orantılı inançlar yöntemiyle karar alınmasını sağlamaktadır.

Tezin bir diğer amacı, sadece faydayla orantılı inançlar yönteminin takdir edilebilir bir mantığa sahip olduğunu göstermek değil aynı zamanda gerçek hayat oyuncularının bu mantıkla açıklanan davranışlara sahip olduğunu göstermektir. Literatürde gerçek hayat oyuncularının davranışlarını gözlemlemek için deneysel çalışmaların yer aldığı çalışmalar bulunmaktadır. Tezde de bu yol izlenerek deneysel bir çalışmaya yer verilmiştir. Faydayla orantılı inançlar yönteminin, klasik çözüm yöntemlerinden ayırt edici özelliğinin görülebilmesi için deneyde özel bir oyun kullanılmıştır. Bu oyun, klasik çözüm yöntemleriyle çözüldüğünde hem deneyle hem de sezgilerle çelişen sonuçlar vermektedir. Ancak faydayla orantılı inançlar yöntemi daha tatmin edici sonuçlara ulaştırmıştır.

Tezin konu akışı genelden özele doğru gitmektedir. İkinci bölümde, oyun kuramının tanımına, tarihine ve kapsamına yer verilmiş ayrıca oyunların sınıflandırılması ve temel çözüm yöntemleri anlatılmıştır. Üçüncü bölümde, epistemik oyun kuramı hem sözlü hem de matematiksel olarak işlenmiştir. Dördüncü bölümde, epistemik yaklaşıma sahip faydayla orantılı inançlar yöntemi anlatılmış ve algoritmasına yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise faydayla orantılı inançlar yönteminin gerçek hayat oyuncularının kararlarına klasik çözüm yöntemlerinden daha yakın olduğunun gösterilebilmesi için yapılan deney bulunmaktadır.

2. OYUN KURAMI

2.1. Oyun Kuramı Nedir?

Oyun kuramı, birbirlerinin kararlarından etkilenen karar vericilerin (oyuncuların) davranışlarıyla ilgilenen disiplindir. Karar vericilerin etkileşim içinde olduğu durumları anlamamıza yardımcı olur. Bağlılık içeren durumlarda akılcı karar vermenin kuramıdır.

Eğer oyun kuramını bir şirkete benzetseydik, sloganını "kimse kendi halinde bir ada değildir" koyabilirdik (Dutta, 1999:3). İnsanlar birbirlerine bağımlı sosyal varlıklardır. Maslow bu yüzden sosyalleşmenin, insanların önemli ihtiyaçlarından biri olduğunu söylemiştir. Böyle bir türdeki birimlerin davranışlarının, birbirlerinden etkilenmesi kaçınılmazdır. Oyun kuramı işte bu bağlılığın davranışlar üzerindeki etkisiyle ilgilenir.

"Oyun" ifadesi günlük hayatta milli piyango, tombala, rulet ve blackjack gibi tamamen şansla alakalı oyunlar için de kullanılır. Bu tip oyunlarda yapılması gereken sadece optimal kararı bulmaktır. Bu oyunlarda oyuncuların verecekleri kararlar, başkalarının kararlarına bağlı olmadığı için oyun kuramının ilgi alanına girmez. Başkalarının kararlarından etkilenilen oyunlara ise satranç ve poker örnek verilebilir. Bu ayrımı (etkileşimli olan ve olmayan oyunlar) belirtmek için Aumann (1987:460)'da "oyun kuramı" adıyla bilinen disiplinin "etkileşimli karar kuramı" olarak ifade edilmesinin daha açıklayıcı olacağını söylemiştir.

Oyun kuramının kapsamını sadece salon oyunlarıyla kısıtlamak, bu disiplinin öneminin kavranmasını zorlaştıracağı için bir sonraki bölümde oyun kuramının kullanıldığı alanlara değinilmiştir.

2.2. Oyun Kuramının Kapsamı

Oyun kuramı, ekonomi ve siyaset bilimi gibi disiplinlerden farklı bir yaklaşım içerir. Çeşitli spesifik meselelerle -tam rekabet, monopol, oligopol, uluslararası ticaret, vergilendirme, oylama vb.- teker teker ilgilenmek yerine tüm etkileşimli durumlara uygulanabilecek metodolojileri geliştirir.

Oyun kuramındaki en yaygın uygulamalar; ekonomide, politikada, askeri alanda, evrimsel biyolojide ve bilgisayar biliminde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca muhasebe, istatistik, temel matematik, sosyal psikoloji ve felsefenin bazı dallarıyla (epistemoloji ve etik gibi) önemli bağlantılara sahiptir (Aumann, 1987:460). Oyun kuramıyla analiz edilmiş bazı ilgi çekici problemler aşağıda verilmiştir:

- Erşen (2013)'deki çalışmasında, kaçakçıların sınır ihlallerini engelleyebilmek için bir analiz gerçekleştirmiştir. Kaçakçıların kullanabileceği farklı patikalar vardır ve askerler de bu patikaların belli bir kısmını gözlemleyebileceği gözetleme noktalarına sahiptir. Oyuncuların, askerler ve kaçakçılardan oluştuğu bu problemde coğrafi bilgi sisteminden de yararlanılarak askerlerin hangi gözetleme noktalarında bulunmaları gerektiği minimax çözüm yöntemiyle bulunmuştur. Bu problem, oyun kuramının alanına girer çünkü askerlerin hangi noktada bulunması gerektiği kararı, kaçakçıların hangi yolu seçmesi gerektiği kararından etkilenmektedir ve tersi de doğrudur.
- Şahin (2004)'deki çalışmasında, bir meydanda savaşacak orduların hangi birliklerle meydana çıkması gerektiği problemini yine oyun kuramındaki minimax yöntemiyle çözümlemiştir.
- Bashiru (2015)'deki çalışmasında, iki tane telefon operatörü hizmeti veren firmanın (MTN ve Vodafone), müşterilerine hangi kampanyaları sunmaları gerektiği problemini bi-matriks oyunların çözümünde kullanılan Lemke-Howson algoritmasıyla analiz etmiştir.

- Başer (2017)'deki çalışmasında depoculuk hizmeti verecek iki firmanın, depolarını nereye kurması gerektiği problemini rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim yöntemi ile çözmüştür.
- Paruchiri ve diğerleri (2009)'daki çalışmasında, toplu taşıma yapılan yerlerin terör saldırılarına açık olması problemini çözecek bir algoritma geliştirmiştir. Güvenlik ekipleri havalimanlarında önlemler alır ve teröristler bu önlemleri gözlemleyerek saldırı planı yapar. Bu tip lider-takipçi yapısına sahip oyunlara "Stackelberg oyunları" denmektedir. Los Angeles Havalimanı güvenliği bu çalışmada tanıtılan algoritmayı kullanıp, rutin güvenlik uygulamalarını bırakarak özel bir rasgelelikte plan yapmış ve teröristlerin gözlem yapma çabalarını işlevsiz kılmıştır.
- Çubukçu (2016)'daki çalışmasında havayolu şirketlerinin fiyatlandırma politikalarını incelemiş ve etkileşimli bir durum olduğu için oyun kuramsal analizler gerçekleştirmiştir. Sonuç olarak firmaların en uygun fiyatlandırma politikalarını bulmuştur.

2.3. Oyun Kuramının Tarihi

Oyun kuramına yazılı metinlerde ilk defa 2000 yıl önce oluşturulmuş, Yahudiliğin medeni kanununu içeren Talmud'daki iflas probleminde rastlanmıştır. Bu problemde bir adamın 3 tane evlilik sözleşmesi imzaladığı eşi vardır. Sözleşmelere göre adamın ölümü halinde eşleri sırasıyla 100, 200 ve 300 birim mirasa sahip olacaktır ancak adam öldüğünde yetersiz miras bırakmıştır. Talmud'a göre adamın mirası 200 birim ise hak iddia edenler arasında sırasıyla (50, 75, 75) birim paylaştırılmalıdır. Ancak bu şekilde bir paylaştırma yakın zamana kadar anlamlandırılamadığı için eleştirilere maruz kalmış hatta yazım hatası olabileceği bile söylenmiştir (Walker, 1995). Aumann ve Maschler (1985)'deki çalışmalarında Talmud'da yer alan bu iflas problemi çözümünün günümüz işbirlikçi oyun kuramı çözüm yöntemleriyle uyuştuğunu göstermiştir. Yöntemin temelinde, varlıkların içinde hak iddia edilen kısmın eşit paylaştırılması vardır ve bu yöntem farklı iflas problemlerine de uyarlanabilmektedir.

Yazarların deyimiyle; 2000 yıllık muamma, oyun kuramı alanındaki gelişmeler yardımıyla açıklanmıştır. Ancak tarihteki uygulamaların oyun kuramıyla açıklandığı tek konu bu değildir.

Komutanların geçmişte de savaş stratejisi belirlerken oyun kuramını kullandığı görülmektedir. Klasik bir örnek olarak "gemileri yakmak"[1] deyiminin çıkışı olan strateji verilebilir. Bu stratejiyi 1. William İngiltere'yi (1066), Hernán Cortés Meksika'yı (1519) ve Cebelitarık boğazına adı verilen Tarık bin Ziyad İspanya'yı (711) fethederken şu şekilde kullanmıştır. Düşman topraklarına ulaşan askerlerin komutanı geldikleri gemileri yakar. Bu şekilde hem kendi askerlerine savaşmayıp geri dönme seçeneklerinin olmadığını hem de düşman askerlerine yanan gemilerin dumanını gösterip geri dönmeyeceklerini kanıtlamış olur. Komutanlar böylece oyunda tarafların faydalarını baştan yaratmış ve oyunu kendi lehlerine çevirmiştir. Şimdilerde bu strateji, oyun kuramında geriye doğru çıkarsama (backward induction) ve güvenilir taahhüt (credible commitment) kavramları ile açıklanmaktadır (Polak, 2007a).

Günümüz oyun kuramı kavramlarının tarihte kullanıldığı daha birçok durum gösterilebilir. Etkileşimli karar verme konusu insanlık tarihi kadar eskidir ve insanlığın gelişmesiyle beraber daha yaygın ve sofistike bir şekilde kullanılmıştır. Oyun kuramı henüz özgün bir alan olmadan önce iktisatçı Cournot (1838)'de oligopol piyasalarda firmaların ne kadar üretim yapması gerektiği konusunda çalışmalar yayımlamıştır. Aslında bu çalışmalarla çok oyunculu ve statik, yani oyuncuların aynı anda karar verdiği, oyunların analizini gerçekleştirmiştir. Cournot'un rekabet analizleri sonrasında Bertrand (1883), Hotelling (1929) ve von Stackelberg (1934)'deki çalışmalarında konuyu daha detaylandırmıştır (Bonanno, 2012). Bütün bu araştırmacıların oluşturduğu modellere olan inançlar, ileride oyun kuramıyla doğrulanmıştır (Soytaş, 2001).

Oyun kuramındaki ilk teorem Ernst Zermelo'nun (1913)'deki satranç konulu çalışmasında kanıtlanmıştır (Aumann, 1987:50). Zermelo iki-oyunculu, sıfır-toplamlı[2] ve mükemmel-bilgili[3] her oyunda eğer bir oyuncu kazanan pozisyonda ise rakip ne yaparsa yapsın oyunun kazanmaya

[1] Gemileri yakmak deyiminin anlamı, verdiği karardan geri dönmesini sağlayacak sebepleri yine kendisi yok etmektir (TDK).
[2] Sıfır-toplamlı oyunlar: Oyuncuların, oyun sonunda elde ettikleri faydaların toplamı sıfır ise, yani oyunda kazananların kazançlarının toplamı kaybedenlerin zararlarının toplamına eşit ise, bu tip oyunlara sıfır-toplamlı oyunlar denir.
[3] Mükemmel-bilgili oyunlar: Oyuncuların, oyunda geçmişte yapılan bütün seçimleri bildiği oyunlara denir.

zorlanabileceğini kanıtlamıştır (Schwalbe ve Walker, 2001). Benzer şekilde beraberliğe zorlanabilecek bir stratejinin varlığını da kanıtlamıştır. Ancak daha önemlisi, dinamik oyunların[4] çözümünde kullanılacak geriye doğru çıkarsama yönteminin oluşmasına öncülük etmiştir (Dutta, 1999:7). Tümevarımsal yöntemle kanıtlanan Zermelo'nun teoremi, satrançta kazandıracak bir strateji tanımlamaz ancak bu stratejinin var olduğunu söyler. Dama gibi daha az komplike bir oyunda beraberliğe zorlayacak bir strateji, yani rakip ne yaparsa yapsın oyuncu bu stratejiyi izlediği takdirde en kötü durumda berabere kalacağı bir strateji, Schaeffer ve diğerleri'nin (2007)'deki "Checkers is Solved" isimli makalesinde açıklanmıştır. Ancak satrançta, mümkün tüm oyun seyirlerinin evrendeki atom sayısından fazla olmasından dolayı Zermelo'nun yöntemi çözüm bulmak için yetersiz kalır.

Zermelo, teoreminde stratejik etkileşim konusuna, yani rakibinin makul olmayan stratejilerini diğerlerinden daha düşük ihtimalle oynayabileceğine ve bu durumun da oyuncuyu etkilediğine, değinmemiştir. Bunun yerine "rakip ne yaparsa yapsın" düşüncesiyle teoremini oluşturmuştur. Ancak Zermelo'nun aksine Emile Borel (1921-24-27)'deki çalışmalarında "makul olmayan stratejileri eleme" kavramını tanıtmış ayrıca "karma strateji"[5] kavramını da ilk defa kullanmıştır (Perea, 2013). Borel; karma stratejileri, iki-kişilik, sıfır-toplamlı ve simetrik oyunlarda[6] minimax çözümü bulmak için kullanmış ancak minimax teoremini kanıtlamakta başarısız olmuştur. Minimax teoreminin ana fikri, oyuncuların elde edebilecekleri garanti kazanç üzerinden strateji oluşturmaktır. Minimax stratejisini kullanan bir oyuncu, rakibi tarafından çözülmeye karşı korunur (Brandenburger, 2010).

Oyun kuramı özgün bir alan olma statüsüne John von Neumann'ın (1928)'de minimax teoremini -simetrik olmayan oyunlarda da- kanıtlamasıyla ulaşmıştır (Hu, 2016). Ancak Borel'in oyun kuramındaki bazı kavramları ilk defa tanıtmasından dolayı Maurice Frechet (1953)'de bu alanın öncüsünün Borel olabileceği hakkında görüşler belirtmiştir. Bunun üzerine von Neumann

[4] Dinamik oyunlar: Oyuncuların sırayla karar verdiği oyunlara denir.
[5] Karma-strateji: Oyuncuların, seçeneklerini belirledikleri bir rasgeleliğe göre seçmelerine denir.
[6] Simetrik oyunlar: Oyuncular yer değiştirdiğinde öncekiyle aynı seçimleri yaparak aynı faydaları elde ettiği oyunlara denir. Bu tip oyunlarda, oyuncular özdeştir.

öfkeyle tepki göstermiş ve Borel'in çalışmalarının oyun kuramını özgün bir alan olma statüsüne çıkarmak için zayıf kaldığını (1953)'de şu şekilde ifade etmiştir.

"Minimax teoremini kanıtlamayı [Borel] başaramayarak kendi elleriyle teoremin doğruluğunu şüpheye düşürmüştür. Benim görüşüme göre bu teorem olmadan bu şartlar altında oyun kuramı da olamaz... Minimax teoremini kanıtlamadan önce yayımlanmaya değer hiçbir şey olmadığını hissettim." (Kjeldsen, 2001:64)

von Neumann Princeton Üniversitesin'de profesör olarak görev yaptığı sırada ekonomist Oskar Morgenstern'in Princeton'a gelmesiyle birlikte Neumann'ın ekonomik problemlere ilgisi artmıştır. Beraber oyun kuramı ile ekonomi arasındaki bağlantıları inceleyerek oyun kuramının ilk kitabını yazmışlardır. (1944)'de yayımlanan "Theory of Games and Economic Behaviour" ismindeki bu kitapta oyun konsepti detaylı bir şekilde formülleştirilmiş, oyuncuların davranışlarına göre değişen kazançları ile ilgili fayda kuramı tanımlanmış, iki-kişilik, sıfır-toplamlı oyunlarda optimal çözüm yöntemleri karakterize edilmiş ve işbirlikçi oyun kuramı tanıtılmıştır (Dutta, 1999:7). Bu kitap, oyun kuramındaki ilk kitap olmasına rağmen günümüzde bile araştırmacıların en çok yararlandığı kaynaktır (Gediklioğlu, 2012). Kitaptan övgü ile bahseden ilk araştırmacılardan birisi de popüler oyun kuramcısı ve von Neumann'ın öğrencisi John Nash'dir.

John Nash 1950-53 yıllarında yayımladığı çalışmalarla hem işbirlikçi olmayan oyun kuramına hem de pazarlık kuramına yeni ufuklar açan katkılarda bulunmuştur (Walker, 1995). Bu büyük katkılardan ilki (1950a) çalışmasındaki iki-kişilik pazarlık kuramıdır. Nash bu kuram hakkındaki fikirlerini uluslararası ticaret dersini alırken, ülkeler dönüştürülemez para birimlerine sahip olduğunda nasıl pazarlık yapabileceklerini düşünerek edinmiştir. Bu şekilde oyun kuramında ilk defa, transfer edilebilen fayda varsayımı olmadan yapılan çalışmayı gerçekleştirmiştir. Daha sonradan işbirlikçi oyun kuramında yapılan çalışmaların çoğu da aynı yaklaşımı içermektedir (Myerson, 1999).

Nash sonraki (1950b) çalışmasında von Neumann'ın iki-kişilik, sıfır-toplamlı oyunlar için oluşturduğu minimax kanıtından ilham alıp sıfır-toplamlı olan ya da olmayan ve ikiden fazla oyunculu oyunlarda da bulunan bir denge noktasının varlığını kanıtlamıştır. Nash'in denge tanımı iki-kişilik, sıfır-toplamlı oyunlara indirgendiğinde, von Neumann'ın denge tanımına denk gelmektedir (Forgo, 2004). Ardından John Nash (1951)'deki doktora tezinde işbirlikçi olmayan denge konusunu tanımlamalarla ve örneklerle daha derinlemesine işlemiştir. Nash dengesi ve sayısız iyileştirmeleri tartışmasız olarak oyun kuramında en çok kullanılmış çözüm yöntemidir (Pacuit ve Roy, 2015:48). Oyun kuramında kaydettiği ilerlemeler sayesinde John Nash 1994 Nobel Ekonomi ödülünü John Harsanyi ve Reinhard Selten ile kazanmıştır.

Reinhard Selten (1965)'de dinamik oyunlarda Nash dengesini bulmak için "alt oyun mükemmel Nash dengesini" (subgame perfect Nash equilibra) tanımlamıştır. Bundan önce dinamik oyunlarda Nash dengesinin bulunabilmesi için oyun normal-forma, yani oyuncuların eş zamanlı karar verdiği oyundaki matris forma, indirgeniyor ancak bu yöntem bilgi kaybına sebep oluyordu. Selten bu yöntem ile bulunan Nash dengesinin "akılcı" olmadığını çünkü imkânsız tehditlerin analizi etkilediğini belirtmiştir. Bunun yerine oyunun bütün aşamalarında, yani bütün alt oyunlarda, Nash dengesinin sağlanabileceği bir denge olan "alt oyun mükemmel Nash dengesi" 'ni önermiş ve bu yöntem ekonomik uygulamalarda yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır (Van Damme, 1995).

Selten, sonraki çalışmalarında da dinamik oyunlarla ilgilenmiş ve (1978)'deki çalışmasında "market zinciri paradoksu" (chainstore paradox) adını verdiği bir problem ortaya çıkarmıştır. Bu problem ile oyun kuramında yaygın kullanılan geriye doğru çıkarsama stratejisinin, caydırma stratejisinden (deterrence strategy) zayıf kaldığını göstererek aslında gerçek hayatta sıkça karşılaşılan bir ikilemde sezgileri haklı çıkarmıştır. Hükümetlerden sıkça duyduğumuz, "teröristlerle pazarlık etmeyiz" duruşu bu konuya örnek gösterilebilir. Öyle ki; teröristlerle anlaşma yapılması, hükümete olan zararları durduracağı için rasyonel bir seçenek gibi gözükse de bu stratejiyi izlemeleri halinde gelecekteki potansiyel teröristleri teşvik ederler. Bu sebepten dolayı en başta, hükümetin caydırma stratejisi izleyerek "teröristlerle pazarlık etmeyiz" duruşunu takınması Selten'in çalışmasına örnek gösterilebilir. Selten, dinamik oyunlar üzerinde bu şekilde çalışmalarını sürdürürken ileride Nobel ödülünü paylaşacağı John Harsanyi ise bilgi seviyesine göre sınıflandırılan oyunlar üzerinde durmuştur.

John Harsanyi (1967-68)'de seri halinde yayımladığı üç makalesinde, oyunla ilgili yetersiz bilgilere sahip olunan "Bayesyen" oyunları tanımlamıştır. Eksik bilgili oyunların, yani oyundaki faydaların ve seçeneklerin tam olarak bilinmediği oyunların, sadece faydaların bilinmediği oyunlara indirgenebileceğini açıklamıştır (Pacuit ve Roy, 2015). Eksik bilgili oyunlarda Nash dengesinin nasıl bulunacağını göstermiştir. Bunu; oyuncuların faydalar hakkındaki inançlarını, oyuncuların rakiplerinin faydalar hakkında inançlarına olan inançlarını, oyuncuların rakiplerinin rakiplerinin faydalar hakkında inançlarına olan inaçlarına olan inançlarını... (vb.) kendi oluşturduğu bir konsept olan “türler” yardımıyla kodlayarak başarmıştır (Brandenburger, 2010). Tür-tabanlı yaklaşım, bu tezin konusu olan faydayla orantılı inançlar yönteminde de kullanılmaktadır.

Oyun kuramının evrimsel biyolojiye girişi ise John M. Smith ve George R. Price’ın (1973)’deki “The Logic of Animal Conflict” isimli makalesiyle gerçekleşmiştir. Smith, evrimi matematiksel bir oyun olarak ele alan ilk kitabı “Evolution and the Theory of Games” başlığıyla (1982)’de yayımlamıştır. Kitapta, evrim kuramının ve etkileşim altındaki canlı davranışlarının oyun kuramsal yöntemlerle tatmin edici bir şekilde açıklanabildiğini göstermiştir. Evrimsel oyun kuramında; oyuncuları, organizmaların içgüdüsel davranışlarını içeren genler oluştururken stratejileri ise davranış çeşitleri, yani belli durumlarda canlının ne tepki vereceğini içeren genler (örneğin agresiflik geni, uyumluluk geni vb.), oluşturur. Oyuncuların faydalarını ise üreme uygunluğu, yani popülasyon içinde hayatta kalma ve yayılma becerisinin ölçüsü, oluşturmaktadır. Bu modelin temel çözüm yöntemi “evrimsel stabil strateji” (evolutionary stable strategy)‘dir. Bu stratejiye sahip birimlerin bulunduğu popülasyonu hiçbir farklı strateji, yani hiçbir farklı davranış şeklini içeren gen, istila edemez (Hyksova, 2004). Smith’in kitabı yayımlandığından beri evrimsel oyun kuramı gelişmiş, biyolojik modeller çeşitlenmiş ve kullanılan metotlar ekonomiye uyarlanmıştır (Osbourne, 2003:285).

Oyun kuramı özgün bir alan olduğundan beri farklı disiplinler (ekonomi, psikoloji, sosyoloji, siyaset bilimi, felsefe vd.) tarafından etkili bir araç olarak kullanılmış ve Nash, Harsanyi, Selten’in 1994’de Nobel Ekonomi Ödülünü almasından sonra da çeşitli tarihlerde oyun kuramcıları bu ödüle layık görülmüştür. 2005 yılında Thomas C. Schelling ve Robert J. Aumann, çatışma ve iş birliği konularının oyun kuramı yardımıyla daha iyi anlaşılmasını sağladıkları için Nobel Ekonomi Ödülünü almıştır.

Schelling (1960)'da yayımladığı "The Strategy of Conflict" isimli çalışmasında, herhangi bir çatışma durumunda tarafların seçeneklerini açık olarak kötüleştirerek pozisyonlarını güçlendirebileceğini göstermiştir. Ayrıca misilleme kapasitesinin savunma ve saldırı becerisinden daha kullanışlı olduğunu, belirsiz misillemenin belirli misilleme yapmaktan daha güvenilir olduğunu açıklamıştır. Bu çalışmalar, savaş önlenmesi ve çatışmaların çözülmesi konularıyla yakından ilgili olduğu için önemi büyüktür.

Robert J. Aumann ise "sonsuz tekrarlı oyunlar" konusunun ilk defa tam teşekküllü resmi analizini gerçekleştirmiştir. Çalışmalarında, uzun süreli ilişkilerde hangi hareketlerin tam olarak uygun olacağını tespit etmiştir. Sonsuz tekrarlı oyun kuramı, iş birliği yapmak için gereken ön koşulları daha iyi kavramamızı sağlamıştır. Bazı toplumların ortak kaynaklarını neden diğerlerinden daha başarılı bir şekilde kullanabildiği gibi soruların cevaplanmasına yardımda bulunmuştur. Tekrarlı oyunlar yaklaşımı; işveren sendikaları, organize suç örgütleri gibi kuruluşların veya işçi müzakereleri, uluslararası ticaret anlaşmaları gibi uzlaşmaların var oluş nedenine açıklık getirmektedir (The Prize in Economic Sciences 2005 Press Release).

2007 Nobel Ekonomi Ödülünü mekanizma tasarımı kuramının temellerini oluşturdukları için Leonid Hurwicz, Roger B. Myerson ve Eric S. Maskin kazanmıştır. Mekanizma tasarımı kuramı; belirli amaçların gerçekleştirilebilmesi için aktiviteleri yönetecek kurallardan oluşan en uygun mekanizmayı oluşturmayla ilgilenir. Bu mekanizmadaki birimler, stratejik etkileşime girdiği için oyun kuramsal varsayımlar kullanılır. Örneğin; farklı müzayede, ihale ya da oy verme sistemleri içinden en uygun olanının seçilmesi veya kanunların amacına en uygun şekilde oluşturulması (Reel, 2010).

2012 Nobel Ekonomi Ödülünü "dengeli dağıtım ve piyasa tasarımı" çalışmalarıyla Alvin E. Roth ve Lloyd S. Shapley kazanmıştır. Shapley, iş birlikçi oyun kuramı yardımıyla farklı birimleri mümkün olan en iyi şekilde eşleştirmek için bir algoritma geliştirmiştir. Roth ise Shapley'nin teorik çalışmalarını kullanarak laboratuvar çalışmaları gerçekleştirmiştir. Ayrıca bazı kurumların doktor-hastane, öğrenci-okul, organ donörü-hasta eşleştirme sistemlerinin yeniden düzenlenmesine yardımcı olmuştur (The Prize in Economic Sciences 2012 Press Release). Amerika'da böbrek nakillerinin %10'u Roth'un uygulamaya geçirdiği böbrek takası yöntemi ile gerçekleşmektedir. Bu yöntem kısaca, sevdiği insanlara böbreklerini bağışlamak isteyen ancak uygun donör olmadığı için bağışlayamayan insanları bir araya getirerek birbirlerinin hastalarına böbrek bağışlamasıyla gerçekleştirilir (Roth, Sönmez ve Ünver, 2004).

2.4. Oyun Kuramındaki Temel Kavramlar

Oyun kuramında yer alan temel kavramlar aşağıda verilmiştir.

- *Oyun*, belli kurallar çerçevesinde oyuncuların sonuçları bilerek amaçlarına uygun seçimler yaptığı bir sistemdir (Cinemre, 2011).
- *Oyuncu*, bir oyunda -en az iki tane bulunan- karar vericidir. Bu karar verici, bir kişi olabileceği gibi bir örgüt de olabilir. Oyuncuların temel özelliği, oyundaki farklı stratejiler arasından seçim yapma yetisine sahip olmasıdır.
- *Strateji*, oyuncuların yapabileceği seçimlerden her birine denir. Eğer oyuncu bir defa karar vermesi gerektiği bir oyunda yer alıyorsa, sahip olduğu seçenekleri aynı zamanda stratejileri olur. Birden fazla karar verilen bir oyunda ise oyuncunun izleyebileceği tüm mümkün yollar stratejileri olur. Oyuncular, stratejilerinin kendilerine kazandıracağı faydalardan yola çıkarak amaçlarına en uygun seçimleri yaparlar.
- *Fayda*, oyuncuların tatmin derecesinin ölçüsüdür. Oyunda belli seçimler yapıldığında sonuç olarak oyuncular belli faydalara sahip olur. Bu seçimler yapıldığında oyuncunun tatmin olma düzeyini ifade etmek için “fayda” ile ifade edilen ölçü kullanılmaktadır. Bu ölçünün her zaman maddi bir kazanç olması şart değildir. Örneğin mahkûmun çıkmazı oyununda faydaları, hapiste geçirilecek süre oluşturur ve akılcı bir oyuncu en düşük süre için oynar.
- *Akılcılık*, oyun kuramında oyuncuların sahip olduğu varsayılan bir özelliktir. Oyuncuların, birbirlerinin kararlarına bağlı olmalarını hesaba katarak amaçlarına en uygun faydaları elde etmelerini sağlayacak stratejileri seçmelerine akılcı seçim denir. Bu stratejilerin ne olduğu, oyun kuramının ilgilendiği ana konulardan birisidir.

- *Fayda fonksiyonu*, oyuncular tarafından seçilebilecek stratejilerin kombinasyonlarından elde edilecek faydaları belirleyen fonksiyondur (Gibbons, 1992:1).

2.5. Oyunları İfade Etmenin Yolları

Oyun kuramında oyuncular, seçenekler ve faydalar olmak üzere üç temel unsur vardır. Bu unsurların bilgilerinin verildiği iki farklı temsil şekli, normal-form ve genişletilmiş-formdur.

2.5.1. Oyunların Normal-Form ile İfade Edilmesi

Oyunlar normal-formda ifade edilirken her oyuncunun aynı anda seçim yaptığı varsayılır. Oyuncular tarafından seçilebilecek tüm seçeneklerin kombinasyonlarına, her oyuncu için bir fayda atanarak normal-form oluşturulur. Literatürde normal-forma, stratejik-form (strategic-form) veya matris-form olarak da rastlamak da mümkündür. Klasik bir örnek olarak taş-kâğıt-makas oyunu verilebilir. Bu oyun iki kişiliktir ve taş makası yener, makas kâğıdı yener, kâğıt taşı yener. Eğer aynı seçimler yapıldıysa beraberlik olur. Kazananın 1 faydaya, kaybedenin -1 faydaya, beraberlikte 0 faydaya sahip olunduğunu belirlersek taş-kâğıt-makas oyununu normal-formda Şekil 2.1.'deki gibi ifade edebiliriz.

		2. Oyuncu		
		Taş	**Kâğıt**	**Makas**
1. Oyuncu	**Taş**	0, 0	-1, 1	1, -1
	Kâğıt	1, -1	0, 0	-1, 1
	Makas	-1, 1	1, -1	0, 0

Şekil 2.1. Taş-kâğıt-makas oyununun normal-formda ifade edilmesi

Normal-form ile ifade edilen oyunlarda, tablonun hücrelerinde virgülün solundaki değerler satır oyuncusunun (1. oyuncu) faydalarını, sağındakiler de sütun oyuncusunun (2. oyuncu) faydalarını verir. Bazı oyunların normal-formda ifade edilmesinde (taş-kâğıt-makas da bu oyunlardan biridir) sütun oyuncusu, satır oyuncusunun kazandığı kadar kaybettiği için hücrelerde sadece satır oyuncusunun faydalarının verildiğine de rastlanabilir. Ayrıca bu tablonun faydalardan oluşan bölümü *fayda matrisi* (payoff matrix) olarak adlandırılır.

Normal-formda ifade edilen bir oyunda: (1) Oyuncular, (2) her oyuncunun seçenekleri, (3) oyuncuların her seçenek kombinasyonu için elde edeceği faydalar açıkça belirtilir (Gibbons, 1992:3). Normal-form ile çok-oyunculu oyunları da ifade etmek mümkündür. Bunun için sadece ekstra tablolara ve hücrelerde fazladan faydalara ihtiyaç vardır.

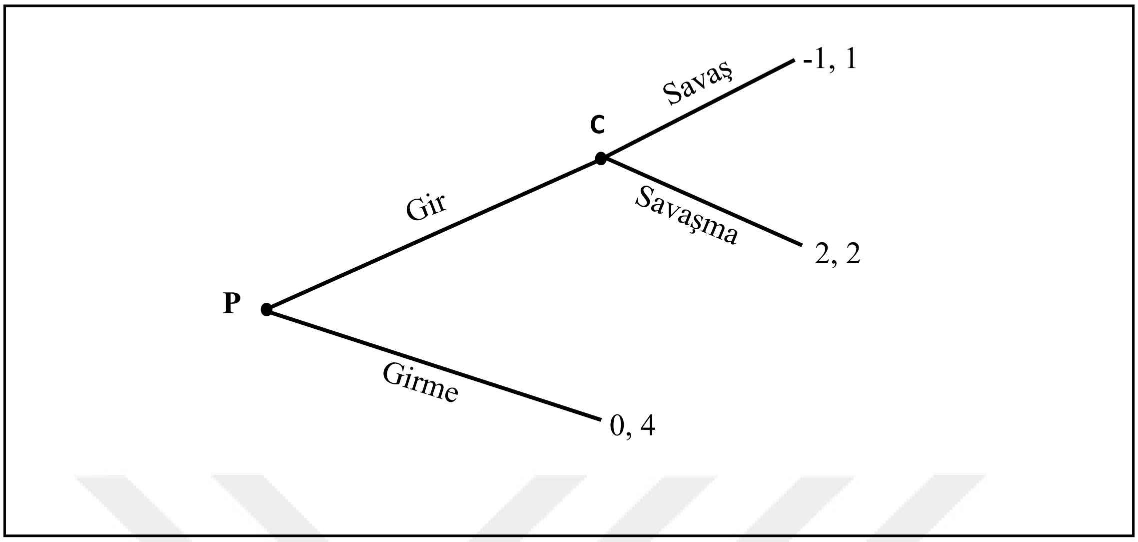
Normal-form ile ifade edilen oyunlarda oyuncuların aynı anda seçim yaptığı söylenmiş olsa da ifade edilmeye çalışılan, oyuncuların rakip seçimlerini bilmeden seçim yaptığıdır. Oyuncuların aynı anda hamle yapması şart değildir. Ayrıca normal-form ile oyuncuların birbirlerinden sonra karar verdiği oyunlar da ifade edilebilir ancak bu tür oyunlar için genişletilmiş-form kullanılması bilgi kaybını engelleyeceği için daha uygundur. “Bu tür oyunların genişletilmiş-form ile ifade edilmesi daha uygunsa, neden bazen normal-form ile ifade ediliyor?” sorusunun cevabı: Oyun kuramındaki bazı çözüm yöntemlerinin uygulanabilmesi için oyunların normal-formda ifade edilmesi gerektiğidir.

2.5.2. Oyunların Genişletilmiş-Form ile İfade Edilmesi

Geçen bölümde oyuncuların aynı anda karar verdiği oyunların normal-form ile nasıl ifade edildiği gösterdik. Bu bölümde oyuncuların birbirlerinden sonra karar verdiği oyunları genişletilmiş-form (oyun ağacı) ile ifade edeceğiz. Kullandığımız bu yaklaşım, aynı anda karar verilen oyunların normal-form ile ve sıralı karar verilen oyunları genişletilmiş-form ile ifade edilmesinin bir zorunluluk olduğu gibi algılanabilir. Her ne kadar bazı oyunlar için bir ifade yolunun seçilmesi daha uygun olsa da her oyun iki şekilde de ifade edilebilmektedir.

Oyunlar, genişletilmiş-form (extensive-form) ile ifade edildiğinde normal-formdan farklı olarak birkaç bilgi daha açıkça belirtilmektedir. Genişletilmiş-form ile ifade edilen bir oyunda: (1) Oyuncular, (2a) oyuncuların hamle sırası, (2b) oyuncuların her hamle sırasında hangi seçeneklere sahip oldukları, (2c) oyuncuların her hamle sırasında bildikleri, (3) oyuncuların her hamle kombinasyonlarından elde edebileceği faydaların bilgileri bulunmaktadır (Gibbons, 1992:115-116).

Örneğin Şekil 2.2.'de tasvir edilen Giriş Oyununu (Entry Game) ele alalım. Bu oyunda Pepsi (P) firması, önce Coca-Cola'nın (C) bulunduğu monopol pazara girmek ile girmemek arasında seçim yapsın. Ardından Pepsi'nin seçimini gözlemledikten sonra Coca-Cola savaşmak veya savaşmamak seçeneklerinden birini seçmek zorunda kalsın (örneğin Coca-Cola, Pepsinin fiyatını kırarak veya reklam kampanyaları yürüterek savaşabilir). Oyun ağacında virgülün sağındakiler Coca-Cola'nın, virgülün solundakiler Pepsinin faydalarıdır (Koçkesen ve Ok, 2007).



Şekil 2.2. Giriş oyununun genişletilmiş-formda ifade edilmesi

2.6. Oyunların Sınıflandırılması

Nihai sonucun, sadece karar vericinin seçimine değil aynı zamanda başkalarının seçimine de bağlı olduğu durumlara oyun denir. Bu durumlarla ilgilenen disiplin oyun kuramıdır. Peki bu durumları birbirinden ayıran özellikler nelerdir? Başka bir deyişle oyunlar nasıl sınıflandırılabilir?

Oyun kuramında kaydedilen ilerlemeler tarihsel bir akış ile incelendiğinde sürekli olarak farklı sınıflandırmaların gün yüzüne çıkarıldığı görülmektedir. Şekil 2.3.'de bu durum kısmen görselleştirilmiştir. Geçmişte araştırmacıları bu şekilde oyunları sınıflandırmaya iten dürtülerden birisi, çözüm metotlarının kullanılabileceği uygunlukta sınıfa ihtiyaç duymuş olmalarıdır.

