

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARINDA
CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Cahit AVŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

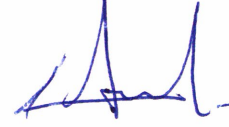
ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Cahit Aşar tarafından hazırlanan " **Lokal Morrey – Lorentz Uzaylarında Calderon - Zygmund Operatörlerinin Sınırlılığı** " adlı tez çalışması **14/06/2019** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

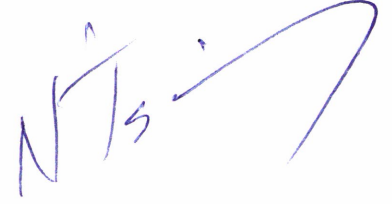
Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



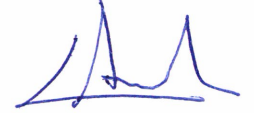
Üye: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye: Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM

Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

14/06/2019



Cahit AVŞAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARINDA CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Cahit AVŞAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci kısımda temel tanım ve teoremler verilmiş, bir fonksiyonun dağılım fonksiyonu ve azalan yeniden düzenlemesi kavramları tanımlanarak bazı temel özellikleri ispatlanmıştır. Lorentz uzayları tanımlanarak bu uzaylarda maksimal operatör ve Calderon-Zygmund operatörlerinin sınırlılığı verilmiştir. Daha sonra Morrey uzayları tanımlanmış, temel özelliklerine yer verilmiş ve Hardy ve eşlenik Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarındaki sınırlılığı ispatlanmıştır. Üçüncü bölümde lokal Morrey-Lorentz uzayları hatırlatılarak bazı temel özelliklerine yer verilmiştir. Bu bölümde tezin asıl amacı olan lokal Morrey-Lorentz uzaylarında maksimal ve Calderon-Zygmund operatörlerinin sınırlılığının ispatı verilmiştir. Dördüncü bölümde önceki bölümlerde elde edilen sonuçların bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

HAZİRAN 2019, 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, Morrey uzayı, lokal Morrey-Lorentz uzayı, maksimal operatör, Calderon- Zygmund operatörü, Hardy operatörü

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF CALDERON-ZYGMUND OPERATORS IN THE LOCAL MORREY-LORENTZ SPACES

Cahit AVŞAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Canay AYKOL YÜCE

This thesis consists of four chapters. The first chapter includes a brief introduction to the topic. In the second chapter, basic definitions and theorems are given, the distribution and decreasing rearrangement of a function are introduced and some of their fundamental properties are given. Lorentz spaces are introduced and the boundedness of the maximal operator and Calderon-Zygmund operators are given in these spaces. After that Morrey spaces are introduced, some basic properties of these spaces are given and the boundedness of Hardy and conjugate Hardy operators in local Morrey spaces are given. In the third chapter, local Morrey-Lorentz spaces and their some basic properties are given. The boundedness of the maximal and Calderon-Zygmund operators in local Morrey-Lorentz spaces, which is the main purpose of this thesis, is given in this chapter. In the fourth chapter, some applications of the results obtained in the previous chapters are given. Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the obtained results.

JUNE 2019, 43 pages

Key Words: Lorentz space, Morrey space, local Morrey-Lorentz space, maximal operator, Calderon-Zygmund operator, Hardy operator

TEŞEKKÜR

Bu tezin yazılması sürecinde olumlu anlamda katkıda bulunan herkese teşekkür ederim.

Cahit AVŞAR
Ankara, HAZİRAN 2019



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	5
2.2 Lorentz Uzayları	12
2.3 Morrey Uzayları	21
3. LOKAL MORREY - LORENTZ UZAYLARI	30
3.1 Maksimal Operatörün Lokal Morrey - Lorentz Uzaylarındaki Sınırlılığı	30
3.2 Calderon - Zygmund Operatörünün Lokal Morrey - Lorentz Uzaylarındaki Sınırlılığı.....	32
4. BAZI UYGULAMALAR	37
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	39
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
$LM_{p,\lambda}$	Lokal Morrey uzayı
$WLM_{p,\lambda}$	Zayıf lokal Morrey uzayı
μ_f	f nin dağılım fonksiyonu
f^*	f nin azalan yeniden düzenlemesi
$L_{p,q}$	Lorentz uzayı
$M_{p,q;\lambda}^{loc}$	Lokal Morrey-Lorentz uzayı
$WM_{p,q;\lambda}^{loc}$	Zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayı
M	Maksimal operatör
A_β	Hardy operatörü
\mathcal{A}_β	Eşlenik Hardy operatörü
T	Calderon - Zygmund operatörü
\mathcal{T}	Maksimal Calderon - Zygmund operatörü
BMO	Sınırlı ortalama salınım
B_r^δ	Bochner-Riesz operatörü
ω_n	R^n de birim kürenin hacmi

1. GİRİŞ

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $M_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzayları

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{L_q(0,r)}$$

quasi - normu sonlu olacak şekilde tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır, burada f^* , f nin azalan yeniden düzenlemesidir.

Lokal Morrey- Lorentz uzayları literatürde ilk kez C. Aykol'un doktora tezinde tanımlanmış (Aykol, 2013) ve bu tezde verilen uzaylar arasındaki bazı gömme teoremleri ispatlanmıştır.

$\lambda < 0$ ya da $\lambda > 1$ durumunda, $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olup, burada Θ , \mathbb{R}^n üzerinde sıfıra denk olan tüm fonksiyonların kümesidir. $\lambda = 0$ durumunda $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları, $p = q$ olması durumunda $M_{p;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey uzayları ve $\lambda = 1$ durumunda $\Lambda_{\infty, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}(\mathbb{R}^n)$ klasik Lorentz uzayları elde edilmektedir. Dolayısıyla lokal Morrey-Lorentz uzayları Lorentz uzaylarının doğal bir genelleştirmesidir. $0 < q \leq p < \infty$ ve $0 < \lambda \leq \frac{q}{p}$ durumunda lokal Morrey-Lorentz uzayları $WL_{\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzaylarına denktir. $q = \infty$ durumunda ise $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzayları elde edilmektedir.

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $WM_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayları

$$\|f\|_{WM_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{WL_q(0,r)}$$

sonlu quasi- normlu ölçülebilir bütün fonksiyonların uzayını göstermektedir. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarında Hilbert dönüşümü, maksimal operatör, Calderon-Zygmund singüler integral operatörü ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı ve bu sınırlılıklar yardımıyla elde edilen sonuçlar sırasıyla (Aykol vd., (2016), Guliyev vd. 2016a, 2016b) tarafından ortaya konulmuştur.

E, R^n in ölçülebilir bir alt kümesi ve $f, E \rightarrow R$ ye ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f nin dağılım fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \geq 0$$

olmak üzere, f nin azalan yeniden düzenlemesi f^* , $(0, |E|)$ üzerinde

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $\mu_{f^*} = \mu_f$ dir.

Bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi kavramı harmonik analizde önemli bir araçtır ve birçok eşitsizlikte anahtar rol oynamaktadır. Sistematik olarak Hardy ve Littlewood tarafından tanımlanmış ve reel ve harmonik analizde, singüler integrallerin araştırılmasında, fonksiyon uzayları ve interpolasyon teorisinde birçok matematikçi tarafından kullanılmıştır (Bennett ve Sharpley 1988; Kristiansson 2002).

Azalan yeniden düzenleme kavramı George G. Lorentz tarafından (Lorentz; 1950,1951)

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzaylarının tanımlanmasında kullanılmıştır.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimdeki ölçülebilir fonksiyonların sınıflarının kümesi olarak tanımlanır. $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzaylarında $0 < p < \infty$, $p = q$ alınması halinde

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ alınması halinde

$$\|f\|_{L_\infty(E)} := \sup\{\alpha : |\{y \in E : |f(y)| \geq \alpha\}| > 0\}$$

Lebesgue uzayları elde edilir.

$0 < p < \infty$, $q = \infty$ alınması halinde ise

$$\|f\|_{WL_p(E)} := \sup_{0 < t \leq |E|} t^{1/p} f^*(t), \quad 1 \leq p < \infty$$

zayıf Lebesgue uzayı elde edilir ve $p = q = \infty$ alınması durumunda

$\|f\|_{WL_\infty} \equiv \|f\|_{L_\infty}$ bulunur.

Morrey uzayları ilk defa C.B. Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Eliptik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının elde edilmesinde ve kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli yere sahiptir.

$0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır (Morrey, 1938), burada $B(x, r)$, \mathbb{R}^n de x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvarı belirtmektedir.

$\lambda < 0$ ve ya $\lambda > n$ iken $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$ dır, burada θ , \mathbb{R}^n de sıfıra denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere f nin Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu Mf

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

biçiminde tanımlanır, burada $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsüdür; yani, $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ olup ω_n , \mathbb{R}^n de birim kürenin hacmini göstermektedir.

$K \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ olacak şekilde aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$(i) |K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

$$(ii) \int_{r_1 < |x| < r_2} K(x) dx = 0, \quad 0 < r_1 < r_2,$$

$$(iii) |K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \quad 2|y| \leq |x|.$$

Bu durumda K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir. Burada C sabiti, x ve y den bağımsızdır.

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{C}_{B(x,\varepsilon)}} K(x-y) f(y) dy$$

eşitliği yardımıyla K ile ilintili Calderon- Zygmund singular integrali

$$Tf(x) = (K * f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tezin amacı, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün, Calderon - Zygmund ve maksimal Calderon Zygmund operatörlerinin $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morey-Lorentz uzaylarında sınırlılığını elde etmektir. Ayrıca, bir fonksiyonun dağılım fonksiyonu, azalan yeniden düzenlemesi kavramları ve özellikleri kapsamlı bir biçimde verilecektir. Lorentz ve Morrey uzayları tanımları hatırlatılarak bu uzaylarda maksimal operatör ve Calderon-Zygmund operatörlerinin sınırlılıkları verilecektir. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarında belirtilen operatörlerin sınırlılığının elde edilmesinde Hardy ve eşlenik Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarındaki kuvvetli ve zayıf sınırlılıklarından yararlanılacaktır.

Elde edilen sonuçların uygulaması olarak ise $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında Bochner-Riesz operatörünün sınırlılığı verilecektir.

Tez boyunca C , uygun parametrelerden bağımsız pozitif bir sabit için kullanılacaktır ve her seferinde aynı olma koşulu bulunmamaktadır. $p \in [1, \infty]$ için, p' , $pp' = p + p'$ şeklinde tanımlanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 X bir K cismi üzerinde bir vektör olmak üzere. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$(N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özellikleri gerçekleşsin. Bu durumda $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine, normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ uzayı genel olarak X ile ifade edilir.

Tanım 2.2 $(N3)$ eşitsizliği $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ olacak şekilde bir C sabiti ile gerçekleşiyorsa bu durumda bu dönüşüm quasi-norm olarak adlandırılır.

(i) T operatörünün tanım bölgesi $D(T)$ bir vektör uzayı olup değer bölgesi $R(T)$, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve her $\alpha \in K$ sabiti için ,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

eşitlikleri gerçekleşiyorsa bu durumda T ye bir lineer operatördür denir.

Tanım 2.3 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$, $T : D(T) \rightarrow Y$ ve T bir lineer operatör olsun. $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir C reel sayısı varsa, T operatörüne X uzayından Y uzayına sınırlı operatördür denir.

T nin normu; $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$, $T : D(T) \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için; $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ iken $\|x - x_0\| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T operatörüne x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.5 (Kreyszig, 1989) X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır .

Tanım 2.6 X bir küme. Σ , X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun.

(i) $X \in \Sigma$,

(ii) Her $A \in \Sigma$ için $A^c \in \Sigma$,

(iii) $k = 1, 2, \dots, n$ için $A_k \in \Sigma$ ise $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \Sigma$

özellikleri gerçekleşiyorsa Σ sınıfı, X üzerinde bir cebirdir. Ayrıca

(iv) , $k = 1, 2, \dots$ için; $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ ise Σ cebirine, σ - cebir denir.

Tanım 2.7 Bir Σ sınıfını kapsayan σ - cebirlerinin en küçüğüne Σ nin doğurduğu σ - cebiri denir. \mathbb{R}^n deki bütün (a, b) aralıklarının doğurduğu σ -cebirine Borel cebiri denir, $B(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8 X bir küme ve μ , X üzerinde bir σ - cebiri olmak üzere (X, μ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, μ deki her bir kümeye de μ -ölçülebilir küme,veya kısaca ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.9 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, olsun. $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}(] \gamma, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \gamma\} \in \Sigma$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir.

(X, Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere, Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu eğer;

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) Σ daki her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerine sahip ise, μ fonksiyonuna ölçü denir. Eğer her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ' ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.10 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir Σ σ - cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüstünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.11 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlı μ - ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $\mathcal{M}(X, \Sigma)$, ya da $\mathcal{M}(X, \mu)$, X üzerinde negatif olmayan μ - ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ ve $\mathcal{M}(X, \Sigma)$ deki μ - h.h.y sonlu fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{M}_0(X, \Sigma)$ ile gösterilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ \mathbb{R}^n üzerinde tüm sonlu Borel ölçülerinin uzayını belirtir.

Tez boyunca $(0, \infty)$ üzerinde tüm negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{M}^+(0, \infty)$, tüm negatif olmayan ölçülebilir azalan ve artan fonksiyonların kümesi sırasıyla $\mathcal{M}^+(0, \infty; \downarrow)$ ve $\mathcal{M}^+(0, \infty; \uparrow)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.12 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi; $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$,
- (iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- (iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Tanım 2.13 (I_k) , \mathbb{R} nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçü olur ve bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

n - boyutlu \mathbb{R}^n uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlayabilmek için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

n -boyutlu kapalı aralıkların hacimlerini alalım. Aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

olacaktır. $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde E kümesine, Lebesgue ölçülebilir kümedir denir.

Tanım 2.14 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \lambda^*)$, \mathbb{R}^n nin λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilir alt kümelerinin sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \lambda^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R}^n)$ sınıfına olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, λ ile gösterilir.

Tanım 2.15 (X, Σ, μ) ölçü uzayı olmak üzere bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önermeye hemen her yerde (h.h.y.) doğrudur denir.

Tanım 2.16 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayına $L_p(X)$ Lebesgue uzayı denir.

$E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere E nin Lebesgue ölçüsü

$$|E| = \int_E dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 \mathbb{R}^n üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyonların kümesi

$$\int_K |f| d\mu$$

sonlu olacak biçimde fonksiyonların sınıfı olarak ifade edilir ve $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir, burada K, \mathbb{R}^n Öklid uzayında bir kompakt küme ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyondur.

Teorem 2.1 (Hölder eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $fg \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olup

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.2 (Minkowski eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $f, g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $f + g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ dir ve $\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$ eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.3 (Chebychev Eşitsizliği) $t > 0$ ve μ_f, f nin dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$t^p \mu_f(t) \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)|^p dx$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.4 $p < q$ ve $E \subset \mathbb{R}^n, |E| < \infty$ olsun. Bu takdirde $L_q(E) \subset L_p(E)$ gömülmesi gerçekleşir.

Tanım 2.18 $1 \leq p, q \leq \infty$ ve

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C \|f\|_{L_p}$$

sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti varsa T operatörü (p, q) tipli operatör olarak adlandırılır.

μ bir ölçü ve her pozitif α sayısı için

$$\mu \{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|f\|_{L_p}}{\alpha} \right)^q, q < \infty$$

sağlanacak biçimde α ve f den bağımsız bir C sabiti varsa T operatörü zayıf (p, q) tipli operatör olarak adlandırılır.

Tanım 2.19 (Maksimal Operatör) f, \mathbb{R}^n üzerinde hemen her x için integralenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

eşitliğinin hemen her x için gerçekleştiği temel Lebesgue Teoremi'nden bilinmektedir, burada $B(x, r), \mathbb{R}^n$ de

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvarı belirtmektedir. Verilen eşitlikte limit yerine supremum ve f yerine de $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.

\mathbb{R}^n nin standart kümelerinde $n = 1$ için maksimal fonksiyon Hardy ve Littlewood tarafından tanımlanmıştır. n -boyutlu \mathbb{R}^n Öklid uzayına genişletilmesi ise Wiener tarafından yapılmıştır.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere M maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$|B(x, r)| = \omega_n r^n$$

olup ω_n, \mathbb{R}^n de birim yuvarın hacmini belirtmektedir.

Tanım 2.20 X bir normlu uzay, $f_n \in X, f_n \geq 0, (n = 1, 2, \dots)$ ve $f_n \rightarrow f, \mu - h.h.y$ olsun. $f \in X$ ise, o takdirde $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ sağlanır. Eğer $f \notin X$ ise, o halde $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ olur Bu özelliğe Fatou özelliği denir. (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 2.21 $BMO \equiv BMO(\mathbb{R}^n)$ ortalama sınırlı salımlı fonksiyon uzayları ,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B(x, r)} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x) - f_B(x)| dx$$

sonlu olacak biçimde tüm f fonksiyonlarından oluşmaktadır. Burada supremum tüm $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ler üzerinden alınmaktadır ve.

$$f_B(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(x) dx$$

şekindedir.

Tanım 2.22 φ , $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve $\beta \in \mathbb{R}$ olsun. A_β ağırlıklı Hardy ve \mathcal{A}_β ağırlıklı eşlenik Hardy operatörleri

$$A_\beta \varphi(t) = t^{\beta-1} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^\beta} ds, \quad \mathcal{A}_\beta \varphi(t) = t^\beta \int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{\beta+1}} ds \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.23 f , $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve $\eta \in \mathbb{R}$ olsun. P_η ve P_η Hardy operatörleri

$$P_\eta f(t) = t^{-\eta} \int_0^t f(s) ds, \quad P_\eta f(t) = t^{-\eta} \int_t^\infty f(s) ds \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Hardy operatörleri harmonik analizde birçok operatörün farklı fonksiyon uzaylarında sınırlılığının elde edilmesinde anahtar rol oynamaktadır. Bu tezde yukarıda tanımlanan Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı kullanılarak, maksimal operatör M , Calderon-Zygmund operatörü T ve maksimal Calderon-Zygmund operatörü \mathcal{T} nin $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlılığı ispatlanacaktır.

Tanım 2.24 (Calderon-Zygmund operatörü) $K \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ olacak şekilde aşağıdaki koşulları sağlasın;

$$\begin{aligned} (i) & |K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ (ii) & \int_{r_1 < |x| < r_2} K(x) dx = 0, \quad 0 < r_1 < r_2, \\ (iii) & |K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \quad 2|y| \leq |x|. \end{aligned}$$

Bu durumda K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir. Burada C sabiti, x ve y den bağımsızdır.

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{C}_{B(x,\varepsilon)}} K(x-y) f(y) dy$$

Eşitliği yardımıyla K ile ilintili Calderon- Zygmund singular integrali

$$Tf(x) = (K * f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 Lorentz Uzayları

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları George G. Lorentz tarafından tanımlanmıştır (Lorentz; 1950,1951). L_p uzaylarının genelleşmesi olan Lorentz uzayları, Banach uzaylarıdır ve yeniden düzenleme altında değişmeyen bir interpolasyon uzayı olup harmonik analizde birçok uygulama alanına sahiptir.

Bu kısımda öncelikle dağılım fonksiyonu tanıtılacak, temel özelliklerinin ispatına yer verilecek, ardından bir fonksiyonun azalan yeniden düzenlemesi tanıtılarak temel özelliklerinin ispatı verilecektir. Son olarak $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzaylarından bahsedilecek ve bu uzayların temel özellikleri ispatlanacaktır.

Dağılım fonksiyonu ve azalan yeniden düzenlemenin özellikleri (Kristiansson, 2002) de detaylı bir şekilde ispatlanmıştır.

Tanım 2.25 (Dağılım Fonksiyonu) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $\mu_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dağılım fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \geq 0$$

şeklinde tanımlanır.

Dağılım fonksiyonu yalnızca f nin mutlak değerine bağlı olup azalandır. Aşağıdaki teoremda dağılım fonksiyonunun bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Teorem 2.5 $f_n, n = 1, 2, \dots$ \mathbb{R}^n üzerinde Σ -ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

- (i) μ_f azalan ve sağdan süreklidir.
- (ii) Eğer $x \in \mathbb{R}^n - h.h.y.$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise, o halde $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$ olur.
- (iii) Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ise, o halde $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ olur.
- (iv) Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ise, o halde $\mu_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ olur.
- (v) Eğer $x \in \mathbb{R}^n - h.h.y.$ için $|f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)|$ ise, o halde $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}(\lambda)$ olur .

Şimdi bir fonksiyonun azalan yeniden düzenlemesi kavramı tanıtılacak ve temel özelliklerinin ispatına yer verilecektir.

Tanım 2.26 (Azalan yeniden düzenleme) $f : R^n \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere, f fonksiyonunun azalan yeniden düzenlemesi

$$f^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty],$$

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

İspatlarımızda $\inf \emptyset = \infty$ şeklinde kabul edilecektir. Eğer μ_f kesin azalan ise, o halde f^* açıkça μ_f in tersidir.

Dağılım fonksiyonu ve azalan yeniden düzenleme arasındaki başka bir önemli ilişki aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 2.6 $f^*(t) = m_{\mu_f}(t), t \geq 0$ eşitliği gerçektir, burada m Lebesgue ölçüsüdür.

Teorem (2.5) (i) den μ_f azalan bir fonksiyon olduğundan $\sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\}$ elde edilir. Böylece Tanım 2.26 dan

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} \\ &= \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} \\ &= m\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} \\ &= m_{\mu_f} \end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıdaki teorem azalan yeniden düzenlemenin bazı temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 2.7 Aşağıdaki özellikler gerçektir.

(i) $f^*(t) > \lambda$ ancak ve ancak $\mu_f(\lambda) > t$.

(ii) f ve f^* eşölçülebilirdir, yani, her $\lambda \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in R^n : |f(x)| > \lambda\}) \\ = m(\{t > 0 : f^*(t) > \lambda\}) \end{aligned}$$

gerçektir, burada m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) Eğer $\lambda \geq 0$ ve $\mu_f(\lambda) < \infty$ ise, o halde $f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \lambda$ ve her $0 < \epsilon < f^*(t)$ için $f^*(\mu_f(\lambda) + \epsilon) \leq \lambda$ olur.

Eğer $t \geq 0$ ve $f^*(t) < \infty$ ise, o halde her $\epsilon > 0$ için $\mu_f(f^*(t)(t)) \leq t$ ve $\mu_f(f^*(t) - \epsilon) \geq t$ olur.

(iv) $0 < p < \infty$ için

$$(|f|^p)^*(t) = f^*(t)^p$$

gerçeklenir.

(v) Eğer $A \in \mathbb{R}^n$ ise, o halde her $t \geq 0$ için $(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(A)]}(t)$ eşitsizliği gerçeklenir.

Uyarı 2.1 Eğer kesin eşitsizlikler kaldırılırsa (ii) özelliğinin gerçeklenmeyeceğine dikkat edilmelidir. Gerçekten,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \lambda\}) = m(\{t \in \mathbb{R} : |f^*(t)| \geq \lambda\})$$

eşitliği genel durumda sağlanmaz.

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

almırsa $f^*(t) \equiv 1$ olur. Bu ise

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |\frac{x}{1+x}| \geq 1\}) &= 0 \\ &\neq \infty = m(\{t \in \mathbb{R} : 1 \geq 1\}) \end{aligned}$$

olması demektir.

Teorem 2.8 (Eşitsizlikler)

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

ve

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2)$$

eşitsizlikleri her $t_1, t_2 \geq 0$ için gerçekleşir. Özel olarak

$$(f + g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

ve

$$(fg)^*(t) \leq f^*(t/2)g^*(t/2)$$

eşitsizlikleri her $t \geq 0$ için sağlanır.

İlk eşitsizlik ile başlayalım. $f^*(t_1) + g^*(t_2) < \infty$ olsun.

$\lambda_1 = f^*(t_1)$ ve $\lambda_2 = g^*(t_2)$ için Teorem (2.7) (iii) den $\mu_f(\lambda_1) \leq t_1$ ve $\mu_g(\lambda_2) \leq t_2$ ve Teorem (2.5) (iii) den

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2) \leq t_1 + t_2$$

elde edilir.

Azalan yeniden düzenleme tanımından

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

ifadesi elde edilir. İkinci eşitsizliğin ispatı da benzer şekildedir. $f^*(t_1)g^*(t_2) < \infty$ durumunda, Teorem (2.5) (iv) ü kullanarak

$$\mu_{fg}(\lambda_1\lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Yine azalan yeniden düzenleme kullanılarak,

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq \lambda_1\lambda_2 = f^*(t_1)g^*(t_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Diğer eşitsizlikler ise $t_1 = t_2 = t/2$ alınarak elde edilir.

Tanım 2.27 (”**” operatörü)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere, $f^{**} : (0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ fonksiyonu,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1 (Hardy Eşitsizliği)

$h, (0, \infty)$ üzerinde pozitif azalan bir fonksiyon, $q \geq 1$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda

$$(i) \quad \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u) \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{1/q} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{-r-1} dt \right)^{1/q}$$
$$(ii) \quad \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u) \right)^q t^{r-1} dt \right)^{1/q} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{r-1} dt \right)^{1/q} \text{ eşitsizlikleri gerçektir.}$$

Lemma 2.2 (Hardy) f ve $g, (0, \infty)$ üzerinde birer pozitif Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve $h, (0, \infty)$ üzerinde azalan bir fonksiyon olsun ve

$$\int_0^a f(t) dt \leq \int_0^a g(t) dt$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $a > 0$ için

$$\int_0^a h(t) f(t) dt \leq \int_0^a h(t) g(t) dt$$

eşitsizliği gerçektir.

Tanım 2.28 (Lorentz uzayları) $0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty$ olsun. $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & 0 < p < \infty, q = \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

sonlu olacak biçimde tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıflarının kümesidir.

$p = q = \infty$ ise, bu durumda $L_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olur.

$1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ ise, bu durumda $\|f\|_{L_{p,q}}$ fonksiyoneli bir norm belirtir.

$0 < q < p < r \leq \infty$ ve $E \subset \mathbb{R}^n, |E| < t$ olmak üzere E üzerinde

$$L_r(\mathbb{R}^n) \equiv L_{r,r}(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,r}(\mathbb{R}^n) \subset L_{q,q}(\mathbb{R}^n) \equiv L_q(\mathbb{R}^n)$$

sürekli gömülmeleri gerçekleşir.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayı için, $p = \infty$ ve $0 < q < \infty$ durumu ile ilgilenilmez. Bunun nedeni $\|f\|_{\infty,q} < \infty$ olmasının ancak \mathbb{R}^n üzerinde $f = 0$, μ -hhy olması ile gerçekleşiyor olmasındandır. Bu durum aşağıdaki şekilde görülebilir.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ nun aşikar bir uzay olmadığını varsayalım. O halde $f \in L_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu olacaktır, öyle ki $c > 0$ ve $A \in \mathbb{R}^n$ pozitif ölçülü küme olmak üzere her $x \in A$ için $|f(x)| > c$ sağlanır. Buradan

$$\|f\|_{\infty,q}^q = \int_0^\infty f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^\infty (f\chi_A)^*(t) \frac{dt}{t} \geq \int_0^{\mu(A)} c^q \frac{dt}{t} = \infty$$

elde edilir. Bu ise $L_{(\infty,q)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının tek elemanının sıfır fonksiyonu olduğunu gösterir.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Bunun sebebi eğer $q = p$ alınırsa, $0 < p \leq \infty$ için $L_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ eşitliğinin elde edilmesidir. Gerçekten, $0 < p < \infty$ için $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$ tanımından;

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{p,p}} &= \left(\frac{p}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^p dt/t \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty t (f^*(t))^p dt/t \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{L_p} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

f^* azalan fonksiyon olduğundan $p = \infty$ için

$$\|f\|_{L_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L_p}$ olup normların eşitliğinden $L_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayı bir lineer uzaydır ve $\|f\|_{L_{p,q}}$ fonksiyoneli bir quasi-normdur.

Ayrıca $1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ ise, o halde $\|f\|_{L_{p,q}}$ fonksiyoneli bir normdur.

Uyarı 2.2 (i) μ_f dağılım fonksiyonu yardımıyla Lorentz uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(p \int_0^\infty (t\mu_f(t)^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t\mu_f(t)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases} \quad (2.5)$$

sonlu olacak biçimdeki $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olarak da verilir (Grafakos, 2004).

(ii) $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayı f^{**} fonksiyonu kullanılarak $1 < p, q < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_{p,q}^*(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanır.

$\|\cdot\|$ fonksiyoneli $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ veya $p = q = \infty$ durumlarında $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir norm belirtir.

$1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ise, o halde

$$\|f\|_{L_{p,q}} \leq \|f\|_{L_{p,q}^*} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L_{p,q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Lemma 2.3 (2.4) ve (2.5) eşitlikleri ile verilen normlar denktir.

İspat.

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \right)^{1/q} &= \left(q \int_0^\infty \int_0^{f^*(t)} s^{q-1} ds t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(q \int_0^\infty s^{q-1} \int_{|\{t:f^*(t)>s\}|} t^{\frac{q}{p}-1} dt ds \right)^{1/q} \\ &= \left(q \int_0^\infty s^{q-1} \int_0^{|\{t:f^*(t)>s\}|} t^{\frac{q}{p}-1} dt ds \right)^{1/q} \\ &= \left(p \int_0^\infty s^{q-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}|^{\frac{q}{p}} ds \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_{L_{p,q}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

$A \subset \mathbb{R}^n$, χ_A , A kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $|A| < \infty$ olsun. Bu durumda $0 < p, q < \infty$ olmak üzere

$$\|\chi_A\|_{L_{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} |A|^{1/p}$$

elde edilir. Eğer $0 < p < \infty$ ve $q = \infty$ ise

$$\|\chi_A\|_{L_{p,\infty}} = |A|^{1/p}$$

bulunur.

Gerçekten,

$$\|\chi_A\|_{L_{p,q}} = \left(\int_0^\infty t^{q/p-1} (\chi_A^*(t))^q dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^{|A|} t^{q/p-1} dt\right)^{1/q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} |A|^{1/p}$$

ve

$$\|\chi_A\|_{L_{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p} \chi_A^*(t) = \sup_{t \in (0, |A|)} t^{1/p} = |A|^{1/p}$$

elde edilir.

M , $L_1(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı değildir. Bunun dışında

$$\|Mf\|_{L_{1,\infty}} \leq C \|f\|_{L_1}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada C , f den bağımsız bir sabittir.

$1 < p \leq \infty$ için maksimal operatörün L_p sınırlılığını inşa etmek için, f^* 'ın azalan yeniden düzenlemesinin maksimal fonksiyonunu kullanmak gerekir. Bu ise $M(f^*)$ fonksiyonunun f^{**} fonksiyonuna eşit olduğunu gösterir. Yani;

$$M(f^*)(t) = f^{**}(t), t > 0$$

eşitliği gerçekleşir.

O halde \mathbb{R}^n üzerinde lokal integrallenebilen her f fonksiyonu için maksimal fonksiyonun azalan yeniden düzenlenmesi ve azalan yeniden düzenlemenin maksimal fonksiyonu denktir. Diğer bir ifadeyle, f den bağımsız c ve C sabitleri vardır, öyle ki;

$$cf^{**}(t) \leq (Mf)^*(t) \leq Cf^{**}(t) \quad (2.6)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(2.6) eşitsizliğinin ispatı (Bennett ve Sharpley, 1988) de bulunabilir. Şimdi M maksimal operatörün $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlı olduğunu ispatlayabiliriz. Aşağıdaki teorem maksimal operatörün Lorentz uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.9 Eğer $1 < p < \infty$ ve $1 \leq q \leq \infty$ ya da $p = q = \infty$ ise; bu durumda f den bağımsız bir C sabiti vardır, öyle ki

$$\|Mf\|_{L_{p,q}} \leq C \|f\|_{L_{p,q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. (2.6) eşitsizliğinden ve

$$\|f\|_{L_{p,q}} \leq \|f\|_{L_{p,q}}^* \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L_{p,q}}$$

eşitsizliği yardımı ile

$$\|Mf\|_{L_{p,q}} \leq C \|f^{**}\|_{L_{p,q}} = C \|f\|_{L_{p,q}}^* \leq C \frac{p}{p-1} \|f\|_{L_{p,q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Calderon-Zygmund operatörünün Lorentz uzaylarında sınırlılığını ispatlayabilmek için $(0, \infty)$ de her φ ölçülebilir fonksiyon için ve her $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} (S\varphi)(t) &= \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{s}{t}\right\} \varphi(s) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds + \int_t^\infty \varphi(s) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan S operatöründen yararlanılacaktır.

Aşağıdaki teorem (Bennett ve Sharpley, 1988) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.10 $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Calderon-Zygmund operatörü T , her $x \in \mathbb{R}^n$ için hemen her yerde vardır. Ayrıca

$$(Tf)^*(t) \leq CS(f^*)(t), 0 < t < \infty \quad (2.7)$$

gerçekleşir. Burada C sabiti f ve t den bağımsızdır.

Aşağıdaki teorem Calderon-Zygmund operatörünün Lorentz uzaylarındaki sınırlılığını vermektedir.

Teorem 2.11 $1 < p < \infty$ ve $1 \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda f den bağımsız bir C sabiti vardır, öyle ki;

$$\| Tf \|_{L_{p,q}} \leq C \| f \|_{L_{p,q}}$$

eşitsizliği her $f \in L_{p,q}(R^n)$ için gerçekleşir.

İspat. (2.7) eşitsizliği ve quasi-norm tanımından

$$\begin{aligned} \| Tf \|_{L_{p,q}} &\leq C \left\| f^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) ds \right\|_{L_{p,q}} \\ &\leq C 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 1} \left(\| f^{**} \|_{p,q} + \left\| \int_t^\infty f^*(s) ds \right\|_{L_{p,q}} \right) \\ &\leq C \left(\| f^{**} \|_{L_{p,q}} + \left\| \int_t^\infty f^*(s) ds \right\|_{L_{p,q}} \right) \end{aligned}$$

■

elde edilir. Hardy eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \| Tf \|_{L_{p,q}} &\leq C \left(\| f^{**} \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \left\| \int_t^\infty f^*(s) ds \right\|_{L_{p,q}} \right) \\ &\leq C \left(\| f \|_{L_{p,q}}^* + p \| f \|_{L_{p,q}} \right) \\ &\leq C \left(\frac{p}{p-1} \| f \|_{L_{p,q}} + p \| f \|_{L_{p,q}} \right) \\ &= C \frac{p^2}{p-1} \| f \|_{L_{p,q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.3 Morrey Uzayları

Morrey uzayları ilk defa C.B. Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Eliptik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının elde edilmesinde ve kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli yere sahiptir.

Tanım 2.29 (Morrey Uzayları) $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak

üzere $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır (Morrey, 1938). $\lambda < 0$ ve ya $\lambda > n$ iken $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$ dir, burada θ , \mathbb{R}^n de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

Lemma 2.4 $1 \leq p < \infty$ olsun. O halde

$$L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} = \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty},$$

gerçeklenir.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(r^{-n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ bulunur ve

$$\|f\|_{L_{p,n}(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

gerçeklenir.

$f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lebesgue teoreminden

$$\lim_{r \rightarrow 0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olup böylece

$$|f(x)| = \left(\lim_{r \rightarrow 0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}(\mathbb{R}^n)}$$

bulunur. O halde $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}(\mathbb{R}^n)}$$

gerçeklenir (Stein, 1971).

Ayrıca $1 \leq p < \infty$, $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayı belirtilmektedir. ■

Burada;

$$\begin{aligned} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} &\equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{t > 0} t \left(f\chi_{B(x,r)} \right)_*^{1/p}(t) \\ &= \sup_{t > 0} t |\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}|^{1/p} \\ &= \sup_{t > 0} t^{1/p} \left(f\chi_{B(x,r)} \right)^*(t) < \infty \end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$WL_p(\mathbb{R}^n) = WL_{p,0}(\mathbb{R}^n)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bundan başka, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi gerçekleşir. Gerçekten, Chebychev eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \|f\|_{WL_{p,\lambda}}^p &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \sup_{t > 0} t^p \left(f\chi_{B(x,r)} \right)_*(t) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \sup_{t > 0} t^p |\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \sup_{t > 0} t^p \left(\int_{\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}} dy \right) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \sup_{t > 0} \left(\int_{\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}} |f(y)|^p dy \right) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right) \\ &= \|f\|_{L_{p,\lambda}}^p \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.5 $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset L_{1,n-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

gömülmesi sağlanır. Bundan başka,

$$\|f\|_{1,n-\alpha} \leq \omega_n^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy &\leq \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,r)} dy \right)^{1/p'} \\ &\leq \omega_n^{1/p'} r^{n/p'} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy &\leq \omega_n^{1/p'} r^{\alpha-n/p} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \omega_n^{1/p'} \left(r^{-\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \omega_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \end{aligned}$$

gerçekleşir, böylece $f \in L_{1,n-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \leq \omega_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

bulunur. ■

Aşağıdaki teorem maksimal operatörün Morrey uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.12 f lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar gerçekleşir.

- (i) $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\lambda}$, $0 < \lambda < n$ için Mf , \mathbb{R}^n de h.h.y. sonludur.
- (ii) $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

gerçeklenir, burada C f den bağımsız bir sabittir.

(iii) $p = 1$ olsun. Bu durumda

$$t|\{Mf > t\} \cap B_r(x)| \leq Cr^\lambda \|f\|_{1,\lambda}$$

gerçeklenir, burada C sabiti x, r, t ve f den bağımsızdır (Chiarenza ve Frasca, 1987).

Tanım 2.30 (Lokal Morrey Uzayları) $0 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda \leq 1$ ve $f \in L_p^{loc}(0, \infty)$

olsun. $L_{p,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(0,\infty)} = \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(0,r)}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Benzer şekilde, $0 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda \leq 1$ ve $f \in WL_p^{loc}(0, \infty)$ olsun. $WL_{p,\lambda}(R^n)$ zayıf lokal Morrey uzayları

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(0,r)}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Aşağıdaki teorem Hardy operatörlerinin zayıf lokal Morrey uzaylarında sınırlılığının elde edilmesinde kullanılacaktır (Andersen ve Muckenhoupt, 1982).

Teorem 2.13 $1 \leq p \leq q < \infty$, u ve v negatif olmayan ağırlık fonksiyonları olsun.

Bu durumda aşağıdaki zayıf (p, q) tipi eşitsizlikler gerçekleşir.

(i) $\eta > 0$ için eğer,

$$B(\eta, a) = \sup_{\xi>0} \left(\int_{\xi}^{\infty} (\xi/x)^a (u(x)/x^{\eta q}) dx \right)^{1/q} \left(\int_0^{\xi} v(x)^{-1/(p-1)} \right)^{1/p'} \quad (2.8)$$

bazı $a > 0$ lar için sonlu ise, bu durumda (u, v) çiftine, P_η için zayıf (p, q) tipli ağırlık çifti adı verilir ve

$$\left(\int_{\{t \in (0, \infty) : |p_{\eta f(t)}| > \tau\}} u(t) dt \right)^{1/q} \leq C\tau^{-1} \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p v(t) dt \right)^{1/p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(ii) $\eta \geq 0$ için eğer,

$$B(\eta) = \sup_{\xi > 0} \xi^{-\eta} \left(\int_0^{\xi} u(x) dx \right)^{1/q} \left(\int_{\xi}^{\infty} v(x)^{-1/(p-1)} \right)^{1/p'} \quad (2.9)$$

sonlu ise, bu durumda (u, v) çiftine, P_{η} için zayıf (p, q) tipli ağırlık çifti adı verilir ve

$$\left(\int_{\{t \in (0, \infty): |P_{\eta} f(t)| > \tau\}} u(t) dt \right)^{1/q} \leq C \tau^{-1} \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p v(t) dt \right)^{1/p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Yukarıdaki eşitsizliklerde $u(t) = v(t) = \chi_{(0,r)}(t)$ alındığında, sırasıyla

$$\left(\int_{\{t \in (0,r): |P_{\eta} f(t)| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \leq C \tau^{-1} \left(\int_0^r |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

$$\left(\int_{\{t \in (0,r): |P_{\eta} f(t)| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \leq C \tau^{-1} \left(\int_0^r |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

elde edildiğine dikkat edilmelidir.

Aşağıdaki teorem A_{β} Hardy operatörünün lokal Morrey uzaylarındaki sınırlılığını vermektedir.

Teorem 2.14 (i) $1 < q < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $\beta = \frac{\lambda}{q} + \frac{1}{q'}$ olsun. Bu durumda A_{β} operatörü $L_{q,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzaylarında sınırlıdır.

(ii) $1 < q < \infty$, $0 \leq \lambda < \infty$ ve $\beta = \frac{\lambda}{q} + \frac{1}{q'}$ olsun. Bu durumda A_{β} operatörü $L_{q,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzaylarından $WL_{q,\lambda}(0, \infty)$ zayıf lokal Morrey uzaylarına sınırlıdır.

İspat. Teoremin (i) şıkkı (Samko, 2009) tarafından ispatlanmıştır.

Teoremin (ii) şıkkı ise Aykol, Guliyev, Küçükaslan ve Şerbetçi tarafından ispatlanmıştır (Aykol vd., 2016).

(ii) $\beta = \frac{\lambda}{q} + \frac{1}{q'}$ olsun. Bu durumda

$$\|A_{\beta} f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|f\|_{L_{q,\lambda}(0,\infty)}$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|A_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} &= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \|A_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \|\chi_{(0,r)} A_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{\tau>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r): |A_\beta f(t)| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{\tau>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r): |t^{\beta-1} \int_0^t \frac{f(s)}{s^\beta} ds| > \tau\}} dt \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

(2.8) da eğer $p = q$, $\eta = 1 - \beta > 0$, $u(t) = \chi_{(0,r)}(t)$, $v(t) = \chi_{(0,r)}(t)t^{\beta q}$ alınırsa tüm $a > 0$ lar için $B(\eta, a)$ sabiti

$$\begin{aligned}
B(\eta, a) &= \sup_{\xi>0} \xi^{a/q} \left(\int_\xi^\infty \chi_{(0,r)}(s) s^{-a} s^{-q(1-\beta)} ds \right)^{1/q} \left(\int_0^\xi (\chi_{(0,r)}(s) s^{\beta q})^{-1/(q-1)} ds \right)^{1/q'} \\
&= \sup_{0<\xi<r} \xi^{a/q} \left(\int_\xi^r s^{-a} s^{-q(1-\beta)} ds \right)^{1/q} \left(\int_0^\xi \chi_{(0,r)}(s) s^{-\beta q/(q-1)} ds \right)^{1/q'} \\
&\leq C \sup_{\xi>0} \xi^{a/q} \xi^{-a/q+\beta-1+1/q-\beta+1-1/q} < \infty
\end{aligned}$$

■

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{\tau>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r): |t^{\beta-1} \int_0^t \frac{f(s)}{s^\beta} ds| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \\
&\leq C \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \left(\int_0^\infty \chi_{(0,r)}(t) \left(\frac{f(t)}{t^\beta} \right)^q t^{\beta q} dt \right)^{1/q} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \left(\int_0^r f(t)^q dt \right)^{1/q} \\
&= C \|f\|_{L_{q,\lambda}(0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem \mathcal{A}_β Hardy operatörünün lokal Morrey uzaylarındaki sınırlılığını vermektedir.

Teorem 2.15 (i) $1 \leq q < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $\beta = \frac{\lambda}{q} - \frac{1}{q'}$ olsun. Bu durumda \mathcal{A}_β operatörü $L_{q,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzaylarında sınırlıdır.

(ii) $1 < q < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $\beta = \frac{\lambda}{q} - \frac{1}{q'}$ olsun. Bu durumda \mathcal{A}_β operatörü $L_{q,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzaylarından $WL_{q,\lambda}(0, \infty)$ zayıf lokal Morrey uzaylarına sınırlıdır.

İspat. Teoremin (i) şikkı (Samko, 2009) tarafından ispatlanmıştır.

Teoremin (ii) şikkı ise Aykol, Guliyev, Küçükaslan ve Şerbetçi tarafından ispatlanmıştır. (Aykol vd., 2016).

(ii) $\beta = \frac{\lambda}{q} - \frac{1}{q'}$ olsun. \mathcal{A}_β operatörünün sınırlılığının ispatında kullandığımız metotla,

$$\|\mathcal{A}_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|f\|_{L_{q,\lambda}(0,\infty)}$$

eşitsizliğin gerçeklendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} &= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \|\mathcal{A}_\beta f\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)} \\ &= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \|\chi_{(0,r)} \mathcal{A}_\beta f(t)\|_{WL_q(0,\infty)} \\ &= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{r>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r): |\mathcal{A}_\beta f(t)| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \\ &= \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{r>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r): |t^\beta \int_t^\infty \frac{f(s)}{s^{\beta+1}} ds| > \tau\}} dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

(2.9) eşitliğinde

$$p = q, \eta = -\beta > 0,$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \chi_{(0,r)}(t), v(t) \\ &= \chi_{(0,r)}(t) t^{(\beta+1)q} \end{aligned}$$

alınırsa, $B(\eta)$ sabiti

$$\begin{aligned} B(\eta) &= \sup_{\xi>0} \xi^\beta \left(\int_0^\xi (\chi_{(0,r)}(s) ds) \right)^{1/q} \left(\int_\xi^\infty (\chi_{(0,r)}(s) s^{q(\beta+1)})^{-1/(q-1)} ds \right)^{1/q'} \\ &= \sup_{0 < \xi < r} \xi^{a/q} \left(\int_\xi^r s^{-a} s^{-q(1-\beta)} ds \right)^{1/q} \left(\int_0^\xi \chi_{(0,r)}(s) s^{-\beta q/(q-1)} ds \right)^{1/q'} \\ &\leq C \sup_{\xi>0} \xi^{\beta+1/q-\beta-1+1-1/q} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \sup_{r>0} \tau \left(\int_{\{t \in (0,r) : |t^\beta \int_t^\infty \frac{f(s)}{s^{\beta+1}} ds| > \tau\}} dt \right)^{1/q} &\leq C \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \left(\int_0^\infty \chi_{(0,r)}(t) \left(\frac{f(t)}{t^{\beta+1}} \right)^q t^{q(\beta+1)} dt \right)^{1/q} \\ &= C \sup_{r>0} r^{-\lambda/q} \left(\int_0^r (f(t))^q dt \right)^{1/q} \\ &= C \|f\|_{L_{q,\lambda}(0,\infty)} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. ■



3. LOKAL MORREY - LORENTZ UZAYLARI

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $M_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzayları

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{L_q(0,r)}$$

quasi - normu sonlu olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. Lokal Morrey- Lorentz uzayları literatürde ilk kez C. Aykol'un doktora tezinde tanımlanmış (Aykol, 2013) ve bu tezde verilen uzaylar arasındaki bazı gömme teoremleri ispatlanmıştır.

$\lambda < 0$ ya da $\lambda > 1$ durumunda, $M_{p,q;\lambda}^{loc} = \Theta$ dur, burada Θ, \mathbb{R}^n üzerinde sıfıra denk olan tüm fonksiyonların kümesidir. Ayrıca $M_{p,q;0}^{loc}(\mathbb{R}^n) = L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ve $M_{p,p;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv M_{p;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ dir $\lambda = 1$ limit durumunda, $M_{p,q;1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı klasik Lorentz uzayı $\Lambda_{\infty, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}(\mathbb{R}^n)$ dir. $0 < q \leq p < \infty$ ve $0 < \lambda \leq \frac{q}{p}$, için lokal Morrey-Lorentz uzayları $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $WL_{\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{q}}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzaylarına eşittir. $q = \infty$ durumunda $M_{p,\infty;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n) = \Lambda_{\infty, t^{\frac{1}{p}}}(\mathbb{R}^n) = WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

$WM_{p,q;\lambda}^{loc}$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{WL_q(0,r)}.$$

sonlu quasi - normlu ölçülebilir bütün fonksiyonların, uzayı olan zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayları gösterilmektedir.

Lemma 3.1 $0 < p \leq p < \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q}$ ve $0 < \lambda \leq \frac{p}{q}$ olsun, bu durumda $(\frac{q}{\lambda})^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{WL_S} \leq \|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} \leq \lambda^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{WL_S}$ dir. Özel olarak $\|f\|_{WL_\infty} = \|f\|_{M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}}$ dir.

3.1 Maksimal Operatörün Lokal Morrey - Lorentz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Bu kısımda maksimal operatörün $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarındaki sınırlılığının ispatına yer verilecektir (Guliyev vd., 2016).

Teorem 3.1 $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $\frac{q}{q+\lambda} \leq p \leq \infty$ olsun.

(i) Eğer $\frac{q}{q+\lambda} < p < \infty$ ise, bu durumda maksimal M maksimal operatörü $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlıdır.

(ii) Eğer $p = \frac{q}{q+\lambda}$ ise, bu durumda M operatörü $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarından $WM_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ zayıf lokal Morrey-Lorentz uzaylarına sınırlıdır.

(iii) Eğer $p = q = \infty$ ise, bu durumda M operatörü $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

İspat. (i) $\frac{q}{q+\lambda} < p < \infty$ ve $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarının tanımından ve A Hardy operatörünün lokal Morrey uzaylarındaki sınırlılığından ■

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} &\leq C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{L_q(0,r)} \\ &= C \left\| A_{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} g \right\|_{LM_{q,\lambda}(0,\infty)}, \\ &\leq C \|g\|_{LM_{q,\lambda}(0,\infty)} \\ &= C \|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $g(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)$ dir. $\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q} < 1$ olduğundan $\beta(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ için $\beta < \frac{\lambda}{q} + \frac{1}{q'}$ eşitsizliği gerçekleşir.

Dolayısıyla $\frac{q}{q+\lambda} < p < \infty$ için maksimal operatör $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlıdır.

(ii) $p = \frac{q}{q+\lambda}$ ve $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayı tanımından ve A Hardy operatörünün zayıf lokal Morrey uzaylarında sınırlılığından

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{WM_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{\lambda-1}{q}} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{WL_q(0,t)} \\ &= C \|A_\beta h\|_{WLM_{q,\lambda}(0,\infty)}, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\beta = 1 + \frac{\lambda-1}{q}$ ve $h(t) = t^{1+\frac{\lambda-1}{q}} f^*(t)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \|A_\beta h\|_{WLM_{q,\lambda}(0,\infty)} &\leq C \|h\|_{LM_{q,\lambda}(0,\infty)} \\ &= C \|f\|_{M_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla maksimal operatör $M_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayından zayıf $WM_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

(iii) $p = \infty$ ve $f \in M_{\infty,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $0 < q < \infty$ için $M_{\infty,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı sifıra denk fonksiyonların uzayı olduğundan yalnızca $q = \infty$ durumunu göz önünde

bulundurulmalıdır. M operatörü $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olduğundan istenilen eşitsizlik elde edilir.

O halde maksimal operatör $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

3.2 Calderon - Zygmund Operatörünün Lokal Morrey - Lorentz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Bu kısımda Calderon-Zygmund operatörünün lokal Morrey-Lorentz uzaylarındaki sınırlılığına yer verilecektir.

f bir basamak fonksiyonu ise, Tf in hemen her yerde mevcut olduğu iyi bilinmektedir. Limitin hemen her yerde varlığı L_1 in yoğun alt kümeleri için bilinmektedir ve bu sonuç karşılık gelen maksimal operatörün kontrolü yardımıyla tüm L_1 e genişletilebilir. Calderon-Zygmund operatörü için L_1 in yoğun alt kümesi basamak fonksiyonlarından oluşmaktadır ve L_1 e genişletmek için $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $T_\varepsilon f(x)$ limiti mevcut olmalıdır. Bunun için f nin maksimal Calderon-Zygmund operatörü Tf göz önüne alınır.

$\varphi(0, \infty)$ da ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere S operatörü

$$\begin{aligned} (S\varphi)(t) &= \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{s}{t}\right\} \varphi(s) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds + \int_t^\infty \varphi(s) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. S lineer bir operatördür.

Teorem 3.2 $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$Sf^*(1) = \int_0^1 f^*(s) ds + \int_1^\infty f^*(s) \frac{ds}{s} < \infty \quad (3.1)$$

olsun. Böylece,

$$(Tf)^*(t) \leq CSf^*(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (3.2)$$

olup, burada C sabiti f ve t den bağımsızdır.

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve f koşullarını sağlasın. Bu durumda Calderon-Zygmund operatörü T , $x \in \mathbb{R}^n$ için hemen her yerde vardır. Ayrıca

$$(Tf)^*(t) \leq CSf^*(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (3.3)$$

olup, burada C sabiti f ve t den bağımsızdır.

Uyarı 3.1 (3.1) ifadesi (Bennett ve Rudnick, 1980) tarafından ispatlanmış, eşitliğin integral formu ise (O’Neil ve Weiss, 1963) ve (Calderon, 1966) tarafından ispatlanmıştır.

T Calderon-Zygmund operatörü sürekli olduğundan dolayı $1 \leq p < \infty$ için tüm $L_p(\mathbb{R}^n)$ e genişletilebilir. $p = \infty$ durumu için T nin normalleştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası seçelim ve $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$T^0 f(x) = T(f\chi_{2B})(x) - T(f\chi_{2B})(x_0) + \int_{\mathbb{C}_{B(x,r)}} [K(x-y) - K(x_0-y)]f(y)dy$$

eşitliği gerçekleşir. Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, ise açık olarak

$$T^0 f(x) = T(f)(x) - T(f)(x_0)$$

olur.

Aşağıdaki teorem T Calderon-Zygmund operatörünün $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlılığını vermektedir (Guliyev vd., 2016).

Teorem 3.3 $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $\frac{q}{q+\lambda} \leq p \leq \frac{q}{\lambda}$ olsun ve (3.3) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda Calderon-Zygmund integrali $Tf(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ hemen her yerde mevcuttur. Bundan başka

- (i) Eğer $1 \leq q < \infty$, $\frac{q}{q+\lambda} < p < \frac{q}{\lambda}$, ise, o halde T Calderon-Zygmund operatörü $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlıdır.
- (ii) Eğer $1 < q < \infty$, $p = \frac{q}{q+\lambda}$, ise, o halde T operatörü, $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ den zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayı $WM_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.
- (iii) Eğer $1 \leq q \leq \infty$, $p = \frac{q}{\lambda}$, ise, o halde T^0 operatörü $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ den $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. (i) $\frac{q}{q+\lambda} < p < \frac{q}{\lambda}$ ve $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarının tanımından ve Hardy ve eşlenik Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarında sınırlılığından ■

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} &\leq C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \int_0^t f^*(s) ds + t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right\|_{L_q(0,r)} \\
&\leq C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \int_0^t f^*(s) ds \right\| + C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right\|_{L_q(0,r)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki ilk kısmın sınırlılığı maksimal operatör için ispatlandığından ikinci kısma bakalım.

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right\|_{L_q(0,r)} = \left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} g \right\|_{L_{q,\lambda}(0,r)}$$

olup burada $g(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)$ dir. $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$ olduğundan ve $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ için $\beta > \frac{\lambda}{q} - \frac{1}{q}$ gerçekleşir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} g \right\|_{L_{q,\lambda}(0,r)} &\leq C \|g\|_{L_{q,\lambda}(0,r)} \\
&= C \|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\frac{q}{q+\lambda} < p < \frac{q}{\lambda}$ için T nin $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlılığı ispatlanmış olur.

(ii) $p = \frac{q}{q+\lambda}$ olsun. $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}$ alalım. Zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayı tanımından ve A ve \mathcal{A} Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarındaki sınırlılığından

$$\|Tf\|_{WM_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}} \leq C \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{\lambda-1}{q}} \int_0^t f^*(s) ds + t^{1+\frac{\lambda-1}{q}} \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right\|_{WL_q(0,t)}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki ilk kısmın sınırlılığı maksimal operatör için ispatlandığından ikinci kısma bakalım.

$$\sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{1+\frac{\lambda-1}{q}} \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right\|_{L_q(0,r)} = \left\| \mathcal{A}_\beta h \right\|_{L_{q,\lambda}(0,r)}$$

olup burada $\beta = 1 + \frac{\lambda-1}{q}$ ve $h(t) = t^{1+\frac{\lambda-1}{q}} f^*(t)$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|A_\beta h\|_{WLM_{q,\lambda}(0,\infty)} &\leq C \|h\|_{LM_{q,\lambda}(0,\infty)} \\
&= C \|f\|_{M_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T operatörünün $M_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayından zayıf $WM_{\frac{q}{q+\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı ispatlanmış olur.

(iii) $p = \frac{q}{\lambda}$ olsun. T^0 operatörü $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ den $BMO(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı bir operatör ve $M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv WL_\infty(\mathbb{R}^n) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğundan

$$\|T^0 f\|_{BMO} \leq C \|f\|_{M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}} = C \|f\|_{L_\infty}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremdede, $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında \mathcal{T} maksimal Calderon-Zygmund operatörünün sınırlılığı verilmektedir.

Teorem 3.4 $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $\frac{q}{q+\lambda} \leq p \leq \frac{q}{\lambda}$ olsun ve (3.2) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda maksimal Calderon-Zygmund operatörü $\mathcal{T}f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ de hemen her yerde sonludur. Bundan başka,

- (i) Eğer $1 \leq q < \infty$, $\frac{q}{q+\lambda} < p < \frac{q}{\lambda}$, ise \mathcal{T} operatörü $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlıdır.
- (ii) Eğer $1 < q < \infty$, $p = \frac{q}{q+\lambda}$, ise \mathcal{T} operatörü, $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ den $WM_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ zayıf lokal Morrey-Lorentz uzaylarına sınırlıdır.
- (iii) Eğer $1 \leq q \leq \infty$, $p = \frac{q}{\lambda}$, ise \mathcal{T} operatörü, $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ den $BMO(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Uyarı 3.2 $\lambda = 1$ durumunda klasik Lorentz uzayında $M_{p,q;1}^{loc} = \Lambda_{\infty, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ Calderon-Zygmund operatörünün T sınırlılığı (Rakotondratsimba, 1998) tarafından verilmiştir.

İspat. $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $\frac{q}{q+\lambda} \leq p \leq \frac{q}{\lambda}$ olsun. f , (3.1) koşulunu sağladığından ve (3.2) eşitsizliğinden maksimal Calderon-Zygmund operatörü $\mathcal{T}f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ hemen her yerde sonludur. ■

Bu sonuçların (i) ve (ii) ifadelerinin ispatı, teorem (3.4) deki metotlar kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir.

(iii) $1 \leq q \leq \infty$, $p = \frac{q}{\lambda}$ ve $0 \leq \lambda < 1$ için, varsayalım ki, $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}$. \mathcal{T} operatörü L_∞ den BMO a kadar sınırlı olduğundan ve $M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$\|\mathcal{T}f\|_{BMO} \leq C \|f\|_{M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}}$$

eşitsizliği elde edilir. (Bennett vd., 1980). Böylece \mathcal{T} operatörü $M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ dan $BMO(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.



4. BAZI UYGULAMALAR

Bu kısımda, tezde verilen sonuçların bazı uygulamaları verilecektir. Öncelikle maksimal operatörün sınırlılığının bir uygulaması olarak B_r^δ Bochner-Riesz operatörünün sınırlılığı elde edilecektir.

$r > 0$ için $\delta > (n-1)/2$, $B_r^\delta(f)(\xi) = (1-r^2|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi)$ ve $B_r^\delta(x) = r^{-n}B^\delta(x/r)$ olsun.

Maksimal Bochner-Riesz operatörü

(Liu ve Lu , 2003) ve (Liu ve Chen, 2008) tarafından

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \sup_{r>0} |B_r^\delta(f)(x)|.$$

biçiminde tanımlanmıştır.

$$B_{\delta,*}(f)(x) \leq CMf(x)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği açıktır (Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia, 1985).

Maksimal operatör $M_{p,q,\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ üzeninde sınırlı olduğundan aşağıdaki teorem elde edilir (Guliyev vd., 2016).

Teorem 4.1 $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $\frac{q}{q+\lambda} \leq p \leq \infty$ olsun.

(i) Eğer $\frac{q}{q+\lambda} < p < \infty$ ise, bu durumda, B_r^δ Bochner-Riesz operatörü lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlıdır.

(ii) Eğer $p = \frac{q}{q+\lambda}$ ise, bu durumda, B_r^δ lokal Morrey-Lorentz uzaylarından zayıf lokal Morrey-Lorentz uzaylarına sınırlıdır.

(iii) Eğer $p = q = \infty$ ise, bu durumda, B_r^δ , $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

$\lambda = 0$ durumu için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1 $1 \leq q \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $1 < p < \infty$ ise, bu durumda B_r^δ $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzaylarında sınırlıdır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise, bu durumda B_r^δ ; Lorentz uzaylarından zayıf Lorentz uzaylarına sınırlıdır.

(iii) Eğer $p = q = \infty$ ise, bu durumda B_r^δ ; $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlıdır.

Sonuç 4.2 $1 \leq q \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $1 < p < \infty$ ise, bu durumda M maksimal operatörü Lorentz uzaylarında sınırlıdır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise, M operatörü $L_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ den $WL_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lorentz uzaylarına sınırlıdır.

(iii) Eğer $p = q = \infty$ ise, M operatörü $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ da sınırlıdır.

Uyarı 4.1 Sonuç (4.2) ün (i) ve (iii) şıkları önceden bilinmektedir (Kristiansson, 2002).

$\lambda = 0$ için, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3 $1 \leq q \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

(i) Eğer $1 < p < \infty$ ise, bu durumda, T ve \mathcal{T} operatörleri Lorentz uzayında $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise, bu durumda, T ve \mathcal{T} operatörleri $L_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ den zayıf Lorentz uzayına $WL_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır.

(iii) Eğer $p = q = \infty$ ise, T^0 ve \mathcal{T} operatörleri $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dan, $BMO(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlıdır.

Uyarı 4.2 Sonuç (4.3) ün (i) ve (iii) şıkları önceden bilinmektedir (Kristiansson, 2002).

Lemma 3.1 den $1 \leq q \leq p < \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q}$ ve $0 < \lambda \leq \frac{q}{p}$ için, $\|f\|_{WL_s}$ ve $\|f\|_{M_{p,q,\lambda}^{loc}}$ normları denk olduğundan, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.4 $0 < s < \infty$ olsun. Bu durumda M ve B_r^δ operatörleri $WL_s(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzayında sınırlıdır.

Sonuç 4.5 $1 < s < \infty$ olsun. Bu durumda T ve \mathcal{T} operatörleri WL_s zayıf Lebesgue uzayında $WL_s(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde,

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $M_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzayları

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{L_q(0,r)}$$

quasi- normu sonlu olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların uzayı olan $M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında maksimal operatör ve Calderon - Zygmund operatörlerinin sınırlılığına yer verilmiştir.

Lokal Morrey Lorentz uzayları; klasik Lorentz uzaylarının bir geliştirilmesi olup, fonksiyon uzayları teorisi alanında birçok uygulamaya sahip olacağı düşünülmektedir. Ayrıca maksimal ve Calderon - Zygmund operatörleri harmonik analizin temel operatörlerinden olduğundan verilen sonuçlar diğer integral operatörlerin sınırlılığının elde edilmesinde de anahtar rol oynayacaktır. Tezde belirtilen operatörlerin yanı sıra, lokal Morrey - Lorentz uzaylarında maksimal Calderon - Zygmund operatörünün sınırlılığı ve uygulama olarak da Bochner - Riesz operatörünün sınırlılığı verilmiştir.

$M_{p,q;\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ local Morrey-Lorentz uzaylarında $\lambda = 0$ durumu için Lorentz uzayları elde edildiğinden, ortaya konulan sonuçlar yardımıyla Bochner Riesz operatörü maksimal operatör ve Calderon - Zygmund operatörlerinin Lorentz uzaylarında sınırlılığı elde edilir.

Tezde verilen sonuçların; analiz ve fonksiyonlar teorisi alanında çalışan yüksek lisans ve doktora öğrencilerine, Türkçe kaynak olması bakımından, çok faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aykol C., $L_{p,q,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ -Lorentz Uzaylarında B-Maksimal ve Kesirli B-Maksimal Fonksiyonlar, [Yüksek lisans tezi], Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, ANKARA, 2008.
- Aykol C., Genelleştirilmiş Morrey-Lorentz Uzayları ve Bu Uzaylarda Maksimal Operatörlerin Sınırlılığı, [Doktora tezi], Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, ANKARA, 2013.
- Aykol C., Guliyev V.S., Serbetci A., Boundedness of the maximal operator in the local Morrey-Lorentz spaces, Jour. Ineq. Appl. 2013; 2013:346.
- Aykol C., Guliyev V.S, Kucukaslan A., Serbetci A., The boundedness of Hilbert transform in the local Morrey-Lorentz spaces, Integral Transforms Spec. Funct. 2016;27(4):318–330.
- Bagby R., Kurtz D.S., A rearranged good λ inequality, Trans. Amer. Math. Soc. 1986;293(1):71–81
- Bennett C., Rudnick K., On Lorentz-Zygmund spaces, Dissertationes Math. 1980;175:1–67.
- Bennett C., De Vore R., Sharpley R., Maximal singular integrals on L_∞ , Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980), 233–236, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 35, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- Bennett C., Sharpley R., Interpolation of operators, Academic Press, Boston; 1988.
- Burenkov V.I., Guliyev H.V., Guliyev V.S., Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operators in the local Morrey-type spaces, J. Comput. Appl. Math. 2007;208(1):280-301.
- Burenkov V.I., Guliyev V.S., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, Potential Anal. 2009;30:211-249.
- Burenkov V.I., Guliyev V.S., Tararykova T.V., Serbetci A., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces, Eurasian Math. J. 2010;1(1):32–53.
- Calderon A.P., Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz, Stud. Math. 1966;26:273–299.
- Chiarenza, Frasca M. *Morrey spaces and Hardy- Littlewood maximal function*, Rend. Math. **7** (1987) ,273–279.
- Dyn'kin E.M., Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory, Commutative Harmonic Analysis I, Encyclopaedia of Math. Sci. 1991;15:167–259.

- Garcia - Cuerva J., Rubio de Francia J.L., *Weighted norm inequalities and related topics*, vol. 116 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands; 1985.
- Grafakos L., *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Edu. Inc. Upper Saddle River; 2004.
- Guliyev V.S., *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in \mathbb{R}^n* , Doctoral degree dissertation, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 1994, 329 pp. (in Russian)
- Guliyev V.S., *Function spaces, Integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, Some Applications*. Cashioglu, Baku; 1999. (in Russian)
- Guliyev, V.S., Aykol, C., Kucukaslan, A., Serbetci, A., *Maximal operator and Calderon-Zygmund operators in local Morrey-Spaces*, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2016;27(11):866- 877.
- Guliyev V.S., Kucukaslan, A., Aykol, C., Serbetci, A., *Riesz potential in the local Morrey-Lorentz spaces and some applications*, *Georgian Math. J.* (<https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0065>).
- Kristiansson E., *Decreasing rearrangement and Lorentz $L(p, q)$ spaces* [master thesis], Department of Mathematics of the Lulea University of Technology, Lulea; 2002.
- Liu L.Z, Lu S.Z., *Weighted weak type inequalities for maximal commutators of Bochner-Riesz operator*, *Hokkaido Math. J.* 2003;32(1):85–99.
- Liu Y., Chen D., *The boundedness of maximal Bochner-Riesz operator and maximal commutator on Morrey type spaces*, *Anal. Theory Appl.* 2008;24(4):321–329.
- Lorentz G.G., *Some new functional spaces*, *Ann. of Math.*, 1950; 1, 37-55.
- Lorentz G. G., *On the theory of spaces*, *Pacific J. Math.* 1 (1951), 411- 429.
- Mingione G., *Gradient estimates below the duality exponent*, *Math. Ann.* 2010;346:571–627.
- Morrey C.B., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), 126–166.
- O’Neil R., Weiss G., *The Hilbert transform and rearrangement of functions*, *Stud. Math.* 1963;23:189–198.
- Ragusa M.A., *Embeddings for Morrey-Lorentz spaces*, *J. Optim. Theory Appl.* 2012;154(2):491–499.
- Rakotondratsimba Y., *On the boundedness of classical operators on weighted Lorentz spaces*, *Georgian Math. J.* 1998;5(2):177–200.

Samko N., Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 2009;350:56–72.

Stein, E.M., *Singular Integrals and Differentiability Theory of Functions*, Princeton Math. 287, Princeton University Press, Princeton., 1970

Stein E.M. and Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press., 1971.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cahit AVŞAR

Doğum Yeri : Doğanşehir, MALATYA

Doğum Tarihi : 02/06/1971

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Tevfik Sırrı Gür Lisesi

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Biyoloji Bölümü

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: