

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜYÜYEREK GELİŞEN KABUK YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Sezen ÖNCÜL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Sezen ÖNCÜL tarafından hazırlanan “**Büyüyerek Gelişen Kabuk Yüzeylerin Geometrisi**” adlı tez çalışması 24/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Dr.Öğretim Üyesi Zehra ÖZDEMİR
Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



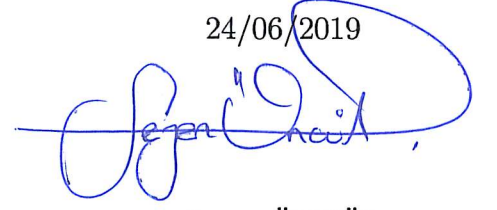
Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24/06/2019



Sezen ÖNCÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BÜYÜYEREK GELİŞEN KABUK YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Sezen ÖNCÜL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında bir eğri yardımıyla büyüterek gelişen yüzeyler çalışılmış ve yüzey büyümeleri için bilinen geometrik modellemelere yer verilmiştir. Seçilen üretici bir eğri için uygun çatı seçimleri ve hız vektörleri yardımıyla yüzeylerin parametrik denklemleri ve bazı yüzey örnekleri verilmiştir. Sonrasında bu yüzeyler Galile uzayında da göz önüne alınmıştır.

Son kısımda büyüterek gelişen kabuk yüzeyleri ele alınmıştır. Kabuk yüzeyleri yine Öklid ve Galile uzaylarında ayrı ayrı incelenmiş ve yüzeylerin geometrik yorumları yapılmıştır. Kabuk yüzeylerine en güzel örnek olan deniz kabuğu yüzeylerinin matematiksel gösterimleri verilmiştir. Elde edilen yüzey denklemleri geometrik anlamda incelenmiş ve çeşitli teoremler verilmiştir.

Ocak 2019, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eğriler, Yüzeyler, Tüp yüzeyleri, Dairesel yüzeyler, Büyüterek gelişme, Büyüme kinematiki, Deniz kabukları, Boynuzlar, Spiraller

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRY OF ACCRETIVE SHELL SURFACES

Sezen ÖNCÜL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consist of four chapters.

The first chapter is included in the introduction part.

In the second chapter, basic definations and some notions appear for further usage in the following chapters.

In the third chapter, accretive growth surfaces are studied with the help of a curve in Euclidean space and known geometric models for surface growth is mentioned. Parametric equations of accretive growth surfaces and some examples of them are given by choosing an orthonormal frame of a generating curve and chosen velocity vectors. Then, these surfaces are considered in Galilean space.

Accretive shell surfaces growth are observed in the last chapter. Shell surfaces are studied again in Euclidean and Galilean spaces seperately and geometric interpretations of surfaces are done. Mathematical demonstrations of seashell surfaces are provided which is the most beautiful example for shell surfaces. The surfaces equations found are studied in terms of geometric mean and various theorem are given.

January 2019, 74 pages

Key Words: Curves, Surfaces, Tubular surfaces, Circular surfaces, Accretive Growth, Growth kinemathics, Seashell, Horns, Spirals

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. İsmail Gök'e, değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf Yaylı, Prof. Dr. F. Nejat Ekmekci ve Dr. Öğr. Üyesi Zehra Özdemir'e; ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan sevgili arkadaşlarım Derya Kahveci ve Oğulcan Tuncer'e sonsuz teşekkür ederim. Hayatım boyunca tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Sezen ÖNCÜL
Ankara, Ocak 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Öklid Uzayındaki Temel Tanımlar	3
2.2 Galile Uzayındaki Temel Tanımlar.....	9
3. BİR EĞRİ YARDIMIYLA BÜYÜYEREK GELİŞEN YÜZEY- LERİN KİNEMATİĞİ	12
3.1 Öklid Uzayında Frenet Çatısı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler	12
3.2 Öklid Uzayında Eğri-Yüzey Çatısı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler	21
3.2.1 Keyfi eğriler için hız vektör alanı.....	27
3.3 Öklid Uzayında Alternatif Hareketli Çatı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler.....	29
3.4 Galile Uzayında Büyüyerek Gelişen Yüzeyler.....	35
4. BÜYÜYEREK GELİŞEN KABUK YÜZEYLERİ	42
4.1 Öklid Uzayında Kabuk Yüzeyleri	42
4.2 Galile Uzayında Kabuk Yüzeyleri	46
4.3 Deniz Kabuklarının Matematiksel Gösterimleri	54
4.3.1 Yüzey örnekleri.....	67
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	71
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{G}^3$	3-boyutlu Galile uzayı
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	Öklid iç çarpımı
$\wedge$	$\mathbb{E}^3$ uzayında vektörel çarpım
$\wedge_{\mathbb{G}}$	$\mathbb{G}^3$ uzayında vektörel çarpım
$\ , \ $	Öklid uzayında norm
$\langle , \rangle_{\mathbb{G}}$	Galile çarpımı



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Düzlemsel koordinat sistemi.....	6
Şekil 2.2 Arşimet spirali.....	6
Şekil 2.3 Logaritmik spiral.....	7
Şekil 2.4 3-boyutlu Arşimet spirali.....	7
Şekil 3.1 Başlangıç eğrisi verilen bir yüzeyin üretilmesi.....	12
Şekil 3.2 Silindir yüzeyi	17
Şekil 3.3 Seçilen hız vektörü ile oluşturulan silindir ve koni yüzeyler.....	17
Şekil 3.4 Tor yüzeyinin büyümesi.....	18
Şekil 3.5 Seçilen hız vektörü için elde edilen tor yüzeyi.....	19
Şekil 3.6 Doğrusal olarak genişleyen üç temel büyüme şekli	20
Şekil 3.7 Seçilen üretici bir eğri için elde edilen yüzey.....	23
Şekil 3.8 $q(s,t)=(0,0,t)$ hız vektörü yardımıyla elde edilen yüzey.....	24
Şekil 3.9 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey.....	25
Şekil 3.10 Seçilen başlangıç eğrisine göre elde edilen yüzey	25
Şekil 3.11 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	26
Şekil 3.12 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	27
Şekil 3.13 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	27
Şekil 3.14 Seçilen bir eğri üretilen yüzey.....	31
Şekil 3.15 Seçilen bir uzay eğrisi için üretilen. yüzey	32
Şekil 3.16 Seçilen hız vektörü ile oluşturulan yüzey	32
Şekil 3.17 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	33
Şekil 3.18 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	33
Şekil 3.19 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	34
Şekil 3.20 Seçilen bir eğri için elde edilen yüzey	34
Şekil 3.21 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	36
Şekil 3.22 Seçilen keyfi bir eğri için elde edilen yüzey	37
Şekil 3.23 Kabul edilebilir olmayan üretici bir eğri için oluşturulan yüzey.....	38
Şekil 3.24 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey	38

Şekil 3.25 Kabul edilebilir olmayan üretici bir eğri için oluşturulan yüzey.....	39
Şekil 3.26 Genel bir helis eğrisi kullanılarak oluşturulan yüzey.....	40
Şekil 4.1 Seçilen bir helis eğrisi için elde edilen yüzey.....	45
Şekil 4.2 $r = \theta$ için oluşturulan yüzey	45
Şekil 4.3 Üretici eğrisi çember olan yüzey	46
Şekil 4.4 $r = \theta$ için oluşturulan yüzey	46
Şekil 4.5 Büyüyerek gelişen kabuk yüzeylerinde genişleme, dönme ve büyüme	55
Şekil 4.6 Her yerden aynı oranda madde sentezi yapılarak oluşan büyüme.....	56
Şekil 4.7 Sentezlenen madde miktarındaki farklılığın büyümeye etkisi.....	56
Şekil 4.8 Eşit açılı sarmal yapıdaki büyüme.....	57
Şekil 4.9 Kartezyen koordinatlarda bir noktanın spiral üzerindeki yeri.....	57
Şekil 4.10 C eğrisinin H-helikospirali üzerindeki hareketi.....	58
Şekil 4.11 Thatcheria Mirabilis Angas.....	58
Şekil 4.12 H-helikospirali üzerinde yüzeyin büyümesi.....	59
Şekil 4.13 Yüzey büyümesinin üstten ve yandan görünümü.....	59
Şekil 4.14 Helikospiral üzerinde noktanın gösterimi	60
Şekil 4.15 Elips.....	60
Şekil 4.16 Kartezyen koordinatlarda eğri üzerindeki noktanın gösterimi.....	61
Şekil 4.17 C eğrisinin dönüşünü belirleyen ϕ , Ω , μ açıları.....	62
Şekil 4.18 Eğri için $\square$ ve $\square\Omega\square$ dönmelerinin gösterimi.....	62
Şekil 4.19 Eğrinin μ kadar dönmesi.....	63
Şekil 4.20 Eğrinin μ kadar dönmesinin yukarıdan görünümü.....	63
Şekil 4.21 Diken oluşumu.....	66
Şekil 4.22 Salyangoz.....	67
Şekil 4.23 Lyria.....	67
Şekil 4.24 Turritella.....	68
Şekil 4.25 Oxystele.....	68
Şekil 4.26 Nautilus.....	69
Şekil 4.27 Planorbis.....	69

Şekil 4.28 Conus.....	70
Şekil 4.29 Epitonium.....	71



1. GİRİŞ

Biyolojide deniz kabukları ve hayvanların boynuzları gibi birçok kabuksu oluşum, anlaşılması güç, karışık ve ilgi çekici bir yapıya sahiptir. Bu karmaşıklığa rağmen canlılardaki bu kabuksu yapıların geometrik olarak ele alınması, parametrik olarak ifade edilmesi ve sınıflandırılması mümkün olabilir. Bu alanda yapılan çalışmalar incelendiğinde karşımıza H. Moseley çıkar. Çalışmalarında, matematiksel olarak yumuşakçaların kabuklarındaki spiral yapı tanımlanmıştır (Moseley, 1838). Sonraki dönemlerde, araştırmacılar tarafından büyüyerek gelişen yüzeyler için modeller geliştirilmiş ve konuya ilişkin farklı yaklaşımlarda bulunulmuştur. Fakat bu çalışmalar matematiksel olarak bu yüzeylerin nasıl oluştuğunu tam olarak anlamak için yeterli olmamıştır. Zaman içinde bu problem C. Illert tarafından ele alınmış ve matematiksel gösterimler elde edilmiştir (Illert, 1987). $\mathbb{R}^3$ uzayında deniz kabuklarının geometrisi formülleştirilmiş ve bilgisayar gösterimleri için kullanılabilecek denklemler elde edilmiştir (Illert, 1989). (R. Skalak vd, 1997) ve arkadaşları 1997 yılında yaptıkları bir çalışma ile yüzey büyümesinin kinematik modellemesini incelemiş ve örnekler vermiştir. Daha sonra Moulton ve arkadaşları tarafından bu yüzeyleri oluşturmak için bilgisayar algoritmasına bağlı olmayan uygun matematiksel denklemler üretilmiştir (E. Moulton, A. Goriely, 2014).

Deniz kabukları ve hayvanların boynuzları gibi yüzeylerin bazıları bir dayanak eğrisi ve teorik biyolojide sıkça ifade edilen büyüme kinematığının matematiksel özellikleri yardımıyla geometrik olarak ifade edilebilir (E. Moulton, A. Goriely, 2012). Büyüme, bir üreteç eğrisi üzerindeki her noktada tanımlanan bir büyüme hız vektörü ile belirlenir. Üreteç eğrisinin her bir noktasına yerel bir ortonormal taban eklenir ve hız alanı yerel koordinat yönleri ile verilerek matematiksel bir yapı oluşturulur. Örneğin; birçok canlının sahip olduğu spiral sarıllı koni veya tüp benzeri yüzeylerin geometrik gösterimleri, üreteç eğrileri ve üreteç eğrilerinin geometrik özellikleri kullanılarak karakterize edilebilir. Büyü-yerek gelişen kabuksu yüzeyler, kabuğun üzerinde yer alan bir şeklin helikospiraller etrafında döndürülmesiyle oluşur. Bu matematiksel şekiller hakkında bilgi edinmek için çemberler, spiraller ve yüzeylerin

parametrik gösterimleri ve karakteristik özelliklerinden yararlanılır.

Bu tez çalışmasının amacı, biyolojide ve doğada birçok örneğini görebileceğimiz deniz kabuğu, boynuz gibi kabuksu yüzeyleri farklı uzaylarda ve farklı ortonormal çatılar yardımıyla geometrik olarak ele almak ve incelemektir. Bu bağlamda, öncelikle, büyüyerek gelişen yüzeylerle ilgili bilinen modellemeler ve yapılar verilmiş, daha sonra tezin özgün kısımlarının yer aldığı Öklid ve Galile uzaylarındaki yeni teorilere yer verilmiştir. (F. Doğan, 2012) doktora tez çalışmasında kanal (tüp) yüzeyleri üzerinde yatan parametre eğrilerinin geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olma durumları ile ilgili karakterizasyonlar vermiştir. Bu tez çalışmasından yararlanılarak, Galile uzayında büyüyerek gelişen yüzeylerin üzerinde yer alan parametre eğrilerinin geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olma durumları araştırılmıştır. Teori, daha önceki çalışmalarda yer alan örnekler ve ilk kez bu çalışmada elde edilen yüzey örnekleri ile desteklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, tezin ilerleyen bölümlerinde faydalanılacak olan bazı tanımlara, teoremlere ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayındaki Temel Tanımlar

Tanım 2.1 (İç Çarpım) $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ve $\vec{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, $\mathbb{R}^3$ uzayında iki vektör olmak üzere; $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı,

$$\langle \rho, \varrho \rangle = \sum_{i=1}^3 \rho_i \varrho_i$$

eşitliğiyle verilen fonksiyona **iç çarpım fonksiyonu** denir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.2 (Vektörel Çarpım) $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile tanımlı,

$$\rho \times \varrho = (\rho_2 \varrho_3 - \rho_3 \varrho_2, \rho_3 \varrho_1 - \rho_1 \varrho_3, \rho_1 \varrho_2 - \rho_2 \varrho_1)$$

eşitliğiyle verilen $\times$ fonksiyonuna **vektörel çarpım fonksiyonu** denir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.3 (Öteleme Fonksiyonu) u uzayda bir vektör olmak üzere,

$$f_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_u(P) = P + u$$

funksiyonuna, uzayda öteleme vektörü u olan bir **öteleme fonksiyonu** denir.

Tanım 2.4 $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ düzlemde bir dik koordinat sistemi olsun. $O' = (h_1, h_2)$ olmak üzere, O' noktasında, sırasıyla, Ox_1 ve Ox_2 eksenlerine paralel ve aynı yönde $O'x'_1$ ile $O'x'_2$ eksenlerini seçelim. Böylece, düzlemde yeni bir $\{O', O'x'_1, O'x'_2\}$ dik koordinat sistemi seçilmiş olur. Bu yeni koordinat sistemine, $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ koordinat sisteminin O' noktasına **ötelenmiş** denir. Düzlemin bir P noktasının, $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ koordinat sistemine göre bileşenleri ρ_1 ve ρ_2 olsun. Aynı noktanın $\{O', O'x'_1, O'x'_2\}$ koordinat sistemine göre bileşenleri ρ'_1 ve ρ'_2 olduğuna göre,

$$\rho'_1 = \rho_1 - h_1 \quad , \quad \rho'_2 = \rho_2 - h_2$$

olduğu açıktır. Bu iki eşitliğe, düzlemde dik koordinat sisteminin **ötelenme for-
mülleri** denir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.5 (Dönme Fonksiyonu) $\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq 2\pi$ ve $Q \in \mathbb{R}^2$ verilsin. $P \in \mathbb{R}^2$ verildiğinde P noktasını, $|QP'| = |QP|$ ve PQP' açısının ölçüsü ω olacak biçimdeki P' noktasına dönüştüren fonksiyona, düzlemde Q noktası çevresinde ω radyanlık **dönme fonksiyonu** denir. $P = (\rho_1, \rho_2)$ için, düzlemde, O noktası çevresindeki ω radyanlık dönme fonksiyonu f ile gösterilirse,

$$f(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1 \cos \omega - \rho_2 \sin \omega, \rho_1 \sin \omega + \rho_2 \cos \omega)$$

şeklinde tanımlanır (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.6 (Düzlemde Eksenlerin Dönmesi) Düzlemde, $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ dik koordinat sistemi verilmiş olsun. $\{O, Ox'_1, Ox'_2\}$ dik koordinat sistemini, Ox'_1 ve Ox'_2 eksenleri ilk eksenlerle, pozitif yönde ϖ radyanlık açı yapacak biçimde seçilsin. Bu yeni koordinat sistemine, $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ koordinat sisteminin ϖ kadar döndürülmüşü denir. $\{O, Ox_1, Ox_2\}$ dik koordinat sistemine göre $P = (\rho_1, \rho_2)$ ile verilen noktanın, $\{O, Ox'_1, Ox'_2\}$ düzlemindeki bileşenleri ρ'_1 ve ρ'_2 olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}\rho'_1 &= \rho_1 \cos \varpi + \rho_2 \sin \varpi \\ \rho'_2 &= -\rho_1 \sin \varpi + \rho_2 \cos \varpi\end{aligned}$$

ile verilen eşitlikler dönme formülleridir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.7 (Eğri) $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri kabaca, $\mathbb{R}$ reel sayıların bir I aralığından, $\mathbb{R}^3$ uzayına giden sürekli bir α fonksiyonunda, I aralığının görüntüsü olarak tanımlanabilir. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu verildiğinde $\alpha(I)$ cümlesi verilmiş olduğundan ve $\alpha(I)$ cümlesinin özellikleri α fonksiyonu yardımıyla incelendiğinden, daha çok α fonksiyonunu **eğri** olarak adlandırırız. $t \in I$ için, $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ olduğundan, $\alpha(t) = \{\alpha_i\}_1^3$ biçiminde olmak zorundadır. Burada $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}$ olduğundan $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ olur. Bu fonksiyonlara α **eğrisinin bileşenleri** denir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.8 (Çember) $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, düzlemde bir M noktasına uzaklığı r olan noktaların cümlesine, M merkezli r yarıçaplı **çember** denir. Bu cümleyi $\mathcal{C}$ ile

gösterirsek, $\mathcal{C} = \{P : P \in \mathbb{R}^2, |PM| = r\}$ demektir. Düzlemde değişken bir P noktasının çember üstünde bulunması için gerek ve yeter koşul, $|PM| = r$ önermesinin doğru olmasıdır. $P = (p_1, p_2)$ ve $M = (a_1, a_2)$ olmak üzere bu eşitlik,

$$(p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 = r^2$$

biçiminde verilir. Düzlemdeki dik koordinat sistemi (x_1, x_2) olduğundan

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$$

olduğu açıktır (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.9 (Elips) Düzlemde F' ve F noktaları ile pozitif k reel sayısı verilmiş olsun. F' ve F noktalarına uzaklıklarının toplamı k sabit sayısına eşit olan P noktalarının cümlesine **elips** denir.

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1$$

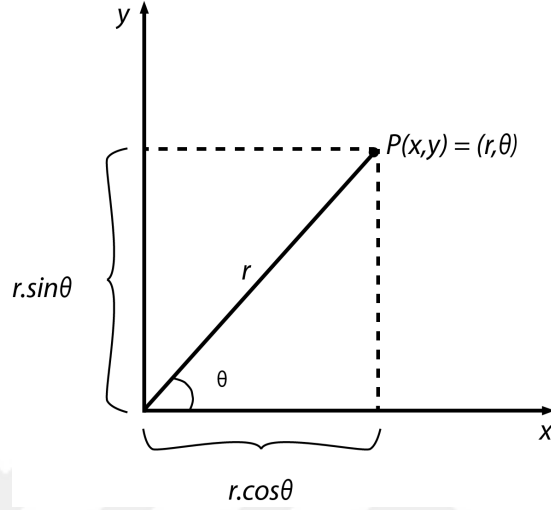
denklemini ile verilir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.10 (Yüzey) 3-boyutlu uzayın noktaları $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}\}$ cümlesinin elemanlarıdır. $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının değişken bir (x, y, z) noktasının koordinatları arasında $F(x, y, z) = 0$ biçiminde bir bağıntı varsa, bu noktanın geometrik yerine bir **yüzey** denir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.11 (Silindir) Uzayda $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bir u vektörü verilsin. Burada I , $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesinin bir aralığıdır. Eğrinin her bir $\alpha(t)$ noktasında u vektörüne paralel olan bir ve yalnız bir $L(t)$ doğrusu vardır. Bu $L(t)$ doğrularının birleşimi olan yüzeye **silindir yüzeyi** denir. Bu yüzey $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathcal{S}_{(t,\lambda)} = \alpha(t) + \lambda.L(t)$ parametrik denklemiyle verilir (Sabuncuoğlu, 2002).

Tanım 2.12 (Koni) Uzayda $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bu eğri üzerinde olmayan bir H noktası verilsin. Burada I , $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesinin bir aralığıdır. Eğrinin her bir $\alpha(t)$ noktası için $\alpha(t)$ ve H noktası bir $L(t)$ doğrusu belirler. Bu $L(t)$ doğrularının birleşimi olan yüzeye **koni yüzeyi** denir. Bu yüzey $\mathcal{C}_{(t,\lambda)} = (1 - \lambda)\alpha(t) + \lambda.H$ parametrik denklemiyle tanımlıdır (Sabuncuoğlu, 2002).

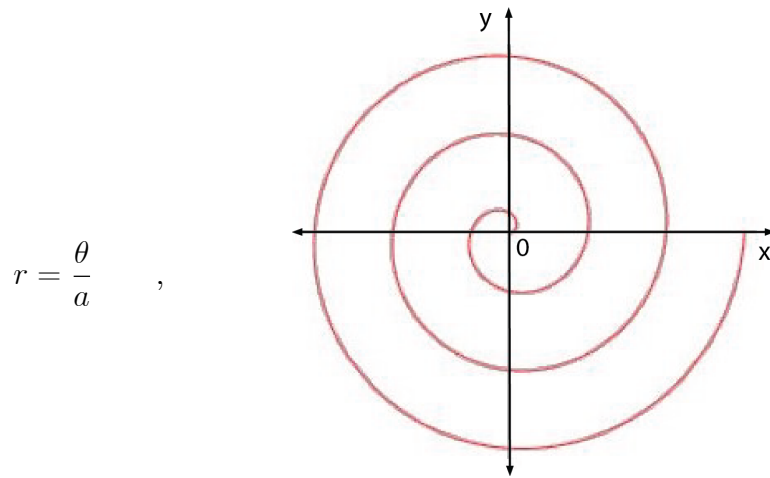
Tanım 2.13 Kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın yeri sayı ikilileri şeklinde gösterilir. Düzlemsel kordinat sisteminde Şekil 2.1 ile verilebilir. Burada (r, θ) ikilisine $P(x, y)$ noktasının kutupsal koordinatları adı verilir.



Şekil 2.1 Düzlemsel koordinat sistemi

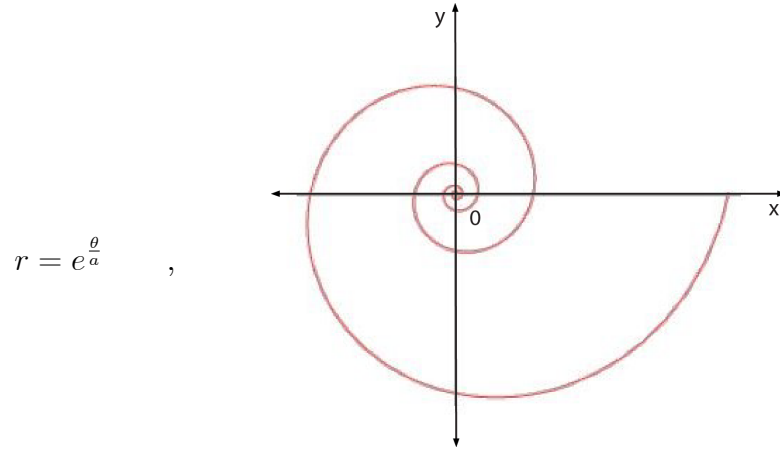
Aşağıda 2 ve 3 boyutlu reel vektör uzaylarında Arşimet spirali ile düzlemsel logaritmik spiralin kutupsal denklemleri görülmektedir (Coombes, 2009).

Kutupsal koordinatlarda tek kollu **Arşimet spirali** $\theta = f(r)$ ile tanımlıdır. Arşimet spiralinin eğriliği $\kappa(\theta) = \frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}$ şeklindedir.



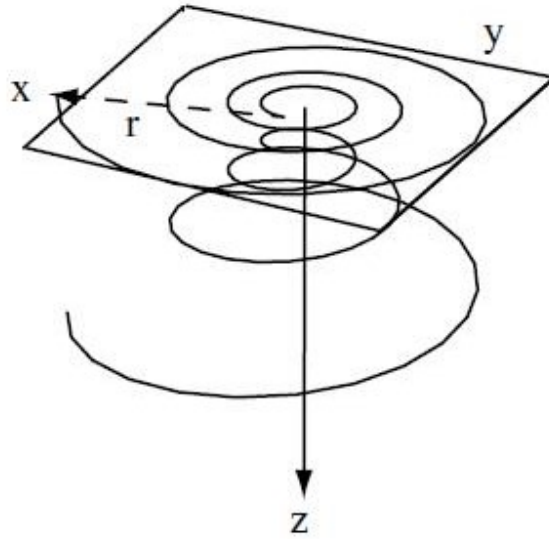
Şekil 2.2 Arşimet spirali

$\theta = a \ln r$ verildiğinde **logaritmik spiral** tanımlanmış olur.



Şekil 2.3 Logaritmik spiral

Tanım 2.14 3–boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın yeri (x, y, z) üçlüsü ile verilir. 3–boyutlu Arşimet spirali için, $r = a\theta$, $z = b\theta$ alınırken; 3–boyutlu logaritmik spiral için $r = ae^{b\theta}$, $z = ce^{d\theta}$ alınır.



Şekil 2.4 3 – boyutlu Arşimet spirali

Tanım 2.15 (Darboux Çatısı) M bir yüzey ve β bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. κ ve τ ; β eğrisi için, sırasıyla, uzayda eğrilik ve torsiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile verilen $\{T, N, B\}$ çatısı **Frenet çatısı** olarak adlandırılır. β eğrisi için; T **birim teğet vektör alanı**, N **esas birim normal vektör alanı** ve B **birim binormal vektör alanı** şeklinde ifade edilir. β eğrisinin birim teğet vektör alanını ve M yüzeyinin birim normal vektör alanını kullanarak y birim vektör alanı; $y = (n \circ \beta) \times T$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda oluşan yeni çatı $\{T, y, n \circ \beta\}$, **Darboux çatısı** olarak tanımlanır. Darboux çatısı için, $n \circ \beta$ ve B arasındaki açı ϖ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T \\ y \\ n \circ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varpi & \sin \varpi \\ 0 & -\sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

gerçeklenir. Eğer s parametresine göre türev alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Darboux çatısı için Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ y' \\ (n \circ \beta)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_g \\ -k_n & -t_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ y \\ n \circ \beta \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada, k_n , t_y , k_g , sırasıyla normal, eğrilik, geodezik torsiyon ve geodezik eğriliktir. k_g , k_n , t_y için aşağıdaki eşitlikler verilir:

$$\begin{aligned} k_g &= \kappa \cos \varpi \\ k_n &= \kappa \sin \varpi \\ t_y &= \tau - \varpi' \end{aligned}$$

β eğrisi için,

- i) $k_g = 0$ ise β eğrisi M yüzeyi için geodezik
- ii) $k_n = 0$ ise β eğrisi M yüzeyi için asimptotik eğri
- iii) $t_g = 0$ ise β eğrisi M yüzeyi için eğrilik çizgisi

olur (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.16 $X(s, t)$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve bu yüzeyin normali $N = \frac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|}$ olmak üzere; Öklid uzayında yerel koordinatlarda Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik, temel form katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad , \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (2.2)$$

Burada verilen katsayılar için,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle & F &= \langle X_s, X_\theta \rangle & G &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle \\ e &= \langle \mathcal{N}, X_{ss} \rangle & f &= \langle \mathcal{N}, X_{s\theta} \rangle & g &= \langle \mathcal{N}, X_{\theta\theta} \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

eşitlikleri yazılır (Korkmaz, 2012).

2.2 Galile Uzayındaki Temel Tanımlar

Tanım 2.17 (Galile Skalar Çarpımı) $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$, G^3 uzayında iki vektör olsun. **Galile skalar çarpımı**

$$\langle a, b \rangle_G = \begin{cases} a_1 b_1 & , a_1 \neq 0 \text{ veya } b_1 \neq 0 \\ a_2 b_2 + a_3 b_3 & , a_1 b_1 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlıdır (Röschel, 1985).

Tanım 2.18 (Galile Vektör Çarpımı) $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$, G^3 uzayında iki vektör olsun. **Galile vektör çarpımı** iki farklı durumda ele alınarak tanımlanır (Röschel, 1985).

Durum1: $a_1 \neq 0$ veya $a_2 \neq 0$

$$a \wedge_G b = (0, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Durum2: $a_1 = a_2 = 0$

$$a \wedge_G b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, 0, 0)$$

Tanım 2.19 G^3 uzayında bir $\alpha(\varsigma) = (x(\varsigma), y(\varsigma), z(\varsigma))$ eğrisinin kabul edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\alpha'(\varsigma) \wedge \alpha''(\varsigma) \neq 0$ ve $x'(\varsigma) \neq 0$ olmasıdır (Röschel, 1985).

Tanım 2.20 G^3 uzayında birim hızlı kabul edilebilir eğri, yay parametresi s olmak üzere $\alpha(s) = (s, y(s), z(s))$ şeklinde yazılır.

Birim hızlı α eğrisi boyunca **Frenet çatısı**

$$\begin{aligned} T(s) &= (1, y'(s), z'(s)) \\ N(s) &= \frac{1}{\sqrt{y''(s)^2 + z''(s)^2}} (0, y''(s), z''(s)) \\ B(s) &= \frac{1}{\sqrt{y''(s)^2 + z''(s)^2}} (0, -z''(s), y''(s)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ile verilir ve buradan; $\kappa(s) = \sqrt{y''(s)^2 + z''(s)^2}$ ile $\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} \det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))$ olmak üzere; **Frenet formülleri** aşağıdaki gibi tanımlıdır (Röschel, 1985).

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Tanım 2.21 G^3 uzayında bir r yüzeyinin parametrik denklemi,

$$r(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$$

olarak verilir. r yüzeyi üzerinde birim normal vektörü; $x_{u_i}, y_{u_i}, z_{u_i}; i = 1, 2$ kısmi türevler ve $w = \sqrt{(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2 + (x_{u_2}y_{u_1} - x_{u_1}y_{u_2})^2}$ olmak üzere;

$$\nu(v_1, v_2) = \frac{1}{w} (0, x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1}, x_{u_2}y_{u_1} - x_{u_1}y_{u_2})$$

ile tanımlanır. Yüzeyin tanjant düzleminde, $\langle \nu, \delta \rangle_G = 0$ ve $\|\delta\| = 1$ olacak şekilde bir

$$\delta = \frac{(0, -y_{u_2}x_{u_1} + y_{u_1}x_{u_2}, z_{u_2}x_{u_1} + z_{u_1}x_{u_2})}{w} \quad (2.7)$$

izotropik birim vektörü vardır (Röschel, 1985).

Tanım 2.22 $r(u_1, u_2)$ yüzeyinin **birinci temel formu**;

$$I = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2 + \epsilon(h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2) \quad (2.8)$$

ile tanımlıdır. Burada birinci temel formun bileşenleri olan g_i ve h_{ij} katsayıları, sırasıyla, $g_i = x_{u_i}$ ve $h_{ij} = \langle \tilde{r}_{u_i}, \tilde{r}_{u_j} \rangle_G$ şeklinde hesaplanır. $\tilde{r}_{u_k}$ vektörü, r_{u_k} vektörünün yz -düzlemine izdüşümü olan vektöre karşılık gelir. Ek olarak;

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & , du_1 \text{ yönünde, } d_{u_2} \text{ izotropik değilse} \\ 1 & , du_1 \text{ yönünde, } d_{u_2} \text{ izotropik ise} \end{cases}$$

Yüzeyin her bir noktasında $g_1 du_1 + g_2 du_2$ ile tanımlı bir tek izotropik yön vardır (Röschel, 1985).

Tanım 2.23 İkinci temel formun L_{ij} bileşeneleri,

$$L_{ij} = \left\langle \frac{r_{u_i u_j} x_{u_1} - x_{u_i u_j} r_{u_i}}{x_{u_i}}, \nu \right\rangle_G, \quad x_{u_i} = g_1 \neq 0 \quad (2.9)$$

olmak üzere ikinci temel form;

$$II = L_{11} du_1^2 + 2L_{12} du_1 du_2 + L_{22} du_2^2$$

şeklinde tanımlıdır (Röschel, 1985).

Tanım 2.24 $r(u_1, u_2)$ yüzeyinin Gauss eğriliği $\mathcal{K}$ ve ortalama eğriliği $\mathcal{H}$; $g^1 = \frac{x_{u_2}}{w}$, $g^2 = -\frac{x_{u_1}}{w}$ ve $g^{ij} = g^i g^j$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanır (Röschel, 1985).

$$\mathcal{K} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{w^2} \quad (2.10)$$

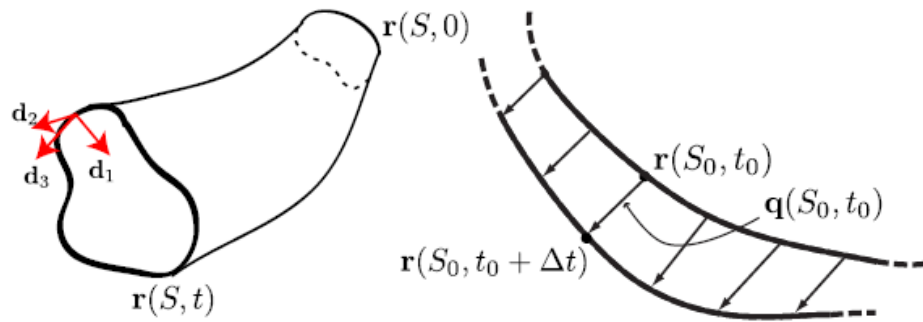
$$\mathcal{H} = \frac{g^{11}L_{11} - 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22}}{2} \quad (2.11)$$

3. BİR EĞRİ YARDIMIYLA BÜYÜYEREK GELİŞEN YÜZEYLERİN KİNEMATİĞİ

3.1 Öklid Uzayında Frenet Çatısı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler

Bu kısımda büyüyerek gelişen yüzeylerin geometrisi araştırılmış ve bu yüzeylerin oluşumu matematiksel olarak ifade edilmeye çalışılmıştır. Bunu yaparken daha çok bu alanda çalışmış ve efektif sonuçlara ulaşmış olan Derek E. Moulton ve Alain Goriely'ye ait çalışmalara yer verilmiştir (E. Moulton, A. Goriely, 2014).

Büyüyerek gelişen yüzeyleri modellemek için üretici bir eğri seçilir. Bu eğri $t = 0$ anında $r_0(s) = r(s, 0) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ olarak tanımlı s parametresine bağlı $r_0(s)$ eğrisidir. Büyüyerek gelişme bu başlangıç eğrisiyle ifade edilir. Başlangıç eğrisiyle birlikte, eğrideki her noktada yerel yönü ve büyüme oranını temsil eden bir $Q(s, 0)$ vektör alanı tanımlanır. Genel olarak t anında noktanın büyüme hızını belirten bir hız alanı olan $Q(s, t)$ ile verilir. Hız vektör alanı eğriyi yönlendirir ve bir $r(s, t)$ yüzeyi oluşturur. $Q(s, t)$ hız vektör alanının yerel geometrinin yanı sıra, olası fiziksel, kimyasal veya biyolojik etmenlerin bir fonksiyonu olduğunu gözönünde bulundurmak mantıklıdır.



Şekil 3.1 Başlangıç eğrisi verilen bir yüzeyin üretilmesi

Hızı yerel olarak tanımlamak için $r(s, 0)$ eğrisine $d_i, i = 1, 2, 3$ üç ortonormal vektör olmak üzere, $D = (d_1, d_2, d_3)$ yerel çatısı eklenir. d_3 birim vektörü $r(s, t)$ yüzeyinin s parametresine göre türevi ile ilgili birim teğet vektördür.

$$r'(s, t) = \partial_s r(s, t) = D \cdot \Lambda = \lambda \cdot d_3 \quad (3.1)$$

Burada $\Lambda = (0, 0, \lambda)$ eğrinin yerel çatıda ifade edilen ilk yay uzunluğuna göre gerilmesini açıklar. D çatısı, tüm s ve t parametreleri için ortonormal bir taban oluşturur ve böylece çatının türevleri ile ifade edilebilir.

$$D' = \partial_s D = DU \quad (3.2)$$

$$\dot{D} = \partial_t D = DW \quad (3.3)$$

U , t anında eğri boyunca yerel tabanın dönüşünü tanımlayan ve $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüne karşılık gelen yarı-simetrik Darboux matrisi ve W , bir s noktasındaki yerel tabanın dönüşünü tanımlayan ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektörüne karşılık gelen yarı-simetrik dönme matrisidir. Her u_i bileşeni t anında yay uzunluğu arttıkça çatının d_i taban vektörü etrafında dönme oranını verirken, w_i bileşenleri çatının d_i taban vektörü etrafında dönme hızını verir. Burada $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüne

karşılık gelen antisimetrik matris; $U := \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. Böylece vek-

törel çarpım yerine matris çarpımı getirebilir. Yani $D = (d_1, d_2, d_3)$ vektörü için

$D \times u = D \cdot U$ yazılabilir. Benzer şekilde $w = (w_1, w_2, w_3)$ eksenli antisimetrik

matris $W := \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir ve $D = (d_1, d_2, d_3)$ vektörü için

$D \times w = D \cdot W$ yazılır.

Bir eğri gözönüne alındığında, eğriye eklenen D çatısı, d_1 ve eğrinin normal vektörü ν arasındaki rastgele bir φ açısı seçimiyle belirlenir. Eğer $\varphi = 0$ olursa, ν normal vektör, β binormal vektör ve τ teğet vektör olmak üzere; $(d_1, d_2, d_3) = (\nu, \beta, \tau)$ üçlüsü ile tanımlanan Frenet-Serret çatısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \cos \varphi + \beta \sin \varphi \\ -\nu \sin \varphi + \beta \cos \varphi \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan normal düzlemde yatan (d_1, d_2) vektörleri ile normal ve binormal vektörleri arasında,

$$d_1 = \nu \cos \varphi + \beta \sin \varphi \quad (3.4)$$

$$d_2 = -\nu \sin \varphi + \beta \cos \varphi$$

ile verilen bir ilişki olduğu görülür. $U = \tau T + \kappa B$ olduğundan U vektörü eğrinin eğrilik ve torsiyonu ile doğrudan ilgilidir. Üretici eğri ve eklenen baz bilindiğinde hız vektörü yerel çatıyla ifade edilebilir.

$$\dot{r}(s, t) = \partial_t r(s, t) = Q(s, t) = D.q \quad (3.5)$$

(Burada Q hız vektör alanıyken, $q = (q_1, q_2, q_3)$ hız vektörüdür.)

Hızı tanımlamak için yerel çatıdaki bileşenler incelendiğinde; $r(s, t)$ hem s hem de t parametrelerine göre diferensiyellenebilir olduğundan ;

$$\partial_s(\partial_t r) = \partial_t(\partial_s r) \quad (3.6)$$

$$\partial_s(\partial_t D) = \partial_t(\partial_s D) \quad (3.7)$$

yazılabilir. (3.1) ve (3.5) denklemleri (3.6) denkleminde yerine yazıldığında,

$$q' - \dot{\lambda} = W\lambda - Uq \quad (3.8)$$

birinci dereceden diferensiyellenebilir denklemi bulunur. (3.2) ve (3.3) denklemleri, (3.7) denkleminde yerine yazıldığında yine birinci dereceden,

$$W' - \dot{U} = UW - WU \quad (3.9)$$

diferensiyellenebilir denklemi elde edilir. (3.8) ve (3.9) denklemleri çözüldüğünde aşağıdaki kısmi diferensiyellenebilir denklemler ortaya çıkar:

$$\begin{aligned} q'_1 + u_2 q_3 - u_3 q_2 &= \lambda w_2 \\ q'_2 + u_3 q_1 - u_1 q_3 &= -\lambda w_1 \\ q'_3 + u_1 q_2 - u_2 q_1 &= \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\dot{u}_1 - w'_1 = u_2 w_3 - u_3 w_2$$

$$\dot{u}_2 - w'_2 = u_3 w_1 - u_1 w_3$$

$$\dot{u}_3 - w'_3 = u_1 w_2 - u_2 w_1$$

Belirli bir hız vektörü q için bu denklemler $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ ve λ olmak üzere yedi bağımlı değişkene bağlı lineer olmayan birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem sistemini oluşturur. Eğer Frenet çatısı seçilirse bu durumda d_1 normal boyunca olur ve $u_1 = 0$ yazılır. Böylece altı bilinmeyen için altı tane denklem elde edilir. $u(s, t)$ ve λ bilindiğinde inşaa edilen yüzey, Frenet denklemleri ile $\partial_s D = DU$ ile verilen on iki lineer olmayan denklem sisteminin $\partial_s r(s, t) = \lambda \cdot d_3$ ile birleştirilmesiyle elde edilir (E. Moulton, A. Goriely, 2014).

q yerel hız vektörünü belirlemek için farklı yollar vardır. Parametrizasyonu ve tabanı verilmiş bir yüzey ele alındığında q vektör alanı belirlenebilir. Kullanılacak yöntem bir çatı seçmek, yerel hız alanı için bir çatı sağlamak ve tam yüzeyi belirlemek için sistemi çözmektir. Zorluk, uygun yerel hız kurallarını tanımlamaktır. Bunu yaparken, büyümenin altında yatan biyolojik kurallar etkili olur. Yerel hız alanı, yerel çatı üzerinde tanımlandığından çatı seçimi önemlidir. Birçok büyüme için Frenet çatısının seçilmesi mantıklı olur. Bunun nedeni; pek çok büyüme sürecinde kabuklar, boynuzlar ve bunlar gibi oluşumlar için üretici eğrilerin düzlemsel olmasıdır. Düzlemsel bir eğrinin gelişmesi ve bir yüzey oluşturmaları için eğrinin düzlemine normal yönde bir büyüme bileşeni eklenmelidir. Yani binormal yönünde büyümeyi tanımlamak için Frenet çatısı ideal olur.

$\kappa \geq 0$ ve τ bilinen eğrilik ve torsiyon olmak üzere; Frenet çatısı için U Darboux matrisi, $U = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & \kappa \\ \tau & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Bu sebeple bu bölümde Frenet çatısı seçimi ile ilerlenerek yüzey örnekleri elde edilmiştir. Ancak eğri üzerinde herhangi ortonormal bir çatı seçilerek de yüzeyler oluşturulabilir.

Tezin ilerleyen bölümlerinde, büyüyerek gelişen yüzeylerin oluşumunda kullanılan üretici eğrinin üzerinde ortogonal çatılar seçilerek yüzey oluşumlarına da yer verilecektir.

Örnek 3.1 $r(s, t)$ yüzeyini elde etmek için $t = 0$ anında C_0 üretici eğri olmak üzere, $r(s, 0) = (\cos s, \sin s, 0)$ şeklinde alınsın. Hız vektörü $q = (0, 0, 1)$ seçilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\dot{r}(s, t) &= q(s, t) \\ \int \dot{r}(s, t).dt &= \int q(s, t).dt + r(s, 0) \\ r(s, t) &= \int_0^t q.dt + r(s, 0) \quad ; \quad q = (0, 0, 1) \\ r(s, t) &= (\cos s, \sin s, t)\end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra belirlenen yönlerde hız bileşenleri eklenir. C_0 birim çember ve hız alanı $Q = (c_1, c_2, c_3)$, c_i 'ler sabit olmak üzere, üreteç eğrisi her zaman çember olacaktır. U Darboux vektörünün bileşenleri $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \frac{\lambda}{a}$, (a çemberin yarıçapı), $c_1 = 0$ ve $c_2, c_3 \neq 0$ yani, $Q = (0, c_2, c_3)$ alınıp kısmi diferensiyel denklemler çözüldüğünde, $W = (0, c_3, 0)$ elde edilir. (3.3) denklemi kullanılarak;

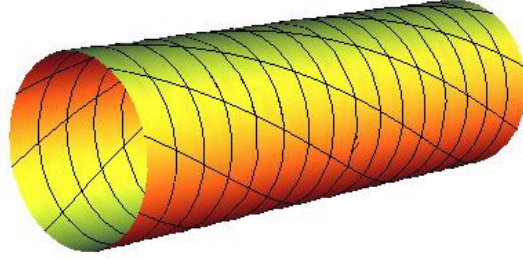
$$\begin{aligned}d_1(s, 0) &= [-\cos s, -\sin s, 0]^T \\ d_2(s, 0) &= [0, 0, 1]^T \\ d_3(s, 0) &= [-\sin s, \cos s, 0]^T\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (3.5) denklemi kullanılarak,

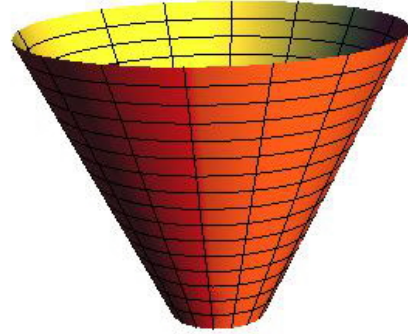
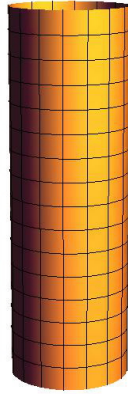
$$r(s, t) = (\cos(s + c_3 t), \sin(s + c_3 t), c_2 t)$$

yüzey denklemi bulunmuş olur. $c_3 = 1$, $c_2 = 2$, $t = (0, \pi)$ ve $s = (-2\pi, 2\pi)$

için aşağıdaki grafik çizilir (E. Moulton, A. Goriely, 2014).



Şekil 3.2 Silindir yüzeyi



$$q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 0$$

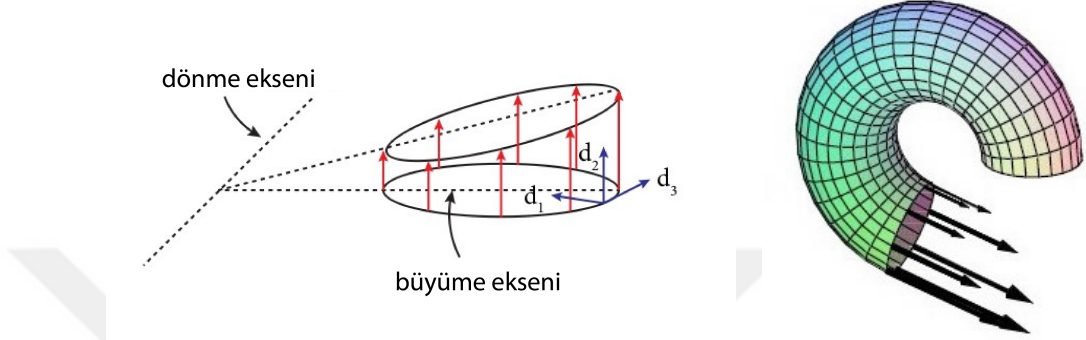
$$q_1 = -0.5, q_2 = 1, q_3 = 0.5$$

Şekil 3.3 Seçilen hız vektörleri için oluşturulan silindir ve koni yüzeyleri

Örnek 3.2 $r(s, t)$ yüzeyini elde etmek için $t = 0$ anında $r(s, 0) = (\cos s, \sin s, 0)$ üretici eğrisi alınsın. Yüzeyi oluşturmak için binormal yönde düzensiz bir büyüme yapılsın. Frenet çatısında q_2 lineer fonksiyonu (üretici eğri düzleminde) alınarak büyüme sağlanırsın. Eğri, üretici eğrinin düzlemi içinde büyüme yönüne dik bir doğru etrafında döndürülür. Örneğin; başlangıç eğrisinin x yönü seçilsin ve $q_2 = b_1 + b_2 \cos s$ (b_1, b_2 sabit) olmak üzere $x = \frac{-b_1}{b_2}$ doğrusu etrafında döndürülsün. Yüzeyin ne kadar hızlı döndüğü b_2 ile ölçülür. Üretici eğrinin çember olması için; $u_1 = u_3 = 0$,

$u_2 = 1$ ve $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = b_1 + b_2 \cos s$ alınıp gerekli işlemler yapıldığında tor yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_2}(\cos b_2 t)q_2 - 1 \\ \sin s \\ \frac{q_2}{b_2} \sin b_2 t \end{bmatrix}$$



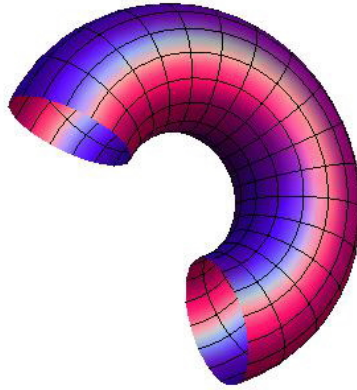
Şekil 3.4 Tor yüzeyinin büyümesi

Şekil 3.4'te; solda, büyüme yönü boyunca doğrusal büyümeyi gösteren bir şema verilmiştir. Sağdaki şema, üreten eğri üzerindeki hız alanı ile birlikte büyüyen bir tor yüzeyidir.

$b_1 = 2$, $b_2 = 1$ ve $q_2 = b_1 + b_2 \cos s$ olmak üzere;

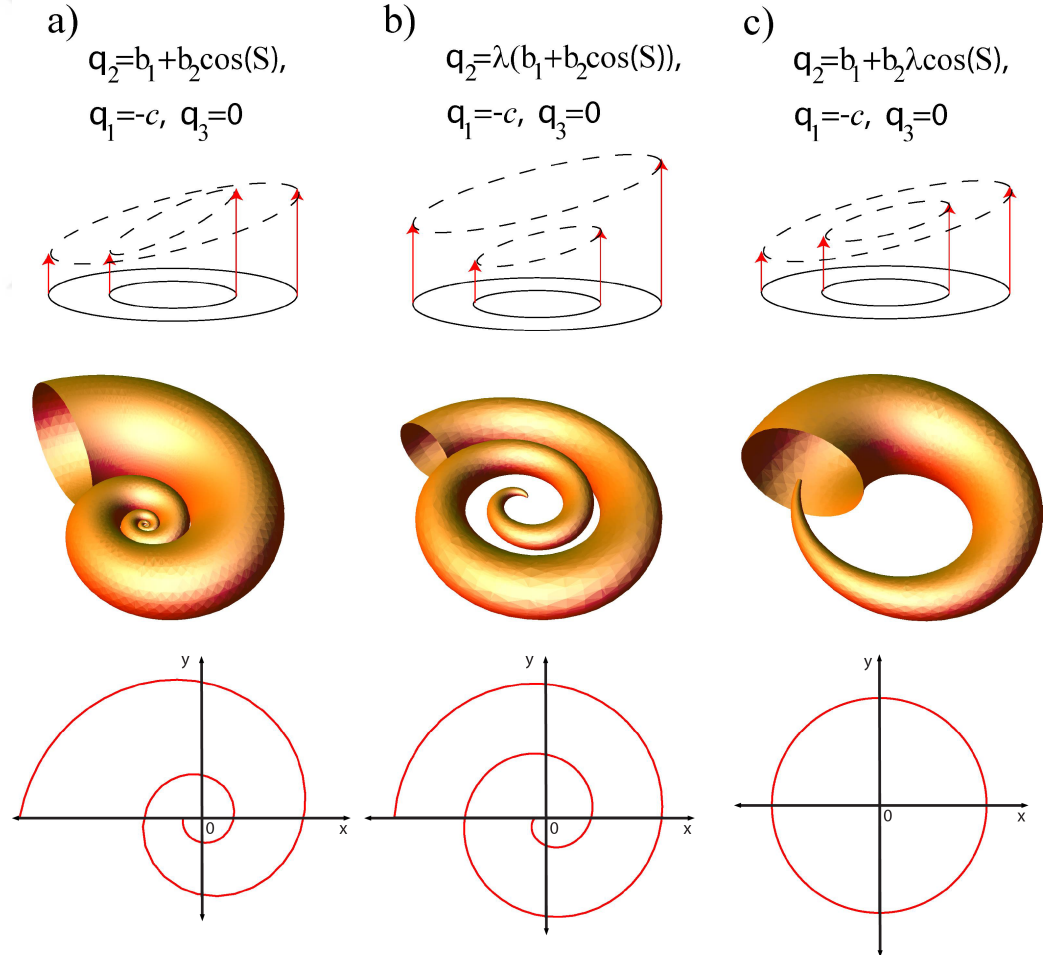
$$r(s, t) = (\cos t(2 + \cos s) - 1, \sin s, (2 + \cos s) \sin t), s = (0, 2\pi), t = (-2, 2)$$

yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.5 Seçilen hız vektörü için elde edilen tor yüzeyi

Örnek 3.3 Daha önce verilen örneklerden farklı olarak, hız vektör alanı normal yönünde büyüme yapacak şekilde seçilsin. Normal yönde büyüme yapmak için $q_1 = -c$ bileşeni alınsın. Bu durumda Q vektör alanı için hız bileşenleri; $q_1 = -c$, $q_2 = b_1 + b_2 \cos s$, $q_3 = 0$ olur. Her noktadaki binormal büyüme oranı aynı kalırken üretme eksenini genişler. Dolayısıyla üretici eğri daha küçük olduğunda büyüme eksenini boyunca daha dik bir büyüme eğrisi olur ve daha büyük bir üretici eğriye kıyasla yüzey daha sıkı döner. Bu büyüme biçimi için hücre izleri logaritmik spiral oluşturur ve Şekil (3.6)-(a)'da gösterilen sedefli deniz kabuğuna benzer bir yüzey oluşur. λ genişleme faktörü olmak üzere hız vektör alanı, $q_1 = -c, q_2 = \lambda(t)(b_1 + b_2 \cos s)$, $q_3 = 0$, $\lambda = 1 + ct$ olarak seçildiğinde Şekil (3.6)-(b); $q_1 = -c, q_2 = b_1 + b_2 \lambda(t) \cos s$, $q_3 = 0$, $\lambda = 1 + ct$ olarak seçildiğinde Şekil (3.6)-(c) elde edilir.



Şekil 3.6 Doğrusal olarak genişleyen üç temel büyüme şekli
(E. Moulton, A. Goriely, 2014)

Şimdiye kadar dairesel kesite sahip yapılar oluşturuldu ve buna uygun yerel büyüme hızları seçildi. Şimdi keyfi bir üreteç eğrisi alınsın ve önceki kabuk büyümelerinde kullanılandan farklı bir yaklaşım tanımlansın. Önceki örneklerde oluşturulan yüzeylerin anlaşılabilir olmasının temel nedeni, üreteç eğrisinin çember kalmasıdır. Bu durum, üreteç eğrisi değişmediğinde analitik olarak işlenebilen genel bir evrim sınıfını işaret eder. Buradan üretici eğrinin öteleme, dönme ve genişleme hareketleri yaptığı sonucu çıkarılır. Hareketlerin yerel hız biçiminde ifade edilmesi gerektiğinden, düzlemsel eğrilere kısıtlama yapılarak; normal ile teğet yönlerindeki hız ve binormal yönündeki hızlara göre düzlemsel eğri arasındaki fark incelenir.

$r(s, t)$ keyfi düzlemsel bir eğri olsun. $|r'(s, 0)| = \lambda_0 = 1$ olsun. Eğri geliştikçe, eğrinin şeklini değiştirmeyecek q_1 ve q_3 vektörleri bulunmalıdır. Şeklin sabit olması, herhangi bir t anında $|r'(s, 0)| = \lambda(t)$ ve κ eğrilik olmak üzere; $\kappa(s, t) = \lambda^{-1}\kappa(s, 0)$ olmasını gerektirir. $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \lambda\kappa(s, 0)$ olduğunda $\dot{u}_2 = 0$ bulunur. (3.10) ile verilen denklem sistemi kullanılarak;

$$q_1' + u_2 q_3 = \lambda w_2 \quad (3.11)$$

$$q_3' - u_2 q_1 = \dot{\lambda} \quad (3.12)$$

$$w_2' = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.11) denkleminde s parametresine göre türev alınıp, (3.12) ve (3.13) denklemleri yerine yazıldığında;

$$q_1'' + u_2' q_3 + u_2^2 q_1 + u_2 \dot{\lambda} - \lambda' w_2 = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Bu denklem üreteç eğrisinin şeklinin sabit kalması için yerel düzlemde hız alanları için bir kural verir. (3.14) denkleminin genel çözümü:

$$q = c_1(t)r + c_2(t)r_{\perp} + a(t) \quad (3.15)$$

olur. Burada ilk terim radyal yönde bir hız tanımlar ve eğrinin genişlemesini hesaplar. İkinci terim çevresel yönde bir hız verir ve dönmeyi hesaplar. ($r_\perp$, r ile aynı büyüklükte ve pozisyon vektörüne dik olan bir vektördür.) Üçüncü terimdeki $a(t)$ keyfi vektördür ve ötelemeyi sağlar.

(3.15) denkleminin (3.14) denklemini sağlayacağı aşıkardır. c_i değerlerini bulmak için q , yerel koordinatlarda ifade edilir. $\beta_i = rd_i$ ve $\alpha_i = ad_i$ olmak üzere;

$$r = \beta_1 d_1 + \beta_3 d_3 \quad , \quad r_\perp = \beta_3 d_1 - \beta_1 d_3 \quad , \quad a = \alpha_1 d_1 + \alpha_3 d_3 \quad (3.16)$$

Yerel hızlar;

$$q_1 = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_3 + \alpha_1, \quad q_3 = c_1 \beta_3 - c_2 \beta_1 + \alpha_3 \quad (3.17)$$

olmak üzere; $r' = \lambda d_3$ ve Frenet eşitlikleri $d'_1 = -u_2 d_3$, $d'_3 = u_2 d_1$ kullanılarak;

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= -u_2 \beta_3 \quad , \quad \beta'_3 = \lambda + u_2 \beta_1 \\ \alpha'_1 &= -u_2 \alpha_3 \quad , \quad \alpha'_3 = -u_2 \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir ve (3.14) ve (3.17) eşitliklerinden yaralanılarak;

$$c_1(t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \quad , \quad c_2(t) = w_2(t) \quad (3.19)$$

bulunur (E. Moulton, A. Goriely, 2014).

3.2 Öklid Uzayında Eğri-Yüzey Çatısı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler

Darboux matrisi $U = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -\tau_g & -\kappa_n \\ \tau_g & 0 & -\kappa_g \\ \kappa_n & \kappa_g & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde alınsın. $r(s, t)$ yüzeyini üretirken, başlangıç eğrisi için Darboux çatısında binormal vektör yönünde bir bileşen olmalıdır. Darboux türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tau_g & -\kappa_n \\ \tau_g & 0 & -\kappa_g \\ -\kappa_n & \kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

şeklinde verilir. Eğer (3.10) ile verilen birinci dereceden lineer olmayan altı diferensiyellenebilir denklem, bu verilere göre tekrar düzenlenirse aşağıdaki yeni denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
q_1' - \kappa_n q_3 - \tau_g q_2 &= \lambda w_2 \\
q_2' + \tau_g q_1 - \kappa_g q_3 &= -\lambda w_1 \\
q_3' + \kappa_g q_2 + \kappa_n q_1 &= \dot{\lambda} \\
\dot{\kappa}_g - w_1' &= -k_n w_3 - \tau_g w_2 \\
-\dot{\kappa}_n - w_2' &= \tau_g w_1 - \kappa_g w_3 \\
\dot{\tau}_g - w_3' &= k_g w_2 - \kappa_n w_1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Yerel çatı serbest olarak seçilir ve (3.21) ile verilen denklem sistemi seçilen $q = (q_1, q_2, q_3)$ hız vektörüne göre çözülür. Daha sonra (3.5) ifadesinde verilen $\partial_t r(s, t) = Dq$ denklemi için integral alınırsa $r(s, t)$ yüzey denklemi elde edilir.

Örnek 3.4 Kolayca gösterilebilir ki; $r(s, 0) = (\cos s, \sin s, 1)$ üretici eğrisi

$$S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisidir. Bu eğri ve yüzey için, Darboux çatısı ve $r(s, 0)$ eğrisinin eğrilikleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

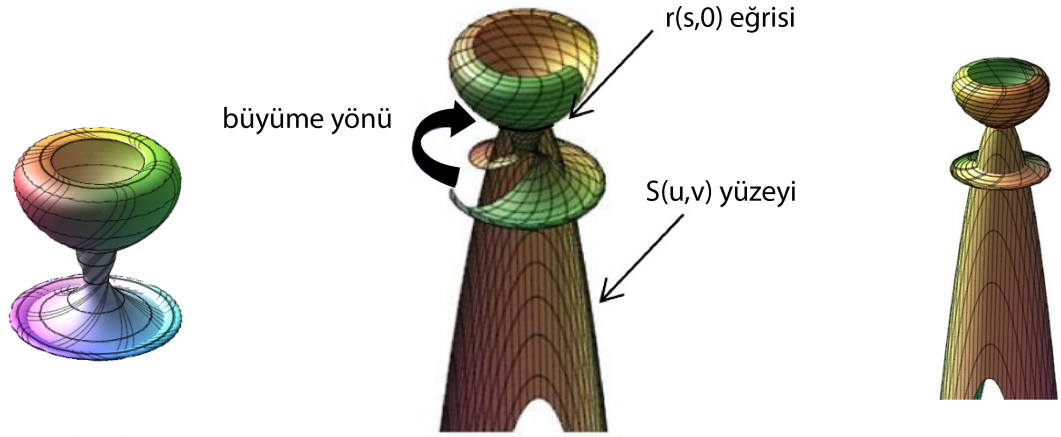
$$\begin{aligned}
d_1 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\
d_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin s, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\
d_3 &= (-\sin s, \cos s, 0)
\end{aligned}$$

$$k_n = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad k_g = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tau_g = 0.$$

U matrisinin bileşenleri; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $u_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $u_3 = 0$ elde edilir. Büyüme için hız vektörü $q = (0, 0, b_1)$ alınır ve (3.21) ile verilen denklem sistemi ile çözülürse;

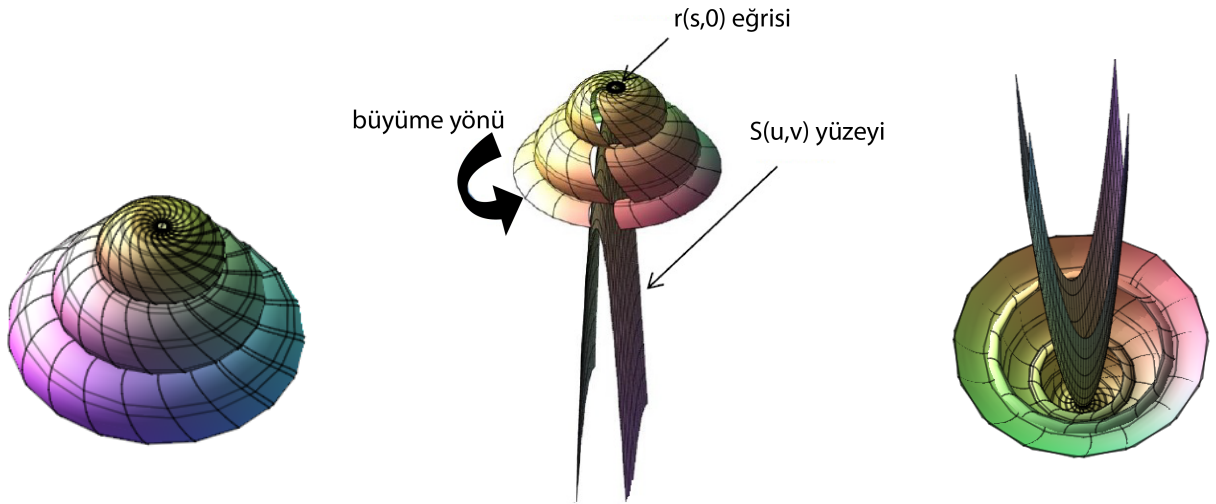
$\lambda = b_2$, $w_1 = \frac{b_1}{\sqrt{5}b_2}$, $w_2 = \frac{-2b_1}{\sqrt{5}b_2}$, $w_3 = 0$ bulunur. Bu durumda yüzey denklemi $\partial_t r(s, 0) = Dq$ ifadesinin integrasyonu ile elde edilir. $b_1 = 1$ ve $b_2 = -1$ için

$r(s,t)$ yüzeyinin grafiği aşağıda verilmiştir.(Şekil 3.7)



Şekil 3.7 Seçilen üretici eğri için elde edilen yüzey

Eğer hız vektörü $q = (0, 0, t)$ olarak alınırsa; yine (3.21) denklem sisteminin çözümünden, $\lambda = \frac{b_1}{2}$ ve $w_1 = \frac{-t}{\sqrt{5}b_1}$, $w_2 = \frac{-2t}{\sqrt{5}b_1}$, $w_3 = 0$ elde edilir. Benzer hesaplamalar yapılarak $q = (0, 0, t)$ hız vektörüne göre elde edilen $r(s, t)$ yüzeyinin grafiği, $b_1 = -2$, $b_2 = -2$, $c_3 = 2$ olmak üzere Şekil 3.8 ile verilir.



Şekil 3.8 $q(s, t) = (0, 0, t)$ hız vektörü yardımıyla elde edilen yüzey

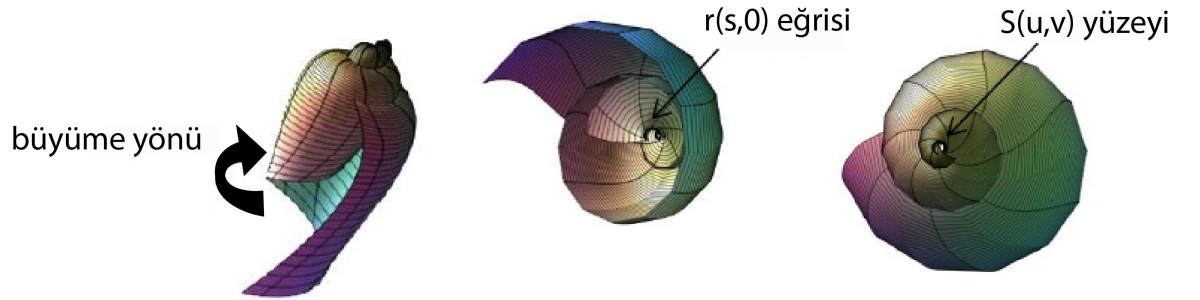
Örnek 3.5 $r(s, 0) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ üretici eğrisi,

$$S(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

yüzeyi üzerinde geodezik bir eğridir. Bu eğri ve bu yüzey için Darboux çatısının bileşenleri ve $r(s, 0)$ eğrisinin eğrilikleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ d_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ d_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ k_n &= -\frac{1}{2}, \quad k_g = 0, \quad \tau_g = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

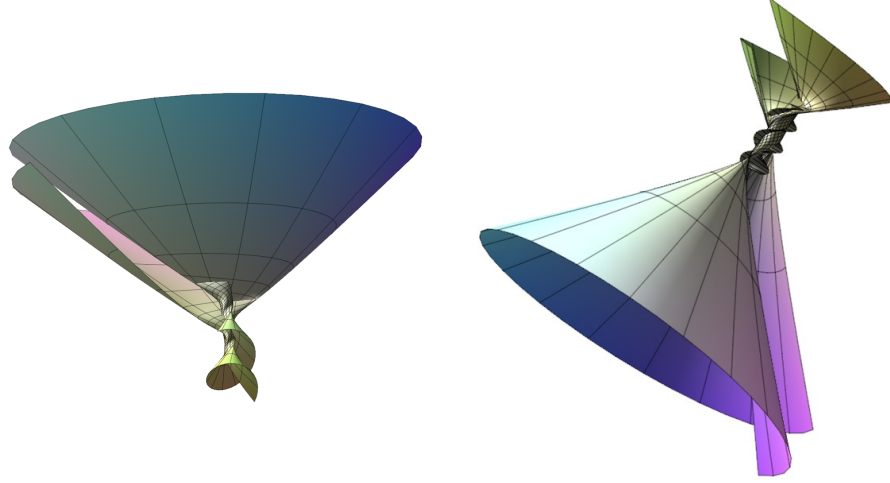
Hız vektörü $q = (2b_1, -b_1s + b_2, b_1s + b_2)$ ve U matrisinin bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = s$; $w_1 = 0$, $w_2 = w_3 = b_1$ olmak üzere aşağıdaki yüzey elde edilir. Bu durumda $r(s, t)$ büyüyerek gelişen yüzeyinin grafiği Şekil 3.9 ile verildiği gibi elde edilir.



Şekil 3.9 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Örnek 3.6 Üreteç eğrisi olarak $S(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ yüzeyinin, $r(s, 0) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ asimptotik eğrisi göz önüne alınırsa, Darboux çatısının bileşenleri ve $r(s, 0)$ eğrisinin eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ d_2 &= \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ d_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ k_n &= 0, \quad k_g = -\frac{1}{2}, \quad \tau_g = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Şekil 3.10 Seçilen başlangıç eğrisine göre elde edilen yüzey

Örnek 3.7 $S(u, v) = (\cos u(\cos v + 1), \sin u(\cos v + 1), \sin v - 1)$ yüzeyi üzerindeki herhangi bir $r(\varsigma, 0) = (\cos \varsigma, \sin \varsigma, 0)$ üreteç eğrisini göz önüne alalım. $r(\varsigma, 0)$ eğrisinin eğrilikleri ve Darboux çatısının bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

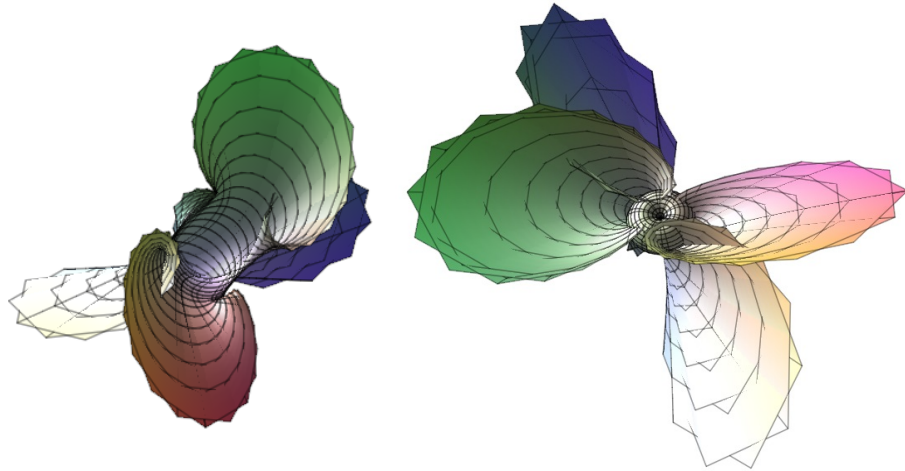
$$d_1 = (0, 0, 1),$$

$$d_2 = (-\cos \varsigma, -\sin \varsigma, 0)$$

$$d_3 = (-\sin \varsigma, \cos \varsigma, 0)$$

$$k_n = 0, \quad k_g = 1, \quad \tau_g = 0$$

Hız vektörü $q = (\cos \varsigma, \sin \varsigma, \cos \varsigma)$ için, U matrisinin bileşenleri $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ ve $\lambda = \frac{-1}{b_3}$; $w_1 = 0$, $w_2 = \sin \varsigma$, $w_3 = \cos \varsigma$ elde edilir. $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$ için $r(\varsigma, t)$ yüzeyinin grafiği Şekil 3.11 ile verilmiştir.



Şekil 3.11 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Örnek 3.8 $S(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ yüzeyi üzerinde, üreteç eğrisi olarak $r(\varsigma, 0) = (\cos \varsigma, \sin \varsigma, 0)$ geodezik eğrisi seçilsin. Frenet çatısının bileşenleri ve üreteç eğrisinin eğrilikleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

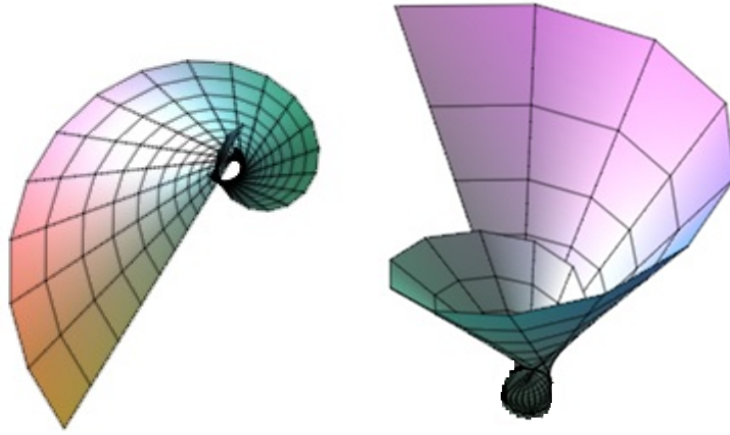
$$d_1 = (\cos \varsigma, \sin \varsigma, 0)$$

$$d_2 = (0, 0, 1)$$

$$d_3 = (-\sin \varsigma, \cos \varsigma, 0)$$

$$k_n = -1, \quad k_g = 0, \quad \tau_g = 0$$

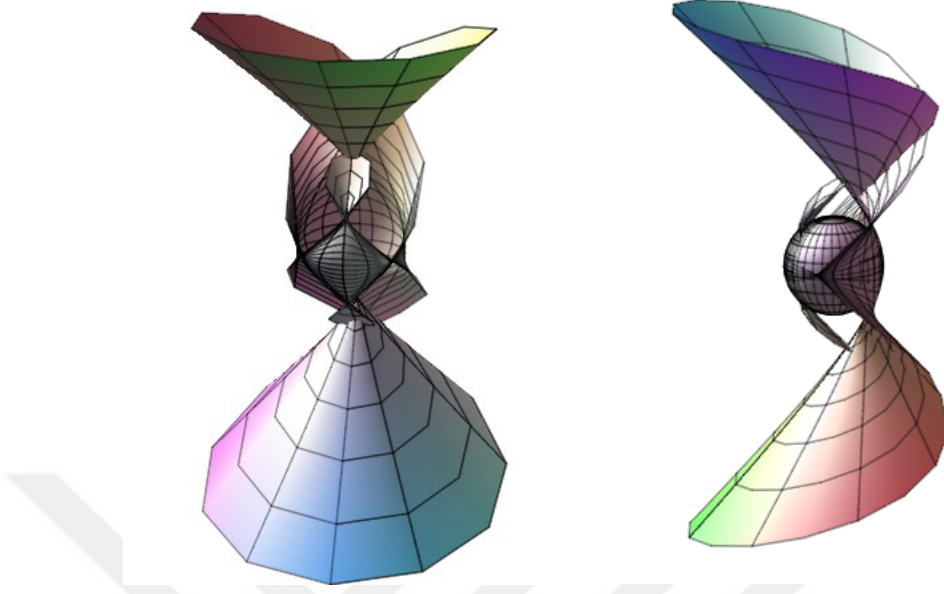
$q = (0, b_1 + b_2 \varsigma, 0)$ hız vektörü için U matrisinin bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$ olarak elde edilir ve $\lambda = \frac{-b_2}{b_3 \cos \varsigma}$; $w_1 = b_3 \cos \varsigma$, $w_2 = 0$, $w_3 = b_3 \sin \varsigma$ bulunur. $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ için elde edilen yüzeyin grafiği Şekil 3.12 ile verilir.



Şekil 3.12 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Hız vektörü $q = (0, b_1 + b_2 \cos \varsigma, 0)$ olarak alındığında benzer hesaplamalarla $\lambda = \frac{b_2 \sin \varsigma}{b_3 \cos \varsigma}$ ve $w_1 = b_3 \cos \varsigma$, $w_2 = 0$, $w_3 = b_3 \sin \varsigma$ elde edilir. $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$

için grafik Şekil 3.13 ile verildiği gibi çizilir.



Şekil 3.13 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

3.2.1 Keyfi eğriler için hız vektör alanı

Bu kısımda, t parametrelili keyfi bir eğri $X(t)$ ve $X(t)$ eğrisinin her noktasında orto-normal çatı $\mathbf{d}_i, i = 1, 2, 3$ olmak üzere, Darboux çatısına göre $r(\varsigma, t) = X(t) + \lambda(t) \cdot \rho(\varsigma, t)$ yüzeyinin büyüme hızı bileşenleri bulunacaktır.

$X(t)$ eğrisinin tanjant vektörü $\mathbf{d}_3$ olsun. Yüzeyi üretmek için, $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ düzleminde yatan eğri,

$$\rho(\varsigma, t) = r_1(\varsigma)\mathbf{d}_1 + r_2(\varsigma)\mathbf{d}_2, \quad (3.22)$$

olarak verilebilir (E. Moulton, A. Goriely, 2014). Böylece yüzey;

$$r(\varsigma, t) = X(t) + \lambda(t) \cdot \rho(\varsigma, t). \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. $X(t)$ eğrisi için $d_i, i = 1, 2, 3$ yerel taban bileşenleri aşağıdaki gibi gösterilir.

$$d_1 = \frac{\partial_\varsigma r \times \partial_t r}{\|\partial_\varsigma r \times \partial_t r\|}, \quad d_2 = d_1 \times d_3, \quad d_3 = \frac{\partial_\varsigma r}{\|\partial_\varsigma r\|}$$

Hız vektör alanı

$$\partial_t r = q_1 d_1 + q_2 d_2 + q_3 d_3, \quad q_i = g(\partial_t r, d_i) \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $X(t)$ eğrisinin hız bileşenleri

$$\begin{aligned} q_1 &= g(\partial_t r, d_1), \\ q_2 &= g(\partial_t r, d_2), \\ q_3 &= g(\partial_t r, d_3). \end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak verilir. $\partial_t X = \mathbf{d}_3$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{d}_1 &= -\tau_g \mathbf{d}_2 - k_n \mathbf{d}_3, \\ \partial_t \mathbf{d}_2 &= \tau_g \mathbf{d}_1 - k_g \mathbf{d}_3, \\ \partial_t \mathbf{d}_3 &= -k_n \mathbf{d}_1 + k_g \mathbf{d}_2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.22) ifadesinde ς ve t parametrelerine göre türev alınarak takip eden eşitlikler yazılırsa,

$$\dot{\rho}(\varsigma, t) = r_2 \tau_g \mathbf{d}_1 - r_1 \tau_g \mathbf{d}_2 - (r_1 k_n + r_2 k_g) \mathbf{d}_3 \text{ ve } \rho'(\varsigma, t) = r_1 \mathbf{d}_1 + r_2 \mathbf{d}_2.$$

olur. Buradan d_i , $i = 1, 2, 3$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-r_2' \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) d_1 + r_1' \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) d_2 + \lambda \dot{\lambda} \tau_g (r_1 r_1' + r_2 r_2') d_3}{\mu}, \\ d_2 &= \frac{\lambda \dot{\lambda} \tau_g r_2' (r_1 r_1' + r_2 r_2') d_1 - r_1' \lambda \dot{\lambda} \tau_g (r_1 r_1' + r_2 r_2') d_2 + (r_2'^2 \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) + r_1'^2 \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g)) d_3}{\eta \mu}, \\ d_3 &= \frac{r_1 \mathbf{d}_1 + r_2 \mathbf{d}_2}{\eta}. \end{aligned}$$

$$\eta = \sqrt{(r_1')^2 + (r_2')^2},$$

$$\mu = \eta [(r_2' \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g))^2 + (r_1' \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g))^2 + (\lambda \dot{\lambda} \tau_g (r_1 r_1' + r_2 r_2'))^2]^{1/2}$$

olmak üzere bulunan d_i , $i = 1, 2, 3$ ifadeleri (3.25) denklemlerinde yerine yazılarak hız vektör alanının bileşenleri

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{-\tau_g r_2 r_2' \lambda \dot{\lambda}^2 (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) - r_1 \tau_g r_1' \lambda \dot{\lambda}^2 (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) + \lambda \dot{\lambda} \tau_g (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) (r_1 r_1' + r_2 r_2')}{\mu}, \\ q_2 &= \frac{r_2 \lambda \dot{\lambda}^2 \tau_g^2 r_2' (r_1 r_1' + r_2 r_2') + r_1 r_1' \lambda \dot{\lambda}^2 \tau_g^2 (r_1 r_1' + r_2 r_2') + (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) (r_2'^2 \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g) + r_1'^2 \lambda \dot{\lambda} (1 - r_1 k_n - r_2 k_g))}{\eta \mu}, \\ q_3 &= \frac{\dot{\lambda} r_2 \tau_g r_1' - \dot{\lambda} r_1 \tau_g r_2'}{\eta}. \end{aligned}$$

eşitlikleriyle belirlenir.

3.3 Öklid Uzayında Alternatif Hareketli Çatı Yardımıyla Büyüyerek Gelişen Yüzeyler

Önceki kısımda, Frenet çatısı için, t anında eğri boyunca yerel tabanın dönüşünü tanımlayan ve $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüne karşılık gelen yarı-simetrik U Darboux matrisi verilmiş ve bu matrise göre yüzeyler oluşturulmuştur.

Bu kısımda (B. Uzunoglu vd, 2016) tarafından tanımlanan $\{N, C, W\}$ alternatif hareketli çatısı kullanılarak yüzeyler elde edilecektir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında keyfi birim hızlı bir eğri olsun. Burada (T, N, B) ortogonal birim vektör alanının varlığı bilinmektedir. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında α eğrisi üzerinde $\{N, C, N \wedge C = W\}$ alternatif hareketli çatısı $C = \frac{N'}{\|N'\|}$, $W = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ olmak üzere,

N : birim normal vektör

C : birim normal vektörün türevi

W : Darboux vektörü

ile verilir. Hareketli alternatif çatının türev formülleri,

$$N' = f(s)C(s)$$

$$C' = g(s)W(s) - f(s)N(s)$$

$$W' = -g(s)C(s)$$

şekinde olup, bu ifade teoride kullanılacak şekilde düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} C'(s) \\ W'(s) \\ N'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g(s) & -f(s) \\ -g(s) & 0 & 0 \\ f(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ W \\ N \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

elde edilir.

α eğrisinin hareketli çatıya göre eğrilikleri f ve g olmak üzere; $f = \kappa\sqrt{1 + H^2}$ ve $g = \sigma f$, σ sabit fonksiyon ile verilir (B. Uzunoglu vd, 2016).

$$U = \begin{bmatrix} 0 & g(s) & -f(s) \\ -g(s) & 0 & 0 \\ f(s) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 matrisi için (3.10) ile verilen denklemler düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
 q_1' + f(s)q_3 - g(s)q_2 &= \lambda w_2 \\
 q_2' + g(s)q_1 &= -\lambda w_1 \\
 q_3' - f(s)q_1 &= \dot{\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 -w_1' &= f(s)w_3 - g(s)w_2 \\
 \dot{f}(s) - w_2' &= g(s)w_1 \\
 \dot{g}(s) - w_3' &= -f(s)w_1
 \end{aligned}$$

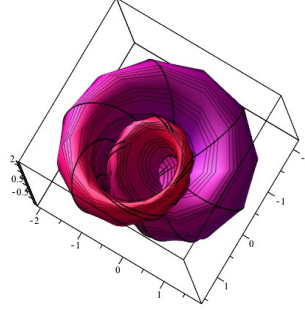
lineer bağımsız olan altı diferensiyellenebilir denklem elde edilir. Eğri-yüzey çatısında verildiği gibi benzer işlemler yapılarak belirlenen hız vektörleri için yüzey denklemi elde edilir. Daha geniş teorik bilgi için (G.Tuğ vd, 2018) ve (G. Tuğ vd, 2017) çalışmalarına bakılabilir. Bu çalışmalarda yer alan bazı örneklere ve görsellere aşağıda yer verilecektir.

Örnek 3.9 $\alpha(s) = (\frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s, -\frac{3}{4} \cos s + \frac{1}{12} \cos 3s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s)$ eğrisini göz önünde bulunduralım. Hareketli alternatif çatı bileşenleri

$$\begin{aligned}
 N &= (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2s, \frac{-1}{2}) \\
 C &= (-\sin 2s, -\cos 2s, 0) \\
 W &= (\frac{1}{2} \cos 2s, \frac{1}{2} \sin 2s, \frac{\sqrt{3}}{2})
 \end{aligned}$$

bulunur. Alternatif hareketli çatı için verilen türev formülleri kullanılarak, $f(s) = \sqrt{3}$ ve $g(s) = -1$ elde edilir. Hız vektörü $q = (0, 0, b_1)$ olarak alınıp (3.28) denklemleri çözülürse; $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{\sqrt{3}b_1}{b_2}$, $w_3 = \frac{-b_1}{b_2}$ elde edilir. Dolayısıyla bütyüerek

gelişen yüzey Şekil 3.14 ile verildiği gibidir.



Şekil 3.14 Seçilen bir eğri için üretilen yüzey

Örnek 3.10 $r(s, 0) = \left(\int_0^s \sin \frac{u^2}{2} du, \int_0^s \cos \frac{u^2}{2} du, s \right)$ uzay eğrisini alalım. $q = (a_1, a_2, a_3)$

hız vektörü için elde edilen diferensiyel denklemler kullanılarak, $\lambda = \sqrt{2}s$ $w_1 = 0$,

$w_2 = a_3$, $w_3 = 0$ elde edilir. $\partial_t D = DW$ çatı üreten denklemi kullanarak

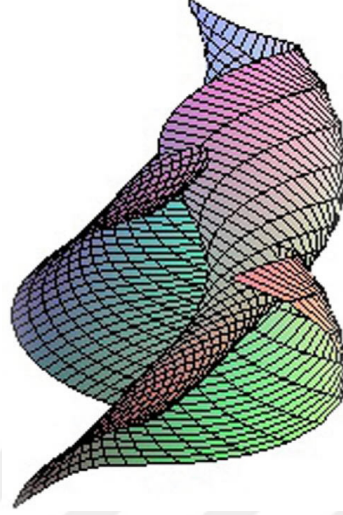
$$\dot{d}_1 = a_3 d_3$$

$$\dot{d}_2 = 0$$

$$\dot{d}_3 = -a_3 d_1$$

bulunur ve $\partial_t r(s, t) = Dq$ ifadesinde integral alınırsa aranan yüzey denklemi bulun-

muş olur ve Şekil 3.15 elde edilir.



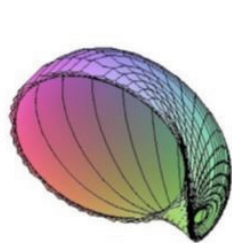
$$b_1 = 1, b_2 = 0.5, c = 3$$

Şekil 3.15 Seçilen bir uzay eğrisi için üretilen yüzey

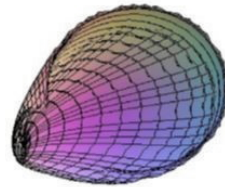
Örnek 3.11 Bir önceki örnekte seçilen üretici eğri için hız vektörü bileşeni q_2 , C ve W vektörlerinin düzleminde lineer bir fonksiyon olan $q_2 = b_1 + b_2 \cos s$ seçilsin ve $q_1 = q_3 = 0$ olsun. Seçilen bu hız vektörü için benzer adımlar takip edilerek,

$$\lambda = \frac{b_2 \sin s}{\cos \frac{\sqrt{2}}{2} s^2} \quad w_1 = \cos \frac{\sqrt{2}}{2} s^2, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = \sin \frac{\sqrt{2}}{2} s^2$$

elde edilir. Bu durumda seçilen keyfi sabitler için aşağıdaki yüzeyler elde edilir (Şekil 3.16-3.19).



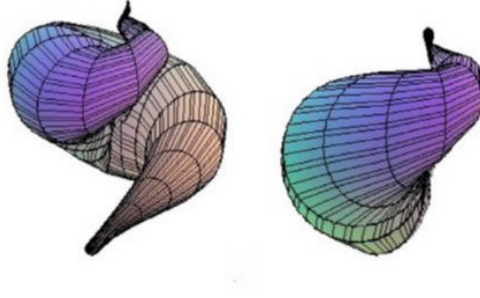
$$b_1 = 1, b_2 = -1.7$$



$$b_1 = -2, b_2 = 1.7, \\ a_0 = -1.2$$



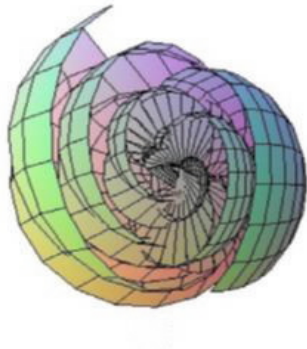
Şekil 3.16 Seçilen hız vektörü için oluşturulan yüzey



$$b_1 = -2, b_2 = -2, a_0 = 1$$

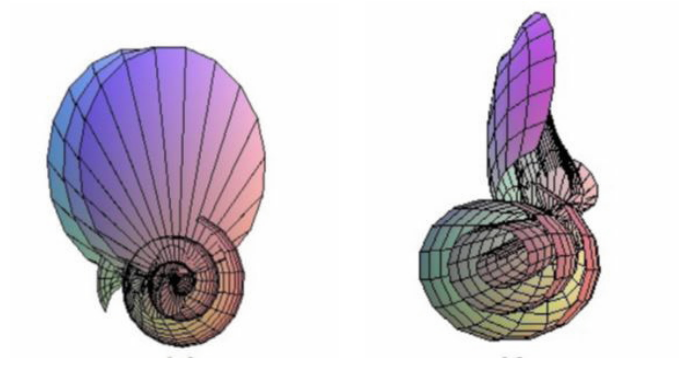
Şekil 3.17 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Şimdi b_1 ve b_2 sabit sayılar olmak üzere, $q_1 = -\frac{b_2 \sin s}{\sqrt{2}s \cos \frac{\sqrt{2}}{2}s^2}$, $q_2 = b_1 + b_2 t \cos s$ ve $q_3 = 0$ alalım. Bu durumda $\lambda = \frac{b_2 t \sin s}{\cos \frac{\sqrt{2}}{2}s^2}$ $w_1 = \cos \frac{\sqrt{2}}{2}s^2$, $w_2 = 0$, $w_3 = \sin \frac{\sqrt{2}}{2}s^2$ olarak hesaplanır ve benzer çözümler uygulanarak aşağıdaki yüzeyler elde edilir.



$$b_1 = 2, b_2 = -1$$

Şekil 3.18 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

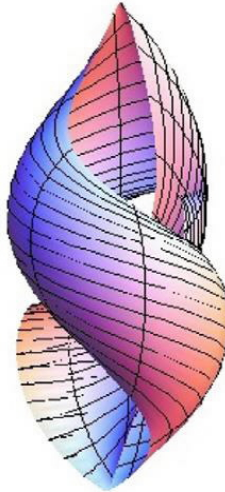


$$b_1 = -2, b_2 = -1 \quad b_1 = -0.07, b_2 = -0.07$$

Şekil 3.19 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Örnek 3.12 $r(s, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \sin(\sqrt{2}-1)s - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \sin(\sqrt{2}+1)s, \\ -\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \cos(\sqrt{2}-1)s + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \sin(\sqrt{2}+1)s, \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin s \end{pmatrix}$ eğrisini

ele alalım. $q_1 = 0$, $q_2 = b_1 + b_2 t \cos s$ ve $q_3 = 0$ olmak üzere bilinen işlemler sonucunda Şekil 3.20 ile verilen yüzey elde edilir.



$$b_1 = 1, b_2 = 2$$

Şekil 3.20 Seçilen bir eğri için elde edilen yüzey

3.4 Galile Uzayında Büyüyerek Gelişen Yüzeyler

Daha önce Öklid uzayında büyüyerek gelişen yüzeyler ele alınmış ve çatı değişimi veya farklı üretici eğri seçimleriyle yüzeyler oluşturulmuştu. Bunu yaparken çeşitli U Darboux matrisleri kullanılmıştı. Bu bölümde, Galile uzayında büyüyerek gelişen yüzeyler verilecektir.

$\gamma = (c, y(t), z(t))$ kabul edilebilir bir eğri olsun. Bu eğri için Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \quad k : \gamma \text{ eğrisinin eğriligi}$$

Yay parametresi s olmak üzere, $\gamma(s) = (s, y(t), z(t))$ kabul edilebilir eğrisi için Frenet türev formülleri aşağıdadır.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

3-boyutlu $\mathbb{G}^3$ uzayında bir $r(s, 0)$ eğrisi ve $\{d_1, d_2, d_3\}$ ortogonal çatısı alınsın. $\mathbb{G}^3$ uzayında Darboux vektörleri,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & 0 \\ -w_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere önceki bölümlerde takip edilen işlemler burada da uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lambda w_2 &= -u_3 q_2 + u_2 q_3 \\ q_2' &= 0 \\ q_3' &= \dot{\lambda} \\ w_3' &= \dot{u}_3 \\ w_2' &= \dot{u}_2 \\ u_2 w_3 &= w_2 u_3 \end{aligned} \tag{3.29}$$

lineer olmayan altı diferensiyel denklem elde edilir. $\partial_t r(s, t) = Dq$ denklemi yardımıyla

sistem çözüldüğünde, $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Darboux matrisi elde edilir.

Örnek 3.13 $r(s, 0) = (0, a_0 \sin \frac{s}{a_0}, a_0 \cos \frac{s}{a_0})$ kabuledilebilir olmayan üretici eğrisi seçilsin. Frenet formülleri yardımıyla,

$$d_1 = (0, a_0 \sin \frac{s}{a_0}, a_0 \cos \frac{s}{a_0})$$

$$d_2 = (1, 0, 0)$$

$$d_3 = (0, \cos \frac{s}{a_0}, -\sin \frac{s}{a_0},)$$

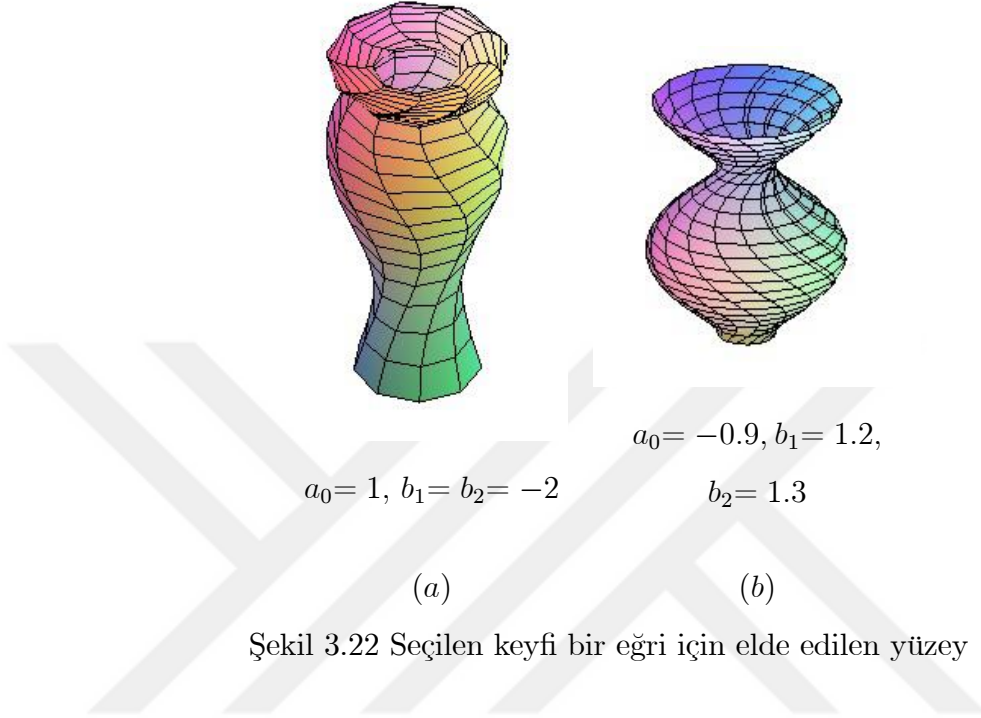
hesaplanır. Hız vektörü $q = (0, b_1 + b_2 \cos \frac{t}{a_0}, -b_2 \sin \frac{t}{a_0})$ seçilirse, U matrisinin bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$ bulunur. (3.29) eşitlikleri kullanılarak, $\lambda = c_1$, $w_1 = 0$, $w_2 = -\frac{b_2}{c_1} \sin \frac{t}{a_0}$, $w_3 = 0$ elde edilir. $a_0 = 1, b_1 = b_2 = -4$ seçilirse Şekil 3.21 ile verilen yüzey bulunmuş olur.



Şekil 3.21 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Eğer hız vektörleri $q = (1, b_1 + b_2 a_0 t, b_2 a_0)$ ve $q = (1, b_1, b_2)$ olacak şekilde seçilirse,

sırasıyla, karşımıza Şekil 3.22–(a) ve Şekil 3.22–(b) çıkar.

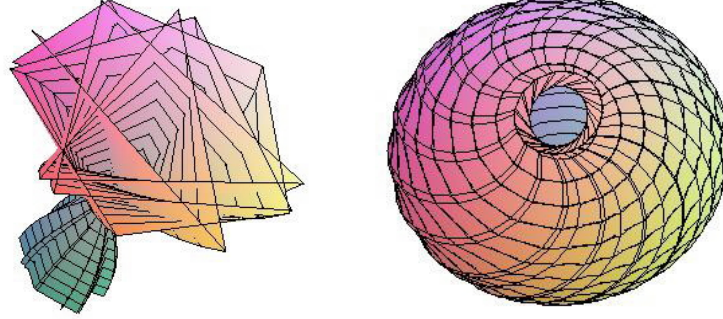


Örnek 3.14 $r(s, 0) = \left(1, \int_0^s \sin \frac{u^2}{2} du, \int_0^s \cos \frac{u^2}{2} du \right)$ kabul edilebilir olmayan üretici eğrisi seçilsin. Frenet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(0, -\cos \frac{u^2}{2}, \sin \frac{u^2}{2} \right) \\ d_2 &= (1, 0, 0) \\ d_3 &= \left(0, \sin \frac{u^2}{2}, \cos \frac{u^2}{2} \right) \end{aligned}$$

hesaplanır. $q = (c_1, c_2, t + c_3)$ hız vektörü olmak üzere U matrisinin bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = -s$, $u_3 = 0$ olarak hesaplanır ve benzer yöntemlerle elde edilen

yüzeyler Şekil 3.23 ile verilir.

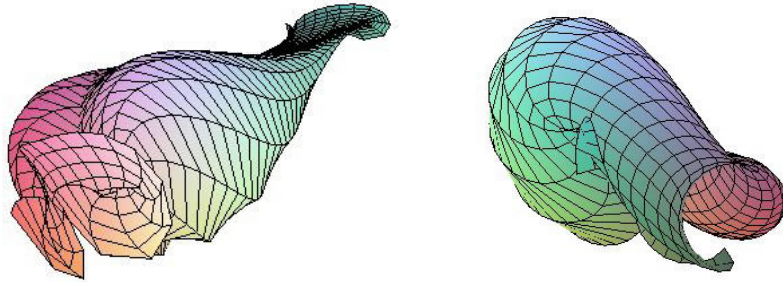


$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.8$$

Şekil 3.23 Kabul edilebilir olmayan üretici bir eğri için oluşturulan yüzey

Şimdi hız vektörü $q = (0, \frac{b_2}{a_0} e^{\frac{t}{a_0}}, b_2 e^{\frac{t}{a_0}})$ seçilsin. $\lambda = s$ olmak üzere verilen denklem sistemi çözülüp benzer işlemler yapılır. Seçilen sabitler için aşağıdaki yüzeyler elde edilir.



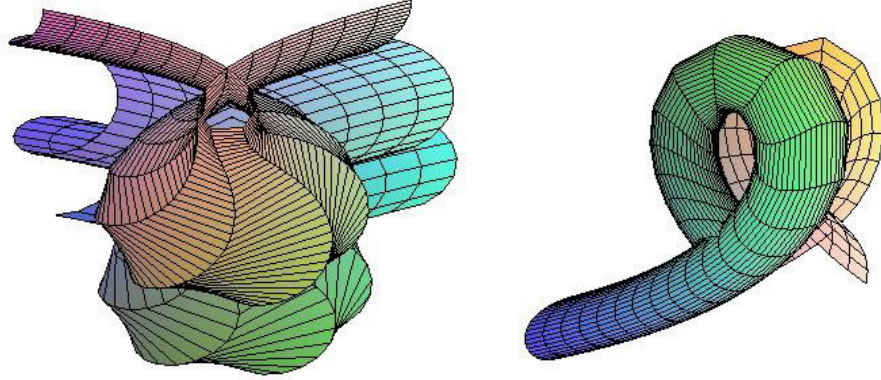
$$a_0 = -2.2, b_1 = 1, b_2 = 0.05$$

$$a_0 = 3, b_1 = -4, b_2 = -1.7$$

Şekil 3.24 Seçilen hız vektörü için elde edilen yüzey

Örnek 3.15 $r(s, 0) = (0, 2 \arctan s - s, \ln[\frac{s^2+1}{2}])$ parametrik denklemiyle verilen kabul edilebilir olmayan r üretici eğrisi alınsın. U matrisinin bileşenleri $u_1 = 0$, $u_2 = -(\frac{2+2s^4}{(s^2+1)^3})$ ve $u_3 = 0$ olarak hesaplanır. (3.29) denklemleri kullanılarak

$\lambda = \frac{2+2s^4}{(s^2+1)^3}$ elde edilir. $q = (b_1, b_2, t)$ hız vektörü seçilirse,



$$b_1 = 0, b_2 = -1$$

$$a_0 = 2, b_1 = -2, b_2 = -1$$

Şekil 3.25 Kabul edilebilir olmayan üretici bir eğri için oluşturulan yüzey yüzeyleri Şekil 3.25 ile görüldüğü gibi elde edilir.

$r(s, t)$, kabul edilebilir olmayan keyfi bir eğri olsun. Eğri geliştikçe, eğrinin şeklini değiştirmeyecek q_1 ve q_3 vektörleri bulunabilir. Başka bir deyişle $\|r'(s, 0)\| = \lambda(t)$ ve k eğrilik olmak üzere; $k(s, t) = \lambda^{-1}k(s, 0)$ olmasını gerektirir. $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \lambda\kappa(s, 0)$ olduğunda $\dot{u}_2 = 0$ bulunur. (3.29) denklemleri bu veriler ışığında yeniden düzenlendiğinde,

$$u_2'q_3 + u_2\dot{\lambda} - w_2\lambda' = 0$$

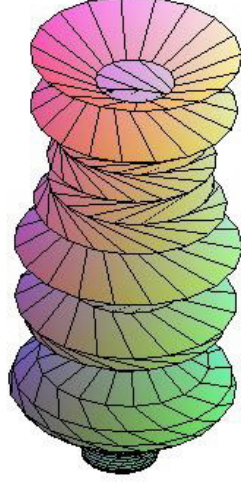
diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklem, üretici eğrinin şeklini sabit tutan hız vektörleri için bir kural tanımlamış olur. Bu durumda $\mathbb{G}^3$ uzayında herhangi bir eğri için hız vektör alanı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} q_1 &= c_1 \\ q_2 &= c_2(t) \\ q_3 &= \frac{1}{(\lambda k)'}(k\lambda\dot{\lambda} + w_2\lambda') \end{aligned}$$

Örnek 3.16 $r(s, 0) = (0, \cos s, \sin s)$ genel helis eğrisi için, hız vektör bileşenleri,

$$q_1 = 0 \quad q_2 = t^2 \quad q_3 = t$$

seçilirse benzer yollar takip edilerek Şekil 3.26 ile verilen yüzeyin grafiğine ulaşılır.



$$0 < t < 2\pi$$

Şekil 3.26 Genel bir helis eğrisi kullanılarak oluşturulan yüzey

Önceki kısımlarda, keyfi eğriler için hız vektör alanının bileşenleri hesaplanmıştı. Yine benzer yöntemler uygulanarak Galile uzayında büyüterek gelişen yüzeylerde, keyfi eğriler için hız vektör alanı aşağıdaki eşitlikler ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(r_1''\mu^2 - r_1''(r_1')^2 + r_1'r_2'r_2'')d_1 + (r_2''\mu^2 - (r_2')^2r_2'' - r_1'r_2'r_1'')d_2}{\mu}, \\ d_2 &= \frac{-(r_2''\mu^2 - r_2''(r_2')^2 - r_1'r_2'r_1'')d_1 + (r_1''\mu^2 - (r_1')^2r_1'' - r_1'r_2'r_2'')d_2}{\mu}, \\ d_3 &= \frac{r_1'\mathbf{d}_2 + r_2'\mathbf{d}_1}{\eta} \end{aligned}$$

Burada;

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{(r_1')^2 + (r_2')^2}, \\ \mu &= \eta[(r_1''\eta^2 - r_1''(r_1')^2 + r_1'r_2'r_2'')^2 + (r_2''\eta^2 - (r_2')^2r_2'' - r_1'r_2'r_1'')^2]^{1/2} \end{aligned}$$

olmak üzere bulunan d_i , $i = 1, 2, 3$ ifadeleri yerine yazılarak hız vektör alanının bileşen-

leri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_1 = \lambda \frac{(r_1 r_1'' \eta^2 - r_1 (r_1')^2 r_1'' + r_1 r_1' r_2' r_2'' + r_2 r_2'' \eta^2 - r_2 r_1' r_2' r_1'' - r_2 r_2'' (r_2')^2)}{\mu} \\ + \lambda \tau \frac{(-r_2 r_1'' \eta^2 + r_2 (r_1')^2 r_1'' - r_2 r_1' r_2' r_2'' + r_1 r_2'' \eta^2 - r_1 r_1' r_2' r_1'' - r_1 r_2'' (r_2')^2)}{\mu}$$

$$q_2 = \lambda \frac{(r_2 r_1'' \eta^2 - r_2 (r_1')^2 r_1'' + r_2 r_1' r_2' r_2'' - r_1 r_2'' \eta^2 + r_1 r_1' r_2' r_1'' + r_1 r_2'' (r_2')^2)}{\mu} \\ + \lambda \tau \frac{(-r_1 r_1'' \eta^2 - r_2 (r_1')^2 r_1'' + r_1 r_1' r_2' r_2'' + r_2 r_2'' \eta^2 - r_2 r_1' r_2' r_1'' - r_2 r_2'' (r_2')^2)}{\mu}$$

$$q_3 = \frac{\lambda(r_1 r_1' + r_2 r_2') + \lambda \tau (-r_2 r_1' + r_1 r_2')}{\eta}$$

4. BÜYÜYEREK GELİŞEN KABUK YÜZEYLERİ

Bu bölümde büyüyerek gelişen kabuk yüzeyinin denklemi verilip, bu yüzeyin iki farklı uzaydaki geometrik özellikleri incelenecektir.

4.1 Öklid Uzayında Kabuk Yüzeyleri

Kabuk yüzeyinin parametrik denklemi $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere;

$$X(s, \theta) = \alpha(s) + r(-\cos \theta.s.N(s) + \sin \theta.s.B(s)) \quad (4.1)$$

olarak verilir(Gray, 2006). Yüzeyin s -parametresi için türevi,

$$X_s(s, \theta) = \alpha'(s) + r(-\cos \theta(N(s) + s.N'(s)) + \sin \theta(B(s) + s.B'(s)))$$

olmak üzere; Frenet formülleri kullanılarak,

$$X_s(s, \theta) = (1 + r s \kappa \cos \theta)T(s) + (-r \cos \theta - r s \tau \sin \theta)N(s) + (-r s \tau \cos \theta + r \sin \theta)B(s) \quad (4.2)$$

kısmi türevi hesaplanır. Benzer şekilde yüzeyin θ -parametresine göre kısmi türevi;

$$X_\theta(s, \theta) = r s \sin \theta N(s) + r s \cos \theta B(s) \quad (4.3)$$

şeklinde bulunur. X_s ve X_θ vektörlerinin vektörel çarpımı yapılarak;

$$\begin{aligned} X_s \times X_\theta &= -r^2 s T(s) + r s (r s \kappa \cos \theta (-\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s))) \\ \|X_s \times X_\theta\| &= r s \sqrt{r^2 + (1 + r s \kappa \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

olup, verilen $X(s, \theta)$ yüzeyinin birim normali

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (1 + r s \kappa \cos \theta)^2}} \{-r T(s) + (1 + r s \kappa \cos \theta)(-\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s))\} \quad (4.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Yüzeyin s ve θ parametrelerine göre ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned}
X_{ss} &= (r \cos \theta (2\kappa + s\kappa') + rs\tau \sin \theta)T(s) \\
&\quad + ((1 + rs\kappa \cos \theta)\kappa - r \sin \theta (2\tau + s\tau') + rs\tau^2 \cos \theta)N(s) \\
&\quad + (rs\tau' \cos \theta + rs\tau^2 \sin \theta)B(s) , \\
X_{s\theta} &= (-rs\kappa \sin \theta)T(s) + (r \sin \theta - rs\tau \cos \theta)N(s) + (r \cos \theta + rs\tau \sin \theta)B(s) , \\
X_{\theta\theta} &= rs \cos \theta N(s) - rs \sin \theta B(s)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak hesaplanır. (4.2), (4.3), (4.4) ve (4.5) ifadeleri, Tanım 2.16 ile verilen birinci ve ikinci temel formun katsayılarının formüllerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
E &= (1 + rs\kappa \cos \theta)^2 + r^2 + r^2 s^2 \tau^2 \\
F &= -r^2 s^2 \tau \\
G &= r^2 s^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (1 + rs\kappa \cos \theta)^2}} \left\{ \begin{aligned} &-r^2 (\cos \theta (2\kappa + s\kappa') + s\tau \sin \theta) + \\ &(1 + rs\kappa \cos \theta) [(1 + rs\kappa \cos \theta)(-\kappa \cos \theta)] + \\ &(1 + rs\kappa \cos \theta) [r(\tau + s\tau') \sin 2\theta + rs\tau^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)] \end{aligned} \right\} \tag{4.7} \\
f &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (1 + rs\kappa \cos \theta)^2}} \{ r^2 s\kappa \sin \theta + (1 + rs\kappa \cos \theta) rs\tau \} \\
g &= \frac{-rs}{\sqrt{r^2 + (1 + rs\kappa \cos \theta)^2}} (1 + rs\kappa \cos \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin Gauss eğriliği $\mathcal{K}$, ve ortalama eğriliği $\mathcal{H}$ için Tanım 2.16 ile verilen eşitlikler kullanılır ve (4.6) ve (4.7) ifadeleri yerine yazılırsa, bu eğrilikler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
&(1 + rs\kappa \cos \theta) r^3 s ((2\kappa + s\kappa') \cos \theta - s\tau \sin \theta) \\
&+ (1 + rs\kappa \cos \theta)^2 \left[\begin{aligned} &(1 + rs\kappa \cos \theta) rs\kappa \cos \theta - r^2 s (\tau + s\tau') \sin 2\theta \\ &-r^2 s^2 \tau^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + rs\kappa \\ &-r^2 s\kappa \sin \theta \end{aligned} \right] \\
\mathcal{K} &= \frac{}{r^2 s^2 [r^2 + (1 + rs\kappa \cos \theta)^2]^2} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r^4 s^2 (2\kappa + s\kappa') \cos \theta + r^2 s^2 \tau \sin \theta \\
& + (1 + rs\kappa \cos \theta) \left[\begin{aligned} & (1 + rs\kappa \cos \theta) r^2 s^2 \kappa (-\cos \theta) + \\ & r^3 s (\tau + s\tau') \sin 2\theta + r^3 s^3 \tau^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{aligned} \right] \\
& + 2r^2 s^3 \tau \kappa \sin \theta + 2r^3 s^3 \tau (1 + rs\kappa \cos \theta) \\
& - rs(1 + rs\kappa \cos \theta) [(1 + rs\kappa \cos \theta)^2 + r^2 + r^2 s^2 \tau^2] \\
\mathcal{H} = & \frac{\hspace{1cm}}{2r^2 s^2 [r^2 + (1 + rs\kappa \cos \theta)^2]^2} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Örnek 4.1 $\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ helis eğrisini alalım. Seçilen keyfi eğri için büyüterek gelişen yüzey denklemini bulalım:

α eğrisi için,

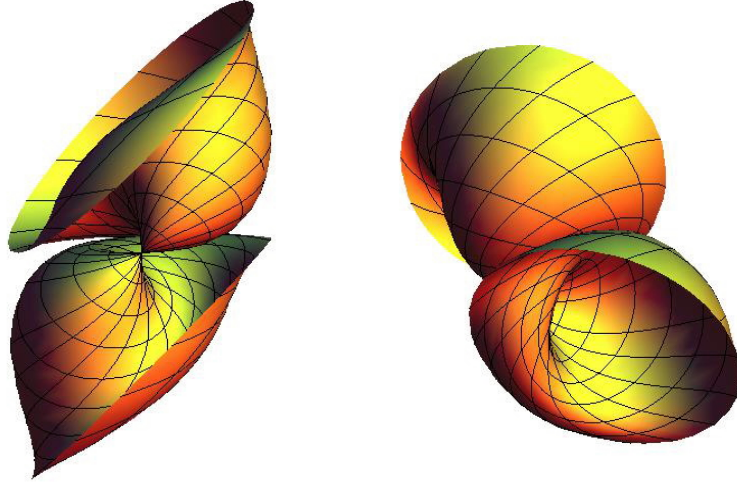
$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right) \\
N(s) &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\
B(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right)
\end{aligned}$$

olup, (4.1) denkleminde yerine yazılırsa $X(s, \theta)$ yüzey denklemi,

$$X(s, \theta) = \begin{pmatrix} (1 + rs \cos \theta) \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} s \sin \theta \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \\ (1 + rs \cos \theta) \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} s \sin \theta \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \\ \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} s \sin \theta \end{pmatrix}$$

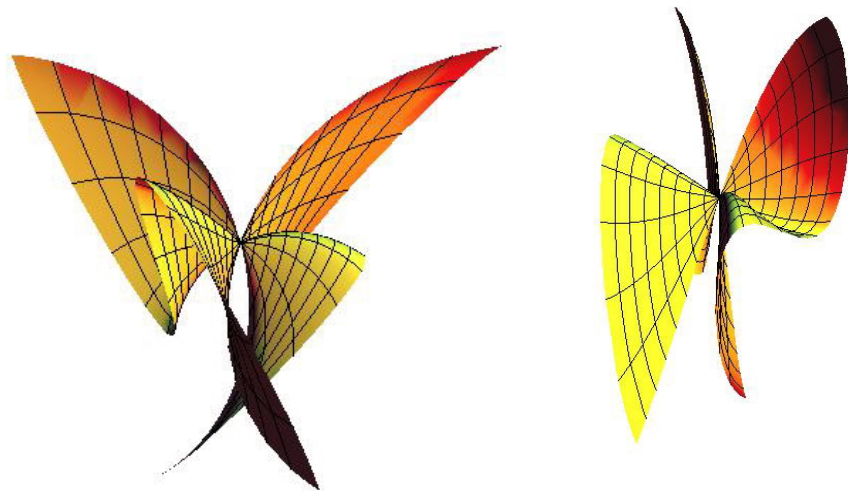
parametrik ifadesiyle bulunur. Bu yüzeyin $r = 1$, $s = \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$, $\theta = (-\pi, \pi)$ için

grafığı Şekil 4.1 ile verildiği gibi elde edilir.



Şekil 4.1 Seçilen bir helis eğrisi kullanılarak oluşturulan yüzey

(4.1) ile verilen kabuk denkleminde r değişkeni, θ parametresine bağlanarak genelleştirilmiş kabuk yüzeyi adı verilen yeni bir kabuk yüzeyi elde edilebilir. Bu tip yüzeyler için cebirsel hesaplamalar bu bölümde yer almayıp bazı örnekler ile verilecektir. Galile uzayındaki kabuk yüzeylerinde detaylı ele alınacak işlemler, benzer şekilde Öklid uzayı için de yapılabilir. Bu durumda $r = \theta$ için; $s = (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $\theta = (-\pi, \pi)$ olmak üzere $X(s, \theta)$ parametrik denklemleriyle verilen yüzeyin grafığı Şekil 4.2 deki gibi elde edilir.



Şekil 4.2 $r = \theta$ için oluşturulan yüzey

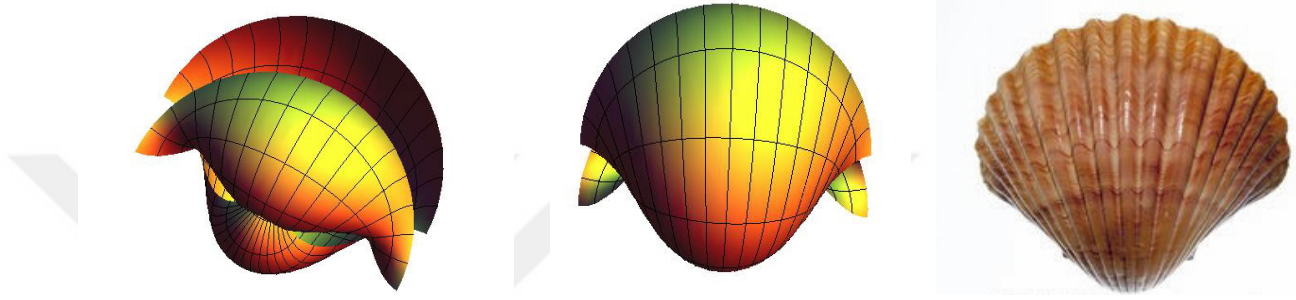
Örnek 4.2 $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ birim çemberi üreteç eğrisi olarak ele alınır ve

benzer hesaplamalar yapılırsa, $X(s, \theta)$ yüzeyinin denklemi

$$X(s, \theta) = ((1 + rs \cos \theta) \cos s, (1 + rs \cos \theta) \sin s, rs \sin \theta)$$

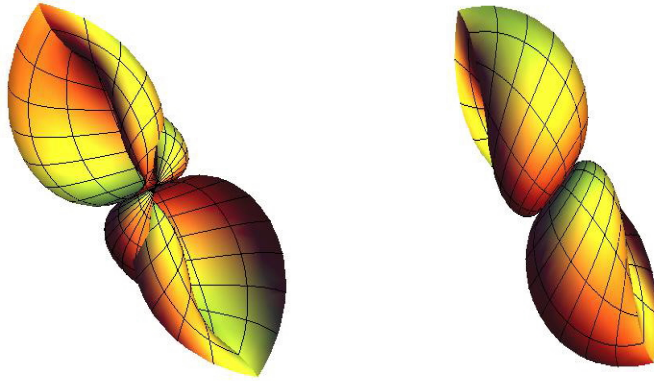
şeklinde elde edilir.

$r = 1$, $s = \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\theta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ için yüzeyin grafiği ve gerçek kabuk figürü Şekil 4.3 ile verilmiştir.



Şekil 4.3 Üretici eğrisi çember olan yüzey

Bu yüzey için, $r = \theta$, $s = \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\theta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş kabuk yüzeyinin grafiği Şekil 4.4 ile verilmiştir..



Şekil 4.4 $r = \theta$ için oluşturulan yüzey

4.2 Galile Uzayında Kabuk Yüzeyleri

Kabuk yüzeyleri için, yüzeyin parametrik denklemi (4.1) ile verilmişti. Öklid uzayında yapılan hesaplar r sabit olduğu kabul edilerek yapılmış ve yüzeyin geometrisi

incelenmiştir. Bu kısımda (4.1) denklemi r sabit ve $r = r(\theta)$ olmak üzere ayrı ayrı incelenecek ve temel kavramlarda verilen Galile uzayının tanımlarından ve teorisinden yararlanılacaktır.

$$X(s, \theta) = \alpha(s) + r(-\cos \theta . s . N(s) + \sin \theta . s . B(s)) \quad , \quad r \text{ sabit}$$

denklemi gözönünde bulundurularak, yüzeyin s ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri,

$$X_s(s, \theta) = T(s) + (-r \cos \theta - r s \tau \sin \theta) N(s) \quad (4.10)$$

$$+ (-r s \tau \cos \theta + r \sin \theta) B(s) \quad (4.1)$$

$$X_\theta(s, \theta) = r s \sin \theta N(s) + r s \cos \theta B(s)$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar kullanılarak,

$$w = \|X_s \times_G X_\theta\| = r s \quad (4.11)$$

ifadesi elde edilir. Buradan yüzeyin birim normali,

$$\mathcal{N} = -\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s) \quad (4.12)$$

şeklinde bulunmuş olur. Galile uzayının temel kavramlarında verilen Tanım 2.21 kullanılarak, $\mathcal{N}$ normal vektörüne dik ve boyu 1 olan δ vektörü aşağıda verilmiştir.

$$\delta = (\sin \theta N(s) + \cos \theta B(s)) \quad (4.13)$$

Yüzeyin s ve θ parametrelerine göre ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$X_{ss} = (\kappa - 2r\tau \sin \theta + r s \tau^2 \cos \theta - r s \tau' \sin \theta) N(s) \quad (4.14)$$

$$+ (-2r\tau \cos \theta - r s \tau^2 \sin \theta - r s \tau' \cos \theta) B(s)$$

$$X_{s\theta} = (r \sin \theta - r s \tau \cos \theta) N(s) + (r \cos \theta + r s \tau \sin \theta) B(s)$$

$$X_{\theta\theta} = r s \cos \theta N(s) - r s \sin \theta B(s)$$

olarak hesaplanır. Yüzeyin birinci temel formunun bileşenleri,

$$g_1 = 1 \quad , \quad g_2 = 0 \quad , \quad g^1 = 0 \quad , \quad g^2 = \frac{-1}{rs} \quad (4.15)$$

$$g^{11} = 1 \quad , \quad g^{12} = 0 \quad , \quad g^{22} = \frac{1}{r^2 s^2}$$

$$h_{11} = 0 \quad h_{12} = -r^2 s^2 \tau \quad h_{22} = r^2 s^2$$

olmak üzere;

$$I = ds^2 + \epsilon(r^2 s^2) d\theta^2 \quad (4.16)$$

elde edilir. İkinci temel formun bileşenleri olan L_{ij} katsayıları, Tanım 2.23 kullanılarak,

$$L_{11} = \langle X_{ss}, \mathcal{N} \rangle$$

$$L_{12} = \langle X_{s\theta}, \mathcal{N} \rangle$$

$$L_{22} = \langle X_{\theta\theta}, \mathcal{N} \rangle$$

şeklinde verilir. Buradan da ikinci temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\kappa \cos \theta - rs\tau^2 \\ L_{12} &= rs\tau \\ L_{22} &= -rs \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Tanım 2.24 ten yararlanarak, (4.15) ve (4.17) ifadeleri, (2.10) ve (2.11) ile verilen denklemlerde yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği ile ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$\mathcal{K} = \frac{\kappa \cos \theta}{rs} \quad (4.18)$$

$$H = -\frac{rs\kappa \cos \theta + r^2 s^2 \tau^2 + 1}{2rs}$$

olur.

Teorem 4.1 3-boyutlu G^3 uzayında (4.1) ile verilen büyüyerek gelişen kabuk yüzeyi $X(s, \theta)$, $s_0 = 0$ noktasında singülerdir.

İspat. $X(s, \theta)$ büyüyerek gelişen yüzeyinin bir süngüler noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart $\|X_s \times X_\theta\| = 0$ olmasıdır. Bu durumda;

$$\|X_s \times X_\theta\| = rs \implies rs = 0$$

bulunur ve buradan $r \neq 0$ olacağından dolayı $s_0 = 0$ elde edilir. Ek olarak

$$X(s_0, \theta) = X(0, \theta) = \alpha(0)$$

bulunur ki bu durumda yüzey $\alpha(0)$ noktasında singüler olur. ■

Teorem 4.2 $X(s, \theta)$, 3-boyutlu G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir yüzey olsun. $X(s, \theta)$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $rs\kappa \cos \theta + r^2s^2\tau^2 + 1 = 0$, $rs \neq 0$ olmasıdır.

İspat. $X(s, \theta)$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $H \equiv 0$ olmasıdır.

Bu durumda,

$$\frac{rs\kappa \cos \theta + r^2s^2\tau^2 + 1}{2rs} = 0 \quad , \quad rs \neq 0$$

yazılır ve $rs\kappa \cos \theta + r^2s^2\tau^2 + 1 = 0$ elde edilir ■

Teorem 4.3 G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir yüzey $X(s, \theta)$ olarak verilsin. Bu yüzey üzerindeki s -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter şart $\kappa \sin \theta - 2r\tau - rs\tau' = 0$ olmasıdır.

İspat. $\beta(t)$, büyüyerek gelişen $X(s, \theta)$ yüzeyi üzerinde keyfi bir eğri olsun. Bu durumda $\beta(t) = X(s(t), \theta(t))$ yazılabilir. $\beta(t)$ eğrisinin X yüzeyi üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şart ivme vektörü $\ddot{\beta}(t)$ ile β eğrisi boyunca yüzey normalinin paralel olmasıdır. Kolayca görülebilir ki bu şart; $\left\langle \delta(s(t), \theta(t)), \ddot{\beta}(t) \right\rangle_G = 0$ olması ile denktir.

Şimdi X kabuk yüzeyi üzerinde bir $\theta_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c(s) = X(s, \theta_0)$ biçimindeki s -parametre eğrisini alalım. Buradan (4.18)'den yararlanılarak, $c''(s) = X_{ss}(s, \theta_0)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} X_{ss}(s, \theta_0) &= (\kappa - 2r\tau \sin \theta_0 + rs\tau^2 \cos \theta_0 - rs\tau' \sin \theta_0)N(s) + \\ &\quad (-2r\tau \cos \theta_0 - rs\tau^2 \sin \theta_0 - rs\tau' \cos \theta_0)B(s) \end{aligned}$$

(4.13) ifadesinden $\delta(s, \theta_0) = (\sin \theta_0 N(s) + \cos \theta_0 B(s))$ olacağı aşıkarıdır. Elde edilen bu ifadeler kullanılarak $\langle X_{ss}(s, \theta_0), \delta(s, \theta_0) \rangle_G = 0$ denkleminde $\kappa \sin \theta - 2r\tau - rs\tau' = 0$ bulunmuş olur. ■

Teorem 4.4 $X(s, \theta)$, G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir yüzey olmak üzere, X yüzeyi üzerindeki θ -parametre eğrileri geodeziktir.

İspat. Teorem 4.3 kullanılarak; θ -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter şartın $\langle X_{\theta\theta}(s_0, \theta), \delta(s_0, \theta) \rangle_G = 0$ olacağı kolayca görülür. Ayrıca

$$T_\alpha = \frac{\dot{\alpha}(\theta)}{\|\dot{\alpha}(\theta)\|} = \frac{X_\theta(s_0, \theta)}{\|X_\theta(s_0, \theta)\|} = \delta(s_0, \theta)$$

ifadesi gerçeklenir. Bu durumda i çarpım sonucunun sıfır olacağı aşıkardır. Dolayısıyla X büyüyerek gelişen yüzeyi üzerinde θ -parametre eğrileri geodeziktir. ■

Teorem 4.5 3-boyutlu G^3 uzayında büyüyerek gelişen kabuk yüzeyi $X(s, \theta)$ üzerindeki s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart $r = \frac{-\kappa \cos \theta}{s\tau^2}$ olmasıdır.

İspat. X yüzeyi üzerindeki keyfi bir eğri $\beta(t) = X(s(t), \theta(t))$ olsun. $\beta(t)$ eğrisinin yüzey üzerinde asimptotik olması için gerek ve yeter şart eğri üzerinde ikinci temel formun bileşenlerinin

$$L_{11}\dot{s}^2 + 2L_{12}\dot{s}\dot{\theta} + L_{22}\dot{\theta}^2 = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} L_{11}\dot{s}^2 + 2L_{12}\dot{s}\dot{\theta} + L_{22}\dot{\theta}^2 &= 0, \dot{\theta} = 0 \\ L_{11}\dot{s}^2 &= 0, \dot{s} = 1 \\ L_{11} &= -\kappa \cos \theta - rs\tau^2 \\ \kappa \cos \theta + rs\tau^2 &= 0 \\ r &= \frac{-\kappa \cos \theta}{s\tau^2} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.6 G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir yüzey $X(s, \theta)$ olarak verilsin. Bu yüzey üzerindeki θ -parametre eğrileri asimptotik değildir.

İspat. Daha önceki teoremde s -parametre eğrilerinin asimptotik olma şartı verilmişti. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} L_{11}\dot{s}^2 + 2L_{12}\dot{s}\dot{\theta} + L_{22}\dot{\theta}^2 &= 0, \dot{s} = 0 \\ L_{11}\dot{s}^2 &= 0, \dot{\theta} = 0 \\ L_{22} &= 0 \\ L_{22} &= -rs \implies rs = 0 \end{aligned}$$

bulunur ve $r \neq 0$ olduğu aşıkardır. Bu durumda $s = 0$ olmalıdır. Yüzey regüler olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla θ -parametre eğrileri asimptotik değildir.

■

Teorem 4.7 G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir $X(s, \theta)$ yüzeyi veriliyor. Yüzey üzerinde s -parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart; $\tau \equiv 0$ olmasıdır.

İspat. s -parametre eğrileri $X(s, \theta)$ yüzeyi üzerinde izotropik değildir. Bu durumda s - parametrelili bir eğrinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart;

$$g^1(L_{11}\dot{s} + L_{12}\dot{\theta}) + g^2(L_{12}\dot{s} + L_{22}\dot{\theta}) = 0$$

olmasıdır.

$$\dot{\theta} = 0, \quad g^1 = 0, \quad g^2 = \frac{-1}{rs}$$

yerine yazılırsa;

$$\tau \equiv 0$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8 G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir yüzey $X(s, \theta)$ olarak verilsin. Yüzey üzerinde θ -parametre eğrileri eğrilik çizgisidir.

İspat. θ -parametre eğrileri $X(s, \theta)$ üzerinde izotropiktir. Bu durumda θ - parametre eğrileri

$$g_1\dot{s} + g_2\dot{\theta} = 0$$

şartını sağlar. $g_1 = 1$, $g_2 = 0$ ve $\dot{s} = 0$ olduğundan denklem her zaman sağlanır ve bu durumda θ - parametre eğrileri, $X(s, \theta)$ üzerinde eğrilik çizgisidir. ■

(4.1) ile verilen denklemde r sabit kabul edilerek yüzeyin geometrisi incelenmiş ve bazı teoremler verilmiştir. Şimdi aynı yüzey için $r = r(\theta)$ olduğu kabul edilerek benzer hesaplamalar yapılacaktır.

$$X(s, \theta) = \alpha(s) + r(\theta)(-\cos \theta.s.N(s) + \sin \theta.s.B(s))$$

denklemini gözönünde bulundurularak, yüzeyin s ve θ parametrelerine göre ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} X_s(s, \theta) &= T(s) + (-r \cos \theta - rs\tau \sin \theta)N(s) + (-rs\tau \cos \theta + r \sin \theta)B(s) \\ X_\theta(s, \theta) &= rs \sin \theta N(s) + rs \cos \theta B(s) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak hesaplanır.

$$\|X_s \times X_\theta\| = s\sqrt{r_\theta^2 + r^2} \quad (4.20)$$

olmak üzere, yüzeyin birim normali ve birim normaline dik olan δ vektörü,

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} \{(-r_\theta \sin \theta + r \cos \theta)N(s) - (r_\theta \cos \theta + r \sin \theta)B(s)\} \quad (4.21)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} \{(r_\theta \cos \theta + r \sin \theta)N(s) + (-r_\theta \sin \theta + r \cos \theta)B(s)\}$$

şeklinde elde edilir. Daha önceki kısımlarda yapılan hesaplamalara benzer olarak, ikinci derecen kısmi türevler hesaplanıp, gerekli iç çarpım işlemleri yapılırsa; $r = r(\theta)$ olma üzere;

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} (r^2 s \tau^2 + (r_\theta r s \tau' + 2(r_\theta r \tau - (r_\theta \kappa \sin \theta + r \kappa \cos \theta) \\ L_{12} &= \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} ((r_\theta^2 s \tau - (r_\theta r - r^2 s \tau) \\ L_{22} &= \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} (r^2 s - 2r_\theta^2 s - r_{\theta\theta} r s) \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \quad , \quad g_2 = 0 \quad , \quad g^1 = 0 \quad , \quad g^2 = \frac{-1}{rs} \\ g^{11} &= 1 \quad , \quad g^{12} = 0 \quad , \quad g^{22} = \frac{-1}{s^2(r_\theta^2 + r^2)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

olmak üzere (4.22) ifadesi kullanılarak, $r = r(\theta)$ olmak üzere, $\mathcal{K}$ ve H eğrilikleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{s^2(r_\theta^2 + r^2)^2} \left\{ (r^2 s - 2r_\theta^2 s - r_{\theta\theta} r s)(r^2 s \tau^2 + r_\theta r s \tau' + 2r' r \tau - r_\theta \kappa \sin \theta + r \kappa \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + (-r_\theta^2 s \tau + r_\theta r + r^2 s \tau) \right\} \\ H &= \frac{1}{2\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} \left\{ r^2 s \tau^2 + r_\theta r s \tau' + 2r' r \tau - r_\theta \kappa \sin \theta + r \kappa \cos \theta + \frac{r^2 - 2r_\theta^2 r_{\theta\theta} r}{s(r_\theta^2 + r^2)} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Teorem 4.9 3-boyutlu G^3 uzayında (4.1) ile verilen büyüyerek gelişen kabuk yüzeyi $X(s, \theta)$ singüler noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart $r(\theta) = 0$ ve $r'(\theta) = 0$ veya $s = 0$ olmasıdır.

İspat. $\|X_s \times X_\theta\| = 0$ ve buradan $s\sqrt{r_\theta^2 + r^2} = 0$ bulunur. Bu durumda $r(\theta) = 0$ ve $r'(\theta) = 0$ veya $s_0 = 0$ olmalıdır. ■

Teorem 4.10 $X(s, \theta)$, G^3 uzayında büyüyük gelişen regüler bir yüzey olsun. $X(s, \theta)$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart;

$$s(r_\theta^2 + r^2) (r^2 s \tau^2 + r_\theta r s \tau' + 2r_\theta r \tau - r_\theta \kappa \sin \theta + r \kappa \cos \theta) + r^2 - 2r_\theta^2 r_{\theta\theta} r = 0, \quad s \sqrt{r_\theta^2 + r^2} \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 4.11 3-boyutlu G^3 uzayında büyüyük gelişen kabuk yüzeyi $X(s, \theta)$ olarak verilsin. Bu yüzey üzerinde s -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter şart $\kappa(r_\theta \cos \theta + r \sin \theta) - r^2(2\tau + s\tau') + r_\theta r s \tau^2 = 0$ olmasıdır.

İspat. Teorem 4.3 ile benzer şekilde (4.13) ifadesinden yararlanılarak teoremin ispatı kolayca yapılabilir. ■

Teorem 4.12 $X(s, \theta)$, G^3 uzayında büyüyük gelişen regüler bir yüzey olsun. $X(s, \theta)$ yüzeyinde θ -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter şart; $r_\theta = 0$ veya $-r_{\theta\theta} + r + s = 0$ olmasıdır.

İspat. $X_{\theta\theta}(s, \theta) = (2r_\theta s \sin \theta + (-r_{\theta\theta} + r)s \cos \theta)N(s) + (2r_\theta s \cos \theta + (r_{\theta\theta} - r)s \sin \theta)B(s)$ hesaplanarak $\langle X_{\theta\theta}, \delta \rangle = 0$ denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa; θ -parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter şartın $r_\theta = 0$ veya $-r_{\theta\theta} + r + s = s$ olması gerektiği bulunmuş olur. ■

Teorem 4.13 $X(s, \theta)$, G^3 uzayında büyüyük gelişen regüler bir yüzey olsun. $X(s, \theta)$ yüzeyinde s -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart; $(-r_\theta \sin \theta + r \cos \theta)\kappa + r^2 s \tau^2 + r_\theta r s \tau' + 2r_\theta r \tau = 0$ olmasıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 4.5 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 4.14 $X(s, \theta)$, G^3 uzayında büyüyük gelişen regüler bir yüzey olsun. $X(s, \theta)$ yüzeyinde θ -parametre eğrilerinin asimptotik olması için gerek ve yeter şart; $r(\theta) = r(\theta) = c_2 e^{\frac{(\log e^{2\sqrt{3}(c_1 + \theta)} + 1)}{3}} - \frac{\theta}{\sqrt{3}}$ olmasıdır.

İspat.

$$\begin{aligned} L_{11}(\dot{s})^2 + 2L_{12}(\dot{s})(\dot{\theta}) + L_{22}(\dot{\theta})^2 &= 0, \quad \dot{s} = 0 \\ L_{22}(\dot{\theta})^2 &= 0, \quad \dot{\theta} = 1 \implies L_{22} = 0 \end{aligned}$$

$L_{22} = \frac{1}{\sqrt{r_\theta^2 + r^2}} (r^2 s - 2r_\theta^2 s - r_{\theta\theta} r s) = 0$ bulunur ki bu durumda $r_{\theta\theta} r + 2r_\theta^2 - r^2 = 0$ ikinci mertebeden diferensiyellenebilir denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü $r(\theta) = c_2 e^{\frac{\left(\log e^{2\sqrt{3}(c_1 + \theta)} + 1\right)}{3}} - \frac{\theta}{\sqrt{3}}$ olarak hesaplanır. ■

Teorem 4.15 G^3 uzayında büyüyerek gelişen regüler bir $X(s, \theta)$ yüzeyi veriliyor. Yüzey üzerinde s -parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart; $r'(s\tau - r) - r^2 s\tau = 0$ olmasıdır.

İspat. Teorem 4.7 ile benzer şekilde

$$g^1(L_{11}\dot{s} + L_{12}\dot{\theta}) + g^2(L_{12}\dot{s} + L_{22}\dot{\theta}) = 0$$

ifadesi kullanılır ve

$$\dot{\theta} = 0, \quad g^1 = 0, \quad g^2 = \frac{-1}{s^2(r_\theta^2 + r^2)}$$

değerleri yerine yazılırsa, ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.16 G^3 uzayında büyüyerek gelişen $X(s, \theta)$ yüzeyi veriliyor. Yüzey üzerinde θ -parametre eğrileri eğrilik çizgisidir.

İspat. $g_1\dot{s} + g_2\dot{\theta} = 0$ eşitliğinden θ -parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olduğu kolayca görülebilir. ■

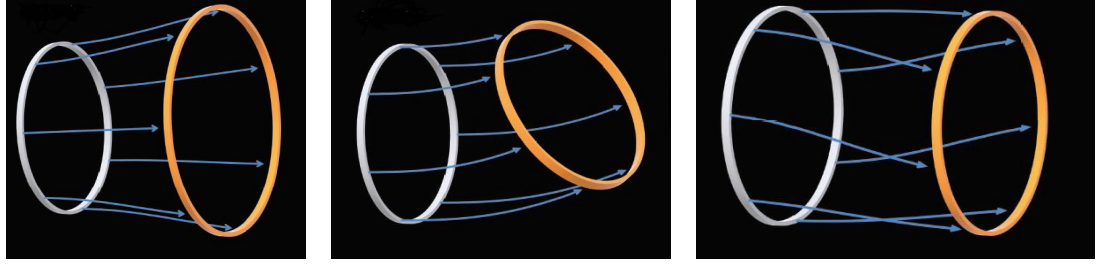
4.3 Deniz Kabuklarının Matematiksel Gösterimleri

Bu bölümde daha çok (E. Moulton, R. Chirat, 2018) ve (Picado, 2010) çalışmalarından yararlanılmıştır. Ayrıca, bu çalışmalarda yer alan şekiller ve örneklerle yer verilmiştir.

Doğadaki kabuk yüzeylerine en güzel örnek deniz kabuklarıdır. Yumuşakçalar harika mimarlardır ve yumuşak bedenlerini yırtıcılardan ve çevresel etmenlerden koruyan evlerini inşa ederler. Bu evler nadir bulunan, güçlü, dayanıklı, ve estetik kabuklarıdır. Bu kabukların çoğu, fraktal dönme ve diğer desenlerle süslenmiş logaritmik spiraller gibi etkileyici kompleks şekillere sahiptir; mükemmele yakın matematiksel bir düzenleri vardır. Tabi ki yumuşakçalar matematik bilmezler ve merak uyandıran bu durumu açıklamak bilim insanlarına düşer.

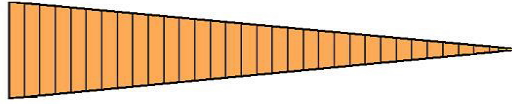
Bilim insanları yüz yılı aşkın süredir, böyle basit canlıların, bu karmaşık yapıları ve desenleri nasıl ürettiğini araştırdılar. Hücrelerin, dokuların ve organların, aynı merkezden yönetilen bir fiziksel güce cevap verdiğini farkettiler. Ancak 20.yy'ın çoğunda biyologlar genetik kodun, biyolojik dizilimin oluşumunu nasıl yönlendirdiğini ve bu dizilimlerin nasıl çalıştığını anlamaya çalıştılar. Bununla birlikte son yıllarda araştırmacılar fizik tabanlı matematiksel modellemeyi biyolojik form hakkındaki sorulara uygulamaya başladılar. Son birkaç yıldır, kabukların süslü yapıları hakkında matematik alanında yapılan çalışmalar ilginç veriler sunmuştur. Eğrileri ve yüzeyleri inceleyen matematiksel bir disiplin olan diferensiyel geometri araçlarını kullanarak, kabukların ayrıntılı ve karmaşık şekillerinin, yumuşakçaların evlerini inşa ederken izledikleri basit kurallara dayandığı tespit edildi. Bu kurallar, çeşitli sayısız desen üretmek için, kabuk gelişimi sırasında mekanik kuvvetleri etkiler. Bu konuda yapılan çalışmalar en geniş yumuşakça grubu olan karındanbacaklıların yaş çizgilerinin bağımsız olarak nasıl geliştiğini açıklamaya yardımcı oluyor. Bu canlıların benzer süslemeleri yapmak için aynı genetik değişikliğe uğramaları gerekmiyor çünkü fizik yasaları işin çoğunu hallediyor.

Yumuşakçalar kabuğu oluştururken kalsiyum karbonat bakımından zengin bir madde salgılar. Salyangoz kabuklarında ve akrabalarında görülen karakteristik spiralin gözükmesi için basit birkaç adım takip edilir: İlk olarak canlı her bir adımda bir önceki adımdan daha fazla madde salgılar ve yumuşakça her bir yinelemede daha büyük bir açıklık oluşturur. Bu işlem başlangıçtaki çemberden bir koni oluşmasını sağlar. Böylece genişleme olur. Açıklığın bir tarafından daha fazla madde salgılanarak tam bir dönme yapan canlı başlangıçtaki çember ile bir tor oluşturur. Madde salgılanan noktalarda dönme yapılarak bükülme sağlanır. Sadece genişleme ve dönme işlemleri uygulandığında odacıklı natilus gibi düzlemsel spiralli bir kabuk elde edilir. Bükülme adımı eklendiğinde düzlemsel olmayan helikospiralli bir kabuk oluşur.



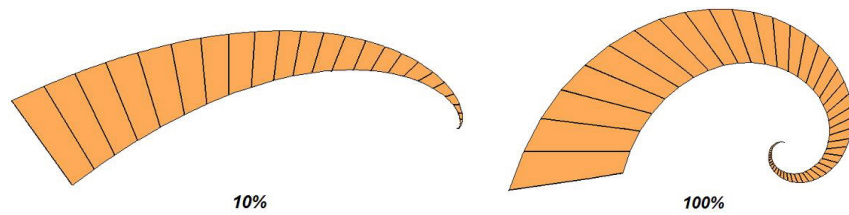
Şekil 4.5 Büyüyerek gelişen kabuk yüzeylerinde genişleme, dönme ve büyüme

Deniz kabukları gibi büyüyerek gelişen kabuk yüzeylere, doğada yine benzer şekilde oluşturulan ve iki boyutlu kabuk büyümelerine en iyi örnek olan boynuzlar verilebilir. Boynuz gelişimini incelemek deniz kabuğu gelişimini daha iyi anlamak için fayda sağlayabilir. Tırnaklar ve saç gibi, boynuz gelişimi de belli maddelerin sentezi ile oluşur. Mükemmel düz bir yapı oluşturmak için her taraftan aynı oranda madde sentezlenir.



Şekil 4.6 Her yerden aynı oranda madde sentezi yapılarak oluşan yüzey

Diğer yandan; eğer bazı farklılıklar varsa (aşağıdaki şekillerde yüzde olarak verilmiştir), boynuzun kenarlarından biri diğerinden daha uzun olacak ve kaçınılmaz olarak boynuz spiral bir eğriyi takip ederek maddenin daha az salgılandığı kısma sarılacaktır.



Şekil 4.7 Sentezlenen madde miktarındaki farklılığın büyümeye etkisi

Yumuşakçaların kabuklarının spiral yapıda olmasını sağlayan olay aslında iki boyutta boynuz gelişiminde verilen örneğin üç boyutlu versiyonudur. Bunun yanı sıra yumuşakça kabuğunu tek düze bir şekilde oluşturmaz; bunu, sadece kabuğun kenarlarından birine daha fazla malzeme ekleyerek ve oluşan yeni kabuğun her zaman daha küçük kabuğun şekline sadık kalacak şekilde, modeli değiştirmeden yapar. Büyüme süreci zarif bir spiral yapı verir. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, kabuk merkezini kabuğun noktalarına bağlayan doğruların uzunlukları artar ancak bu doğrular ile kabuğa karşılık gelen teğetlerin arasındaki açı sabittir (Picado, 2010).



Şekil 4.8 Eşit açılı sarmal yapıdaki büyüme

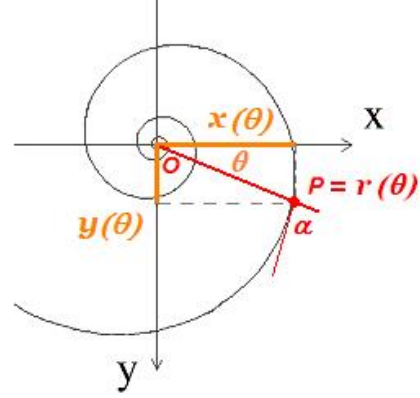
Yukarıdaki şekilde belirtildiği gibi spiralın merkezi O noktası ve teğet ile OP doğru parçası ile teğet arasındaki açı α olsun. A , $\theta = 0$ anındaki yarıçap olmak üzere kutupsal koordinatlarda

$$r(\theta) = Ae^{\cot \alpha \theta}, \quad \theta \geq 0 \quad (4.25)$$

denklemleri verilir. Bu denklem, O merkezi ve kabuk üzerindeki bir nokta arasındaki uzaklığı verir. Kartezyen koordinat sisteminde spiral üzerindeki bir $(x(\theta), y(\theta))$

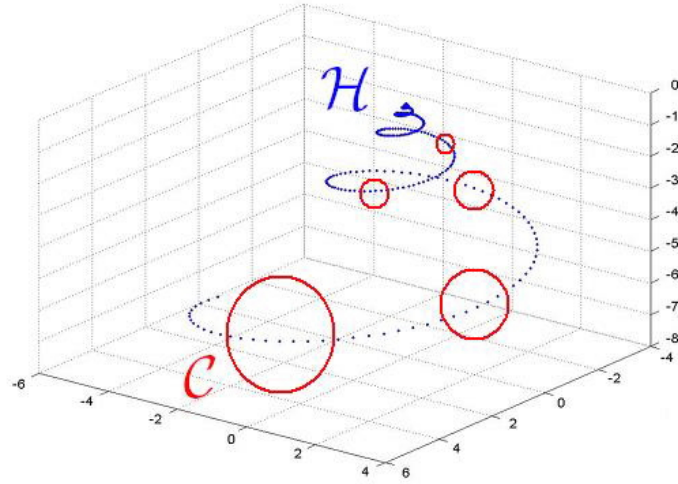
noktası Şekil 4.9 ile verilir.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) &= r(\theta) \sin \theta \end{aligned}$$



Şekil 4.9 Kartezyen koordinatlarda bir noktanın spiral üzerindeki yeri

Eğer $\alpha = 90^\circ$ olursa spiral bir çember üretecektir. α dik açı değilse kabuğun genişlemesine karşılık gelen spiral bir yapı oluşur. Kabuğun yüzeyi bir üretici $\mathcal{C}$ eğrisinin, bir $\mathcal{H}$ helikospirali boyunca yer değiştirmesi sonucu oluşan 3 – boyutlu bir yüzeydir.



$\mathcal{C}$ eğrisinin $\mathcal{H}$ helikospirali üzerindeki hareketi

$\mathcal{C}$ eğrisi kabuk bölümlerinin genel şeklini belirler. Bir çember, elips ya da herhangi bir eğri, üretici eğrisi olarak seçilebilir. Buna en güzel örnek, üçgensel bir üretici

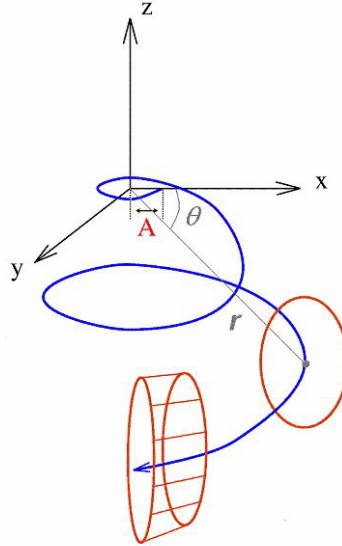
eğriye sahip olan Thatcheria Mirabilis Angas olarak bilinen kabuk yüzeyidir.



Şekil 4.11: Thatcheria Mirabilis Angas

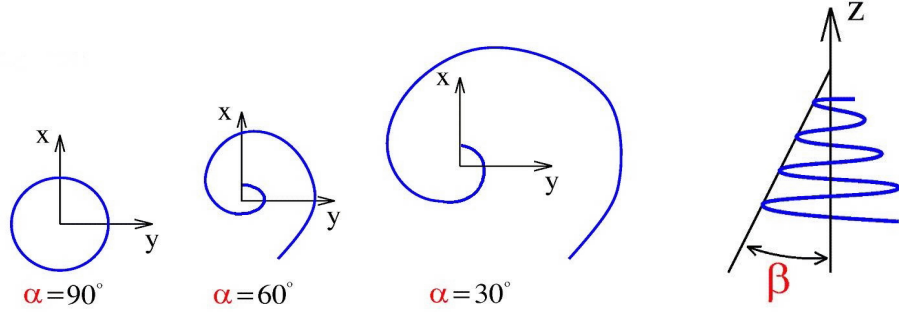
Bu tip yüzeyler daha sonra örneklerle ele alınacaktır.

Yüzeyi oluşturmada ilk adım xyz -koordinatlarının 3 – boyutlu kartezyen sistemini sabitlemek ve kutupsal koordinatlarda verilen helikospiralin parametrik denklemini gözönünde bulundurmaktır. β , $\mathcal{H}$ helikospiralinin genişleme açısıdır.

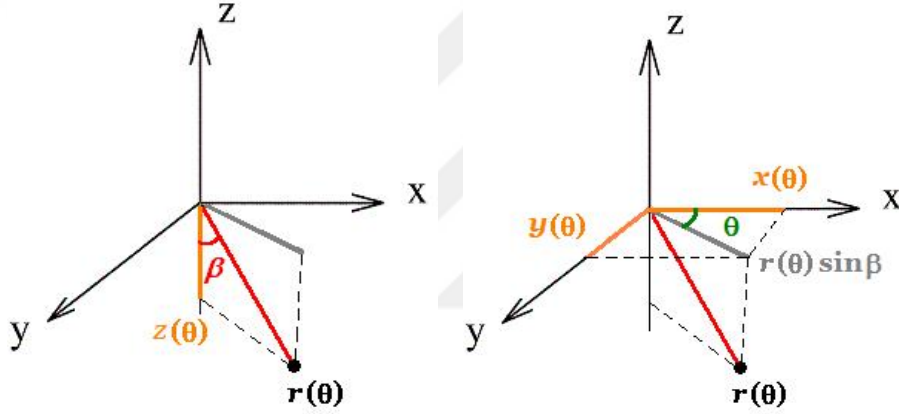


Şekil 4.12 $\mathcal{H}$ helikospirali üzerinde yüzeyin büyümesi

$\mathcal{H}$ helikospirali, logaritmik spiral olarak alınsın ve $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ noktası için $\theta \geq 0$ olmak üzere $r(\theta)$ uzaklığı olarak (4.25) ifadesi kullanılsın.



Şekil 4.13 Yüzey büyümesinin üstten ve yandan görünümü



$$z(\theta) = -r(\theta) \cos \beta$$

$$x(\theta) = r(\theta) \sin \beta \cos \theta$$

$$y(\theta) = r(\theta) \sin \beta \sin \theta$$

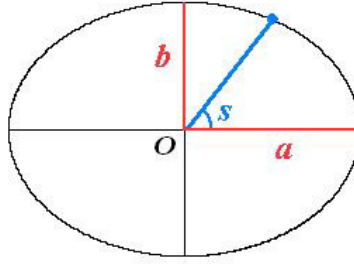
Şekil 4.14 Helikospiral üzerinde noktanın gösterimi

Buradan helikospiralın $\mathcal{H}(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ noktası için aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\mathcal{H}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = A \sin \beta \cos \theta e^{\cot \alpha} \\ y(\theta) = A \sin \beta \sin \theta e^{\cot \alpha} \\ z(\theta) = -A \cos \beta e^{\cot \alpha} \end{cases} \quad (4.26)$$

Kabuk yüzeyini belirleyen $\mathcal{C}$ üretici eğrisi çoğu zaman a ve b parametrelerine bağlı

bir elipstir.



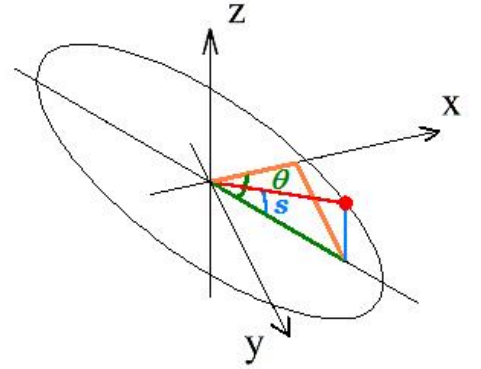
Şekil 4.15 Elips

Bu eğri;

$$r_e(s) = \frac{ab}{\sqrt{[(a \sin s)^2 + (b \cos s)^2]}} = \sqrt{\frac{1}{[(\frac{\cos s}{a})^2 + (\frac{\sin s}{b})^2]}} \quad , \quad 0 \leq s \leq 2\pi \quad (4.27)$$

parametrik denklemiyle verilir. $\mathcal{C}$ eğrisi, $\mathcal{H}$ helikospirali üzerinde hareket ettiği sürece genişlemeye devam eder. Bu $r_i(\theta)$ artış oranının, $\mathcal{H}$ üzerinde aynı olduğu varsayılır. Yani; $r_i(\theta) = e^{\cot \alpha}$ olarak alınır. Polar koordinatlardaki her bir $\mathcal{C}$ eğrisi için $R_e(\theta, s) = r_e(s)r_i(\theta) = r_e(s)e^{\cot \alpha}$; $\theta \geq 0$; $0 \leq s \leq 2\pi$ eşitliği verilir. Buradan, $\mathcal{C}$ eğrisi için kartezyen koordinat sistemindeki aşağıdaki denklem yazılır.

$$\mathcal{C}(\theta, s) = \begin{cases} x^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos s \cos \theta r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ y^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos s \sin \theta r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ z^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \sin s r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \end{cases}$$



Şekil 4.16 Kartezyen koordinatlarda eğri üzerindeki noktanın gösterimi

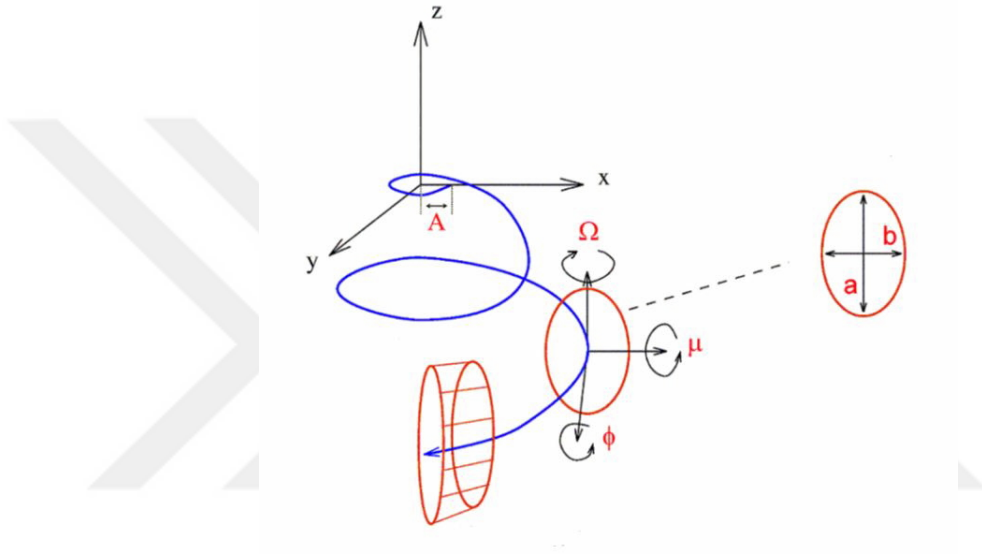
(4.28)

Sonuç olarak (4.26) ve (4.28) denklemlerini kullanarak $\mathcal{G}$ kabuk yüzeyinin denklemi

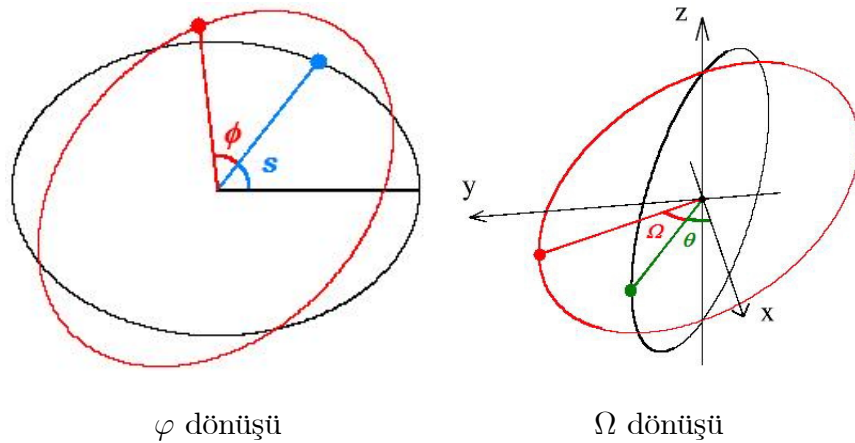
elde edilmiş olur.

$$\mathcal{G}(\theta, s) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{C}(\theta, s) = \begin{cases} x^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (A \sin \beta \cos \theta + \cos s \cos \theta r_e(s))e^{\theta \cot \alpha} \\ y^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (A \sin \beta \sin \theta + \cos s \sin \theta r_e(s))e^{\theta \cot \alpha} \\ z^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (-A \cos \beta + \sin s r_e(s))e^{\theta \cot \alpha} \end{cases} \quad (4.29)$$

Kabuk yüzeyi için geliştirilen bu model, üretici $\mathcal{C}$ eğrisinin uzaydaki dönüşüne göre geliştirilebilir. Bunun için $\mathcal{C}$ eğrisinin dönüşünü belirleyen ϕ , Ω , μ açıları tanımlanır.



Şekil 4.17 $\mathcal{C}$ eğrisinin dönüşünü belirleyen ϕ , Ω , μ açıları



Şekil 4.18 Eğri için φ ve Ω dönmelerinin gösterimi

Verilen kabuk yüzeyi denklemi bu dönmelere göre tekrar düzenlenmek istenirse; φ

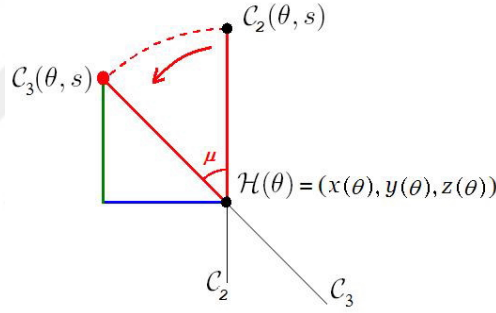
kadar dönme için (4.28) denklemindeki her sin ve cos fonksiyonunda s yerine $s + \varphi$ yazılırken, Ω kadar dönme için θ yerine $\theta + \Omega$ yazılır.

$$\mathcal{C}_2(\theta, s) = \begin{cases} x_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos(s + \varphi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ y_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos(s + \varphi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \sin(s + \varphi) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \end{cases}$$

Bu durumda elde edilen kabuk denklemi:

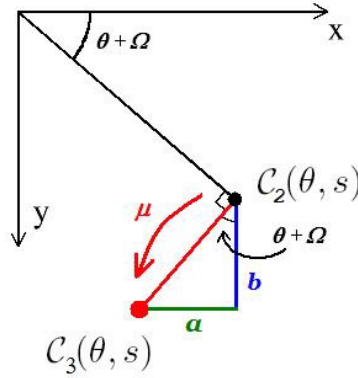
$$\mathcal{G}_2(\theta, s) = \begin{cases} x_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (A \sin \beta \cos \theta + \cos(s + \varphi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ y_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (A \sin \beta \sin \theta + \cos(s + \varphi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ z_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) = (-A \cos \beta + \sin(s + \varphi) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \end{cases}$$

şeklindedir. $\mathcal{C}$ eğrisi φ kadar dönme yaptığında $\mathcal{C}_3(\theta, s) = (x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s), y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s), z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s))$ yazılır.



Şekil 4.19 Eğrinin μ kadar dönmesi

$$z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = z(\theta) + z_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) \cos \mu = (-A \cos \beta + \cos \mu \sin(s + \varphi) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \quad (4.30)$$



Şekil 4.20 Eğrinin μ kadar dönmesinin yukarıdan görüntüsü

$$x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = x_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) - a = x_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) - [z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) \sin \mu] \sin(\theta + \Omega) \quad (4.31)$$

$$y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = y_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) + b = y_2^{\mathcal{G}}(\theta, s) + [z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) \sin \mu] \cos(\theta + \Omega) \quad (4.32)$$

Son olarak kabuk oluşumunda sarılma yönü D parametresi kullanılarak hesaba katılır (Canlı sağlıklı olduğunda $D = 1$, solak olduğunda $D = -1$ olarak alınır.) ve $\mathcal{C}$ eğrisinin $\mathcal{H}$ helikospirali üzerindeki hareketiyle meydana gelen kabuk yüzeyinin denklemi elde edilir (Cortie, 1993).

$$\begin{aligned} x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = & D[A \sin \beta \cos \theta + \cos(s + \varphi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s) \\ & - \sin \mu \sin(s + \varphi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s)] e^{\theta \cot \alpha} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = & D[A \sin \beta \cos \theta + \cos(s + \varphi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s) \\ & + \sin \mu \sin(s + \varphi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s)] e^{\theta \cot \alpha} \end{aligned}$$

$$z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = (-A \cos \beta + \cos \mu \sin(s + \varphi) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha}$$

Deniz kabuğu modelini tamamlamak için kabuk üzerindeki süslemelerin yani diken oluşumunun da göz önünde bulundurulması gerekir. Dikenler gibi süslerin nasıl oluştuğunu anlamak için kabuk büyümesi sırasında üretilen kuvvetlerin incelenmesi gerekir. Kabuk salgılama işlemi mekanik bir sistem etrafında döner. Manto, salgılanan ancak henüz kireçlenmemiş olan üretici bir bölge ile kabuğa bağlanır. Manto ve kabuk arasındaki bu bölge desen oluşumunda rol oynar. Manto ve açıklık arasındaki herhangi bir uyumsuzluk, manto dokusunu fiziksel olarak strese sokar. Manto açıklık için çok küçükse, büyümenin devam etmesi için gerilmesi gerekirken; çok büyükse sığacak şekilde sıkışmak zorunda kalır. Bu stresler nedeniyle üretici bölge deforme olursa mantonun bu aşamada salgıladığı yeni malzeme, deforme olmuş şekli varsayarak kabukta kalıcı olarak katılabilir ve bir sonraki büyüme adımında mantoyu daha da etkiler. Yani kabuk büyüyen yumuşakçayla aynı oranda büyümezse desen olarak tanımlanan deformasyonlar oluşur.

Dikenler, kabuk açıklığıyla dik şekilde çıkıntı oluşturan, genellikle kabuk yüzeyinde santimetrelerce uzanan en belirgin süslemeleri oluşturmaktadır. Bu çıkıntılar man-

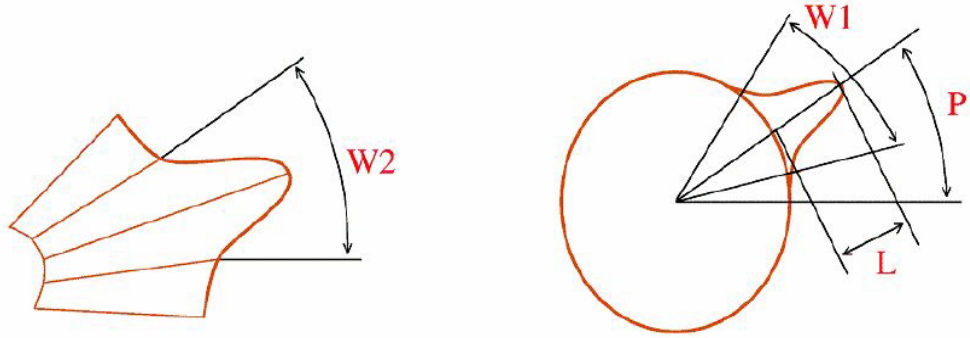
tonun bir büyüme sıçramasına maruz kaldığı düzenli periyodlarda oluşur. Büyüme sırasında manto o kadar çabuk gelişir ki büyüklüğü açıklık ile uyuşmaz. Bu uyuşmazlık mantoda belli belirsiz bükülmelere neden olur. Salgılanan malzeme bükülmüş şekli baz alır Bir sonraki artışta manto daha da büyür ve bükülen kısmın güçlendirme etkisiyle açıklık da büyür. Bu tekrarlanan büyüme ve mekanik etkileşim sürecinin bir dizi dikenle neden olduğu ve kesin desenin öncelikle büyüme hızı ve manto sertliği ile belirlendiği düşünülmektedir (E. Moulton, R. Chirat, 2018). Bu düşüncenin test edilmesi için her yinelemede gelişen bir temel üzerinde büyüyen matematiksel bir manto modeli geliştirildi. Modeldeki tipik büyüme ve fiziksel özellikler test edilirken, düşünceyi destekleyen kabuklarda yaygın olarak görülen formlara benzer çeşitli omurga kalıpları ortaya çıktı.

Dikenler yumuşakçaların kabuklarına ekleyebildikleri tek süsleme değildir. Başka bir desen türü, soyu tükenmiş yumuşakçaların bir alt türü olan ammonitlerin kabuklarında bulunur. (Ammonitler bugünün mürekkep balıklarının akrabalarıdır.) Ammonitler kaybolmadan altmış beş milyon yıl önce, denizleri üç yüz otuz beş milyon yıl boyunca yönettiler. Fosilleşmiş kalıntılarının bolluğu, büyük form çeşitliliği ve gözlenen yüksek evrim oranları, onları en çok incelenen omurgasız fosillerden biri haline getirdi. Ammonit kabuğunun düzlemsel-logaritmik spiral formunun ötesinde en çarpıcı özelliği, kabuk kenarına paralel olan düzenli oluklardır. Bu süsleme muhtemelen dikenleri üreten aynı mekanik çatışmadan kaynaklanır fakat tamamen farklı bir modeldir. Kuvvetler aynıdır ancak büyüklük ve geometri farklıdır. Ammonitlerin açıklığı temelde daireseldir. Manto yarıçapı, mevcut açıklık yarı çapından daha büyük ise manto sıkışır ancak dikenleri oluşturmak için gerekli elastik değişkenlik derecesini üretmek için yeterli değildir. Daha doğrusu sıkıştırılmış manto dışa doğru gitmeye çalışır ve bir sonraki adımda kabuk yarıçapı büyür. Ancak bu dışa doğru hareket, mevcut kabuk yönünü korumaya çalışan tork yayı görevi gören üretici bölge tarafından engellenir. Bu iki karşıt kuvvet bir salınım sistemi oluşturur. Kabuk yarıçapı artar, sıkışma azalır, ancak bir gerginlik durumu olur. Gerilmiş manto çekme kuvvetini azaltmaya çalışır. Bu morfo-mekanik salınımın matematiksel açıklaması da bu konudaki düşünceleri destekler ve yumuşakçaların büyüme ve gelişimi sırasında artan bir dalga boyu ve genlik

ile düzenli omurgalar üretilir. Genişleme hızı ve omurga arasındaki bu ilişki aynı zamanda, uzun süredir varolan yumuşakçaların gelişimi hakkındaki boşlukları da basit mekanik ve geometrik açıklamalarla doldurdu. Buna rağmen bazı yumuşakçaların (Muricid ailesi gibi) omurgalarında bulunan fraktal benzeri desenler hala çözülmemiştir. Ayrıca çevresel faktörlerin kabuk büyüme oranını etkilediği bilinse de bu değişikliklerin kabuk formu üzerinde nasıl bir etkisi olduğu belirsizdir.

Yukarıda anlatılanlar ışığında elde edilen (4.33) denklemi yeni parametrelerle geliştirilebilir ve daha genel bir kabuk denklemi elde edilebilir:

- W_1 : Her dikenin üretici eğri boyunca uzunluğu
- W_2 : Her dikenin helikospiral boyunca uzunluğu
- L : Her dikenin yüksekliği
- N : Tam bir turdaki diken sayısı
- P : Dikenin üretici eğrideki konumunu belirten açı



Şekil 4.21 Diken oluşumu

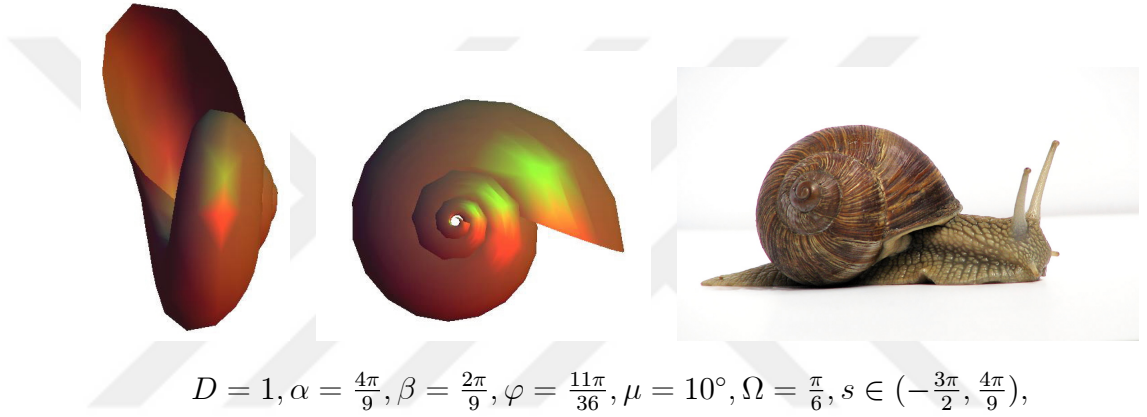
(4.9) denkleminde verilen $r_e(s)$ ifadesinin yerine $0 \leq s \leq 2\pi$ ve $\theta \geq 0$ olmak üzere $r_e(s) + r_n(s, \theta)$ yazıldığında eğri, pürüzsüz yüzey yerine diken süslemelerinin olduğu yüzeyi üretir.

$$r_n(s, \theta) = Le^{-[(\frac{2(s-P)}{W_1})^2 + (\frac{2l(\theta)}{W_2})^2]} \quad , \quad l(\theta) = \frac{2\pi}{N} [\frac{N\theta}{2\pi} - \text{int}(\frac{N\theta}{2\pi})] \quad (4.2)$$

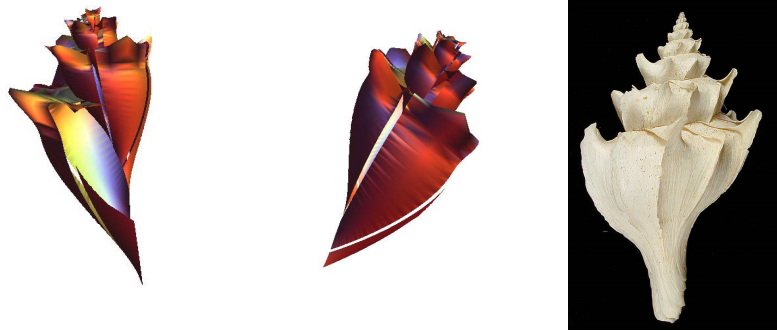
Bu durumda W_1 , W_2 , L , N ve P parametrelerinin de eklenmesiyle on dört parametrelilik kabuk denklemi bulunmuş olur. Diken olmayan kabuk yüzeylerinde $L = 0$ olduğu aşikardır (Cortie, 1993).

4.3.1 Yüzey örnekleri

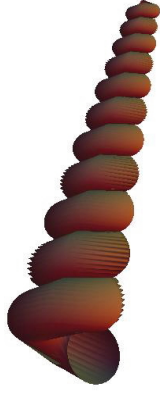
Bir önceki kısımda deniz kabuklarının oluşumu incelenmiş ve oluşumun belli geometrik kurallara bağlı olduğu gösterilerek, deniz kabuğu yüzeylerinin matematiksel gösterimi elde edilmiştir. Bu kısımda, bulunan genel denklemden yararlanarak seçilen üreteç eğrisi ve belirlenen sabitler için oluşturulan yüzey örnekleri verilecektir (Moseley, 1838) , (maplesoft).



Şekil 4.22 Salyangoz



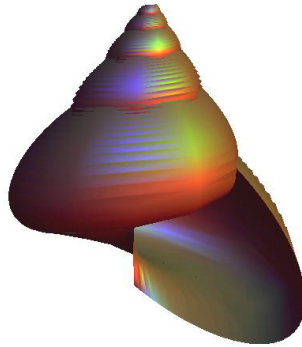
Şekil 4.23 Lyria



$$D = 1, \alpha = 0.4938888889\pi, \beta = \frac{\pi}{45}, \varphi = \frac{11\pi}{36}, \mu = \frac{\pi}{180}, \Omega = -\frac{\pi}{90}$$

$$s \in \left(-\frac{89\pi}{60}, \frac{13\pi}{60}\right), A = 22.2, a = 1.3, b = 1.5, P = 0, L = 0$$

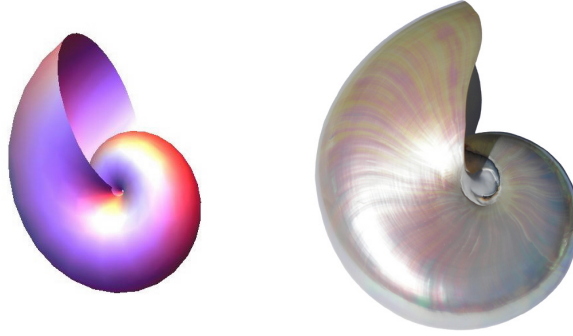
Şekil 4.24 Turritella



$$D = 1, \alpha = 0.4716666667\pi, \beta = \frac{7\pi}{180}, \varphi = -\frac{\pi}{56}, \mu = \frac{\pi}{180}, \Omega = -\frac{\pi}{90}$$

$$s \in \left(-\frac{7\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right), A = 47, a = 40, b = 19, P = 0, L = 0$$

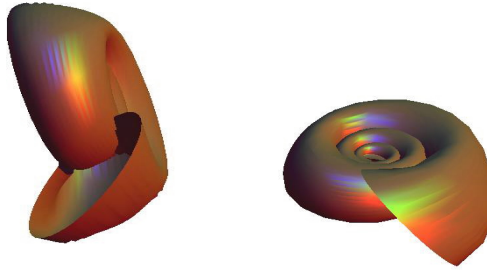
Şekil 4.25 Oxystele



$$D = 1, \alpha = \frac{4\pi}{9}, \beta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0, \mu = 0, \Omega = 0$$

$$s \in \left(-\frac{163\pi}{180}, \frac{163\pi}{180}\right), A = 2, a = 2, b = 1.5, P = 0, L = 0$$

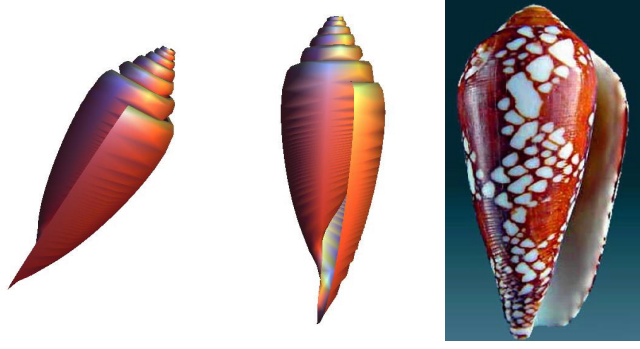
Şekil 4.26 Nautilus



$$D = 1, \alpha = \frac{7\pi}{15}, \beta = \frac{17\pi}{36}, \varphi = \frac{\pi}{18}, \mu = \frac{\pi}{4}, \Omega = \frac{\pi}{36}$$

$$s \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{18}\right), A = 45, a = 20, b = 30, P = 0, L = 0$$

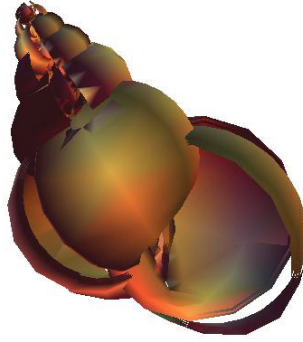
Şekil 4.27 Planorbis



$$D = 1, \alpha = \frac{29\pi}{60}, \beta = \frac{\pi}{180}, \varphi = \frac{13\pi}{30}, \mu = 0, \Omega = 0$$

$$s \in (-\pi, \frac{\pi}{90}), A = 7, a = 4.3, b = 1, P = 0, L = 0$$

Şekil 4.28 Conus



$$D = 1, \alpha = \frac{43\pi}{90}, \beta = \frac{\pi}{10}, \varphi = -\frac{\pi}{4}, \mu = \frac{\pi}{36}, \Omega = \frac{\pi}{180}$$

$$s \in (-4\pi, 4\pi), A = 90, a = 20, b = 20, P = 40, L = 14$$

$$W_1 = 180, W_2 = 0.4, N = 180$$

Şekil 4.29 Epitonium

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Büyüyerek gelişen kabuk yüzeylerin olşumunda, canlıların mantolarının anatomisi önemli rol oynar. Manto kabuk açıklığına bağlanır ve yeni malzemenin birikimini kontrol eder. Doğada yaşayan bir çok tür olduğundan, bu canlıların ve oluşan yapıların büyüme süreci modellenirken uzaysal eğrilerin kullanılması yararlı olur.

Bu tezde verilen yaklaşım büyüyen yüzeyler için bilinen matematiksel bir model sunar. Bu modelin üretilmesi ve yüzeyin oluşturulması üçüncü bölümde açıklanmıştır. Belirlenen üretici eğrilere ve seçilen uygun çatılara göre büyüme adımları verilmiş ve büyümede etkin rol oynayan hız vektör alanları incelenmiştir. Bu yüzeyler farklı uzaylarda da ele alınmış ve geometrik yapıları araştırılmıştır.

Yapılan modellemeler ve üretilen denklemlere rağmen, hala yumuşakçaların muhteşem kabuklarını nasıl yaptıkları hakkında yeterli bilgi yoktur. Herhangi bir kabuk türüne bakıldığında bilim adamlarının henüz açıklayamadıkları bir dizi desen ve diken yapısı ortaya çıkmaktadır. Örneğin kafadan bacaklıların yaklaşık yüzde doksanı sağlamdır; kabuklarını saat yönünde saracak şekilde inşaa ederler. Buna karşılık sadece yüzde onluk bir kısım solaktır. Bu sebeple araştırmacılar sağlam olan mekanizmaları araştırmaya başlamışlardır. Bazı harika süslemelerin kökenleri (yumuşakçaların muricid ailesindeki bir takım türlerde bulunan fraktal benzeri omurga deseni gibi) bilinmemektedir. Ayrıca çevresel faktörlerin kabuk büyüme oranını etkilediği bilinse de (kalabalık koloniler halinde yaşayan canlıların, diğerlerine göre daha küçük ve yumuşak kabuklara sahip olması gibi) bu değişkenlerin kabuk formu üzerindeki etkisi tam olarak saptanamamıştır. Bu ve diğer gizemlerle birlikte büyüyen gelişen kabuk yüzeyleri hakkında daha araştırılması ve cevaplanması gereken birçok konu vardır. Büyüyerek gelişen kabuk yüzeylerin oluşumu hakkındaki bu bilinmezlikler ve gelişimi yöneten fiziksel güçlerin anlaşılabilmesi bu konuyu daha cazip hale getirir.

KAYNAKLAR

- Alfred Gray, Modern differential geometry of curves and surfaces mathematic, 2006
- Arif Sabuncuoğlu, Analitik Geometri, 2002
- Arif Sabuncuoğlu, Diferensiyel Geometri, 2014
- Belgin Korkmaz, Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler, 2012
- Beyhan Uzunoglu, İsmail Gök, Yusuf Yaylı, 2016, *A new approach on curves of constant precession*, Applied Mathematics and Computation, 275, pp.317-323
- C.İlert, 1987, *Formulation and solution of the classical seashell problem: I. Seashell geomtry*, Il Nuovo Cimento, 9 (7), pp. 791-813
- C.İlert, 1989, *Formulation and solution of the classical seashell problem: II. Tubular three-dimensional seashell surfaces*, Il Nuovo Cimento 11 (5), pp. 761-780
- Derek E. Moulton, Alain Goriely, 2014, *Surface growth kinematics via local curve evolution*, Journal Mathematical Biology, 68, pp. 81-108
- Derek E. Moulton, Alain Goriely, R. Chirat, 2012 *Mechanical growth and morphogenesis of seashells*, Journal of Theoretical Biology, 311, pp.69-75
- Derek E. Moulton, Alain Goriely, R. Chirat, 2018 *How seashells take shape*, Scientific American, pp.69-75
- Gül Tuğ, Zehra Özdemir, İsmail Gök, F. Nejat Ekmekçi, 2018, *Accretive Darboux growth along a space curve*, Applied Mathematics and Computation, pp. 516-524
- Gül Tuğ, Zehra Özdemir, Selçuk Han Aydın, F. Nejat Ekmekçi, 2017, *Accretive growth kinematics in Minkowski 3-space*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics
- Fatih Doğan, Genelleştirilmiş kanal yüzeyleri, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012
- H. Moseley, 1838, *On the geometrical forms of turbinated and discoid shells*, Phil. Trans. R. Soc. Lond, 128, pp. 351-370.
- Jorge Picado, 2010, *Seashells: The plainness and beauty of their mathematical description*, Convergence
- Mapplesoft, <https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?sid=3851&view=html#mapleautobookmark1>
- M.B.Cortie, 1993, *Digital sea shells*, Computer & Graphics, 17 (1), pp.79-84
- O. Röschel, Die Geometrie des Galileischen Raumes, Forschungszentrum Graz, Mathematisch-Statistische Sektion, Graz, 1985

R.Skalak, D.Farrow, A.Hoger, 1997, *Kinematics of surface growth*, *Journal Mathematical Biology*, 35 (8), pp.869–907

S.Coombes, 2009, *The Geometry and pigmentation of seashells*, Science Summer School



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sezen ÖNCÜL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 21.01.1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ufuk Arslan Anadolu Lisesi (2011)

Lisans : Ankara Üniversitesi / Fen Fakültesi / Matematik (2016)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik (Şubat 2016)