1913	Sonlu, 0-toplamlı oyunlar
1921-24-27	Simetrik, 2-oyunculu, 0-toplamlı oyunlar
1928	2-oyunculu, 0-toplamlı oyunlar
1944	İşbirlikçi oyunlar
1950	Çok-oyunculu, sabit toplamlı olmayan oyunlar
1957	Tekrarlı oyunlar
1965	Dinamik oyunlar
1967-68	Kusurlu bilgili oyunlar
1968	Polimatriks oyunlar
1971	Sonsuz tekrarlı oyunlar
1995	Kusurlu bilgili, tekrarlı oyunlar

Şekil 2.3. Bazı oyun sınıflarının literatürde yer aldığı tarihler

Bu bölümde oyunların nasıl sınıflandırıldığı detaylı olarak anlatılacak ve konunun kavranabilmesi amacıyla çeşitli örneklere yer verilecektir.

2.6.1. Statik ve Dinamik Oyunlar

Oyunlar, oyuncuların hamle sırasına göre sınıflandırıldığında karşımıza iki durum çıkar. Bir tanesi oyuncuların aynı anda karar verdiği statik oyunlardır. Diğeri ise oyuncuların sırayla karar verdiği dinamik oyunlardır.

2.6.1.1. Statik oyunlar

Statik oyunlarda basitçe bütün oyuncular aynı anda karar verir ve oyun biter. “Aynı anda karar verme” kavramında önemli olan zamanlama değil oyuncuların sahip olduğu bilgidir. Oyuncular kelimenin tam anlamıyla aynı anda seçim yapmak zorunda değildir. Bir oyunun statik olarak adlandırılabilmesi için oyuncuların rakip kararlarını bilmeden seçim yapması gerekmektedir (Hoelle, 2014).

Statik oyunlara örnek olarak Albert W. Tucker’ın 1950’de literatürde ilk defa tanıttığı “mahkûmun çıkmazı” (prisoner’s dilemma) verilebilir: İki şüpheli birbirinden ayrı gözaltına alınmıştır. Savcı bu şüphelilerin suç işlediğinden emindir ancak yeterli kanıta sahip olmadığı için itiraf etmelerine ihtiyacı vardır. Şüphelilere iki seçenekleri olduğunu söyler, itiraf etmek veya susmak. Eğer ikisi de susarsa savcı elindeki ufak suçlarla (hırsızlık veya silah bulundurma gibi) dava açacaktır. Eğer ikisi de itiraf ederse büyük dava açılacaktır ancak savcı, hâkimden ikisi için de ceza indirimi isteyecektir. Eğer birisi itiraf eder birisi susarsa, itirafçıya iş birliğinden dolayı hoşgörülü davranılacak ancak diğerine üst sınırdan ceza verilecektir. Savcı, şüphelilere bütün bu senaryoları anlatarak onları bir seçim yapmak zorunda bırakır (Luce ve Raiffa, 1957:95). Bu oyun, statik bir oyundur çünkü şüpheliler birbirlerinin ne seçim yaptığını bilmeden karar vermek zorundadır. Mahkûmun çıkmazı oyunu normal-formda Şekil 2.4.’de verilmiştir. Faydalar, oyuncuların alacağı hapis cezasının süresinden oluşmaktadır.

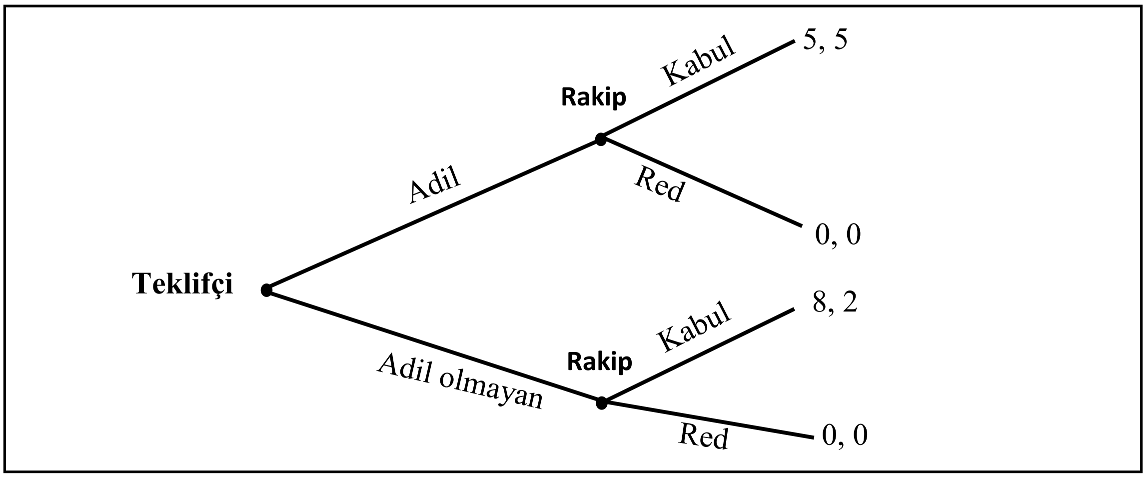
		2. Şüpheli	
		İtiraf etmek	**Susmak**
1. Şüpheli	**İtiraf etmek**	8, 8	1, 10
	Susmak	10, 1	4, 4

Şekil 2.4. Mahkûmun çıkmazı oyunu

2.6.1.2. Dinamik oyunlar

Dinamik oyunlarda, oyuncular sırayla karar verir. Statik oyunlardan en büyük farkı, rakiplerin önceki hamlelerinin kısmen veya tamamen bilinmesidir. Benzer şekilde oyuncu karar verirken kendinden sonra hamle yapacak rakibinin bu kararını bileceğini de göz önünde bulundurur.

Örneğin Güth, Schmittbergern ve Schwarze'nin ilk defa (1982) yılında tanıttığı "ültimatom oyunu" dinamik bir oyundur: 2-kişilik bu oyunda her oyuncu sırayla birer hamle yapar. İlk hamleyi yapan oyuncuya "teklifçi" denir çünkü bu oyuncunun görevi rakibine bir teklif sunmaktır. Oyunda teklifçiye bir miktar parayı bölüştürme görevi verilmiştir. Bu bölüştürmeyi adil bir şekilde yarı yarıya gerçekleştirebilir veya kendine daha büyük bir pay alarak gerçekleştirebilir. Anahtar nokta, rakibinin bu bölüştürme teklifini kabul etme veya etmeme seçeneklerine sahip olmasıdır. Eğer kabul etmezse iki oyuncu da hiçbir şey kazanamaz. Ültimatom oyununun genişletilmiş-formda ifade edilişi Şekil 2.5.'de verilmiştir. Bu oyunda seçimler sırayla yapıldığı için, başka bir deyişle teklifçinin seçimini rakibi gözlemleyebildiği için, dinamik bir oyundur.



Şekil 2.5. Ültimatom oyunu

2.6.1.2.1. Tekrarlı oyunlar

Tekrarlı oyunlar (repeated games), dinamik oyunların özel bir alt sınıfıdır ve gerçek hayat problemlerinde sıkça rastlanır. Çoğu oyun, sürekli devam eden bir yapıya sahiptir. İnsanlar etkileşime girdiğinde, genellikle geçmişte de etkileşime girmiştir ve gelecekte de gireceklerini düşünürler. Bu sürekli yapıya tekrarlı oyunlar kuramı çalışmaktadır (Aumann ve Maschler, 1995:xi).

Özel bir oyunun arka arkaya oynanmasına tekrarlı oyun denmektedir. Tekrarlı oyunlar, sonlu tekrarlı oyun ve sonsuz tekrarlı oyun olmak üzere ikiye ayrılır. Sonsuz tekrarlı oyunlarda önemli olan, oyunun sonsuza kadar sürmesi değil, oyunun ne zaman sona ereceğinin bilinmemesidir.

Örneğin 1. dünya savaşında Çanakkale'deki gibi dünyanın farklı yerlerinde de uzun süren hendek savaşları yapılmıştır. Bu savaşlarda karşı karşıya gelen askerler hiçbir anlaşma yapmamış olmalarına rağmen bazı itidalli davranışlar (stratejiler) sergilemiştir. Yemek vakti birbirlerine saldırmamışlar, yakacak odun toplayanları vurmamışlar, düşman tedarik hatlarını bombalamamışlardır. Burada bir oyun durumu söz konusudur çünkü tarafların davranışları (saldırmak veya saldırmamak) birbirlerinden etkilenmektedir. Her gün defalarca hamleler gerçekleştirildiği için ise tekrarlı bir oyundur ve savaşın ne zaman biteceği bilinmediği için sonsuz tekrarlıdır. Askerleri bazı itidalli davranışları sergilemeye teşvik eden ise tam da bu bilgi eksikliğidir (Axelrod, 1984).

2.6.2. İşbirlikçi Olan ve Olmayan Oyunlar

Oyunları sınıflandırmanın başka bir yolu da işbirlikçilik özelliğinden yararlanmaktır. Burada "işbirlikçilik" kavramı yanıltıcı olabilir. Çünkü işbirlikçi olan oyunlar kapsamına sadece oyuncuların çıkarlarının birbirleriyle uyuştuğu oyunların alındığı anlaşılabilir. Diğer yandan işbirlikçi olmayan oyunlar kapsamına da sadece oyuncuların çıkarlarının birbirleriyle çatıştığı oyunların girdiği düşünülebilir (Leyton-Brown ve Shoham, 2008:1). Ancak hem işbirlikçi olan hem de işbirlikçi olmayan oyunların kapsamında çatışma veya uyuşma unsurları bulunabilmektedir.

İşbirlikçi olan ve olmayan oyunlar arasındaki en ayırt edici özellik, birisinde işbirlikçi davranış sergilemeye yönelten bağlayıcı dış teşvikler (kontrat yapılması gibi) varken diğerinde ittifak olanağı olmamasıdır -ya da en fazla güvenilir taahhüt yoluyla anlaşma olur. Güvenilir taahhüt ile oyuncu bir nevi rakibine şunu söyler, "ben öyle bir şey yaptım ki (güvenilir taahhüt) bu stratejimi seçmenin bana hiçbir türlü faydası kalmadı. Bu yüzden bu stratejimi seçmeyeceğimden emin olarak oynayabilirsin". Öte yandan kontrat yapmanın ana fikri, belli bir stratejiyi seçmeye oyuncuların bireysel teşvikleri olduğu halde o stratejiyi grup faydası adına seçmeyeceklerine dair bağlayıcı bir anlaşma yapmaktır. Bu anlaşmadan caymanın bir cezası olduğu için oyuncuların anlaşmaya uymaya teşvikleri vardır.

Görüldüğü gibi hem işbirlikçi hem de işbirlikçi olmayan oyunlarda "anlaşma" kavramı bulunabilmektedir. Fark ise birinde anlaşmanın bağlayıcı ve risksiz olmasıdır diğerinde anlaşmanın sezgilere dayandırılmasıdır. Bu iki anlaşma türünün farkının kavranabilmesi için *Golden Balls* örneğini verebiliriz.

Golden Balls, televizyonlarda yayınlanan bir oyun programıdır. Bu işbirliksiz ve statik oyunda, iki oyuncu ve her oyuncunun iki seçeneği vardır. Bu seçenekler, bölüşmek (split) ve çalmak (steal)'dır. Oyuncuların ikisi de bölüşmek seçeneğini seçerse her biri 50 bin kazanır. Birisi bölüşmek diğeri çalmak seçeneğini seçerse, çalmayı seçen 100 bin kazanır diğeri hiçbir şey kazanamaz. Eğer ikisi de çalmayı seçerse kimse kazanamaz.

Resim 2.1. Golden Balls oyununda koordine olamayan oyuncular

Oyunculara seçim yapmadan önce konuşma fırsatı verilir ve doğal olarak ikisi de bölüşme seçimini yapacağını söyler. Bağlayıcı bir sözleşme yapamadıkları için birbirlerine çalmayı seçmeyeceklerine dair sözlü olarak güvenilir taahhüt vermeye çalışırlar. Resim 2.1.'deki oyunda, erkek yarışmacı "50 bin iyi para ayrıca çalmayı seçersem beni linç ederler" demiştir ve benzer şekilde kadın yarışmacı da "çalmayı seçersem tanıdığım herkes benden tiksinir" demiştir. İkisi de karşı tarafa, çalmayı seçmeyeceğine dair taahhüt vermeye çalışmıştır fakat bunu yeterli güvenle gerçekleştiremedikleri için oyun sonunda anlaşma sağlanamamıştır.

Resim 2.2. Golden Balls oyununda koordine olmayı başarabilen oyuncular

Ancak Resim 2.2.'deki oyunda, sağda bulunan yarışmacı güvenilir taahhüt vermeyi başarabilmiştir. Söyleyeceği hiçbir şey ile çalmayı seçmeyeceğine rakibini inandıramayacağını düşünüp farklı bir yoldan gitmiştir. Rakibine "%100 çalmayı seçeceğim ve senin de bölüşmeyi seçmeni istiyorum. Parayı programdan sonra seninle paylaşacağım" demiştir. Bu durumda rakibinin iki seçeneği vardır. Ya çalmayı seçecek ve kimse para kazanamayacak ya da bölüşmeyi seçecek ve karşısındakinin sözünü tutmasını ümit edecektir. Bu yüzden akılcı seçimin bölüşmek olduğunu anlayıp bölüşmeyi seçmiştir. Oyunun sonunda da para gerçekten paylaşılmıştır. Görüldüğü gibi bu oyun işbirliksiz bir oyun olmasına rağmen "anlaşma" unsurunu içerebilmektedir.

Güvenilir taahhüt kavramı işbirliksiz oyunlarda önemli bir yere sahiptir. Gerçek hayatta çoğu zaman örneğimizdeki gibi "güven" şartı sağlanamadığı için istenmeyen sonuçlar ortaya çıkar. Bu konu hakkında Sun Tzu (M.Ö. 400) yılında yazdığı, Türkçeye çevrilmiş ismi "Savaş Sanatı" olan kitapta şunu söylemiştir:

"Yeminli bir anlaşma olmaksızın sunulan barış teklifleri entrikanın işaretidir"

2.6.3. Bilgi Durumuna Göre Sınıflandırılan Oyunlar

Buraya kadar verilen örneklerde oyuncuların oyun ile ilgili her türlü bilgiye sahip olduğunu varsaydık. Ancak gerçek hayattaki oyunlar genelde bu kadar basit değildir. Çoğu zaman stratejik durumların bileşenleri ile ilgili bilgi eksikliği yaşarız. Diğer yandan da bazen rakibin bilmediği bilgilere sahip oluruz. Oyunlar, oyuncuların sahip olduğu bu bilgi türlerine göre de sınıflandırılabilir.

2.6.3.1. Tam bilgili oyunlar ve eksik bilgili oyunlar

Oyunların matematiksel olarak modellenmesinde sorulabilecek doğal bir soru: Eğer oyuncular model ile ilgili bazı parametreler hakkında bilgisiz ise bu durum analizi nasıl etkiler? Bu sorudan yola çıkarak Harsanyi (1967-68)'de oyunları ilk defa tam bilgili oyunlar ve eksik bilgili oyunlar olarak sınıflandırarak farklı yaklaşımlar geliştirmiştir (Pacuit ve Roy, 2015:7).

Tam bilgili (complete information) oyunlarda, oyuncuların seçenekleri ve o seçeneklerden elde edecekleri faydalar ortak bilgidir (Gibbons, 1992:1). Başka bir deyişle, seçenekler ve faydalar her oyuncu tarafından bilinir, her oyuncu rakiplerinin bildiğini bilir... Dikkat edilmesi gereken tam bilgili oyunlarda seçeneklerin bilinmesidir, tercihlerin değil.

Eksik bilgili (incomplete information) oyunlarda ise en az bir oyuncu, seçenekler ve/veya faydalar hakkında bilgi eksikliğine sahiptir. Bu tür oyunlara "Bayesyen oyunlar" (Bayesian games) da denmektedir. Harsanyi, eksik bilgili oyunlar hakkında yaptığı çalışmalarda bu tip oyunların sadece faydalar hakkında eksik bilgiye sahip olunan oyunlara indirgenebileceğini göstermiştir (Pacuit ve Roy, 2015:7-8).

Kapalı zarf usulü müzayedeler, eksik bilgili oyunlara örnek verilebilir. Bu tip müzayedelerde teklifçiler, bir ürünü satın almaya çalışmaktadır. Teklifler kapalı zarflara konarak aynı anda ibraz edilir ve yüksek teklif vermiş olan oyuncu ürünü satın almaya hak kazanır. Bu oyunu eksik bilgili yapan özellik ise oyuncuların, rakiplerinin ürüne verdiği değeri bilmemesidir. Başka bir deyişle, rakiplerin üründen ne kadar fayda elde edeceği bilinmemektedir. Ürünün bir araba olduğunu düşündüğümüzde, oyuncu müzayedeyi kazandıktan sonra o arabayı kaça satabileceğini bilir ancak rakiplerinin kaça satacağını bilemez. Oyuncuların seçenekleri, yani verebilecekleri teklifler, bellidir ancak seçeneklerden elde edilebilecek faydalar belirsizdir.

2.6.3.2. Mükemmel bilgili oyunlar ve kusurlu bilgili oyunlar

Oyunları bilgi düzeyine göre sınıflandırmanın başka bir yolu da mükemmel bilgili oyunlar ve kusurlu bilgili oyunlar olarak ayrım yapmaktır. Mükemmel bilgili (perfect information) oyunlarda, oyunda gerçekleşmiş bütün seçimler ortak bilgidir bu yüzden dinamik oyunlar kapsamına girer çünkü sırayla seçim yapılması durumu mevcuttur. Oyuncular kendilerinden önce yapılmış hamleleri bilir ve yapacakları seçimi ise kendinden sonra hamle sırasına sahip rakiplerinin bileceğinin farkında olarak yapar. Satranç ve dama mükemmel bilgili oyunlardır (Koçkesen ve Ok, 2007).

Bir oyunun kusurlu bilgili (imperfect information) olması için ise en az bir oyuncunun önceden yapılan seçimlerden en az birini bilmeden hamle yapması gerekmektedir (Bonanno, 2018:484). Statik oyunların tümü kusurlu bilgilidir çünkü oyuncular birbirlerinin seçimlerini bilmeden seçim yapar. Ancak kusurlu bilgili oyunların tümünün statik olduğunu söylemek doğru olmaz.

2.6.4. Fayda Yapılarına Göre Sınıflandırılan Oyunlar

Fayda, oyuncuların oyundaki nihai sonuçtan elde edecekleri tatmin derecesini yansıtan ölçü birimidir. Bazı kaynaklarda ödemeler veya kazançlar olarak da ifade edilir. Oyunlar, fayda yapılarına göre sınıflandırıldığında iki temel durum ortaya çıkar. Bir tanesi sabit-toplamlı oyunlar diğeri sabit-toplamlı olmayan oyunlardır. Böyle bir ayrımın yapılmasının temel sebebi, oyun kuramındaki gelişmeler sürerken özelden genele doğru bir yol izlenmiş olmasıdır. Örneğin denge noktası için konuşacak olursak, bu noktanın varlığı önce sadece sıfır-toplamlı oyunlar (sabit-toplamlı oyunların özel bir hali) için kanıtlanmış ardından hem sabit-toplamlı olan hem de olmayan oyunlar için kanıtlanmıştır.

2.6.4.1. Sabit-toplamlı oyunlar

Oyundaki olası her sonuca bakıldığında, oyuncuların faydalarının toplamı her zaman sabit bir sayı ise bu oyun sabit-toplamlı bir oyundur. Bu tür oyunlarda oyuncular arasında bir çatışma durumu bulunmaktadır. Başka bir deyişle, oyuncuların koordine olmayı tercih edeceği bir sonuç yoktur.

Örnek (penaltı vuruşu): Futboldaki penaltı vuruşları bir oyundur. Çünkü penaltı vuruşları o kadar ani olur ki kaleci, vurucunun topu hangi yöne atacağını gözlemleyemeden bir tarafa kendini atar ve topu kurtarmaya çalışır. Benzer şekilde vurucu da kalecinin nereye atlayacağını bilmeden gol atmaya çalışır. Chiappori, Levvit ve Groseclose (2002)'deki çalışmalarında 459 tane penaltı vuruşu incelemiş ve Şekil 2.6.'deki gol atma yüzdelerini çıkarmışlardır. Vurucunun seçenekleri, topu doğal tarafa atmak (yani sağlak oyuncular için sola atmak ve solak oyuncular için sağa atmak) ya da aksi tarafa atmaktır. Kalecinin seçenekleri de vurucunun doğal tarafına veya aksi tarafına atlamaktır (vurucunun sağlak veya solak olması ortak bilgidir).

		Kaleci	
		Doğal taraf	**Aksi taraf**
Vurucu	**Doğal taraf**	%64	%94
	Aksi taraf	%44	%89

Şekil 2.6. Penaltı vuruşlarında atılan gollerin yüzdesi

Bu oyun sabit-toplamlı bir oyundur çünkü oyuncuların seçimlerinden elde edecekleri faydaların toplamı her durumda 100 olur. Örneğin, vurucu topu doğal tarafa attığında ve kaleci de doğal tarafa atladığında gol atma olasılığı %64, atmama olasılığı %36 olur. Faydalar olasılıklarla ifade edildiği için kalecinin faydası, vurucunun faydasının 100'den çıkarılmasıyla elde edilir. Bu oyun Şekil 2.7.'deki gibi normal-formda ifade edilebilir.

		Kaleci	
		Doğal taraf	**Aksi taraf**
Vurucu	**Doğal taraf**	0,64; 0,36	0,94; 0,06
	Aksi taraf	0,44; 0,56	0,89; 0,11

Şekil 2.7. Penaltı vuruşu oyununun normal-formda ifade edilmesi

2.6.4.1.1. Sıfır-toplamlı oyunlar

Sıfır-toplamlı oyunlar, sabit-toplamlı oyunların özel bir halidir. Bir oyunun sıfır-toplamlı olabilmesi için oyuncuların seçim kombinasyonlarından elde ettikleri fayda toplamlarının 0 olması gerekmektedir. Başka bir deyişle, kazanan oyuncu tam olarak rakibinin kaybettiği kadar kazanır. Bu yüzden bu tür oyunlarda saf bir çatışma durumu söz konusudur (Dutta, 1999:139).

Örneğin duopol bir akaryakıt pazarını düşünelim. Bu pazardaki iki firma, ürünü aynı maliyette üretip aynı fiyata satmaktadır. Firmaların rekabet üstünlüğü sağlama yollarından birisi pazar paylarını artırmaktır. Bunu yapmalarının üç yolu: (1) Reklam bütçesini artırmak, (2) ek hizmetleri artırmak (araba camı temizliği, yağ-su kontrolü, kaliteli lavabolar, ücretsiz çay vb.), (3) kampanyaları artırmaktır (örneğin, tüketiciye firmanın kartı verilir ve her alışverişte bu kartta hediye benzin birikerek belli bir kota aşıldığı zaman hediye kullanılabilir). Bu firmaların stratejilerine göre değişen pazar payları (faydaları) şekil 2.8.'de normal-formda verilmiştir.

		2. Firma		
		Reklam	**Ek hizmetler**	**Kampanyalar**
1. Firma	**Reklam**	%0, %0	- %30, %30	+ %10, - %10
	Ek hizmetler	%30, - %30	%0, %0	- %5, + %5
	Kampanyalar	- %10, + %10	+ %5, - %5	%0, %0

Şekil 2.8. Duopol akaryakıt pazarı oyununda pazar payı değişimleri

Bir firmanın pazar payı arttığında diğerinin ki aynı oranda azalacağı için (tersi de doğrudur) bu oyun sıfır-toplamlı bir oyundur. Firmalar aynı stratejileri seçtiklerinde pazar paylarında değişiklik olmaz. Eğer bir firma reklam bütçesini artırır, diğeri de ek hizmetleri artırırsa ek hizmetleri artıran firma pazar payını %30 artırır, yani ortalamadan %30 daha fazla benzin satar. Dolayısıyla pazar duopol olduğu için diğer firmanın da pazar payı ortalamadan %30 azalır. Benzer şekilde diğer durumlar da yorumlanabilir.

2.6.4.2. Sabit-toplamlı olmayan oyunlar

Sabit-toplamlı olan oyunlarda çatışmanın hat safhada olduğu söylendi. Peki diğer uç nokta nedir? Oyuncuların beraber kazanıp kaybettikleri “uyumlu” oyunların olduğu söylenebilir (Schelling, 1958:3). Sabit-toplamlı olmayan oyunlar işte hem bu uçtaki oyunlarda görülür hem de iki ucun arasındaki oyunlarda. Başka bir deyişle hem uyumun hat safhada olduğu hem de çatışma ile uyumun beraber bulunduğu oyunlardır.

Bir oyunun “sabit-toplamlı olmayan oyun” olarak adlandırılabilmesi için oyuncuların seçimlerinden elde edecekleri fayda toplamlarının sabit bir sayı olmaması gerekmektedir.

<u>Örnek (korkak tavuk oyunu):</u> 1950’lerde oynanan ölümcül bir oyun. İki sürücü arabalarını birbirine doğru sürer ve direksiyonu ilk kıran oyunu “kaybeder”. Ancak ikisi de direksiyon kırmazsa kayıp çok daha büyük olur. Korkak tavuk oyunu (chicken game) Şekil 2.9.’de normal-formda verilmiştir. Hücrelerde yer alan faydaların toplamı sabit bir sayı olmadığı için sabit-toplamlı olmayan bir oyundur. Ayrıca bu oyun hem çatışma hem de koordinasyon unsurlarını içermektedir. Sürücüler ortak faydalarını, ikisi de direksiyonu kırarsa maksimum yapar. Ancak birisi direksiyonu kırmayıp diğeri kırarsa, kırmayan en yüksek bireysel faydayı elde eder. Oyunun bu yapısı, sürücülerin en iyi bireysel sonuca ulaşabilmek için en kötüsünü elde etme riskini almalarına sebep olur (Rose, 2010).

		2. Sürücü	
		Direksiyonu kır	**Direksiyonu kırma**
1. Sürücü	**Direksiyonu kır**	1, 1	-1, 2
	Direksiyonu kırma	2, -1	-5, -5

Şekil 2.9. Korkak tavuk oyununun normal-form gösterimi

Korkak tavuk oyunu gerçek hayatta farklı şekillerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin işçi grevleri başladığı zaman taraflar kendilerini bu oyunun içinde bulur. İşçilerin seçenekleri, greve devam etmek veya sonlandırmaktır. Diğer tarafta işverenlerin seçenekleri, talepleri kabul etmek veya etmemektir. Anlaşma sağlanamazsa iki tarafın da kaybedeceği en istenmeyen sonuçlar gerçekleşir. Başka bir korkak tavuk oyunu örneği ise Gandi’nin sıkça gerçekleştirmiş olduğu açlık grevleridir. Açlık grevleri, otoriteden istenilen taleplerin kabul edilmesi için yapılır. Öyle ki, grevi gerçekleştiren kişi bir sağlık problemi yaşadığı takdirde bu durum otoritenin işine gelmez. Diğer yandan otorite talepleri kabul etmediği takdirde bu durum açlık grevini gerçekleştiren kişinin işine gelmez. Tek çıkar yol bir tarafın "korkak tavuk" olup geri çekilmesidir ve bu sonuç -her iki taraf için de- kimsenin korkak tavuk olmamasından iyidir.

2.6.5. Oyuncu Sayısına Göre Sınıflandırılan Oyunlar

Oyun kuramında, oyuncu sayılarına göre sınıflandırılan oyunlar ikiye ayrılır: (1) İki-oyunculu oyunlar, (2) çok-oyunculu (multi-player, n-person) oyunlardır. Günlük hayatta karşılaştığımız stratejik problemlerde genelde çok-oyuncu olsa da oyun kuramında gerçekleştirilen çalışmaların çoğu iki-oyunculu oyunlar ile ilgilidir. Bunun sebebi, çok-oyunculu oyunların daha karmaşık bir yapıya sahip olmasıdır.

Çok-oyunculu oyunlar, yapılarına göre incelenmiş ve kısaca ifade etmenin yolları aranmıştır. Böylelikle "kısa oyunlar" (succint games) kavramı ortaya çıkmıştır. Kısa oyunlar, normal-formdan daha küçük boyutta ifade edilebilen oyunlardan oluşmaktadır. n tane oyuncunun ve her oyuncunun c tane seçeneği olduğu bir oyun, normal-formda ifade edildiğinde $n.c^n$ tane fayda değerine ihtiyaç duyulur. Kısa oyunlar kapsamında incelenen oyunlar, bazı özelliklerinden yararlanılarak öyle bir ifade edilir ki çok daha az fayda değeri kullanılarak oyun tam olarak tanımlanabilir.

Kısa oyunlar arasında en başta -uzun zamandır incelendiği için- simetrik oyunlar gelmektedir. Simetrik oyunlarda bütün oyuncular tamamen aynıdır, kimlikleri önemli değildir. Aynı seçeneklere ve faydalara sahiptirler. Bu yüzden oyuncuların faydaları, kendi seçimlerine ve diğer stratejileri kaçar kişinin seçtiğine bağlıdır, kimlerin seçtiğine değil (Papadimitrou ve Roughgarden, 2008). Borsa ve açık arttırmalar çok-oyunculu simetrik oyunlardandır.

Başka bir “kısa oyun” ise Janovksaya’nın ilk defa (1968)’de tanıttığı polimatriks oyunlardır. Bu tip oyunlarda, oyuncular mümkün tüm ikili eşleştirmeler ile 2-kişilik oyun oynar. Faydaları ise bu oyunlardan elde ettiklerinin toplamından oluşur (Howson, 1972). Örneğin Süper Lig’de toplam 18 takım (oyuncu) vardır ve bu takımlar mümkün tüm ikili eşleştirmeleri gerçekleştirerek maçlara çıkar. Kazanan 3 puan, beraberlikte 1 puan, kaybeden 0 puan kazanır. Sezon sonunda en yüksek toplam puana sahip olan takım birinciliği kazanır. Takımların stratejilerini basitçe, sezon başında defansif veya ofansif takım kurmak olarak belirlersek bu oyunu normal-formda ifade ettiğimizde 18.2^{18} tane fayda değerine ihtiyaç duyarız. Kısa oyunların ilgi alanının önemi de tam olarak bu noktada anlaşılabilir çünkü bu oyunun polimatriks olma özelliğinden yararlandığımızda ihtiyacımız olan sadece $\binom{18}{2}.2^2.2$ tane fayda değeri tanımlamaktır, yani neredeyse 2 bin kat az.

2.7. Temel Çözüm Kavramları

Sonuçların birden çok oyuncunun davranışına bağlı olduğu durumlarda karar vermek için özel akılcı bir konsept ne yazık ki bulunmamaktadır (Stalnaker, 1996). Bunun sebebi, insanoğlunun karakteristik özelliklerinden birisinin aynı koşullar altında farklı gerekçelendirme eğiliminde olmasıdır (Başer, 2017).

Oyun kuramının temel çözüm kavramlarına yer verilen bu bölümde, oyunlarda kullanılabilecek bazı karar verme metotları bulunmaktadır. Bu metotlar her ne kadar takdir edilebilir bir mantık ile açıklanabilse de oyun kuramının yapısı gereği tartışmaya her zaman açık olduğu unutulmamalıdır. Bu yapının sebebi, karar verirken kısıtları insan zihninin oluşturuyor olmasıdır. İnsan zihni modellenmesi karmaşık bir konudur. Bu zorluk yüzünden oyun kuramındaki çözüm kavramlarının çoğu üzerindeki müzakereler sürmektedir. Bu bölümde verilecek çözüm metotları aşağıdaki gibidir.

1. Maximin stratejisi (maximin strategy)

2. En iyi karşılık (best response)
3. Kesin domine edilen seçenek (strictly dominated strategy)
4. Nash dengesi (nash equilibrium)
5. İlişkili denge (correlated equilibrium)
6. Geriye doğru çıkarsama (backward induction)
7. Diğer çözüm metotları

Çözüm metotlarına geçmeden önce oyunlarda seçim yapmanın iki temel şeklinden bahsedilmelidir:

1. *Karma-seçim* (mixed-strategy), oyuncunun seçeneklerini belli bir rasgelelikte seçtiği seçim şeklidir. Bu rasgelelik bazı durumlarda olasılıksal seçim olabilir bazı durumlarda oransal olabilir bazen de inançları yansıtabilir. Bu üç durum için de örnekler verilecektir.
2. *Saf-seçim* (pure-strategy) ise karma seçimin özel bir hali olmak üzere oyuncunun tek bir seçeneğini seçmesi anlamına gelmektedir. Literatürde tam-seçim veya arı-seçim olarak da karşımıza çıkabilir.

2.7.1. Maximin Stratejisi

Maximin stratejisi uygulayacak oyuncunun varsayımına göre, oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin rakibi doğru bir şekilde tahmin edecek ve oyuncuya en az kazandıracak stratejisini oynayacaktır. Bu varsayıma sahip bir oyuncu akılcı bir şekilde oynamak istiyorsa, stratejilerinden elde edeceği en kötü sonuçlara bakmalı ve bunlar içinden en yüksek getirili olanı seçmelidir. Maximin stratejisi ile tam olarak bu seçim bulunur. Oyundan elde edilebilecek minimum fayda maksimize edilir (Dutta, 1999:142).

	sol	**sağ**
ÜST	6, -20	-10, 2
ORTA	4, 2	3, 1
ALT	-100, 5	5, 3

Şekil 2.10. Maximin örneği

Yukarıda normal-formda ifade edilen iki-kişilik oyunda, sütun oyuncusunun *sol* seçeneğinden elde edebileceği en düşük fayda -20, *sağ* seçeneğinden elde edebileceği en düşük fayda 1 olduğu için sütun oyuncusunun saf-seçim maximin stratejisi *sağ* olur. Satır oyuncusunun ki ise benzer şekilde *ORTA* bulunur.

Örnek (eşleşen yazı-tura oyunu): İki kişi birbirlerine göstermeden yazı veya tura seçer. Eğer sonuçlar aynı ise bir oyuncu, değilse diğer oyuncu kazanır. Eşleşen yazı-tura oyunu (matching pennies game) normal-formda Şekil 2.11.'de verilmiştir.

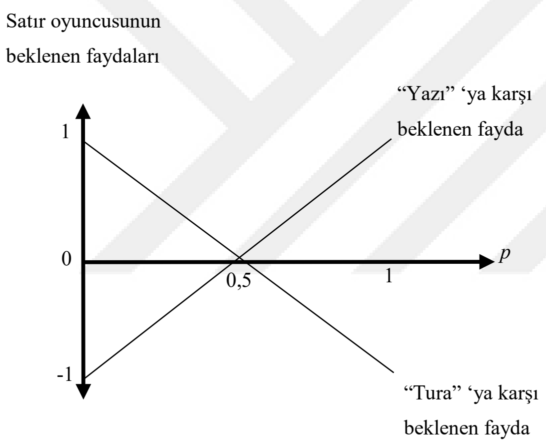
	Yazı	**Tura**
Yazı	1, -1	-1, 1
Tura	-1, 1	1, -1

Şekil 2.11. Eşleşen yazı-tura oyunu

Satır oyuncusu p olasılıkla *yazı* seçerse, rakibinin saf-seçimleri için satır oyuncusunun beklenen faydaları Şekil 2.12.'de görselleştirilmiştir. Beklenen fayda (expected utility), oyuncunun bir seçiminden elde etmeyi beklediği fayda demektir. Örneğin satır oyuncusu yazı seçtiğinde sütun oyuncusunun tura seçmesinden beklediği fayda $u_{\text{satır}}$(yazı, tura)= -1'dir. Satır oyuncusu yazı seçtiğinde sütun oyuncusunun x olasılıkla yazı seçmesinden beklediği fayda $u_{\text{satır}}$(yazı, x) = 1.x + -1.(1-x) olur.

Satır oyuncusu hangi olasılıkla *yazı* seçerse, rakibi satır oyuncusuna en az kazandıracak stratejisini oynadığında, satır oyuncusu diğer olasılıklardan elde edeceğinden daha yüksek faydaya sahip olur? Cevap: 0,5'dir çünkü diğer tüm olasılıklarda rakibin satır oyuncusuna en az kazandıracak stratejisi, satır oyuncusuna daha az kazandırır. Bu yüzden karma-seçim maximin stratejisi 0,5 olasılıkla *yazı*, 0,5 olasılıkla *tura* seçmektir ve oyuncuya en kötü 0 fayda sağlar.

Saf-seçim maximin stratejisi ise *yazı* veya *tura* seçmeyi gerektirir ve en kötü getirisi -1 olur. Görüldüğü gibi örneğimiz için maximin yöntemiyle karma seçim yapmak, saf seçim yapmaktan daha yüksek fayda getirmektedir (Dutta, 1999:143).



Şekil 2.12. Eşleşen yazı-tura oyununda satır oyuncusunun beklenen faydaları

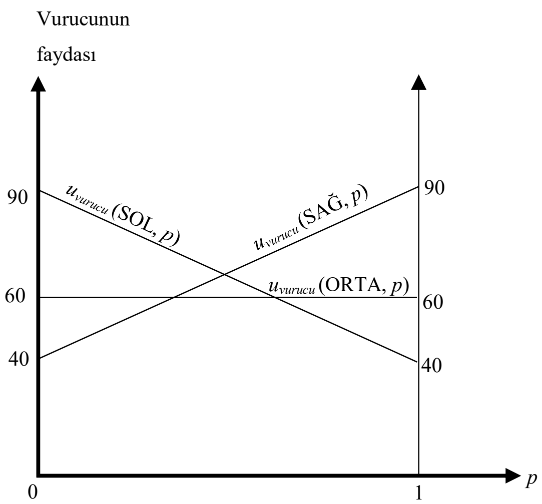
2.7.2. En İyi Karşılık

En iyi karşılık (best response), rakibin bir stratejisine göre oyuncuya en yüksek beklenen faydayı sağlayacak stratejidir. Şekil 2.13.'de normal-formda ifade edilen penaltı vuruşu oyununda, vurucunun topu atabileceği yerler {SOL, ORTA, SAĞ} ve kalecinin atlayabileceği yönler {sol, sağ} olsun.

	sol	**sağ**
SOL	%90	%40
ORTA	%60	%60
SAĞ	%40	%90

Şekil 2.13. Penaltı vuruşu oyunu

Vurucu topu *SOL*'a attığında ve kaleci *sağ*'a atladığında gol atma olasılığı %40'dır. Diğer faydalar da Şekil 2.13.'den yararlanarak yorumlanabilir. Bu oyunda, kalecinin *sağ*'a atlama olasılığına *p* diyelim. *p*'nin farklı değerlerine göre vurucunun her bir seçeneğinin beklenen faydası Şekil 2.14'deki doğrular aracılığıyla verilmiştir (Polak, 2007b).



Şekil 2.14. Penaltı vuruşu oyununda vurucunun beklenen faydaları

Kalecinin mümkün tüm karma-seçimleri için vurucunun verebileceği *en iyi karşılık*, Şekil 2.14.'deki üst üçgendir. Bu grafikten çıkarılabilecek en önemli bilgi: Vurucunun *ORTA* seçeneği, rakibinin hiçbir seçimine *en iyi karşılık* değildir. Bu tip seçeneklere kesin domine edilen seçenek denir.

2.7.3. Kesin Domine Edilen Seçenek

Bir oyuncunun karşılaştığı temel problemlerden birisi, rakiplerinin ne yapacağını bilmeden, bir seçim yapması gerektiğidir. Bu yüzden her oyuncu rakiplerinin seçimlerine dair bir tahmin yürütmelidir ve bu kolay bir görev değildir. Ancak bazı durumlarda bu zorluk ortaya çıkmaz çünkü rakiplerin seçimlerinden bağımsız olarak oyuncunun optimal bir seçeneği mevcuttur (Koçkesen ve Ok, 2007).

Örnek (seçim boykotu): Muhalefet partilerinin, adil ve güvenilir bir seçim olmayacağı gerekçesiyle seçimleri boykot ettiği durumlara geçmişte rastlanmıştır. Ancak seçimler yaklaştığı zaman bazen bir partinin boykot etmekten vazgeçtiği görülür. Buna teşvik edilmesinin sebebi, sandığa gitmek isteyen muhalif seçmenlerin boykot kıran partiden başkasına oy atamayacak olmasıdır. Bu durumda seçim meşrulaşır ve diğer boykotçu parti amacına ulaşamayarak öncekinden de çok şey kaybeder. Bu oyunun[7] normal-form gösterimi Şekil 2.15.'de verilmiştir.

[7] Seçim boykotu oyunu, mahkûmun çıkmazı oyunu ile aynı özelliklere sahiptir. İkisinde de taraflar yüksek getirisi olan seçenekte koordine olabilecekken, iş birliği yapmamanın sağladığı teşvik onları düşük getirisi olan noktada buluşma sonucuna ulaştırır.

		B Partisi	
		Boykota katıl	**Boykotu kır**
A Partisi	**Boykota katıl**	2, 2	0, 3
	Boykotu kır	3, 0	1, 1

Şekil 2.15. Seçim boykotu oyunu

Bu oyunda boykot kırmak seçeneği, diğer parti ne seçerse seçsin boykota katılmaktan daha çok fayda sağlar. Başka bir deyişle, diğer partinin tüm olası seçimlerine karşı boykotu kırmak seçeneği her zaman en iyi karşılıktır. Bu yüzden "boykotu kırmak" seçeneği, "boykota katıl" seçeneğini kesin domine eder. "Boykota katıl" seçeneği *kesin domine edilen seçenek*tir.

2.7.4. Nash Dengesi

En iyi karşılık kavramı, rakibin bir seçimi için oyuncunun verebileceği en iyi karşılık olarak tanımlandı. Benzer şekilde rakibin de oyuncuya verebileceği en iyi karşılık mevcuttur. Her oyuncunun, rakibin en iyi karşılığına en iyi karşılık verdiği nokta Nash dengesidir (Hoelle, 2014). John F. Nash (1950b)'deki çalışmasında bu noktanın varlığını kanıtlamıştır.

Nash dengesi oyunculara öyle bir strateji tavsiye eder ki oyuncular bu stratejiden tek taraflı olarak saptıkları takdirde faydaları artmaz. İki çeşit Nash dengesi vardır: (1) Saf-seçim Nash dengesi, (2) Karma-seçim Nash dengesi. Bazı oyunlarda sadece saf-seçim ile Nash dengesine ulaşılabilirken bazılarında sadece karma-seçim ile ulaşılır. Bazı oyunlarda ise iki türlü Nash dengesi de bulunmaktadır.

2.7.4.1. Saf-seçim Nash dengesi

Bir oyuncu saf-seçim Nash dengesi stratejisini bulmak istiyorsa, rakip her bir saf-seçeneğini oynadığı takdirde verebileceği en iyi karşılıkları bulur. Ardından aynı işlemi rakibi için de gerçekleştirir ve en iyi karşılığa en iyi karşılık verilebilen stratejileri saptar. Bu strateji, oyuncunun saf-seçim Nash dengesi stratejisidir.

Örneğin Şekil 2.16.'da normal-formda verilen oyunda, oyuncuların en iyi karşılıkları yuvarlak içine şu şekilde alınmıştır: Satır oyuncusu, rakibi *sol* seçtiğinde verebileceği en iyi karşılık *ÜST* veya *ORTA*'dır. Bu yüzden $u_{satır}$(*ÜST*, *sol*)= 3 ve $u_{satır}$(*ORTA*, *sol*)= 3 yuvarlak içine alınmıştır. Benzer şekilde sütün oyuncusu, rakibi *ÜST* seçtiğinde verebileceği en iyi karşılık *sol*'dur. Bu yüzden $u_{sütun}$(*ÜST*, *sol*)= 2 yuvarlak içine alınmıştır (diğer işaretlemeler de benzer şekilde yorumlanabilir).

	sol	*merkez*	*sağ*
ÜST	3, 2	0, 0	1, 1
ORTA	3, 0	1, 5	4, 4
ALT	1, 2	2, 1	3, 0

Şekil 2.16. Saf-seçim Nash dengesinin bulunması

Görüldüğü gibi en iyi karşılığa en iyi karşılık verilebilen strateji seti: {*ÜST*, *sol*}'dur. Bu strateji seti oyundaki saf-seçim Nash dengesidir. Başka bir deyişle, oyuncular saf-seçim Nash dengesi stratejilerini oynamak istediklerinde satır oyuncusu *ÜST*, sütun oyuncusu *sol* seçmelidir. Nash dengesinin orijinal tanımında "oyuncuların tek taraflı olarak saptıkları takdirde faydalarının artmadığı nokta denge noktasıdır" denmektedir. Bulduğumuz {*ÜST*, *sol*} noktasında da bu özellik sağlanmaktadır. Ancak her oyunda saf-seçimler yapılarak Nash dengesine ulaşmak mümkün değildir. Bu tip durumlarda karma-seçim Nash dengesi hesaplanmalıdır.

2.7.4.2. Karma-seçim Nash dengesi

Karma-seçim, oyuncunun seçeneklerini belli bir rasgelelikte seçtiği seçim şeklidir. Karma-seçim Nash dengesinde, oyuncular seçeneklerini öyle bir rasgelelikte seçer ki rakipleri sahip oldukları seçeneklerin beklenen faydalarını hesapladığında hepsi birbirine eşit çıkar. Böylelikle rakibin kendi beklenen faydasını maksimum yapabileceği bir seçeneği olmaz. Bu şekilde bir denge noktasına varılır. Eğer bu noktadan bir oyuncu tek taraflı saparsa faydası artmaz. Bu da Nash dengesinin orijinal tanımıdır. Bir oyuncu karma-seçim Nash dengesi stratejisini hesaplarken kendi faydalarından değil sadece rakibinin faydalarından yararlanır.

<u>Örnek (vergi mükellefi ve devlet oyunu):</u> Vergi mükellefi şirketler eğer vergi kaçırırlarsa, denetlenmeleri durumunda bir ceza ödeme durumunda kalır. Ancak tüm şirketleri denetlemenin devlet açısından masrafları, getirilerinden fazla olduğu için mükemmel bir şekilde denetlemezler. Bu yüzden şirketlerin vergi kaçırmaya teşvikleri olur. Bu oyun Şekil 2.17.'de normal-formda verilmiştir (Polak, 2007c).

		Vergi Mükellefi	
		Vergi öde	**Vergi kaçır**
Devlet	**Denetle**	2, 0	4, -10
	Denetleme	4, 0	0, 4

Şekil 2.17. Vergi mükellefi ve devlet oyunu

Bu oyundaki 8 tane faydanın yorumu aşağıdaki gibi yapılabilir:

1. u_{Devlet}(Denetle, Öde)= 2 faydası, vergi ödendiği için (denetleme masrafları çıkılarak) devlete sağlanan faydayı temsil eder.
2. $u_{\text{Mükellef}}$(Denetle, Öde)= 0 faydası, mükellefin vergi ödemekten duyduğu tatmini temsil eder.

3. u_{Devlet}(Denetle, Kaçır)= 4 faydası, vergi kaçıran mükellefi yakalamanın devlete sağlayacağı faydayı temsil eder.
4. $u_{\text{Mükellef}}$(Denetle, Kaçır)= -10 faydası, mükellefin vergi kaçırırken yakalanmasından dolayı çarptırılacağı cezayı temsil eder.
5. u_{Devlet}(Denetleme, Öde)= 4 faydası, denetleme masrafı olmadan vergi ödenmesinin devlete sağlayacağı faydayı temsil eder.
6. $u_{\text{Mükellef}}$(Denetleme, Öde)= 0 faydası, mükellefin vergi ödemekten duyduğu tatmini temsil eder.
7. u_{Devlet}(Denetleme, Kaçır)= 0 faydası, vergi kaçıranı yakalayamayan devletin faydasını temsil eder.
8. $u_{\text{Mükellef}}$(Denetleme, Kaçır)= 4 faydası, yakalanmadan vergi kaçıran mükellefin faydasını temsil eder.

Bu oyunda taraflar ne yapmalı? Devlet hangi olasılıkla şirketleri denetlemeli? Sezgisel olarak 1 olasılıkla denetlemeli denebilir. Ancak bu durumda mükellefler kesin denetleneceklerinden vergi kaçırmayacağı için devlet, oyunda sadece 2 faydaya sahip olur. Öte yandan devlet hiç denetlemezse, mükellefler yakalanmadan vergi kaçırır. Bu yüzden devletin karma-seçim yapması gerekmektedir yani denetleme işlemini olasılıksal olarak gerçekleştirmelidir. Karma-seçim Nash dengesi ile bu olasılıklar bulunur. Bunu yapmanın yolu ise öyle bir şekilde karma-seçim yapmaktır ki rakip, seçeneklerinin beklenen faydalarını hesapladığında eşit çıkmalıdır. Devletin denetleme olasılığına p, denetlememe olasılığa $(1-p)$ dersek;

- Mükellef vergi ödediğinde → $0.p + 0.(1-p)= 0$ faydaya sahip olur
- Mükellef vergi kaçırdığında → $-10.p + 4.(1-p)= 4 - 14.p$ faydaya sahip olur.

Bu faydaları birbirine eşitlersek → $0= 4 - 14.p$ → $p= 2/7$, $1-p= 5/7$ buluruz. Yani devletin karma-seçim Nash dengesi stratejisi; 2/7 olasılıkla denetlemek ve 5/7 olasılıkla denetlememektir. Benzer şekilde vergi mükellefinin vergi ödeme olasılığına q, vergi kaçırma olasılığına $1-q$ dersek;

- Devlet denetlediğinde → $2.q + 4.(1-q)= 4 - 2.q$ faydaya sahip olur
- Devlet denetlemediğinde → $4.q + 0.(1-q)= 4.q$ faydaya sahip olur

Bu faydaları birbirine eşitlediğimizde → $4 - 2.q = 4.q \rightarrow q = 2/3$, $1\text{-}q = 1/3$ buluruz. Yani vergi mükellefinin karma-seçim Nash dengesi stratejisi; 2/3 olasılıkla vergi ödemek, 1/3 olasılıkla vergi kaçırmaktır.

Sonuç olarak bu oyunda karma-seçim Nash dengesi [(2/7, 5/7), (2/3, 1/3)] bulundu. Bu rasgele seçimlerin anlamı nedir? Devlet için konuşacak olursak, gerçek bir olasılıksal seçim yapılması söz konusudur. Yani kelimenin tam anlamıyla örneğin 2 sarı 5 siyah top olan bir torbadan rasgele seçim yapılmalıdır. Ancak vergi mükellefleri için bulunan olasılıklar bir oranı yansıtmaktadır. Denge durumunda, toplumdaki mükelleflerin 2/3'ü vergilerini ödeyecektir.

Dikkat edilmesi gereken, eğer devlet vergi ödeyenlerin sayısını çoğaltmak istiyorsa cezaları artırmanın bir yararı olmayacağıdır. Çünkü vergi ödeyenlerin oranını belirleyen devletin faydalarıdır. Örneğin devlet, denetleme masraflarını bir şekilde düşürürse vergi ödeyenlerin oranı artacaktır. Çünkü denetleme masrafları düştüğünde u_{Devlet}(Denetle, Öde) faydası artacak ve mükelleflerin karma-seçim Nash dengesi stratejisi değişecektir.

2.7.5. İlişkili Denge

Nobel ödüllü oyun kuramcısı Roger B. Myerson, ilişkili denge (correlated equilibrium) kavramı ile ilgili "*Eğer başka gezegenlerde zeki yaşam formları varsa, çoğunluğunda Nash dengesinden önce ilişkili denge keşfedilmiştir"* yorumunu yapmıştır (Leyton-Brown ve Shoham, 2008:24).

İlişkili denge kavramı ilk defa Aumann'ın (1974)'deki çalışmasında tanıtılmıştır. Bu kavramın temelinde, oyuncuların adil bir cihazdan yararlanarak seçim yapması vardır. Cihazın tavsiye ettiği stratejiden oyuncuların tek taraflı sapmaya teşviki yoksa ilişkili denge sağlanmıştır.

Örnek (yol verme oyunu): Trafikte arabaların birbirlerine yol vermediği için kaza yaptıkları durumlara sıkça rastlanır. Bu oyunun normal-form gösterimi Şekil 2.18.'de verilmiştir.

	Yol ver	**Geç**
Yol ver	-1, -1	0, 1
Geç	1, 0	-5, -5

Şekil 2.18. Yol verme oyunu

Eğer sürücüler bu oyunda Nash dengesi stratejilerini oynarsa 5/7 ihtimalle yol vermeli, 2/7 ihtimalle geçmelidir. Bu durumda sürücülerin beklenen faydaları -0,71 olur. Ancak bu oyunda istenmeyen sonuçlara ({Yol ver, Yol ver} ve {Geç, Geç}) ulaşmamanın bir yolu vardır. Trafik lambaları kullanmak. Trafik lambaları, ilişkili denge kavramının tanımında bahsedilen “adil cihaz” ’dır. Sürücülerin bu cihazın tavsiye ettiği stratejiye uymamaya teşviki yoktur. Çünkü Nash dengesi stratejilerinde beklenen faydaları -0,71 iken ilişkili denge ile beklenen faydaları 0,5’e yükselir.

2.7.6. Geriye Doğru Çıkarsama

Dinamik oyunlarda kullanılan en yaygın çözüm metodu, geriye doğru çıkarsama’dır. Bu metot gerçekleştirilirken önce son hamleye sahip oyuncunun en yüksek faydası olan seçimi yapacağı varsayılır. Sondan bir önceki oyuncu, bu varsayım altında en yüksek faydası olan seçimi yapacağı varsayılır ve bu süreç ilk hamleye sahip oyuncuya varılana kadar sürer (McCarty ve Meirowitz, 2007:138).

<u>Örnek (korsan oyunu):</u> Bir gemide isimleri A, B, C ve D olan 4 tane korsan vardır. Korsanların hiyerarşi sıraları A>B>C>D şeklindedir. Bu korsanlar 100 altın ganimet ele geçirmiştir ve altınların şu şekilde paylaştırılacağını kararlaştırırlar: Önce en yetkili korsan (A) dağıtım

yapacak, %50 ve üzeri oy verilirse kabul edilecek. %50'den düşük oy verilirse A gemiden atılacak ve sonra dağıtım sırası bir sonraki yetkili korsana (B) verilecektir. Yine aynı prosedür izlenerek gerekirse son korsan kalana kadar oyun devam edecektir (Stewart, 1999).

Bu oyunda A korsanı gemiden atılmayarak en yüksek sayıda altını kendisine almak için nasıl bir paylaştırma yapmalıdır? Geriye doğru çıkarsama metoduna göre sadece C'ye 1 altın vermesi ve kalanı kendisinin alması yeterlidir. Bu metodun mantığı sondan başa doğru gidilerek şu şekilde oluşturulur:

- D korsanı, sona C ile beraber kaldıklarında C'nin tüm altınları alacağını bilir çünkü D bu paylaştırmayı kabul etmese bile C kabul edeceğinden %50 oy şartı sağlanır. Bu yüzden D sona iki kişi kalmak istemez. B ne verirse kabul edecektir.
- C korsanı, B'nin bu durumu bildiğini bildiği için B'nin kendisine altın vermeyeceğini de bilir. Bu yüzden A ne verirse kabul edecektir.
- A korsanı, C'nin bu durumu bildiğini bildiği için C'ye 1 altın vermesi yeterlidir. Bu sayede C'nin desteğini alacak ve paylaştırma kabul edilecektir.

Korsan oyunu (pirate game), geriye doğru çıkarsama metodu ile daha çok oyunculu versiyonlarda da analiz edilebilir. Stewart (1999)'daki çalışmasında bu oyunu 500 korsan içeren versiyonlarına kadar analiz etmiştir.

2.7.7. Diğer Çözüm Kavramları

Oyun kuramındaki diğer çözüm kavramları kısaca aşağıda verilmiştir:

- *Zayıf domine edilen seçenek* (weakly dominated strategy): Eğer oyuncunun bir seçeneği -rakibi ne yaparsa yapsın- en az başka bir seçeneği kadar iyiyse ve rakibin en az bir seçimine karşı daha iyi bir seçenekse bu başka seçenek zayıf domine edilen seçenektir

(Osborne ve Rubinstein, 2011:62). Kesin domine edilen seçenekte ise mutlak suretle daha iyi olma durumu vardır. Örneğin Şekil 2.19.'da normal-formda verilen oyunda satır oyuncusunun *ÜST* seçeneği, *ALT* seçeneği tarafından zayıf domine edilir. Sütun oyuncusunun ise sağ seçeneği, sol seçeneği tarafından kesin domine edilir.

	sol	**merkez**	**sağ**
ÜST	3, 9	0, 0	1, 8
ORTA	0, 1	4, 10	0, 0
ALT	5, 7	0, 0	2, 6

Şekil 2.19. Zayıf domine edilen seçenek örneği

- *Alt oyun mükemmel Nash dengesi* (subgame-perfect Nash equilibrium): Selten (1965)'deki çalışmasında, mükemmel bilgili dinamik oyunlarda Nash dengesi kullanılırken imkânsız tehditlerin analizi etkilediğini söylemiş ve çözüm olarak alt oyun mükemmel Nash dengesi metodunu tanıtmıştır. Bu metot ile mükemmel bilgili bir dinamik oyunun bütün alt oyunlarında sağlanabilecek denge noktası bulunur.
- *Bayesyen Nash dengesi* (Bayesian Nash equilibrium): Eksik bilgili statik oyunlarda Nash dengesinin bulunabilmesi için Harsanyinin (1967-68)'de tanıttığı yöntemdir.
- *Mükemmel Bayesyen Nash dengesi* (perfect Bayesian Nash equilibrium): Eksik bilgili dinamik oyunlarda Nash dengesinin bulunabilmesi için Harsanyinin (1967-68)'de tanıttığı yöntemdir (Gibbons, 1992:173).

2.8. Oyun Kuramına Farklı Yaklaşımlar

Geleneksel oyun kuramı, oyunlarda yer alan bazı kavramları yeterli olarak değerlendirmede zorluklar yaşamaktadır. Bu durum ve farklı disiplinlerdeki gelişmelerin oyun kuramına uyarlanabilmesi, oyun kuramına yeni yaklaşımlar getirilebilmesini sağlamıştır.

- *Psikolojik oyun kuramı* (psychological game theory): Psikolojik oyun kuramı ilk defa Genakoplos ve Pearce'ın (1989)'daki çalışmasında tanıtılmıştır. Şaşkınlık, gerginlik, öfke, vicdan gibi inanca dayalı motivasyonlar ve duygusal mekanizmalar, etkileşim içinde bulunan insanlar üzerinde değişikliklere sebep olabilir. Psikolojik oyun kuramı bu değişikliklerin oyuncu faydalarına nasıl yansıdığına çalışmaktadır. Geleneksel oyun kuramı sadece maddi sonuçlara odaklandığı için psikolojik oyun kuramının bileşenlerini değerlendirmede yetersiz kalır (Jagau ve Perea, 2017).
- *Kimyasal oyun kuramı* (chemical game theory): Stratejik karar problemlerini çözerken kimya ve kimya mühendisliği alanlarında bulunan prensiplerden de yararlanılabilir. Kimyasal oyun kuramında, oyuncu kararları -metaforik bir şekilde- molekül olarak ele alınır. Sonuçlar ise kimyasal reaksiyon metotlarına göre hesaplanır (Velegol vd., 2018).
- *Algoritmik oyun kuramı* (algorithmic game theory): Son 20 yıldır üzerinde çalışılan algoritmik oyun kuramı, bilgisayar bilimi ile oyun kuramının kesişiminden oluşmaktadır (Roughgarden, 2010). Geleneksel oyun kuramında tanımlanan çeşitli denge kavramları vardır. Algoritmik oyun kuramının temel amaçlarından biri bu dengeye nasıl ulaşılacağıdır (Nisan vd., 2007:xiv).
- *Evrimsel oyun kuramı* (evolutionary game theory): Evrim kuramı ve birbiriyle etkileşen canlı davranışları, oyun kuramıyla açıklanabilmektedir. Evrimsel oyun kuramında, oyuncuları canlıların genleri oluşturmaktadır. Seçenekler, davranış çeşitlerinden ve faydalar ise üreme uygunluğundan oluşmaktadır (Hyksova, 2004). Darwinin 19. yüzyıldaki doğal seçilim fikrini destekleyen çalışmaları, oyun kuramsal metotlarla 20. yüzyılda da doğrulanmıştır.

- *Mekanizma dizaynı kuramı* (mechanism design theory): Geleneksel oyun kuramında, oyunlar hazır bir şekilde bulunur. Oyuncular, seçenekler ve faydalar ışığında en uygun kararı vermek için metotlar geliştirilir. Ancak mekanizma dizaynı kuramı, istenilen sonuçlara ulaşmak için oyunun kendisini dizayn eder. Örneğin, bir ürünü birden çok alıcı talep ettiğinde, satıcının dizayn edebileceği açık arttırma veya kapalı zarf usulü müzayede gibi farklı satış metotları vardır. Bu metotlardan hangisinin satıcının amacına en uygun olduğu, mekanizma dizaynı kuramının ilgi alanına girer. Satıcı bir nevi kendi dizayn ettiği oyunda alıcıları karşılaştırır.
- *Epistemik oyun kuramı* (epistemic game theory): Geleneksel oyun kuramında bir oyunun temelinde, oyun yapısı ve tercihler bulunmaktadır. Epistemik oyun kuramı, 3. bir temel olarak inançların detaylı bir şekilde oyunlarda modellenebileceği epistemik yapıyı içerir (Bach ve Cebessa, 2012). Bu tezin de konusu olan epistemik oyun kuramı gelecek kısımda ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

3. EPİSTEMİK OYUN KURAMI

Tezin bu kısmı iki ana bölümden oluşmaktadır:

1. *Epistemik Oyun Kuramı Hakkında Genel Bilgiler* bölümünde, epistemik oyun kuramı hakkındaki genel bilgiler tarihsel bir akış izlenerek sunulacaktır. Epistemik oyun kuramının ne olduğu, neden oluştuğu, klasik oyun kuramından farkları, çözüm yöntemlerinin içerikleri, önemli kişiler ve katkıları gibi temel bilgiler verilecektir.

2. *Epistemik Oyun Kuramının Matematiksel Temelleri* bölümünde, epistemik oyun kuramındaki temel kavramların matematiksel formülasyonlarına yer verilecektir.

3.1. Epistemik Oyun Kuramı Hakkında Genel Bilgiler

Herhangi bir disiplinde, normalde var olan yöntemlerle çözülebilmesi beklenen bir problemin çözülemediğini ortaya çıkardığımızda entelektüel bir şok yaşarız. Bu şok bizi eski yöntemleri bırakıp yenilerini edinmeye zorlar. Matematikte ve bilimde yer alan önemli fikirlerin doğuşunu bu entelektüel adaptasyon sürecine borçluyuz (Rapoport, 1967). Epistemik oyun kuramı işte böyle bir sürecin parçasıdır.

3.1.1. Epistemoloji ve Oyun Kuramı

Epistemoloji, felsefenin temel disiplinlerinden biri olarak bilgi üzerine çalışır. Genel olarak, bilme sürecini ve yasalarını açıklayarak bilginin ne olduğuna cevap verir. Bilimin de bir bilgi etkinliği olduğu düşünüldüğünde, her bilimsel alanın epistemolojik açıdan doğrulanabilir temellere sahip olması gerektiği kaçınılmazdır (Külcü, 2000). Oyun kuramı bilimsel bir alan olarak kabul edilmeye 1928'de başlamış ve uzun süre epistemolojik açıdan detaylı bir şekilde incelenmeye fırsat bulamamıştır. Ancak inanç hiyerarşileri, ortak inanç ve rasyonelliğe ortak inanç gibi epistemik kavramların gelişerek oyun kuramına dahil edilmesi ile birlikte epistemik oyun kuramı alanı oluşmuş ve bu talep karşılanmıştır (Perea, 2013).

Bilimin bilimi olarak tanımlanan epistemoloji, bilim dallarının doğru şekilde ilerleme kaydedebilmesi için de kullanılır. Epistemolojinin, psikoloji alanından farkı açıklanarak epistemik oyun kuramıyla olan ilişkisi şu şekilde ortaya konabilir: Epistemoloji, düşünme süreçlerini gerçekte olduğu gibi ele almaz. Bu iş, psikolojiye bırakılmıştır. Epistemolojinin niyeti; düşünme süreçlerini, gerçekte olanın yerine geçmesi için, gerekçelendirilmiş işlem kümeleri inşa ederek yapılandırmaktır. Bu yüzden epistemoloji, gerçek süreçler yerine mantıksal yapılarla ilgilenir (Reichenbach, 1938:5). Geleneksel olarak oyun kuramında, çözüm yöntemlerine odaklanılıp içerdiği mantığa az ilgi gösterilmiş olmasından dolayı modern oyun kuramcıları bu yaklaşımın yerine geçmesi için mantığın merkeze koyulduğu yaklaşımı, epistemolojik olarak gerekli bulmuştur. Çünkü oyuncuların sahip olduğu "mantık" oyunların temel faktörüdür.

3.1.2. Epistemik Oyun Kuramının Tanımı

Oyun kuramının modern alt dalı olan epistemik oyun kuramı, oyuncuların birbirleri hakkında yürüttüğü mantığın ve birbirlerinin mantığı hakkında yürüttükleri mantığın oyunu nasıl etkilediğine çalışır (Brandenburger, 2014:xv).

Mantıklı seçim ve rasyonel seçim arasındaki fark, epistemik oyun kuramının anlaşılmasında önemli bir yere sahiptir. Oyuncunun, rakiplerinin yapacağı seçim hakkında oluşturduğu bir inanca göre kendi yapacağı optimal seçime rasyonel seçim denir. Bu inancın mantıklı olup olmaması seçimin rasyonelliğini etkilemez. Mantıklı seçim yapmak rasyonel seçim yapmaktan ötedir. Ayrıca mantıklı olmayan bir inanca göre yapılan rasyonel seçimin mantıksız olduğu da söylenebilir. Epistemik oyun kuramı mantıklı rasyonel seçimler ile mantıksız rasyonel seçimler arasındaki ayrıma çalışır.

Farklı insanlar farklı şekillerde mantık yürüttüğünden dolayı en doğru mantık yürütme şeklinin varlığına inanmayan epistemik oyun kuramcıları, bunun yerine takdir edilebilecek çeşitli mantık yürütme yollarını tanımlamaktadır (Perea, 2012:5-6). Bu noktada klasik oyun kuramından ayrılır çünkü klasik oyun kuramı sadece oyuncuların seçimleriyle ilgilenir ve bu seçimlere sebep olan mantık kara kutu olarak kalır. Epistemik oyun kuramı bu kara kutuyu, oyuncuların seçim yapmadan önce yürüttüğü mantığı detaylı olarak tanımlayarak ve soruşturarak açmaktadır (Perea, 2018). Bu yüzden klasik oyun kuramının tamamlayıcısı olarak epistemik oyun kuramı görülebilir. İlki sadece oyunun biçimi ve seçimler üzerine kuruluyken diğeri fazladan bir temel olarak epistemik yapıyı da içermektedir.

Oyun kuramına epistemik yaklaşım uygulanmasının amacı, halihazırda var olan çözüm yöntemlerini epistemik varsayımlar altında incelemek ve yeni epistemik hipotezler hakkında çalışmalar yaparak farklı çözüm kavramları ileri sürmektir (Bach ve Cabessa, 2011).

3.1.3. Epistemik Oyun Kuramının Temelleri

Bilimde yer olan çoğu disiplinde olduğu gibi epistemik oyun kuramının da tam olarak ne zaman başladığını söylemek zordur. Emile Borel (1921-24-27)’deki çalışmalarında “makul olmayan stratejilerin yinelemeli eliminasyonu” kavramını ilk defa kullanmıştır. Borel’in bu kavram ile geliştirdiği yöntemde, esas oyundan iki oyuncu için de varsa kötü olan stratejiler (rakip ne yaparsa yapsın beklenen faydanın en fazla 0 olduğu stratejiler) elenmiş ve bu şekilde esas oyundan daha az stratejiye sahip indirgenmiş oyun elde edilmiştir. Bu indirgenmiş oyundan da yine varsa kötü stratejiler elenerek kötü strateji kalmayana kadar aynı yolu izlenmiştir. Borel'in bu fikri ileride epistemik oyun kuramının temelinde yer alacak olan *rasyonelliğe ortak inanç* kavramıyla benzerlikler içerdiği için önemli bir yere sahiptir. Ancak rakip hakkında mantık yürütmenin önemini literatürde ilk defa Borel değil Oskar Morgenstern vurgulamıştır (Perea, 2013).

Morgenstern, epistemik oyun kuramının merkezindeki düşünceye, yani rakip hakkında mantık yürütme ve rakibin mantığı hakkında mantık yürütmeye, ilk defa (1928)'deki çalışmasında, Sherlock Holmes romanından bir kesit vererek değinmiş ve (1935)'deki çalışmasında ise bu kesitte yer alan içeriklerin matematiksel bir metot ile formülleştirilmesi önerisinde bulunmuştur (Brandenburger, 2010).

Hikâye şu şekilde ilerler: Dedektif Holmes, Moriarty'nin suç örgütünü çökertecek delilleri polise vermiştir. İntikam isteyen Moriarty, Holmes'u öldürmeye çalışmaktadır ve bu yüzden Holmes ülke dışına kaçmak için Londra'dan Dover'a giden trene binmiştir. Tren hareket ettiğinde, dışarıda treni durdurmaya çalışan Moriarty'nin başarısız olduğunu görür ve bir an için rahatlar. Ancak Holmes, Moriarty'nin zeki olduğunu bildiğinden bir şekilde daha hızlı bir tren bulabileceğine inanır ve bu yüzden ara durakta apar topar inerek ülkenin diğer ucuna gidecek trene binmeye karar verir. Durakta beklerken, gerçekten de Moriarty'nin daha hızlı bir trenle kendisini Dover'da yakalamak için durakta durmadan geçtiğine tanık olur (Doyle, 1893).

Eğer Holmes, rakibi Moriarty'nin zekasını hesaba katmayıp sıradan biri gibi düşündüğüne inansaydı daha hızlı bir tren bulabileceğine ihtimal vermezdi. Ancak Moriarty'nin zeki olduğunu bildiği için onun mantığı hakkında mantık yürüterek bir şekilde daha hızlı bir tren bulabileceğine inandı ve bu yüzden ara durakta inerek izini kaybettirdi. Morgenstern, çalışmasında bu hikâyeden bahsederken aşağıdaki yorumu yapmıştır:

"Peki ya Moriarty daha zeki olsaydı ve Holmes'un yeteneklerini tahmin edip hareketlerini öngörebilseydi? Bu durumda ara durakta durup onu arardı ancak bu sefer de Holmes bu durumu hesaba katarak Dover'a giden trende kalabilirdi ve yine Moriarty bunu düşünerek farklı

şekilde tepki verebilirdi... Burada, karşılıklı olarak varsayımlara dayanan tepkiler ve karşı-tepkilerin sonsuz zinciri ortaya konulmuştur." (Morgenstern, 1935)

İleride epistemik oyun kuramının dili olarak kabul edilecek olan *inanç hiyerarşisi* kavramının temel düşüncesi ilk defa bu yorum ile literatürde yer almıştır (Perea, 2013).

3.1.4. İnanç ve İnanç Hiyerarşisi

İnsanların önemli bir karakteristik özelliği, karar vermeden önce aklını kullanmasıdır. Gerçekten de seçim yapmadan önce olası sonuçlar hakkında düşünüp kendi beklentimize göre en uygun sonuca ulaştıracak seçimi ararız. Bir seçimin sonucunun başkasının seçiminden etkilendiği durumlar üzerine çalışan oyun kuramı alanında, "mantık yürütme" konusu diğer karar bilimi alanlarından daha önemlidir. Çünkü bu tip durumlarda doğru karar alınabilmesi için rakibin yapacağı olası seçimler hakkında mantık yürütmek gerekir.

Rakibin seçimleri hakkında tutarlı tahminler yapmaya çalışırken onun sahip olduğu *inançlar* önemli bir yere sahiptir. Çünkü rakip, oyun hakkında sahip olduğu inançlara göre stratejisini şekillendirecektir (Perea, 2013). Bu yüzden oyuncunun, rakip inançları hakkında mantık yürütmesi kaçınılmazdır. Bunun sonucu olarak oyuncu da rakip hakkında inanç oluşturmuş olur.

İnanç demek, doğru olduğunu düşünmek veya doğru olduğunu olası görmek demektir. İnancı bilgiden ayıran özellik, inancın yanlış olabileceğidir. Öte yandan bilgi, gerçeğe uygundur (Bonanno, 2012). Buna rağmen literatürde oyuncuların akıl durumunu ifade etmek için "inanç" yerine "bilgi" teriminin kullanıldığı çalışmalara da rastlamak mümkündür. Ancak sezgisel olarak oyuncuların akıl durumunu ifade etmek için "bilgi" teriminin çok güçlü olduğu söylenebilir. Rakiplerin aklının içine bakılamayacağından "inanç" terimi daha uygun olsa da iki terimin de teknik olarak bir farkı yoktur (Perea, 2012:66). Burada önemli olan rakip hakkında edinilen fikirlerdir.

Örneğin: i oyuncusu, j oyuncusunun en yüksek faydasının bulunduğu seçeneğini seçeceğine inandığında kendi seçimini bu inancına göre şekillendirir. Ancak j oyuncusunun da i oyuncusu hakkında inançlara sahip olabilmesi gayet doğaldır. Epistemik oyun kuramı i oyuncusunun bunu da hesaba katmasıyla başlar. Bu yaklaşım, *inanç hiyerarşileri* kavramını ortaya çıkarmıştır.

İnanç hiyerarşileri, oyuncunun rakip seçimleri ve inançları hakkında sahip olduğu inançları açıklamakla kalmaz aynı zamanda oyuncunun rakiplerinin rakip seçimleri ve inançları hakkında sahip olduğu inançlar hakkında sahip olduğu inançları da içeren ve devamında da benzer şekilde ilerleyen sonsuz bir inanç zincirini açıklar (Perea, 2013).

Bu konu karmaşık ve sonsuz olduğu için üzerinde çalışması güç bir konudur. Ancak Morgenstern (1935)'deki çalışmasında, oyunlardaki mantığın ve inanç hiyerarşilerinin matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceği hakkında *"çözüm, felsefenin mantık disiplinindedir"* diyerek bir ipucu bırakmıştır.

3.1.5. Oyun Kuramına Mantık Modellemesi Neden Geç Girdi?

Morgenstern'in 1935'de kaydettiği ilerlemeleri ilk defa John C. Harsanyi 1962'de kullanmayı başarabilmiştir. Epistemik oyun kuramcıları mantık ve inanç hiyerarşisi gibi önemli konuların geçmişte neden bu kadar geç ilgi gördüğünü iki sebeple açıklamaktadır. Birincisi, her ne kadar doğal bir konu olsa da inanç hiyerarşileri sonsuz sayıda basamak içerdiği için üzerinde çalışması karmaşık bir konudur (Perea, 2018).

İkincisi, oyun kuramı hakkında ilk yazılan ve halen araştırmacıların kullandığı en popüler kaynak olan John von Neumann ve Oskar Morgenstern'in 1944 tarihli "Oyun Kuramı ve İktisadi Davranış" (Theory of Games and Economic Behaviour) kitabında, oyun kuramının merkezine mantık yerine farklı konuların yerleştirilmesidir. Her ne kadar kitaplarında *“Oyuncu için bulduğumuz sonuçlar, rakibin rasyonel davranışına dayalı değildir” (1944:160)* ifadesine yer verilmiş olsa da ve yazarlardan birisi, geçmişte mantık konusunun önemine değinen Morgenstern olsa da oyun kuramının çalışma alanını uzun süre meşgul eden von Neumann’ın maximin yaklaşımıdır (Brandenburger, 2010).

3.1.6. Maximin Yaklaşımının Uygun Olmayan Tarafları

von Neumann’ın maximin yaklaşımı, Morgenstern‘in epistemik düşüncelerini tatmin etmemiştir. Bu yaklaşıma göre her oyuncu rakibinin kendisine göre en kötü seçimi yapacağını varsayar. Hiçbir oyuncu kendisini rakibinin yerine koyarak inançlarını tahmin etmeye çalışmaz. Bu yüzden bu yaklaşım, rakip hakkında mantık yürütmeyi içermez. Çünkü rakibin daha mantıklı stratejisiyle daha az mantıklı stratejisi arasında bir ayrım yoktur. Sadece oyuncu için rakibin en kötü stratejisinin ne olduğuna bakar fakat bu stratejinin rakip için takdir edilebilir olup olmamasıyla ilgilenilmez (Brandenburger, 2010). Ayrıca Nash’in (1950-51) çalışmalarında tanıttığı denge kavramı da maximin yaklaşımının bir ürünüdür çünkü iki-oyunculu, sıfır-toplamlı oyunlara indirgendiğinde tam olarak maximin stratejisine denk gelir ve benzer şekilde rakip hakkında mantık yürütmeyi içermez. Bunun yerine rakibin Nash dengesi stratejisini oynayacağını varsayar.

Nash dengesinin orijinal tanımındaki *“oyuncunun stratejisi, rakip stratejisine göre optimal olmalıdır”* ifadesi ile oyuncuların bir şekilde doğru olarak rakip seçimlerini öngörebileceği ima edilmiştir. Bu altyapı, Nash dengesini mantık modeli içine yerleştirmeyi zorlaştırmaktadır çünkü böyle modellerde oyuncunun, rakip seçimleri için yanlış inanca sahip olabileceği de hesaba katılmalıdır (Perea, 2013). Nash dengesinin ana fikrinde, öyle bir denge noktası bulunmalıdır ki bu noktadan tek taraflı sapan oyuncunun faydası artmaz. Gerçekten de rasyonel bir oyuncu, faydasını artırmayacak bir stratejiden sapmaz. Ancak bu ifade, oyuncunun rakibinin de Nash dengesi stratejisini oynayacağını bildiğini varsaymaktadır. Bu varsayımın çok cüretkâr olduğu söylenebilir (Brandenburger, 2014:ix).

Her ne kadar Nash dengesi, işbirlikçi olmayan oyunların ekonomik uygulamalarında baskın bir role sahip olsa da ve ekonomik davranışları anlamamıza büyük katkılar sağlasa da Nash'in işbirlikçi olmayan stratejik seçim problemini çözdüğünü söylemeyi sürdürmek makul olmayacak bir şekilde iyimser olur (Bernheim, 1984).

Nash dengesi, rakibin seçimleri hakkında inanç oluşturmanın sadece bir yolu – ve pek de takdir edilemeyecek bir yol- olduğunu tanımlamaktadır. Buna rağmen literatürdeki çoğu kaynak, oyuncunun mantık sürecinin onu Nash dengesine çıkaracağını varsaymakta ancak bu mantık süreci ayrıntılı bir şekilde tanımlanamamaktadır. Bu yaklaşım iki sebepten dolayı tatmin edici değildir. Birincisi, oyuncunun mantık süreci, oyunun vazgeçilmez bir parçasıdır. İkincisi, Nash dengesi oyuncuların mantık yürütme şekli için takdir edilemeyecek varsayımlara dayanır. Bu sebeplerden dolayı oyuncuların mantığını analiz etmede Nash dengesinin kullanılması uygun değildir (Perea, 2012:2). Morgenstern'den sonra rakip hakkında bu tip mantık yürütme eksikliklerinin farkına varan ilklerden birisi de Maurice Frechet'dir.

Oyun kuramındaki çözüm yöntemlerinin, rakip hakkında mantık yürütmeyi de içermesi gerektiğine vurgu yapan Frechet, bunu (1953)'deki çalışmasında *"Oyuncuların, karar verirken, rakip kararlarına ilişkin tahminlerinin de hesaba katılabildiği daha farklı teoremler düşünülebilir"* ifadesi ile belirtmiştir (Perea, 2013). Nobel ödüllü John C. Harsanyi ilk defa 1962'de Frechet ve Morgenstern'in epistemik düşüncelerini tatmin edebilecek ilerlemeleri inanç hiyerarşilerini tanımlayarak kaydetmiştir.

3.1.7. İnanç Hiyerarşilerinin Türler Yardımıyla Modellenmesi

Harsanyi (1962)’deki çalışmasında rasyonel oyuncu davranışının, rakibin ne yapacağı hakkındaki inanca bağlı olduğuna pazarlık etme konusunu irdeleyerek değinmiştir. Herhangi bir pazarlık etme durumunda tarafların amacı razı olacakları en kötü koşulda anlaşmak değildir. Bunun yerine, karşı tarafın razı olacağı en kötü koşul hakkındaki inançlarına göre pazarlığı sürdürürler. Ancak karşı tarafın da kendileri için bu şekilde mantık yürüttüğünü bilirler ve benzer şekilde ilerleyen tıpkı Morgenstern’in Sherlock-Moriarty örneğindeki gibi sonsuz bir inanç hiyerarşisi söz konusu olur. Harsanyi bu çalışmasında sonsuz inanç hiyerarşilerini ilk defa resmi olarak tanıtmış ve formülleştirmiştir.

Daha sonra (1967-68)’deki çalışmasında inanç hiyerarşilerini kendisinin tanıttığı bir çeşit oyun olan eksik bilgili oyunlarda, yani oyuncuların faydalar ya da seçenekler hakkında yetersiz bilgiye sahip oldukları oyunlarda, kullanmıştır. Önce eksik bilgili oyunların sadece faydalar hakkında yetersiz bilgiye sahip olunan oyunlara nasıl indirgenebileceğini göstermiş ve ardından bu tip oyunların analizinde inanç hiyerarşilerinden yararlanmıştır. Oyuncuların, rakiplerinin faydalar hakkındaki inançlarını, rakiplerin rakiplerinin faydalar hakkındaki inançları hakkındaki inançlarını ve benzer şekilde ilerleyen sonsuz inanç hiyerarşisini modelleyerek bunu başarmıştır. Bu modellemeyi kendi geliştirdiği bir yöntem olan *türler* (types) yardımıyla gerçekleştirmiştir (Perea, 2013). Tür yapıları, inanç hiyerarşilerini oluşturmak için alternatif bir yol teşkil etmektedir (Dekel ve Siniscalchi, 2015:7).

Harsanyi, eksik bilgili oyunların analizinde türleri şu şekilde kullanmıştır: Oyuncuların sahip olduğu türler hem kendi faydaları hakkındaki inançlarını içerir hem de diğer oyuncuların türleri ve bu türlerin olasılıkları hakkındaki inançlarını içerir. Bu şekilde oyuncu kendi türlerinin içinde bulunan diğer oyuncuların türleri hakkındaki inançlarını kullanarak onların faydalarının ne olduğu hakkındaki inancını hesaplayabilmektedir. Dahası diğer oyuncuların türlerine atadığı olasılıklar ile onların oyuncunun türleri hakkındaki inançlarını hesaplayabilmekte ve dolayısıyla onların oyuncunun faydaları hakkındaki inançları hakkındaki inançlarını hesaplayabilmektedir. Bu şekilde ilerlendiğinde olasılıklar bir sonuca yığılmaya başlar (Aumann, 1987:80).

Kısacası Harsanyinin eksik bilgili oyunlarda kullanılması için tanıttığı türler, oyuncuların faydalar hakkındaki inançlarını, oyuncuların rakiplerinin faydalar hakkındaki inançlarına olan inançlarını ve benzer şekilde sonsuz bir şekilde genişleyen inançları, olasılıklar yardımıyla kodlamak için kullanılmıştır.

Harsanyinin temelini oluşturduğu inanç hiyerarşileri sonradan epistemik oyun kuramının geliştirilmesinde kilometre taşı olmuştur. Çünkü Harsanyinin bu çalışmasından sonra artık oyun kuramcıları sonsuz inanç hiyerarşilerini basit ve elverişli bir şekilde -detaylı olarak yazma yöntemine gerek kalmadan- kullanabilmiştir (Perea, 2013).

Harsanyi inanç hiyerarşilerini türler ile kodlamayı başardıktan sonra inanç hiyerarşileri o kadar yaygın kullanılmıştır ki bir nevi epistemik oyun kuramının dili haline gelmiştir (Perea, 2018). Harsanyinin çıkarımları olmasaydı epistemik oyun kuramının yükselişi çok daha zor olabilirdi. Buna rağmen Harsanyi her ne kadar yaklaşmış olsa da epistemik oyun kuramını başlattığı söylenemez. Onun ilgilendiği konu, oyunun temel yapısındakilerle yani faydalar ve seçenekler ile ilgiliydi (Brandenburger, 2014:xxiii). Her ne kadar tıpkı Nash gibi Harsanyi de rakip seçimleri hakkındaki belirsizliklerle ilgilenmemiş olsa da literatüre kazandırdığı türler, ileride kendi kullandığından çok daha güçlü bir şekilde kullanılarak rakip seçimleri hakkındaki belirsizlikler için de uyarlanmış ve bu şekilde epistemik oyun kuramı alanını başlatan çalışmalar arasında gösterilen makaleler yazılmıştır (Brandenburger, 2008).

1979 yılında yayımlanan iki makalede (Böge ve Eisel, 1979; Armbruster ve Böge, 1979) Harsanyinin tanıttığı türler, ilk defa rakip seçimlerine olan inançları temsil etmesi için uyarlanmıştır. Bu model, epistemik oyun kuramında kullanılan genel modeldir. Bu modele göre her oyuncunun inançlarını temsil eden farklı türleri vardır. Bu türler hem rakibin inançlarını temsil eden türleri ve olasılıklarını içerir hem de -Harsanyinin türlerinden farklı olarak- rakibin bu inançlarına göre seçeceğine inanılan *seçeneği* içerir (Perea, 2012:125). Örneğin: Oyuncu, rakibinin en yüksek faydasının bulunduğu seçeneğini seçeceğine inanıyorsa, oyuncunun bu inancını temsil eden türleri, rakibin sahip olduğuna inandığı türler ile birlikte bu seçeneği de içerir ve toplamda 1 olasılığına sahip olur. Bu olasılık, oyuncunun rakibin başka seçeneklerini seçeceğine inanmadığını sadece en yüksek faydasının bulunduğu seçeneği seçeceğine inandığını temsil eder.

3.1.8. Epistemik Oyun Kuramındaki Çözüm Yöntemlerinin Genel İşleyişi

Epistemik oyun kuramında oyuncu, beklenen faydasını maksimize etmeye çalışır. Bunu yapabilmek için rakibin seçeneklerini seçme olasılıklarına inancını belirlemelidir ve bu olasılıklara göre beklenen faydasının en yüksek olduğu seçeneği seçmelidir. Ancak oyuncu, rakibinin seçeneklerini seçme olasılıklarına sonsuz farklı şekilde olasılık atayabilir. Anahtar soru: Rakip seçimlerine sonsuz farklı şekilde atanabilecek olasılıklara nasıl bir kısıtlama getirilmelidir? Epistemik oyun kuramının ilgilendiği konu bu soruya takdir edilebilir cevaplar sağlamaktır (Brandenburger, 2014:xx-xxi).

Epistemik oyun kuramı, oyunculara oyun sırasında yapmaları gerekenler hakkında tavsiye vermek yerine farklı mantık yürütme yollarını sunar. Mantık yürütmenin en doğru yolu olduğunu reddederek sezgisel mantık yürütmenin spektrumunu tanımlar ve bu yüzden tanımlayıcı (descriptive) bir kuramdır. Bu spektrumda yer alan yollardan birisine göre yapılan rasyonel seçim diğerine göre irrasyonel olabilir. Ancak bu durum, kullanılan yollardan herhangi birinin diğerinden daha mantıklı olduğu anlamına gelmez sadece farklı yolların farklı biçimde mantığa sahip olduğu anlamına gelir.

Öte yandan klasik oyun kuramı normatif[8] (normative) yaklaşım kullanmaktadır. Spesifik bir mantık yürütme yoluna göre normatif açıklamalar yapar ve epistemik oyun kuramından farklı olarak oyuncunun o yolu kullanması gerektiğini tavsiye eder. Başka bir deyişle klasik oyun kuramındaki çözüm yöntemlerinde oyuncu, farklı şekillerde atayabileceği rakibinin seçeneklerini seçme olasılıklarını sadece bir yöntem ile kısıtlar. Hatta maximin yönteminde "rakip ne yaparsa yapsın" düşüncesiyle hiç kısıtlama koyulmaz. Bu durumda oyuncunun sadece rasyonel seçim yaptığı ve ötesi olmayan bir varsayım edinilmiş olur (Perea, 2012:2).

Epistemik oyun kuramı karakteristik özelliğini bir adım daha ileri gidip sadece oyuncunun rasyonel olduğuna değil ayrıca oyuncunun rakiplerinin rasyonel olduğuna inanmasıyla kazanır.

[8] Normatif, normlara uyan, önceden belirlenmiş kalıplar içinde olan demektir (TDK).

Böylece i oyuncusu, j'nin seçeneklerini seçme olasılıklarını atayıp buna göre rasyonel seçim yapması söz konusuyken aynı zamanda j'nin seçeneklerini seçme olasılıklarına atadığı her pozitif olasılık için j için de i'nin seçeneklerini seçme olasılıklarını mümkün gördüğü şekliyle atayıp buna göre rasyonel seçim yaptığına dair inancını oluşturması gerekir. Başka bir deyişle i öyle bir inanç oluşturmalıdır ki bu inanç, j'nin i hakkındaki inançlarına göre rasyonel seçim yaptığında seçeceği seçeneklerin olasılıklarına olan inancı içermelidir. Sonra i, inandığı bu olasılıklara göre kendi rasyonel seçimini yapar. Bu noktada matematiksel bir yapı oluşturulması ihtiyacı doğmuştur. Bu yapı, oyuncuların rakiplerinin rasyonel seçim yapacağına dair olan inançlarına göre rasyonel seçim yapmalarını içermelidir. Yani i ve j rasyonel seçim yapmaktadır aynı zamanda rakiplerinin rasyonel seçim yapacaklarına inanmaktadır.

Bu doğrultuda ilerlendiğinde (i rasyoneldir, j'nin rasyonel olduğuna inanmaktadır, j'nin kendisinin (i'nin) rasyonel olduğuna inandığına inanmaktadır, ...) bir oyuncunun sonsuz farklı şekilde oluşturulabileceği inanç hiyerarşisini, "rasyonellik" kavramı ile kısıtlayabileceğini görebiliriz (Brandenburger, 2014:xx-xxi).

3.1.9. Rasyonelliğe Ortak İnanç Kavramının Doğuşu

Herkes herkesin rasyonel olduğuna inanıyor, herkes herkesin herkesin rasyonel olduğuna inandığına inanıyor... Bu durum, rasyonelliğe ortak inancı temsil etmektedir (Dekel ve Siniscalchi, 2015:12). Oyunlara uyarlandığında, "oyuncuların, rakiplerinin rasyonelliğine inancı" durumuna ortak inancın olmasını ifade eder. Peki ortak inanç nedir?

Ortak inanç ve ortak bilginin tanımı ilk defa sosyolog Friedell (1967, 1969) ve filozof Levis (1969) tarafından yapıldıktan sonra Nobel ödüllü oyun kuramcısı Aumann (1976) aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

"İki kişi, 1 ve 2, E olayı hakkında ortak bilgiye sahip oldukları söylenebilir eğer ikisi de E olayını biliyorsa, 1 2'nin bildiğini biliyorsa, 2 1'in bildiğini biliyorsa, 1 2'nin 1'in bildiğini biliyorsa ... örneğin E olayı yaşandığında 1 ile 2 buna şahit olup orada birbirlerini o an görmüşlerse bu olay ortak bilgidir."

Aumann'ın bu çalışması epistemik oyun kuramının doğuşuna sebep olan çalışmalardan birisidir.

1979'da yayımlanan iki makalede (Böge ve Eisel, 1979; Armbruster ve Böge, 1979) ortak inanç hakkında yapılan çalışmalardan yola çıkılarak ilk defa rasyonelliğe ortak inancın resmi tanımı yapılmıştır (Perea, 2013). Tan ve Werlang (1988)'de bu gelişmeler ile rasyonelliğe ortak inancı türleri kullanarak ilk defa detaylı olarak formülleştirmiştir ve *epistemik oyun kuramının temel teoremini* oluşturmuştur. Bu teoremde kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan elde edilen sonuçların tam olarak rasyonelliğe ortak inanç altında yapılabilecek seçimler olduğu gösterilmiştir (Bonanno, 2012).

Rasyonelliğe ortak inanç epistemik oyun kuramının merkezi düşüncesini teşkil etmektedir. Bu alanda yer alan diğer çözüm yöntemleri rasyonelliğe ortak inancın bir varyasyonu veya geliştirilmiş halidir. Epistemik oyun kuramının gelişim sürecinde Harsanyinin inanç hiyerarşilerini modellemesi bir kilometre taşı olarak ifade edildi. İnanç hiyerarşileri kullanılarak tanımlanan rasyonelliğe ortak inanç ise bu alanın köşe taşıdır. Çözüm yöntemlerinin karakterize edilmesinde bu kavram kullanılır. Bu yüzden bir nevi epistemik oyun kuramının çekirdeğindedir (Perea, 2013). Epistemik oyun kuramı oluştuğu yandan bu yana çoğunlukla oyuncuların hangi seçeneklerinin rasyonelliğe ortak inançla uyumlu olduğuna odaklanmıştır (Brandenburger, 2014:xxi).

3.2. Epistemik Oyun Kuramının Matematiksel Temelleri

Geçen bölümde epistemik oyun kuramının doğuşu ve gelişimi temel kavramlarla beraber anlatıldı. Bu bölümde ise bir örnek üzerinden bu kavramların resmi tanımlamalarına ve bazı teoremlere yer verilecektir.[9]

3.2.1. Örnek: Yolcunun Çıkmazı

İlk defa Kaushik Basu'nun (1994)'deki makalesinde tanıttığı yolcunun çıkmazı (traveler's dilemma) oyununun basitleştirilmiş bir versiyonu aşağıda yer almaktadır.

> *İki yolcu yurt dışındayken birer tane birbirinin aynısı olan vazo satın almıştır. Dönüş yaptıklarında ikisi de aldıkları bu vazoların bagajdayken hasar gördüğünü fark etmiş ve bu yüzden havayolu yöneticisinden tazminat talep etmiştir. Yönetici tazminat ödemekten mutluluk duyacağını söylemiştir. Ancak vazoların fiyatı hakkında bir fikri yoktur ve yolculara da soramaz çünkü fırsattan istifade edip yüksek fiyat söyleyebilirler. Bunun yerine farklı bir yol izleyip yolculardan birbirleriyle konuşmayarak vazonun fiyatını bir kâğıda yazıp kendisine vermesini istemiş ve 2 ile 6 bin lira arasında tazminat talep edebileceklerini belirtmiştir. Ayrıca diğer yolcudan düşük tazminat talep eden kişiye ekstradan 2 bin lira tazminat vereceğini ve yüksek tazminat talep eden kişiye ise düşük yolcunun talebinden 2 bin lira düşük vereceğini söylemiştir. Aynı miktarda tazminat talep ettiklerinde ise o miktarı ödeyecektir.*

Bu hikâyede yolcuların verecekleri kararlar, birbirlerinden etkileneceği için bir oyun durumu söz konusudur. Bu oyun; iş birliği yapılamadığı için, birbirlerinin seçimlerini göremedikleri için ve seçeneklerle faydalar tüm oyuncular tarafından bilindiği için 2-oyunculu, işbirliksiz, statik ve tam bilgili bir oyundur. Oyunun normal-form gösterimi şekil 3.1.'de verilmiştir.

[9] Tanımlar ve teoremlerin sunuluşunda, Andres Perea'nın 2012'de yayımladığı ve epistemik oyun kuramı alanının ilk kitabı olma özelliği taşıyan "Epistemic Game Theory: Reasoning and Choice" 'dan yararlanılmıştır.

		2. Yolcu				
		2 bin	**3 bin**	**4 bin**	**5 bin**	**6 bin**
1. Yolcu	**2 bin**	(2,2)	(4,0)	(4,0)	(4,0)	(4,0)
	3 bin	(0,4)	(3,3)	(5,1)	(5,1)	(5,1)
	4 bin	(0,4)	(1,5)	(4,4)	(6,2)	(6,2)
	5 bin	(0,4)	(1,5)	(2,6)	(5,5)	(7,3)
	6 bin	(0,4)	(1,5)	(2,6)	(3,7)	(6,6)

Şekil 3.1. Yolcunun çıkmazı oyununun normal-form gösterimi

Bu bölüm boyunca oyunlar için genelleştirilmiş resmi tanımlamalar yapılırken konuların daha iyi kavranabilmesi amacıyla yolcunun çıkmazı oyunundan yararlanılacaktır.

3.2.2. Rakiplerin Seçimleri Hakkında İnanç

Herhangi bir oyunda, oyuncuları 1'den n'e kadar numaralandırdığımızda $I = \{1, 2, ..., n\}$ oyuncular setini temsil eder. Her $i \in I$ oyuncusu için C_i, i oyuncusunun seçenek seti olur. Belli bir i oyuncusunun *rakipleri*; i oyuncusu hariç bütün oyuncular, yani 1, ..., i -1, i +1, ..., n oyuncuları olur. i'nin rakiplerinin herhangi bir *seçenek-kombinasyonu* bir listedir ve rakiplerin seçeneklerinden

$$(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$$

şeklinde oluşur. Burada $c_1 \in C_1$, ..., $c_{i-1} \in C_{i-1}$, $c_{i+1} \in C_{i+1}$, ..., $c_n \in C_n$ olmaktadır. Böylelikle, seçenek-kombinasyonu her j oyuncusu için bir $c_j \in C_j$ seçeneği tanımlar.

$$C_1 \text{ x ... x } C_{i\text{-}1} \text{ x } C_{i+1} \text{ x ... x } C_n$$

ile rakiplerin mümkün bütün (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) seçenek-kombinasyonları ifade edilir. *i* oyuncusunun rakiplerinin seçimleriyle ilgili olan *inancı*, rakiplerinin bütün seçenek-kombinasyonlarına olasılık atar. Daha resmi olarak, *i* oyuncusunun rakiplerinin seçimleriyle ilgili olan inancı, C_1 x ... x $C_{i\text{-}1}$ x C_{i+1} x ... x C_n seti üzerinde *olasılık dağılımı* b_i ‘dir ve bütün rakiplerin seçenek-kombinasyonları (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) ϵ C_1 x ... x $C_{i\text{-}1}$ x C_{i+1} x ... x C_n ‘e birer

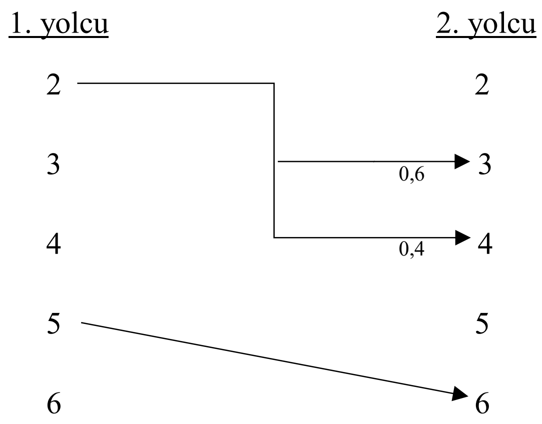
$$b_i\,(c_1, ..., c_{i\text{-}1}, c_{i+1}, ..., c_n) \geq 0$$

olasılığı atar. Bütün b_i (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) olasılıklarının toplamı 1’e eşit olmalıdır. b_i inancı, rakiplerin farklı seçenek-kombinasyonlarına pozitif olasılıklar atayabileceği gibi özel bir seçenek-kombinasyonuna 1 olasılığı da atayabilir.

Tanım 1 *(Rakiplerin seçimleriyle ilgili olan inanç)*

*i oyuncusunun **rakiplerinin seçimleriyle ilgili olan inancı**, rakiplerin seçenek-kombinasyonlarının seti olan* C_1 *x ... x* $C_{i\text{-}1}$ *x* C_{i+1} *x ... x* C_n *üzerinde olasılık dağılımı* b_i *‘dir. Her seçenek-kombinasyonu* (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) *için* b_i (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) *olasılığı, i oyuncusunun rakiplerinin tam olarak* (c_1, ..., $c_{i\text{-}1}$, c_{i+1}, ..., c_n) *seçenek-kombinasyonuna uygun seçim yapacakları durumuna atadığı olasılığı ifade eder.*

Yolcunun çıkmazı örneğinde oyuncu setini $I = \{1, 2\}$ ile ifade edelim. 1. yolcunun seçeneklerinin seti C_1={2, 3, 4, 5, 6} ve 2. yolcunun seçeneklerinin seti ise C_2={2, 3, 4, 5, 6} olsun. Bu oyun tek rakipli bir oyun olduğu için Tanım 1’de verilen “rakiplerin seçenek-kombinasyonlarının seti C_1 x ... x $C_{i\text{-}1}$ x C_{i+1} x ... x C_n”, 1. yolcu için C_2={2, 3, 4, 5, 6}’ya eşittir.



Şekil 3.2. Yolcunun çıkmazı oyunu için bir inanç diyagramı

Şekil 3.2.'deki inanç diyagramında 1. yolcunun birbirinden bağımsız iki tane inancı oklarla ifade edilmiştir. 1. yolcunun "5" seçeneğinden 2. yolcunun "6" seçeneğine giden ok, 1. yolcunun rakibinin "6" seçmesine dair olan inancına 1 olasılığını atadığını temsil etmektedir. Bu ok, $b_1(6)=1$ ve geri kalan bütün $c_2 \in C_2$ seçenekleri için $b_1(c_2)=0$ olan C_2 üzerindeki bir olasılık dağılımı b_1'i temsil eder. 1. yolcunun "2" seçeneğinden 2. yolcunun 0,6 olasılıkla "3" ve 0,4 olasılıkla "4" seçeneğine giden çatallı ok ise 1. yolcunun $b_1(3)=0,6$; $b_1(4)=0,4$ ve $b_1(1)=b_1(2)=b_1(5)=b_1(6)=0$ olan olasılıksal inancı b_1'i temsil eder.

3.2.3. Fayda Fonksiyonu

Oyun kuramının temellerinde; oyuncular, seçenekler ve faydalar vardır. Oyuncular ve seçenekler yukarıda tanımlandı. Şimdi *fayda fonksiyonu* kavramı üzerinde durulacaktır. Bir sonucun gerçekleşmesinden elde edilen *fayda*, oyuncuların tatmin derecesi ölçüsüdür. Örneğimizde 1. yolcu "5" seçeneğini ve 2. yolcu "6" seçeneğini seçtiğinde 1. yolcunun faydası 7 olur ve $u_1(5,6)=7$ ile ifade edilir. Anlamı, 1. yolcunun "5" ve 2. yolcunun "6" seçeneğini seçtiği (5,6) seçenek-kombinasyonu, 1. yolcuya 7 faydasını sağlar demektir.

Genelleştirirsek, bütün seçenek-kombinasyonları $(c_1, ..., c_n)$'in setini C_1 x ... x C_n ile ifade edelim ve $c_1 \in C_1, ..., c_n \in C_n$ olsun. Bir fayda fonksiyonu, bütün seçenek-kombinasyonlarına rakamlar atar ve bu rakamlar verilen seçenek-kombinasyonu gerçekleştiğinde oyuncunun edineceği faydayı temsil eder.

Tanım 2 *(Fayda fonksiyonu)*

i oyuncusunun ***fayda fonksiyonu*** *u_i öyle bir fonksiyondur ki bütün seçenek-kombinasyonları $(c_1, ..., c_n)$'e birer $u_i\ (c_1, ..., c_n)$ rakamı atar. $u_i\ (c_1, ..., c_n)$ rakamı, $(c_1, ..., c_n)$ seçenek-kombinasyonundan oluşan sonuçtan i oyuncusunun elde ettiği faydayı ifade eder.*

Eğer her *i* oyuncusuna bir C_i seçenek seti ve u_i fayda fonksiyonu tanımlarsak bir *statik oyun* elde ederiz.

Tanım 3 *(Statik oyun)*

Bir ***statik oyun*** *$\Gamma = (C_1, ..., C_n, u_1, ..., u_n)$, her i oyuncusuna bir C_i seçenek seti ve bir fayda fonksiyonu u_i tanımlar.*

3.2.4. Optimal ve Rasyonel Seçenek

i oyuncusunun, rakiplerinin seçimleri hakkında bir b_i inancına ve u_i fayda fonksiyonuna sahip olduğunu düşünelim. Bu durumda, *i* oyuncusunun her seçeneği için bir *beklenen faydası* oluşmaktadır. Yolcunun çıkmazı örneğimizde 1. yolcu rakibi hakkında $b_1(3)=0{,}6$; $b_1(4)=0{,}4$ ve $b_1(1)=b_1(2)=b_1(5)=b_1(6)=0$ olan b_1 inancıyla "2" seçeneğini seçtiğinde beklenen faydası

$$u_1(2, b_1) = b_1(3)\ .\ u_1(2,3) + b_1(4)\ .\ u_1(2,4)$$

$= (0,6) . (4) + (0,4) . (4)$

$= 4$

olarak hesaplanır. Beklenen faydayı resmi olarak tanımlayabilmek için $C_{-i} := C_1 \text{ x } ... \text{ x } C_{i-1} \text{ x } C_{i+1} \text{ x } ... \text{ x } C_n$ kısaltmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Yani, *i*'nin rakiplerinin seçenek-kombinasyonlarının seti kısaca C_{-i} ile ifade edilir.

Tanım 4 *(Beklenen fayda)*

i oyuncusu u_i fayda fonksiyonuna ve rakiplerinin seçimleri hakkında b_i inancına sahip olsun. i oyuncusunun c_i seçeneğini seçmesinden ***beklenen faydası*** *aşağıdaki gibi hesaplanır.*

$$u_i(c_i, b_i) = \sum_{(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) \in C_{-i}} b_i(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) \,.\, u_i(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n)$$

Yukarıdaki ifadeden şu anlaşılabilir: Rakiplerinin seçimleri hakkında b_i inancına sahip *i* oyuncusunun c_i seçimini yaptığını düşünelim. O halde, *i* oyuncusu rakiplerinin herhangi bir $(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$ seçenek-kombinasyonunun gerçekleşmesini $b_i(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n)$ olasılığıyla beklemektedir. Bu olasılığın gerçekleşmesi durumunda sonuç $(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n)$ olur ve *i* oyuncusu $u_i(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n)$ faydasını elde eder.

Beklenen fayda tanımlandığına göre şimdi *optimal seçenek* ve *rasyonel seçenek* de tanımlanabilir. Eğer *i* oyuncusu rakiplerinin seçimleri hakkında belli bir inanca sahip olursa bu inanca göre mümkün en yüksek beklenen faydaya sahip c_i seçeneği *optimal* olur. c_i seçeneği, rakiplerin seçimleri hakkında edinilen herhangi bir inanca göre optimal ise *rasyonel* seçenektir.

Tanım 5 *(Optimal ve rasyonel seçenek)* *(a) i oyuncusu u_i fayda fonksiyonuna ve rakiplerinin seçimleri hakkında b_i inancına sahip olsun. c_i^* seçeneği i oyuncusunun b_i inancına göre beklenen faydasını maximize ediyorsa **optimal**dir. Yani c_i^*, C_i seti içindeki bütün diğer c_i seçenekleri için*

$$u_i\,(c_i^*,\, b_i) \geq u_i\,(c_i\,,\, b_i)$$

olmalıdır.

*(b) i oyuncusu u_i fayda fonksiyonuna sahip olsun. Bir c_i^* seçeneği i oyuncusunun herhangi bir b_i inancına göre optimal ise **rasyonel** olur.*

Örneğimizde 1. yolcunun $b_1(6)$ =1 olan b_1 inancına göre "5" seçeneği optimaldir. Çünkü 1. yolcunun bu inancına göre seçeneklerinin beklenen faydaları $u_1(2, b_1) = 4$, $u_1(3, b_1) = 5$, $u_1(4, b_1) = 6$, $u_1(5, b_1) = 7$, $u_1(6, b_1) = 6$'dır. Bunlar arasında beklenen faydasının en yüksek olduğu seçeneğinin "5" olduğu görülebilir. Benzer şekilde 1. yolcunun $b_1(3)=0{,}6$; $b_1(4)=0{,}4$ ve $b_1(1)=b_1(2)=b_1(5)=b_1(6)=0$ olan b_1 inancına göre "2" seçeneği optimaldir. Bu bilgiler Şekil 3.2.'deki inanç diyagramında da görülebilir. Bir inanç diyagramında okun çıktığı seçeneğin her zaman okun temsil ettiği inanca göre optimal olması gerekmektedir. İrrasyonel seçeneklerden çıkan oklar inanç diyagramına yerleştirilemez.

3.2.5. Kesin Domine Edilen Seçenek İrrasyoneldir

Örneğimiz için 1. yolcunun iki farklı seçim stratejisini düşünelim. Birincisinde "6" seçeneğini seçsin. İkincisinde karma seçim yaparak "2" seçeneğini 0,3 olasılıkla ve "5" seçeneğini 0,7 olasılıkla seçsin. Rakibin bütün seçim durumları için hesaplandığında ikinci seçim stratejisinin birinciden daha yüksek beklenen faydaya sahip olduğunu Şekil 3.3.'de görebiliriz. Yani rakibi ne yaparsa yapsın 1. oyuncunun “6” seçeneği hiçbir zaman optimal olamaz çünkü “2” ile “5” seçeneklerinin (0,3; 0,7) olasılıklarıyla karması her durumda “6” seçeneğinden fazla fayda sağlar. Bu durumda “6” seçeneği *kesin domine edilen seçenek* olur. 1. yolcu için “6” seçeneğini seçmek hiçbir zaman optimal olamadığı için irrasyoneldir.

				2. yolcu				
		Strateji	**Olasılık**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. yolcu	**2. durum**	**2**	0,3	2.(0,3) + 0.(0,7) =2,3	4.(0,3) + 1.(0,7) =1,9	4.(0,3) + 2.(0,7) =2,6	4.(0,3) + 5.(0,7) =4,7	4.(0,3) + 7.(0,7) =6,1
		5	0,7					
	1. durum	**6**	1	=0	=1	=2	=3	=6

Şekil 3.3. Farklı stratejilerine göre 1. yolcunun beklenen faydaları

Tanım 6 *(Karma seçim ve beklenen faydası)*

*(a) i oyuncusu için bir **karma seçim**, C_i seçenekler seti üzerinde olasılık dağılımı r_i'dir. Her c_i seçeneği için $r_i(c_i)$ rakamı, c_i seçeneğinin seçilme olasılığını ifade eder.*

*(b) i oyuncusu r_i karma seçimini yaptığında ve rakipleri $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ seçeneklerini seçtiğinde **karma seçimin beklenen faydası** aşağıdaki gibi hesaplanır.*

$$u_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, r_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) = \sum_{c_i \in C_i} r_i(c_i) \cdot u_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

Tanım 7 *(Kesin domine edilen seçenek)*

(a) i oyuncusunun bir c_i seçeneği ***başka bir c_i' seçeneği tarafından kesin domine edilmişse*** *rakiplerinin her seçenek-kombinasyonu (c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır*

$$u_i\,(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) < u_i\,(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i', c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

(b) i oyuncusunun bir c_i seçeneği ***bir karma seçeneği r_i tarafından kesin domine edilmişse*** *rakiplerinin her seçenek-kombinasyonu (c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n) için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır*

$$u_i\,(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) < u_i\,(c_1, \ldots, c_{i-1}, r_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

(c) i oyuncusunun bir c_i seçeneği başka bir seçeneği tarafında kesin domine edilmişse veya başka bir karma seçeneği tarafından kesin domine edilmişse ***kesin domine edilmiştir****.*

Teorem 1 (*Rasyonel seçimlerin tanımlanması*)

Bir statik oyundaki rasyonel seçenekler ne başka bir seçenek tarafından kesin domine edilebilen ne de bir karma seçenek tarafından kesin domine edilebilen seçeneklerdir.

Bir oyundaki rasyonel ve irrasyonel seçenekler tespit edilmek istendiğinde Teorem 1 çok kullanışlı olmaktadır. Örneğimizde, 1. yolcu rakibinin “2” seçeceğine inanıyorsa optimal seçeneği “2” olur. Bu yüzden 1. yolcunun “2” seçeneği kesin domine edilemez. Benzer şekilde rakibin “3” seçeceğine inanıyorsa optimal seçeneği yine “2” olur. Rakibin “4” seçeceğine inanıyorsa optimal seçeneği “3” olur. Rakibinin “5” seçeceğine inanıyorsa optimal seçeneği “4” olur. Rakibin “6” seçeceğine inanıyorsa optimal seçeneği “5” olur. Ancak 1. yolcunun “6” seçeneği rakibin hiçbir seçimine göre optimal değildir çünkü Şekil 3.3.’de gösterildiği gibi “6” seçeneği yerine her zaman daha yüksek beklenen faydaya sahip başka bir (karma) seçeneği mevcuttur. Bu yüzden “6” seçeneği, rakip hakkında edinilebilecek herhangi bir inanca göre optimal olmadığı için irrasyoneldir.

3.2.6. Rakiplerin Rasyonelliğine İnanç

Oyuncunun rakiplerinin davranışlarıyla ilgili herhangi bir inancına göre optimal olan seçeneğe rasyonel seçenek dendi. Bir irrasyonel seçeneği seçmenin sezgisel olarak mantıksız olduğu söylenebilir çünkü rakiplerin seçimleri hakkında edinilebilecek hiçbir inanca göre desteklenemez. Asıl soru: Her rasyonel seçenek aynı zamanda *mantıklı* mıdır? Cevap: Hayır. Çünkü rakiplerin davranışlarıyla ilgili mantıksız inançlar edinilmişse bu inanca göre yapılan rasyonel seçimin kendisi de mantıksız olur. Bu bölümde buraya kadar olan kısımda rakipler hakkında edinilen inançların mantıklı olup olmamasıyla ilgilenilmeyerek sadece kısıtlama olmadan rakip hakkındaki inançlar üzerinde duruldu. Ancak bu noktadan sonra rakip seçimleri hakkındaki inançlara mantıklı kısıtlamalar konulmaya başlanacaktır.

Eğer oyuncu rakiplerinin rasyonel seçim yapacağına inanıyorsa, rakiplerinin seçimleri hakkındaki b_i inancı sadece onların rasyonel olan seçeneklerine pozitif olasılık atamalıdır. Bir j rakibinin c_j seçeneğini seçmesinin rasyonel olması demek j’nin rakiplerinin seçimleriyle ilgili inancı b_j’ye göre c_j seçeneğinin optimal olması demektir.

Tanım 8 (*Rakiplerin rasyonelliğine inanç*)

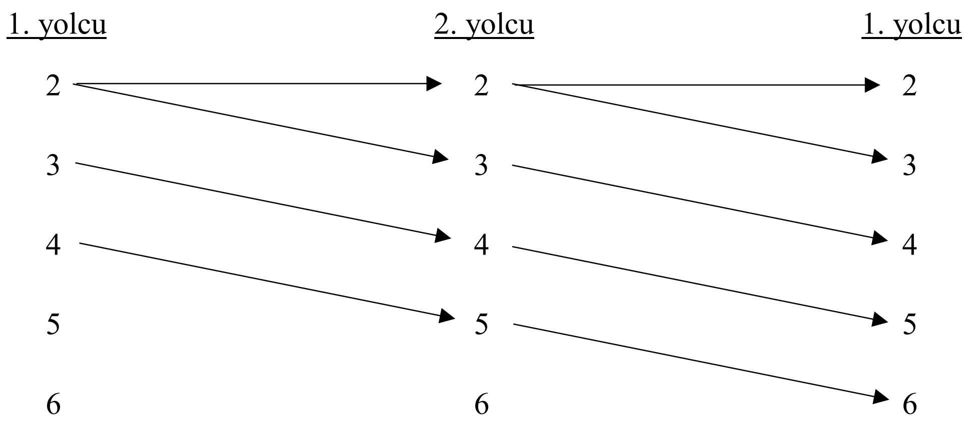
i oyuncusu rakiplerinin seçimleri hakkında bir b_i inancına sahip olsun. O halde; eğer i oyuncusunun b_i inancı, rakiplerinin sadece herhangi bir inançlarına göre rasyonel seçeneklerini içeren ($c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n$) seçim-kombinasyonlarına pozitif olasılık atıyorsa i oyuncusu ***rakiplerinin rasyonelliğine inanıyordur****. Bu durumda b_i,* ***rakiplerin rasyonelliğine inancı temsil eder*** *denir.*

Bu tanım yapıldığına göre artık *i* oyuncusunun rakiplerinin rasyonelliğine inanırken rasyonel seçim yapması da tanımlanabilir. Basitçe anlamı, *i* oyuncusu öyle bir c_i seçimi yapıyor ki bu seçim rakiplerin rasyonelliğine inancını temsil eden b_i inancına göre optimaldir.

Tanım 9 (*Rakiplerin rasyonelliğine inanç altında rasyonel seçim*)

Eğer i oyuncusunun rakiplerinin seçimleri hakkında bir b_i inancı, rakiplerin rasyonelliğine inancı temsil ediyorsa ve bu inanca göre optimal olan c_i seçeneğini seçiyorsa bu seçim ***rakiplerinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel*** *yapılmış bir seçimdir.*

Örneğimizde 1. yolcunun rakibinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel seçimleri Şekil 3.4.'de görselleştirildiği gibi “2”, “3” ve “4” ‘dür. Önceden oyuncular için neden “6” seçeneğinin hiçbir zaman rasyonel olamayacağı anlatıldı. Şekil 3.4.'de 2. yolcunun rasyonel seçimleri arasında bu yüzden “6” seçeneği yoktur. Benzer bir hesapla 1. yolcu rakibinin rasyonel seçeneklerini seçeceğine inandığında (rakibinin rasyonelliğine inandığında) bu inancına göre kendisinin “5” seçeneğini kesin domine eden karma seçeneklerinin mevcut olduğu bulunabilir. Bu karma seçeneklerden birisi $r_1(2)=0{,}3$ ve $r_1(4)=0{,}7$ ‘dir. Bu yüzden 1. yolcunun rakibinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel yapabileceği seçimler arasında “5” seçeneği de yoktur.



Şekil 3.4. Yolcunun çıkmazı oyununda 1. yolcunun rakibin rasyonelliği inancı altında rasyonel seçim yaptığı inanç diyagramı

Rakiplerin rasyonelliği inancı altında rasyonel seçeneklerin neler olduğunun belirlenmesi için iki farklı yöntem kullanılır. Birincisi, Şekil 3.4.'deki gibi bir inanç diyagramından yararlanılan **grafiksel metot**, ikincisi ise kesin domine edilen stratejilerin 2-katlı eliminasyonunu gerçekleştiren **algoritmadır**.

Grafiksel Metot (*Ok metodu*)

Bir i oyuncusu için bir c_i *seçeneği düşünelim. Eğer inanç diyagramında* c_i *seçeneğinden çıkıp rakibin sadece rasyonel seçeneklerine giden bir ok varsa o zaman i oyuncusu rakiplerin rasyonelliğine inanarak* c_i *seçeneğini rasyonel olarak seçebilir. Eğer böyle bir inanç diyagramı oluşturulamıyorsa o halde i oyuncusu rakiplerin rasyonelliğine inanarak* c_i *seçeneğini rasyonel olarak seçemez.*

Algoritma (*Kesin domine edilen stratejilerin 2-katlı eliminasyonu*)

1. adım: Her oyuncu için de kesin domine edilen stratejileri ele.

2. adım: İndirgenmiş oyunda, her oyuncu için de kesin domine edilen stratejileri ele.

Grafiksel metot, belli bir i oyuncusu için rakiplerin rasyonelliği inancı altında irrasyonel seçenekleri verirken yukarıda tanımlanan algoritma ile bu her oyuncu için bulunur. Bu bakımdan algoritma yöntemi üstündür. Grafiksel metodun üstün yanı ise i oyuncusunun rakiplerin rasyonelliği inancı altında spesifik olarak rasyonel seçeneklerini de vermesidir. Algoritma yönteminde rakibin hangi seçeneğine göre oyuncunun hangi seçeneğinin rasyonel olduğunu göstermek yerine sadece rakip hakkındaki herhangi bir inanca göre hangi seçeneklerin rasyonel olduğu gösterilir. Bu yüzden iki yöntemin de üstün ve zayıf yanları olduğu söylenebilir.

Örneğimiz üzerinden açıklayacak olursak Şekil 3.4.'de verilen inanç diyagramında grafiksel metot uygulandığında 1. yolcunun rakibinin rasyonelliği inancı altında seçebileceği irrasyonel seçenekleri "5" ve "6" olarak tespit edilebilirken 2. yolcu için bu tespit yapılamamaktadır. Ancak Şekil 3.5.'de kesin domine edilen seçeneklerin 2-katlı eliminasyonunu gerçekleştiren algoritma yönteminin sonucunda iki oyuncu için de "5" ve "6" seçeneklerinin elendiği görülebilir. Öte yandan grafiksel metotla 1. yolcunun rakibinin hangi rasyonel seçimlerine göre hangi rasyonel seçimleri yapabileceği görülebilirken algoritma yönteminde bu seçimler belli değildir.

1. adım

(2,2)	(4,0)	(4,0)	(4,0)
(0,4)	(3,3)	(5,1)	(5,1)
(0,4)	(1,5)	(4,4)	(6,2)
(0,4)	(1,5)	(2,6)	(5,5)

2. adım

(2,2)	(4,0)	(4,0)
(0,4)	(3,3)	(5,1)
(0,4)	(1,5)	(4,4)

Şekil 3.5. Yolcunun çıkmazı oyununda kesin domine edilen stratejilerin 2-katlı eliminasyonu

3.2.7. Rakiplerin İnançları Hakkındaki İnançlar

Rakipler hakkında edinilen bir inancın mantıklı olduğu nasıl anlaşılabilir? Buraya kadar bu sorunun bir kısmı cevaplandı. Kısaca, mantıklı bir seçimin sadece rasyonel olması değil aynı zamanda rakipler hakkında edinilen mantıklı bir inanca göre de desteklenmesi gerektiği söylendi. Bu inanç rakiplerin rasyonel seçimler yapacağını içermelidir. Ancak hikâye burada bitmemektedir. Çünkü oyuncunun rakiplerin rasyonelliğine inancını temsil eden inançlarının her zaman mantıklı olduğu söylenemez. Örneğin Şekil 3.4.'deki inanç diyagramında görülebileceği gibi 1. yolcu rakibinin rasyonel seçim yapacağına inanarak "6" seçeneğini seçmeyeceği sonucuna varıyor. Peki, 2. yolcu da kendi rakibi için aynı inancı oluşturunca ne olur? Rakibinin “6” seçeneğini seçmeyeceği sonucuna varır ve bu yüzden kendi de “5” seçeneğini seçmez. Bu noktada 1. yolcu, 2. yolcunun rakibinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel seçim yapacağı inancını oluşturmuş olur ve 1. yolcunun bu inancına göre “4” seçeneği de bir başka karma seçeneği tarafından kesin domine edildiği için rasyonel olamaz.

Benzer şekilde bir basamak daha çıkıldığında 1. yolcunun “3” seçeneği de rasyonel olamaz. İnançların bu şekilde kademeli olarak inşa edilmesine *inanç hiyerarşisi* denir. İnanç hiyerarşisine sahip bir oyuncu, rakipler hakkında inanca sahiptir, rakiplerin rakiplerinin inançları hakkında inançlara sahiptir ve bu şekilde devam eder. Bu inançlar rakiplerin rasyonelliği ile ilgiliyse, yani oyuncu,

- rakiplerin rasyonelliğine inanıyorsa,
- rakiplerin rakiplerinin rasyonelliğine inandığına inanıyorsa,
- rakiplerin rakiplerinin rakiplerinin rasyonelliğine inandığına inandığına inanıyorsa,
- ...

bu tip inanç hiyerarşilerinin *rasyonelliğe ortak inancı* temsil ettiği söylenir. Örneğimizde oyuncuların rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel yapabilecekleri tek seçim “2” ‘dir.

İnanç hiyerarşileri karmaşıklığı sebebiyle üzerinde çalışması zor bir konudur. Bu yüzden matematiksel olarak ifade etmenin yolları aranmıştır. Bu yollardan birisi tür-tabanlı yaklaşımdır.

3.2.8. Türler

Oyuncuların sahip olduğu türler sadece rakiplerin seçimlerine olan inançların bilgilerini içermekle kalmaz aynı zamanda rakiplerin türlerine olan inançların bilgilerini de içerir ve “ t ” ile ifade edilir. Herhangi bir i oyuncusunun sahip olduğu türlerin tamamını

$$T_i = \{ C_{-i} \times T_{-i} \} = \{ t_i^1, t_i^2, t_i^3 \ldots \}$$

kümesi içermektedir. Oyuncular sonsuz sayıda türe sahip olabileceği gibi tek bir türe de sahip olabilir. Oyuncunun türleri, sahip olduğu farklı akıl durumları olarak düşünülebilir. İki oyunculu bir oyunda *i* oyuncusunun sahip olduğu bir t_i türünü düşünelim. Bu tür, *i* oyuncusunun rakibinin seçeceğine inandığı seçeneklerin olasılıklarını ve rakibinin bu seçimi hangi inancıyla, yani t_j türüyle, yapacağına olan inancı içereceği için

$$t_i = \{ (C_j \times t_j) \} = \{ (c_j^1, t_j), (c_j^2, t_j), (c_j^3, t_j), \ldots (c_j^{|cj|}, t_j) \}$$

kümesinden oluşur. *i* oyuncusunun t_i türü ile ifade ettiği inancının gerçekleşme olasılığına olan inancı ise $b_i(t_i) \in \Delta (C_j \times t_j)$ ile ifade edilir.

3.2.8.1 Rakibin rasyonelliğine inancın türlerle ifade edilmesi

Rakibin rasyonelliğine inanç konusu yolcunun çıkmazı oyunu üzerinden geçen bölümlerde anlatıldı. Kısaca, 1. yolcu rakibinin rasyonel olduğuna inandığı için irrasyonel olan "6" seçeneğini seçmesine olan inancına 0 olasılık vermişti. Şimdi 1. yolcunun rakibinin rasyonelliğine inancı, türler üzerinden açıklanacaktır. 1. yolcu *i* ve 2. yolcu *j* olmak üzere seçenek setleri $C_i = \{ c_i^2, c_i^3, c_i^4, c_i^5, c_i^6\}$ ve $C_j = \{ c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6\}$ olsun (örneğin c_i^2, *i*'nin "2 bin" seçeneğini temsil eder).

i oyuncusunun rakibinin rasyonelliğine inancını temsil eden dört tane tür oluşturmalıyız çünkü *j* oyuncusu rakip hakkında bir inanca sahip olmadan rasyonel olarak sadece dört tane seçenek seçebilir ("6 bin" seçeneği kesin domine edildiği için hiçbir zaman rasyonel olamaz). Bu seçenekleri seçmesine olan inançları temsil edecek olan *i* oyuncusunun türleri de bu yüzden $T_i = \{ t_{i1}^1, t_{i1}^2, t_{i1}^3, t_{i1}^4 \}$ dört tanedir. Bu türlerin her biri rakibin seçeceğine inanılan seçenekleri ve rakibin hangi inançla bu seçimleri yaptığı inancını içerir. Ancak burada *i* oyuncusunun sadece rakibinin rasyonelliğine inancını türlerle modellediğimiz için rakibin inancı hakkında herhangi bir inanç bilgisi yoktur. Bu yüzden t_{i1} türleri rakip türlerini içermez sadece rakibin seçeneklerini içerir.

t türünün alt indisinde yer alan 1 ifadesi o türün 1-katlı inancı temsil ettiğini gösterir. 1-katlı inanç, rakip hakkında edinilen inancı temsil eder. Örneğimizde, *i* oyuncusunun rakibinin rasyonelliğine inancı 1-katlı inançtır. Rakibin rakibinin rasyonelliğine inancı hakkındaki inanç 2-katlı inançtır ancak bu konuya daha sonra değinilecektir.

t_{i1} inançları;

$t_{i1}^1 = \{C_j\} = \{c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6\}$,

$t_{i1}^2 = \{C_j\} = \{c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6\}$,

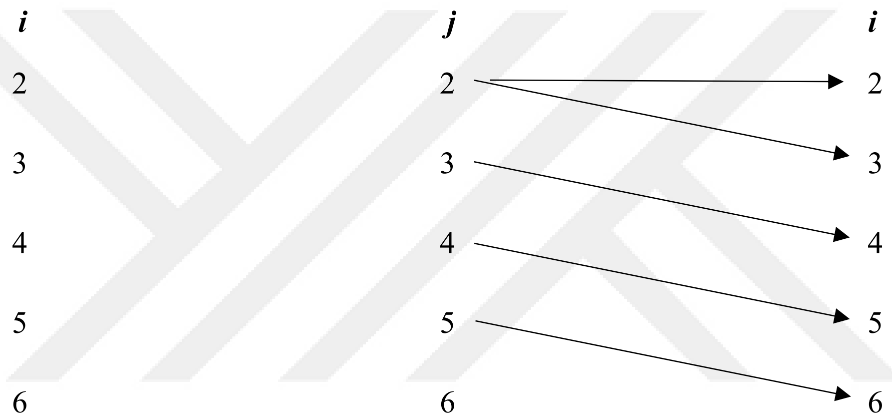
$t_{i1}^3 = \{C_j\} = \{c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6\}$,

$t_{i1}^4 = \{C_j\} = \{c_j^2, c_j^3, c_j^4, c_j^5, c_j^6\}$

olarak tanımlanabilir. Bu inançların birbirinden farkı, kümelerinde bulunan her $c_j \in C_j$ rakip seçeneklerine farklı $(b_i(t_i))(c_j)$ olasılıkları (t_i türüne göre c_j seçiminin yapılacağının olasılığına olan inanç) atanmasıdır.

i oyuncusunun *j* oyuncusunun rakip hakkındaki inancı hakkında inancı olmaması demek *j*'nin rakibinin seçeneklerini hangi olasılıklarla seçeceğine dair inancı hakkında inanç olmaması demektir. Eğer *i*'nin böyle bir inancı olduğu durum modellenmeye çalışılsaydı t_{i2} türleri rakip türlerini de içerecekti. Örneğin, $t_{i2}^1 = \{(C_j \text{ x } t_{j1})\} = \{(c_j^2, t_{j1}), (c_j^3, t_{j1}), (c_j^4, t_{j1}), (c_j^5, t_{j1}), (c_j^6, t_{j1})\}$ olacaktı. Ancak *i*'nin tek bir inancı vardır o da rakibinin rasyonel seçim yapacağıdır.

i, *j*'nin rasyonel seçim yapacağına inandığında karma seçim değil tek bir seçim yapacağına inanmış olur. Çünkü *j*, *i* hakkında hangi inanca sahip olursa olsun sonuç olarak tek bir seçeneğini seçmiş olacağını bilir ve Şekil 3.6.'da gösterildiği gibi *j*'nin bu seçeneklere göre rasyonel seçebileceği birer seçeneği vardır. O seçenekler de beklenen faydasını maksimize eden seçeneklerdir. Başka bir deyişle *i*, rakibinin rasyonel seçim yapacağına inandığında aynı zamanda karma seçim yapmayacağına da inanmış olur çünkü *j*'nin tüm rakip seçimlerine göre beklenen faydasını maksimize eden birer seçeneği vardır (Bu çalışmanın asıl konusu olan faydayla orantılı inançlar, bu noktada farklılık göstermektedir. Kısaca; *i*, rakibinin faydasıyla orantılı seçim yapacağına inandığında seçeneklerini faydalarıyla orantılı bir şekilde karma olarak seçebileceğine de inanmış olur. Faydayla orantılı inançlar konusu gelecek kısımda anlatılacaktır).



Şekil 3.6. Yolcunun çıkmazı oyununda rakibin rasyonelliğine inanan *i* oyuncusunun inanç diyagramı

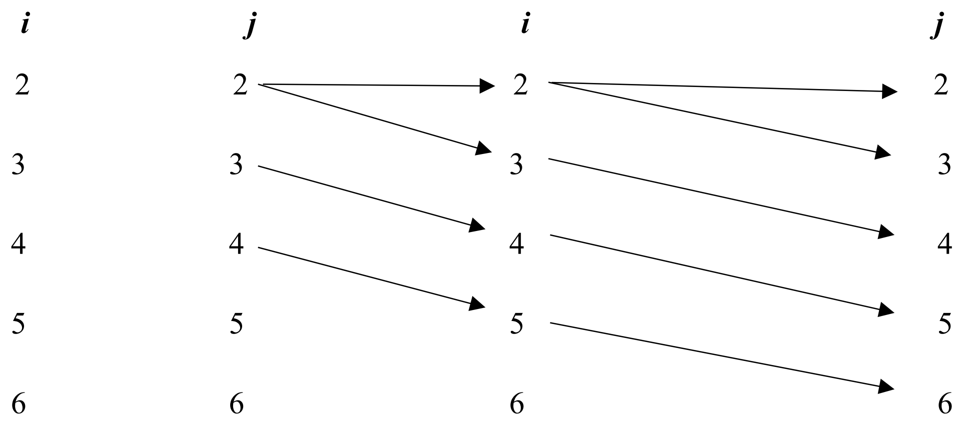
i oyuncusunun türlerinin, rakibinin rasyonelliğine inancını temsil etmesi için olasılıklarının bu inançla Şekil 3.7.'deki gibi uyumlu atanması gerekmektedir.

	c_j^2	c_j^3	c_j^4	c_j^5	c_j^6
t_{i1}^1	$(b_i(t_{i1}^1))(c_j^2)=1$	$(b_i(t_{i1}^1))(c_j^3)=0$	$(b_i(t_{i1}^1))(c_j^4)=0$	$(b_i(t_{i1}^1))(c_j^5)=0$	$(b_i(t_{i1}^1))(c_j^6)=0$
t_{i1}^2	$(b_i(t_{i1}^2))(c_j^2)=0$	$(b_i(t_{i1}^2))(c_j^3)=1$	$(b_i(t_{i1}^2))(c_j^4)=0$	$(b_i(t_{i1}^2))(c_j^5)=0$	$(b_i(t_{i1}^2))(c_j^6)=0$
t_{i1}^3	$(b_i(t_{i1}^3))(c_j^2)=0$	$(b_i(t_{i1}^3))(c_j^3)=0$	$(b_i(t_{i1}^3))(c_j^4)=1$	$(b_i(t_{i1}^3))(c_j^5)=0$	$(b_i(t_{i1}^3))(c_j^6)=0$
t_{i1}^4	$(b_i(t_{i1}^4))(c_j^2)=0$	$(b_i(t_{i1}^4))(c_j^3)=0$	$(b_i(t_{i1}^4))(c_j^4)=0$	$(b_i(t_{i1}^4))(c_j^5)=1$	$(b_i(t_{i1}^4))(c_j^6)=0$

Şekil 3.7. Yolcunun çıkmazı oyununda rakibin rasyonelliğine inanan *i* oyuncusunun türlerinin içerdiği olasılıklar

Görüldüğü gibi *i* oyuncusunun rakibin rasyonelliğine inancını temsil eden türlerinin sahip olduğu olasılıklar atanmıştır. Ancak bu türlerin gerçekleşme olasılıkları olan $b_i(t_{i1})$'ler hakkında bir yorum yapılamaz çünkü *j*'nin rakibinin seçimlerine olan inancı hakkında *i*'nin bir inancı yoktur. Başka bir deyişle, $b_i(t_{i1})$ olasılıkları belirlenseydi rakibin rasyonel seçimlerinin olasılıkları da hesaplanabilirdi. Bu durumda *j*'nin *i* hakkındaki inancı da hesaplanabilirdi çünkü *j*, *i* hakkındaki inancına göre rasyonel seçimler yapacaktır ve *j*'nin rasyonel seçiminin olasılıkları belirlenirse *i*'nin seçimleri hakkındaki inancı da belirlenebilir. Halbuki modellemeye çalıştığımız konu "*i* oyuncusunun rakibinin rasyonel seçim yapmasına inancı" 'dır. *i* oyuncusunun rakibinin inancı hakkında bir inancı yoktur.

3.2.8.2 Rakibin rakibinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel seçim yapmasına inancın türler ile ifade edilmesi



Şekil 3.8. Yolcunun çıkmazı oyununda rakibin rakibinin rasyonelliğine inanarak rasyonel seçim yapacağına inanan *i* oyuncusunun inanç diyagramı

Yolcunun çıkmazı oyununda *i* oyuncusunun *j* oyuncusunun rakibinin rasyonelliğine inancı altında rasyonel seçim yapacağına inandığı durumu temsil eden türleri $T_i = \{ t_{i2}^1, t_{i2}^2, t_{i2}^3, t_{i2}^4 \}$ kümesi ifade etsin. *i* oyuncusunun mümkün gördüğü *j* oyuncusunun rakibinin rasyonelliğine inancını temsil eden türlerini de $T_j(t_i) = \{ t_{j1}^1, t_{j1}^2, t_{j1}^3, t_{j1}^4\}$ kümesi ifade etsin.[10]

$t_{i2}^1 = \{(C_j \text{ x } t_{j1}^1)\} = \{(c_j^2, t_{j1}^1), (c_j^3, t_{j1}^1), (c_j^4, t_{j1}^1), (c_j^5, t_{j1}^1), (c_j^6, t_{j1}^1)\}$

$t_{i2}^2 = \{(C_j \text{ x } t_{j1}^2)\} = \{(c_j^2, t_{j1}^2), (c_j^3, t_{j1}^2), (c_j^4, t_{j1}^2), (c_j^5, t_{j1}^2), (c_j^6, t_{j1}^2)\}$

$t_{i2}^3 = \{(C_j \text{ x } t_{j1}^3)\} = \{(c_j^2, t_{j1}^3), (c_j^3, t_{j1}^3), (c_j^4, t_{j1}^3), (c_j^5, t_{j1}^3), (c_j^6, t_{j1}^3)\}$

$t_{i2}^4 = \{(C_j \text{ x } t_{j1}^4)\} = \{(c_j^2, t_{j1}^4), (c_j^3, t_{j1}^4), (c_j^4, t_{j1}^4), (c_j^5, t_{j1}^4), (c_j^6, t_{j1}^4)\}$

t_{i2}^1, rakibin C_j seçeneğini t_{j1}^1 türüne sahip olarak seçeceğine inancını temsil eder. t_{j1}^1 türünün, *j*'nin rakibinin "2" seçimi yapacağına olan inancını temsil ettiğini geçen başlıktan biliyoruz. t_{i2}^1'in temsil ettiği: *j* oyuncusu bu inancına göre rasyonel seçeneği c_j^2'yi seçeceğine olan inançtır.

[10] Geçen başlıkta, yolcunun çıkmazı oyununda rakibin rasyonelliğine inancını temsil eden türlerin içerdiği olasılıkların atanması gösterildiği için bu bölümde tekrar değinilmeyecektir. Şekil 3.7.'de " *i* " ile " *j* " lerin yerlerinin değiştirilerek yazılması yeterlidir.

Bu yüzden $(b_i(t_{i2}^1))(c_j^2 \mid t_{j1}^1) = 1$ olarak atanmalıdır. $(b_i(t_{i2}))(c_j \mid t_{j1})$ olasılığı, *i* oyuncusunun t_{i2} inancına göre *j* oyuncusu t_{j1} inancına sahip olduğunda seçeneklerini seçme olasılığıdır.

	c_j^2	c_j^3	c_j^4	c_j^5	c_j^6
t_{i2}^1	$(b_i(t_{i2}^1))(c_j^2 \mid t_{j1}^1)=1$	$(b_i(t_{i2}^1))(c_j^3 \mid t_{j1}^1)=0$	$(b_i(t_{i2}^1))(c_j^4 \mid t_{j1}^1)=0$	$(b_i(t_{i2}^1))(c_j^5 \mid t_{j1}^1)=0$	$(b_i(t_{i2}^1))(c_j^6 \mid t_{j1}^1)=0$
t_{i2}^2	$(b_i(t_{i2}^2))(c_j^2 \mid t_{j1}^2)=1$	$(b_i(t_{i2}^2))(c_j^3 \mid t_{j1}^2)=0$	$(b_i(t_{i2}^2))(c_j^4 \mid t_{j1}^2)=0$	$(b_i(t_{i2}^2))(c_j^5 \mid t_{j1}^2)=0$	$(b_i(t_{i2}^2))(c_j^6 \mid t_{j1}^2)=0$
t_{i2}^3	$(b_i(t_{i2}^3))(c_j^2 \mid t_{j1}^3)=0$	$(b_i(t_{i2}^3))(c_j^3 \mid t_{j1}^3)=1$	$(b_i(t_{i2}^3))(c_j^4 \mid t_{j1}^3)=0$	$(b_i(t_{i2}^3))(c_j^5 \mid t_{j1}^3)=0$	$(b_i(t_{i2}^3))(c_j^6 \mid t_{j1}^3)=0$
t_{i2}^4	$(b_i(t_{i2}^4))(c_j^2 \mid t_{j1}^4)=0$	$(b_i(t_{i2}^4))(c_j^3 \mid t_{j1}^4)=0$	$(b_i(t_{i2}^4))(c_j^4 \mid t_{j1}^4)=1$	$(b_i(t_{i2}^4))(c_j^5 \mid t_{j1}^4)=0$	$(b_i(t_{i2}^4))(c_j^6 \mid t_{j1}^4)=0$

Şekil 3.9. Yolcunun çıkmazı oyununda rakibin rakibinin rasyonelliği inancı altında rasyonel seçim yaptığına inanan *i* oyuncusunun türlerinin içerdiği olasılıklar

Şekil 3.9.'da görüldüğü gibi *i*, rasyonelliğe 2-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin "5" seçimi yapmasına da hiç olasılık atamamıştır. Yani *i*, *j*'nin rakibinin rasyonelliğine inanarak rasyonel olacağına inandığında "5" ve "6" seçimi yapmayacağına inanmış olur. Çünkü bu inancını temsil eden hiçbir türü bu seçeneklerin seçilmesine olasılık atamaz.

Bu başlıktan çıkarılması gereken en önemli ders, inanç hiyerarşilerini modellemek için kullanılan türlerin ne kadar işlevsel olduğudur. Öyle ki, *i* oyuncusunun rasyonelliğe 2-katlı inancını temsil eden türlerin bulunması için rakibinin rasyonelliğe 1-katlı inancını temsil eden türler kullanılmıştır. Örneğin: *i* oyuncusunun rasyonelliğe 2-katlı inancını temsil eden t_{i2}^4 türünün içerdiği olasılıkların atanabilmesi için rakibinin t_{j1}^4 türünün neye inandığını bilmek yeterlidir. *j* oyuncusunun t_{j1}^4 türü rakibinin "5" seçeceğine inanmaktadır. O halde, t_{i2}^4 türü rakibin bu inancına göre rasyonel olan "4" seçimini yapacağına inanır. Yani t_{i2}^4'ün şu şekilde uzun bir inanç oluşturmasına gerek kalmaz: *j* oyuncusu rakibinin rasyonelliğine inandığı için rakibinin rakibinin "6" seçmesi durumunda rakibinin rasyonel olan "5" seçeneğini seçmesine inanır ve *j* oyuncusunun bu inancına göre rasyonel olan "4" seçimini yapacağına t_{i2}^4 türü inanır. Bunun yerine t_{i2}^4 türü rakibinin t_{j1}^4 inancına sahip olduğunda rasyonel olan "4" seçimi yapacağına inanır denilebildiği için türlerin kullanışlılığı anlaşılabilir. İnanç hiyerarşisi basamakları çıkıldıkça türlerin bu özelliği çok daha büyük önem taşır.

Bu başlık altında *i*'nin rasyonelliğe 2-katlı inancını temsil eden türleri atanmıştır. Bu işlem *j*'nin rasyonelliğe 1-katlı inancını temsil eden türlerine pozitif olasılıklar atanarak gerçekleştirilmiştir. Benzer şekillerde sırasıyla *i*'nin rasyonelliğe 3-katlı ve 4-katlı inançlarını temsil eden türler hesaplandığında geriye sadece 1 olasılıkla rakibinin "2" seçeneğini seçeceği türü kalacaktır. Sonrasında inanç hiyerarşisi basamakları çıkıldıkça sadece rasyonel olarak oyuncuların "2" seçeneğini seçebileceklerini temsil eden türler elde edilecektir. Bu türe *rasyonelliğe ortak inancı* temsil eden tür denir.

3.2.9. Rasyonelliğe Ortak İnanç

Herkes herkesin rasyonel olduğuna inanıyor, herkes herkesin herkesin rasyonel olduğuna inandığına inanıyor, ... Oyuncu bu inanç durumundaysa rasyonelliğe ortak inanca sahiptir. Bu kavram resmi olarak tanımlanmadan önce bazı başka tanımlamalar yapılmalıdır.

Tanım 10 (*Epistemik model*)

Bir ***epistemik model*** *her i oyuncusu için* T_i *tür seti tanımlar. Dahası, her i oyuncusu ve her* $t_i \in T_i$ *için rakiplerin seçenek-tür kombinasyonlarının seti*

$$(C_1 \times T_1) \times \ldots \times (C_{i-1} \times T_{i-1}) \times (C_{i+1} \times T_{i+1}) \times \ldots \times (C_n \times T_n)$$

üzerinde $b_i\ (t_i)$ *olasılık dağılımını belirler.* $b_i\ (t_i)$*, rakiplerin seçimleri ve türleri hakkındaki inançları içeren* t_i *türünün olasılık dağılımını temsil eder.*

Tanım 11 (*Bir tür için optimal seçenek*)

Bir epistemik model içinde i oyuncusunun t_i *türünü düşünelim. Eğer* c_i*,* t_i*'nin rakiplerin seçenek-tür kombinasyonları hakkındaki ilk-sıra inancına göre optimalse* c_i *seçeneği* t_i *türü için optimaldir.*

Tanım 11, belli bir c_i seçeneğinin t_i türü için optimal olup olmadığı kontrol edilirken kullanılır. Sadece t_i türünün ilk-sıradaki inancı için kontrol etmek yeterli olacaktır. Başka bir deyişle t_{ik} türü i oyuncusunun k-katlı inancını temsil ettiğinde rakibin (k-1)-katlı inancına göre c_i'nin optimal olup olmadığının kontrol edilmesi yeterli olacaktır.

Tanım 12 (*Rakiplerin rasyonelliğine inancını içeren tür*)

Bir epistemik model içinde i oyuncusunun t_i türünü düşünelim. Eğer t_i türü rakipler için sadece c_1 seçeneği için optimal olan t_1 türünü, ... , c_n seçeneği için optimal olan t_n türünü içeren

$$((c_1, t_1), \ldots, (c_{i-1}, t_{i-1}), (c_{i+1}, t_{i+1}), \ldots, (c_n, t_n))$$

*seçenek-kombinasyonlarına pozitif olasılık atarsa t_i türü **rakiplerin rasyonelliğine inanıyor**dur.*

Tanım 12 ile artık t_i türünün rakiplerin rakiplerinin rasyonelliğine inandığına inanmasının tanımı yapılabilir. Anlamı, t_i türü her rakibinin öyle bir türe sahip olduğuna inanıyor ki bu türler rakiplerinin rasyonelliğine inanıyor demektir. Bu durumda t_i türünün rasyonelliğe 2-katlı inancı olduğu söylenir. Benzer şekilde rasyonelliğe 3-katlı, 4-katlı, ..., k-katlı inançları temsil eden türler de oluşturulabilir.

Tanım 13 (*Rasyonelliğe k-katlı inanç*)

Bir epistemik model düşünelim.

(*1*) *t_i, rakiplerin rasyonelliğine inanıyorsa **rasyonelliğe 1-katlı inancı** temsil eder.*

(*2*) *t_i, rakiplerin 1-katlı inancını içeren türlere pozitif olasılık atıyorsa **rasyonelliğe 2-katlı inancı** temsil eder.*

(*3*) *t_i, rakiplerin 2-katlı inancını içeren türlere pozitif olasılık atıyorsa **rasyonelliğe 3-katlı inancı** temsil eder.*

ve benzer şekilde devam eder.

Bu şekilde yinelemeli olarak her *k* rakamı için rasyonelliğe *k*-katlı inancı tanımlayabiliriz. Eğer t_i türü rasyonelliğe 1-katlı, 2-katlı, ..., *k*-katlı inancı temsil ediyorsa t_i türünün rasyonelliği k-katlı inanca kadar temsil ettiği söylenebilir. Şimdi rasyonelliğe ortak inancın resmi tanımını yapabiliriz.

Tanım 14 (*Rasyonelliğe Ortak İnanç*)

*Bir epistemik model düşünelim. Her k rakamı için rasyonelliğe k-katlı inancı temsil eden t_i türü **rasyonelliğe ortak inancı** temsil eder.*

Tanım 15 (*Rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim*)

Eğer bir epistemik model içinde bulunan t_i türü:

(*1*) *rasyonelliğe ortak inancı temsil ediyorsa ve*

(*2*) *c_i seçeneği t_i türü için optimalse*

*i oyuncusu c_i seçimini **rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel** olarak yapabilir.*

Rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olarak yapılabilecek her seçim, kesin domine edilen seçenekleri yinelemeli olarak elememizden geriye kalan seçeneklerden elde ederiz. Bu yönteme *kesin domine edilen seçeneklerin yinelemeli eliminasyonu* denir.

Algoritma 2 (*Kesin domine edilen seçeneklerin yinelemeli eliminasyonu*)

1. adım: *Orijinal oyundan kesin domine edilen seçenekleri ele.*

2. adım: *1. adımdan sonra elde edilen indirgenmiş oyundan kesin domine edilen seçenekleri ele.*

3. adım: *2. adımdan sonra elde edilen indirgenmiş oyundan kesin domine edilen seçenekleri ele.*

⋮

ve benzer şekilde devam edilir.

Teorem 2 (*Epistemik oyun kuramının temel teoremi*)

Her oyuncunun sonlu sayıda seçeneğe sahip olduğu bir statik oyun düşünelim.

(*1*) *Her k ≥ 1 için rasyonelliğe k-katlı inancı temsil ederek yapılabilecek rasyonel seçimler, kesin domine edilen seçeneklerin* (*k*+1)*-katlı eliminasyonundan geriye kalan seçeneklerden yapılır.*

(*2*) *Kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan geriye kalan seçenekler, rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel yapılabilecek seçeneklerdir.*

Teorem 2, epistemik oyun kuramının temel teoremidir ve farklı şekillerde kanıtlanmıştır (Brandenburger, 2014:xxiv). Yolcunun çıkmazı oyunu için rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel yapılabilecek seçenekleri Algoritma-2 ile aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

(2,2)	(4,0)	(4,0)	(4,0)
(0,4)	(3,3)	(5,1)	(5,1)
(0,4)	(1,5)	(4,4)	(6,2)
(0,4)	(1,5)	(2,6)	(5,5)

(2,2)	(4,0)	(4,0)
(0,4)	(3,3)	(5,1)
(0,4)	(1,5)	(4,4)

(2,2)	(4,0)
(0,4)	(3,3)

(2,2)

Şekil 3.10. Yolcunun çıkmazı oyununda kesin domine edilen seçeneklerin yinelemeli eliminasyonu

4. FAYDAYLA ORANTILI İNANÇLAR

Oyun kuramı karmaşık bilmecelerle doludur ve çoğu zaman bu bilmecelerin çözümleri hakkında fikir ayrılıkları oluşmaktadır. Bilmeceler ve fikir ayrılıkları deneylerle veya matematiksel ifadelerle ilgili değil ancak temel kavramların anlamlarıyla ve bu konudaki belli tartışmaların akla uygunluğuyla ilgilidir. Bu kavramlardan birisi de rasyonelliktir (Bacharach, 1997:317).

Herhangi bir oyunda oyuncuların amacı en yüksek faydayı getirecek seçeneği seçmektir. Bu yüzden en yüksek beklenen faydaya sahip olan -rasyonel- seçeneği seçerler ve rakiplerinin de aynısını yapacağına inanırlar. Peki rakipleri hakkında oluşturdukları bu inanç, onların kesin olarak rasyonel seçim yapacaklarına inanmak mı demektir yoksa yüksek olasılıkla rasyonel seçim yapacaklarına inanmak mı? Başka bir deyişle oyuncu, rakiplerinin rasyonel seçeneklerini seçme inancını temsil eden olasılıklara 1 mi atamalıdır yoksa diğer seçeneklerden yüksek olasılık mı atamalıdır? Rasyonelliğe ortak inanç kavramı ilk ifadeye göre oluşturulmuştur. Ancak gerçek hayat oyuncularının daha yakın olduğu tedbirli mantığa (cautious reasoning) sahip bir oyuncu ikinci ifadeye göre seçim yapar.

		j oyuncusu		
		sol	orta	sağ
i oyuncusu	ÜST	5, 5	0, 4	2, 1
	ALT	4, 5	4, 4	1, 2

Şekil 4.1. Faydayla orantılı inançlar örneği

Tedbirli mantığa göre irrasyonel seçenekler tamamen hesap dışı bırakılamaz. Şekil 4.1.'de yer alan örnekte *j* oyuncusunun tek rasyonel seçeneği "sol" 'dur. Çünkü *i* oyuncusu hangi seçimi yaparsa yapsın "sol" seçeneği en yüksek fayda getirir. *i* oyuncusu rakibinin rasyonelliğine inandığında en yüksek fayda getirecek seçeneği ise "ÜST" 'tür. Ancak *i* oyuncusu rakibinin kesin olarak rasyonel seçim yapacağından şüphe duyarak rakibinin neredeyse “sol” kadar faydaya sahip “orta” seçimini yapabileceğine de ihtimal verebilir. Bu durumda “ALT” seçimini yapması daha tedbirli olacaktır. Bir nevi yüksek fayda ile düşük risk takas edilmiş olur. Bu şekilde yürütülen tedbirli mantığa gerçek hayatta daha çok rastlanmaktadır (Nauerz, 2016).

Oyun kuramında tedbirli mantığın düşüncesini yakalayan kavramlardan birisi faydayla orantılı inançlardır. Bu kavram, Christian W. Bach ve Andres Perea’nın 2014 yılında yayımladıkları “Utility Proportional Beliefs” başlıklı makalede tanıtılmıştır. İrrasyonel seçeneklerin seçilmesine olan inançlara da pozitif olasılıklar atayan bu kavram, olasılıklara önemli bir kısıtlama koyar: Oyuncunun rakibinin seçeneklerini seçme inancını temsil eden olasılıklar, seçeneklerin rakibine sağladığı faydalarla orantılı atanmalıdır. Başka bir deyişle olasılıklar arasındaki farklar, faydalar arasındaki farklarla orantılı olmalıdır. Oyuncu, rakibinin seçenekleri arasındaki rakibine yüksek faydalar sağlayacak seçeneklere düşüklerden daha büyük olasılıklar atayarak faydayla orantılı inançlarını oluşturur. “Oyuncuların faydayla orantılı inançlara sahip olmasına” ortak inanç olması durumuna da faydayla orantılı inançlara ortak inanç denir.

Faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramında, oyuncular sadece faydayla orantılı inançlar edinmez aynı zamanda rakiplerinin de edindiğine inanır, rakiplerinin rakiplerinin edindiğine inandığına inanır...

4.1. Rasyonelliğe İnanç Yerine Faydayla Orantılı İnanç

Epistemik oyun kuramının amaçlarından birisi; oyuncuların, rakiplerinin hangi seçeneklerini seçeceklerine dair oluşturabilecekleri inançlarını takdir edilebilir yollarla kısıtlamaktır. Bu yollardan birisi önceki kısımda detaylı olarak anlatılan, rakibin rasyonelliğe ortak inanca sahip olduğu inancını oluşturmaktır. Bu kavram her ne kadar ideal bir mantık içerse de gerçek hayat oyuncularının mantığıyla uyuşmadığı gözlenmiştir. Peki bu kavramı gerçek hayat oyuncularının mantığına yaklaştırmak için ne yapılabilir?

İlk akla gelen, oyuncuların sonsuz sayıda inanç basamağını gerçekleştirdiği varsayımını gevşetmektir. İkincisi, rakibin kesin olarak rasyonel davranacağına dair inanç zayıflatılabilir. İkinci yoldan giderek rasyonelliğe inanç yerine daha gerçekçi bir kavram olan faydayla orantılı inançlar kullanıldığında tatmin edici sonuçlarla karşılaşılmıştır. Çünkü faydayla orantılı inançlar oluşturarak inanç basamakları çıkıldığında bir noktadan sonra olasılıkların tek bir noktaya yığıldığı keşfedilmiştir. Başka bir deyişle, faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncuların rakipleri hakkında edinebileceği tek bir inanç vardır. Bu yüzden sonsuz sayıda inanç basamağı gerçekleştirilmesine de gerek de kalmaz. Ayrıca faydayla orantılı inançlar kavramı deneylerle ve sezgilerle daha tutarlıdır.

Geçen kısımda detaylı olarak anlatılan rasyonelliğe ortak inanç kavramı için, araştırmacıların "epistemik oyun kuramının çekirdeği" veya "köşe taşı" gibi ifadelerine yer verildi. Ayrıca epistemik oyun kuramının temel teoreminde bulunan kavram olduğu söylendi. Gerçekten de rasyonelliğe ortak inanç kavramı epistemik oyun kuramının merkezindedir ve bu alandaki diğer çözüm yöntemleri, rasyonelliğe ortak inanç kavramının bir varyasyonudur. Bu yöntemlerden birisi olan faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramı rasyonelliğe ortak inanç kavramının uygulamalarda bazen sezgisel sonuçlar vermemesinden dolayı bir çözüm olarak sunulmuştur.

Rasyonelliğe ortak inanç kavramının gerçek hayat problemlerinde sezgisel sonuçlar vermediği örneklerden birisi yolcunun çıkmazı oyunudur. Geçen kısımda tanımlanan yolcunun çıkmazı oyununda bu sefer oyuncuların [1, 10] bin aralığında seçim yapabildiğini düşünelim. Bu oyunda rasyonelliğe ortak inanç bize oyuncuların en düşük olan "1" seçeneğini seçmesini söyler. Bu sonuç deneylerle ve sezgilerle çatışmaktadır. Çünkü her ne kadar mantıklı bir şekilde açıklanabilse de gerçek hayatta oyuncular genelde bütün inanç hiyerarşisi basamaklarını gerçekleştirmez ve dolayısıyla "1" seçimini yapmazlar. Ayrıca oyuncunun oyundan elde edebileceği mümkün faydaları içinde neredeyse en düşük faydayı elde etmesine sebep olacak bir seçeneği seçmesinin pek de sezgisel olduğu söylenemez. Ancak faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramı ile çözüm yapan Perea ve Bach'ın yöntemi (PB yöntemi) ile "6" seçilmesi gerektiği hesaplanmıştır. Bunun sebebi: Oyuncuların taleplerini temsil eden seçeneklerine, talebin büyüklüğüne göre büyük olasılıklar atandığı için küçük taleplerin kötü performans göstermesidir. Faydayla orantılı inançlar kavramı yüksek fayda ile düşük fayda arasındaki orantısal farkı ayırt edebilirken rasyonelliğe inanç kavramı basitçe beklenen faydanın en yüksek olduğu seçime odaklanır.

4.2. Literatür Taraması

Faydayla orantılı inançlar kavramının altında yatan düşünce Perea ve Bach'ın (2014)'deki çalışmasından önce de kullanılmıştır. Robert Rosenthal (1989)'da geliştirdiği "*t*-solution" isimli çözüm yönteminde oyuncuların sadece rasyonel seçimler yapmayabileceği düşüncesini formülleştirilmiştir. *t*-solution yönteminin bu tezin konusu olan PB metodundan farkı, oyuncu inançlarının yanlış olabileceğinin hesaba katılmamasıdır. Bu bakımdan PB metodu gerçek hayat karar vericilerinin mantığına daha yakındır çünkü rakipler hakkında yanlış inanca sahip olunması gerçek hayatta sıkça karşılaşılan bir durumdur.

Daha iyi seçeneklerin daha iyi olasılıklara sahip olması gerektiği düşüncesine McKelvey ve Palfreyin (1995)'deki çalışmasında bulunan "quantal response equilibrium" yönteminde de rastlanmaktadır. Bu yöntemin PB metodundan farkı ise seçeneklere atanan olasılıkların beklenen faydalarla orantılı olmamasıdır. Bu yöntemde atanan olasılıklar sadece en iyi seçeneklerin en kötülerden daha iyi olduğunu temsil eder.

Tedbirli mantık yürütme, yani her seçeneğin göz önüne alınması, Schuhmacher'in (1999)'daki ve Asheim'in (2001)'deki "proper rationalizability" kavramında da görülebilir. Bu kavram tıpkı PB metodundaki gibi rakibin optimal olmayan seçeneklerini seçebileceğini de hesaba katar ancak bunu orantısal olarak yapmak yerine sonsuz küçüklükte olasılıklar vererek gerçekleştirir (Perea ve Bach, 2014).

Bahsedilen bu üç yöntemin (*t*-solution, quantal response equilibrium ve proper rationalizability) zayıf yanlarını gideren PB metodu ilk defa 2011'de SAET (Society for the Advancement of Economic Theory) konferansında sunulmuştur.

Weerd, Verbrugge ve Verheij'in (2013)'deki yapay zekâ konulu makalesinde, tamamen rasyonel oynayan bir oyuncunun rakibi eğer kendisinden üstün inanç hiyerarşisi basamağını gerçekleştirirse tahmin edilebilip mağdur olabileceğine değinmiştir. Faydayla orantılı inançlara sahip bir oyuncunun ise rakibinin tamamen rasyonel olmasına daha az bağlı olduğundan söz edilmiştir. Yine aynı yazarlar (2014)'deki başka bir makalede faydayla orantılı inançları kullanan oyuncuların gerçek hayat oyuncularının davranışlarıyla tutarlı olduğunu belirtmiştir.

Angie Mounir'in (2016)'daki çalışmasında faydayla orantılı inançlar ile oyuncunun, rakiplerinin optimale yakın seçeneklerine de pozitif olasılıklar atandığından bahsetmiştir.

Christian Nauerz'in (2016)'daki çalışmasında literatürde bu konunun -Perea ve Bach haricinde- en detaylı işlendiği bölüm yer almaktadır. Nauerz'in katkısı, Perea ve Bach'ın konseptinin daha iyi anlaşılmasını sağlamak ve ek uygulamalarla insanların davranışlarını test etmektir. Ancak bu testler bizim çalışmamızdaki gibi Perea ve Bach'ın algoritmasıyla değil, yazarın kendi geliştirdiği daha sade bir metotla yapılmıştır.

4.3. Faydayla Orantılı İnançlara Ortak İnancın Modellenmesi

Bu bölümde faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramı matematiksel olarak modellenirken Perea ve Bach'ın (2014)'deki çalışmasından yararlanılmıştır. Bu model 2-kişilik, statik, tam bilgili ve iş birliği olmayan oyunlar için oluşturulmuştur. Faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramının modellenmesinde, inanç hiyerarşileri önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden inanç hiyerarşilerini ifade etmek için kullanılan epistemik oyun kuramındaki tür-tabanlı yaklaşımdan yararlanılmıştır. Bu yaklaşıma göre her oyuncunun farklı türleri vardır ve bu türler rakiplerin seçimleri ve türleri hakkındaki inançları olasılıksal olarak içerir.

Oyuncu setini $I = \{1, 2\}$, i oyuncusunun seçenek setini C_i ve fayda fonksiyonunu $U_i : \times_{j \in I} C_j \to \mathbb{R}$ temsil etsin. O halde normal-form bir oyun

$$\Gamma = (I, (C_i)_{i \in I}, (U_i)_{i \in I})$$

ile ifade edilebilir.

Tanım 4.3.1 (*Epistemik model*)

Γ oyununun epistemik modeli $\mathcal{M}^{\Gamma} = ((T_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I})$ olsun. Burada,

- *T_i, $i \in I$ oyuncusunun tür setidir,*
- *$b_i : T_i \to \Delta\,(C_j \times T_j)$, rakibin seçenek-tür kombinasyonlarını içeren $t_i \in T_i$ 'ye bir olasılık ölçüsü atar.*

Türler bir oyuncunun farklı akıl durumları olarak düşünülebilir. Oyuncunun sahip olduğu her tür, rakibinin seçenek-tür kombinasyonuna olan inancını temsil eder. $b_i(t_i)$ olasılık ölçüsü, t_i türünün içerdiği rakibin seçenek-tür kombinasyonunun gerçekleşme olasılığına olan inancı temsil eder. i oyuncusunun t_i türüne göre rakibinin t_j türüne sahip olarak c_j seçeneğini seçmesinin olasılığına olan inanç $(b_i(t_i))(c_j| t_j)$ ile ifade edilir. Bu olasılık rakibin t_j türüne sahip olduğu şartlı olasılığı olarak düşünülebilir. Rakibin t_j türüyle c_j seçeneğini seçmesine olan inancın olasılığı ise $(b_i(t_i))(c_j, t_j)$ 'dir. Burada yer alan rakibin t_j türü, t_i türünün mümkün gördüğü inançtır ve bu tür $t_j \in T_j\,(t_i)$ olarak ifade edilir. t_i türünün şartlı olasılığı

$$(b_i(t_i))(c_j| t_j) = \frac{(b_i(t_i))(c_j, t_j)}{(b_i(t_i))(t_j)}$$

formülü ile hesaplanabilir. *i* oyuncusunun t_i türüne göre her bir $c_i \in C_i$ seçeneğinin beklenen faydası

$$u_i(c_i, t_i) = \sum_{c_j \in C_j} (b_i(t_i))(c_j) \,.\, u_i(c_i, c_j)$$

formülü ile hesaplanır.

Tanım 4.3.2 (*Faydayla orantılı inançları temsil eden tür*)

i, j $\in$ *I iki oyuncu olsun ve* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $\lambda_j \geq 0$ *olsun. Eğer bütün* $t_j \in T_j(t_i)$ *ve bütün* $c_j, c_j' \in C_j$ için

$$(b_i(t_i))(c_j|\, t_j) - (b_i(t_i))(c_j'|\, t_j) = \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j}\left(u_j(c_j, t_j) - u_j(c_j', t_j) \right) \qquad (4.3.1)$$

eşitliği sağlanırsa i oyuncusunun $t_i \in T_i$ *türü* λ_j *– faydayla-orantılı-inançları temsil eder.*

$C := \times_{j \in I} C_j$ oyundaki bütün seçenek kombinasyonları olduğunda, $\overline{u}_j := max_{c \in C}\, u_j(c)$ ve $\underline{u}_j := min_{c \in C}\, u_j(c)$ olur. Yani $\overline{u}_j$, *j* oyuncusunun kazanabileceği mümkün en yüksek faydadır. Benzer şekilde $\underline{u}_j$ ise *j* oyuncusunun kazanabileceği mümkün en düşük faydadır.

Eş. 4.3.1.'deki formül, faydayla orantılı inançların düşüncesine direkt olarak karşılık gelir. Faydayla orantılı inanca sahip bir oyuncu, rakibinin yüksek faydaya sahip seçeneklerini seçmesine yüksek olasılık atar. Formüldeki eşitliğin solunda atanmaya çalışılan bu olasılıklar yer almaktadır. Bu olasılıklar, c_j ve c_j' seçeneklerinin beklenen faydaları olan $u_j(c_j, t_j)$ ve $u_j(c_j', t_j)$ ile büyüklük küçüklük bakımından uyumlu atandığında eşitlik sağlanır. Örneğin $u_j(c_j, t_j) > u_j(c_j', t_j)$ ise eşitliğin sağı pozitif olacaktır ve eşitliğin sağlanabilmesi için eşitliğin solunda c_j 'ye atanan olasılık c_j' 'ye atanan olasılıktan büyük olmalıdır. Ayrıca olasılıklar sadece 0 ile 1 arasında değer alabilir. Bu yüzden $1/(\overline{u}_j - \underline{u}_j)$ çarpanı eklenerek eşitliğin sağı 0 ile 1 arasına çekilmiştir. Çünkü *j* oyuncusunun mümkün en yüksek beklenen faydası kazanabileceği mümkün en yüksek fayda olan $\overline{u}_j$ 'den büyük olamaz ve benzer şekilde mümkün en düşük beklenen faydası kazanabileceği mümkün en düşük fayda olan $\underline{u}_j$ 'den düşük olamaz. Bu yüzden

$$\frac{(u_j(c_j, t_j) - u_j(c_j', t_j))}{\overline{u}_j - \underline{u}_j}$$

bölümü her zaman 0 ile 1 arasında olacaktır.

Eşitliğin sağında bulunan λ çarpanı ise orantısallık faktörüdür. λ çarpanı ne kadar büyük olursa, olasılıklar o kadar beklenen faydalarla orantısal olur. Örneğin $u_j(c_j, t_j) > u_j(c_j', t_j)$ olduğunda olasılıkların orantısal olabilmesi için $(b_i(t_i))(c_j| t_j) > (b_i(t_i))(c_j'| t_j)$ olması gerekir. Ancak $(b_i(t_i))(c_j| t_j)$ olasılığı, $(b_i(t_i))(c_j'| t_j)$ olasılığından ne kadar büyük olmalıdır? [1, 0] da orantısaldır [2/3, 1/3] de orantısaldır ve benzer şekilde olasılıklar sonsuz şekilde atanabilir. Çözüm, mümkün en yüksek λ çarpanını ekleyerek olasılıklar arasındaki farkları da mümkün en yüksek yapmak ve böylece orantısallığı en iyi şekilde temsil etmektir. $\lambda < 0$ olduğunda ters orantı oluşacağı için her zaman $\lambda \geq 0$ olmalıdır. Ayrıca olasılıklar 0 ile 1 arasında değer alabildiği için λ'nın bir üst sınırı vardır ve λ^{max} ile ifade edilir.

Eğer bir oyuncu rakibinin faydasıyla orantılı seçim yapacağına dair inanç oluşturmak istiyorsa bu inancını temsil eden rakibinin seçeneklerini seçme olasılıklarını Eş. 4.3.1. 'den yararlanarak hesaplayabilir. Yapması gereken, rakibinin seçeneklerinin her ikili kombinasyonu için bir eşitlik kurmaktır. Ardından bu eşitliklerde bulunan beklenen faydaları ve $\overline{u}_j$ ile $\underline{u}_j$ değerlerini oyunda verilen fayda fonksiyonları yardımıyla hesaplayabilir. Bu noktada sadece, olasılıklar ve λ bilinmeyen olur. Bu yüzden amaç fonksiyonu "Max=λ" olan bir doğrusal programlama modelinden yararlanarak olasılıkları hesaplayabilir. Ancak rakibinin seçeneklerinin her ikili kombinasyonu için bir eşitlik kurmak, seçenekler çok olduğunda büyük bir işlem yükü oluşturur ve analizin ileriki aşamalarında faydayla orantılı inançlara ortak inanç oluşturulurken işlemlerin artacağı da bir gerçektir. Bu yüzden $(b_i(t_i))(c_j| t_j)$ olasılıklarının hesaplanmasında daha kısa bir yola ihtiyaç duyulmuştur. Bu yol Lemma 4.3.1'de yer almaktadır. Ancak önce Lemma 4.3.1'de kullanılan bazı ifadelere açıklık getirilmelidir. $|C_i|$ ifadesi i oyuncusunun seçenek sayısını temsil eder ve benzer şekilde $|C_j|$ ifadesi de j oyuncusunun seçenek sayısını temsil eder. i oyuncusunun t_i türünün ortalama faydası olan $u_i^{average}(t_i)$ aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$u_i^{average}(t_i) = \frac{1}{|C_i|} \sum_{c_i \in C_i} u_i(c_i, t_i)$$

Lemma 4.3.1

$i, j \in I$ iki oyuncu olsun ve $\lambda_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_j \geq 0$ olsun. Eğer bütün $t_j \in T_j(t_i)$ ve bütün $c_j, c_j' \in C_j$ için

$$(b_i(t_i))(c_j | t_j) = \frac{1}{|C_j|} + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} \left(u_j(c_j, t_j) - u_j^{average}(t_j) \right) \tag{4.3.2}$$

eşitliği sağlanırsa i oyuncusunun $t_i \in T_i$ türü λ_j – faydayla-orantılı-inançları temsil eder.

Kanıt:

$$\sum_{c_j \in C_j} (b_i(t_i))(c_j | t_j) = 1$$

$$\sum_{c_j \in C_j} (b_i(t_i))(c_j^* | t_j) + (b_i(t_i))(c_j | t_j) - (b_i(t_i))(c_j^* | t_j) = 1$$

$$\sum_{c_j \in C_j} (b_i(t_i))(c_j^* | t_j) + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} \left(u_j(c_j, t_j) - u_j(c_j^*, t_j) \right) = 1$$

$$(|C_j| (b_i(t_i))(c_j^*| t_j)) + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} \sum_{c_j \in C_j} (u_j (c_j, t_j) - u_j (c_j^*, t_j)) = 1$$

$$(|C_j| (b_i(t_i))(c_j^*| t_j)) + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} (|C_j| u_j^{average}(t_j) - |C_j| u_j (c_j^*, t_j)) = 1$$

$$(b_i(t_i))(c_j| t_j) = \frac{1}{|C_j|} + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} (u_j (c_j, t_j) - u_j^{average}(t_j))$$

Eş. 4.3.2, i oyuncusunun t_i türünün temsil ettiği inanca göre j oyuncusunun t_j türüne sahip olduğunda c_j seçeneğini seçmesinin olasılığına olan inancı hesaplarken kullanılır. Yani kabaca rakibin seçeneklerini seçme olasılıklarının hesaplanmasında kullanılır. Bu formülün Eş. 4.3.1'deki formül ile aynı işleve sahip olduğu unutulmamalıdır. Farkı, işlem yükünde kolaylık sağlamasıdır.

Eş. 4.3.2.'deki formülü açıklayacak olursak, önce her seçeneğe eşit olasılıklar sağlayan $1/|C_j|$ değeri göz önüne alınır. Ardından rakibin c_j seçeneğini seçtiğinde beklenen faydasını temsil eden $u_j (c_j, t_j)$ değerinden, rakibin bütün seçeneklerinin beklenen faydalarının ortalaması olan $u_j^{average}(t_j)$ çıkarılır ve orantısallık faktörüyle çarpılarak $1/|C_j|$ değerine eklenir. Böylelikle rakibin beklenen faydası yüksek seçenekleri ortalamadan yüksek olacağı için $1/|C_j|$ değerine pozitif bir sayı eklenmiş olur. Benzer şekilde rakibin beklenen faydası düşük seçenekleri ortalamadan düşük olacağı için $1/|C_j|$ değerine negatif bir sayı eklenmiş olur. Sonuç olarak rakibin seçeneklerini seçme olasılıkları, seçeneklerin beklenen faydaları ortalamadan ne kadar yüksek olursa o kadar yüksek olur ve benzer şekilde ortalamadan ne kadar düşük olursa o kadar düşük olur. Bu şekilde hesaplanan olasılıklar faydayla orantılı inancı temsil etmektedir.

Faydayla orantılı inançlar mantığı, oyuncunun sadece faydayla orantılı inanca sahip olmasını içermez. Aynı zamanda rakibinin de faydayla orantılı inanca sahip olduğuna inanmalıdır, rakibinin rakibinin faydayla orantılı inanca sahip olduğuna inandığına inanmalıdır ve benzer şekilde sonsuz bir inanç hiyerarşisini içerir. Epistemik çerçevede bu çeşit bir mantık varsayımı resmi olarak "faydayla orantılı inançlara ortak inanç" olarak ifade edilir.

Tanım 4.3.3 (*Faydayla orantılı inançlara ortak inanç*)

$i, j \in I$ iki oyuncu ve i oyuncusunun $t_i \in T_i$ olan bir türü olsun. $\lambda = (\lambda_j)_{j \in I} \in \mathbb{R}^2_+$ olmak üzere

- *Eğer t_i türü λ_j–faydayla-orantılı-inançları temsil ediyorsa λ–faydayla-orantılı-inançlara 1-katlı inancı temsil ediyordur.*
- *Eğer t_i türü sadece bütün $k > 1$ için λ-faydayla-orantılı-inançlara (k-1)-katlı inancı temsil eden $t_j \in T_j$ türlerini mümkün görüyorsa λ-faydayla-orantılı-inançlara k-katlı inancı temsil ediyordur.*
- *Eğer t_i türü bütün $k \geq 1$ için λ-faydayla-orantılı-inançlara k-katlı inancı temsil ediyorsa λ-faydayla-orantılı-inançlara ortak inancı temsil ediyordur.*

Tanım 4.3.3'e göre λ-faydayla-orantılı-inançlara ortak inanca sahip olan bir tür λ_j–faydayla-orantılı-inançlara sahiptir, rakibinin λ-faydayla-orantılı-inançlara sahip olduğuna inanır, rakibinin rakibinin λ-faydayla-orantılı-inançlara sahip olduğuna inandığına inanır ve benzer şekilde devam eder.

Bir oyuncunun faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında yapabileceği mantıklı seçim, rakibinin seçimlerinin olasılıklarına bu inançla koyduğu kısıtlamalar altında rasyonel olan seçimidir.

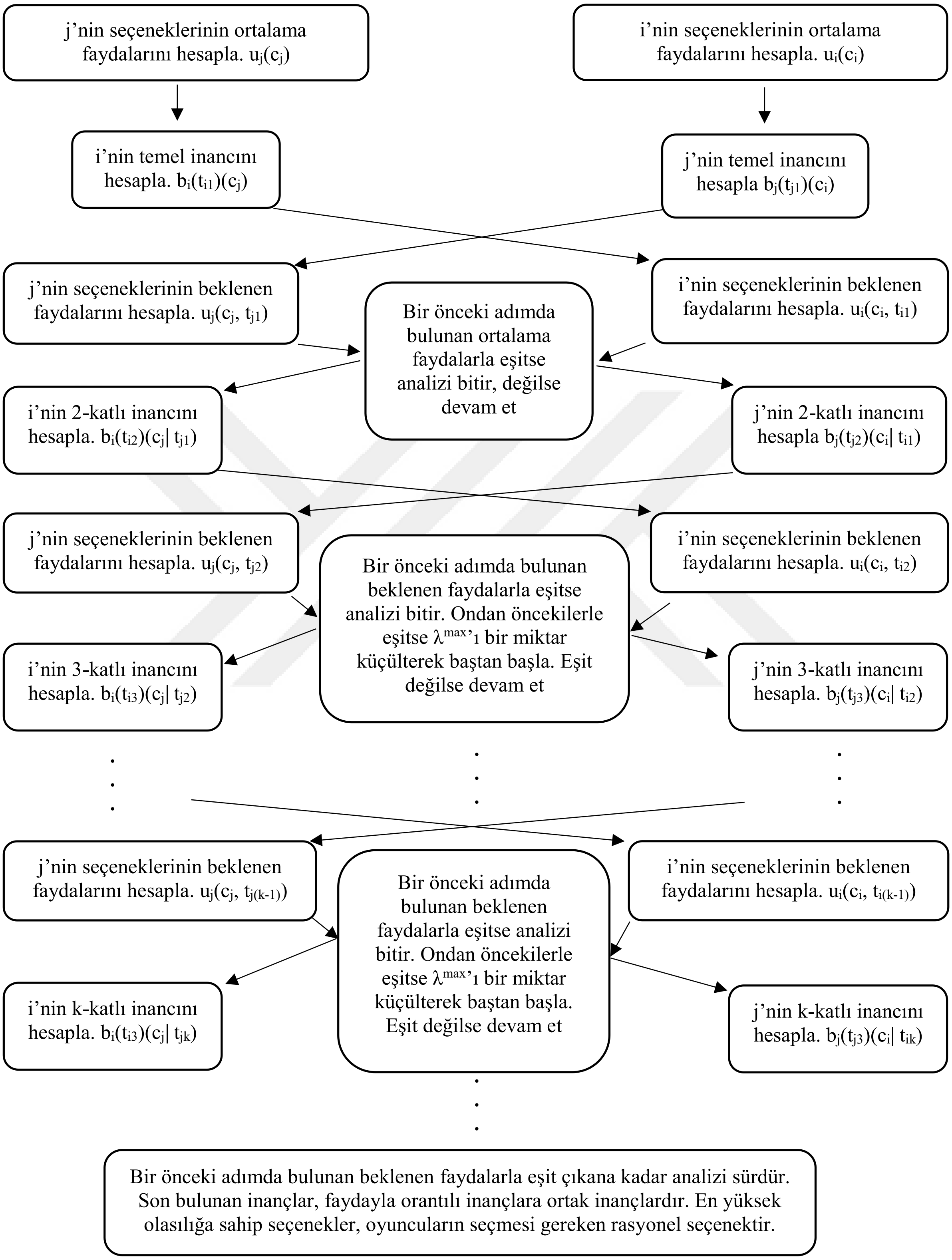
Tanım 4.3.4 (*Faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında rasyonel seçim*)

$i, j \in I$ iki oyuncu ve $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^2_+$ olsun. Eğer $\mathcal{M}^\Gamma$ epistemik modelinde λ-faydayla-orantılı-inançlara ortak inancı temsil eden $t_i \in T_i$ türüne sahip bir i oyuncusu varsa ($b_i(t_i)$) olasılıklarına göre optimal olan $c_i \in C_i$ seçeneği, i oyuncusu için λ-faydayla-orantılı-inançlara ortak inanç altında rasyonel seçenektir.

4.4. Algoritma

Gerçek hayat oyuncuları çoğunlukla tedbirli mantığa sahiptir. Amacımız, tedbirli mantığın düşüncesini yakalayan "faydayla orantılı inançlar" kavramını kullanarak oyuncuların stratejisini belirlemektir. Bu kavramdan yararlanarak çözüm yapan metot, Perea ve Bach'ın (2014)'de tanıttığı PB metodudur. Bu bölümde PB metodunun, oyunlarda nasıl uygulandığı adım adım bir örnek üzerinden gösterilecektir. Bu metodu uygulayan C# algoritması EK-1'de verilmiştir.

PB metodu, faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncuların seçebileceği rasyonel seçimleri bulur. Başka bir deyişle oyuncu, rakibinin faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında seçeneklerini hangi olasılıklarla seçeceğine dair inancını oluşturur ve oyuncu, rakibi hakkında oluşturduğu bu inanca göre rasyonel seçim yapar. PB metodu bu seçimi bulmak için kullanılır. Şekil 4.2.'de PB metodunun algoritma şeması verilmiştir.



Şekil 4.2. PB metodunun algoritma şeması

	sol	orta	sağ
ÜST	90, 90	0, 0	0, 40
ALT	0, 0	180, 180	0, 40

Şekil 4.3. Koordinasyon oyunu

1. Adım: Temel inançların hesaplanması

PB metodu uygulanırken ilk olarak faydayla orantılı temel inançlar hesaplanmalıdır. Bu inanç oyuncunun, rakibinin rakip faydalarına bakmadan yalnız kendi faydalarıyla orantılı seçim yapacağına dair inancıdır. Bu inancı oluşturmak için önce basitçe rakibin her bir seçeneğinin içerdiği faydaların ortalaması bulunur. Ardından bu seçeneklerin sahip olduğu ortalama faydalarla orantılı olasılıklar hesaplanır. Bu şekilde yüksek faydalara sahip seçenekler yüksek olasılıklara sahip olur.

Şekil 4.3.'de verilen oyunda, satır oyuncusuna i, sütun oyuncusuna j diyelim.

i oyuncusunun seçenekleri; c_i^1=ÜST, c_i^2=ALT

j oyuncusunun seçenekleri; c_j^1=sol, c_j^2=orta, c_j^3=sağ

olsun. Öncelikle i'nin perspektifinden bakıp temel inancını hesaplayalım.

i'nin temel inancına göre; j, i'nin faydalarına bakmadan yalnız kendi seçeneklerinin içerdiği faydalarla orantılı seçim yapacaktır. Bu durumda j'nin seçeneklerinin ortalama faydaları;

- $u_j(c_j^1)$= (90+0)/2= 45
- $u_j(c_j^2)$= (0+180)/2= 90
- $u_j(c_j^3)$= (40+40)/2= 40

olur.

i oyuncusunun faydayla orantılı temel inancını, t_{i1}= { c_j^1, c_j^2, c_j^3} türü temsil etsin. t_{i1}'e göre j oyuncusu;

- c_j^1 seçeneğini $(b_i(t_{i1}))(c_j^1)$ olasılığıyla
- c_j^2 seçeneğini $(b_i(t_{i1}))(c_j^2)$ olasılığıyla
- c_j^3 seçeneğini $(b_i(t_{i1}))(c_j^3)$ olasılığıyla

seçecektir. Şimdi yapılması gereken bu olasılıklara, önceden bulunan ortalama faydalarla orantılı değerler atamaktır. Ancak faydayla orantılı sonsuz farklı şekilde olasılık atanabilir. Örneğin; [$(b_i(t_{i1}))(c_j^1)$, $(b_i(t_{i1}))(c_j^2)$, $(b_i(t_{i1}))(c_j^3)$] = [0,33; 0,35; 0,32] de faydayla orantılıdır veya [0,02; 0,97; 0,01] de faydayla orantılıdır. Bizim amacımız orantısallığın olasılıklarda en iyi temsil edildiği değerleri atamaktır. Bunun için geçen bölümde Eş. 4.3.2.'de verilen formülün, temel inançların hesaplanmasında kullanılan versiyonu kullanılır.

$$(b_i(t_i))(c_j) = \frac{1}{|C_j|} + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} \left(u_j(c_j) - u_j^{average} \right) \quad (4.4.1.)$$

Eşitlik 4.4.1.'de yer alan $u_j^{average}$, j oyuncusunun tüm faydalarının ortalaması olan (90+0+40+0+180+40)/6= 58,3'dür. Ayrıca $\overline{u}_j$, j'nin en yüksek faydası ve $\underline{u}_j$, j'nin en düşük faydasıdır.

Eşitlik 4.4.1. kullanılarak i oyuncusunun faydayla orantılı temel inancını temsil eden t_{i1} türünün içerdiği olasılıklar aşağıdaki gibi hesaplanır;

- $(b_i(t_{i1}))(c_j^1)$= 1/3 + ((λ_j / (180 – 0)) . (45 – 58,3))= 1/3 - λ_j (0,074)
- $(b_i(t_{i1}))(c_j^2)$= 1/3 + ((λ_j / (180 – 0)) . (90 – 58,3))= 1/3 + λ_j (0,176)
- $(b_i(t_{i1}))(c_j^3)$= 1/3 + ((λ_j / (180 – 0)) . (40 – 58,3))= 1/3 - λ_j (0,102)

Orantısallığın olasılıklarda en iyi şekilde temsil edilebilmesi için λ_j 'ye mümkün en yüksek değer verilmelidir. Aşağıdaki doğrusal programlama modelinin çözülmesi ile λ_j^{max} bulunabilir[11].

Max= λ_j
$(b_i(t_{i1}))(c_j^1)= 1/3 - \lambda_j\ (0{,}074)$
$(b_i(t_{i1}))(c_j^2)= 1/3 + \lambda_j\ (0{,}176)$
$(b_i(t_{i1}))(c_j^3)= 1/3 - \lambda_j\ (0{,}102)$
$\lambda_j \geq 0$
$0\leq (b_i(t_{i1}))(c_j^1), (b_i(t_{i1}))(c_j^2), (b_i(t_{i1}))(c_j^3)\leq 1$
$(b_i(t_{i1}))(c_j^1) + (b_i(t_{i1}))(c_j^2) + (b_i(t_{i1}))(c_j^3)= 1$
Yukarıdaki doğrusal programlama problemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

- $\lambda_j^{max}= 3{,}273709$
  $(b_i(t_{i1}))(c_j^1)= 0{,}09$
  $(b_i(t_{i1}))(c_j^2)= 0{,}91$
  $(b_i(t_{i1}))(c_j^3)= 0$

Buraya kadar, i oyuncusunun temel inancına göre rakibinin seçeneklerini seçme olasılıklarını hesapladık. Sonuç olarak; i oyuncusu j'nin, rakip faydalarına bakmadan yalnız kendi faydalarıyla orantılı seçim yapacağına inandığında, j'nin seçeneklerini seçme olasılıklarına olan inancı [0,09; 0,91; 0] olarak hesaplandı. Gerçekten de bu olasılıklar amaçladığımız gibi j'nin seçeneklerinin ortalama faydalarıyla orantılıdır. Şimdi j'nin perspektifinden bakıp temel inançları hesaplanmalıdır.

j'nin temel inancını temsil eden $t_{j1}=\{c_i^1, c_i^2\}$ türünün elemanlarının olasılıklarını hesaplayacak olursak öncelikle i'nin seçeneklerinin ortalama faydaları

- $u_i(c_i^1)= (90+0+0)/3=30$
- $u_i(c_i^2)= (0+180+0)/3=60$

olarak hesaplanır. Ardından bu ortalama faydalar kullanılarak hesaplanan j'nin temel inancına göre i'nin seçeneklerini faydalarıyla orantılı seçme olasılıkları

---

[11] EK-2'de bulunan C# algoritmasında, bilgisayara doğrusal programlama problemi çözdürmek yerine λ 'ya 0 'dan başlayarak her seferinde 0,000001 artırılarak λ 'nın maksimum değeri buldurulmuştur.

- $(b_j(t_{j1}))(c_i^1)$= 1/2 + ((λ_i / (180 – 0)) . (30 – 45))= 1/2 – λ_i . (0,083)
- $(b_j(t_{j1}))(c_i^2)$= 1/2 + ((λ_i / (180 – 0)) . (60 – 45))= 1/2 + λ_i . (0,083)

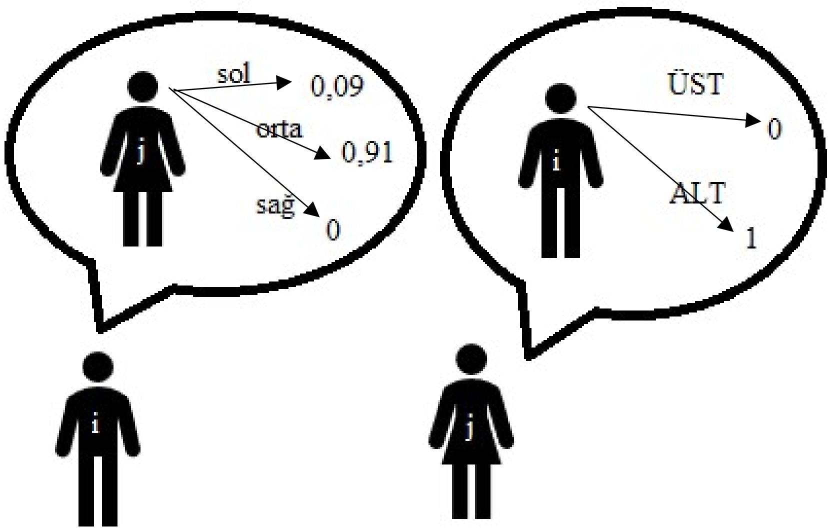
olarak bulunur. Aşağıdaki doğrusal programlama modeli yardımıyla λ_i^{max} bulunabilir.

Max= λ_i
$(b_j(t_{j1}))(c_i^1)$= 1/2 – λ_i (0,083)
$(b_j(t_{j1}))(c_i^2)$= 1/2 + λ_i (0,083)
$\lambda_i \geq 0$
$0 \leq (b_j(t_{j1}))(c_i^1), (b_j(t_{j1}))(c_i^2) \leq 1$
$(b_j(t_{j1}))(c_i^1) + (b_j(t_{j1}))(c_i^2) = 1$

Doğrusal programlama problemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

- λ_i^{max}= 6
- $(b_j(t_{j1}))(c_i^1)$= 0
- $(b_j(t_{j1}))(c_i^2)$= 1

Sonuç olarak j'nin temel inancına göre i'nin seçeneklerini seçme olasılıkları faydayla orantılı olarak hesaplandı. Böylelikle analizin 1. adımı tamamlanmış oldu çünkü her iki oyuncunun da perspektifinden temel inançlar bulundu. Buraya kadar gerçekleştirilenler Şekil 4.4.'de görselleştirilmiştir.



Şekil 4.4. Temel inançların oluşturulması

2. Adım: Faydayla orantılı inançlara 2-katlı inançların hesaplanması

1. Adımda faydayla orantılı inançlara 1-katlı inançlar oluşturuldu. Yani oyuncuların sadece rakiplerinin seçimleri hakkındaki inançları hesaplandı. Ancak epistemik oyun kuramı sadece rakip hakkında mantık yürütmeye değil aynı zamanda rakibin mantığı hakkında da mantık yürütmeye çalışır. Bu yüzden rakiplerin inançları hakkında da inanç oluşturmak gerekir.

Bir oyuncunun faydayla orantılı inançlara 2-katlı inancı olması demek, rakibinin temel inanca sahip olduğuna inanıyor demektir. i oyuncusu rakibinin temel inanca sahip olduğuna inandığında rakibinin seçeneklerini faydayla orantılı seçme olasılıkları hesaplanmalıdır. Ancak bu noktada, hesaplar geçen adımdaki temel inançların hesaplanmasından farklılık göstermektedir. Artık ortalama faydalar yerine beklenen faydalar kullanılır.

$$u_j\,(c_j, t_j) = \sum_{c_i \in C_i} (b_j(t_j))(c_i)\,.\,u_j\,(c_i, c_j) \qquad (4.4.2)$$

Eş. 4.4.2.'de verilen $(b_j(t_j))(c_i)$ olasılıkları 1. Adımda hesaplandı ve $(b_j(t_{j1}))(c_i^1)=0$, $(b_j(t_{j1}))(c_i^2)=1$ bulundu. O halde artık j oyuncusu t_{j1} türünün inancına sahip olduğunda c_j^1, c_j^2 ve c_j^3 seçeneklerinden beklenen faydalarını Eş. 4.4.2. yardımıyla hesaplayabiliriz.

- $u_j\,(c_j^1, t_{j1}) = (b_j(t_{j1}))(c_i^1)\,.\,u_j\,(c_i^1, c_j^1) + (b_j(t_{j1}))(c_i^2)\,.\,u_j\,(c_i^2, c_j^1)$
  $= 0\,.\,90 + 1\,.\,0$
  $= 0$
- $u_j\,(c_j^2, t_{j1}) = (b_j(t_{j1}))(c_i^1)\,.\,u_j\,(c_i^1, c_j^2) + (b_j(t_{j1}))(c_i^2)\,.\,u_j\,(c_i^2, c_j^2)$
  $= 0\,.\,0 + 1\,.\,180$
  $= 180$
- $u_j\,(c_j^3, t_{j1}) = (b_j(t_{j1}))(c_i^1)\,.\,u_j\,(c_i^1, c_j^3) + (b_j(t_{j1}))(c_i^2)\,.\,u_j\,(c_i^2, c_j^3)$
  $= 0\,.\,40 + 1\,.\,40$
  $= 40$

j oyuncusunun t_{j1} türünün ortalama faydasını da $u_j^{average}(t_{j1})$ = (0+180+40)/3=73,3 olarak hesaplarsak artık i oyuncusunun faydayla orantılı inançlara 2-katlı inancını temsil eden t_{i2} türünün içerdiği olasılıkları aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulabiliriz.

$$(b_i(t_i))(c_j|\, t_j) = \frac{1}{|C_j|} + \frac{\lambda_j}{\overline{u}_j - \underline{u}_j} \left(u_j(c_j, t_j) - u_j^{average}(t_j) \right) \qquad (4.4.3.)$$

Eşitlik 4.4.3. yardımıyla olasılıklar aşağıdaki gibi hesaplanır.

- $(b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1})$= 1/3 + ((λ / (180 – 0)) . (0 – 73,3))= 1/3 - λ (0,407)
- $(b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1})$= 1/3 + ((λ / (180 – 0)) . (180 – 73,3))= 1/3 + λ (0,592)
- $(b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1})$= 1/3 + ((λ / (180 – 0)) . (40 – 73,3))= 1/3 - λ (0,185)

Olasılıkların λ'nın maksimum olduğu noktada ne olduğunun bulunması için doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi kurulduğunda

Max= λ
$(b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1})$= 1/3 - λ (0,407)
$(b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1})$= 1/3 + λ (0,592)
$(b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1})$= 1/3 - λ (0,185)
$\lambda \geq 0$
$0 \leq (b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1}), (b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1}), (b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1}) \leq 1$
$(b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1}) + (b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1}) + (b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1}) = 1$

sonuç olarak aşağıdaki olasılıklar hesaplanır

- λ^{max}= 0,818
- $(b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1})$= 0
- $(b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1})$= 0,82
- $(b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1})$= 0,18

i oyuncusu faydayla orantılı inançlara 2-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin seçeneklerini seçme olasılıkları [0; 0,82; 0,18] olarak hesaplandı. Şimdi aynı şekilde j'nin perspektifinden bakılıp faydayla orantılı inançlara 2-katlı inanca sahip olduğunda i'nin seçeneklerini seçme olasılıklarına olan inançlar adım adım aşağıdaki gibi hesaplanır.

- $u_i\,(c_i^1, t_{i1})= (b_i(t_{i1}))(c_j^1) \,.\, u_i\,(c_i^1, c_j^1) + (b_i(t_{i1}))(c_j^2) \,.\, u_j\,(c_i^1, c_j^2) + (b(t_{i1}))(c_j^3) \,.\, u_j\,(c_i^1, c_j^3)$

  $= 0{,}09 \,.\, 90 + 0{,}91 \,.\, 0 + 0 \,.\, 0$

  $= 8{,}1$

  $u_i\,(c_i^2, t_{i1})= (b_i(t_{i1}))(c_j^1) \,.\, u_i\,(c_i^2, c_j^1) + (b_i(t_{i1}))(c_j^2) \,.\, u_j\,(c_i^2, c_j^2) + (b(t_{i1}))(c_j^3) \,.\, u_j\,(c_i^2, c_j^3)$

  $= 0{,}09 \,.\, 0 + 0{,}91 \,.\, 180 + 0 \,.\, 0$

  $= 163{,}8$

- t_{i1} türünün ortalama faydası, $u_i^{average}(t_{i1}) = (8{,}1+163{,}8)/2=85{,}95$

- $(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})= 1/2 + (\,(\,\lambda \,/\, (180 - 0))\,.\,(8{,}1 - 85{,}95)\,)= 1/2 - \lambda\,(0{,}4325)$

  $(b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})= 1/2 + (\,(\,\lambda \,/\, (180 - 0))\,.\,(163{,}8 - 85{,}95)\,)= 1/2 + \lambda\,(0{,}4325)$

Bu olasılıklar λ maksimum olduğunda ne olduğunun bulunması için

$\text{Max}= \lambda$
$(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})= 1/2 - \lambda\,(0{,}4325)$
$(b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})= 1/2 + \lambda\,(0{,}4325)$
$\lambda \geq 0$
$0\leq (b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1}),\ (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1}) \leq 1$
$(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})+ (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1}) = 1$

doğrusal programlama problemini çözdürdüğümüzde aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

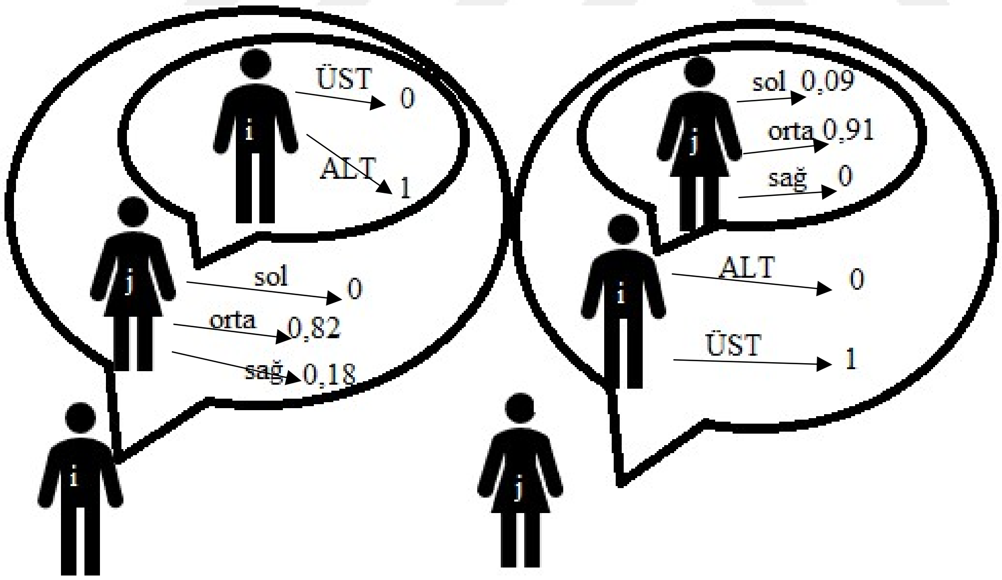
- $\lambda^{max}= 1{,}1576$

  $(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})= 0$

  $(b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})= 1$

Sonuç olarak j oyuncusunun da faydayla orantılı inançlara 2-katlı inancı hesaplanmış oldu. Böylelikle analizimizin 2. Adımında, i oyuncusu faydayla orantılı inançlara 2-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin seçeneklerini seçmesine olan inancı $[(b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1}), (b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1}), (b_i(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1})]=[0; 0{,}82; 0{,}18]$ olarak hesaplandı. Benzer şekilde j oyuncusu faydayla orantılı inançlara 2-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin seçeneklerini seçmesine olan inancı $[(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1}), (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})]=[0, 1]$ olarak hesaplandı. Bu sonuçlar Şekil 4.5.'de görselleştirilmiştir.

Bazı oyunlarda analiz 2. Adımda tamamlanabilir. 2. Adım'ın sonunda bulunan olasılıklar 1. Adımda bulunan olasılıklarla eşit çıkabilir. Böyle bir durumda faydayla orantılı inançlara ortak inanç oluşturulmuş olur çünkü bu noktadan sonra isterse sonsuza kadar inanç hiyerarşisi basamakları çıkılsın yine olasılıklar aynı bulunacaktır. Ancak örneğimizde henüz olasılıklar bir önceki basamakla eşit çıkmadığı -bir noktaya yığılmadığı- için daha derin düşünülmesine ihtiyaç vardır.



Şekil 4.5. Faydayla orantılı inançlara 2-katlı inançların oluşturulması

3. Adım: Faydayla orantılı inançlara 3-katlı inançların hesaplanması

Bir önceki adımda bulunan olasılıklar ile oyuncuların faydayla orantılı inançlara 3-katlı inançları hesaplanırken ihtiyaç duyulan beklenen faydalar aşağıdaki gibi hesaplanır.

- $u_j\,(c_j^1, t_{j2}) = (b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^1, c_j^1) + (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^2, c_j^1)$
  $= 0\;.\;90 + 1\;.\;0$
  $= 0$
- $u_j\,(c_j^2, t_{j2}) = (b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^1, c_j^2) + (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^2, c_j^2)$
  $= 0\;.\;0 + 1\;.\;180$
  $= 180$
- $u_j\,(c_j^3, t_{j2}) = (b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^1, c_j^3) + (b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i1})\;.\;u_j\,(c_i^2, c_j^3)$
  $= 0\;.\;40 + 1\;.\;40$
  $= 40$

- $u_i\,(c_i^1, t_{i2}) = (b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1}).\;u_i\,(c_i^1, c_j^1) + (b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1}).\;u_j\,(c_i^1, c_j^2) + (b(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1}).\;u_j\,(c_i^1, c_j^3)$
  $= 0\;.\;90 + 0{,}82\;.\;0 + 0\;.\;0$
  $= 0$
- $u_i\,(c_i^2, t_{i2}) = (b_i(t_{i2}))(c_j^1|t_{j1}).\;u_i\,(c_i^2, c_j^1) + (b_i(t_{i2}))(c_j^2|t_{j1}).\;u_j\,(c_i^2, c_j^2) + (b(t_{i2}))(c_j^3|t_{j1}).\;u_j\,(c_i^2, c_j^3)$
  $= 0\;.\;0 + 0{,}82\;.\;180 + 0{,}18\;.\;0$
  $= 147{,}6$

i'nin faydayla orantılı inançlara 3-katlı inancını temsil eden t_{i3} türünün olasılıkları;

- $(b_i(t_{i3}))(c_j^1|t_{j2}) = 1/3 + (\,(\,\lambda\,/\,(180 - 0))\;.\;(0 - 73{,}3)\,) = 1/3 - \lambda\,(0{,}407)$
- $(b_i(t_{i3}))(c_j^2|t_{j2}) = 1/3 + (\,(\,\lambda\,/\,(180 - 0))\;.\;(180 - 73{,}3)\,) = 1/3 + \lambda\,(0{,}592)$
- $(b_i(t_{i3}))(c_j^3|t_{j2}) = 1/3 + (\,(\,\lambda\,/\,(180 - 0))\;.\;(40 - 73{,}3)\,) = 1/3 - \lambda\,(0{,}185)$

Bu olasılıkların λ'nın maksimum olduğu noktada ne olduğunun bulunması için doğrusal programlama modeli;

Max= λ

$(b_i(t_{i3}))(c_j^1|t_{j2})= 1/3 - \lambda\ (0{,}407)$
$(b_i(t_{i3}))(c_j^2|t_{j2})= 1/3 + \lambda\ (0{,}592)$
$(b_i(t_{i3}))(c_j^3|t_{j2})= 1/3 - \lambda\ (0{,}185)$
$\lambda \geq 0$
$0 \leq (b_i(t_{i3}))(c_j^1|t_{j2}),\ (b_i(t_{i3}))(c_j^2|t_{j2}),\ (b_i(t_{i3}))(c_j^3|t_{j2}) \leq 1$
$(b_i(t_{i3}))(c_j^1|t_{j2}) + (b_i(t_{i3}))(c_j^2|t_{j2}) + (b_i(t_{i3}))(c_j^3|t_{j2})= 1$

model çözüldüğünde sonuç olarak aşağıdaki olasılıklar bulunur

- $\lambda^{max}= 0{,}818$
- $(b_i(t_{i3}))(c_j^1|t_{j2})= 0$
- $(b_i(t_{i3}))(c_j^2|t_{j2})= 0{,}82$
- $(b_i(t_{i3}))(c_j^3|t_{j2})= 0{,}18$

Benzer şekilde j'nin faydayla orantılı inançlara 3-katlı inancını temsil eden t_{j3} türünün olasılıkları;

- $(b_j(t_{j3}))(c_i^1|t_{i2})= 1/2 + ((\lambda / (180 – 0)) . (0 – 73{,}8))= 1/2 – \lambda\ (0{,}41)$
- $(b_j(t_{j3}))(c_i^2|t_{i2})= 1/2 + ((\lambda / (180 – 0)) . (147{,}6 – 73{,}8))= 1/2 + \lambda\ (0{,}41)$

Bu olasılıkların λ'nın maksimum olduğu noktada ne olduğunun bulunması için doğrusal programlama modeli;

Max= λ
$(b_j(t_{j3}))(c_i^1|t_{i2})= 1/2 – \lambda\ (0{,}41)$
$(b_j(t_{j3}))(c_i^2|t_{i2})= 1/2 + \lambda\ (0{,}41)$
$\lambda \geq 0$
$0 \leq (b_j(t_{j3}))(c_i^1|t_{i2}),\ (b_j(t_{j3}))(c_i^2|t_{i2}) \leq 1$
$(b_j(t_{j3}))(c_i^1|t_{i2})+ (b_j(t_{j3}))(c_i^2|t_{i2}) = 1$

model çözüldüğünde aşağıdaki olasılıklar bulunur

- $\lambda^{max}= 1{,}222$
- $(b_j(t_{j2}))(c_i^1|t_{i2})= 0$
- $(b_j(t_{j2}))(c_i^2|t_{i2})= 1$

3. Adımda sonuç olarak, i oyuncusu faydayla orantılı inançlara 3-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin seçeneklerini seçme olasılıkları [0; 0,82; 0,18] bulundu. Aynı şekilde j oyuncusu faydayla orantılı inançlara 3-katlı inanca sahip olduğunda rakibinin seçeneklerini seçme olasılıkları [0, 1] bulundu. Dikkat edildiyse bulunan bu olasılıklar 2. Adımın sonunda bulunan olasılıklarla, yani faydayla orantılı inançlara 2-katlı inançlarla, aynıdır. Bu durumda olasılıklar bir noktaya yığıldı denir ve analiz tamamlanır.

Faydayla orantılı inançlara ortak inanç kavramı sadece oyuncunun rakibinin faydalarıyla orantılı seçim yapacağına olan inancı değil, aynı zamanda oyuncunun rakibinin de rakibinin faydalarıyla orantılı seçim yapacağına inanarak faydalarıyla orantılı seçim yapacağına inanması ve benzer şekilde ilerleyen sonsuz bir inanç hiyerarşisi demektir. Analizimizde bu sonsuz inanç hiyerarşisi oluşturulmuştur çünkü olasılıklar bir noktaya yığılmıştır. Bu noktadan sonra inanç hiyerarşisi basamakları istenirse sonsuza kadar çıkılsın yine aynı olasılıklar bulunacaktır. Bu yüzden, *faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncuların seçeneklerini seçme olasılıkları bulunmuştur.*

4. Adım: Özyinelemeli prosedür

Örneğimiz için 3. Adımın sonunda, olasılıkların bir noktaya yığılması neticesinde analizi tamamlayabildik. Ancak oyunların genelinde olasılıkların bir noktaya yığılması daha ileriki adımlarda gerçekleşir. Özyinelemeli prosedür, olasılıkların bir noktaya yığılması sağlanana kadar analizi devam ettirmektir. Örneğin 2. adımda t_{i2} ve t_{j2} türlerinin olasılıklarını hesapladık. Ardından 3. adımda rakibin bu türlere sahip olduğu inancını içeren t_{i3} ve t_{j3} türlerinin olasılıklarını hesapladık. Eğer olasılıklar bir noktaya yığılmasaydı, t_{i4} ve t_{j4} türlerini de hesaplayacak ve özyinelemeli prosedürü izlemeye devam edecektik.

5. Adım: λ'yı bir miktar küçültmek

Buraya kadar, olasılıkların orantısallığı en iyi şekilde temsil edebilmesi için λ'ya mümkün en yüksek değerin, yani λ^{max}, verilmesi gerektiği söylendi. Ancak bazı durumlarda $\lambda = \lambda^{max}$ alınması olasılıkların bir noktaya yığılmasını engellemektedir. Daha ayrıntılı açıklayacak olursak $\lambda = \lambda^{max}$ alındığında inanç hiyerarşisi basamakları çıkıldıkça olasılıklar bir önceki basamakla değil ondan önceki basamakla aynı çıkabilir (ya da ondan da önceki vb.). Ancak bizim istediğimiz olasılıkların bir noktaya yığılmasıdır. Böyle bir durumla karşılaşıldığında λ^{max} bir miktar küçültülerek analize baştan, yani temel inançlardan, başlanır[12]. Perea ve Bach (2014)'de bu konuyla ilgili aşağıdakileri yazmıştır.

"λ, olasılıkların bir noktaya yığılmasını sağlayacak şekilde mümkün en yüksek belirlenmelidir"

Son Adım: Oyuncunun rasyonel seçeneği

PB metodunun amacı, faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncunun seçebileceği rasyonel seçeneği bulmaktır. Oyuncu, rakibinin faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında seçeneklerini hangi olasılıklarla seçeceğine dair inancını oluşturur (Örneğimizde i oyuncusu rakibinin faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında seçim yapacağına inandığında; sol seçeneğini 0 olasılıkla, orta seçeneğini 0,82 olasılıkla ve sağ seçeneğini 0,18 olasılıkla seçeceğine inandığını hesapladık. Benzer şekilde j oyuncusu da rakibinin ÜST seçeneğini 0 ve ALT seçeneğini 1 olasılıkla seçeceğine inandığını hesapladık). Ardından oyuncu bu inancına göre beklenen faydası en yüksek seçeneğini, yani rasyonel seçeneğini, seçer.

Örneğimizde i oyuncusunun rasyonel seçeneği ALT, j oyuncusunun rasyonel seçeneği orta'dır. Dikkat edildiyse rasyonel seçenekler aynı zamanda bulduğumuz olasılıklar içinde en yüksek olasılığa sahip seçeneklerdir. Bunun sebebi, olasılıkların beklenen faydalarla orantılı olmasıdır. Böylece en yüksek olasılığa sahip seçenek aynı zamanda beklenen faydası en yüksek, yani rasyonel, seçenek olur.

[12] EK-1'de PB metodunu uygulayan C# algoritmasında λ^{max} gerektiğinde her seferinde %1 küçültülerek bu işlem gerçekleştirilmiştir.

5. UYGULAMA

Bu kısmın amacı, iki kişilik-statik-iş birliksiz ve tam bilgili oyunların analizinde kullanılan PB metodunun tatmin edici sonuçlar verdiğini göstermektir. Oyun kuramında bir çözüm yönteminin tatmin edici olabilmesi için sadece takdir edilebilir bir mantıkla açıklanması yeterli olmaz. Aynı zamanda rakiplerin bu mantıkla açıklanan davranışlara sahip olması gerekmektedir. Çünkü oyunların temel özelliği oyuncuların rakip davranışlarından etkilenmesidir.

Oyun kuramı ile ilgili literatürde, çözüm yöntemlerinin kullanışlılığının test edilebilmesi için bu yöntemlerin gerçek hayat oyuncu davranışlarıyla karşılaştırıldığı deneysel çalışmalar yer almaktadır. Bu kısımda da benzer bir yol izlenerek PB metodunun gerçek hayat oyuncu davranışlarına klasik çözüm yöntemlerinden daha yakın sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Klasik çözüm yöntemleri olarak, oyun kuramındaki en popüler çözüm yöntemleri olan Nash dengesi ve kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonu (rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim) alınmıştır.

5.1 Deney

Gerçek hayat oyuncu davranışlarının incelenebilmesi için bu oyuncuların denek olarak kullanıldığı deneyler gerçekleştirilmelidir. Bu çalışmada yer alan deneyde *Ortalamanın ¾'ü* isimli oyun kullanılmıştır. Bu oyun iki kişilik-statik-iş birliksiz ve normal formda ifade edilebilen bir oyun olduğu için PB metodu ile analiz edilebilmektedir.

Deney, Gazi Üniversitesi Ekonometri bölümü lisans öğrencilerine yapılmıştır. Deneklerin, tarafı oldukları oyunu geçiştirmeyip amaca uygun mantık yürütmelerini sağlayabilmek için birkaç yol izlenmiştir. Öncelikle deneye katıldıkları için kendilerine bir miktar ödeme yapılmış ve bu sayede çalışmaya belli bir düzeyde sadık olmaları sağlanmıştır. Oyunda yer alan faydaların denekler açısından önem arz edebilmesi için kazançlarıyla orantılı ekstra maddi teşvik kullanılmıştır. Ayrıca deney "Oyun Kuramı" dersine sahip bir bölüm olan Ekonometri öğrencilerine gerçekleştirilirse deneklerin oyuna akademik ilgisi olacağından çalışmaya daha sadık olacakları düşünülmüştür.

Deneklerin karar verirken rakiplerinin karakteristik özelliklerinden etkilenmemesinin sağlanabilmesi için rakipler deney sonunda rasgele belirlenmiştir. Ayrıca denekler maddi bir kazanç elde edeceklerinden dolayı deneyi gerçekleştiren kişiye empati duyarak düşük seçenekleri seçtiklerinde düşük kazanç elde edip daha az yük oluşturabileceklerini düşünmemeleri için sözlü olarak deneyin sponsoru olduğu söylenmiştir. Bütün bu ayarlamalar, çalışmanın amacı olan gerçek hayat oyuncu mantığının dış etkenlerden mümkün olduğunca arınmış bir şekilde modellenebilmesi için büyük öneme sahiptir.

Örneklem Büyüklüğü

Kitle, Gazi Üniversitesi Ekonometri bölümünde bulunan 350 lisans öğrencisinden oluşmaktadır. Basit rasgele örneklem metodu kullanılmıştır. Kitledeki birimlerin *Ortalamanın ¾'ü* oyununa verdikleri cevapların ortalamasının kestiriminde kullanılacak örneklem büyüklüğü %90 güvenilirlik düzeyinde ∓ 10 hata payı ile 19 olarak hesaplanmıştır.

5.1.1 Ortalamanın ¾'ü Oyunu

Deneyde yer alan *Ortalamanın ¾'ü* isimli oyunda:

Oyuncuların seçenekleri [2, 100] aralığındaki doğal sayılardan oluşmaktadır. Bu oyunda seçilen sayıların ortalamasının ¾'üne en yakın sayıyı seçmiş olan oyuncu seçtiği sayı *kadar para kazanır. Diğer oyuncu ise hiçbir şey kazanamaz. Eğer beraberlik olursa ödül ikiye bölünür, yani oyuncular seçtikleri sayının yarısı kadar para kazanır.*

Ortalamanın ¾'ü statik bir oyun olduğu için deneklerin birbirlerinin seçimlerini bilmeleri engellenmiştir. Ayrıca birbirleri ile anlaşma yapmaları da engellenerek oyunun iş birliksiz olma özelliği korunmuştur. Deneklere dağıtılan, talimatların ve oyunun yer aldığı anket EK-2'de yer almaktadır.

5.1.2 Ortalamanın ¾'ü Oyunun Özellikleri

	2	**3**	**4**	**...**	**98**	**99**	**100**
2	(1, 1)	(2, 0)	(2, 0)	...	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)
3	(0, 2)	(1.5, 1.5)	(3, 0)	...	(3, 0)	(3, 0)	(3, 0)
4	(0, 2)	(0, 3)	(2, 2)	...	(4, 0)	(4, 0)	(4, 0)
⋮	...	...	...	⋱	...	...	...
98	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	...	(49, 49)	(98, 0)	(98, 0)
99	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	...	(0, 98)	(49.5, 49.5)	(99, 0)
100	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	..	(0, 98)	(0, 99)	(50, 50)

Şekil 5.1. *Ortalamanın ¾'ü* oyununun normal-form gösterimi

Ortalamanın ¾'ü oyununun normal-formda ifade edilişi Şekil 5.1.'de verilmiştir. Bu oyun Basu'nun (1994)'de tanıttığı *Yolcunun Çıkmazı* oyunu ile aynı özelliklere sahiptir. İki oyunda da rakipten düşük seçim yapmaya teşvik vardır ancak düşük seçenekler düşük faydalar kazandıracağı için kötü performans gösterir. Bu yüzden bir yandan da yüksek seçim yapmaya teşvik vardır.

Tıpkı *Yolcunun Çıkmaz*ında olduğu gibi *Ortalamanın ¾'ü* oyununda da tek Nash dengesi en düşük seçeneklerin seçildiği [2, 2] 'dir. Bunun görülebilmesi için oyuncuların rakibinin her bir seçimi için en yüksek faydaları işaretlendiğinde sadece [2, 2] noktasında işaretlenen faydaların çakıştığı incelenebilir. Başka bir deyişle, oyuncuların sadece [2, 2] noktasından tek taraflı olarak sapmaları durumunda daha düşük fayda elde edeceklerinden dolayı oyundaki tek Nash dengesi [2, 2]'dir. Nash dengesinin bir özelliği, kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan geriye kalan stratejilerden oluşmasıdır ancak tersi her zaman doğru değildir. Yani kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan geriye kalan stratejilerin kesin Nash dengesi olduğu söylenemez. Ancak *Ortalamanın ¾'ü* oyununda kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan geriye seçilebilecek sadece bir seçenek kaldığı için bu seçenek aynı zamanda da Nash dengesidir.

Şekil 5.1.'deki fayda matrisinden de anlaşılabileceği gibi "100" seçeneği iki oyuncu için de kesin domine edilen seçenektir (Örneğin: 0,5 olasılıkla "2" ile 0,5 olasılıkla "99" seçeneği, "100" seçeneğini kesin domine etmektedir). Oyuncuların "100" seçeneğinin elendiği indirgenmiş oyunda bu sefer de "99" seçeneği kesin domine edilir. Benzer şekilde ilerlendiğinde oyuncuların geriye sadece "2" seçeneği kalmaktadır. Bu seçenek, rasyonelliğe ortak inanç altında seçilebilecek rasyonel seçenektir (kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonundan geriye kalan seçenek).

Epistemik veya klasik oyun kuramında rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim stratejisi önemli bir yere sahiptir. Çünkü oyuncuların irrasyonel seçim yapmayacağına ortak inanç olması takdir edilebilir bir mantık yürütme yoludur. Ancak fayda matrisine baktığımızda bu stratejinin bize oyundaki neredeyse en düşük faydayı kazandıracak seçeneği seçtirdiğini görürüz. Burada oyun kuramsal mantık ile sezgiler arasındaki çatışmanın ortaya koyulabildiği bir örnek ortaya çıkmaktadır. Gerçek hayat oyuncularının "2" seçimini yapmasının pek de sezgisel olmadığı söylenebilir.

Basu (2007)'deki çalışmasında *Ortalamanın ¾'ü* oyunu ile aynı özelliklere sahip *Yolcunun Çıkmazı* oyunundaki yukarıda açıklanan paradoks için yaptığı yorumda aşağıdakileri söylemiştir:

> *"Rasyonelliğe ortak inanç varsayımının mantık ile sezgi arasındaki çatışmanın kaynağı olduğuna inanıyorum. Yolcunun Çıkmazı oyununda sezgiler haklıdır ancak daha farklı bir mantık ile doğrulanmayı beklemektedir. Bu problem, matematikte çok güvenilen set teorisinin paradokslara yol açması sebebiyle ileride yanlış olduğu sonucuna varılmasına benzemektedir. Tıpkı set teorisinin terk edildiği gibi rasyonelliğe ortak inanç varsayımının da oyun kuramcıları tarafından terk edileceğini düşünüyorum."*

Ortalamanın ¾'ü oyunu ile ilgili başka bir konu ise Bertrand duopolü ile olan benzerliğidir. Bertrand (1883)'deki çalışmasında; aynı maliyetle homojen ürün üreten, iş birliği yapmayan ve aynı anda fiyat belirleyen iki firmanın bulunduğu duopol bir piyasada, firmaların en doğru fiyat stratejilerini incelemiştir. Sonuç olarak firmalar, tüketicilerin düşük fiyatlı ürünü tercih etmesinden dolayı, fiyat kıracağı[13] için belirlenmesi gereken fiyatın ürünün maliyetine eşit olduğu bulunmuştur. Bertrand rekabetinin *Ortalamanın ¾'ü* oyunu ile benzer yanı, rakipten düşük fiyat seçmeye teşvik olması ancak düşük seçeneklerin düşük performans göstermesidir. Bertrand çözümü, Nash dengesi ve rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim stratejisi ile aynı düşünceye sahiptir. Ancak tıpkı *Ortalamanın ¾'ü* oyununda olduğu gibi oyundaki neredeyse en düşük faydanın kazanılmasına yol açacak seçeneğin, yani ürünün maliyetinin, seçilmesini söyler. Bertrand çözümü her ne kadar ürünün maliyetine satılmasını mantıklı bir şekilde açıklasa da gerçek hayatta duopol piyasalarda ürünlerin maliyetine yakın satılmadığı bir gerçektir. Çünkü gerçek hayat oyuncuları deneyimizde de gösterileceği üzere rasyonelliğe ortak inanç mantığına değil faydayla orantılı inançlar mantığına daha yakındır.

5.1.3 Deneklerin Verdiği Kararlar

[13] Fiyat kırmak: Fiyatı düşürmek, fiyatı indirmek.

EK-2'de yer alan anket 19 kişiye dağıtılarak cevaplar alınmıştır. Deneklerin *Ortalamanın ¾'ü* oyununda verdikleri cevaplar Çizelge 5.1.'de bulunmaktadır.

Denek numarası	**Cevap**	**Denek numarası**	**Cevap**
1	52	**11**	8
2	40	**12**	3
3	71	**13**	66
4	70	**14**	37
5	36	**15**	99
6	12	**16**	56
7	7	**17**	63
8	45	**18**	4
9	35	**19**	76
10	45		

Çizelge 5.1. Denek cevapları

Oyuncular en düşük 3, en yüksek 99 cevabını vermiştir. Oyuncuların verdiği cevapların ortalaması 43,42'dir. Deneyde katılımcılara toplamda 8 lira kazanç dağıtılmıştır. Bu kazançlar kendilerine deney sonunda rasgele eşleştirildikleri rakiplerinin bilgileri ile birlikte verilmiştir.

5.1.4. Ortalamanın ¾'ü Oyununun PB Metoduyla Analiz Edilmesi

PB metodu, *Ortalamanın ¾'ü* oyunu gibi iki kişilik-statik-iş birliksiz ve tam bilgili oyunlarda kullanılmaktadır. Bu metot, oyuncunun faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında seçebileceği rasyonel seçeneği bulur.

Daha detaylı açıklayacak olursak, öncelikle oyuncuların faydayla orantılı temel inançlarını hesaplar. Temel inanç, rakibin her bir seçeneğinin ortalama faydaları hesaplanıp bu faydalarla orantılı seçeneklerini seçme olasılıkları atanarak bulunur. Temel inanca sahip bir oyuncu, rakibinin rakip faydalarına bakmadan yalnız kendi faydalarıyla orantılı seçim yapacağına inanan oyuncu demektir. Ardından faydayla orantılı inançlara 2-katlı inançlar hesaplanır. Bu inanca sahip oyuncu, rakibinin temel inanca sahip olduğuna inanıyor demektir. Başka bir deyişle, rakibinin rakibinin rakip faydalarına bakmadan yalnız kendi seçeneklerinin ortalama faydasıyla orantılı seçim yapacağına inanarak atadığı olasılıklarla hesapladığı beklenen faydalarıyla orantılı seçim yapacağına inanıyor demektir. Sonrasında faydayla orantılı inançlara 3-katlı inançlar hesaplanır. Bunun yapılabilmesi için rakibin faydayla orantılı 2-katlı inanca sahip olduğu inancını oluşturması gerekir. Benzer şekilde inanç basamakları her seferinde rakibin bir önceki inanç basamağında olduğu inancıyla çıkılır. Olasılıklar bir noktadan sonra önceki basamakla aynı çıkmaya başladığında oyuncuların *faydayla orantılı inançlara ortak inancı* bulunmuş demektir. Başka bir deyişle, oyuncu rakibinin seçeneklerini seçme olasılıklarını faydayla orantılı inançlara ortak inanç mantığıyla hesaplamıştır. Son olarak da rakibin bu olasılıklarla seçim yapacağı inancıyla hesaplanan, oyuncunun seçeneklerinin beklenen faydaları arasından en yüksek, yani rasyonel, seçeneği belirlenir. Bu seçenek PB metodunun oyuncuya tavsiye ettiği seçenektir.

Ancak bazen olasılıklar önceki basamakla hiç aynı çıkmayabilir. Bu durumda olasılıklar hesaplanırken kullanılan orantısallık faktörü λ bir miktar küçültülerek hesaplamalar baştan tekrarlanır ve olasılıklar önceki basamakla aynı çıkana kadar bu işlem sürdürülür.

Bütün bu işlemler EK-1'de kodları verilen C# programı ile gerçekleştirilmiştir. Bu programın görevi; iki oyunculu-statik-iş birliksiz ve tam bilgili oyunlarda kullanılan PB metodunu uygulayarak, faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncuların rasyonel seçeneklerini bulmaktır.

Ortalamanın ¾'ü oyununun fayda matrisi PB metodu ile analiz yapan programa girildiğinde sonuç olarak 37 seçeneğini vermiştir. Bunun anlamı, *Ortalamanın ¾'ü oyununda oyuncuların faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında seçebilecekleri rasyonel seçenek 37'dir* demektir. Program bu sonuca 1 saat boyunca hesap yaparak ulaşabilmiştir ve ancak $\lambda=0{,}77*\lambda^{max}$ alınarak olasılıkların bir noktaya yığılması sağlanabilmiştir.

5.1.5 PB Metoduyla Elde Edilen Sonuçların Deney ile Karşılaştırılması

Ortalamanın ¾'ü oyunu PB metodu ile analiz edildiğinde oyuncuların 37 seçmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Yapılan deneyde ise oyuncuların cevaplarının ortalaması 43,42'dir. Burada sorulması gereken soru: Gazi Üniversitesi Ekonometri Lisans bölümündeki öğrenciler arasından basit rasgele örneklem metoduyla seçilen 19 kişinin *Ortalamanın ¾'ü* oyunundaki cevapları, ortalaması 37 olan kitleden mi alınmıştır?

Bu sorunun cevabı için tek örneklem t- testi gerçekleştirilmelidir. Bu test parametrik bir test olduğu için öncelikle denek cevaplarının normal dağılıma sahip olduğu gösterilmelidir. Çizelge 5.2.'de deneklerin cevaplarına normallik testlerinin uygulandığı SPSS çıktısı yer almaktadır. Hem Kolmogorov-Smirnov hem de Shapiro-Wilk testi sonuçlarına göre anlamlılık değerleri 0,1'den büyük olduğu için %90 güvenle *örnek dağılımının normal olduğu reddedilemez.*

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Cevaplar	.136	19	.200*	.949	19	.374

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Çizelge 5.2. Denek cevaplarına SPSS'de uygulanan normallik testleri sonuçları

Verilerin normal dağıldığı gösterildiğine göre parametrik bir test olan tek örneklem t- testi gerçekleştirilebilir. Hipotezimiz:

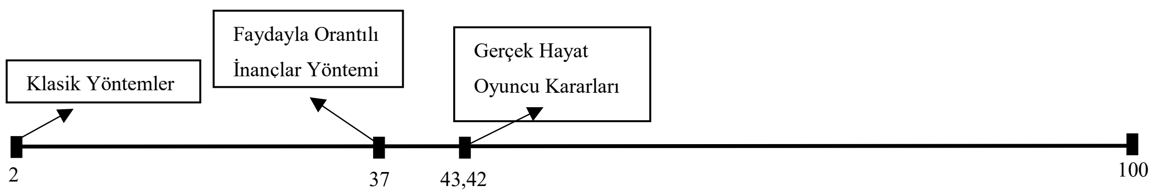
H_0: μ=37

H_A: $\mu \neq 37$

şeklinde kurulur. Sonuç olarak, $t = 1{,}015 < t_c = 1{,}734$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilemez. Deneklerin cevapları, ortalaması 37 olan kitleyi %90 güvenle ∓10 hata payı ile temsil etmektedir.

5.2. Deney Sonucu

Denek cevapları ile PB metodu sonuçlarının uyumlu olduğu gösterildi. Ancak oyun kuramındaki en popüler çözüm yöntemleri olan Nash dengesi ve kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonuna göre bu oyunda deneyle pek de uyumlu olmayan "2" seçimi yapılmalıdır. Bu sonuç deneklerin verdiği ortalama cevap olan 43,42'den oldukça farklıdır. Bu durum Şekil 5.2.'de görselleştirilmiştir.



Şekil 5.2. PB metodu sonuçlarının deney ve klasik yöntemlerle karşılaştırılması

Klasik yöntemlerle elde edilen sonucun gerçek hayat oyuncu davranışlarından bu kadar uzak olmasının sebebi, klasik yöntemlerde rakibin irrasyonel seçim yapma ihtimalinin hesaba alınmamasıdır. Faydayla orantılı inançlar kavramıyla çözüm yapan PB metodunda ise irrasyonel seçimlere faydayla orantılı düşük olasılıklar verilir. Bu şekilde yürütülen mantığa, gerçek hayat oyuncularının daha yakın olduğu tedbirli mantık denir. Gerçek hayat oyuncuları tedbirli mantığa sahip olduğu için ve bu mantığın düşüncesini faydayla orantılı inançlar yöntemi yakaladığı için PB metodu denek cevaplarıyla uyumlu sonuçlar vermiştir.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

John Nash'in, denge kavramını kanıtladığı gün aynı saatlerde iki tane matematikçi -Melvin Dresher ve Merril Flood- bu kavramı test etmek için hemen işe koyuldular. Nash'in denge kavramının insan davranışlarıyla tutarlı olduğu konusunda şüphe duydukları için deneysel bir çalışma gerçekleştirdiler. Sonradan mahkûmun çıkmazı olarak anılan oyunu bir grup insana oynattılar ve şüphelerini haklı çıkaracak sonuçlar elde ettiler (Goeree ve Holt, 2001). Her ne kadar John Nash bu deneyin gerçekçiliğini ikna edici bir şekilde eleştirmiş olsa da bu matematikçilerin oyun kuramındaki teorik gelişmeleri deneylerle destekleme gayretleri takdir edilebilir türdendir. Teorik ve deneysel çalışmalar oyun kuramında birbirine sıkı sıkıya bağlıdır ve gelişmenin sadece iki alandaki ilerlemelerle başarılabileceği söylenebilir. Bu düşünceyle tezde, literatürde ilk defa algoritması verilerek tanıtılan faydayla orantılı inançlar yöntemi aynı zamanda deneysel bir çalışmayla da desteklendi.

Deneyde bir grup insana oyun kuramının alanına giren, kararlardan elde edilecek sonuçların rakibin kararına bağlı olduğu bir oyun oynatıldı. İlk defa Kaushik Basu'nun (1994)'de Yolcunun Çıkmazı isminde tanıttığı bu oyunun deneyde bulunmasının sebebi, oyun kuramındaki klasik çözüm yöntemleriyle analiz edildiğinde sezgilerden ve dolayısıyla gerçek hayat oyuncularının kararlarından uzak sonuçların elde edildiği bir oyun olmasıydı. Basu'nun, paradoks olarak tanımladığı bu oyun için "sezgiler haklıdır ancak farklı bir mantık ile ileride açıklanacaktır" demesinin üzerinden 20 yıl geçti ve bu farklı mantık (2014)'de Perea ve Bach tarafından faydayla orantılı inançlar yönteminin içerdiği mantık olarak açıklandı. Tezde aradaki köprü kurularak Basu'nun tanıttığı oyun, Perea ve Bach'ın tanıttığı faydayla orantılı inançlar yöntemiyle analiz edildi. Deneyin sonucunda deneklerin verdiği kararların, faydayla orantılı inançlar yöntemiyle tahmin edilebildiği görüldü. Diğer yandan Nash dengesi ve kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eliminasyonu gibi klasik yöntemlerin bu oyunda hem sezgisel hem de denek kararlarına uzak tavsiyeler verdiği de gösterildi.

Tezde araştırmacıların, Nash dengesini eleştiren ifadelerinden sıkça alıntılar yapılmış olsa da Nash dengesinin tamamen terkedilmesi gerektiği düşünülmemelidir. Sadece henüz ayrıntılı bir şekilde sınıflandırılamayan türde bazı oyunların, Nash dengesiyle analiz edildiğinde uygun sonuçlar vermediği bilinmelidir. Bu oyunlardan birisi bu tezde de gösterildiği üzere yolcunun çıkmazı oyunudur. Yolcunun çıkmazı oyunu ile ifade edilen stratejik etkileşim durumlarında, rakibin seçimini kırmaya teşvik vardır ancak düşük seçenekler az fayda sağlayacağı için bir yandan da yüksek seçenek seçmeye teşvik vardır. Günlük hayatta farkında olmadan bu oyunu sıkça oynamaktayız. Örneğin iş görenler veya öğrenciler, arkadaşlarına "seviyeyi yükseltme" diyerek sitem ederler. Bunu söylemekteki amaçları, herkes az çalışarak çok fayda elde edebilecekken bireysel faydasını artırmaya çalışanların bu düzeni bozmasını engellemektir.

Bu tip oyunlarda deneyde de gösterildiği üzere faydayla orantılı inançlar yöntemi Nash dengesinden daha sezgisel tavsiyeler vermektedir. Benzer şekilde faydayla orantılı inançlar yönteminin ayırt edici özelliklerinin görülebileceği başka oyunlar ileri ki araştırmalara konu olabilir. Böylece tıpkı dinamik oyunların analizinde Nash dengesinin bırakılıp farklı bir çözüm yönteminin (alt oyun mükemmel Nash dengesi) kabul görmesi gibi faydayla orantılı inançlar yönteminin de kabul göreceği bir oyun sınıfının sınırları ileride daha rahat çizilebilir.

Geçmişte araştırmacıları çözüm metotları geliştirmeye iten dürtülerden birisi, oyun sınıflarının farklı özelliklerine uyacak bir analize ihtiyaç duymalarıydı. Ancak bir noktadan sonra bir adım geri atarak büyük resmi gördüler ve oyun sınıflarına değil oyunun temelindekilere odaklandılar. Oyuncular, seçenekler ve faydalar haricinde oyunlarda bulunan farklı bir bileşen üzerinde durdular. Bu bileşen rakip mantığıydı. Rakip mantığını da hesaplara katmanın epistemolojik olarak doğru bir yaklaşım olduğunu düşündüler. Bu yüzden tezin çalışma alanı olan epistemik oyun kuramı, belli bir oyun sınıfına sokulamaz ancak oyunlara modern bir yaklaşım olarak tanımlanabilir. Epistemik oyun kuramı, oyuncuların birbirleri hakkında yürüttükleri mantığın ve birbirlerinin mantığı hakkında yürüttükleri mantığın, kararlarını nasıl etkilediğine çalışır. Epistemik yaklaşıma sahip faydayla orantılı inançlar yöntemi henüz sadece statik oyunlarda uygulanabilse de bu yöntemin yaratıcıları şu an dinamik oyunlara da uyarlama üzerinde çalışmaktadır. Çalışmaları tamamlandığı takdirde, yöntemlerinin laboratuvar deneyleriyle test edilmesi talebi oluşacaktır. Bu da ileriki çalışmalara konu olabilir.

Sonuç olarak bu tezde, oyun kuramı alanındaki son gelişmelerin yakalanması amaçlanmış ve bu gelişmeler kullanılarak önemli problemlerin analizinde anlamlı farklılıklar yaratabilecek kararların verilebilmesini sağlayacak bir karar verme yöntemi olan faydayla orantılı inançlar yöntemi tanıtılmıştır. Tezde toplum için önem yaratacak bir uygulamaya yer verilmemiş olsa da ileriki çalışmalarda bu tip uygulamalarda, kararların oyun kuramındaki son gelişmeler yardımıyla verilebilmesine olanak sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

Asheim, G. (2001). "Proper Rationalizability in Lexicographic Beliefs". ***International Journal of Game Theory***, 30(4), 453-478.

Armbruster, W., Böge, W. (1979). "Bayesian Game Theory". In O. Moeschlin, D. Pallaschke (Eds.), *Game Theory and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam.

Aumann, R. (1987). "Game Theory". In J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman (Eds.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Macmillan, London, 460-482.

Aumann, R., Maschler, M. (1985). "Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud". ***Journal of Economic Theory***, 36(2), 195-213.

Aumann, R. (1974). "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies". ***Journal of Mathematical Economics***, 1(1), 67-96.

Aumann, R., Maschler M. (1995). **Repeated Games with Incomplete Information**. MIT Press.

Aumann, R. (1976). "*Agreeing to Disagree*". ***Annals of Statistics*** 4(6), 1236-1239.

Axelrod, R. (1984). **The Evolution of Cooperation**. Basic books.

Bach, C., Cabessa, J. (2012). "Common Knowledge and Limit Knowledge". ***Theory and Decision***, 73(3), 423-440.

Bacharach, M. (1997). "The Epistemic Structure of a Theory of a Game". In M. Bacharach, L. Gerard-Varet, P. Mongin, H. Shin (Eds.), *Epistemic Logic and the Theory of Games and Decisions*, Kluwer Academic Publishers.

Bashiru, A. (2015). *Game Theory Model of Consumers Response to Service Offers. A Case Study of MTN-Ghana and Vodafone-Ghana in the Tamale Metropolis.* Yüksek Lisans Tezi, Kwame Nkrumah University of Science and Technology, Kumasi.

Basu, K. (1994). "The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory". ***The American Economic Review***, 84(2), 391-395.

Basu, K. (2007). "The Traveler's Dilemma". ***Scientific American***, 296(6), 90-95.

Başer, O. (2017). *Epistemik Oyun Teorisi Algoritmaları: "EpistemicGameTheory" R Paketi.* Doktora Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul.

Bernheim, B. (1984). "Rationalizable Strategic Behaviour". ***Econometrica*** 52(4), 1007-1028.

Bertrand, J. (1883). "Recherches sur la Theorie Mathematique de la Richesse". ***Journal des Savants***, 67, 499-508.

Binmore, K. (2007). **Game Theory A Very Short Introduction**. Oxford University Press.

Binmore, K., Klemperer, P. (2002). “The Biggest Auction Ever: The Sale of the British 3G Telecom Licenses”. ***The Economic Journal*** 112(478), 74-96.

Bonanno, G. (2012). *Epistemic Foundations of Game Theory*. Working Paper, University of California Davis.

Bonanno, G. (2018). **Game Theory**. (2nd Edition). CreateSpace Independent Publishing Platform.

Borel, E. (1921). “La Theorie du jeu et les Equations Integrales a Noyau Symetrique”, ***Comptes Rendus Hebdomadaire des Seances de l’Academie des Sciences***, 173, 1304– 1308.

Borel, E. (1924). **Elements de la Theorie des Probabilites**. Paris: J. Hermann.

Borel, E. (1927). “Sur les Systèmes de Formes Linéaires a Déterminant Symetrique Gauche et la Theorie Générale du jeu”, ***Comptes Rendus Hebdomadaire des Séances de l’Academie des Sciences*** 184, 52–54.

Böge, W., Eisele, T. (1979). “On Solutions of Bayesian Games”. ***International Journal of Game Theory*** 8(4), 193-215.

Brandenburger, A. (2010). “Origins of Epistemic Game Theory”. In V. F. Hendricks and O. Roy (Eds.), *Epistemic Logic: Five Questions*. Automatic Press, 59-69.

Brandenburger, A. (2008). “Epistemic Game Theory: Complete Information”. In S. Durlauf, L. Blume (Eds.), *The New Palgrave Dictionary of Economics (2nd Edition)*, London: Palgrave Macmillan.

Brandenburger, A. (2014). **The Language of Game Theory: Putting Epistemics into the Mathematics of Games**. World Scientific Publishing Company.

Chiappori, P., Levitt, S., Groseclose, T. (2002). “Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer”. ***American Economic Review***, 92(4), 1138-1151.

Cinemre, N. (2011). **Yöneylem Araştırması**. 2. Basım. İstanbul: Evrim Yayınevi.

Cournot, A. (1838). ***Recherches sur les Principes Mathématiques de la Theorie des Richesses***. Paris: Hachette.

Çubukçu, H. A. (2016). *Oyun Teorisi ve Bir Uygulama.* Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

Damme, E. (1995). "On the Contributions of John C. Harsanyi, John F. Nash and Reinhard Selten". ***International Journal of Game Theory***, 24(2), 3-11.

Dekel, E., Siniscalchi, M. (2015). "Epistemic Game Theory". In P. Young, S. Zamir (Eds.), *Handbook of Game Theory, Volume 4*, North Holland, 619-702.

Doyle, A. (1893). "The Adventures of Sherlock Holmes: The Adventure Of The Final Problem". ***Strand Magazine*** 36, 558-570.

Dutta, P. (1999). ***Strategies and Games: Theory and Practice***. MIT Press.

Erşen, E. (2013). *Karar Problemlerinin Çözümü İçin Oyun Teorisi ve Coğrafi Bilgi Sistemleri Tabanlı Bütünleşik Bir Yaklaşım.* Yüksek Lisans Tezi, Kara Harp Okulu, Ankara.

Forgo, F. (2004). "John von Neumann's Contribution to Modern Game Theory". ***Acta Oeconomica***, 54(1), 73-84.

Fréchet, M. (1953). "Commentary on the Three Notes of Émile Borel". ***Econometrica***, 21(1), 118-124.

Friedell, M. (1967). *On the Structure of Shared Awareness*. Working Paper, University of Michigan.

Friedell, M. (1969). "*On the Structure of Shared Awareness*". ***Behavioral Science*** 14, 28-39.

Geanakoplos, J., Pearce D. (1989). "Psychological Games and Sequential Rationality". ***Games and Economic Behavior***, 1(1), 60-79.

Gediklioğlu, Z. (2012). *İMKB'de Sektörel Yatırımın Oyun Teorisi ile Analizi.* Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul.

Gibbons, R. (1992). **A Primer in Game Theory**. Pearson Higher Education.

Goeree, J., Holt, C. (2001). "Ten Little Treasures of Game Theory and Ten Intuitive Contradictions". ***The American Economic Review***, 91(5), 1402-1422.

Güth, W., Schmittberger, R., Schwarze, B. (1982). "An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining". ***Journal of Economic Behavior and Organization***, 3(4), 367-388.

Harsanyi, J. (1967). "Games of Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part I. The Basic Model". ***Management Science***, 14(3), 159-182.

Harsanyi, J. (1968). "Games of Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part II. Bayesian Equilibrium Points". ***Management Science***, 14(5), 320-334.

Harsanyi, J. (1968). "Games of Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part III. The Basic Probability Distribution of the Game". ***Management Science***, 14(7), 486-502.

Harsanyi, J. (1962). "Bargaining in Ignorance of the Opponent's Utility Function". ***The Journal of Conflict Resolution*** 6(1), 29-38.

Hoelle, M. (2004). **Game Theory**. Teaching Manuscript.

Hotelling, H. (1929). "Stability in Competition". ***Economic Journal***, 39(153), 41-57.

Howson, J. (1972). "Equilibria of Polymatrix Games". **Management Science**, 18(5), 312-318.

Hyksova, M. (2004). "Several Milestones in the History of Game Theory". ***VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik*, **Wien.

Hu, L. (2016). *Algorithms of Game Theory, VAR Model and Neuron Model and Their Applications to Chinese Regional Finance.* Doktora Tezi, University of Toyama, Toyama.

Jagau, S., Perea, A. (2017). *Common Belief in Rationality in Psychological Games*. Working Paper, Epicenter.

Janovksaya, E. (1968). "Equilibrium Situations in Multi-Matrix Games". ***Litovskii Matematicheskii Sbornik***, 8, 381-384.

Kjeldsen, T. (2001). "John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts". ***Archive for History of Exact Sciences***, 56(1), 39-68.

Koçkesen, L., Ok, E. (2007). **An Introduction to Game Theory**. Lecture Notes.

Külcü, Ö. (2000). "Kuramsal Bilginin Oluşumu ve Toplumsal Bilgiye Dönüşümünde Epistemoloji Bilgi Hizmetleri İlişkisi". ***Türk Kütüphaneciliği***, 14(4), 386-411.

Lewis, D. (1969). **Convention: A Philosophical Study**. Harvard University Press.

Leyton-Brown, K., Shoham, Y. (2008). **Essentials of Game Theory: A Concise Multidisciplinary Introduction**. Morgan and Claypool Publishers.

Luce, R., Raiffa, H. (1957). **Games and Decisions: Introduction and Critical Survey**. New York: Dover Publications.

McCarty, N., Meirowitz, A. (2007). **Political Game Theory: An Introduction**. Cambridge University Press.

McKelvey, R., Palfrey, T. (1995). "Quantal Response Equilibria for Normal Form Games". ***Games and Economic Behavior***, 10(1), 6-38.

Morgenstern, O. (1928). **Wirtschaftsprognose: eine Untersuchung ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten**. Wien: J. Springer.

Morgenstern, J. (1935). "Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht". ***Zeitschrift für Nationalökonomie***, 6(3), 337-357.

Mounir, A. (2016). *Essays on Bounded Rationality in Epistemic Game Theory*. Doktora Tezi, Maastricht University, Limburg.

Myerson, R. (1999). "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory". ***Journal of Economic Literature***, 37(3), 1067-1082.

Nash, J. (1950a). "The Bargaining Problem". ***Econometrica***, 18(2), 155-162.

Nash, J. (1950b). "Equilibrium Points in N-person Games". ***Proceedings of the National Academy of Sciences USA***, 36(1), 48-49.

Nash, J. (1951). "Non-cooperative Games". ***The Annals of Mathematics***, 54(2), 286-295.

Nauerz, C. T. (2016). *Reasoning About (Strategic) Decisions Under Uncertainty.* Doktora Tezi, Maastricht University Economics, Limburg.

Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., Vazirani, V. (2007). **Algorithmic Game Theory**. Cambridge University Press.

Osborne, M. (2003). **An Introduction to Game Theory**. Oxford University Press.

Osborne, M., Rubinstein, A. (2011). **A Course in Game Theory**. MIT Press.

Pacuit, E., Roy, O. (2015). "Epistemic Foundations of Game Theory". In E. N. Zalta (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Papadimitriou, C., Roughgarden, T. (2008). "Computing Correlated Equilibria in Multi-Player Games". ***Journal of the ACM***, 55(3), 1-32.

Parichiru, P., Pita, J., Jain, M., Ordonez, F., Portway, C., Tambe, M., Western, C. and Kraus, S. (2014). "Using Game Theory for Los Angeles Airport Security". ***AI Magazine***, 30(1), 43-57.

Perea, A. (2012). **Epistemic Game Theory: Reasoning and Choice**. Cambridge University Press.

Perea, A. (2013). "From Classical to Epistemic Game Theory". ***International Game Theory Review***, 16(1), 1-22.

Perea, A., Bach C. (2014). "Utility Proportional Beliefs". ***International Journal of Game Theory***, 43(4), 881-902.

Perea, A. (2018). *Epistemic Game Theory*. Working Paper, Prepared for Handbook of Rationality.

Polak, B. (2007b). *ECON 159 Lecture 4: Best Responses in Soccer and Business Partnerships.* Open Yale Courses, Yale University, New Haven-USA.

Polak, B. (2007c). *ECON 159 Lecture 10: Mixed Strategies in Baseball, Dating and Paying Your Taxes.* Open Yale Courses, Yale University, New Haven-USA.

Polak, B. (2007a). *ECON 159 Lecture 13: Sequential Games: Moral Hazard, Incentives, and Hungry Lions.* Open Yale Courses, Yale University, New Haven-USA.

Rapoport, A. (1966). **Two-Person Game Theory**. The University of Michigan Press.

Rapoport, A. (1967). "Escape from Paradox". ***Scientific American***, 217(1), 50-59.

Reel, Y. (2010). "Mekanizma Tasarımı Teorisi ve Uygulamaları". ***Marmara Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi***, 28(1), 57-70.

Reichenbach, H. (1938). **Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge**. University of Chicago Press.

Rose, C. (2010). "Game Stories". ***Yale Journal of Law and the Humanities***, 22, 369-391.

Rosenthal, R. (1989). "A Bounded Rationality Approach to the Study of Noncooperative Games". ***International Journal of Game Theory***, 18(3), 273-292.

Roth, A., Sönmez, T., Ünver, M. (2004). "Kidney Exchange". ***The Quarterly Journal of Economics***, 119(2), 457-488.

Roughgarden, T. (2010). "Algorithmic Game Theory". ***Communications of the ACM***, 53(7),78-86.

Schaffer, J., Burch, N., Björnsson, Y., Kishimoto, A., Müller, M., Lake, R., Lu, P., Sutphen S. (2007). "Checkers is Solved". ***Science***, 317(5844), 1518-1522.

Schelling, T. (1960). **The Strategy of Conflict**. Harvard University Press.

Schelling, T. (1958). **Prospectus for a Re-Orientation of Game Theory**. The Rand Corporation.

Schuhmacher, F. (1999). "Proper Rationalizability and Backward Induction". ***International Journal of Game Theory***, 28(4), 599-615.

Schwalbe, U., Walker, P. (2001). "Zermelo and the Early History of Game Theory". ***Games and Economic Behavior***, 34(1), 123-137.

Selten, R. (1965). "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit". ***Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft***, 121(2), 301-324 und 121(4), 667-689.

Selten, R. (1978). "The Chain Store Paradox". ***Theory and Decision***, 9(2), 127-159.

Smith, J., Price, G. (1973). "The Logic of Animal Conflict". ***Nature***, 246, 15-18.

Smith, J. (1982). **Evolution and the Theory of Games**. Cambridge University Press.

Soytaş, U. (2011). *Contributions of Games Theory in Entry Detterence Literature and an Application of Evolutionary Games Theory.* Yüksek Lisans Tezi, Texas Tech University, Texas.

Stalnaker, R. (1996). "Knowledge, Belief and Counterfactual Reasoning in Games". ***Economics and Philosophy***, 12(2), 133-163.

Stewart, I. (1999). "A Puzzle for Pirates". ***Mathematical Recreations***, 98-99.

Şahin, N. (2016). *Oyun Teorisi ve Askeri Alanda Uygulamaları.* Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Tan, W., Werlang, S. (1988). "*The Bayesian Foundations of Solution Concepts of Games*". ***Journal of Economic Theory*** 45(2), 370-391.

The Royal Swedish Academy of Sciences (2005). ***The Prize in Economic Sciences Press Release 2005***.

The Royal Swedish Academy of Sciences (2012). ***The Prize in Economic Sciences Press Release 2012***.

Tzu, S. (2017). *Savaş Sanatı* (Çev. B. Satılmış). Ege Basım Yayın. (Eserin orijinali M.Ö. 400'de yayımlandı).

Walker, P. (1995). *An Outline of the History of Game Theory.* Discussion Paper, University of Canterbury, Christchurch.

Weerd, H., Verbrugge, R. and Verheij, B. (2013). "How much does it help to know what she knows you know? An agent-based simulation study". ***Artificial Intelligence***, 199-200, 67-92.

Weerd, H., Verbrugge, R. and Verheij, B. (2014). "Agent-based models for higher-order theory of mind". In B. Kaminski, G. Koloch (Eds.), *Advances in Social Simulation*. 213-224.

Velegol, D., Suhey, P., Connoly, J., Morrissey, N., Cook, L. (2018). "Chemical Game Theory". ***Industrial and Engineering Chemistry Research***, 57(41), 13593-13607.

von Neumann, J. (1928). "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele". ***Mathmatische Annalen***, 100(1), 295-320.

von Neumann, J. (1953). "Communication on the Borel Notes". ***Econometrica***, 21(1), 124-125.

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). ***Theory of Games and Economic Behavior***. USA: Princeton University Press.

von Stackelberg, H. (1934). ***Marktform und Gleichgewicht***. Berlin: J. Springer.

Zermelo, E. (1913). "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels". ***Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians***, 501-504.

EKLER

EK-1 PB metodunu uygulayan C# programı algoritması

Açıklama: Bu program, 2-oyunculu-statik-tam bilgili-işbirliksiz oyunlarda PB metoduyla (faydayla orantılı inançlar yöntemiyle) karar vermek için kullanılır. Programa fayda matrisi girildiğinde bir dizi işlem sonucunda çıktı olarak, faydayla orantılı inançlara ortak inanç altında oyuncuların seçeneklerini seçme olasılıkları verilir. Kullanıcının seçmesi gereken seçenek, olasılığın en yüksek olduğu rasyonel seçenektir.

```
 class Program
  {
     private static double Lmaxbulti(int z, int Cj, double[] Ujcjtj, double maksimumUj, double
minimumUj)
     {
        double[] biticjtj = new double[Cj];
        double L = 0;
        double toplam = 1;

        while (toplam >= 0.9999 && toplam <= 1.0001)
        {
           toplam = 0;
           for (int i = 0; i < Cj; i++)
           {
              biticjtj[i] = 1 / Convert.ToDouble(Cj) + (L * 0.000001 * (Ujcjtj[i] - Ujcjtj.Average())) /
(maksimumUj - minimumUj);

              if (biticjtj[i] >= 0 && biticjtj[i] <= 1)
              {
                 toplam = toplam + biticjtj[i];
              }
           }
           L++;
        }
        return z * 0.01 * (L - 2) * 0.000001;
     }

     private static double Lmaxbultj(int z, int Ci, double[] Uiciti, double maksimumUi, double
minimumUi)
     {
        double[] bjtjciti = new double[Ci];
        double L = 0;
        double toplam = 1;

        while (toplam >= 0.9999 && toplam <= 1.0001)
        {
           toplam = 0;
           for (int i = 0; i < Ci; i++)
           {
              bjtjciti[i] = 1 / Convert.ToDouble(Ci) + (L * 0.000001 * (Uiciti[i] - Uiciti.Average())) /
(maksimumUi - minimumUi);

              if (bjtjciti[i] >= 0 && bjtjciti[i] <= 1)
              {
```

```
                toplam = toplam + bjtjciti[i];
            }
        }
        L++;
    }
    return z * 0.01 * (L - 2) * 0.000001;
}

static void Main(string[] args)
{
    //(Start)
Girdiler.______________________________________________________________________________
_____________

    //Oyuncuların seçenek sayıları Ci ve Cj değişkenlerine atandı.
    Console.Write("Enter the number of choices player i has: ");
    int Ci = Convert.ToInt16(Console.ReadLine());
    Console.Write("Enter the number of choices player j has: ");
    int Cj = Convert.ToInt16(Console.ReadLine());
    //____________________________________________________________

    Console.WriteLine();

    //Oyuncuların fayda matrisi utilityfunction 3-boyutlu dizisine atandı ve ekrana yazdırıldı.
    double[,,] utilityfunction = new double[Ci, Cj, 2];

    for (int i = 0; i < Ci; i++)
    {
        for (int j = 0; j < Cj; j++)
        {
            Console.Write("Ui(Ci-{0}, Cj-{1})= ", i + 1, j + 1);
            utilityfunction[i, j, 0] = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
            Console.Write("Uj(Ci-{0}, Cj-{1})= ", i + 1, j + 1);
            utilityfunction[i, j, 1] = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
        }
    }

    Console.WriteLine();

    for (int i = 0; i < Ci; i++)
    {
        for (int j = 0; j < Cj; j++)
        {
            Console.Write("({0},{1})\t", utilityfunction[i, j, 0], utilityfunction[i, j, 1]);
        }
        Console.WriteLine();
    }
    //_______________________________________________________________________

    Console.WriteLine();

    //MaksUi, MinUi, MaksUj, MinUj değerleri hesaplatılıp ekrana yazdırıldı.
    double maksimumUi = utilityfunction[0, 0, 0];
    double minimumUi = utilityfunction[0, 0, 0];

    double maksimumUj = utilityfunction[0, 0, 1];
```

```
double minimumUj = utilityfunction[0, 0, 1];
for (int i = 0; i < Ci; i++)
{
   for (int j = 0; j < Cj; j++)
   {
      for (int z = 0; z < 2; z++)
      {
         if (z == 0 && utilityfunction[i, j, z] > maksimumUi)
         {
            maksimumUi = utilityfunction[i, j, z];
         }
         if (z == 0 && utilityfunction[i, j, z] < minimumUi)
         {
            minimumUi = utilityfunction[i, j, z];
         }

         if (z == 1 && utilityfunction[i, j, z] > maksimumUj)
         {
            maksimumUj = utilityfunction[i, j, z];
         }
         if (z == 1 && utilityfunction[i, j, z] < minimumUj)
         {
            minimumUj = utilityfunction[i, j, z];
         }
      }
   }
}

Console.WriteLine("MaksUi= {0}, MinUi= {1}, MaksUj= {2}, MinUj= {3}\n", maksimumUi, minimumUi, maksimumUj, minimumUj);
//______________________________________________________________________

//(Finish)
Girdiler.______________________________________________________________________________________

double[] biticjtj = new double[Cj];
double[] bjtjciti = new double[Ci];

double[] Ujcjtj = new double[Cj];
double[] Uiciti = new double[Ci];

double Lmaxti;
double Lmaxtj;

int basamak = 10;
double[,] Uct = new double[basamak, Ci + Cj];//Bu diziye Uiciti dizisinin ve Ujcjtj dizisinin elemanları her bir satırın ilk sütunlarına sırasıyla ci sonra sırasıyla cj olacak şekilde atanıyor. Her satır inanç hiyerarşisi basamağını temsil ediyor. Yani 0. satır Ui(ci,ti-0) ve Uj(cj,tj-0) demek.

for (int i = 0; i < Cj; i++)
{
   biticjtj[i] = 1 / Convert.ToDouble(Cj);//Temel inançlar
}

for (int j = 0; j < Ci; j++)
```

```
            {
              bjtjciti[j] = 1 / Convert.ToDouble(Ci);
            }

            int kontrol = 0;

            for (int z = 100; z >= 0; z--)//Lambda-i-j max'ın katlarına göre olasılık bulmak için bu döngü
yaratıldı.
            {

              if (kontrol == 0)
              {

                for (int k = 1; k <= basamak; k++)
                {

                  for (int i = 0; i < Ci; i++)
                  {
                    Uiciti[i] = 0;
                  }

                  for (int j = 0; j < Cj; j++)
                  {
                    Ujcjtj[j] = 0;
                  }

                  //Beklenen faydalar hesaplanıyor
başlangıç.________________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________________
                  for (int i = 0; i < Ci; i++)
                  {
                    for (int j = 0; j < Cj; j++)
                    {
                      Uiciti[i] = Uiciti[i] + (biticjtj[j] * utilityfunction[i, j, 0]);
                    }
                    Console.WriteLine("Ui(c{0},ti-{1})= {2}", i + 1, k - 1, Uiciti[i]);
                    Uct[k - 1, i] = Uiciti[i];
                  }

                  Console.WriteLine();

                  for (int j = 0; j < Cj; j++)
                  {
                    for (int i = 0; i < Ci; i++)
                    {
                      Ujcjtj[j] = Ujcjtj[j] + (bjtjciti[i] * utilityfunction[i, j, 1]);
                    }
                    Console.WriteLine("Uj(c{0},tj-{1})= {2}", j + 1, k - 1, Ujcjtj[j]);
                    Uct[k - 1, (Ci + j)] = Ujcjtj[j];
                  }
                  //Beklenen faydalar hesaplanıyor
bitiş.___________________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________________

                  Console.WriteLine();
```

```
                    //Olasılıklar
hesaplanıyor(Başlangıç)______________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________________________
_____________
                    Lmaxti = Lmaxbulti(z, Cj, Ujcjtj, maksimumUj, minimumUj);
                    Console.WriteLine("Lmaxti= {0}\nL=0.01*{1}*Lmaxti={2}", Lmaxti, z, 0.01 * z * Lmaxti);
                    for (int i = 0; i < Cj; i++)//(bi(ti)(cj|tj)) olasılıkları yeniden tanımlandı.
                    {
                       biticjtj[i] = 1 / Convert.ToDouble(Cj) + (Lmaxti * (Ujcjtj[i] - Ujcjtj.Average())) /
(maksimumUj - minimumUj);
                       Console.WriteLine("(bi(ti-{0}))(cj-{1}|tj-{2})= {3} ", k, i + 1, k - 1, biticjtj[i]);
                    }

                    Console.WriteLine();

                    Lmaxtj = Lmaxbultj(z, Ci, Uiciti, maksimumUi, minimumUi);//j oyuncusunun tj-k türünün
elemanlarının olasılıkları hesaplanırken Lambda-i-j'nin alabileceği en yüksek değer bulunurken
Lmaxbultj metot'u kullanılıyor.
                    Console.WriteLine("Lmaxtj= {0}\nL=0.01*{1}*Lmaxtj={2}", Lmaxtj, z, 0.01 * z * Lmaxtj);
                    for (int i = 0; i < Ci; i++)//(bj(tj)(ci|ti)) olasılıkları yeniden tanımlandı.
                    {
                       bjtjciti[i] = 1 / Convert.ToDouble(Ci) + (Lmaxtj * (Uiciti[i] - Uiciti.Average())) /
(maksimumUi - minimumUi);
                       Console.WriteLine("(bj(tj-{0}))(ci-{1}|ti-{2})= {3}", k, i + 1, k - 1, bjtjciti[i]);
                    }
                    //Olasılıklar
hesaplanıyor(Bitiş)__________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________________________
_____________


Console.WriteLine("____________________________________________________________________________
______________________");
                    //Console.ReadLine();

                }

                double[,] Uctfark = new double[basamak - 1, Ci + Cj];//Her bir Uct satırını bir önceki satırdan
çıkarak bu diziye naklediliyor. Çünkü bir satırın bir önceki satırla aynı olması demek hiç fark olmaması
ya da 0.0001 gibi küçük bir fark olması demek o basamaktan sonra da fark olmayacağı yani o noktaya
yığılma olacağı anlamına gelir.

                for (int i = 1; i < basamak; i++)//Yukarıda açıklandığı gibi Uctfark dizisi oluşturuluyor
                {
                   for (int j = 0; j < (Ci + Cj); j++)
                   {
                      Uctfark[i - 1, j] = Uct[i, j] - Uct[i - 1, j];
                   }
                }

                int sayaç1 = 0, sayaç2 = -1;

                for (int i = 0; i < basamak - 1; i++)//Uctfark dizisi 1. satırdan başlayarak her seferinde bir
önceki satırdan fark olup olmadığı araştırılıyor. Fark yoksa uyarı veriyor.
                {
                   if (kontrol == 0)
```

```
                {
                    sayaç1 = 0;
                    for (int j = 0; j < (Ci + Cj); j++)
                    {
                        if ((Uctfark[i, j] <= 0.0001) && (Uctfark[i, j] <= 0.0001))
                        {
                            sayaç1 = sayaç1 + 1;
                        }
                    }
                    if (sayaç2 == sayaç1)
                    {
                        Console.WriteLine("\n\n\n{0}. adım bir önceki adımın aynısı\nPATERN
BULUNDU\n\n\n", i + 2);
                        kontrol = 1;
                    }
                    if (sayaç1 == (Ci + Cj))
                    {
                        sayaç2 = sayaç1;
                    }
                }
            }
        }
    }
    Console.Read();
  }
}
```

EK-2 Deneklere dağıtılan anket

Karar verme ile ilgili deneysel bir çalışmada bulunmaktasınız. Bu deneyi yapma amacımız oyuncu kararlarını incelemektir. Talimatları yerine getirdiğiniz takdirde oyundaki performansınıza bağlı olarak bir kazanç elde etmeniz söz konusu olacaktır. Yapmanız gereken sadece aşağıda tanımlanan tarafı olacağınız iki kişilik oyundaki seçiminizi kutuya yazmaktır. Deneyde bulunduğunuz için sizden herhangi bir ücret talep etmeyeceğiz. Rakibinizi deney sonunda rasgele belirleyeceğiz. Bunu yapmak için seçimlerinizin bulunduğu kağıtları toplayacak ve ikişerli olarak rasgele eşleştireceğiz.

Kazancınızın Hesaplanışı

Öncelikle deneye katıldığınız için oyunu kazansanız da kaybetseniz de size 25 kuruş vereceğiz. Ardından sizin ve eşleştiğiniz rakibinizin verdiği cevaplara göre elde edeceğiniz kazancı oyunda anlatıldığı gibi hesaplayacak ve deney sonunda size teslim edeceğiz.

OYUN: Ortalamanın ¾ ’ü

Oyundaki seçenekleriniz [2, 100] aralığındaki doğal sayılardan oluşmaktadır. Rakibinizin de aynı seçeneklere sahip olduğunu unutmayın. Sizin ve rakibinizin seçtiği sayının ortalamasının ¾’üne en yakın sayıyı seçmiş olan oyuncu seçtiği sayı kadar kuruş kazanacaktır. Diğer oyuncu ise hiçbir şey kazanamayacak ve eğer beraberlik olursa oyuncular seçtikleri sayının yarısı kadar kuruş kazanacaktır. Bu oyunda hangi sayıyı seçersiniz?

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: GÜLEZ, İhsan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 21.07.1992
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (531) 893 68 60
e-mail	: ihsan.gulez@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi İşletme (tezsiz)	13.07.2018
Lisans	Ankara Üniversitesi İstatistik	03.07.2015
Lise	Amerikan Kültür Koleji	18.06.2010

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2014-2015	Günar Araştırma ve Danışmanlık	Data girişi, anketörlük
2015-2016	Serbest	Veri analizi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Tiyatroya gitmek, spor yapmak, programlamayla oyun analizleri yapmak, bitkisel yemek yapmak.

GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR...