

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**KONTROLLÜ LAGRANGE YÖNTEMLERİ
VE UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Hüseyin Alpaslan YILDIZ

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

EKİM 2024

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**KONTROLLÜ LAGRANGE YÖNTEMLERİ
VE UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

**Hüseyin Alpaslan YILDIZ
(504082107)**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN-SÜMER

EKİM 2024

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

**CONTROLLED LAGRANGIAN METHODS
AND APPLICATIONS**

Ph.D. THESIS

**Hüseyin Alpaslan YILDIZ
(504082107)**

Department of Control and Automation Engineering

Control and Automation Engineering Programme

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN-SÜMER

OCTOBER 2024

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 504082107 numaralı Doktora Öğrencisi Hüseyin Alpaslan YILDIZ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “KONTROLLÜ LAGRANGE YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN-SÜMER**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ali Fuat ERGENÇ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Uğur YILDIRAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 26 Ağustos 2024
Savunma Tarihi : 18 Ekim 2024





Fahriye, İlay, Duru ve Bilge'ye,



ÖNSÖZ

Eksik sürülmüş sistemler, mühendislikte kontrol teorisinin karmaşık ve zorlu alanlarından birini oluşturmaktadır. Bu sistemlerin kontrolü ve kararlılığı, önemli bir araştırma konusu olarak öne çıkmaktadır. Bu tez çalışmasında, eksik sürülmüş sistemlerin kontrolü konusunda mevcut bilgi birikimine katkıda bulunmayı ve gelecekte yapılacak çalışmalara bir temel oluşturmayı amaçladım. Elde edilen sonuçların, hem teorik hem de pratik uygulamalara ışık tutacağına inanıyorum.

Bu süreç boyunca, birçok değerli akademisyenin, ailemin ve çeşitli kurumların desteklerini hissettim. Onların katkıları, bu çalışmanın ortaya çıkmasında büyük rol oynadı ve bu vesileyle, tezime doğrudan ya da dolaylı yoldan katkıda bulunan herkese en derin şükranlarımı sunuyorum.

Öncelikle, bu çalışmanın her aşamasında bana rehberlik eden, akademik deneyimi ile yolumu aydınlatan, engin bilgi birikimi ile bana her daim ilham veren danışmanım Prof. Dr. Leyla GÖREN-SÜMER'e en derin teşekkürlerimi sunarım. Onun destekleyici yaklaşımı, anlayışı ve bana olan inancı ve sabrı ile, bu zorlu süreci başarıyla tamamlamam mümkün oldu. Kendisine, bu süreçte bana gösterdiği sabır ve özveri için minnettarım. Tez kurul üyelerim Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR ve Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ'e, çalışmam boyunca sağladıkları değerli akademik katkılar için gönülden teşekkürlerimi iletiyorum. Ayrıca, desteklerinden dolayı Prof. Dr. Neslihan Serap ŞENGÖR'e de özel olarak teşekkür etmek isterim.

Bu zorlu süreçte her daim yanımda olan, sabrıyla ve sevgisiyle bana güç veren sevgili eşim Dr. Fahriye YILDIZ'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca, hayatımın en değerli hazineleri olan çocuklarım İlay, Bilge ve Duru'ya da sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum. Varlığınızla her gün bana ilham verdiğiniz ve bu çalışmayı tamamlamamda motivasyon kaynağım oldunuz.

Eğitim hayatım boyunca bana ilham veren, okumam için sürekli teşvik eden rahmetli dedem emekli öğretmen Hüseyin YILDIZ ve rahmetli babaannem Saliha YILDIZ'a en derin teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez çalışmam sırasında bana desteklerini sunan Dr. Halil AKÇAKAYA ve Dr. Özen ÖZKAYA'ya da özel teşekkürlerimi iletmek istiyorum.

Son olarak, doktora çalışmam süresince 22 yıldır gururla bir parçası olduğum İstanbul Teknik Üniversitesi'ne ve bu süreçte sağladıkları destekler için Siemens Türkiye A.Ş.'ye teşekkür ederim.

Ekim 2024

Hüseyin Alpaslan YILDIZ
(Kontrol Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	ix
İÇİNDEKİLER	xi
KISALTMALAR	xiii
SEMBOLLER	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xix
ÖZET.....	xxi
SUMMARY	xxiii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNBİLGİ	5
2.1 Klasik Mekanik Tarihsel Gelişimi ve Varyasyonel Hesaplama Yaklaşımı	5
2.2 Euler Lagrange Sistemler	10
2.2.1 Varyasyonel Kalkülüs	11
2.2.1.1 Minimizasyon Problemi	12
2.2.1.2 Euler'in birinci denklemi	13
2.2.1.3 Integral'in Uç değerleri	15
2.2.1.4 Jacobi Denklemi	18
2.2.1.5 Euler'in ikinci denklemi	18
2.2.2 Lagrangian Mekanığı	19
2.2.2.1 En az eylem ilkesi	19
2.2.2.2 Sanal iş ilkesi	20
2.2.2.3 Hamilton ilkesi	24
2.2.2.4 Kısıtlar (Constraints)	25
2.2.2.5 Euler Lagrange Denklemleri	26
2.3 Hamiltonian Sistemler	28
2.4 Eksik Sürülmüş Sistemler	32
2.4.1 EL Sistemler ve Kontrollü Lagrange Yöntemi	34
2.4.1.1 Kontrollü Lagrange Yönteminde Eşleşme Koşulları	36
2.4.2 Hamiltonian Sistemler ve IDA-PBC Yöntemi	41
2.4.3 IDA-PBC ve Kontrollü Lagrangian Yöntemlerinin Karşılaştırılması	47
3. EKSİK SÜRÜLMÜŞ EL SİSTEMLERİN MODEL YAKLAŞIKLIĞI İLE KONTROLÜ	51
3.1 Yöntem	52
3.2 Kararlılık Analizi	56
3.3 Örnek: Araç ve Ters Sarkaç Sistemi	61
4. EKSİK SÜRÜLMÜŞ HAMILTONIAN SİSTEMLERİN MODEL YAKLAŞIKLIĞI İLE KONTROLÜ	71
4.1 Yöntem	71
4.2 Örnek: Araç Ters Sarkaç Sistemi	73
5. ÖRNEKLER.....	81
5.1 Vinç Sistemi	81

5.2 TORA	91
5.3 Top ve Çubuk Sistemi	100
5.4 Top ve Çubuk Sistemi (Tam Çözüm).....	109
5.5 Top ve Tabla sistemi	116
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	121
KAYNAKLAR.....	123
EKLER.....	129
ÖZGEÇMİŞ.....	139



KISALTMALAR

CL	: Kontrollü Lagrangian (Controlled Lagrangian)
EL	: Euler Lagrange
IDA-PBC	: Bağlantı ve sönüm atamalı pasiflik temelli kontrol (Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control)
MPC	: Model öngörülü kontrol (Model Predictive Control)
ODE	: Adi diferansiyel denklem (Ordinary Differential Equation)
PBC	: Pasif olma temelli kontrol (Passivity-Based Control)
PCH	: Port kontrollü Hamiltonian (Port Controlled Hamiltonian)
PDE	: Kısmi diferansiyel denklem (Partial Differential Equation)
SMC	: Kayma kipli kontrol (Sliding Mode Control)
TORA	: Doğrusal salınlımlı rotasyonel eyleyici (Translational Oscillator with a Rotational Actuator)
VTOL	: Dikey havalanıp inebilen (Vertical Take-Off and Landing)



SEMBOLLER

C, C_c, C_d	: Coriolis ve Santrifüj kuvvetleri Matrisi
F	: Genelleştirilmiş kuvvet Matrisi
H, H_d	: Hamiltonian fonksiyonu
K	: Bir parçacığın kinetik enerji fonksiyonu
L, L_c	: Lagrange fonksiyonu
M, M_c, M_d	: Kütle ya da Eylemsizlik Matrisi
q	: Genelleştirilmiş konular vektörü
S	: Eylem (Action) integrali
t	: Zaman
T	: Birden fazla parçacığın kinetik enerji fonksiyonu
U	: Bir potansiyel fonksiyonundan üretilen kuvvetler
V, V_c, V_d	: Potansiyel Enerji fonksiyonu



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Hamiltonian ve Euler Lagrange eşleşme koşulları..... **48**





ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : $P1$ ve $P2$ noktalarını birleştiren olası eğriler	6
Şekil 2.2 : Sanal yer değiştirme	14
Şekil 2.3 : Kuadratik bir fonksiyonun $\partial^2 F / \partial y'^2$ değerine göre değişimi	17
Şekil 3.1 : Araç ve ters sarkaç sistemi	61
Şekil 3.2 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (farklı ϵl değerleri için) (Araç ve ters sarkaç)	65
Şekil 3.3 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Araç ve ters sarkaç)	66
Şekil 3.4 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Araç ve ters sarkaç) ..	67
Şekil 3.5 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Araç ve ters sarkaç)	68
Şekil 3.6 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Araç ve ters sarkaç)	68
Şekil 3.7 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Araç ve ters sarkaç)	69
Şekil 4.1 : Potansiyel enerji eşleşme koşulunun yaklaşıklığından kaynaklanan hata ..	78
Şekil 4.2 : Farklı başlangıç koşullarında sistem cevabı	79
Şekil 5.1 : Vinç Sistemi	81
Şekil 5.2 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (Vinç)	85
Şekil 5.3 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Vinç)	86
Şekil 5.4 : Farklı M değerleri için durum yörüngeleri (Vinç)	87
Şekil 5.5 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Vinç)	88
Şekil 5.6 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Vinç) ..	89
Şekil 5.7 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Vinç) ..	89
Şekil 5.8 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Vinç)	90
Şekil 5.9 : TORA	91
Şekil 5.10 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (TORA)	95
Şekil 5.11 : Potansiyel enerji fonksiyonu (TORA)	96
Şekil 5.12 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (TORA)	97
Şekil 5.13 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (TORA)	98
Şekil 5.14 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (TORA)	98
Şekil 5.15 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (TORA)	99
Şekil 5.16 : Top ve çubuk sistemi	100
Şekil 5.17 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (Top ve Çubuk)	104
Şekil 5.18 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Top ve çubuk)	105
Şekil 5.19 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Çubuk)	106
Şekil 5.20 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Top ve Çubuk)	107
Şekil 5.21 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Top ve Çubuk)	107
Şekil 5.22 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Top ve Çubuk)	108

Şekil 5.23 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Top ve çubuk tam çözüm)	112
Şekil 5.24 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Çubuk tam çözüm)	113
Şekil 5.25 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Top ve Çubuk tam çözüm)	114
Şekil 5.26 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Top ve Çubuk tam çözüm)	114
Şekil 5.27 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Top ve Çubuk tam çözüm)	115
Şekil 5.28 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Tabla).....	119
Şekil 5.29 : Farklı başlangıç koşulları için topun tabla üzerindeki konumu (Top ve Tabla)	120



KONTROLLÜ LAGRANGE YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI

ÖZET

Bu tez çalışmasında eksik sürülmüş sistemlerin enerji tabanlı kontrol yöntemleri olan Kontrollü Lagrange ve IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control) yöntemleri ele alınmıştır. Eksik sürülmüş sistemler, sistemin eyleyici sayısının, serbestlik derecesinden az olduğu, dolayısıyla tüm hareketlerinin doğrudan kontrol edilemediği sistemlerdir. Bu tür sistemler, mühendislikte özellikle robotik, havacılık, denizcilik ve otomotiv gibi alanlarda sıkça karşılaşılır. Karmaşık dinamik yapıları nedeniyle, bu sistemler kontrolü zor olan sistemler arasında yer alır.

Tez çalışmasında, öncelikle klasik mekaniğin tarihsel gelişimi ve varyasyonel hesaplama yaklaşımı ele alınarak, bu yaklaşımların Euler-Lagrange ve Hamiltonian sistemlere uygulanışı incelenmiştir. Bu bağlamda, varyasyonel hesaplamaların temel ilkeleri, Euler-Lagrange denklemlerinin türetilmesi ve bu denklemlerin mekanik sistemlerin modellenmesinde nasıl kullanıldığı açıklanmıştır. Aynı zamanda, Hamiltonian sistemlerin temel prensipleri ve bu sistemlerin kontrolü için kullanılan enerji tabanlı yöntemler de ele alınmıştır.

Kontrollü Lagrange yöntemi, EL sistemlerin kontrolü için kullanılan bir yöntem olup, sistemin enerji fonksiyonunu şekillendirerek kapalı çevrim sistemin istenen denge noktasındaki kararlılığı sağlamayı hedefler. IDA-PBC yöntemi ise, Hamiltonian sistemlerin kontrolünde kullanılan bir yöntem olup, aynı şekilde sistemin enerji fonksiyonunu şekillendirerek ve sönüm ekleyerek kapalı çevrim sistemin pasifliğini ve dolayısıyla kararlılığını sağlamayı amaçlar. Her iki yöntemde de, kapalı çevrim sistemin kararlılığı sağlanırken, EL ve Hamiltonian sistem olma özelliği korunur.

IDA-PBC ve Kontrollü Lagrangian yöntemleri, eksik sürülmüş lineer olmayan sistemlerin kontrolü için güçlü birer araç olsalar da, kontrol kuralının varlığı ancak eşleşme koşulu adı verilen bir dizi lineer olmayan ve homojen olmayan PDE'lerin çözülmesiyle mümkündür. Bu PDE'lerin her durumda çözümü bulunmamaktadır, bu da bahsedilen yöntemlerin en zorlayıcı noktasıdır. Bu tez çalışmasında ayrılabilir (seperable) Hamiltonian sistemlerde eşleşme koşullarının göreceli olarak daha kolay çözülmesi fikrinden yola çıkarak geliştirilen Gören-Sümer ve Şengör (2015)'de önerilen yöntem geliştirilerek Euler Lagrange sistemlere genişletilmiştir.

Bu tez çalışmasında önerilen yöntem, eşleşme koşullarının yaklaşık çözümleri, kapalı çevrimli sistemin genelleştirilmiş atalet matrisinin bir dizi sabit atalet matrisinin radyal baz fonksiyonları kullanılarak doğrusal olmayan bir kombinasyonu ile yaklaşık olarak ifade edilmesine dayanmaktadır. Eşleşme koşullarının yaklaşık çözümü ile elde edilen kontrol kuralı kullanıldığında dahi, kapalı çevrim sistemin kararlılığının sağlanabildiği gösterilmiştir.

Bu çalışmanın son aşamasında, tezde önerilen yöntemlerin çeşitli mekanik sistemler üzerindeki uygulamaları incelenmiştir. Vinç sistemi, TORA, top ve çubuk, top ve tabla sistemi gibi örnekler kullanılarak, önerilen yöntemin, literatürde bulunan örnekler

üzerinde uygulamasına yer verilmiştir. Bu uygulamalar, önerilen yöntemin yaygın olarak kullanılabilirliğini ortaya koymuştur.

Sonuç olarak, bu doktora tez çalışması, eksik sürülmüş sistemlerin kontrolünde kullanılan enerji tabanlı yöntemler olan IDA-PBC ve Kontrollü Lagrange yöntemlerinin temel zorluğu olan eşleşme koşullarının çözülmesi konusuna bir katkı sunmaktadır. Elde edilen sonuçlar, eşleşme koşullarının çözümlerinin yaklaşık olarak bulunduğu durumda dahi, enerji tabanlı kontrol yöntemlerinin, eksik sürülmüş sistemlerin kararlılığını sağlamada etkili araçlar olduğunu göstermektedir. Bu çalışma, ilgili alanda çalışacak araştırmacılara bu yöntemlerin daha karmaşık sistemler için nasıl geliştirilebileceği ve uygulanabileceği konusunda yol gösterici olacaktır.



CONTROLLED LAGRANGIAN METHODS AND APPLICATIONS

SUMMARY

In control engineering, underactuated systems have gained significant importance due to their prevalence in various practical applications and the unique challenges they present. These systems, characterized by having fewer actuators than degrees of freedom, are commonly encountered in robotics, aerospace, marine, and automotive industries. The complexity of controlling such systems arises from the need to manage unactuated degrees of freedom while achieving precise control over the actuated ones. This complexity is further amplified by the nonlinear dynamics and potential interactions between different parts of the system. As a result, underactuated systems serve as a critical testbed for developing advanced control theories and techniques that can handle real-world constraints and ensure robust, efficient, and safe operation of engineering systems.

Cranes are a classic example of underactuated systems used in various industries for lifting and transporting heavy loads. The pendulum-like oscillations of the crane's load during movement need to be controlled to avoid accidents and ensure precise positioning. Similarly, VTOL aircraft, such as drones, are another example where the control inputs are fewer than the degrees of freedom, resulting in complex flight dynamics that require advanced control strategies to manage vertical takeoff, hovering, and landing. Mobile robots, which are used in numerous applications from manufacturing to space exploration, also often operate as underactuated systems, having to perform tasks like navigation and manipulation with limited actuators. These robots must adapt to changing environments and perform precise movements, making their control particularly challenging. Additionally, systems like robotic manipulators mounted on mobile platforms, two-wheeled balancing robots, and inverted pendulums such as the Furuta pendulum and the inertia wheel pendulum (IWP) are extensively studied as benchmarks for testing new control algorithms.

Several control methods have been developed to address the unique challenges of underactuated systems. Traditional approaches include linear and nonlinear control techniques, which are designed to stabilize and manage the dynamics of these systems. For instance, model predictive control (MPC), sliding mode control (SMC), and feedback linearization have been widely used. Advanced methods such as adaptive control and intelligent control techniques like fuzzy control and neural networks have also been explored to handle the uncertainties and dynamic variations within these systems. Additionally, specific algorithms like differential flatness and backstepping are applied to ensure trajectory tracking and stabilization. Among these, energy-based control methods stand out due to their ability to leverage the system's energy properties to achieve desired control objectives, providing a robust framework for stabilizing and controlling underactuated systems.

Energy-based control methods are particularly effective for underactuated systems as they exploit the natural energy properties of the system to achieve stabilization and

control. These methods include passivity-based control, where the system's passive properties are used to design stable control laws. Two prominent energy-based control techniques are the Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC) and the Controlled Lagrangian method. IDA-PBC method shapes the system's energy to achieve desired dynamic behavior. By modifying the interconnection and damping structures, IDA-PBC ensures that the closed-loop system behaves in a stable and desired manner. This approach leverages the natural passivity properties of the system, making it robust to various uncertainties and disturbances. Controlled Lagrangian method, on the other hand, involves shaping both the kinetic and potential energy functions to stabilize underactuated systems. In the Controlled Lagrangian method, an underactuated Euler-Lagrange system is assumed to possess symmetry, meaning that the system's Lagrangian is invariant under the action of an Abelian Lie group. The goal is to find a closed-loop system, also in Euler-Lagrange form, that stabilizes an equilibrium point while preserving the system's symmetry. This is achieved by selecting a feedback law that transforms the original control system into the proposed closed-loop Euler-Lagrange system. The existence conditions for such a feedback law are known as matching conditions.

One of the primary benefits of the Euler-Lagrange (EL) and Hamiltonian formalisms is their independence from the choice of coordinate systems. Unlike the Newtonian method, which often relies on Cartesian coordinates, the EL formalism utilizes generalized coordinates that can simplify the problem, especially in systems with constraints. Similarly, the Hamiltonian approach offers a coordinate-independent formulation, beneficial in systems with symmetries and conserved quantities. The EL formalism simplifies the derivation of equations of motion through generalized coordinates, incorporating constraints directly via Lagrange multipliers. This results in more manageable equations, particularly in constrained systems. The Hamiltonian approach further simplifies the problem by transforming second-order differential equations into first-order ones, making them easier to solve and analyze. Both formalisms are inherently energy-based. The EL method, through its energy formulation, facilitates the application of energy methods for stability and control, such as Lyapunov functions or energy shaping techniques like Controlled Lagrangian. The Hamiltonian approach explicitly incorporates the system's total energy, making it ideal for energy-based control methods like IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control). The EL formalism systematically handles constraints using generalized coordinates and Lagrange multipliers, providing a clear framework for incorporating both holonomic and non-holonomic constraints. Similarly, the Hamiltonian approach effectively incorporates constraints within the phase space, integrating them into the Hamiltonian function. Both formalisms leverage the connection between symmetries and conservation laws. The EL method links system symmetries with conserved quantities, simplifying analysis and control design. The Hamiltonian formalism naturally respects conservation laws through its structure, aiding in the determination and exploitation of these properties for control purposes.

Energy-based control methods, such as the Controlled Lagrangian and IDA-PBC, offer significant advantages in maintaining the intrinsic structures of Euler-Lagrange (EL) and Hamiltonian systems. These methods preserve the fundamental energy properties and dynamics of the system, which is crucial for ensuring stability and robust performance. The Controlled Lagrangian method shapes both the kinetic and potential energy functions to stabilize underactuated systems while preserving the system's Lagrangian symmetry. This approach leverages the system's inherent structure,

making it easier to design control laws that achieve the desired equilibrium points without altering the original dynamics of the system. Similarly, by preserving the Hamiltonian structure, IDA-PBC facilitates the design of control laws that exploit the system's natural passivity properties, making the control strategy more robust to uncertainties and disturbances. Overall, these energy-based methods ensure that the essential characteristics of EL and Hamiltonian systems are maintained, providing a systematic and effective framework for controlling complex, underactuated systems.

Specifically, since the late 1990s, studies on the control of underactuated, nonlinear systems have begun to emerge. The first significant contribution in this field came from Jerrold E. Marsden's team at Caltech, renowned for their work in mathematical physics and mechanics, dynamic systems, and control theory. In their seminal work, Bloch et al. (1997) introduced the Controlled Lagrangian method. Marsden and his team, as stated in Marsden (1999), focused on Euler-Lagrange (EL) systems based on variational principles, which can be directly generalized to the concept of general relativity.

Following the revolutionary papers by Bloch et al. (1997, 1998), which demonstrated the feasibility of controlling mechanical systems using their symmetry properties, Hamberg (1999) derived the necessary conditions for matching two Euler-Lagrange systems, known as matching conditions. Bloch et al. (2000) then systematically presented the matching conditions and the Controlled Lagrangian method. This foundational work aimed to stabilize the unactuated variables of the system by exploiting the symmetry property of mechanical systems. Therefore, in the example of the cart-pendulum system given in the study, only the stabilization of the pendulum in the upright position was achieved, while the position of the cart could not be controlled. Immediately following this study, Bloch et al. (2001) introduced the potential energy shaping defined as symmetry-breaking and developed a control rule that stabilizes both the actuated and unactuated variables of the system.

While Jerrold Marsden and his team continued their work on underactuated Euler-Lagrange (EL) systems, Romeo Ortega, known for his work on passivity and energy-based control, together with applied mathematics professor Arjan Van der Schaft, published a significant paper in 1999. The work by Ortega and Van der Schaft (1999) is a precursor to the studies by Ortega and his team on the stability of underactuated Hamiltonian systems. Although this study did not provide a specific solution for underactuated systems, it demonstrated that passivity-based control offers a solution for port-controlled Hamiltonian systems. The 2000 IFAC Congress held in Princeton, New Jersey, was particularly intriguing for participants working on nonlinear systems. At this conference, Ortega and Spong (2000) first introduced the IDA-PBC method for underactuated Hamiltonian systems. Gomez-Estern et al. (2001) defined the class of Hamiltonian systems to which the IDA-PBC method could be applied, and shortly thereafter, Blankenstein et al. (2000) defined the matching conditions used in EL systems for the IDA-PBC method. Ortega et al. (2002-a, 2002-b) further developed the IDA-PBC method for controlling a class of underactuated port-controlled Hamiltonian systems.

IDA-PBC for Hamiltonian systems and Controlled Lagrangian method for Euler-Lagrange (EL) systems were established in the literature by 2002 as valid methods for stabilizing closed-loop systems. As Marsden (1999) points out, Hamiltonian mechanics, which is directly based on the concept of energy and is closer to quantum mechanics, and Lagrangian mechanics were equivalent in many cases. This

equivalence should also apply to the IDA-PBC and Controlled Lagrangian methods. In his PhD thesis, Chang (2002) of the Marsden team showed that the Controlled Lagrangian method can also be applied to Hamiltonian systems. In the same year, Chang et al. (2002) showed the equivalence of the Controlled Lagrangian method with IDA-PBC, emphasizing that the Controlled Lagrangian method is a more general solution than IDA-PBC. Blankenstein (2006), by applying the IDA-PBC method on Euler-Lagrange systems, showed that the matching conditions in the Controlled Lagrangian method are a special case of IDA-PBC and emphasized that IDA-PBC is a more general solution.

While the equivalence discussions between the two methods continued, efforts to solve the matching conditions—a set of nonlinear partial differential equations (PDEs)—also continued. Chang (2006) generalized the λ -method, presented by Auckly and Kapitanski (2003) for solving the matching conditions of a class of EL systems, by including gyroscopic forces. Similarly, Viola et al. (2007) proposed a method for solving the matching conditions for a class of Hamiltonian systems using coordinate transformations. Crasta and Ortega (2015), while introducing a class of Hamiltonian systems for which the kinetic energy matching condition can be solved using gyroscopic forces, highlighted the importance of the solvability of the kinetic and potential energy PDEs for the success of IDA-PBC. Post-2010 studies have largely focused on solving these PDEs. Similarly, Donaire et al. (2016) demonstrated that under certain restrictive conditions, ordinary differential equations (ODEs) could be used instead of PDEs to solve the matching conditions. To address the same problem, Gören Sümer and Yalçın (2011) tackled the discrete-time counterpart of the problem and obtained matching conditions in the discrete-time setting to provide a relatively easy technique for stabilizing the unstable equilibrium points of underactuated Hamiltonian systems. For the same problem, Sarras et al. (2013) proposed an approach using the "immersion and invariance" technique to bypass the solution of PDEs for a class of port-controlled Hamiltonian systems.

In this thesis, a method is proposed for obtaining approximate solutions to the partial differential equations (PDEs) known as matching conditions. The inspiration for the proposed method is the fact that the matching conditions for underactuated Euler-Lagrange (EL) systems with a constant generalized inertia matrix are linear PDEs, meaning their analytical solutions can be easily found. The main idea of the proposed method relies on expressing both the controlled and the targeted closed-loop system's generalized inertia matrices approximately as a nonlinear combination of a set of constant inertia matrices using radial basis functions. Consequently, the system can be approximately modeled in terms of a set of linear EL systems, and a common potential energy function that provides the solution to the matching conditions, now a series of linear PDEs, can be parametrically constructed for all these systems. As a result, a potential energy function $V_c(q)$ that approximately satisfies the potential energy matching condition and the generalized inertia matrix $\hat{M}_c(q)$ of the closed-loop EL system can be obtained by selecting the parameters of a set of constant matrices and radial basis functions.

In conclusion, this thesis demonstrates that the stability of energy-based underactuated nonlinear systems can be ensured by using an approximate solution to the matching conditions, which is the challenging aspect of the IDA-PBC and Controlled Lagrangian methods. The method proposed has been applied to various systems in the literature, showcasing its versatility and effectiveness. Further research could focus on refining these approximate solutions and extending them to more complex and varied

underactuated systems, potentially improving the robustness and performance of control strategies in practical applications.

This PhD research consists of six chapters including the Introduction. In the second part of the dissertation, variational methods for EL equations and Hamiltonian systems will be explained and then both IDA-PBC and controlled Lagrangian methods will be introduced in detail.

In the third part of the thesis, a method that ensures the stability of a class of underactuated Euler Lagrangian systems and allows to obtain an approximate solution of the matching conditions will be introduced. An analysis will be made explaining how the control rule obtained using the approximate solution of the matching conditions guarantees the stability of the system.

In the fourth part of the thesis, a control method using approximate solutions of the matching conditions in IDA-PBC which is developed for port-controlled Hamiltonian systems similar to EL systems will be presented.

The fifth chapter of the thesis includes applications of a set of underactuated EL systems existing in the literature which are controlled with the method proposed in the thesis.

The sixth and final chapter presents the conclusions of this thesis and the recommendations related to the study. It also discusses the conclusions and comparisons made in the thesis and provides information about future studies.

1. GİRİŞ

Modern kontrol teorisi, mühendislik ve uygulamalı matematiğin pek çok alanında önemli bir rol oynamaktadır. Karmaşık dinamik sistemlerin analizi ve kontrolü için enerji tabanlı yöntemler büyük bir öneme sahiptir. Bu bağlamda, Euler-Lagrange ve Hamiltonian formalizmleri, dinamik sistemlerin modellenmesinde ve kontrolünde yaygın olarak kullanılan güçlü araçlar sunar. Bu iki formalizm, mekanik sistemlerin yanı sıra elektrik devreleri, robotik sistemler ve biyolojik sistemler gibi geniş bir yelpazedeki uygulamalarda da temel teşkil etmektedir.

Mühendislik sistemlerinin analizinde, genellikle sistemlerin serbestlik derecesine eşit sayıda eyleyiciye sahip olduğu varsayımı yapılır. Ancak mühendislik sistemlerinin birçoğu, doğada hiçbir zorluk yaşamadan kanatları ile uçabilen kuşlar, yüzgeçleri ve kuyruklarını kullanarak ustalıkla okyanusları aşabilen balıklar ya da 1980'ler ve öncesinde doğmuş olanların bileceği gibi elindeki sopayı dik tutmaya çalışan çocukların oyunları gibi eksik sürülmüştür. Eksik sürülme (underactuated) terimi mühendislik sistemlerinde, sistemin sahip olduğu eyleyici sayısının, sistemin serbestlik derecesinden az olduğunu anlatmak için kullanılır. Eksik sürülmüş mühendislik sistemleri, gemiler, su altı araçları, helikopterler, uçaklar, hava gemileri, hovercraftlar, uydular ve yürüyen robotlar gibi örneklerle karşımıza çıkar. Ayrıca, vinçler ve uzay araçları gibi daha az eyleyici kullanımıyla fayda sağlanan sistemlerde veya eyleyici arızası durumunda müdahale edilmesi güç olan su altı araçları ve uydu tamir robotları gibi sistemlerde de bu durumu gözlemleriz. Bu sebeplerden dolayı, eksik sürülmüş sistemlerin kontrolü, son birkaç on yıldır kontrol mühendisliği araştırmacıları için cazip bir konu olmuştur.

Özellikle 90'ların ikinci yarısından itibaren, eksik sürülmüş, lineer olmayan sistemlerin kontrolüne ilişkin çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu alandaki ilk önemli katkı, Caltech'in matematiksel fizik ve mekanik, dinamik sistemler ve kontrol teorisi alanlarındaki çalışmalarıyla tanınan saygın matematikçi ve fizikçi Jerrold E. Marsden'in ekibi tarafından gerçekleştirilmiştir. Bloch ve diğ. (1997) tarafından yapılan çalışmada, Kontrollü Lagrange yöntemi (Controlled Lagrangian) tanıtılmıştır.

Marsden ve ekibi, Marsden (1999)'da belirtildiği gibi, 'varyasyonel ilkelere dayanan ve genel görelilik kavramına doğrudan genelleştirilebilen' Lagrange mekaniği yani Euler Lagrange (EL) sistemleri üzerinde çalışmışlardır.

Mekanik sistemlerin simetri özelliğini kullanarak kontrol edilebileceğini gösteren arka arkaya yayımlanan Bloch ve diğ (1997, 1998) makalelerinin ardından, Hamberg (1999) iki Euler Lagrange sisteminin eşleşmesi için gerekli koşulları yani eşleşme koşullarını (matching conditions) türetmiştir. Bloch ve diğ (2000) ise eşleşme koşullarını ve kontrollü Lagrange yöntemini sistematik bir şekilde sunmuşlardır. Bu öncül çalışma, mekanik sistemlerin simetri özelliğini sağlamasından yararlanarak, sistemin sürülmeleyen değişkenlerini kararlı kılmayı amaçlamıştır. Bu nedenle çalışmada verilen araç-ters sarkaç örneğinde sadece sarkacın dik konumda kararlılığı sağlanırken, aracın konumu kontrol edilememiştir. Bu çalışmanın hemen ardından, Bloch ve diğ. (2001)'de simetri kırııcı olarak tanımladıkları potansiyel enerji biçimlendirmesini sunmuşlar ve sistemin sürülebilir değişkenlerini de kararlı hale getiren bir kontrol kuralı geliştirmişlerdir.

Jerrold Marsden ve ekibi, eksik sürülmüş Euler-Lagrange (EL) sistemler üzerine çalışmalarını sürdürürken, pasiflik ve enerji tabanlı kontrol konularındaki çalışmalarıyla tanınan Romeo Ortega, Hamiltonian sistemler üzerinde çalışan uygulamalı matematik profesörü Arjan Van der Schaft ile birlikte 1999 yılında önemli bir makale yayınladılar. Ortega ve Van der Schaft (1999) çalışması, Ortega ve ekibinin eksik sürülmüş Hamiltonian sistemlerin kararlılığı ile ilgili çalışmalarının öncülü niteliğindedir. Her ne kadar bu çalışma eksik sürülmüş sistemler için özel bir çözüm sunmasa da kapı kontrollü Hamiltonian sistemlerin pasifliğe dayalı kontrolü için bir çözüm sunmaktadır. 2000 yılında Princeton, New Jersey'de düzenlenen IFAC kongresi, özellikle lineer olmayan sistemler üzerinde çalışan katılımcılar için oldukça ilgi çekici olmuştur. Bu konferansta, Ortega ve Spong (2000) IDA-PBC yöntemini eksik sürülmüş Hamiltonian sistemler için ilk kez tanıttılar. Gomez-Estern ve diğ (2001)'de, IDA-PBC yönteminin uygulanabildiği Hamiltonian sistemlerin sınıfını tanımladılar ve hemen ardından Blankenstein ve diğ (2000) ise EL sistemlerde kullanılan eşleşme koşullarını IDA-PBC yöntemi için de tanımlamıştır. Ortega ve diğ (2002-a), Ortega ve diğ (2002-b) makaleleri ile IDA-PBC yöntemini eksik sürülmüş bir sınıf kapı kontrollü Hamiltonian sistemin kontrolü için geliştirmiştir.

2002 yılına gelindiğinde, Euler-Lagrange (EL) sistemler için Kontrollü Lagrange yöntemi ve Hamiltonian sistemler için IDA-PBC yöntemi, kapalı çevrim sistemleri kararlı kılmak için geçerli yöntemler olarak literatürde yerini almıştı. Marsden (1999)'da belirttiği üzere, 'enerji kavramına doğrudan dayanan ve kuantum mekaniğine daha yakın olan' Hamiltonian mekaniği ile Lagrange mekaniği birçok durumda eşdeğerdi. Bu eşdeğerlik, IDA-PBC ve Kontrollü Lagrange yöntemleri için de geçerli olmalıydı. Marsden ekibinden Chang (2002), doktora tezinde Kontrollü Lagrange yönteminin Hamiltonian sistemlerde de uygulanabildiğini göstermiştir. Aynı yıl Chang ve diğ (2002)'de, Kontrollü Lagrange yönteminin IDA-PBC ile eşdeğerliğini göstererek, Kontrollü Lagrange yönteminin IDA-PBC'den daha genel bir çözüm olduğunu vurgulamışlardır. Blankenstein (2006)'da ise, IDA-PBC yöntemini Euler-Lagrange sistemler üzerinde uygulayarak, Kontrollü Lagrange yönteminde bulunan eşleşme koşullarının IDA-PBC'de bulunan J_a matrisinin özel bir durumu olduğunu göstermiş ve IDA-PBC'nin daha genel bir çözüm olduğunu vurgulamıştır.

Eşdeğerlik tartışmaları iki ekip arasında devam ederken, her iki yöntemin de en zorlayıcı bölümü olan eşleşme koşulları adı verilen bir dizi doğrusal ve homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemin (PDE) çözülmesi üzerine yapılan çalışmalar da devam etmiştir. Chang (2005), Auckly ve Kapitanski (2003) tarafından sunulan ve bir sınıf EL sisteminin eşleşme koşullarının çözümüne kolaylık sağlayan λ yöntemine jiroskopik kuvvetleri de ekleyerek daha da genelleştirmiştir. Benzer şekilde, Viola ve diğ (2007)'de, koordinat değişimi yaparak bir sınıf Hamiltonian sistemin kontrolü için eşleşme koşullarının çözümünü sağlayan bir yöntem önermişlerdir. Crasta ve Ortega (2015), jiroskopik kuvvetler kullanarak kinetik enerji eşleşme koşulunun çözülebildiği bir sınıf Hamiltonian sistemi tanıtırken, 'IDA-PBC'nin başarısı büyük ölçüde kinetik enerji ve potansiyel enerji PDE'lerinin çözülebilirliğine bağlıdır' diyerek konunun önemini belirtmişlerdir. 2010 sonrası çalışmalar büyük ölçüde bu PDE'lerin çözümüne odaklanmıştır. Benzer şekilde, Donaire ve arkadaşları (2016), bazı kısıtlayıcı koşullar altında eşleşme koşullarını çözmek için PDE'ler yerine adi diferansiyel denklemler kullanılabileceğini göstermişlerdir. Aynı soruna bir çözüm getirmek için, Gören Sümer ve Yalçın (2011)'de problemin ayrık zamandaki karşılığı ele alınmış ve eksik sürülmüş Hamiltonian sistemlerin kararsız denge noktalarını kararlı kılma probleminin çözümüne nispeten kolay bir teknik sağlamak üzere eşleşme koşullarının ayrık zaman çözümlerini kullanmışlardır. Aynı problem için Sarras ve diğ (2013)'te bir sınıf kapı

kontrol Hamiltonian sistem için “immersion and invariance” tekniği kullanılarak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünün atlandığı bir yaklaşım önerilmiştir.

IDA-PBC ve kontrollü Lagrange yöntemlerinde eşleşme koşullarının tam çözümü için farklı yöntemler geliştirilirken, ayrılabilir (seperable) Hamiltonian sistemlerde eşleşme koşullarının, diğer sistemlere nazaran çok daha kolay çözülebilir olması fikrinden yola çıkarak Gören-Sümer ve Şengör (2015)’de yaklaşık bir model kullanarak eşleşme koşullarının yaklaşık çözümlerini elde edilmesine dayanan bir yöntemi eksik sürülmüş bir sınıf Hamiltonian sistem için önermişlerdir.

Gerek kontrollü Lagrange gerekse IDA-PBC yöntemlerinde yapılan çalışmalar incelendiğinde açık bir şekilde görülmektedir ki bu yöntemlerin zorlayıcı bölümleri eşleşme koşullarının çözümünün bulunmasındadır. Bu tez çalışmasında Gören-Sümer ve Şengör (2015)’de önerilen yöntem geliştirilerek Euler Lagrange sistemlere genişletilmiş ve eşleşme koşullarının yaklaşık çözümü ile elde edilen kontrol kuralı kullanıldığında dahi kapalı çevrim sistemin kararlılığının hem Euler-Lagrange hem de Hamiltonian sistemler için sağlanabildiği gösterilmiştir.

Bu doktora çalışması, Giriş bölümü dahil altı bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmasının ikinci bölümünde varyasyonel yöntemler ile EL denklemleri ve Hamiltonian sistemler açıklanacak daha sonra hem IDA-PBC hem de kontrollü Lagrange yöntemleri açıklanacaktır. Tez çalışmasının üçüncü bölümünde bir sınıf eksik sürülmüş Euler Lagrange sistemin kararlılığını sağlayan ve eşleşme koşullarının yaklaşık bir çözümünü elde etmeyi sağlayan bir yöntem tanıtılacaktır. Eşleşme koşullarının yaklaşık çözümü kullanarak elde edilen kontrol kuralının sistemin kararlılığını nasıl garanti ettiğinin açıklayan bir analizi yapılacaktır. Çalışmanın dördüncü bölümünde ise EL sistemlere benzer şekilde kapı kontrollü Hamiltonian sistemler için geliştirilmiş IDA-PBC yönteminde oluşan eşleşme koşullarının yaklaşık çözümlerini kullanan kontrol yöntemi sunulacaktır. Çalışmanın beşinci bölümü ise bu tez çalışmasında geliştirilen yöntemin literatürde üzerinde çokça ele alınan eksik sürülmüş EL sistemlerin kontrolünde kullanılmasına ilişkin örnekleri içermektedir. Bu örneklerde; vinç sistemi, TORA, top ve çubuk sistemi, top ve tabla sistemleri üzerinde tezde önerilen yöntem uygulanmıştır. Altıncı ve son bölümde çalışmanın sonuçları ve önerilere yer verilmiş, tezde yapılan çıkarımlar ve karşılaştırmalardan bahsedilmiş ve ilerde yapılması önerilen gelecek çalışmalar konusunda bilgi verilmiştir.

2. ÖNBİLGİ

2.1 Klasik Mekanik Tarihsel Gelişimi ve Varyasyonel Hesaplama Yaklaşımı

Newton, hareket yasalarını formüle ederek dinamiğin sağlam temellerini attığından beri, mekanik bilimi iki ana dala ayrılmıştır. Bu dallardan ilki Newton'un hareket yasalarından türetilen vektörel mekanik olarak adlandırılır. Vektörel mekaniğin temel amacı, herhangi bir parçacık üzerindeki tüm kuvvetleri tanımlamak ve parçacığı hareket ettiren bütün kuvvetlerin belirlenmesidir. Dolayısıyla vektörel mekaniğin temel ilgi alanı kuvvet ve momentlerin analizi ve sentezidir.

Newton mekaniğinde bir kuvvetin etkisi, o kuvvet tarafından üretilen momentum ile ölçülürken, Newton'un çağdaşı büyük filozof ve evrenbilimci Leibniz, bir kuvvetin dinamik etkisini ölçmek için başka bir nicelik olan *vis viva*'yı (canlı kuvvet) savunmuştur.

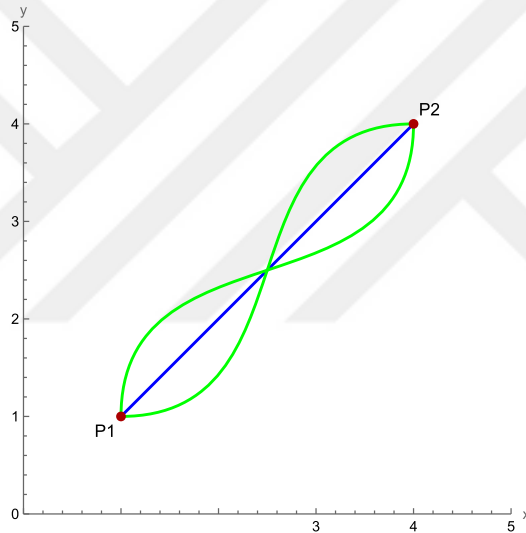
Leibniz'in *vis viva*'sı, bugün 'kinetik enerji' olarak adlandırdığımız kavramla örtüşmektedir. Böylece, Leibniz Newton'un 'momentum' kavramını 'kinetik enerji' ile, 'kuvvet' kavramını ise 'kuvvetin işi' ile değiştirmiştir. Bu 'kuvvetin işi' daha sonra daha temel bir nicelik olan 'iş fonksiyonu' ile anılacaktır. Leibniz, böylece mekaniğin ikinci temel dalı olan 'analitik mekanik'i kurmuştur. Analitik mekanik, denge ve hareketin tüm çalışmasını iki temel skaler nicelik olan 'kinetik enerji' ve 'iş fonksiyonu' üzerine kurmuştur, Buradaki 'iş fonksiyonu' genellikle sistemin potansiyel enerjisi olarak kullanılmaktadır.

Hareket doğası gereği vektörel bir olgu olmasına rağmen, analitik mekanikte hareketi tanımlamak için iki skaler nicelik yeterlidir. Enerji teoremi, hareket esnasında, kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamının değişmeden kaldığını söyler ve hareketi sadece bir denklem ile ifade etmeye odaklanır. Oysa uzaydaki tek bir parçacığın hareketi üç denklem gerektirir. Eğer mekanik sistem iki veya daha fazla parçacıktan oluşuyorsa, bu durumda hareketin tanımlanması için daha karışık denklemlere ihtiyaç duyulur. Ancak analitik mekanikte sunulan bu iki temel skaler, bir denklem olarak değil de, bir

ilkenin temeli olarak kullanıldığında, en karmaşık sistemlerin tüm dinamiklerini bile ifade etme imkanı verir.

Analitik mekanikte bir hareketin nasıl tanımlandığını anlamak için P_1 noktasında bir parçacığı düşünelim ve t_1 anındaki hızını bildiğimizi varsayalım. Ayrıca, belirli bir süre sonra parçacığın P_2 noktasında olacağını da varsayalım. Parçacığın hangi yolu izleyeceğini bilmesek de, parçacığın her olası hız ve konumu için kinetik ve potansiyel enerjileri hesaplanabildiği sürece, bu yolun matematiksel olarak belirlemek de mümkündür.

Euler ve Lagrange, en küçük eylem ilkesini (the exact principle of least action) ilk keşfedenler olarak öncelikle P_1 ve P_2 noktalarını birleştirecek, isteğe bağlı olarak seçilebilen herhangi bir sürekli eğri tanımlarlar.



Şekil 2.1 : P_1 ve P_2 noktalarını birleştiren olası eğriler

Parçacığın P_1 ve P_2 noktaları arasındaki hareketini veren hareket denklemini bulmak için parçacığın yol boyunca enerjinin korunumu prensibine uygun olarak hareket edeceği bilgisi kullanılır. Kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı, t_1 zamanında E değerine eşittir ve yol boyunca sabittir. Bu kısıt, parçacığın herhangi bir t anındaki hızını belirler ve böylece parçacığın hareketi tanımlanır. Böylece enerjinin korunumu ilkesi parçacığın P_2 noktası ile P_1 noktası arasındaki izleyeceği yolunu belirler.

P_1 'den P_2 'ye kadar olan tüm hareket boyunca vis-viva'nın integralini hesaplayarak, parçacığın herhangi bir noktadan ne zaman geçeceğini hesaplayabilmek mümkündür. Bu integral "eylem" (action) olarak adlandırılır. Eylemin değeri P_1 'den P_2 'ye kadar olan olası tüm yollar boyunca belli bir değere sahip olacaktır. Bu eylemin değeri her

farklı yol için değişecektir. Matematiksel olarak tüm olası yollar denendiğinde P_1 ’den P_2 ’ye eylemin değerinin minimum olduğu bir yol bulunabilir. En küçük eylem ilkesi de, bu yolun parçacığın doğada takip edeceği gerçek yol olduğunu ileri sürer. Tek bir parçacık için verilen bu ilke herhangi sayıda parçacık ve karmaşık mekanik sistemler için de genelleştirilebilir.

Belirli bir integralin sonucunu en aza indirme problemleri, “varyasyonel calculus” adı verilen özel bir matematik kullanılarak çözülür. Bu matematik, sonsuz sayıdaki olası yolları dikkate almadan bu problemin çözülmesine imkan tanır. Gerçek yoldan sonsuz küçük bir derecede farklı olan keyfi bir geçici yol, 'gerçek yolun varyasyonu' olarak adlandırılır ve varyasyonlar hesabı, böyle sonsuz küçük yolların varyasyonları hesaba katılarak, integralin değerindeki değişikliklerini inceler.

Mekanğin vektörel ve varyasyonel teorileri, doğa olaylarını açıklamada farklı matematiksel yollar önerirler. Vektörel Newton teorisi her şeyi iki temel kavram üzerine kurar: 'momentum' ve 'kuvvet'. Bu yaklaşımda, hareket ve etkileşimler vektörlerle ifade edilir. Diğer yandan, Euler ve Lagrange tarafından geliştirilen varyasyonel teori, her şeyi iki skaler değer üzerinden inceler: ‘kinetik enerji’ ve ‘iş fonksiyonu’ ya da ‘potansiyel enerji’. Varyasyonel yaklaşım, mekanik sistemlerin enerji prensipleri üzerinden analiz edilebilmesini sağlar.

Newton'un yaklaşımı kuvvetin doğasına bir sınır koymazken, varyasyonel teori, etkileyen kuvvetlerin bir skaler nicelik olan 'iş fonksiyonu'ndan türetilebileceğini varsayar. İş fonksiyonu olmayan sürtünme gibi kuvvetler, varyasyonel prensiplerle ele alınamaz; ancak Newton yaklaşımı bu tür kuvvetleri de kapsayabilir.

Bu sürtünme kuvvetleri genellikle, makroskopik hareket açıklamalarında göz ardı edilen moleküler etkileşimlerden kaynaklanır. Eğer bir mekanik sistemin makroskopik parametreleri mikroskopik parametrelerle tamamlanırsa, iş fonksiyonundan türetilmeyen kuvvetlerin ortaya çıkması daha az olasıdır.

Fizik ve mühendislikteki birçok temel problem vektörel mekanik kullanılarak çözülebilir ve varyasyon yöntemlerinin uygulanmasını gerektirmez. Ancak varyasyonel yöntemlerin problemin doğasına özgün olarak uygun koordinatları seçme konusunda sahip olduğu özgürlük nedeniyle, karmaşık problemlerin çözümünde üstün olduğu açıktır. Vektörel işleme uygun olan problemler esasen, tensör hesabının ileri

prensipieri tarafından yönlendirilmedikçe, eğrisel koordinatlarda vektörlerin ayrıştırılmasının zahmetli bir işlem olduğu bilinir.

Euler, Lagrange tarafından geliştirilen analitik mekanik, yöntem ve bakış açısı açısından vektörel mekaniğe göre önemli ölçüde farklılık gösterir. Newton tarafından ifade edilen mekaniğin temel yasası 'kütle çarpı ivme eşittir harekete neden olan kuvvet' öncelikle yalnızca tek bir parçacık için geçerlidir. Bu yasa, Dünya'daki yer çekimi alanında bir parçacığın hareketinden çıkarılmış ve ardından güneşin etkisi altındaki gezegenlerin hareketine uygulanmıştır. Her iki problemde de hareket eden cisim “noktasal kütle” veya “parçacık” olarak yani kütle atfedilmiş tek bir nokta olarak düşünülebilir. Kütlenin dinamiği de bu bakış açısı ile “üzerine belirli bir kuvvet etkili olan bir parçacık uzayda serbestçe hareket edebilir” şeklinde tanımlanır. Hareketin herhangi bir zamanda tanımlayabilmek için Newton'un yasası hareketin diferansiyel denkleminde ve dinamik problem de bu denklemin çözümüne indirgenir.

Parçacık serbest değilse ancak diğer parçacıklarla ilişkiliyse, örneğin katı bir cisim veya bir sıvıda olduğu gibi, Newton denklemi ancak uygun önlemler alındığında uygulanabilir. Parçacığı diğer tüm parçacıklardan izole etmek ve çevresindeki parçacıklar tarafından üzerine uygulanan kuvveti belirlemek gerekir.

Etkileşim kuvvetlerinin bilinmeyen doğası ek önermeler getirmeyi gerekli kılar ve Newton, üçüncü hareket yasası olarak belirtilen “etki eşittir tepki” ilkesinin tüm dinamik sorunların üstesinden geleceğini düşünmüştür. Elbette işin aslı böyle değildir ve rijit bir cismin dinamiklerinde dahi, cismin iç kuvvetlerinin merkezi kuvvetler türünden olduğunu ileri süren ek hipotezlerin oluşturulması gerekmektedir. Daha karmaşık durumlarda Newton yaklaşımı soruna tek bir yanıt verememektedir.

Hareket probleminin analitik yaklaşımı ise tamamen farklıdır. Parçacık artık izole bir birim değil, bir 'sistemin' parçasıdır. 'Mekanik sistem', birbirleriyle etkileşimde bulunan parçacıkların bir araya gelmesini ifade eder. Tek parçacık önemli değildir; önemli olan sistem bütünüdür. Örneğin, gezegenler problemi söz konusu olduğunda, belirli bir gezegenin hareketiyle ilgilenilebilir. Ancak, problem bu kısıtlı formda çözülemez. O gezegene etki eden kuvvetin kaynağı esas olarak güneşte olsa da, daha küçük ölçüde diğer gezegenlerde de bulunur ve sistemin diğer üyelerinin hareketini bilmeksizin verilemez. Bu yüzden tüm sistemin dinamik problemi, parçalara ayırmadan ele almak mantıklıdır.

Dinamik denklemler vektörel olarak ele alındığında her parçacık için parçacığa etkiyen kuvvetler bağımsız olarak belirlenmelidir. Ancak analitik yöntemde, hareket halindeki parçacıkların konumlarına bağlı tek bir fonksiyonu bilmek yeterlidir; bu 'iş fonksiyonu' sistemin parçacıkları üzerinde etki eden tüm kuvvetleri dolaylı olarak içerir. Parçacığa ya da parçacıklara etki eden kuvvetler bu iş fonksiyonundan türev alarak elde edilebilir.

Karmaşık bir mekanik sistem hareketinin denklemleri, çok sayıda (hatta bazen sonsuz sayıda) diferansiyel denklemler topluluğu oluşturur. Analitik mekaniğin varyasyonel prensipleri, tüm bu denklemlerin kaynağını inceler. Temel bir nicelik olan “eylem” tanımlandığında, bu eylemin sabit olması prensibi, tüm diferansiyel denklem setlerinin elde edilebilmesini sağlar. Ayrıca, analitik yolla elde edilen dinamik denklemler herhangi özel bir koordinat sisteminden bağımsızdır.

Özet olarak vektörel ve analitik mekaniğin farklılık gösterdiği dört ana görüş açısı şunlardır:

1. Vektörel mekanik, parçacığı ayrı ele alır ve onu bireysel olarak inceler. Analitik mekanik ise tüm sistemi bir bütün olarak değerlendirir.
2. Vektörel mekanikte, her hareket eden parçacık için ayrı bir etki kuvveti belirlenir. Analitik mekanikte ise tek bir fonksiyon önemlidir: iş fonksiyonu (veya potansiyel enerji). Bu fonksiyon, kuvvetlerle ilgili tüm gerekli bilgileri içerir.
3. Güçlü kuvvetlerin bir sistemin koordinatları arasında belirli bir ilişkiyi sürdürdüğü durumlarda, vektörel işlem bu ilişkiyi korumak için gerekli kuvvetleri dikkate almalıdır. Analitik yöntem, bu verilen ilişkiyi, onu koruyan kuvvetleri bilmeye gerek kalmadan kabul eder.
4. Analitik yöntemde, hareketin tüm denklem seti, tüm bu denklemleri kapsayan tek bir birleşik prensipten türetilir. Bu prensip, “eylem” olarak adlandırılan belirli bir niceliğin en aza indirilmesi şeklindedir. Bu prensip herhangi özel bir referans sistemine bağlı olmadığından, analitik mekaniğin denklemleri her koordinat seti için geçerlidir. Kullanılan koordinatların her probleme özel olarak ayarlanmasına imkân tanır (Lanchoz, 1986).

2.2 Euler Lagrange Sistemler

Geleneksel Newton mekaniği, kuvvet, momentum ve ivme gibi vektörel büyüklükler üzerinden hareketin anlaşılmasını sağlar ve bu hareketleri ikinci dereceden diferansiyel denklemler ile ifade eder. Alternatif olarak, klasik mekaniğin integral varyasyonel yaklaşımı, bir sistemdeki integral büyüklüğün minimizasyonunu esas alır. Bu yöntem, klasik mekaniğin diferansiyel yaklaşımının geliştirilmesiyle eş zamanlı olarak ortaya çıkmış ve tarihsel olarak Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından tanıtılmıştır.

18. yüzyılda, Leibniz'in öğrencisi Bernoulli, varyasyonel hesap yöntemlerini geliştirerek, iki nokta arasındaki en kısa geçiş süresini sağlayan yörüngenin belirlenmesi yani Brakistokron (Brachistochrone) problemi gibi önemli problemleri çözmüştür. Ayrıca, Fermat'ın ışık yansımalarını açıklayan optik ilkesi de bu integral yaklaşımın bir uygulamasıdır ve Snell yasasını (ışığın bir ortamdan başka bir ortama geçerken kırılma açısının, ortamların kırılma indisleri ile orantılı olduğunu belirten optik bir yasa) türetmek için kullanılmıştır. Bernoulli ayrıca sanal iş ilkesini tanımlayarak ve d'Alembert bu ilkeyi dinamik sistemlere uygulayarak statik ve dinamik sistemlerin anlaşılmasına katkıda bulunmuşlardır. Bernoulli'nin öğrencisi olan Euler ise varyasyonlar hesabını matematiksel olarak daha da geliştirerek, Lagrange'ın, klasik mekaniğe Lagrangian varyasyonel yaklaşımı olarak geçen yöntemin de tamamlamasına zemin hazırlamıştır.

Euler-Lagrangian yaklaşımına göre fiziksel evrende her olgu, uzay ve zaman boyunca, bir fonksiyonu en küçük (minimum) veya en büyük (maksimum) değerlerini belirlemek üzere yani ekstremum prensiplerine dayanan yolları izler. Bu yaklaşımda, Lagrangian fonksiyonu kinetik enerji ile potansiyel enerji arasındaki fark olarak tanımlanır:

$$L = T - U \quad (2.1)$$

Burada T kinetik enerji ve U potansiyel enerjidir. Hamilton'un ilkesine göre, bir sistemin hareketi, Lagrangian'ın zaman integralini minimize eden bir yörünge izler.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.2)$$

Burada S eylem integrali olarak tanımlanır ve varyasyonlar hesabı, bu integrali minimize eden yolu bulmak için matematiksel araçları sağlar. Bu integralin varyasyonel yöntemlerle bulunan çözümü bize Euler-Lagrange denklemlerini verir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (2.3)$$

Burada q genelleştirilmiş koordinatlardır. Lagrangian ve Hamiltonian yaklaşımları, birbiriyle etkileşim halinde olan çok sayıda parçacıktan oluşan çok cisimli sistemlerde (many-body systems) Newton mekaniğinin karşılaştığı, kuvvetler üzerine uygulanan kısıtları, enerji kavramlarının içinde ele alarak aşarlar. Lagrange mekaniği, genelleştirilmiş koordinatlar kullanarak, kısıtlı hareketler için hareket denklemlerinin türetilmesini basitleştirirken, Hamilton İlkesi ve Euler-Lagrange denklemleri, hareketin daha genel yasalarını formüle etmek için kullanılır.

Bu son derece zarif ve deneylerle teyit edilmiş yaklaşım, Newton'un yaklaşımına karşı son derece güçlü alternatif bir yaklaşım olmakla kalmayıp, Hamilton'un varyasyonel ilkesinin Newton'un Hareket Yasalarından bile daha temel olduğu kabul edilmektedir. Aynı zamanda, klasik mekaniğin yanı sıra görelilik teorisi, istatistiksel mekanik ve kuantum fiziğine de uygulanabilir (Cline, 2018).

Bu bölümde tez çalışmasının temellerinin dayandığı Euler-Lagrange sistemlerin elde edilmesi için gerekli temel varyasyonel yöntemlerin kısa bir özeti verilecek, D'Lambert ve Hamilton ilkeleri ve genelleştirilmiş koordinatlar Brizard (2007) temel alınarak açıklanacaktır.

2.2.1 Varyasyonel Kalkülüs

Fizikte kuantum alan ve süper sicim teorilerinden genel göreliliğe, akışkanlar dinamiğinden plazma fiziğine ve yoğun madde teorisine kadar birçok eylemin denklemleri varyasyonel ilkelerden türetilir. Bu bölümün amacı, Euler-Lagrange denklemlerinin de elde edilmesi için kullanılan Varyasyonel Kalkülüs yöntemlerini kısaca özetlemektir.

2.2.1.1 Minimizasyon Problemi

Öklid uzayında iki nokta arasındaki en kısa mesafenin, iki noktayı birleştiren bir doğru parçası ile hesaplanmaktadır. Matematik ve fizikteki belirli integralleri minimize etme problemini incelemeye bu herkesçe bilinen gerçeği kullanarak çözülecektir. Bunun için , $y_0(x) = mx$ doğrusunun (x, y) -düzleminde $(0,0)$ ve $(1, m)$ noktaları arasında en kısa yolu verdiğini aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

İlk olarak, uzunluk integralini ele alalım:

$$\mathcal{L}[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (2.4)$$

Burada $y' = y'(x)$ ve $\mathcal{L}[y]$ gösterimi, (2.4) integralinin değerinin $y(x)$ fonksiyonunun seçimine bağlı olduğunu belirtmek için kullanılmaktadır ($\mathcal{L}[y]$ bu nedenle y 'nin bir fonksiyonu olarak adlandırılır). Ayrıca $y(x)$ fonksiyonunun $y(0) = 0$ ve $y(1) = m$ sınır koşullarını sağlamaktadır. Artık, aşağıda verilen fonksiyonu kullanarak

$$y(x; \epsilon) = y_0(x) + \epsilon \delta y(x), \quad (2.5)$$

$y_0(x) = mx$ ve $\delta y(x)$ varyasyon fonksiyonunun önceden belirlenen $\delta y(0) = 0 = \delta y(1)$ sınır koşullarını sağlaması gerektiğinden, değiştirilmiş uzunluk integralini ϵ 'nin ve δy 'nin bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir:

$$\mathcal{L}[y_0 + \epsilon \delta y] = \int_0^1 \sqrt{1 + (m + \epsilon \delta y')^2} dx \quad (2.6)$$

Artık, $y_0(x) = mx$ fonksiyonunun aşağıdaki türevleri hesaplayarak (2.4) integralini minimize ettiğini gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}[y_0 + \epsilon \delta y] \right)_{\epsilon=0} &= \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \int_0^1 \delta y' dx \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} [\delta y(1) - \delta y(0)] = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ve

$$\left(\frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{L}[y_0 + \epsilon \delta y] \right)_{\epsilon=0} = \int_0^1 \frac{(\delta y')^2}{(1 + m^2)^{3/2}} dx > 0, \quad (2.8)$$

Bu durum, sabit bir m için ve $y(x)$ 'in $\delta y(0) = 0 = \delta y(1)$ koşullarını sağlayan tüm $\delta y(x)$ varyasyonları için geçerlidir. Dolayısıyla, $y(x) = mx$ 'in (1.1) uzunluk integralini minimum yaptığını göstermiş oluruz, çünkü birinci türev (ϵ 'ye göre) $\epsilon = 0$ 'da yok olurken, ikinci türevi de pozitifdir. Bununla birlikte, gerçek minimuma indirgeme fonksiyonu $y_0(x) = mx$ hakkındaki bilgimiz olmasaydı, $y_0(x)$ adında bir deneme fonksiyonu seçmemiz ve integral sınırlarında sıfırlanan tüm varyasyonları $\delta y(x)$ test etmemiz gerekecekti.

Bu minimizasyon probleminin üstesinden gelmenin bir başka yolu da, aslında $y(x)$ 'i çözmeden, tüm $\delta y(x)$ varyasyonları için uzunluk integralini (2.4) minimize eden $y_0(x)$ fonksiyonunu karakterize etmenin bir yolunu bulmaktır. Örneğin, bir $y(x)$ doğrusunun karakteristik özelliği, ikinci türevinin x 'in tüm değerleri için yok olmasıdır. Bu Bölümde tanıtılacak olan Varyasyonlar Hesabı yöntemleri, bir integrali minimize etme problemini $y(x)$ için bir adi diferansiyel denklemin çözümünü bulma problemine dönüştürmek için matematiksel bir prosedür sunmaktadır. Varyasyonlar Hesabı'nın matematiksel temelleri Joseph-Louis Lagrange ve Leonhard Euler tarafından geliştirilmiş ve belirli integralleri minimize (veya maksimize) eden eğrileri bulmak için matematiksel bir yöntem geliştirmişlerdir.

2.2.1.2 Euler'in birinci denklemi

Varyasyonlar Hesabı yöntemleri, aşağıda belirtilen formda bir integrali minimize etme problemini, integrandın türevleri cinsinden ifade edilen $y(x)$ için bir diferansiyel denklemin çözümüne dönüştürür. Burada integrand $F(y, y'; x)$, $y(x)$ ve onun birinci türevi $y'(x)$ ile düzgün bir fonksiyon (smooth function) olarak kabul edilir ve x 'e bağımlı olabilir.

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b F(y, y'; x) dx \quad (2.9)$$

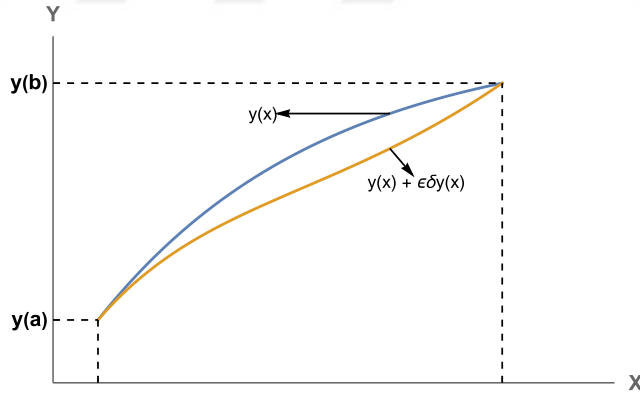
(2.9) integralinin minimize edilmesi problemi, herhangi bir (düzgün) $f(x)$ fonksiyonunun minimum değerinin (yani x_0 değerinin) bulunması problemine benzer şekilde ele alınabilir.

$$f'(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)) \equiv \frac{1}{h} \left(\frac{d}{d\epsilon} f(x_0 + \epsilon h) \right)_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.10)$$

Burada h keyfi bir sabittir. Öncelikle, aşağıdaki gibi birinci dereceden bir $\delta F[y; \delta y]$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}[y; \delta y] &\equiv \left(\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[y + \epsilon \delta y] \right)_{\epsilon=0} \\ &= \left[\frac{d}{d\epsilon} \left(\int_a^b F(y + \epsilon \delta y, y' + \epsilon \delta y', x) dx \right) \right]_{\epsilon=0}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada $\delta y(x)$, $y(x)$ yörüngesinin $\delta y(a) = 0 = \delta y(b)$ koşullarını sağlayan herhangi bir düzgün varyasyondur (smooth variation).



Şekil 2.2 : Sanal yer değiştirme

Düzgün varyasyonu olması sebebi ile yörüngenin başlangıç ve bitiş noktaları sabit kalmalıdır (Şekil 2.2). Fonksiyonel varyasyon (2.11)'de $F(y, y', x)$ 'in y ve y' 'ye göre kısmi türevlerini içeren ϵ -türevlerini gerçekleştirerek şunu bulabiliriz:

$$\delta \mathcal{F}[y; \delta y] = \int_a^b \left[\delta y(x) \frac{\partial F}{\partial y(x)} + \delta y'(x) \frac{\partial F}{\partial y'(x)} \right] dx, \quad (2.12)$$

İkinci terimin parçalarla integrali alındığında

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}[y; \delta y] = & \int_a^b \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx \\ & + \left[\delta y_b \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_b - \delta y_a \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_a \right].\end{aligned}\quad (2.13)$$

Burada, $\delta y(x)$ varyasyonu integral sınırlarında sıfır olacağından ($\delta y_b = 0 = \delta y_a$), δy_b ve δy_a 'yı içeren son terimler açıkça sıfır olacaktır ve böylece şu sonuç elde edilir:

$$\delta\mathcal{F}[y; \delta y] = \int_a^b \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx \equiv \int_a^b \delta y \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta y} dx, \quad (2.14)$$

Burada $\delta F/\delta y$, $F[y]$ 'nin y fonksiyonuna göre fonksiyonel türevi (functional derivative) olarak adlandırılır. Tüm δy varyasyonları için $\delta\mathcal{F}[y; \delta y] = 0$ şeklindeki durağanlık koşulu Euler'in Birinci denklemini verir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \equiv y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.15)$$

$y(x)$ için ikinci dereceden bir adi diferansiyel denklemi temsil etmektedir. Varyasyonlar Hesabına göre, $y(a) = y_a$ ve $y(b) = y_b$ sınır koşullarını sağlayan bu adi diferansiyel denklemin çözümü $y(x)$, denklem (2.9) sonucunu minimize etme probleminin çözümünü verir. Son olarak, Lagrange'ın varyasyon operatörü δ 'nın, türev operatörü d 'ye benzer olmakla birlikte, integral operatörüyle, yani herhangi bir düzgün P fonksiyonu için değişmektedir:

$$\delta \int_a^b P(y(x)) dx = \int_a^b P'(y(x)) \delta y(x) dx, \quad (2.16)$$

2.2.1.3 Integral'in Uç değerleri

Euler'in Birinci Denklemi (2.15), $\delta\mathcal{F}[y; \delta y] = 0$ koşulundan (durağan durum) türetilir, ancak bu, Euler yolu (Euler Path) $y(x)$ 'in, gerçekte integral (2.9)'u minimize ettiği anlamına gelmeyebilir. $y(x)$ yörüngesinin Denklem (2.9)'u minimize edip

etmediğini araştırmak için, ikinci mertebeden fonksiyonel varyasyonu değerlendirmelidir:

$$\delta^2 \mathcal{F}[y; \delta y] \equiv \left(\frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{F}[y + \epsilon \delta y] \right)_{\epsilon=0} \quad (2.17)$$

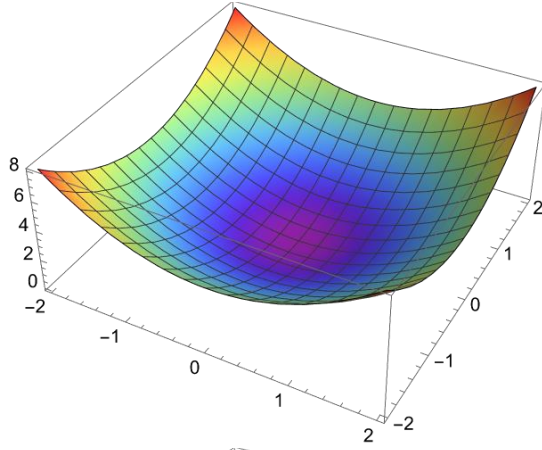
Denklem (2.14)'ün türetilmesindeki benzer adımlar izlenerek, ikinci dereceden varyasyon şu şekilde ifade edilir,

$$\delta^2 \mathcal{F}[y; \delta y] = \int_a^b \left\{ \delta y^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \right] + (\delta y')^2 \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \right\} dx. \quad (2.18)$$

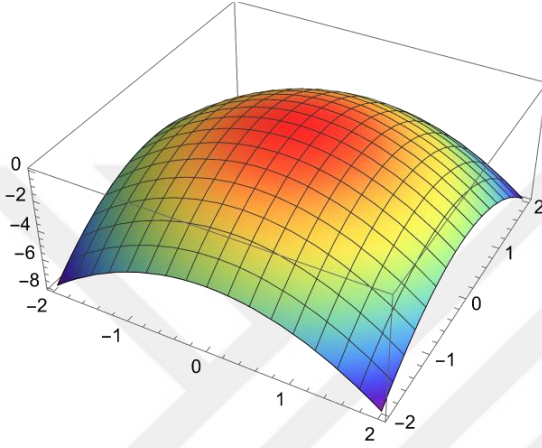
İntegralin minimum olması için $\partial F = 0$ gerek koşul olup, yeter koşul $\delta^2 \mathcal{F} > 0$ 'dır (**Şekil 2.3**) ve dolayısıyla, tüm düzgün $\delta y(x)$ varyasyonları için integralin minimum olması için yeter koşul şu şekilde bulunur

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} > 0 \quad (2.19)$$

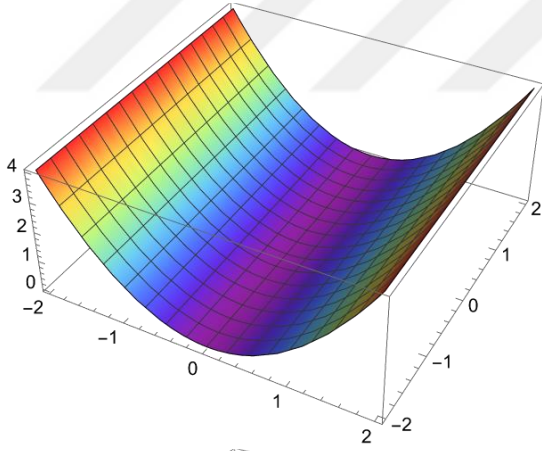
Yeterince küçük bir (a, b) aralığında, $(\delta y')^2$ terimi olağan olarak $(\delta y)^2$ terimine göre daha baskın olacaktır ve yeter koşul $\partial^2 F / (\partial y')^2 > 0$ olur.



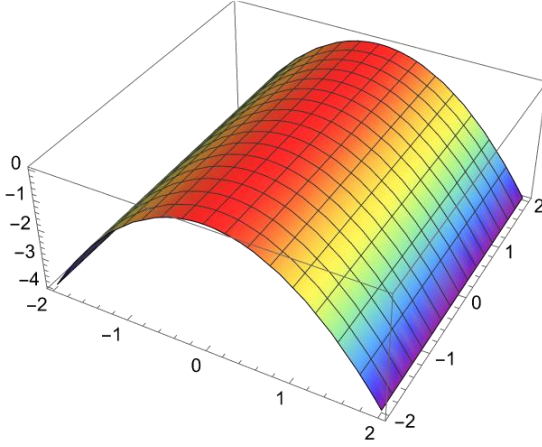
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} > 0$$



$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad -\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} > 0$$



$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} : \text{belirsiz}$$



$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} : \text{belirsiz}$$

Şekil 2.3 : Kuadratik bir fonksiyonun $\partial^2 F / (\partial y')^2$ değerine göre değişimi

Varyasyonel problemler belirli integrallerin minimum veya maksimumlarını bulmayı içermektedir. Varyasyonlar Hesabı yöntemleri, $\mathcal{F}[y]$ integralinin durağan olduğu $\delta\mathcal{F}[y_0] = 0$ çözümleri $y_0(x)$ bulmamızı sağlar. Bu yöntem, ikinci dereceden varyasyonun pozitif belirli (minimuma karşılık gelen), negatif belirli (maksimuma karşılık gelen) veya belirsiz işaretli (yani, $(\delta y)^2$ ve $(\delta y')^2$ terimlerinin katsayılarının zıt işaretli olduğu durum) olup olmadığını belirtmez.

2.2.1.4 Jacobi Denklemi

Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Euler'in Birinci Denklemi'ni çözen iki ekstremal eğri arasındaki sapmayı tanımlayan faydalı bir diferansiyel denklem türetmiştir. Bu denklem, belirli bir $F(x, y, y')$ fonksiyonu için Euler'in Birinci Denklemi (2.15)'in Taylor serisi açılımı yapılarak elde edilir ve sadece uu terimlerinin doğrusal olanları tutulur. Bu yöntemle elde edilen lineer adi diferansiyel denklem, ekstremal eğriler arasındaki sapmayı tanımlar.

Jacobi denklemi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} \frac{du}{dx} \right) = u \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \right]. \quad (2.20)$$

Bu denklem, Euler'in Birinci Denklemi'nin çözümlerinin kararlılığını analiz etmeye yardımcı olur. Örneğin olarak $\alpha, \beta \in R$ olduğu durumda, Jacobi denklemi $\alpha^2 u'' = \beta^2 u$ olarak yazılabilir ki bu durumda bu denklemin çözümü $u(x) = ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}$ olacaktır. Benzer şekilde Jacobi denkleminin $\alpha^2 u'' = -\beta^2 u$ olması durumunda çözüm $u(x) = a \cos(\gamma x) + b \sin(\gamma x)$ olarak bulunacaktır.

2.2.1.5 Euler'in ikinci denklemi

Euler'in İkinci Denklemi, birinci denklemden türetilen ve belirli koşullar altında daha basit çözümler sağlayan bir denklemdir. Özellikle, FF' 'nin xx' 'e bağımlı olmadığı durumlarda kullanılır. Euler'in birinci denklemi (2.9)'daki $F(y, y')$ integrandının x 'ten bağımsız olduğu durumlarda kullanışlıdır ve şu şekilde ifade edilir:

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'}(y, y') = \alpha \quad (2.21)$$

Burada, (2.15)'teki ikinci mertebe türev $y''(x)$ 'i birinci mertebeden türev $y'(x)$ 'e indirgenmiştir ve çözümü kolaylaştırır.

2.2.2 Lagrangian Mekanığı

Bu Bölümde, parçacık dinamiğinin açıklanabilmesi için kullanılacak dört ilkeyi ele alarak nihayetinde Euler-lagrange denklemleri verilecektir.

2.2.2.1 En az eylem ilkesi

En az eylem ilkesi; mekanik sistemler için hareket denkleminin oluşturulmasında “eylem” e varyasyon ilkesinin uygulanması olarak tanımlanabilir. En az” kavramı; bir denklemin çözümünde, iki nokta arasındaki olası yollardan, değişimin en az olduğu yolu bulma amacıyla ortaya konulmuştur

En az eylem ilkesi; matematik ve modern fizik alanında önemli bir yere sahipken görelilik teorisi, kuantum mekaniği ile kuantum alan teorisi gibi genel alanlarda da yer verilmiştir.

Maupertuis prensibi ve Hamilton prensibi de daha genel olan en az eylem ilkesinin birer alt örnekleridir. Pierre Louis Maupertuis doğayı gözlemlediğinde, bitkilerin büyürken ve hayvanların hareket ederken en az eyleme ihtiyaç duyduğunu fark ederek en az eylem ilkesini ortaya koymuştur. Maupertuis'in ilkesine göre, bir parçacık en küçük eylem yolunu izler, yani hareketin toplam eylemi minimum olur.

Euler ise 1744'te, Maupertuis'in En Az Eylem İlkesi'ni ispatlayarak bu ilkenin bir parçacığın düzlemdeki hareketini tanımlamak için nasıl kullanılabileceğini göstermiştir. Euler, bu ilkenin ispatı için Frenet-Serret eğrilik formülünü kullanarak bir parçacığın yörüngesinde meydana gelen değişiklikleri açıklamıştır. Böylece, Euler, parçacık hareketinin daha geniş bir anlamda anlaşılmasını sağlamıştır ve eylem ilkesinin fizik ve mekanik yasalarla nasıl ilişkili olduğunu göstermiştir.

Hamilton'un 1834 ve 1835 yıllarında yayınladığı çalışmalarında “en az eylem” ilkesini bilimsel bir zemine oturtmuştur. Hamilton ilkesi şu şekilde tanımlanabilir "Belirli bir zaman aralığında belirli iki nokta arasında hareket eden bir dinamik sistem bu iki nokta arasında kinetik ve potansiyel enerji farkının zaman integralinin minimum olacağı yolu izler”

Jacobi 19.yy ortalarında, Fermat'nın “En Küçük Zaman İlkesi” ile Maupertuis'in “En Az Eylem İlkesi” arasındaki bağlantıyı vurgulamıştır. Jacobi'nin $\delta S = 0$ olan En Az Eylem İlkesi'nde, eylem integrali bir parçacığın hareketi boyunca enerji ve momentum gibi fiziksel niceliklerle ilişkilendirmiştir.

2.2.2.2 Sanal iş ilkesi

Bu bölümde hareket denklemlerini genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak türetildiği Hamilton İlkesi olarak bilinen nihai varyasyonel ilkeye götüren sanal iş ilkesi ve D’Alambert ilkesine değineceğiz.

Newton mekaniğinde kuvvet, iş yapabilme yeteneğine sahip olup olmamasına göre iki gruba ayrılır. İlk grup olan sonsuz küçük iş yapma kabiliyetine sahip olan ve dx sonsuz küçük yer değiştirme boyunca $dW = F_w dx$ ile hesaplanan aktif F_w kuvveti girer. Aktif kuvvetler sınıfını, konservatif (örneğin yerçekimi) ve konservatif olmayan (örneğin sürtünme) kuvvetler oluşturur. İkinci sınıf olan iş yapamayan kuvvetleri, normal ve gerilim kuvvetleri gibi kısıtları içeren pasif kuvvetler (F_0 olarak belirtilir) oluşturur. Bu kuvvetler sistem üzerindeki kısıtlamalardan kaynaklanır ve "kısıt kuvvetleri" olarak adlandırılır. Pasif bir kuvvet tarafından gerçekleştirilen sonsuz küçük iş 0'dır. Örneğin, bir kütlenin düz bir yüzey üzerinde kayması durumunda normal kuvvet, kütlenin yüzeye dik olan bileşenine karşılık gelir ve bu kuvvet iş yapmaz çünkü kütlenin yüzeye dik doğrultuda herhangi bir yer değiştirmesi yoktur. Benzer şekilde, bir ipin gerilmesiyle oluşan gerginlik kuvveti de ip boyunca hareket olmadığı sürece iş yapmaz. Bu durumda, dx yer değiştirmesi pasif kuvvetin yönüne dik olduğundan, skaler çarpım sıfır olur, yani $F_0 dx = 0$ olacaktır.

Sanal iş ilkesi, kökeni Aristo'nun kaldıraçların dengesi üzerine yaptığı çalışmaya kadar uzanan, fizikteki en eski ilkelerden biridir. 1717 yılında Jean Bernoulli tarafından bugünkü nihai tanımı yapılmıştır. N parçacıktan oluşan bir sistemin, fiziksel kısıtlamaları karşılayan tüm sanal yer değiştirmeler ($\delta \mathbf{x}^1, \dots, \delta \mathbf{x}^N$) için sanal iş

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}^i = 0 \quad (2.22)$$

olması durumunda sistemin dengede olduğunu belirtir.

Jean Le Rond d'Alembert 1742 yılında sanal iş ilkesi (2.22)'a sistemi ivmelendiren kuvvetleri $(-m_i \ddot{\mathbf{x}}^i)$ de dahil ederek genelleştirmiştir:

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 \mathbf{x}^i}{dt^2} \right) \cdot \delta \mathbf{x}^i = 0 \quad (2.23)$$

D'Alembert ilkesi (2.23) ile birlikte bir sisteme etki eden tüm etkin kuvvetler tarafından yapılan işin, tüm ivmelendirme kuvvetleri tarafından yapılan işe cebirsel olarak eşit olduğu görülmektedir.

Bununla birlikte, d'Alembert ilkesinin en önemli uygulaması, onu aşağıdaki gibi formüle eden Lagrange'dan gelmiştir. Örneğin aşağıdaki sonsuz küçük-iş denklemini ele alalım

$$0 = \left(\mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) \cdot \delta \mathbf{x} = \delta W - \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \delta \mathbf{x} \right) + m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} \quad (2.24)$$

Burada $\mathbf{F}$, m kütleli bir parçacığa uygulanan aktif bir kuvveti göstermek üzere sanal yer değiştirme $\delta \mathbf{x}$ boyunca hesaplanan sanal iş $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x}$ olacaktır.

Burada $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_k)$ bir konum vektörüdür ve $q_1, \dots, q_k$ genelleştirilmiş koordinatları temsil eder. Bu koordinatlar, sistemin yapısal özelliklerine bağlı olarak tanımlanır ve sistemin bağımsız hareket derecelerini ifade eder. Bu konum vektörü ayrıca zaman zamana bağlıdır, bu da (2.24)'nin dinamik (zamana bağlı) bir sistem olduğunu gösterir. Böylece şu sonuçları elde ederiz:

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (2.25)$$

ve

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (2.26)$$

Ardından, kinetik enerji $K = mv^2/2$ olarak tanımlansın:

$$\delta K = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \sum_i \delta q_i \frac{\partial K}{\partial q_i}$$

Lagrange tarafından tanıtılan sanal varyasyon operatörü δ , bir mekanik sistemdeki değişimleri veya varyasyonları temsil eder. Sanal varyasyon operatörünün zaman türevi operatörü d/dt ile yer değiştirebilirdir (commutes). Bu, sanal değişimlerin zamanla ilgili herhangi bir bağımsızlığını ve mekanik sistem analizindeki esnek kullanımını gösterir. Yani, sanal varyasyonu önce uygulayıp sonra zaman türevini almak ya da önce zaman türevini alıp sonra sanal varyasyonu uygulamak aynı sonucu verecektir. Bu durumda Genelleştirilmiş kuvvet Q^i , $\delta W = \sum Q^i \delta q_i$ olacak şekilde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$Q^i \equiv \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (2.27)$$

Ayrıca aşağıdaki özdeşliği de kullanalım,

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) - m \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) \quad (2.28)$$

Burada, genelleştirilmiş kuvvet terimi olan eşitliğin solundaki ifade, genelleştirilmiş koordinat q_i yönündeki net kuvveti ifade eder. Bu ifade, momentumun zaman türevi ve hızın q_i 'ye göre türevinin çarpımı olarak çarpım kuralı kullanılarak yazılabilir.

Ek olarak,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial q_i} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_j \partial q_i} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \quad (2.29)$$

tanımlanabilir. Burada, konum vektörünün q_i 'ye göre kısmi türevinin zaman türevi, $\mathbf{x}$ 'in zamana ve q_i 'ye göre ikinci dereceden kısmi türevleri ve $\dot{q}_j$ (genelleştirilmiş hızlar) üzerinden hesaplanan terimleri içerir. Bu ifade, hız vektörünün q_i 'ye göre türevine eşittir ve hareketin nasıl genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak değiştiğini gösterir.

Son olarak,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (2.30)$$

ilişkisi, hız vektörünün $\dot{q}_i$ (genelleştirilmiş hızlar) üzerinden nasıl değiştiğini ifade eder ve bu türev, konum vektörünün q_i 'ye göre türevine eşittir. Bu, genelleştirilmiş hızların, konum vektöründeki değişimleri nasıl etkilediğini gösterir.

Bu denklemler, Lagrange mekaniğinde hareket denklemlerinin türetilmesi ve analizi için temel araçlardır. Sistemlerin hareketini anlamak ve analiz etmek için genelleştirilmiş koordinatlar ve bunların türevleri arasındaki ilişkileri kullanır.

D'Alembert Prensibi (2.24) verilen dönüşümler uygulandığında genelleştirilmiş koordinatlar $(q_1, \dots, q_k)$ cinsinden şu şekilde ifade edilir

$$0 = \sum_i \delta q_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} - Q^i \right]. \quad (2.31)$$

Bu bağıntı herhangi bir δq_i ($i = 1, \dots, k$) varyasyonu için geçerli olması gerektiğinden, Lagrange denklemini şu şekilde düzenleyebiliriz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q^i \quad (2.32)$$

Burada, genelleştirilmiş Q^i kuvvetinin herhangi bir aktif $\mathbf{F}$ kuvveti ile ilişkilidir. Dolayısıyla, tek bir potansiyel enerji U 'dan türetilen konservatif bir aktif kuvvet için (yani, $\mathbf{F} = -\nabla U$), genelleştirilmiş kuvvetin i^{th} bileşeni $Q^i = -\partial U / \partial q_i$ 'dir ve Lagrange denklemi (2.32) aşağıdaki şekilde düzenlenebilir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (2.33)$$

2.2.2.3 Hamilton ilkesi

D'Alembert İlkesi'ne dayanan (2.24), aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\delta K + \delta W = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \delta \mathbf{x} \right) \quad (2.34)$$

Tek bir potansiyel enerji U 'dan (yani, $\mathbf{F} = -\nabla U$) türetilen konservatif bir aktif kuvvet için, sanal iş $\delta W = -\delta U$ 'dur, böylece (2.34)'nin zamana göre integrali **Hamilton İlkesi** olarak bilinen önemli bir ilkeyi verir:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (2.35)$$

Burada δx , $t = t_1$ ve $t = t_2$ için sıfırdır ve potansiyel enerji U 'nun kinetik enerji K 'dan çıkarılmasıyla elde edilen $L = K - U$ denklemi sistemin Lagrangian fonksiyonu olarak adlandırılır.

Fermat'ın optik alanında ortaya koyduğu "En Kısa Süre" ilkesi ve Maupertuis'in mekanik alanında ortaya koyduğu "En Az Eylem" ilkesi Hamilton ilkesi çatısı altında birleşirler; böylece optik ve mekanik yasalarının birbirine eş oldukları, optik ve mekanik alanlarının kökenlerinin aynı oluşu söylenebilir. Newton hareket yasalarında gökyüzündeki ve yeryüzündeki olguları birlikte açıklayabilmiştir; Hamilton ilkesinde de optik ve mekanik olguları benzer şekilde birlikte açıklayabilmektedir ve bu nedenle Newton'dan sonra fizikteki ikinci büyük başarı olarak nitelendirilmektedir (Özmutlu, 2007).

Eylem integralinin en küçük olması matematiksel koşulundan; klasik fiziğin temel yasası olan Newton'un ikinci yasası, Euler hareket denklemleri ve onların özel hali olarak Lagrange hareket denklemleri oluşturulabilir (Goldstein ve diğ, 2001).

Newton'un ikinci yasasının gözlem ve deney sonuçlarından yola çıkılarak ortaya konulan deneysel bir yasa olduğu göz önünde bulundurulursa; Newton'un ikinci yasasının Hamilton ilkesinden kuramsal olarak türetilmesi "En Az Eylem" ilkesinin ne denli geniş kapsamlı ve temel bir yasa olduğunun açık bir göstergesidir. Bütün bunların yanı sıra; Hamilton ilkesi, doğru belirlemiş Lagrangian fonksiyonları birlikte kullanıldığında, kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemi

oluşturulabilir. Bu bakış açısıyla, Hamilton ilkesinden yola çıkılarak; tüm klasik optik, elektromanyetizma, mekanik, kuantum mekaniği, özel ve genel görelilik, kuantumlu alanlar kuramı türetilir (Özmutlu, 2007).

2.2.2.4 Kısıtlar (Constraints)

Kısıtlar, holonomik ve holonomik olmayan kısıtlar olarak ikiye ayrılmaktadır. Holonomik kısıtlar, sistem üzerindeki kısıtlamaları tanımlayan ve genellikle denklemlerle ifade edilen entegre edilebilir kısıtlardır. Bu tür kısıtlar, sistemin konfigürasyon uzayındaki hareketini daha az bağımsız koordinatla tanımlamak için kullanılabilir. Örneğin, $dq(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ diferansiyel (kinematik) kısıt denkleminin, $\mathbf{B}$ vektörü üzerinde integrali alınabilirlik koşulunu (integrability condition) sağlıyorsa holonomik bir kısıttır:

$$0 = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.36)$$

Böylece $q(\mathbf{r})$ fonksiyonu inşa edilerek, bağımsız koordinat sayısı azaltılabilir. Örneğin aşağıdaki kısıt denklemini ele alacak olursak:

$$dz = B_x(x, y)dx + B_y(x, y)dy, \quad (2.37)$$

Burada x ve y koordinatlarındaki sonsuz küçük bir değişim z koordinatında sonsuz küçük bir değişim üretir. B_x ve B_y bileşenleri $\partial B_x / \partial y = \partial B_y / \partial x$ integrali alınabilirlik koşulunu sağlıyorsa, bu diferansiyel kısıt denkleminin integrali alınabilir. Böylece $B_x = \partial f / \partial x$ ve $B_y = \partial f / \partial y$ olacak şekilde bir $f(x, y)$ fonksiyonunun var olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, bu integral alınabilirlik koşulu altında, diferansiyel kısıt denkleminin $dz = df(x, y)$ olur, bu da $z = f(x, y)$ olmak üzere integral alınabilecek ve böylece de bağımsız koordinat sayısı 3'ten 2'ye indirgenmiş olabilecektir.

Holonomik olmayan kısıtlamalar, sistemin hareketlerini kısıtlayan, ancak genellikle zamana bağlı veya entegre edilemeyen kısıtlamalardır. Bu kısıtlamalar, diferansiyel formda ifade edilir ve genellikle sistemin belirli yollar boyunca hareketini sınırlar. $\mathbf{B}$ vektör alanı (2.36) integrali alınabilirlik koşulunu sağlamıyorsa, $dq(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ koşulu holonomik olmayan kısıt olarak adlandırılır. Holonomik olmayan kısıtlara verilebilecek örneklerden biri, katı bir cismin bir yüzey üzerinde dönmesidir. Aynı

zamanda, bir kinematik kısıtın zamana bağılı olması halinde rheonomic, aksi takdirde skleronomik olarak adlandırılır.

Holonomik kısıtlar, sistem üzerindeki bağımsız koordinat sayısını azaltarak sistem analizini kolaylaştırırken, holonomik olmayan kısıtlamalar genellikle sistemin izin verilen hareket yollarını daha karmaşık hale getirir ve genellikle çözümü daha zordur. Holonomik olmayan kısıtlamaların ele alınması Lagrange denklemi (2.32)'nin sağ tarafına kısıt kuvvetlerinin eklenmesini gerektirir, bu durum tez çalışmasının kapsamı dışındadır.

2.2.2.5 Euler Lagrange Denklemleri

Hamilton İlkesi, bir sistemin dinamiklerini en küçük eylem ilkesi yoluyla ifade eder. Bu ilke, Lagrangian fonksiyonu $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ile ifade edilir ve eylem integrali $\mathcal{S}[\mathbf{q}]$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}] = \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \quad (2.38)$$

Burada eylem integrali $\mathbf{q}(t)$ genelleştirilmiş koordinatlarının bir fonksiyonudur ve $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(t_i)$ başlangıç noktasından $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ son noktasına bir yörünge çizer.

Eylem integralinin son durumu (yani varyasyonun sıfır olması), Euler-Lagrange denklemlerini verir:

$$0 = \delta \mathcal{S}[\mathbf{q}; \delta \mathbf{q}] = \left(\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{S}[\mathbf{q} + \epsilon \delta \mathbf{q}] \right)_{\epsilon=0} = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{q} \cdot \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] dt \quad (2.39)$$

burada $\delta \mathbf{q}$ değişiminin integral sınırlarında sıfır olduğu varsayıldığında ($\delta \mathbf{q}_i = 0 = \delta \mathbf{q}_f$), genelleştirilmiş ($\delta \mathbf{q}_i = 0 = \delta \mathbf{q}_f$) koordinatı için Euler-Lagrange denklemi elde edilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^j} \quad (2.40)$$

Lagrangian ayrıca ikinci bir Euler denklemini de sağlar:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.41)$$

ve böylece, zamandan bağımsız Lagrangian sistemler için ($\partial L / \partial t = 0$), enerjinin korunumu ile ilgili olan ($L - \dot{\mathbf{q}} \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$) korunur.

d'Alembert İlkesi, Newton mekaniğini genelleştirilmiş koordinatlar çerçevesinde ifade etmek için kullanılır. Bu ilke, bir sistemin dinamik denklemlerini, sistem üzerindeki kısıtlamaları da göz önünde bulunduracak şekilde yeniden formüle etmeye yarar.

Bir parçacığın kütlesi m ve ivmesi $\ddot{\mathbf{r}}$ olmak üzere, Newton'un İkinci Yasası $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$, ile tanımlanır. Burada $U(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}$ konumundaki ve t zamanındaki potansiyel enerjinin gradyanını (değişim oranını) temsil eder. Bu gradyan, kuvvetin negatiftir ve parçacığın hareket yönünü belirler. Bu parçacığın Lagrangian'ı:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}, t) \quad (2.42)$$

Olacaktır. Bu basitçe parçacığın kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin farkıdır ve (2.40)'de yerine yazıldığında bize Newton'un ikinci yasasını verir. Eşitlik (2.42)'deki eksi işareti önemlidir; bu form bize sadece doğru hareket denklemlerini vermekle kalmaz, aynı zamanda enerji korunumunu da sağlar. Jacobi'nin eylem integralinin $E = K + U$ Enerji korunumu yasası kullanılarak $A = \int [(K - U) + E] dt$ şeklinde de yazılabilir. Enerjinin korunumu Maupertuis-Jacobi ve Euler-Lagrange'ın En Küçük Eylem İlkelere arasındaki önemli bir bağlantıdır.

Basit mekanik bir sistem için Lagrangian fonksiyonu, sistemin kinetik enerjisi ve potansiyel enerjisi hesaplanarak elde edilir ve ardından Eşitlik (2.42) inşa edilir.

N parçacıklı bir sistem için Lagrangian fonksiyonunun oluşturulması 4 adımda tamamlanabilir:

Adım 1. t anında N parçacıktan oluşan mekanik sistemin anlık konfigürasyonunu temsil eden k adet genelleştirilmiş koordinat $\{q^1(t), \dots, q^k(t)\}$ olarak tanımlanır.

Adım 2. Her bir parçacık için Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{r}_a(\mathbf{q})$ konum vektörünü ve bununla ilişkili hız oluşturulur ($a = 1, \dots, N$)

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \dot{q}^j \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^j}$$

Adım 3. Kinetik enerjiyi

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_a \frac{m_a}{2} |\mathbf{v}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|^2$$

ve potansiyel enerjiyi

$$U(\mathbf{q}) = \sum_a U(\mathbf{r}_a(\mathbf{q}), t)$$

Oluşturalım ve bunları kullanarak Lagrangian'ı oluşturulsun:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}).$$

Adım 4. Lagrangian $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 'den, her bir genelleştirilmiş koordinat q^j için Burada $\partial \mathbf{v}_a / \partial \dot{q}^j = \partial \mathbf{r}_a / \partial q^j$ özdeşliği kullanarak Euler-Lagrange denklemleri (2.40) türetilir:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \dot{q}^j} \cdot m_a \mathbf{v}_a \right) = \sum_a \left(m_a \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^j} \cdot \nabla_a U \right),$$

Zamana bağlı k adet kısıtın varlığında $\Phi^j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 0 (j = 1, \dots, k)$ n noktasal parçacık arasında, ℓ^{th} parçacığın i^{th} koordinatı x_ℓ^i için Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\ell^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\ell^i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x_\ell^i},$$

şeklinde ifade edilir, burada $\lambda_j(t) (j = 1, \dots, k)$ kısıtları uygulamak için gereken Lagrange çarpanlarını gösterir.

2.3 Hamiltonian Sistemler

Önceki bölümde, karmaşık mekanik sistemler için hareket denklemlerini türetmek amacıyla Newton yöntemine güçlü bir alternatif olarak Lagrange yöntemini açıklandı. Şimdiki bölümde ise, Lagrange yöntemine tamamlayıcı bir yaklaşım olan Hamilton yöntemi sunulacaktır. Hamilton yöntemi klasik mekanikte kanonik ve kanonik olmayan Hamilton formülasyonları ile kuantum mekaniğindeki Hamilton

formülasyonu bu tez çalışması kapsamında yer almamaktadır. Ancak, burada "Enerji yöntemi" olarak bilinen bir versiyonu sunulacaktır.

Konfigürasyon uzayı $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^k)$ üzerinde k adet ikinci dereceden Euler-Lagrange denklemi (2.40), $\mathbf{z} = (q^1, \dots, q^k; p_1, \dots, p_k)$ koordinatlarına sahip $2k$ boyutlu bir faz uzayı üzerinde Hamilton denklemleri (William Rowan Hamilton, 1805-1865) olarak bilinen $2k$ adet birinci dereceden diferansiyel denklem olarak yazılabilir, burada

$$p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.43)$$

kanonik momentumun j^{th} bileşenini tanımlar. Bu yeni dönüşüm ile, Euler-Lagrange denklemleri (2.40) Hamilton'un kanonik denklemlerine dönüştürülmüş olur:

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \quad (2.44)$$

Burada Hamilton fonksiyonu $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, Lagrangian fonksiyonu $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 'den Legendre dönüşümü ile elde edilir (Adrien-Marie Legendre, 1752-1833):

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t]. \quad (2.45)$$

Hamilton denklemleri (2.44) aynı zamanda varyasyonel prensipler kullanılarak da türetilirler.

Hamilton denklemlerini türetmek için ilk olarak, Lagrange fonksiyonu L faz uzayındaki ifadesini elde etmek amacıyla Legendre dönüşümünün tersi kullanılır:

$$L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{z}) \quad (2.46)$$

Burada $\mathbf{p}$ genelleştirilmiş momentumları, $\dot{\mathbf{q}}$ genelleştirilmiş hızları ve H ise Hamiltonian fonksiyonunu temsil eder. Bu ifade, Lagrangian'ı genelleştirilmiş momentum ve hız cinsinden gösterir ve enerjinin sistemde nasıl dağıldığını açıklar

Daha sonra, eylem integralinin birinci varyasyonunu inceleyelim:

$$\delta \int L(\mathbf{q}, \mathbf{p}) dt = \int \left[\delta \mathbf{p} \cdot \left(\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \left(\mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{q} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dt, \quad (2.47)$$

Burada δq^i ve δp_i varyasyonları varyasyonları bağımsız olarak ele alınır ve her ikisinin de sınırlarda sıfıra eşit olduğu varsayılır. Son olarak, $\mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}}$ terimini parçalı integral olarak aşağıdakileri buluruz:

$$\delta \int L(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) dt = \int \left[\delta \mathbf{p} \cdot \left(\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \delta \mathbf{q} \cdot \left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dt \quad (2.48)$$

Böylece En Küçük Eylem İlkesi $\int \delta L dt = 0$ artık Hamilton denklemleri (2.44)'yi verir.

Parçacık dinamiğinin Hamilton formülasyonuna geçmeden önce, Legendre dönüşümü (2.45)'ün hangi koşullar altında mümkün olabileceğini inceleyelim. Legendre dönüşümünün kullanılabilmesi için gerekli koşulun, $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \rightarrow \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ bağıntısının tersinin mümkün olduğu koşulla ilişkili olduğu görülmektedir. Bu incelemeyi genelliği kaybetmeden basitleştirerek incelemek için iki boyuttaki hareketi inceleyelim.

İki serbestlik derecesine sahip bir Lagrangian'ın kinetik enerji teriminin genel ifadesi

$$L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - U(q_1, q_2)$$

Olmak üzere kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{\alpha}{2} \dot{q}_1^2 + \beta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\gamma}{2} \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.49)$$

Burada $\dot{\mathbf{r}}^T = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, $\dot{\mathbf{r}}$ 'nin transpozesidir. $\mathbf{M}$ kütle matrisi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Burada, α , β ve γ katsayıları q_1 ve/veya q_2 'nin fonksiyonu olabilirler. Kanonik momentum vektörü (2.43) böylece şu şekilde tanımlanır

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

veya

$$\begin{cases} p_x = \alpha \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 \\ p_y = \beta \dot{q}_1 + \gamma \dot{q}_2 \end{cases} \quad (2.52)$$

$\mathbf{M}$ matrisi tersinir bir matris olması durumunda Lagrangian'ın düzenli (regular) olduğu söylenir, yani determinanı

$$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0. \quad (2.53)$$

Düzenli bir Lagrangian durumunda, (2.52)'ı kullanarak aşağıdaki denklemi elde edebiliriz:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

veya

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = (\gamma p_x - \beta p_y) / \Delta \\ \dot{q}_2 = (\alpha p_y - \beta p_x) / \Delta \end{cases} \quad (2.55)$$

ve kinetik enerji terimi şu hale gelir,

$$K(q_1, p_x, q_2, p_y) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.56)$$

Son olarak, Legendre dönüşümü altında şunları buluruz.

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}^\top \cdot (\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p}) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p} - U \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p} + U \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dolayısıyla, Legendre dönüşümünün yalnızca kinetik enerjideki (2.49) M kütle matrisinin ters çevrilebilir olması durumunda uygulanabilir olduğunu açıkça görürüz.

2.4 Eksik Sürülmüş Sistemler

Tam sürülmüş mühendislik sistemler, kontrol girişlerinin sayısı, sistemin serbestlik derecesine eşit olan sistemlerdir. Ancak eyleyici arızaları veya yapısal kısıtlamalar gibi bazı nedenlerden dolayı sistemler eksik sürülmüş de olabilmektedir. Bir başka deyişle sistemin serbestlik derecesi kontrol girişlerinden fazla olmaktadır.

Kontrol tasarımı sürecinde, istenen kontrol hedeflerine ulaşmak için genellikle sürülmemiş değişkenler ile sürülmüş değişkenler arasında bağlantılar kurmak gerekmektedir. Bu durum ise eksik sürülmüş sistemlerin kontrol tasarımında karmaşıklığa ve zorluğa neden olmaktadır. Bu tezin amaçlarından birisi de mühendislik uygulamalarında sıkça karşılaşılan eksik sürülmüş sistemlerin kontrol edilme konusunda karşılaşılan zorluklarını ele alarak bir çözüm ortaya koymaktır.

Vinç sistemleri, eksik sürülmüş sistemleri incelemek için kullanılan başlıca örneklerden bir tanesidir. Vinç sistemleri, hem teorik zorlukları hem de pratik önemleri nedeniyle sıklıkla ele alınan eksik sürülmüş uygulamalar arasındadır. Vinç tarafından taşınan yüklerin hassas konumlandırılması gerekir ancak yük hareket esnasında sarkaç benzeri salınım hareketleri de yapar. Bu salınımlar, yükün hasar görmesi, çevre veya personel güvenliğinin tehlikeye girmesi ve yük taşıma kapasitesinin azalması gibi çeşitli etkinlik, verimlilik ve güvenlik sorunlarına neden olmaktadır. Bu konu üzerine yapılan deneyler, doğrusal olmayan kontrolörlerin, doğrusal kontrol yasalarına kıyasla, geçici tepkiler açısından daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Eksik tahrikli durumlara örnek olarak Dikey havalanıp inebilen (VTOL) uçaklar verilebilir. VTOL uçakların kontrol tasarımı son yıllarda büyük ilgi görmektedir. VTOL kontrol problemi, tahrik edilmeyen dinamiklerin doğrusal ve minimum fazlı olmaması ve holonomik olmayan kısıtlar içermesi nedeniyle oldukça karmaşıktır. Dönme momenti ve yanal ivmelenme gibi dinamikleri ayrıştırmaya yönelik lineerleştirme gibi klasik yöntemler; bu tip dinamiklerde kararsız dönme dinamiklerinin gözlemlenememesi gibi nedenlerle genellikle başarısız olurlar. Bu sebeple VTOL sistemlerinde de lineer olmayan kontrolör tasarımları uygulanmaktadır.

Rijit gövde sistemlerinin manevra kontrolü de benzer şekilde geçtiğimiz yıllarda önem kazanan araştırma konularından birisi olmuştur. Rijit uçak ve uzay aracı sistemlerinin manevra kontrolü, bu araştırmalar arasında yer almaktadır. Rijit uçak ve uzay aracı sistemleri genellikle yörünge boyunca dönmeye zorlanır ve bu da kontrol tasarımında doğrusal olmayan uzay aracı modellerinin kullanılmasını gerektirir. Bu modeller, açısal hız vektörünün zaman içindeki değişimini ve yönelim açılarını açısal hız vektörüyle ilişkilendiren Euler-Lagrange dinamik ve kinematik denklemlerini kullanır.

Vinç, VTOL ve rijit uçak-uzay sistemlerine ek olarak robotlar da eksik tahrikli mekanik sistemlerin uygulamaya yönelik örnekleri arasında yer verilebilir. Robotlar; çevresel değişikliklere uyum sağlama, planlama ve eylem planları yapma gibi karmaşık ve otonom davranışları gerçekleştirebilir. Bu avantajlı yönleriyle; üretim, tehlikeli atık yönetimi, inşaat, uzay bakımı ve otonom araçlar gibi birçok alanda önemli etkilere sahiptir. Bahsedilen eylemlerin gerçekleştirilmesinde karşılaşılan en büyük sorun kontrol problemleridir. Eksik sürülmüş mekanik sistemlerin kontrolü de bu problemlerin başında yer almaktadır. Çözüm olarak ise; pasiflik tabanlı kontrol, Lyapunov teorisi ve geri besleme doğrusallaştırması gibi kontrol stratejileri, eksik sürülmüş sistemlerin kararlılığını sağlamak için kullanılmaktadır.

Son yıllarda, bu tür sistemler için kontrol algoritmaları üzerine yapılan çalışmaların sayısı artmıştır. Gemiler, uçak gemileri, deniz altılar gibi su araçları; helikopterler, uçaklar gibi hava araçları, hovercraftlar gibi hibrit araçlar, uydular ve yürüyen robotlar tasarımları gereği eksik tahrikli sistemler olabilmektedir. Ek olarak eyleyicilerin maliyeti ve ağırlığı nedeniyle, bazı durumlarda tasarım sürecinde kullanılmaktan kaçınılabildiği gibi, bu sistemler bazen eyleyici arızaları nedeniyle eksik tahrikli hale gelmektedir. Örneğin uzayda eyleyici arızası yapan bir onarım robotunu uzay boşluğuna göndermek yerine yazılım yardımı ile eksik sürülmüş bir kontrolör kullanarak çalışmasına devam ettirmenin maliyeti arasındaki fark oldukça yüksektir (Fantoni ve Lozano, 2002).

Bu tez çalışmasında eksik sürülmüş sistemlerin kontrolünde kullanılan enerji tabanlı kontrol yöntemleri olan Kontrollü Lagrange yöntemine ve IDA-PBC yöntemine, belirli mühendislik sistemleri için tasarım kolaylığı getirecek bir yöntem sunmaktır. Bu bölümde eksik sürülmüş Euler Lagrange ve Hamiltonian sistemleri istenilen denge

noktasında kararlı kılmak için kullanılan Kontrollü Lagrange yöntemi ve IDA-PBC yöntemi sunulacaktır.

2.4.1 EL Sistemler ve Kontrollü Lagrange Yöntemi

Tam sürülmüş yani kontrol girdilerinin sayısı, sistemin serbestlik derecesine eşit olan sistemler, geri besleme kuralı aracılığıyla potansiyel enerji fonksiyonunun isteğe bağlı şekillendirilmesini ve dolayısıyla sistemin belirlenen bir denge noktasında kararlı olması sağlarken, bu strateji genel olarak eksik sürülmüş sistemler için mümkün değildir. Eksik sürülmüş olmak, potansiyel enerji fonksiyonunun şekillendirme imkanlarını ciddi şekilde kısıtlar. Ancak bazı durumlarda, sistemin kinetik enerji fonksiyonunun da değiştirilerek bu sorun aşılabilmekte ve sonuç olarak enerji fonksiyonu biçimlendirilmiş yeni bir EL sistem ortaya çıkmaktadır. Araç-ters sarkaç sistemi, bu sistem için en bilindik örnektir. Bu sistemde aracın sadece yatay konumu, bu yönde bir kuvvetle doğrudan kontrol edilebilirken, sarkacın açısı herhangi bir eyleyici olmaması nedeniyle serbest kalır. Bu sistemde, sadece potansiyel enerji fonksiyonunun biçimlendirmesi ile sarkacın kararsız denge noktasını kararlı hale getirmek mümkün değildir. Ancak kinetik enerji fonksiyonunun biçimlendirmesi sağlandığında hem sarkacın kararsız denge noktasında hem de aracın yatay konumunu istenen bir noktada kararlı kılacak bir kontrol kuralı geliştirilebilir. Böylece kapalı çevrim sistem, belirlenen denge noktalarında kararlı, pozitif tanımlı toplam enerji fonksiyonuna sahip bir EL sistem olacak şekilde tasarlanabilir.

Kinetik enerji fonksiyonunun biçimlendirilmesi fikri, eksik sürülmüş mekanik sistemlerin kararlı hale getirilmesi için kullanılan bir yöntem öncülük etmiştir. Bu yöntem, Kontrollü Lagrange yöntemi olarak adlandırılır ve simetriye sahip mekanik sistemlerde kapalı çevrim kararlı denge noktalarına sahip olacak şekilde, toplam enerji fonksiyonunun biçimlendirilmesi amacıyla Bloch ve diğ (2001) tarafından geliştirilmiştir.

Kontrollü Lagrange yönteminde eksik sürülmüş bir Euler-Lagrange sistemin simetriye sahip olduğu kabul edilir ki bu da sistemin Lagrange denkleminin Abelyen Lie grubunun etkisi altında değişmez olduğu anlamına gelir (araç-ters sarkaç durumunda bu, Lagrange fonksiyonunun aracın yatay konumundan bağımsız olduğu anlamına gelir). Buradaki amaç, sistemin simetrisini koruyan ve yine Euler-Lagrange biçiminde olan bir kapalı döngü sistemi bulmak suretiyle sistemin bir denge noktasını (yani,

aracın yatay konumundan bağımsız olarak sarkacın dik konumunu) kararlı hale getirmektir. Bu yöntem, sistemin simetrisini koruyan bir Euler-Lagrange sınıfı içerisinde, açık çevrim sisteme uygun ve sistemi önerilen kapalı çevrim Euler-Lagrange sisteme dönüştürecek bir geri besleme yasası seçilerek yapılır. Bu tür bir geri besleme yasasının varlık koşullarına eşleşme koşulları denir ve bu koşullar sağlandığında orijinal kontrol sistemi ile kapalı döngü Euler-Lagrange sistemi eşleşmiş olur. Kontrollü Lagrange yönteminde kontrol kuralı, sistemin simetri özellikleri kullanılarak hesaplanır.

Bloch ve diğ (2000) tarafından önerilen kontrollü Lagrange yöntemi, biçimlendirilmiş kinetik enerji fonksiyonunun ve orijinal sistemin potansiyel enerji fonksiyonunun farkından oluşan Lagrangianleri içerir. Yani, kinetik enerji fonksiyonunu belirli bir şekilde modifiye edilirken, sistemin potansiyel enerji fonksiyonu değişmeden kalır. Genel olarak, bu kontrollü Lagrange sistem sınıfı için eşleşme koşulları, kapalı çevrim Lagrange fonksiyonu için, çözülmesi gereken bir dizi doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle (PDE) tanımlanır. Bazı özel durumlarda, basitleştirilmiş eşleşme varsayımları (simplified matching assumptions) olarak adlandırılan ve kapalı döngü kontrollü Lagrange fonksiyonlarını kısıtlayan ancak faydalı bir sınıfını tanımlayan bu PDE'ler daha kolay çözülür. İstenen denge noktası, eşleşme varsayımlarını karşılayan bir kontrollü Lagrange fonksiyonu bulunarak sistemi lokal bir denge noktasında kararlı hale getirir. Bu yöntem, araç-ters sarkaç sistemi, küresel sarkaç gibi örneklerle uygulanmıştır.

Kontollü Lagrange yönteminin ana fikri, kontrol edilmek istenen bir EL sistemin potansiyel enerji fonksiyonunun yanı sıra, kinetik enerji fonksiyonunu da biçimlendirir, istenen bir denge noktasında kararlı toplam enerji fonksiyonunun sahip kapalı döngü bir Euler-Lagrange sistem elde etmektir. Bu yöntemin zorluğu, eşleşme koşulları adı verilen ve her zaman çözümünü olamayabilen bir dizi doğrusal olmayan PDE'den kaynaklanmaktadır.

Aucky (2003)'de, doğrusal olmayan PDE'leri doğrusal PDE'ler setine dönüştürmek için λ -yöntemini önermiştir. Bu yöntem, simetri içermeyen genel mekanik sistemler için tasarlanmıştır. Genellikle orijinal sistemde bulunan simetriler, istenen bir denge noktasını kararlılaştırmak için potansiyel enerji fonksiyonunun biçimlendirilmesiyle genellikle bozulmaktadır. Araç, ters sarkaç örneğinde Bloch (2001)'de verdiği araç-ters sarkaç örneğinde kapalı çevrim sistem sarkacın dik bir denge noktasında

kararlılığını sağlarken, sistemin simetrisini bozmamak için aracın yatay konumunu kontrol edememektedir. Ancak Aucky (2003)'de aracın yatay konumunu da kontrol edebilmektedir. Bu durum, potansiyel enerji fonksiyonunun biçimlendirilmesinin bir sistemi istenen denge noktasında kararlı hale getirebilmek için gerekli olduğu Bloch (1999) ve Bloch (2001)'de simetri kırıcı potansiyel terimi (symmetry-breaking potential) kullanılarak verilmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında incelenmese de kontrollü lagrange yönteminin holonomik olmayan kısıtlar için de kullanılabileceği Hamberg (2000) ve Zenkov (2000)'de sunulmuştur.

2.4.1.1 Kontrollü Lagrange Yönteminde Eşleşme Koşulları

Bu bölümde Euler-Lagrange sistemlerinin eşleşmesini incelenecektir. Bu bölümde anlaşım kolaylığı olması açısından kısmi diferansiyel denklemlerin notasyonu $\partial L / \partial q = \partial_q L$ olarak kullanılmıştır

Konfigürasyon uzayı Q olan ve Lagrangian $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere kontrol girişine sahip bir Euler-Lagrange sistemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) - \partial_q L(q, \dot{q}) = G(q)u. \quad (2.58)$$

G , m ranklı $G(q): \mathbb{R}^m \rightarrow T_q^*Q \simeq \mathbb{R}^n$ matrisi $u \in \mathbb{R}^m$ girişine karşılık gelen kuvvet alanını tanımlamaktadır. Bir Euler-Lagrange sistemde $m = n$ olması durumunda sistem tam sürülmüş olarak, $m < n$ olması durumunda ise eksik sürülmüş olarak tanımlanır.

$L_c: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinden tanımlanan, otonom bir Euler-Lagrange sistem ele alalım:

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L_c(q, \dot{q}) - \partial_q L_c(q, \dot{q}) = 0 \quad (2.59)$$

tez boyunca alt simge ' $(\cdot)_c$ ' kapalı çevrim sistem için kullanılmıştır. Bu alt bölümde (2.58)'de verilen EL sistemi (2.59) ile verilen EL sisteme dönüştüren bir kontrol kuralı u 'nun türetilmesidir. Eğer bu kontrol kuralı bulunabiliyorsa (2.58) ve (2.59) sistemlerinin eşleştiğini söyleriz.

Denklem (2.58)'de bulunan $G(q)$ 'nin tam ranklı sol yok edicisini $G^\perp(q): (\mathbb{R}^{n-m})^T \rightarrow (\mathbb{R}^n)^T$ tanımlayalım ($G^\perp(q)G(q) = 0, \forall q$). Bu durumda:

$$G^\perp(q) \left(\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) - \partial_q L(q, \dot{q}) \right) = 0. \quad (2.60)$$

olacaktır. Aynı şekilde $\mathbb{R}^n = \text{Im } G(q) \oplus \text{Im } (G^\perp)^T(q)$ olduğu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$G^T(q) \left(\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L_c(q, \dot{q}) - \partial_q L_c(q, \dot{q}) \right) = 0 \quad (2.61)$$

$$G^\perp(q) \left(\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L_c(q, \dot{q}) - \partial_q L_c(q, \dot{q}) \right) = 0 \quad (2.62)$$

(2.61)'yi elde edebilmek için, (2.58)'e aşağıdaki kontrol kuralı uygulanmalıdır. Yazım kolaylığı için bundan sonraki denklemlerde $(q, \dot{q})$ argümanları yazılmayacaktır.:

$$u = (G^T G)^{-1} G^T \left[\left(\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L \right) - \left(\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L_c - \partial_q L_c \right) \right] \in \mathbb{R}^m, \quad (2.63)$$

Burada $G^T G$, m tam ranklı kare bir matristir. Böylece aşağıdaki önermeler verilebilir:

Önerme 1: (2.58) ve (2.59) sistemleri ancak ve ancak (2.62) eşitliği sağlandığı zaman eşleşirler.

Açıklama 1: G matrisinin rankı n olduğu durumda $G^\perp = 0$ olur ve denklem (2.62) herhangi bir kapalı çevrim Lagrangian L_c için her zaman sağlanır. Bu, sistem tam sürülmüş olduğunda dinamiğinin keyfi olarak değiştirilebileceğini gösterir.

Denklem (2.62) *eşleşme koşulları* olarak adlandırılır. Kapalı çevrim sistemin Lagrangian'ı L_c ise *kontrollü Lagrangian* olarak adlandırılmaktadır.

Langrangianlar L ve L_c düzenli (regüler) olmaları durumunda, $\partial_{\dot{q}\dot{q}} L$ ve $\partial_{\dot{q}\dot{q}} L_c$ de tersinir olurlar. Bu durumda eşleşme koşulları (2.62), ivmeler elemine edilerek $(q, \dot{q})$ parametrelerini içeren bir dizi doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler (PDE) olarak yazılabilirler. Ayrıca, (2.63) kontrol kuralının bir durum geri beslemeli kontrol kuralı olduğuna dikkat edilmelidir.

Denklem (2.58) eşdeğer olarak aşağıdaki şekilde düzenlenebilir (EK A.2):

$$(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)\ddot{q} + (\partial_{q\dot{q}}L)\dot{q} - \partial_q L = Gu \quad (2.64)$$

Lagrangian düzenli olduğu durumda, sistem şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{q} = -(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L)\dot{q} + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}\partial_q L + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}Gu. \quad (2.65)$$

Eşdeğer olarak, sistem (2.59)'de şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{q} = -(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L_c)\dot{q} + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}\partial_q L_c. \quad (2.66)$$

(2.58) ve (2.59) sistemleri, uygun tanımlanmış bir kontrol kuralı u için eşleşmelerinin gerek ve yeter koşulu; eğer $(q(t), u(t))$ (2.58) sisteminin bir çözümüyse, ancak ve ancak $q(t)$ 'nin de (2.59) sisteminin bir çözümüdür olarak özetlenebilir. Eşdeğer olarak, $(q(t), u(t))$ (2.65)'i sağlarsa ancak ve ancak $q(t)$ 'de (2.66)'yi sağlayacaktır. Bunun sonucunda, (2.58) ve (2.59) eşitlenirse,

$$\begin{aligned} & -(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L)\dot{q} + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}\partial_q L + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)^{-1}Gu \\ & = -(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L_c)\dot{q} + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}\partial_q L_c \end{aligned} \quad (2.67)$$

şeklinde yazılabilir ve bu aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} Gu = & \left\{ \partial_{q\dot{q}}L - (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L_c) \right\} \dot{q} - \partial_q L \\ & + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}\partial_q L_c. \end{aligned} \quad (2.68)$$

G 'nin sol yok edicisi $G^\perp$ kullanılarak, (2.65) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} G^\perp \left(\left\{ \partial_{q\dot{q}}L - (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}(\partial_{q\dot{q}}L_c) \right\} \dot{q} - \partial_q L \right. \\ \left. + (\partial_{\dot{q}\dot{q}}L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}}L_c)^{-1}\partial_q L_c \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Önerme 2: (2.58) ve (2.59) sistemleri ancak ve ancak (2.69) eşitliği sağlandığı zaman eşleşirler.

Bu durumda, durum geri besleme kontrol yasası açıkça şu şekilde verilmiştir:

$$u = (G^T G)^{-1} G^T \left\{ \partial_{q\dot{q}} L - (\partial_{\dot{q}\dot{q}} L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}} L_c)^{-1} (\partial_{q\dot{q}} L_c) \right\} \dot{q} - \partial_q L + (\partial_{\dot{q}\dot{q}} L)(\partial_{\dot{q}\dot{q}} L_c)^{-1} \partial_q L_c \quad (2.70)$$

Açıklama 2: (2.63)'da (2.66) yerine yazıldığında, (2.63) ve (2.70)'nın birbirine eşdeğer (equivalent) olduğu kolaylıkla görülecektir. Ayrıca (2.70) kontrol kuralı sadece q ve $\dot{q}$ 'a bağlı durum geri besleme kuralıdır.

(2.69)'de verilen eşleşme koşulları da (2.62)'de verilen eşleşme kurallarına eşdeğerdir (Hamberg, 2000). Ayrıca, (2.69) L 'nin bilinen ve L_c 'nin bilinmeyen değişken olarak kullanıldığı bir dizi doğrusal olmayan PDE oluşturmaktadır. (2.69)'in L_c çözüm kümesi, kontrol yasasının uygun bir seçimiyle (2.58)'den elde edilebilecek tüm olası Euler-Lagrangian kapalı çevrim sistemleri (2.59)'i tanımlamaktadır.

Bu tez çalışmasında Euler-Lagrange sistemleri (2.58) ve (2.59) sistemlerinin mekanik sistem oldukları durumlar ele alınacaktır. Bu durumda eşleşme koşulları (2.69), kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonunu eşleşme koşulları olarak iki parçaya ayrılabilir. Denklem (2.58) deki L bir mekanik sistemin Lagrangian'ı olduğunda, L kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonunun farkı elde edilir:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q), \quad (2.71)$$

burada $M = M^T$, sistemin genelleştirilmiş kütle matrisini tanımlar. Bu tezin inceleme konusu olan basit mekanik sistemlerde $M > 0$ özelliğine sahip tersinir matristir ki bu durumda L *düzenli (regular) bir Lagrangian* tanımlar.

Kapalı çevrim sistemi bir EL sisteme dönüştüren, yani (2.59) formunda olan ve kontrollü Lagrangian'ı aşağıdaki formda olan kontrol kurallarını değerlendirelim:

$$L_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} - V_c(q) \quad (2.72)$$

Burada kütle matrisi $M_c = M_c^T$ ve potansiyel enerji fonksiyonu V_c 'dir. Bu durumda, eşleşme koşulları (2.69)'den şu şekilde elde edilir (EK A.1):

$$G^\perp(q) \left[\left\{ \partial_q(M(q)\dot{q}) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q(M_c(q)\dot{q}) \right\} \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + \partial_q V(q) + M(q)M_c^{-1}(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) - \partial_q V_c(q) \right] \right] = 0 \quad (2.73)$$

(2.73)'de $\dot{q}$ 'ya bağlı terimleri ve bağımsız terimleri ayrı ele alınması durumunda aşağıdaki şekilde (2.73), doğrusal olmayan PDE'ler kümesi olarak $M_c(q)$ ve $V_c(q)$ 'lar cinsinden yazılabilir:

$$G^\perp(q) \left[\left\{ \partial_q(M(q)\dot{q}) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q(M_c(q)\dot{q}) \right\} \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + M(q)M_c^{-1}(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) \right] \right] = 0 \quad (2.74)$$

ve

$$G^\perp(q) [\partial_q V(q) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q V_c(q)] = 0. \quad (2.75)$$

Denklem (2.74) kinetik enerji fonksiyonunu eşleştirir ve potansiyel enerji fonksiyonundan bağımsızdır, (2.75) ise kapalı çevrim sistemin potansiyel enerji fonksiyonunu eşleştirir ve biçimlendirilmiş genelleştirilmiş kütle matrisi M_c 'ye bağımlıdır. Denklem (2.74) ise $\dot{q}$ 'a bağlı homojen bir polinom tanımlarken (2.75) tamamen $\dot{q}$ 'tan bağımsızdır.

Kinetik enerji fonksiyonunu eşleştiren (2.74) *kinetik enerji eşleşme koşulu* olarak isimlendirilirken, potansiyel enerji fonksiyonunu eşleştiren (2.75) *potansiyel enerji eşleşme* koşulu olarak isimlendirilir.

2.4.2 Hamiltonian Sistemler ve IDA-PBC Yöntemi

Doksanların ikinci yarısında lineer olmayan elektro-mekanik sistemler gibi karmaşık sistemlerin modellenmesi için enerji temelli bir modelleme ile Kapı Kontrollü Hamilton sistemler (Port Controlled Hamiltonian (PCH) Systems) ve kontrol yöntemi olarak pasif olma temelli bir kontrol yöntemi (passivity based control PBC) önerilmiştir (Ortega ve diğ, 1999). Ortega ve Spong (2000) ile Ortega ve diğ. (2002)'de kapı kontrollü bir Hamilton sistemini istenen denge noktasını kararlı hale getiren bir yöntem geliştirilmiştir. Kapı kontrollü Hamilton sistemleri sınıfı, düzenli (regular) Euler-Lagrange sistemleri sınıfını kesin olarak içermektedir. Bu yöntem Ortega ve ekibi tarafından, ara bağlantı ve sönüm ataması ile pasiflik tabanlı kontrol (interconnection and damping assignment passivity based control-IDA-PBC) yöntemi olarak adlandırılmıştır. Kontrollü Lagrangianlar yöntemine benzer şekilde temel fikir, kapı kontrollü Hamiltonian biçiminde olan ve istenen denge noktasında kararlı olan bir kapalı döngü sistemin tasarlanmasıdır. Kontrollü Lagrange yönteminde olduğu gibi, bir dizi lineer olmayan PDE ile verilen bir dizi eşleştirme koşulları ortaya çıkar. Bu bölümde Ortega ve diğ. (2002)'de geliştirilen yöntemi ve mekanik sistemlere uygulamasını gözden geçireceğiz.

Genel bir kapı kontrollü bir Hamilton sistemi ele alınsın:

$$\dot{z} = J(z) \partial_z H(z) + g(z)u \quad (2.76)$$

Burada $\partial_z H(z) = [\partial H(z)/\partial z_1 \quad \dots \quad \partial H(z)/\partial z_n]^T$, $z \in \mathcal{M}$ (bir manifold), $J(z) = -J^T(z): T_z^* \mathcal{M} \rightarrow T_z \mathcal{M}$ sistemin iç bağlantı yapısını tanımlayan bir çarpık simetrik matris, $g(z): \mathbb{R}^m \rightarrow T_z \mathcal{M}$, $u \in \mathbb{R}^m$ girişine karşılık gelen giriş vektör alanlarını tanımlar ve $H(z)$ sistemin Hamiltonian (veya enerji) fonksiyonudur. IDA-PBC'nin amacı, sistemin istenen denge noktasını kararlı hale getirmektir. Kontrollü Lagrange yöntemine benzer şekilde bu amaç, kapalı çevrim sistemin kapı kontrollü Hamiltonian formatında olmasını sağlayan statik durum geri besleme yasaları göz önünde bulundurularak gerçekleştirilir. Diğer bir deyişle, kapalı çevrim sistem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\dot{z} = J_d(z) \partial_z H_d(z) \quad (2.77)$$

Burada, $J_d(z) = -J_d^T(z)$ kapalı çevrimli sistemin ara bağlantı matrisini ve $H_d(z)$ kapalı çevrimli sistemin Hamiltonian fonksiyonunu göstermektedir. (2.77) sisteminden (2.76) sistemine $u = u(z)$ durum geri beslemesi ile ancak ve ancak aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda geçilebilir:

$$J_d(z) \partial_z H_d(z) = J(z) \partial_z H(z) + g(z)u(z) \quad (2.78)$$

Burada, $g^\perp(z)$, $g(z)$ 'nin tam ranklı sol yok edicisini göstermek üzere, (2.78) eşdeğer olarak şu şekilde yazılabilir

$$g^\perp(z)[J_d(z) \partial_z H_d(z) - J(z) \partial_z H(z)] = 0 \quad (2.79)$$

Böylece Ortega ve diğ. (2002)'de verilen eşleşme koşullarına elde etmiş oluruz. Eşleşme koşulları (2.79), kapalı çevrimli sistemin Hamiltonian fonksiyonu H_d ve kapalı çevrimli sistemi ara bağlantı matrisi J_d 'yi elde edilmek için, çözülmesi gereken bir dizi lineer olmayan PDE verecektir. Eşleşme koşulları sağlandığı durumda, yani (2.76) ve (2.77) sistemleri eşleşebilmesi için ilgili durum geri besleme yasası aşağıdaki formda olmalıdır:

$$u(z) = (g^T(z)g(z))^{-1}g^T(z)\{J_d(z) \partial_z H_d(z) - J(z) \partial_z H(z)\} \quad (2.80)$$

Ortega ve diğ. (2002)'de (2.78)'de tanımlanan eşleşme koşulları, $J_a = J_d - J$ ve $H_a = H_d - H$ tanımları yaparak aşağıdaki eşdeğer formda sunulmuştur:

$$(J(z) + J_a(z)) \partial_z H_a(z) = -J_a(z) \partial_z H(z) + g(z)u(z) \quad (2.81)$$

Ayrıca eşleşme koşulları (2.79)'de şu forma gelir:

$$g^\perp(z)[(J(z) + J_a(z)) \partial_z H_a(z) + J_a(z) \partial_z H(z)] = 0 \quad (2.82)$$

Bu denklemler, H_a ve J_a bulunması için çözülmesi gereken lineer olmayan PDE'ler kümesidir.

Denklem (2.76)'nın lineer kapı kontrollü bir Hamiltonian sistemi temsil ettiğini, yani $J = -J^T$, g sabit matrisleri ve Hamilton fonksiyonu $H(z) = \frac{1}{2}z^T Qz$, $Q = Q^T$ için $\dot{z} =$

$JQz + gu$ olduğunu ve (2.77) kapalı çevrim sisteminin de lineer bir sistem olduğunu varsayalım. Bu durumda eşleştirme koşullarının (2.79) yanı sıra kapalı çevrim sistemin kararlılık koşullarının bir dizi doğrusal matris eşitsizliğine (LMI'ler) dönüştürülebileceği S. Prajna, A. van der Schaft (2002)'da gösterilmiştir.

Kapalı çevrim (2.77) sistemi harici girişleri içermemektedir. Bunun sebebi, IDA-PBC yönteminin belirlenen bir z^* denge noktasında sistemi kararlı hale getiren $u = u(z)$ geri besleme kuralı oluşturmak üzere tasarlanmış olmasından kaynaklanmaktadır, yani kapalı çevrim sistem (2.77) z^* 'de kararlı bir denge noktasına sahiptir. Ancak kapalı çevrim sistemin davranışını iyileştirmek için harici girişler eklenmek istenebilir. Bu durumda bu girişler aşağıdaki formda sisteme eklenir:

$$\dot{z} = J_d(z) \partial_z H_d(z) + g(z)v, v \in \mathbb{R}^m \quad (2.83)$$

Burada uygun varsayımlar altında, $y = g^T \partial_z H_d$ pasif çıkışının $v = -Ky, K > 0$ ile geri besleme olarak eklenmesi, Ortega, M.W. Spong ve diğ. (2002)'de verildiği gibi sistemin asimptotik kararlılığını sağlar. Kapalı çevrim sisteme harici girişlerin eklenmesi (2.79)'de verilen eşleşme koşullarını etkilemez. Denklem (2.76) ve (2.77) sistemleri durum geri besleme kuralı $u(z, v) = \alpha(z) + v$ uygulandığında ancak ve ancak (2.79) sağlanıyorsa eşdeğer olur. İlgili kontrol yasası $\alpha(z)$ (2.80) de verilmiştir. Elbette, benzer bir değerlendirme kontrollü Lagrange yöntemi için de yapılabilir. Bu tez çalışmasında kontrollü Lagrange yöntemini uygulamaları için de bu önerme yapılmıştır. Öncelikle kapalı çevrimli sistemi istenen denge noktasında kararlı hale getiren bir kontrol kuralı bulunmuş, sonra kapalı çevrim sisteme sönüm eklenerek asimptotik kararlı hale getirilmiştir.

Bu tez çalışması mekanik bir sınıf mekanik sistemler üzerine yapılmıştır. Bu sebeple IDA-PBC yönteminin Ortega, M.W. Spong ve diğ. (2002)'de verildiği şekilde mekanik sistemler üzerine uygulamaları verilecektir. Mekanik bir sistem, (2.76) formunda bir kapı kontrollü Hamilton sistemi ile tanımlanabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2.84)$$

Burada (q, p) , konfigürasyon koordinatları q , ve momentumlar p 'den oluşan $\mathcal{M} = T^*Q \simeq \mathbb{R}^{2n}$ durum uzayı için koordinatları ifade eder ve $Q \simeq \mathbb{R}^n$ mekanik sistemin

konfigürasyon uzayını gösterir. $G(q): \mathbb{R}^m \rightarrow T_q^*Q \simeq \mathbb{R}^n$ matrisi, $u \in \mathbb{R}^m$ girişine karşılık gelen kuvvet alanlarını tanımlar. Hamiltonian fonksiyonu $H(q, p)$ sistemdeki toplam enerji fonksiyonu, yani kinetik ve potansiyel, enerji fonksiyonun toplamı olarak tanımlanır:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (2.85)$$

Burada $M = M^T$ sistemin genelleştirilmiş kütle matrisidir. Çoğu fiziksel sistem için $M > 0$ kesin pozitif tanımlıdır. $p = M(q)\dot{q}$ ise sistemin genelleştirilmiş momentumlarını tanımlar. Ortega, M.W. Spong ve diğ. (2002)'de verildiği gibi, biçimlendirilmiş yani kapalı çevrimli sistemin genelleştirilmiş kütle matrisi $M_d = M_d^T > 0$ ve kapalı çevrim sistem için istenen potansiyel enerji fonksiyonu $V_d(q)$ olmak üzere kapalı çevrim sistemin Hamiltonian fonksiyonu $H_d(q, p)$ aşağıdaki formda olacağı varsayılır:

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q) \quad (2.86)$$

Kapalı çevrimli sistemin ara bağlantı matrisi $J_d(q, p)$, $J_2(q, p)$ herhangi bir çarpık simetrik matris olmak üzere aşağıdaki biçimde olmak zorundadır:

$$J_d(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}(q)M_d(q) \\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q, p) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Böylece kapalı çevrim sistem (2.77) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H_d \\ \partial_p H_d \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Burada $\dot{q}$ sürülmeyen bir koordinat olduğundan, $\dot{q} = M^{-1}(q)p$ ilişkisinin kapalı çevrim sistem içinde geçerli olması gerekir.

Bu durumda eşleşme koşulları (2.79) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$G^\perp [\partial_q H - M_d M^{-1} \partial_q H_d + J_2 M_d^{-1} p] = 0 \quad (2.89)$$

(2.85) ve (2.86)'de p 'ye bağımlı olan ve olmayan terimleri ayırarak (2.89)'ye eşdeğer iki lineer ve homojen olmayan PDE yazılabilir:

$$G^\perp(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p \right) - M_d(q) M^{-1}(q) \partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p \right) + J_2(q, p) M_d^{-1}(q) p \right] = 0 \quad (2.90)$$

$$G^\perp(q) [\partial_q V(q) - M_d(q) M^{-1}(q) \partial_q V_d(q)] = 0 \quad (2.91)$$

Kontrollü Lagrange yönteminde olduğu gibi, (2.90) kinetik enerji eşleşme koşuldur ve potansiyel enerjiden bağımsızdır, (2.91) ise potansiyel enerji eşleşme koşuludur ve M_d 'ye bağlıdır. PDE'ler bilinmeyen M_d ve V_d değişkenlerini içerirken, J_2 matrisi tasarlanan M_d ve V_d seçimleri için eşleşme PDE'lerinin çözülmesini kolaylaştırmak için uygun şekilde seçilebilen serbest bir parametredir. Eşleşme koşullarını sağlayan M_d, J_2 ve V_d 'nin bulunması durumunda uygulanması gereken geribesleme kuralı şu şekilde verilmiştir

$$u = (G^T G)^{-1} G^T \{ \partial_q H - M_d M^{-1} \partial_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \} \quad (2.92)$$

Eşleşme koşulları (2.90) ve (2.91)'un çözülmesi Viola ve diğ (2007)'de bahsedildiği şekilde, kolay olmayan (ve her zaman çözümünün varlığı olmayabilen) bir dizi lineer PDE'dir. Ancak, özel bir sistem sınıfı için bu PDE'ler çözümü daha kolay olan bir dizi doğrusal olmayan adi diferansiyel dengeleme (ODE)'ye dönüştürülebilir. Bu konu Gomez-Estern ve diğ. (2001)'de açıklanmaktadır. Bu dönüşümün mümkün olduğu sistemler sınıfı aşağıdaki varsayımlarla tanımlanır:

i) sistemin n serbestlik derecesine ve $(n - 1)$ eyleyiciye sahip olduğu varsayılır (yani, yalnızca bir sürülmemiş koordinat vardır)

ii) Kapalı çevrim sistemin kütle matrisi M_d 'nin yalnızca sürülmemiş koordinata bağlı olduğu varsayılır.

Örneğin top çubuk sistemi bu tip sistemlere örnek verilebilir ve kapalı çevrim kütle matrisi M_d 'nin sadece sürülmemiş koordinata bağlı olacak şekilde seçilmesiyle, PDE kümesine eşdeğer bir ODE kümesine dönüştürülebileceği gösterilebilir. Gomez-Estern ve diğ. (2001)'de bu örnek işlenmiştir.

Benzer şekilde Donaire ve diğ. (2016) çalışmasında çözümü oldukça zor olan eşleşme koşullarının, Gomez-Estern ve diğ. (2001) tanımlanan sistem kümesine ek koşullar getirerek, eşleşme koşullarının ODE'lere dönüşmesi üzerine çalışmıştır. Bu çalışmada açık çevrim sistemin kütle matrisi M 'nin aşağıdaki yapıda olduğu varsayılmış,

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{aa}(q) & m_{au}(q) \\ m_{au}^T(q) & m_{uu}(q) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Burada $q_a \in \mathbb{R}^m$ sürülmüş, $q_u \in \mathbb{R}^{n-m}$ ise sürülmemiş parçaları içermektedir. Böylece $m_{aa}(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m_{au}(q) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ ve $m_{uu}(q) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ yazılabilir. Bu şekilde tasarlanabilen bir sistem aşağıdaki varsayımları sağlamalıdır:

- i) Kütle matrisi sadece sürülmemiş q_u değişkenlerine bağlıdır yani $M(q) = M(q_u)$
- ii) Kütle matrisinde m_{aa} sabittir.
- iii) Potansiyel enerji fonksiyonu şu şekilde yazılabilir: $V(q) = V_a(q_a) + V_u(q_u)$
- iv) $m_{au}(q_u)$ matrisinin sütunları şu özellikleri sağlar: $\nabla_{q_{u_j}}(m_{au})_k = \nabla_{q_{u_k}}(m_{au})_j, \forall j \neq k, j, k \in \{1, 2, \dots, n-m\}$

Bu koşullar altında eşleşme koşulları birer ODE oluşturur ve çözülmesi ana yöntemle göre oldukça kolaydır. Bu çalışmada 4 serbestlik dereceli vinç düzeneği örneği verilmiştir.

Ortega ve ekibinin son yıllarda yaptığı çalışmalardan da anlaşılacaktır ki gerek kontrollü Lagrange gerekse IDA-PBC yöntemlerinin zorlaşıcı kısmı bu bölümde verilen ve kapalı çevrim sistemi istenen denge noktasında kararlı kılan (M_c, V_c) ya da (M_d, V_d) çiftlerine sahip, lineer olmayan PDE'lerin yani eşleşme koşullarının çözümüdür. Bu tez çalışmasında belli bir sınıf mekanik sistem için eşleşme koşullarını yaklaşık olarak sağlayan (M_d, V_d) çözümünü veren bir yöntem geliştirilmiş ve buradan bir kontrol kuralı türetilmiştir. Eşleşme koşulları yaklaşık olarak sağlandığı halde sistemin istenen denge noktasında kararlılığının garantilendiği kanıtlanmıştır.

2.4.3 IDA-PBC ve Kontrollü Lagrangian Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde iki yöntem ile elde edilen çıktıların daha kolay gösterilmesi ve analiz edilebilmesi için eşleşme koşulları ve kontrol kuralları karşılıklı verilecektir. Tabloyu vermeden önce kullanılacak olan denklemleri tanımlayalım. Bu denklemler karşılaştırma tablosunda verileceği için ve önceki bölümlerde de kullanıldığı için numaralandırılmamıştır.

$H(q, \dot{q})$ Hamiltonian fonksiyonu (2.84)'de ve $L(q, \dot{q})$ Lagrangian fonksiyonu ise (2.71)'de tanımlanmıştır. İki yapıyı benzer şekilde yazabilmek için (EK A.2)'de verilen zincir kuralı kullanılarak EL denklemi (2.64) kullanılabilir.

Basit mekanik sistemler için Hamiltonian denklemi (2.84)'de, Lagrange denklemi ise (2.71)'de verilmiştir.

EL sistemlerde Coriolis matrisi $C(q, \dot{q}) = \partial_q(M(q)\dot{q}) - \partial_q(1/2 M(q)\dot{q})^T$ olarak tanımlanmıştır. Bu eşitliği kullanarak açık çevrim EL sistemlerin kinematik denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\ddot{q} = (M)^{-1}(Gu - C\dot{q} + \partial_q V)$$

Sisteme uygulanan $u(q, \dot{q})$ işaretinin amacı sistemin potansiyel enerjisini istenen denge noktasında minimumu olacak şekilde şekillendirmek ve sistemi kayıplı hale getirerek kararlılığını sağlamaktır.

Tam sürülmüş sistemlerde sistemin potansiyel enerjisini biçimlendirmek göreceli olarak daha kolaydır. Çünkü sistemin potansiyel enerjisini biçimlendirecek sistem parametrelili doğrudan $u(q, \dot{q})$ işareti ile değiştirilebilir.

Ancak eksik sürülmüş sistemlerde, sistemin potansiyel enerjisini biçimlendirmek için kinetik enerjisini de biçimlendirmek gerekir.

Kapalı çevrim bir Hamiltonian bir sistemin hareket denklemleri (2.88)'de verilmiştir. İki yöntemin karşılaştırmasını yapabilmek için kapalı çevrim EL sistem de aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\ddot{q} = (M_c)^{-1}(-C_c\dot{q} - F_c + \partial_q V_c)$$

Burada F_c sistemin pasifliğini bozmayan, jiroskopik ya da kayıp kuvvetleri gibi bir işarettir. $J = -J^T$ çarpık simetrik ve $R \geq 0$ simetrik bir matris olmak üzere için $F_c = (R + J)\dot{q}$ olarak tanımlanmıştır.

Açık çevrim ve kapalı çevrim sistemlerin eşleşmesi için gerekli koşullar, açık çevrim ve kapalı çevrim hareket denklemlerinin eşleşmesi ile bulunur. Hamiltonian sistem için eşleşme koşulu (2.90)'da verilmiştir. F_c terimini kullanarak bir EL sistemin eşleşme koşulları da aşağıdaki şekilde bulunur (EK A-1):

$$G^\perp(C - MM_c^{-1}C_c - MM_c^{-1}(R + J))\dot{q} = 0 \quad (2.94)$$

$$G^\perp(\partial_q V - MM_c^{-1} \partial_q V_c) = 0 \quad (2.95)$$

Elde edilen tüm çıktıları kullanarak aşağıdaki tablo oluşturulabilir:

Çizelge 2.1 : Hamiltonian ve Euler Lagrange eşleşme koşulları.

	Hamiltonian Sistem	EL Sistem
Hareket Denklem	$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H_d \\ \partial_p H_d \end{bmatrix}$	$\ddot{q} = (M_c)^{-1}(-C_c \dot{q} - F_c + \partial_q V_c)$
Kontrol Kuralı	$u = (G^T G)^{-1} G^T \{ \partial_q H - M_d M^{-1} \partial_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \}$	$u_c = (G^T G)^{-1} G^T \left[(C - MM_c^{-1}C_c - MM_c^{-1}(J + R))\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} - MM_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right]$
KE Eşleşme Koşulu	$G^\perp \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right) - M_d M^{-1} \partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p \right) + J_2 M_d^{-1} p \right] = 0$	$G^\perp [C - MM_c^{-1}C_c - MM_c^{-1}(J + R)]\dot{q} = 0$
PE Eşleşme Koşulu	$G^\perp [\partial_q V - M_d M^{-1} \partial_q V_d] = 0$	$G^\perp (\partial_q V - MM_c^{-1} \partial_q V_c)$

Blankenstein ve diğ (2002)'de $F_c = 0$ için aşağıdaki koşullar altında IDA-PBC'nin kontrollü Lagrange yöntemine eşdeğer olduğunu göstermişlerdir:

$$M_c(q) = M(q)M_d^{-1}(q)M(q) \quad (2.96)$$

$$J_2(q, p) = M_d M^{-1} \left(\left(\partial_q (M M_d^{-1} p) \right)^T - \partial_q (M M_d^{-1} p) \right) M^{-1} M_d \quad (2.97)$$

IDA-PBC yönteminde $J_2 = -J_2$ olmak üzere serbest seçimli bir parametre olmasına rağmen (2.97)'de IDA-PBC yöntemi ile elde edilen kapalı çevrim sistemin EL eşleniğini elde etmek için J_2 'nin özel bir yapıda olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Ancak Blankenstein ve diğ (2002) çalışmasında kapalı çevrim sistemin kararlılığına etki etkilemeyecek jiroskopik kuvvetleri kullanılmamıştır.

$J = -J^T$ serbest seçimli çarpık simetrik bir matris olmak üzere, aşağıdaki koşullar altında (2.72)'de verilen kapalı çevrim sistem EL sistem, (2.86)'da verilen kapalı çevrim Hamiltonian sisteme eşdeğerdir (EK A.3).

$$M_d(q) = M(q)M_c^{-1}(q)M(q) \quad (2.98)$$

$$J_2 = M_d M^{-1} \left[\left[\partial_q (M M_d^{-1} p) \right]^T - \partial_q (M M_d^{-1} p) \right] M^{-1} M_d - M_d M^{-1} J M^{-1} M_d \quad (2.99)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki (2.97) ifadesi (2.99)'un $J = 0$ olan özel bir çözümüdür.

Aynı şekilde $J_2 = -J_2^T$ serbest seçimli çarpık simetrik bir matris olmak üzere aşağıdaki koşullar altın (2.86)'da verilen kapalı çevrim Hamiltonian sistem, (2.72)'de verilen kapalı çevrim sistem EL sisteme eşdeğerdir (EK A.3).

$$M_c(q) = M(q)M_d^{-1}(q)M(q) \quad (2.100)$$

$$J = \left(\left(\partial_q (M_c \dot{q}) \right)^T - \partial_q (M_c \dot{q}) \right) - M M_c^{-1} J_2 M_c^{-1} M \quad (2.101)$$



3. EKSİK SÜRÜLMÜŞ EL SİSTEMLERİN MODEL YAKLAŞIKLIĞI İLE KONTROLÜ

İkinci bölümde eksik sürülmüş EL sistemlerin kontrolü için geliştirilen CL yönteminin geçerli olması için eşleşme koşullarını sağlayan $M_c(q)$ ve $V_c(q)$ 'nin bulunabilmesi gerekir. Eşleşme koşulları (2.74) ve (2.75)'de görüldüğü gibi hem doğrusal olmayan hem de homojen olmayan PDE'ler olarak verilmiştir. Literatürde bu PDE'lerin analitik çözümlerinin çok zor olduğu hatta her zaman bu koşulları sağlayan bir çözümün bulunmasının mümkün olmadığı belirtilmiştir (Viola ve diğ., 2007). Bu tez çalışmasında bu PDE'lerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesini sağlayan bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemin esin kaynağı, eksik sürülmüş ancak doğrusal (seperable) EL sistemler için ortaya çıkan eşleşme koşullarının doğrusal PDE'ler olması yani analitik çözümlerinin bulunabilmesidir. Bilindiği gibi doğrusal EL sistemlerde sistemin genelleştirilmiş atalet matrisi genelleştirilmiş koordinatlara bağımlı değildir yani sabit elemanlı matrislerdir. Önerilen yöntemin ana fikri hem kontrol edilen hem de hedeflenen kapalı çevrimli sistemin genelleştirilmiş atalet matrislerinin bir dizi sabit atalet matrislerinin radyal baz fonksiyonları kullanılarak doğrusal olmayan bir kombinasyonu ile yaklaşık olarak ifade edilmesine dayanır. Böylece, sistem bir dizi doğrusal EL sistem cinsinden yaklaşık olarak modellenebilecek ve tüm bu sistemler için yazılan ve artık doğrusal PDE'ler olan bir dizi potansiyel eşleşme koşullarının ortak çözümü olan bir potansiyel enerji fonksiyonu ve kapalı çevrimli sistemin genelleştirilmiş atalet matrisini oluşturan bir dizi doğrusal EL sistemi parametrik olarak oluşturulabilecektir. Sonuç olarak (2.75)'de verilen potansiyel enerji eşleştirme koşulunu yaklaşık olarak sağlayan bir potansiyel enerji fonksiyonu $V_c(q)$ ve kapalı çevrimli EL sisteminin genelleştirilmiş atalet matrisi $M_c(q)$, bir sabit matrisler dizisinin ve radyal tabanlı fonksiyonların parametrelerinin seçimi ile elde edilmiş olacaktır. Bu tez çalışmasında önerilen yöntem aşağıda özetlenmiştir.

3.1 Yöntem

Adım 1. EL sisteminin konfigürasyon uzayında bir takım $h_i(q)$ skaler fonksiyonlarından oluşan r adet alt bölge tanımlayalım,

$$\mathbb{S}_r \triangleq \{q | q_i \geq q_l, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad i \neq l\} \quad (3.1)$$

burada $h_i(q)$ 'ler, $0 < h_i(q) \leq 1$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca her alt bölge için $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ olacak şekilde r sayıda q_i noktaları tanımlanır.

Açıklama. Bu çalışmada, $h_i(q)$ fonksiyonları radyal tabanlı olan $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i|q-q_i|)^2}$ olarak seçilmiştir. q_i 'ler her bir alt bölgenin merkezidir.

Adım 2. Potansiyel enerji eşleşme koşulunu $q = q_i$ için yazalım; böylece r sayıda denklem $M_i = M(q_i)$ olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilecektir,

$$G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M_i M_{ci}^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] = 0, \forall i \quad (3.2)$$

Öncelikle, (3.2)'de verilen r sayıdaki denklemin ortak çözümü olarak $\partial V_c(q)/\partial q|_{q=q^*} = 0$ ve $\partial^2 V_c(q)/\partial q^2|_{q=q^*} > 0$ özelliklerine sahip bir $V_c(q)$ varlığını garanti eden M_{ci} matrislerinin sağlaması gereken koşullar bulunmalıdır. Bu koşulların geçerli olduğu varsayımı altında $V_c(q)$ 'yu M_{ci} 'ler cinsinden oluşturalım. Bu adımda $V_c(q)$ 'nun parametrik biçimde oluşturulduğuna dikkat edilmelidir, zira bu parametreler M_{ci} 'lerin sonraki adımlarda belirlenecek bazı elemanlarına bağlı olacaktır. Başka bir deyişle, $V_c(q)$ bu adımda kısmen belirlenmektedir. Bu çözümlerin varlığı Lemma 1'de incelenecektir.

Adım 3. $M_{ci} > 0 \forall i$ olmasını sağlayan ek koşulları belirleyelim ve M_i 'leri kullanarak bu koşulları ve Adım 2'de bulunan koşulları sağlayan M_{ci} 'leri parametrik formda oluşturalım. Çok seçimli M_{ci} 'ler oluşması durumunda, bu matrisler sonraki adımlarda kullanılmak üzere parametrik olarak ifade edilmelidir.

Açıklama. (3.2)'de verilen PDE'lerin ortak çözümünün varlığı, yani verilen M_i için $V_c(q)$ ve $M_{ci} > 0, \forall i$ 'nin varlığı, burada önerilen yöntemle kararlı hale getirilebilen EL sistem sınıfını belirleyecektir.

Adım 4. Adım 1'de tanımlanan $h_i(q)$ 'ler ve Adım 3'te bulunan M_{ci} 'ler cinsinden $\tilde{M}_{ci} + M_{cbi} = M_{ci}$ olmak üzere kapalı döngü sisteminin genelleştirilmiş atalet matrisini tanımlayalım,

$$\hat{M}_c(q) = \sum_{i=1}^r (h_i(q) \tilde{M}_{ci} + M_{cbi}) \quad (3.3)$$

Aşağıdaki ifade geçerli olacak şekilde $h_i(q)$ parametrelerini ve $i = 1, 2, \dots, r$ için $h_i(q)$ 'nin ϵ_i parametrelerinin $\tilde{M}_{ci}$ ve M_{cbi} sabit matrislerinin bulunması gerekir:

$$\min \left\| G^\perp \left[\frac{\partial V(q)}{\partial q} - M(q) \left(\hat{M}_c(q) \right)^{-1} \left(\frac{\partial V_c(q)}{\partial q} \right) \right] \right\| \quad (3.4)$$

Açıklama. $h_i(q)$ 'ler, $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i |q - q_{il}|)^2}$ olarak seçilmesi durumunda, ϵ_i parametreleri ve bias terimleri bu adımda belirlenebilecektir. Şayet Adım 2'de belirtildiği gibi M_{ci} parametrik formda ifade edilmişse, bu parametrelerin uygun değerleri de bu adımda belirlenmelidir.

Adım 5. Aşağıda verilen kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrislerini bulalım,

$$G^\perp \left(C - M \hat{M}_c^{-1} \hat{C}_c - M \hat{M}_c^{-1} (J + R) \right) \dot{q} = 0 \quad (3.5)$$

burada,

$$\hat{C}_c(q, \dot{q}) = \frac{\partial \hat{M}_c(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{M}_c(q) \dot{q}}{\partial q} \right)^T \quad (3.6)$$

şeklindedir. Şimdi (3.5)'de verilen kinetik enerji eşleştirme koşulunu aşağıdaki gibi düzenleyelim,

$$G^\perp M \hat{M}_c^{-1} [\hat{M}_c M^{-1} C - \hat{C}_c - (J + R)] \dot{q} = 0 \quad (3.7)$$

$J(q, \dot{q})$ değerini de aşağıdaki şekilde seçelim,

$$J(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [(\hat{M}_c M^{-1} C - \hat{C}_c) - (\hat{M}_c M^{-1} C - \hat{C}_c)]^T \quad (3.8)$$

ve kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayan $R(q, \dot{q}) \geq 0$ değerini,

$$G^\perp M \hat{M}_c^{-1} \left[\frac{1}{2} \left((\hat{M}_c M^{-1} C - \hat{C}_c) + (\hat{M}_c M^{-1} C - \hat{C}_c)^T \right) - R \right] = 0 \quad (3.9)$$

sağlayacak şekilde hesaplayalım.

Adım 6. Kapalı çevrimli sistemin istenen noktada kararlı olmasını sağlayan enerji fonksiyonunu sisteme atayan kontrol kuralı,

$$u_c = (G^T G)^{-1} G^T \left[(C - M \hat{M}_c^{-1} \hat{C}_c - M \hat{M}_c^{-1} (J + R)) \dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} - M \hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \quad (3.10)$$

ifadesi ile verilir.

Adım 7. Asimptotik kararlılık için sisteme $K_v > 0$ olacak şekilde sönüm fonksiyonu atansın,

$$u_d = -K_v G^T M^{-1}(q) \hat{M}_c(q) \dot{q} \quad (3.11)$$

böylece, sistemi istenen denge noktasında asimptotik kararlı kılan kontrol kuralı aşağıdaki şekilde olacaktır,

$$u = u_c + u_d \quad (3.12)$$

Aşağıdaki lemma, Adım 2'de (3.2)'nin ortak çözümünün varlığı için yeter koşulu vermektedir.

Lemma 1. $\nabla_q V_c(q^*) = 0$ ve $V_{c_{hess}}^q(q^*) > 0$ olan bir $V_c(q)$ ve $M_{c1} > 0$ olması durumunda,

$$G^\perp \left(\frac{\partial V}{\partial q} - M_1 M_{c1}^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) = 0 \quad (3.13)$$

ve aşağıdaki denklemin geçerli olduğu r sayıda matris vardır:

$$G^\perp (M_i M_{ci}^{-1} - M_j M_{cj}^{-1}) = 0, \quad \forall i, j \quad (3.14)$$

O halde, $V_c(q)$ (3.2)'de verilen PDE için ortak çözümdür, yani,

$$G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M_i M_{ci}^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] = 0, \quad \forall i \quad (3.15)$$

İspat:

$V_c(q)$ ve $M_{ci} > 0$ fonksiyonlarının $i = 1$ için aşağıdaki ilişkiyi sağladığını varsayalım:

$$G^\perp \left(\frac{\partial V}{\partial q} - M_1 M_{c1}^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Bu ifade aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$G^\perp M_i M_{ci}^{-1} = G^\perp M_j M_{cj}^{-1}, \quad \forall i, j \quad (3.17)$$

Bu da bizi aşağıdaki sonuca götürür:

$$G^\perp \frac{\partial V}{\partial q} - \underbrace{G^\perp M_1 M_{c1}^{-1}}_{G^\perp M_j M_{cj}^{-1}} \frac{\partial V_c}{\partial q} = 0, \quad \forall i, j \quad (3.18)$$

(3.18), (3.2)'de verilen ve önermenin kanıtı olan PDE'lerden ibarettir. $\square$

3.2 Kararlılık Analizi

Kontrollü Lagrangian yöntemi, kapalı çevrim sistemin istenilen denge noktasının kararlılığını, atanan toplam enerji fonksiyonu ve sönüm enjeksiyonu ile garanti eder. Ancak, bu tez çalışmasında önerilen yaklaşım, r sayısının, yani alt bölge miktarının tüm seçimleri için sistemin keyfi bir başlangıç koşulundan bırakıldığında istenen denge noktasında kararlılığını garanti edememektedir. Bunun nedeni, (3.11) kontrol kuralı aracılığıyla atanan kapalı döngü sistemin enerji fonksiyonunun tam olarak belirlenememesi, ancak sadece yaklaşık olarak belirlenebilmesidir. Bu sebeple, sistemin bırakıldığı ilk koşul bölgesinin genişliği ile kararlılığı garanti eden alt bölge miktarı arasındaki ilişkileri de veren bir varlık koşulu belirlenmek zorundadır. Bu bölümde, Butz (1969), Heinen ve Vidyasagar (1970), Ahmadi (2008) ve Ahmadi ve Parrilo (2014)'de verilen sonuçlar kullanılarak bu konu ele alınacaktır.

Kapalı çevrim sistemin hareket denklemini elde etmek için $u(q, \dot{q})$ (3.12)'yi sistem denklemi (2.64)'te yerine koyalım

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = G(G^T G)^{-1}G^T \left[(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R))\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1}\frac{\partial V_c}{\partial q} \right] + Gu_d \quad (3.19)$$

ve aşağıdaki ilişkiyi göz önünde bulunduralım (EK A.4),

$$G(G^T G)^{-1}G^T + (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1}G^\perp = I \quad (3.20)$$

Burada,

$$G_{n \times m} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad G_{p \times n}^\perp = [\tilde{g}_{p \times p} \quad 0], \quad p = (n - m) \quad (3.21)$$

(EK A.5) ve (EK A.6)'da verilen bazı cebirsel işlemlerden sonra (3.19) aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
M^{-1}\hat{M}_c \left(\hat{M}_c \ddot{q} + \hat{C}_c \dot{q} + (J + R)\dot{q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) \\
= -(G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\left(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R) \right) \dot{q} \right] \\
- (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] + Gu_d
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ve kinetik enerji eşleşme koşulu sağlandığında, kapalı döngü sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned}
\left(\hat{M}_c \ddot{q} + \hat{C}_c \dot{q} + (J + R)\dot{q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) \\
+ \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] - Gu_d = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Denklem (3.23)'te verilen sistemin kararlılığını incelemek için aday Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki şekilde seçelim

$$\mathcal{V}(q, \dot{q}) = H_c(q, \dot{q}) - V_c(q^*) \tag{3.24}$$

Burada $H_c(q, \dot{q})$ kapalı çevrim sistemin toplam enerjisidir ve şu şekilde tanımlanır,

$$H_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \hat{M}_c(q) \dot{q} + V_c(q) \tag{3.25}$$

Bu fonksiyonun yörünge boyunca alınan birinci türevi (3.23) ve (3.24) denklemlerinden aşağıdaki gibi elde edilir (EK A.7)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T R \dot{q} - \dot{q}^T \hat{M}_c M^{-1} G K_v G^T M^{-1} \hat{M}_c \dot{q} \\
- \dot{q}^T \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.4)'den elde edilen potansiyel enerji eşleştirme koşulunun hatasını belirlemek için $\bar{\epsilon}(q)$, $\hat{\epsilon}(q)$ ve $\epsilon(q, \dot{q})$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}(q) &= G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right], \\
\hat{\epsilon}(q) &= \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} \bar{\epsilon}(q), \\
\epsilon(q, \dot{q}) &= -\dot{q}^T \hat{\epsilon}(q)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.26) aşağıdaki şekilde düzenleyelim,

$$\dot{\mathcal{V}}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T R \dot{q} - \dot{q}^T \hat{M}_c M^{-1} G K_v G^T M^{-1} \hat{M}_c \dot{q} + \epsilon(q, \dot{q}) \tag{3.28}$$

Birinci türevi aşağıdaki gibi olan bir $P(q, \dot{q})$ fonksiyonu tanımlayalım,

$$\dot{P}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T R \dot{q} - \dot{q}^T \hat{M}_c M^{-1} G K_v G^T M^{-1} \hat{M}_c \dot{q} \tag{3.29}$$

Sonuç olarak (3.26) bağıntısı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\dot{\mathcal{V}}(q, \dot{q}) = \dot{P}(q, \dot{q}) + \epsilon(q, \dot{q}) \tag{3.30}$$

Potansiyel enerji eşleşme koşulu $\hat{M}_c(q)$ ve $V_c(q)$ ile tam olarak sağlandığı durumda, (3.24)'de verilen Lyapunov fonksiyonunun birinci türevinin $\dot{P}(q, \dot{q}) \leq 0$ olduğu Bölüm 2.2'de incelenerek, sistemin kararlılığı gösterilmiştir. (3.30)'da görüldüğü üzere $\dot{P}(q, \dot{q}) \leq 0$ olduğundan, yörünge boyunca $\epsilon(q, \dot{q}) \leq 0$ olması durumunda, kapalı döngü sisteminin La Salle Teoremine göre kararlı olduğunu söyleyebiliriz. Ancak, herhangi bir $(q, \dot{q})$ için $\epsilon(q, \dot{q}) > 0$ olması durumunda, kapalı döngü sisteminin kararlı olduğu sonucuna varılamaz. Bu sebeple Butz (1969) ve Heinen ve Vidyasagar (1970)'de verilen Lagrange kararlılığı teoremini ve Ahmadi (2008) ve Ahmadi ve Parrilo (2014)'de verilen monoton azalan olmayan Lyapunov fonksiyonlarına ilişkin birkaç sonucu birlikte kullanacağız.

Teorem 1 (Butz, 1969; Heinen ve Vidyasagar, 1970). Eğer $f(x)$ iki kez sürekli türevlenebilen, $V(x)$ R^n 'de tanımlı üç kez sürekli türevlenebilen reel değerli bir fonksiyon ve $\mathcal{V}(x) \rightarrow +\infty$ ise $\|x\| \rightarrow +\infty$ olduğunu varsayalım. Ayrıca, $\Omega \subset R^n$ de sınırlı bir küme ve $\tilde{\Omega}$ onun tümleyeni ise, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_2 \geq 0$ var ise, $\dot{x} = f(x)$ sistemi tüm $x \in \tilde{\Omega}$ için Lagrange anlamında kararlıdır.

$$\alpha_2 \mathcal{V}(x) + \alpha_1 \dot{\mathcal{V}}(x) + \ddot{\mathcal{V}}(x) < 0 \quad (3.31)$$

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, (3.31)'de verilen Lagrange kararlılık koşulunu garanti eden $\| \epsilon(q, \dot{q}) \|$ sınırını belirlemek mümkündür. Bunu sağlamak için, $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_2 > 0$ değerlerinin varlığını göstermek yeterlidir.

$$\alpha_2 \ddot{P}(q, \dot{q}) + \alpha_1 \dot{P}(q, \dot{q}) + \dot{P}(q, \dot{q}) + \alpha_2 \ddot{\epsilon}(q, \dot{q}) + \alpha_1 \dot{\epsilon}(q, \dot{q}) + \epsilon(q, \dot{q}) < 0 \quad (3.32)$$

Denklem (3.32)'yi sağlayacak şekilde $\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_2 \geq 0$ 'ı mümkün kılan belirli bir miktarda r alt bölgesinin olması gerekmekte, yani sistemin Lagrange kararlılığı garanti altına alınmış olmaktadır. Ayrıca, yukarıdaki teoremin aşağıdaki versiyonunu vermek faydalı olabilir.

Teorem 2. (Ahmadi, 2008) $\dot{x} = f(x)$ sürekli zamanlı sistemi varsayalım. Eğer üç kez türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu $\mathcal{V}(x(t))$ varsa ve aşağıdaki eşitsizliği tüm $x \neq 0$ için sağlayan $\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_2 \geq 0$ skalar değerleri mevcutsa,

$$\alpha_2 \ddot{\mathcal{V}}(x) + \alpha_1 \dot{\mathcal{V}}(x) + \dot{\mathcal{V}}(x) < 0 \quad (3.33)$$

o zaman herhangi bir $x(0)$ için, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(x(t)) \rightarrow 0$ ise $\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktası global olarak asimptotik kararlıdır.

Sonuç olarak Ahmadi (2008), dinamik bir sistemin yörüngesi boyunca monoton olarak azalan bir Lyapunov fonksiyonunun varlığının kararlılık için bir gereklilik olmadığını, bunun yerine enerji fonksiyonunun $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(x(t))$ limitinin sıfıra ya da sabit bir değere yakınsamasının kararlılığı garanti etmek için yeterli olduğunu göstermiştir. Yukarıda özetlenen teoremlerin sonucu olarak, bu tez çalışmasında önerilen yöntemin (34)'te tanımlanan $\bar{\epsilon}(q) < \infty$ koşulu altında kararlılığı garanti ettiği aşağıdaki Sonuç 1 de gösterilmiştir.

Sonuç 1. Şu tanımı yapalım,

$$E(q) \triangleq \int \hat{\epsilon}^T(q) dq \quad (3.34)$$

Bu durumda (3.30)'da verilen $\dot{q}^T \hat{\epsilon}(q)$ terimi için aşağıdaki bağıntı elde edilir,

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}^T(q) &= \left(\frac{\partial E(q)}{\partial q} \right)^T \\ \dot{q}^T \hat{\epsilon}(q) &= \dot{q}^T \frac{\partial E(q)}{\partial q} = \frac{dE(q)}{dt} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$\mathcal{V}(q, \dot{q})$ 'nin (3.28) de verilen ifadesi, (3.30) kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\mathcal{V}(q, \dot{q}) = P(q, \dot{q}) - \int \dot{q}^T \hat{\epsilon}(q) dt \quad (3.36)$$

Aşağıdaki cebirsel işlemlerden sonra,

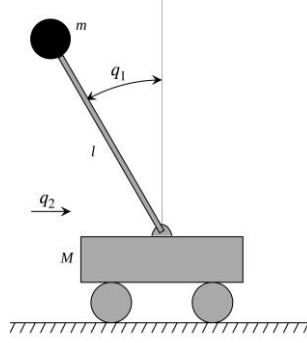
$$\begin{aligned} \int \dot{q}^T \hat{\epsilon}(q) dt &= \int \frac{dE(q)}{dt} dt = \int d(E(q)) = E(q) \\ \int_0^t \dot{q}^T \hat{\epsilon}(q) dt &= \int_{q_0}^{q_t} d(E(q)) = E(q_t) - E(q_0) \leq 2 \| E \| , \quad \forall t \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. Bu durumda (3.36) ifadesi için,

$$\mathcal{V}(q, \dot{q}) \leq P(q, \dot{q}) - 2 \| E \| \quad (3.38)$$

yazılabilir. Teorem 2'den $\| E \| < \infty$ olduğu sürece, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(q, \dot{q}) \rightarrow 0$ olduğu görülür, çünkü $\lim_{t \rightarrow \infty} P(q, \dot{q}) \rightarrow 0$ ve $q = q^*$ 'da $\| E \| = 0$ 'dır. Bu durumda, bu tez çalışmasında önerilen yöntemin kararlılık koşulunun $\| E \|$ teriminin sonlu olmasını sağlayan bir r sayısı seçimi olduğunu söyleyebiliriz; dolayısıyla, (2.70)'te verilen kontrol kuralı, (2.58)'i veya eşdeğer olarak (2.64)'de verilen sistemi, sönüm fonksiyonu K_v ile istenen denge noktasında kararlı hale getirir. Bu tür alt bölgelerin varlığı ve bölge sayısının sistemin kararlı kılınabildiği başlangıç koşulu bölgelerine etkileri örnekler üzerinden de gösterilecektir.

3.3 Örnek: Araç ve Ters Sarkaç Sistemi



Şekil 3.1 : Araç ve ters sarkaç sistemi

Araç ve ters sarkacın dinamik denklemi Liu ve Tu (2013)'de aşağıdaki gibi verilmiştir

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad M(q) = \begin{bmatrix} 1 & b \cos q_1 \\ b \cos q_1 & c \end{bmatrix}, \quad V = a \cos q_1, \quad (3.39)$$

$$a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{1}{l}, \quad c = \frac{m + M}{l^2 m}$$

Burada m sarkacın kütlesi, M arabanın kütlesi, l sarkacın uzunluğu ve g yerçekimidir. Arabanın konumu, $q_1 = 0$ ve herhangi bir q_2 sistemin kararlı bir denge noktasıdır. Çözümü bulma prosedürü aşağıdaki gibi verilmiştir:

1. Adım: EL sisteminin konfigürasyon uzayında 13 adet alt bölge tanımlayalım;

$$\mathbb{S}_i \triangleq \left\{ q \mid h_i(q) \geq h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, 13, \quad i \neq l, \quad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (3.40)$$

burada $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i \|q - q_i\|)^2} + b_i$ olarak seçilmiştir. q_i 'lerin $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ için $q_1^i = (\pi/2) - (i - 1)(\pi/12)$ 'e karşılık gelen genelleştirilmiş koordinatların değerleri olduğunu da belirtelim.

2. Adım: Bu alt bölgelerin merkezlerindeki potansiyel enerji eşleşme koşullarını bulalım.

Denklem (3.2)'de verilen koşulu çözmek için bir matris tanımlayalım:

$$S_i = M_i M_{ci}^{-1} \quad (3.41)$$

Parametreleri yukarıdaki gibi olan araba ve sarkaç sistemi için potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$G^\perp \left[\begin{bmatrix} mgl \sin & q_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - S_i \begin{bmatrix} \partial V_c / \partial q_1 \\ \partial V_c / \partial q_2 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (3.42)$$

$$mgl \sin q_1 = S_i(1,1) \frac{\partial V_c}{\partial q_1} + S_i(1,2) \frac{\partial V_c}{\partial q_2}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Bu r adet PDE'lerin ortak çözümü olan V_c 'nin parametrik formdaki genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_c(q) = \frac{a}{S_i(1,1)} \cos(q_1) + \Phi(z(q)) \quad (3.43)$$

$$z(q) = (q_2 - q_2^*) - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} q_1$$

Burada $\Phi(z(q))$, $\nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi türevlenebilir bir fonksiyondur. $V_{c_{\text{hess}}}(q^*) > 0$ 'ı oluşturmak için, $K_p > 0$ için $\Phi(z) = (K_p/2)z^2$ olarak alınabilir:

$$V_c(q) = K_p \left(\frac{q_2^2}{2} - q_2 q_{c2} + \frac{q_{c2}^2}{2} + \frac{q_1(-q_2 + q_{c2})S_i(1,2)}{S_i(1,1)} + \frac{q_1^2 S_i(1,2)^2}{2S_i(1,1)^2} \right) + \frac{a \cos q_1}{S_i(1,1)} \quad (3.44)$$

$V_c(q)$ 'nin parametrik formda olduğunu ve bu aşamada kısmi olarak belirlendiğini dikkate alalım. $V_c(q)$ 'nin gradyanı ve Hessian (Hesse) matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} \frac{K_p S_i(1,2) \left(-q_2 + q_2^* + \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) - a \sin q_1}{S_i(1,1)} \\ -K_p \left(-q_2 + q_2^* + \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$V_{\text{chess}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{(K_p S_i(1,2)^2 - S_i(1,1) \cos q_1)}{S_i(1,1)^2} & \frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \\ -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} & K_p \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$V_{\text{chess}}^q(q) > 0$ oluşturmak için sonraki koşullar şu şekilde bulunur:

$$S_i(1,1) < 0, \quad K_p > 0 \quad (3.47)$$

$S_i(1,1) < 0$ olduğu sürece, bu adımda belirlenen $V_c(q)$, herhangi bir $S_i(1,1)$ ve $S_i(1,2)$ için r sayıda denklemin ortak çözümüdür ve aranan şartları sağlamaktadır. Ayrıca M_{ci} 'nin sağlaması gereken bazı koşullar $S_i(1,1)$ üzerinden tanımlanmaktadır.

3. Adım: $M_{ci} > 0$ için gerekli ek koşulların bulunması. Bu amaçla, M_{ci} matrisleri S_i matrisinin elemanları cinsinden yazılacaktır.

Araç ve ters sarkaç sistemi yapısı gereği $q_1 = \pi/2$ ve $q_1 = 0$ değerlerinde tekildir. Bu sebeple $M_{ci} > 0$ koşulunu sağlamak için konfigürasyon uzayında bu değerler çıkartılacaktır

$m_i = b \cos q_1^i$ ve $q_1^i = (\pi/2) - i(\pi/12)$ olmak üzere M_i matrisleri şu şekilde verilmiştir:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & m_i \\ m_i & c \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (3.48)$$

Ardından, M_{ci} 'lerin genel formu S_i matrisinin elemanları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{-m_i S_i(1,2) + S_i(2,2)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} & \frac{-6S_i(1,2) + m_i S_i(2,2)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} \\ \frac{m_i S_i(1,1) - S_i(2,1)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} & \frac{6S_i(1,1) - m_i S_i(2,1)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 13 \quad (3.49)$$

için aşağıdaki koşulların karşılanması gerekir:

$$\begin{aligned}
S_i(1,2) &> 0, -\frac{S_i(1,1)}{S_i(1,2)} < \min\{m_i\} \\
S_i(2,1) &< \frac{m_i S_i^2(1,1) + 6S_i(1,1)S_i(1,2)}{S_i(1,1) + m_i S_i(1,2)} \\
S_i(2,2) &= \frac{m_i S_i(1,1) + 6S_i(1,2) - S_i(2,1)}{m_i}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Gösterimi kolaylaştırmak için şu tanımları yapalım: $\alpha_1 = -(S_i(1,1))/(S_i(1,2))$, $\alpha_2 = S_i(1,2)$. S_i koşulları incelendiğinde $0 < \alpha_1 < \min\{m_i\}$, $\alpha_2 > 0$ olduğu görülecektir. Ayrıca $\beta > 0$ değişkenini tanımladığımız zaman $M_{ci} > 0, \forall i$ koşullarını aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz:

$$\begin{aligned}
S_i(1,1) &= -\alpha_1 \alpha_2 \\
S_i(1,2) &= \alpha_2 \\
S_i(2,1) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 (6 - \alpha_1 m_i)}{\alpha_1 - m_i} - \beta \\
S_i(2,2) &= \frac{(6\alpha_2 + \beta)m_i - \alpha_1(\beta + \alpha_2 m_i^2)}{m_i(-\alpha_1 + m_i)}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

M_{ci} matrisleri $\beta > 0$, $\alpha_2 > 0$, $0 < \alpha_1 < \min\{m_i\}, \forall i$, için aşağıdaki formda düzenleyebiliriz:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_1 \beta + m_i(\beta - \alpha_2(-6 + m_i^2))}{\alpha_2 \beta (\alpha_1 - m_i)^2} & \frac{m_i(\beta m_i - \alpha_1(\beta + \alpha_2(-6 + m_i^2)))}{\alpha_2 \beta (\alpha_1 - m_i)^2} \\ \frac{m_i(\beta m_i - \alpha_1(\beta + \alpha_2(-6 + m_i^2)))}{\alpha_2 \beta (\alpha_1 - m_i)^2} & \frac{m_i(\alpha_1 \beta m_i - \beta m_i^2 + \alpha_1^2 \alpha_2(-6 + m_i^2))}{\alpha_2 \beta (\alpha_1 - m_i)^2} \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

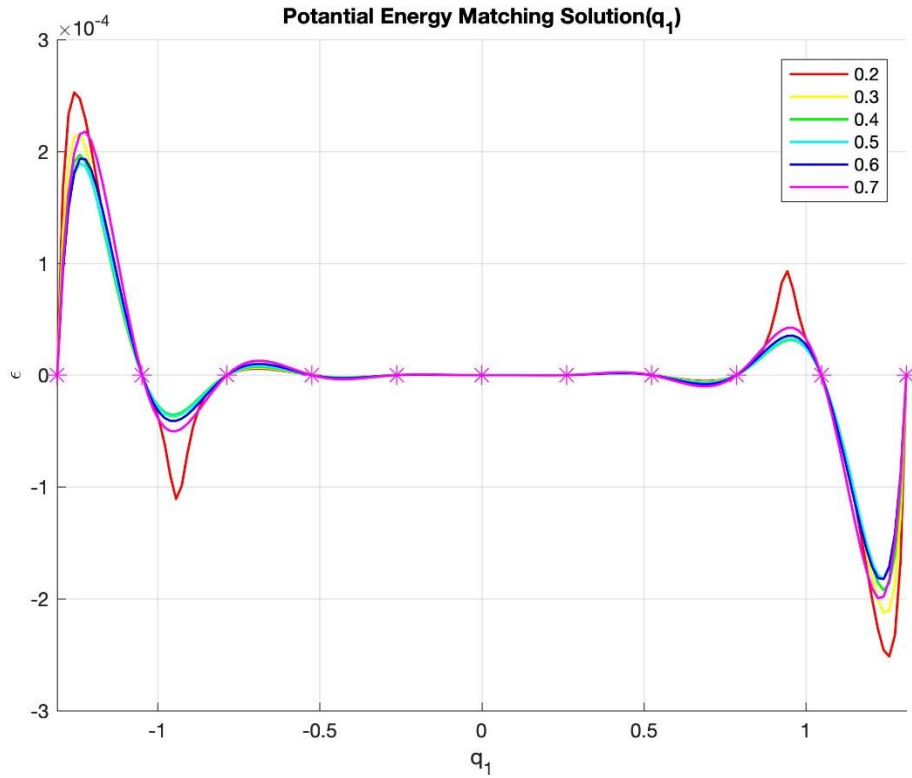
$i = 2, 3, \dots, 11$

α_1 'in varlığı $\min\{m_i\} > 0$ olduğu sürece garanti edildiğinden, $\gamma = 1 - \alpha_1 / \min\{m_i\}$ olacak şekilde yeni bir $0 < \gamma < 1$ tanımlayalım. $(-\pi/2, \pi/2)$ değerleri için $m_i = 0$ olduğundan ve bu sebeple de, $\min\{m_i\} > 0$ şartı gereği, $M_{ci} > 0$ olacağı için $q_1 = \pm\pi$ değerlendirmeye alınmamıştır.

4. Adım: Kapalı döngü sistemin genelleştirilmiş atalet matrisini yaklaşık olarak oluşturalım:

$$\hat{M}_c(q) = \left(\sum_i e^{-(\epsilon_i(q_i-q))^2} M_{ci} \right) + M_{cb} \quad (3.53)$$

MATLAB neural network toolbox kullanılarak, Açıklama 3'te açıklanan ϵ_i ve M_{cb} parametreleri (3.53)'ü sağlayacak şekilde bulunmuştur. Potansiyel enerji eşleşme koşulu $\bar{\epsilon}(q)$ 'nin yakınsama hatası (3.27)'de tanımlanmıştır ve $\{-5\pi/12 < q_1 < 5\pi/12\}$ aralığında 11 sayıda alt bölge olması durumunda oluşan yakınsama hatası da Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (farklı ϵ_i değerleri için) (Araç ve ters sarkaç)

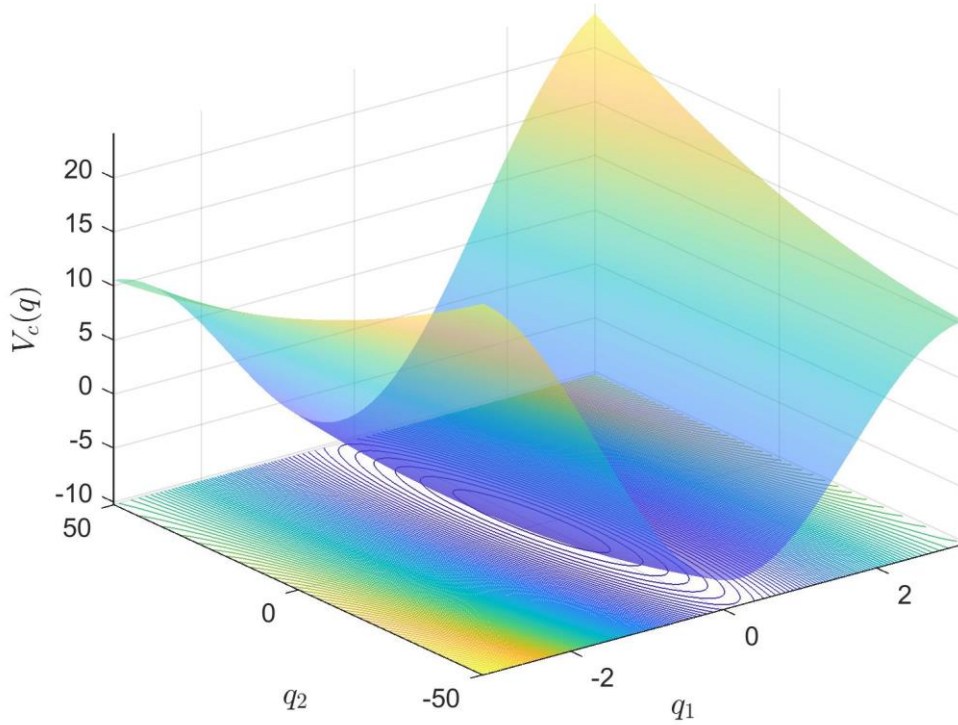
5. Adım: (3.9)'da verilen kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak şekilde $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrislerini bulalım. Ara. sarkaç sistemi için $J(q, \dot{q})$ (21)'deki gibi seçilebilir ve $R(q, \dot{q}) \geq 0$ olduğu sürece:

$$R(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\varphi \Sigma(1,2)^2}{\Sigma(1,1)^2} & -\frac{\varphi \Sigma(1,2)}{\Sigma(1,1)} + \frac{\Sigma(1,1)\Pi(1,1)}{\Sigma(1,2)} + \Pi(1,2) \\ -\frac{\varphi \Sigma(1,2)}{\Sigma(1,1)} + \frac{\Sigma(1,1)\Pi(1,1)}{\Sigma(1,2)} + \Pi(1,2) & \varphi - \frac{\Sigma(1,1)^2 \Pi(1,1)}{\Sigma(1,2)^2} + \Pi(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$\Sigma(q, \dot{q})$ ve $\Pi(q, \dot{q})$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\Sigma &= G^T M \widehat{M}_c^{-1} \\ \Pi &= \frac{1}{2} \left(\widehat{M}_c M^{-1} C - \widehat{C}_c + (\widehat{M}_c M^{-1} C - \widehat{C}_c)^T \right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

6. Adım: Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol kuralını oluşturalım. Tasarım parametreleri $K_p = 1/500$, $\gamma = 0.8$, $\alpha_2 = 20$, $\beta = 30$ ve $\varphi = 0.02$ olarak seçilmiştir. Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol girişi, önceki adımlarda bulunan $\widehat{M}_c(q)$, $V_c(q)$, $J(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q})$ değerlerinin (3.10)'de verilen ifadede yerine konulmasıyla kolayca oluşturulabilir. Kapalı döngü sistem potansiyel enerji fonksiyonu yukarıda verilen kontrol tasarım parametreleri için Şekil 3.3'te gösterilmiştir.

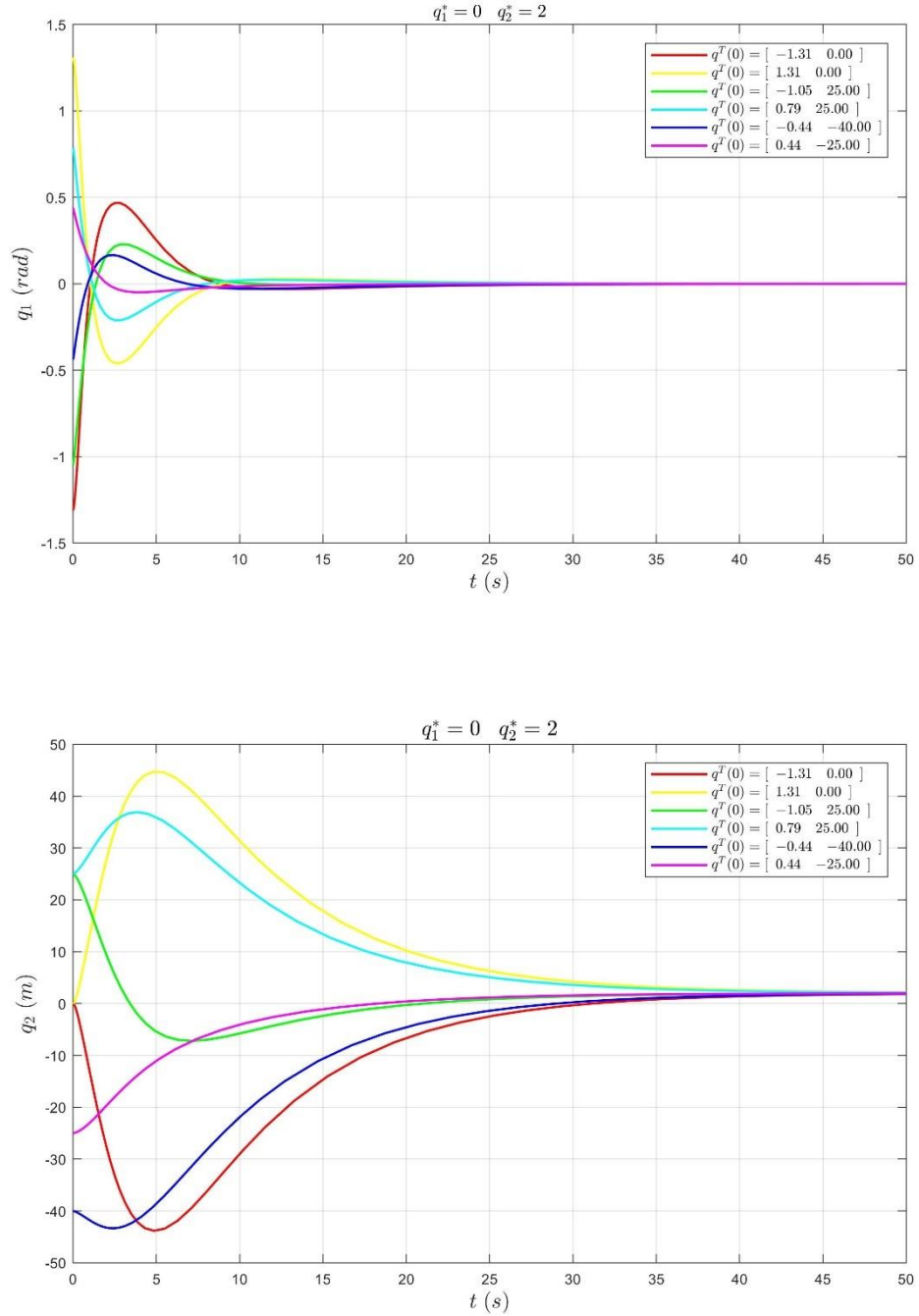


Şekil 3.3 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Araç ve ters sarkaç)

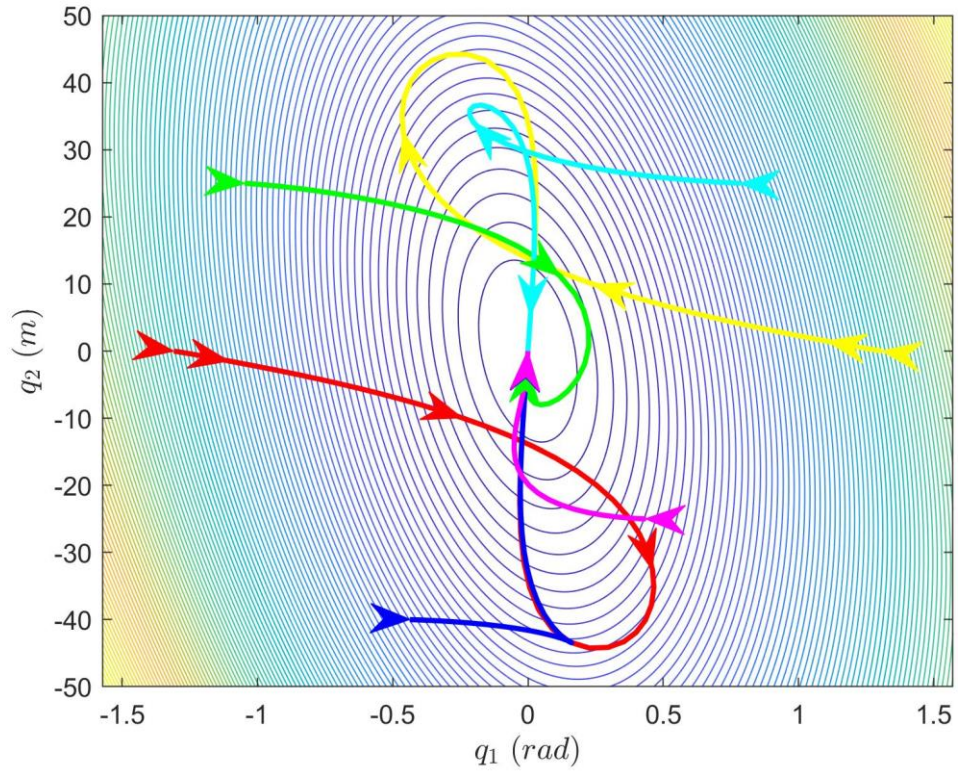
7. Adım: Sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için, sönüm enjeksiyonundan sorumlu kontrol girişi aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır:

$$u_d = -k_v G^T M^{-1}(q) \widehat{M}_c(q) \dot{q}, \quad k_v = 700$$

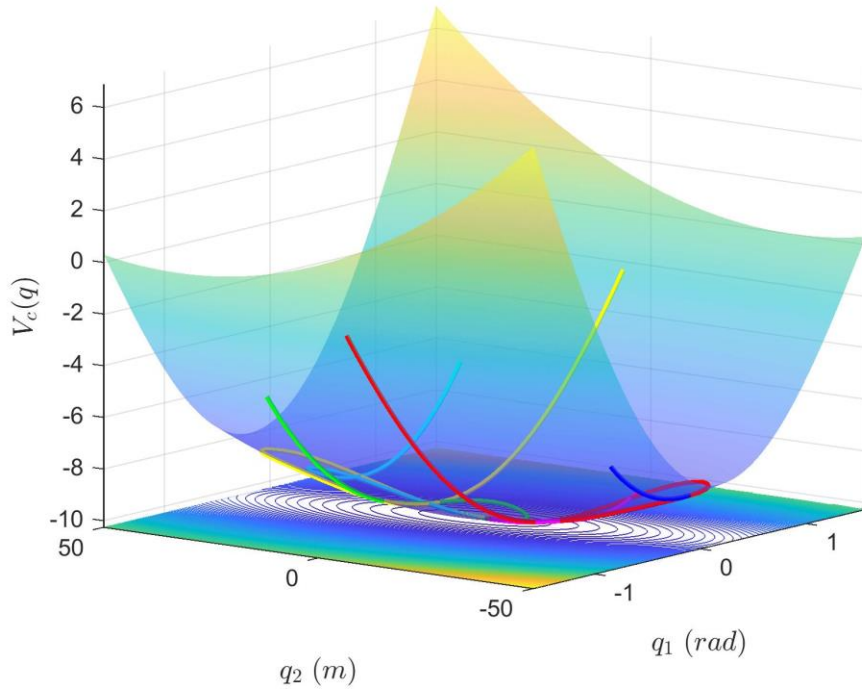
Sarkaç açısı ve araç konumunun zamana karşı değişimi bazı başlangıç koşulları için Şekil 4'te, $V_c(q)$ üzerindeki durum yörüngeleri ise Şekil 5 ve 6'da gösterilmiştir. Son olarak, $\dot{H}_c(q, \dot{q})$ ve $H_c(q, \dot{q})$ 'ın zamana karşı değişimi Şekil 7'de gösterilmiştir.



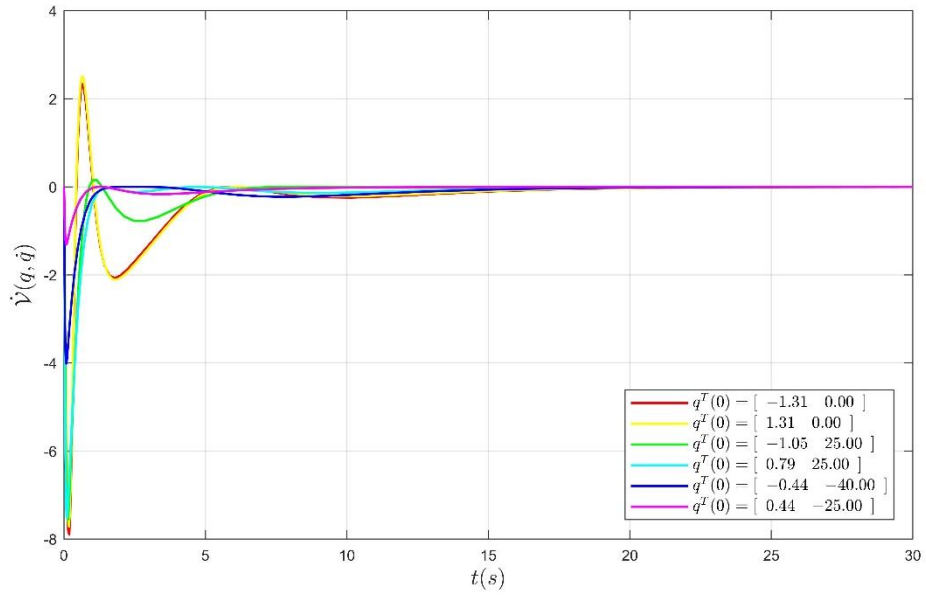
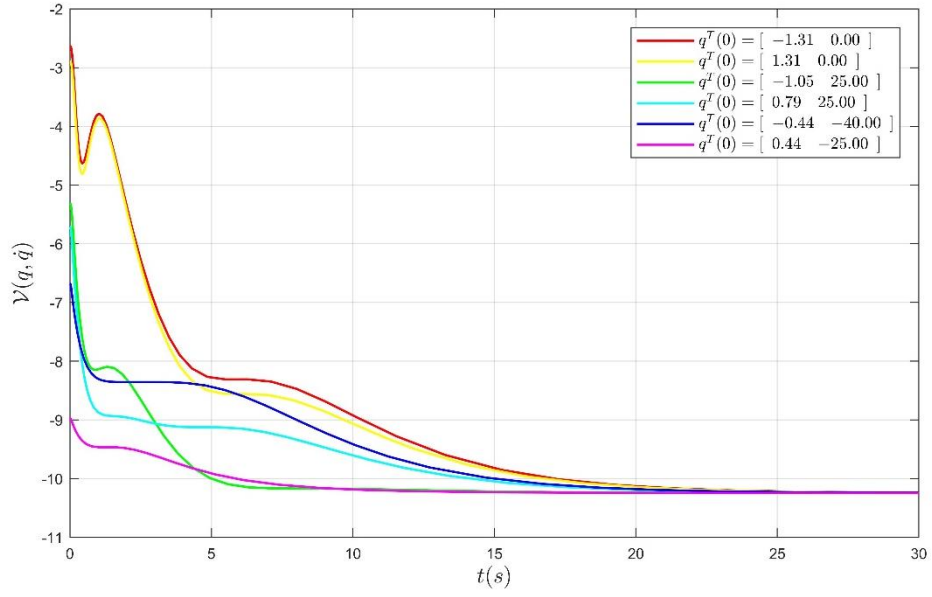
Şekil 3.4 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Araç ve ters sarkaç)



Şekil 3.5 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Araç ve ters sarkaç)



Şekil 3.6 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Araç ve ters sarkaç)



Şekil 3.7 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Araç ve ters sarkaç)

Simülasyon sonuçlarından görüldüğü üzere, önerilen yöntem sistemi istenen noktada başarılı bir şekilde kararlı hale getirmiştir. Adım 4'te belirtildiği gibi, sistemin kararlılığını garanti eden başlangıç koşulları kümesinin keyfi olarak oluşturulabileceği dikkate alınmalıdır. Bu çalışmada önerilen yöntemin hesaplama karmaşıklığı standart Kontrollü Lagrangian yöntemi ile karşılaştırılırsa, standart yöntem çözüm yöntemi belli olmayan ya da bazı durumlarda bulunmayan doğrusal ve homojen olmayan PDE'lerin çözülmesini gerektirirken, bu çalışmada önerilen yöntem herhangi bir yazılımın sembolik araç kutusu kullanılarak çözülebilen lineer PDE'lerin çözülmesini

gerektirmektedir. Ayrıca, simülasyon sonuçlarından, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(q, \dot{q}) = 0$ özelliğine sahip olan araba ve sarkaç sisteminin Lyapunov fonksiyonunun, Sonuç 1 ile tutarlı olarak, enerji fonksiyonundan sabit bir değer çıkarılarak seçilebileceği kolayca görülmektedir, yani $\lim_{t \rightarrow \infty} (H_c(q, \dot{q}) - V_c(q^*)) = 0$ ile $\mathcal{V}(q, \dot{q}) = H_c(q, \dot{q}) - V_c(q^*)$.



4. EKSİK SÜRÜLMÜŞ HAMILTONIAN SİSTEMLERİN MODEL YAKLAŞIKLIĞI İLE KONTROLÜ

Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi (2.90) ve (2.91)'de verilen eşleşme koşulları nonlineer ve nonhomojen PDE'ler olduğu için çözülmesi oldukça zordur. Aynı zamanda Blankenstein ve diğ (2006) ve Viola ve diğ (2007)'de de belirttiği gibi bu PDE'lerin genel bir çözüm yolu da mevcut değildir. Bu bölümde (2.91)'de verilen ve Potansiyel enerji eşleşme koşulu olarak adlandırılan PDE'lerin yaklaşık çözümünü bulacak bir yöntem önermektir. Bu amaçla, izole ve kararlı bir denge noktasına $(q^*, 0)$ sahip bir $V_d(q)$ bulunacak ve (2.91)'da verilen potansiyel enerji eşleşme koşulunu yaklaşık olarak sağlayan bir genelleştirilmiş atalat matrisi, $\hat{M}_d(q)$, bulunacaktır.

4.1 Yöntem

Bölüm-3'de olduğu gibi sunulan yöntemi adım adım açıklayalım:

Adım 1. Hamiltonian konfigürasyon uzayında r adet alt uzay ve aşağıda verilen skalar fonksiyonlar tanımlansın.

$$S_i \triangleq \{q | h_i(q) > h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad i \neq l\} \quad (4.1)$$

Burada $h_i(q)$ lar r sayıda $0 < h_i(q) \leq 1$ özelliğinde tanımlanmıştır ve ayrıca her bir alt uzayda $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ özelliğini sağlar.

Açıklama 1: Yukarıda verilen skalar fonksiyonlar radyal temelli fonksiyonlar olarak tanımlanabilir. Bu çalışmada $h_i(q)$ lar $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i |q - q_i|)^2}$ olarak seçilecektir. Burada q_i 'ler alt uzayların tam merkezleridir.

Adım 2: $M_i^{-1} = M^{-1}(q_i)$ olmak üzere r adet potansiyel enerji eşleşme koşulu $q = q_i$ noktaları için aşağıdaki şekilde bulunsun:

$$G^\perp [\partial_q V - M_{di} M_i^{-1} \partial_q V_d] = 0 \quad (4.2)$$

Denklem (4.2) da elde edilen r adet deklemin ortak çözümü olacak ve $\partial^2 V_d(q)/\partial q^2|_{q=q^*} > 0$, $\partial V_d(q)/\partial q|_{q=q^*} = 0$ özelliklerini sağlayacak bir kapalı çevrim potansiyel enerji fonksiyonu $V_d(q)$ ile $M_{di} > 0$ özelliğini sağlayacak r adet genelleştirilmiş atalet matrisi bulunsun.

Açıklama 2: Sistemin atalet matrisinden elde edilen M_i 'ler ile bulunan (4.2) PDE'lerinin ortak çözümünü sağlayan $V_d(q)$ ve $M_{di} > 0, \forall i$, varlığı çalışmada bahsedilen Hamiltonian sistem sınıfını belirler. Burada $M_{di} > 0$ 'ların tek değerli olması gerekmemektedir. Bu durumda M_{di} matrislerinin değerleri parametrik olarak da bulunabilir.

Adım 3: $\tilde{M}_{di} + M_{abi} = M_{di}$ olmak üzere kapalı çevrim sistemin genelleştirilmiş atalet matrisi *Adım 1*'de tanımlanan $h_i(q)$ 'lar ve *Adım 2*'de bulunan M_{di} ler kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\hat{M}_d(q) = \sum_{i=1}^r (h_i(q)\tilde{M}_{di} + M_{abi}) \quad (4.3)$$

Bu adımda $h_i(q)$ 'ların parametreleri, for $i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere $\tilde{M}_{di}$ ve M_{abi} sabit matrisleri aşağıdaki ifadeyi sağlayacak şekilde elde edilecektir.

$$\min \left\| G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - \hat{M}_d M^{-1} \left(\frac{\partial V_d}{\partial q} \right) \right] \right\| \quad (4.4)$$

Açıklama 3: Eğer $h_i(q)$ 'lar $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i|q-q_i|)^2}$ olarak seçilirlerse ϵ_i parametrelerinin bulunması gerekir. Eğer M_{di} 'ler *Açıklama 2*'de bahsedildiği gibi parametrik formda bulunduyorsa bu adımda uygun değerler alan sabit matrisler olarak tanımlanmaları gereklidir.

Adım 4: (4.3)'de verilen $\hat{M}_d(q)$ ve *Adım 3*'de bulunan $\tilde{M}_{di}$ ve M_{abi} sabit matrisleri ile $h_i(q)$ skaler fonksiyonlarını kullanarak yaklaşık bir genelleştirilmiş atalet matrisi bulunsun.

Adım 5: Kinetik enerji eşleşme koşulu *Adım 4*'te bulunan $\hat{M}_d(q)$ kullanılarak oluşturulsun:

$$G^\perp \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right) - \hat{M}_d M^{-1}(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} p^T \hat{M}_d^{-1} p \right) + J_2 \hat{M}_d^{-1} p \right] = 0 \quad (4.5)$$

Bu adımda (4.5)'yi sağlayan $J_2(q, \dot{q}) = -J_2^T(q, \dot{q})$ matrisi bulunacaktır.

Adım 6: Kapalı çevrim sistemin Hamiltonian fonksiyonu, *Adım 2*'de bulunan $V_d(q)$ ve *Adım 4*'te bulunan $\hat{M}_d(q)$ kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilsin

$$\hat{H}_d = \frac{1}{2} p^T \hat{M}_d^{-1}(q) p + V_d(q) \quad (4.6)$$

(4.6) kullanarak sistemin enerjisini şekillendirecek olan giriş işareti şu şekilde hesaplınsın:

$$u_c = (G^T G)^{-1} G^T [\partial_q H - \hat{M}_d M^{-1} \partial_q \hat{H}_d + J_2 \hat{M}_d^{-1} p] \quad (4.7)$$

Adım 7: Kapalı çevrim sistemin asimptotik kararlılığı sağlamak için $K_v > 0$ özelliğini sağlayan sönüm eklensin.

$$u_d = -K_v G^T \frac{\partial \hat{H}_d}{\partial p} \quad (4.8)$$

Nihayetinde sisteme uygulanacak kontrol işareti aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u = u_d + u_c \quad (4.9)$$

4.2 Örnek: Araç Ters Sarkaç Sistemi

Araç ters sarkaç sistemi (Şekil 3.1) en temel eksik sürülmüş, lineer olmayan sistem örneklerinden birisidir.,

Bu sistemin parametreleri şu şekilde tanımlanır:

$$K = \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_2^2 + m \dot{q}_2 \dot{q}_1 \cos q_1 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}_1^2 \quad (4.10)$$

$$V = mgl \cos q_1 \quad (4.11)$$

Yukarıda verilen denklemleri kullanarak sistemin genelleştirilmiş atalet matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$M(q) = \begin{bmatrix} 1 & b \cos q_1 \\ b \cos q_1 & c \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Burada

$$a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{1}{l}, \quad c = \frac{m + M}{l^2 m} \quad (4.13)$$

olarak tanımlanmıştır. Sistemin Hamilton denklemi ise aşağıda verilmiştir:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + mgl \cos q_1 \quad (4.14)$$

Sistemin hareket denklemi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-a + \Lambda) \sin q_1 \\ 0 \\ (-a + \Lambda) \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.15)$$

Burada Λ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\Lambda = \frac{b(cp_1 p_2 + b \cos q_1 (-cp_1^2 - p_2^2 + bp_1 p_2 \cos q_1))}{(c - b^2 \cos^2 q_1)^2} \quad (4.16)$$

Sistemi kararlı hale getiren kontrol kuralını bulmak için 4.1 bölümünde verilen adımları takip edelim adımlar izlenir:

Adım 1: Hamiltonian sistemin konfigürasyon uzayını 13 bölgeye ayıralım:

$$\mathbb{S}_i \triangleq \left\{ q \mid h_i(q) \geq h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, 13, \quad i \neq l, \quad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (25)$$

burada $h_i(q)$ 'lar $h_i(q) = e^{-(\epsilon_{il}|q-q_l|)^2} + b_i$ olarak seçilmiştir. Burada q_i 'ler ise $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ sağlayan değerlerdir.

Adım 2: Potansiyel enerji eşleşme koşulu seçilen konfigürasyon uzayının merkezleri için yazılsın ve (13) denklemini çözebilmek için aşağıdaki tanımlama yapılsın:

$$S_i = M_{di} M_i^{-1} \quad (4.17)$$

Potansiyel enerji eşleşme koşulu (4.14)'de verilen Hamiltonian denklemi için yazılacak olursa:

$$G^\perp \begin{bmatrix} mgl \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} - S_i \begin{bmatrix} \partial V_c / \partial q_1 \\ \partial V_c / \partial q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

$$mgl \sin q_1 = S_i(1,1) \frac{\partial V_d}{\partial q_1} + S_i(1,2) \frac{\partial V_d}{\partial q_2}$$

Elde edilen r adet PDE'yi sağlayan ortak genel çözüm:

$$\partial V_d(q) = \frac{a}{S_i(1,1)} \cos(q_1) + \Phi(z(q)) \quad (4.19)$$

$$z(q) = (q_2 - q_2^*) - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} q_1$$

olarak bulunur. Burada $\Phi(z(q))$, $n \nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan isteğe bağlı, türevi alınabilen bir fonksiyondur. Eğer bu fonksiyon $K_p > 0$ için $\Phi(z) = (K_p/2)z^2$ olarak alınırsa:

$$V_d(q) = K_p \left(\frac{q_2^2}{2} - q_2 q_{c2} + \frac{q_{c2}^2}{2} + \frac{q_1 (-q_2 + q_{c2}) S_i(1,3)}{S_i(1,1)} + \frac{q_1^2 S_i^2(1,2)}{2 S_i^2(1,1)} \right) + \frac{a \cos q_1}{S_i(1,1)} \quad (4.20)$$

Bulunan $V_d(q)$ 'nin gradyanı ve Hessian matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\nabla_q V_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{K_p S_i(1,2) \left(-q_2 + q_{c2} + \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) - a \sin q_1}{S_i(1,1)} \\ -K_p \left(-q_2 + q_{c2} + \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$V_{d_{hess}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{(K_p S_i^2(1,2) - a S_i(1,1) \cos q_1)}{S_i^2(1,1)} & -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \\ -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} & K_p \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Kuadratik bir $V_d(q)$ tanımlayabilmek için $V_{d_{hess}}^q(q) > 0$ yapısını sağlayan koşullar:

$$S_i(1,1) < 0 \text{ ve } K_p > 0 \quad (4.23)$$

olarak elde edilir.

Adım 3: M_{di} 'lerin bulunması.

İlk olarak $M_{di} > 0$ koşulunu sağlayacak ek koşulların bulunması gerekmektedir. M_{di} matrisleri $\forall i$ için S_i matrislerinin elemanları cinsinden çözülecektir. Bunun için $m_i = b \cos q_1^i$ olmak üzere M_i matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & m_i \\ m_i & c \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (4.24)$$

Burada $q_1^i = \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{12}$ olarak seçilmiştir ancak $q_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ değerleri tekilliğe sebep olduğu için hesaplamalara dahil edilmemiştir. Böylece M_{di} matrislerinin genel formu aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$M_{di} = \begin{bmatrix} \frac{-m_i S_i(1,2) + S_i(2,2)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} & \frac{-6S_i(1,2) + m_i S_i(2,2)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} \\ \frac{m_i S_i(1,1) - S_i(2,1)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} & \frac{6S_i(1,1) - m_i S_i(2,1)}{-S_i(1,2)S_i(2,1) + S_i(1,1)S_i(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$i = 1, 2, \dots, 11$

$S_i(1,1) < 0$ olmak üzere, Matematica yardımıyla $M_{di} > 0$, $\forall i$ sağlayan koşullar aşağıdaki şekilde bulunmuştur:

$$\begin{aligned}
S_i(1,2) &> 0, \\
-\frac{S_i(1,1)}{S_i(1,2)} &< \min\{m_i\}, \\
S_i(2,1) &< \frac{m_1 S_i^2(1,1) + 6S_1(1,1)S_i(1,2)}{S_i(1,1) + m_i S_i(1,2)}, \\
S_i(2,2) &= \frac{m_i S_i(1,1) + 6S_i(1,2) - S_i(2,1)}{m_i}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Gösterimi kolaylaştırmak amacıyla $\alpha_1 = -\frac{S_i(1,1)}{S_i(1,2)}$, $\alpha_2 = S_i(1,2)$ sabitleri tanımlansın. (35)'de verilen ikinci koşuldan açıkça görülecektir ki $0 < \alpha_1 < \min\{m_i\}$ ve $\alpha_2 > 0$ koşulunu sağlamalıdır. Ayrıca (35)'de verilen üçüncü koşulunu sağlamak için $\beta > 0$ özelliğinde bir skaler tanımlanırsa $M_{di} > 0 \forall i$ için (35)'de verilen koşullar aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
S_i(1,1) &= -\alpha_1 \alpha_2, \\
S_i(1,2) &= \alpha_2, \\
S_i(2,1) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 (6 - \alpha_1 m_i)}{\alpha_1 - m_i} - \beta, \\
S_i(2,2) &= \frac{(6\alpha_2 + \beta)m_i - \alpha_1(\beta + \alpha_2 m_i^2)}{m_i(-\alpha_1 + m_i)}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

M_{di} matrisleri de α_1 , α_2 , β terimleri cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

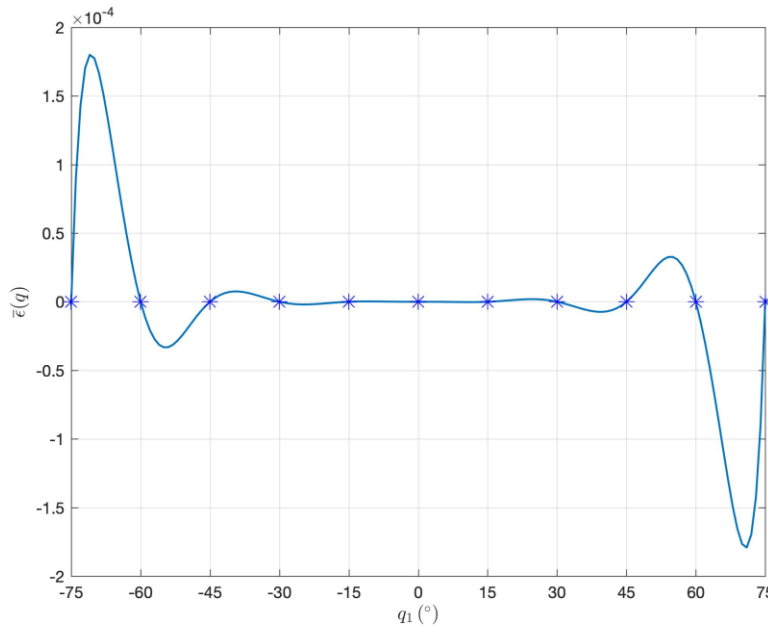
$$\begin{aligned}
M_{di} &= \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_2(-\alpha_1 + m_i) & \alpha_2(6 - \alpha_1 m_i) \\ \alpha_2(6 - \alpha_1 m_i) & \frac{(\alpha_1^2 \alpha_2 m_i^3 + m_i(36\alpha_2 - \beta(-6 + m_i^2)) + \alpha_1(-12\alpha_2 m_i^2 + \beta(-6 + m_i^2)))}{m_i(-\alpha_1 + m_i)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Burada $\beta > 0$, $\alpha_2 > 0$, $0 < \alpha_1 < \min\{m_i\} \forall i$ özelliklerini sağlar. $\min\{m_i\} > 0$ olduğu sürece α_1 'in varlığı garanti altına alındığı için $0 < \gamma < 1$ özelliğini sağlayan $\gamma = 1 - \frac{\alpha_1}{\min\{m_i\}}$ değişkeni tanımlanabilir.

Adım 4: Kapalı çevrim sistemin yaklaşık genelleştirilmiş atalet matrisinin inşa edilsin:

$$\widehat{M}_a(q) = \left(\sum_i e^{-(\epsilon_i(q_i - q))^2} M_{di} \right) + M_{dbi} \quad (4.29)$$

Açıklama 3'de verilen ϵ'_i ve M_{dbi} 'ler matlab neural network toolbox yardımıyla kolaylıkla bulunabilir. Potansiyel enerji eşleşme koşulunun $\{-75^\circ < q_1 < 75^\circ\}$ değerleri arasında 11 alt bölge için yaklaşıklıkından kaynaklanan hata Şekil 4.1'de incelenebilir.



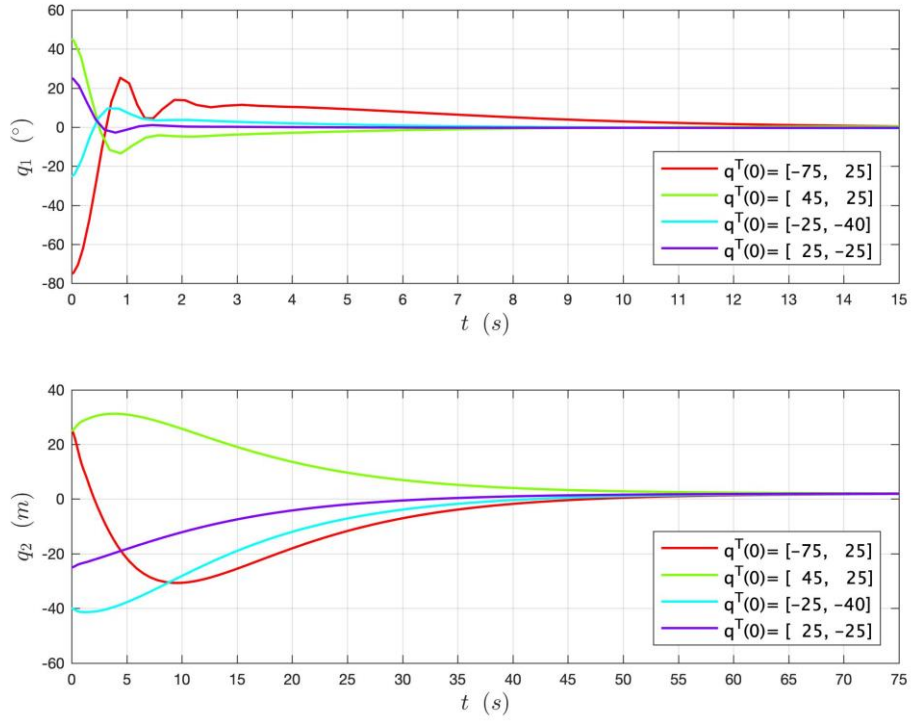
Şekil 4.1 : Potansiyel enerji eşleşme koşulunun yaklaşıklıkından kaynaklanan hata

Adım 5: (16)'yı sağlayan $J_2(q, \dot{q}) = -J_2^T(q, \dot{q})$ matrisi bulunsun.

Adım 6: $K_p = \frac{1}{100}$, $\gamma = 0.5$, $\alpha_2 = 20$, $\beta = 30$ değerleri için (17)'de verilen ve sistemin enerjisini şekillendiren giriş işareti bulunsun

Adım 7: Kapalı çevrim sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için $k_v = 700$ için sisteme sönüm ekleyen kontrol işareti (19)'dan bulunsun ve (20) kullanılarak sisteme uygulanacak kontrol işareti bulunsun.

Farklı başlangıç koşulları için sistemin cevabı Şekil 4.2'ten incelenebilir.



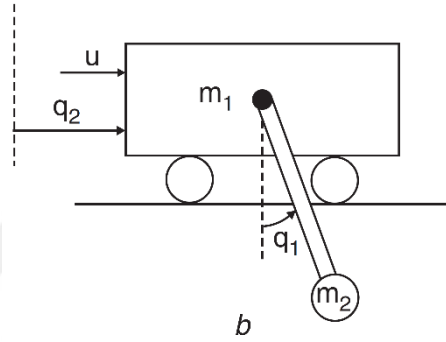
Şekil 4.2 : Farklı başlangıç koşullarında sistem cevabı



5. ÖRNEKLER

Bu bölümde literatürde yer alan çeşitli eksik sürülmüş doğrusal olmayan sistemler üzerinde önerilen yöntemin uygulamaları sunulacaktır.

5.1 Vinç Sistemi



Şekil 5.1 : Vinç Sistemi

Vinç sisteminin dinamik denklemi Liu ve Tu (2013)'de aşağıdaki gibi verilmiştir

$$M = \begin{bmatrix} m_2 l^2 & m_2 l \cos q_1 \\ m_2 l \cos q_1 & m_1 + m_2 \end{bmatrix}, \quad V(q) = -m_2 g l \cos q_1 \quad (5.1)$$

Burada m_1 aracın kütlesi, m_2 yükün kütlesi, l vincin kol uzunluğu, g ise yerçekimidir. Vinç sistemi durağan olarak kararlı bir sistem olsa da burada zorluk m_2 'nin değişken değerler alabilmesinde ve vincin yapacağı salınım hareketinin yüke ya da vince zarar vermesinden kaynaklanmasıdır. Bu sebeple sistemde bulunan yük terimi olan $m_2 = m_2^0 + M$ olarak alınmış ve kapalı çevrim sistem $0 < M < 80m_2^0$ değerleri için makul bir salınımda kararlı kılacak kontrol kuralı uygulanması hedeflenmiştir. Bu örnek için sistemin parametreleri $m_1 = 1$, $l = 5$, $m_2^0 = 1$ olarak alınmıştır.

1. Adım: EL sisteminin konfigürasyon uzayında 13 adet alt bölge tanımlayalım;

$$\mathbb{S}_i \triangleq \left\{ q \mid h_i(q) \geq h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, 13, \quad i \neq l, \quad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (5.2)$$

burada $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i \|q - q_i\|)^2} + b_i$ olarak seçilmiştir. q_i 'lerin $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ için $q_1^i = (\pi/2) - (i - 1)(\pi/12)$ 'e karşılık gelen genelleştirilmiş koordinatların değerleri olduğunu da belirtelim.

2. Adım: Bu alt bölgelerin merkezlerindeki potansiyel enerji eşleşme koşullarını bulalım.

Denklem (3.2)'de verilen koşulu çözmek için bir matris tanımlayalım:

$$S_i = M_i M_{ci}^{-1} \quad (5.3)$$

Parametreleri yukarıdaki gibi olan vinç sistemi için potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$G^\perp \begin{bmatrix} m_2 l \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} - S_i \begin{bmatrix} \partial V_c / \partial q_1 \\ \partial V_c / \partial q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$m_2 g l \sin q_1 - S_i(1,1) \frac{\partial V_c}{\partial q_1} - S_i(1,2) \frac{\partial V_c}{\partial q_2}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad r = 13$$

Bu r adet PDE'lerin ortak çözümü olan V_c 'nin parametrik formdaki genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_c(q) = \frac{m_2 l g}{S_i(1,1)} \cos(q_1) + \Phi(z(q)) \quad (5.5)$$

$$z(q) = (q_2 - q_2^*) - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} q_1$$

Burada $\Phi(z(q))$, $\nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi türevlenebilir bir fonksiyondur. $V_{chess}(q^*) > 0$ 'ı oluşturmak için, $K_p > 0$ için $\Phi(z) = \left(\frac{K_p}{2}\right) z^2 + \frac{m_2 l g}{S_i(1,1)}$ olarak alınabilir:

$$V_c(q) = K_p \left(\frac{q_2^2}{2} - q_2 q_2^* + \frac{q_2^*}{2} + \frac{q_1(-q_2 + q_2^*) S_i(1,2)}{S_i(1,1)} + \frac{q_1^2 S_i(1,2)^2}{2 S_i(1,1)^2} \right) + \frac{m_2 l g - m_2 l g \cos q_1}{S_i(1,1)} \quad (5.6)$$

$V_c(q)$ 'nın parametrik formda olduğunu ve bu aşamada kısmi olarak belirlendiğini dikkate alalım. $V_c(q)$ 'nın gradyanı ve Hessian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} \frac{K_p S_i(1,2)(-q_2 S_i(1,1) + q_2^* S_i(1,1) + q_1 S_i(1,2)) - m_2 l g S_i(1,1) \sin q_1}{S_i^2(1,1)} \\ K_p \left(q_2 - q_2^* - \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$V_{\text{chess}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{(K_p S_i(1,2)^2 + m_2 l g S_i(1,1) \cos q_1)}{S_i(1,1)^2} & -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \\ -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} & K_p \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$V_{\text{chess}}^q(q) > 0$ oluşturmak için sonraki koşullar şu şekilde bulunur:

$$S_i(1,1) > 0, \quad K_p > 0 \quad (5.9)$$

$S_i(1,1) > 0$ olduğu sürece, bu adımda belirlenen $V_c(q)$, herhangi bir $S_i(1,1)$ ve $S_i(1,2)$ için r sayıda denklemin ortak çözümüdür ve aranan şartları sağlamaktadır. Ayrıca M_{ci} 'nin sağlaması gereken bazı koşullar $S_i(1,1)$ üzerinden tanımlanmaktadır.

3. Adım: $M_{ci} > 0$ için gerekli ek koşulların bulunması. Bu amaçla, M_{ci} matrisleri S_i matrisinin elemanları cinsinden yazılacaktır.

Vinç sistemi de araç ve ters sarkaç sistemi gibi yapısı gereği $q_1 = \pi/2$ ve $q_1 = 0$ değerlerinde tekildir. Bu sebeple $M_{ci} > 0$ koşulunu sağlamak için konfigürasyon uzayında bu değerler çıkartılacaktır

$l^2 m_2 = a$, $l m_2 = b$, $m_i = b \cos q_1^i$ ve $q_1^i = (\pi/2) - i(\pi/12)$ olmak üzere M_i matrisleri şu şekilde verilmiştir:

$$M_i = \begin{bmatrix} a & m_i \\ m_i & c \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (5.10)$$

Ardından, M_{ci} 'lerin genel formu S_i matrisinin elemanları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{m_i S_i(1,2) + a S_i(2,2)}{S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2)} & \frac{c S_i(1,2) - m_i S_i(2,2)}{S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2)} \\ \frac{m_i S_i(1,1) - a S_i(2,1)}{-S_i(1,2) S_i(2,1) + S_i(1,1) S_i(2,2)} & \frac{c S_i(1,1) - m_i S_i(2,1)}{-S_i(1,2) S_i(2,1) + S_i(1,1) S_i(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$i = 1, 2, \dots, 13$

Gösterimi kolaylaştırmak için:

$$\begin{aligned} S_i(1,1) &= \frac{\alpha_2(2+M)}{\alpha_1} \\ S_i(1,2) &= \alpha_2 \\ S_i(2,1) &= \frac{\alpha_1(2+M)(-25\beta(1+M) + \alpha_2(2+M)) - \alpha_1^2\beta m_i + \alpha_2(2+M)^2 m_i}{\alpha_1(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i)} \\ S_i(2,2) &= \frac{(25\beta(1+M))}{m_i} + \frac{(\alpha_2(2+M)(\alpha_1 m_i))}{25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i} \end{aligned} \quad (5.12)$$

olarak seçilsin. Bu durumda $M_{ci} > 0$ sağlamak için $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta > 0$ koşullarının sağlanması yeterli olacaktır. M_{ci} matrisleri aşağıdaki formda düzenlenebilir:

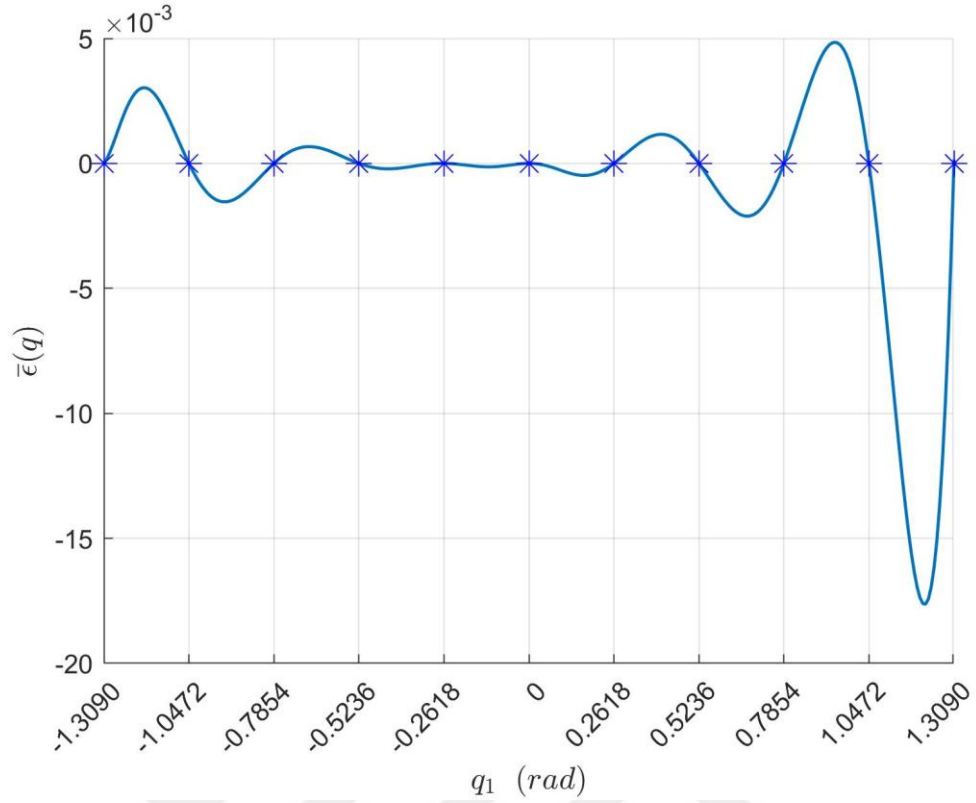
$$\begin{aligned} M_{ci}(1,1) &= \frac{\alpha_1(625\beta(1+M)^2(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i) + \alpha_1 \alpha_2 m_i(25(1+M)(2+M) - m_i^2))}{\alpha_2 \beta(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i)^2} \\ M_{ci}(1,2) &= \frac{\alpha_1 m_i(25\beta(1+M)(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i) + \alpha_2(-25(1+M)(2+M)^2 + m_i^2))}{\alpha_2 \beta(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i)^2} \\ M_{ci}(2,2) &= \frac{m_i(\alpha_1 \beta m_i(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i) + \alpha_2(2+M)^2(25(1+M)(2+M) - m_i^2))}{\alpha_2 \beta(25(1+M)(2+M) + \alpha_1 m_i)^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$, i = 2, 3, \dots, 11$$

4. Adım: Kapalı döngü sistemin genelleştirilmiş atalet matrisini yaklaşık olarak oluşturalım:

$$\hat{M}_c(q) = \left(\sum_i e^{-(\epsilon_i(q_i - q))^2} M_{ci} \right) + M_{cb} \quad (5.14)$$

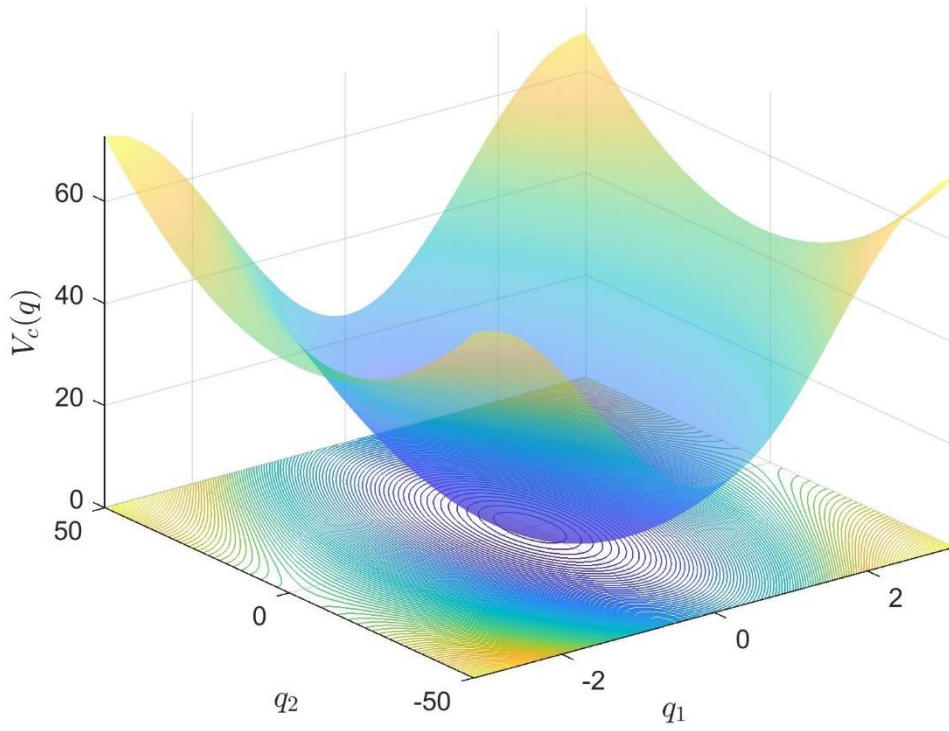
MATLAB neural network toolbox kullanılarak, Açıklama 3'te açıklanan ϵ_i ve M_{cb} parametreleri (5.14)'ü sağlayacak şekilde bulunmuştur. Potansiyel enerji eşleşme koşulu $\bar{\epsilon}(q)$ 'nin yakınsama hatası (3.27)'de tanımlanmıştır ve $\{-5\pi/12 < q_1 < 5\pi/12\}$ aralığında 11 sayıda alt bölge olması durumunda oluşan yakınsama hatası da Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (Vinç)

5. Adım: (3.9)'da verilen kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak şekilde $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrisleri (3.8) ve (3.54)'teki şekilde seçilebilir.

6. Adım: Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol kuralını oluşturalım. Tasarım parametreleri $K_p = 1/50$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 20$, $\beta = 30$, $M = 10$ olarak seçilmiştir. Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol girişi, önceki adımlarda bulunan $\hat{M}_c(q)$, $V_c(q)$, $J(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q})$ değerlerinin (3.10)'da verilen ifadede yerine konulmasıyla kolayca oluşturulabilir. Kapalı döngü sistem potansiyel enerji fonksiyonu yukarıda verilen kontrol tasarım parametreleri için Şekil 5.3'te gösterilmiştir.

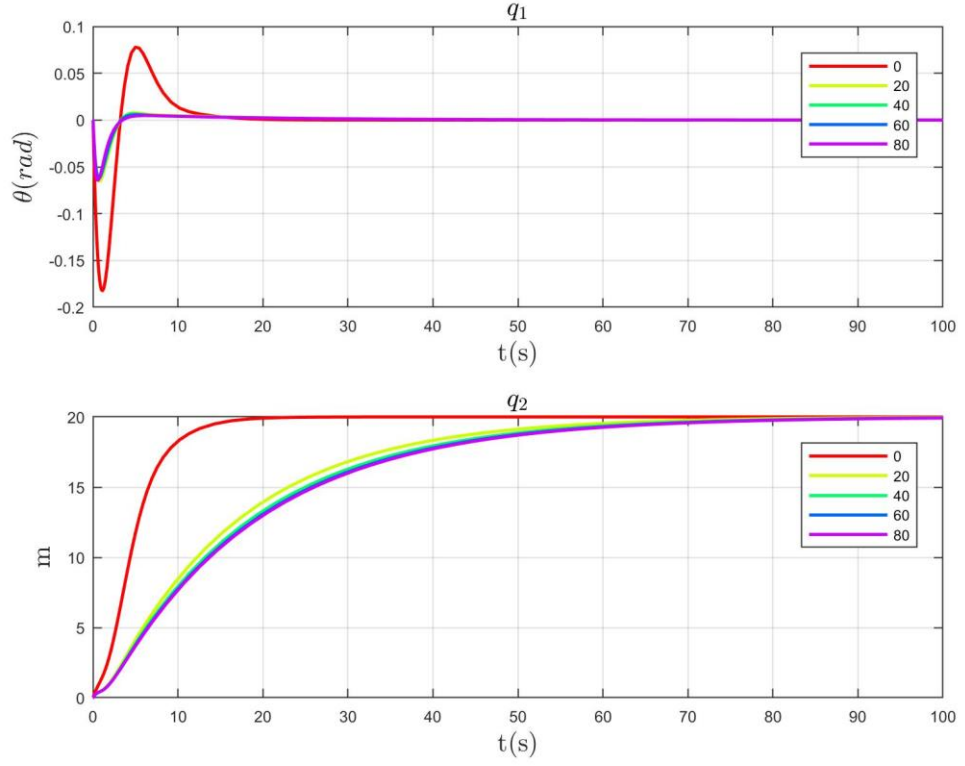


Şekil 5.3 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Vinç)

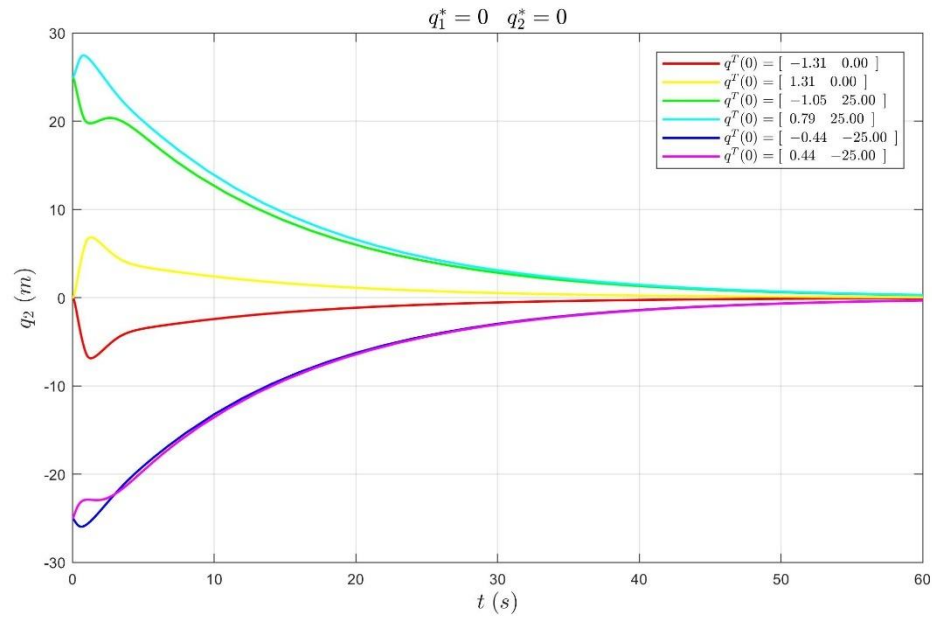
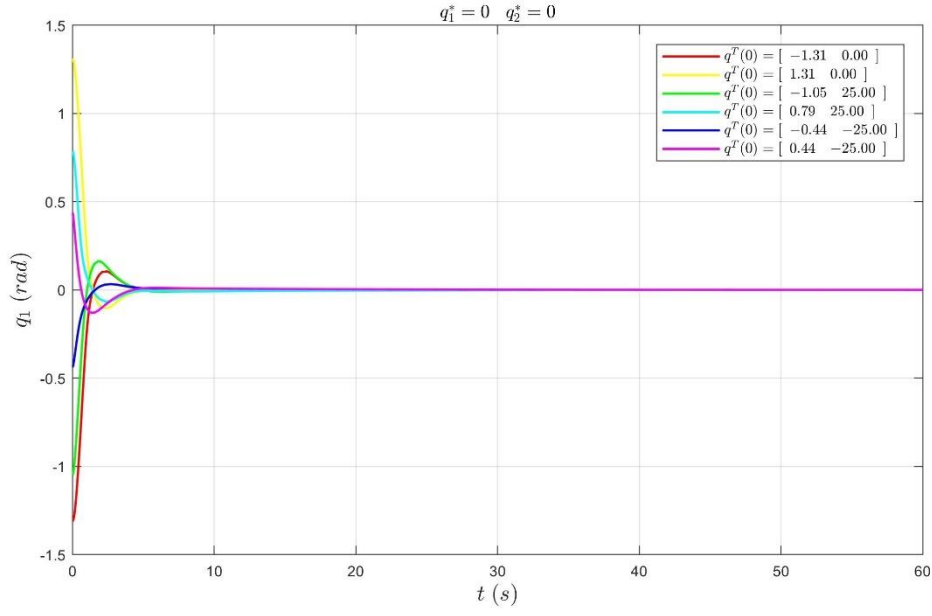
7. Adım: Sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için, sönüm enjeksiyonundan sorumlu kontrol girişi aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır:

$$u_d = -k_v G^T M^{-1}(q) \hat{M}_c(q) \dot{q}, \quad k_v = 700$$

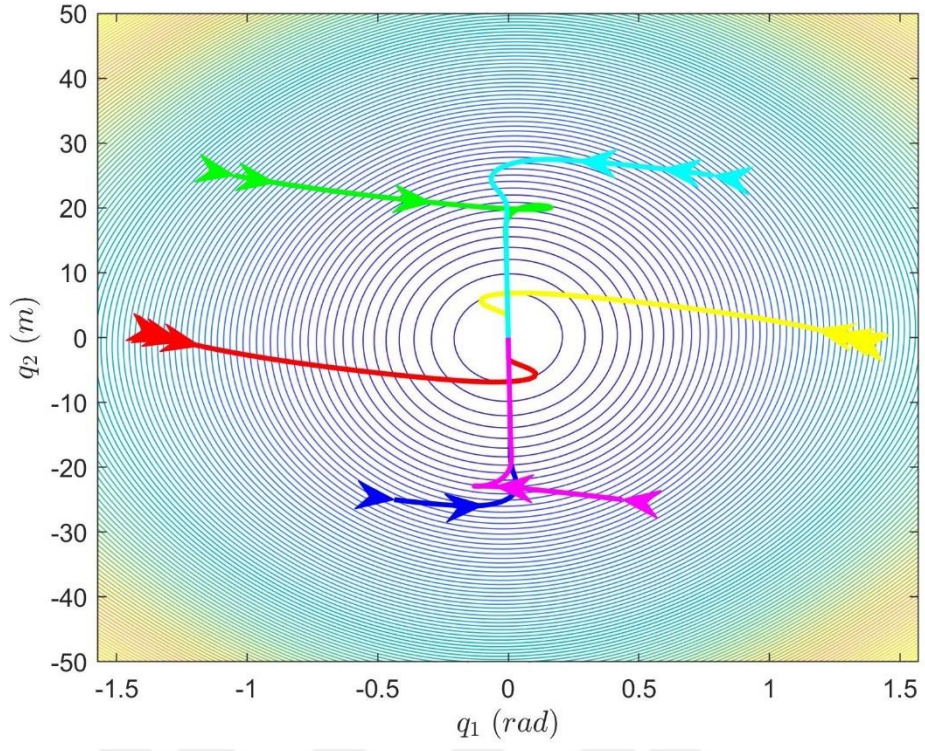
Vinç konumunun ve yükün farklı M değerleri için istenen konuma götüren durum yörüngeleri Şekil 5.4'te, farklı başlangıç koşullarından istenen konuma götüren durum yörüngeleri Şekil 5.5'te, $V_c(q)$ üzerindeki durum yörüngeleri ise Şekil 5.6 ve 5.7'de verilmiştir. Son olarak, $\dot{H}_c(q, \dot{q})$ ve $H_c(q, \dot{q})$ 'ın zamana karşı değişimi Şekil 5.8'de gösterilmiştir.



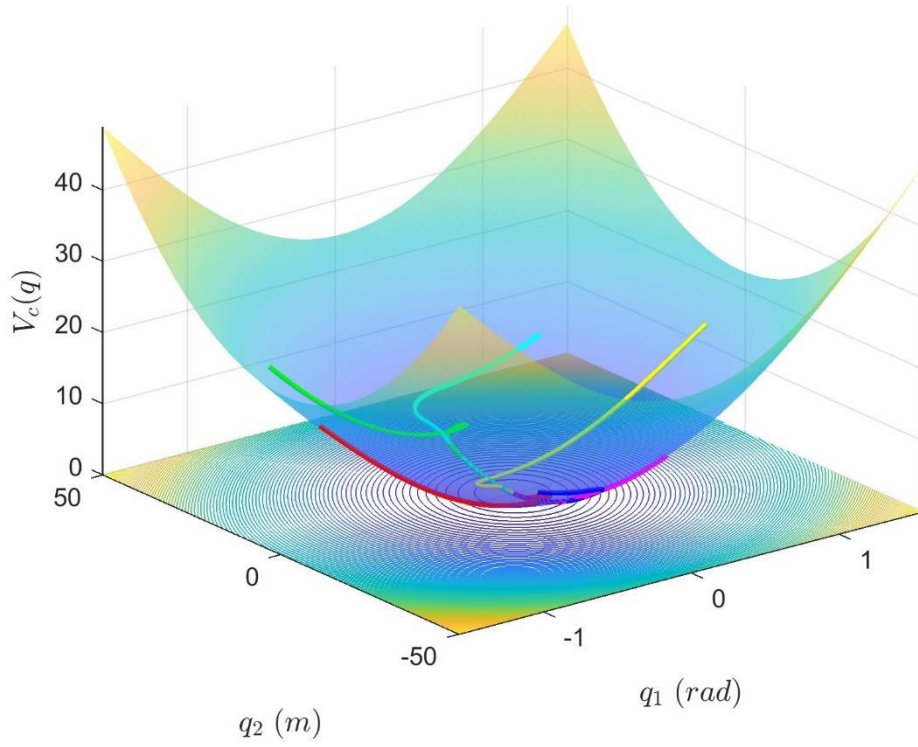
Şekil 5.4 : Farklı M değerleri için durum yörüngeleri (Vinç)



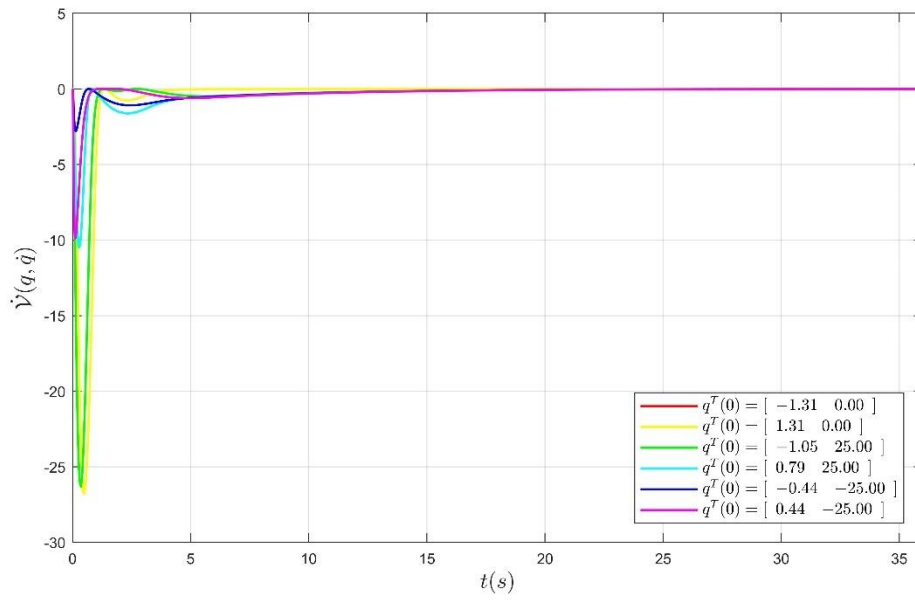
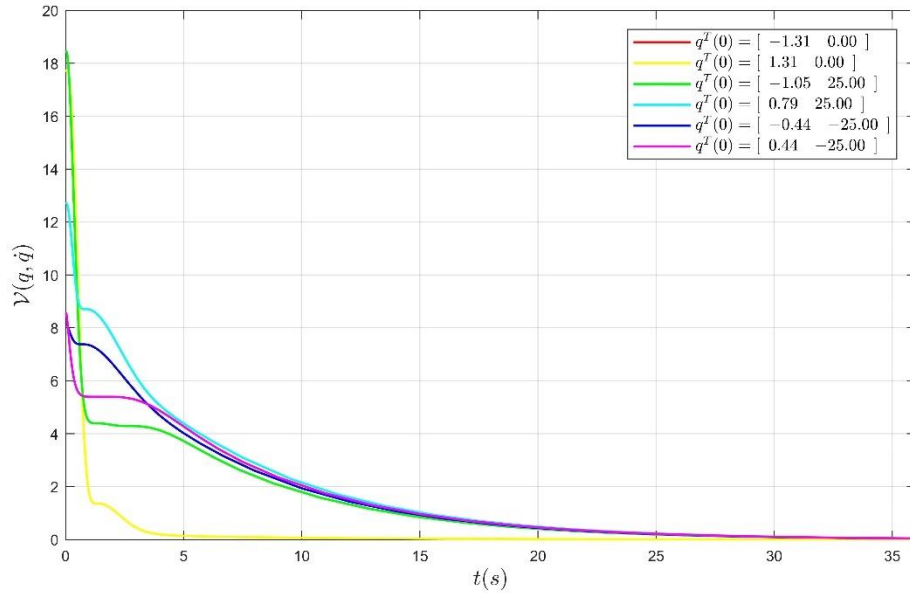
Şekil 5.5 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Vinç)



Şekil 5.6 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (Vinç)

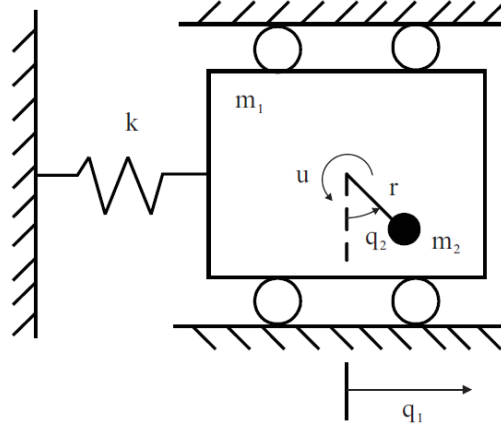


Şekil 5.7 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (Vinç)



Şekil 5.8 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Vinç)

5.2 TORA



Şekil 5.9 : TORA

TORA sisteminin dinamik denklemi Liu ve Tu (2013)'de aşağıdaki gibi verilmiştir

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 r \cos q_2 \\ m_2 r \cos q_2 & m_2 r^2 \end{bmatrix}, \quad V(q) = k q_1^2, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

TORA (Translational Oscillator with a Rotational Actuator - Doğrusal salınımlı rotasyonel eyleyici) sisteminde temel amaç, aracın doğrusal salınımlarının, araç içinde bulunan eğleyici tarafından sönümlendirilmesidir. Bu sebeple sistem doğal olarak $q_1^* = q_2^* = 0$ da kararlıdır. Burada kontrol kuralının amacı eyleyici bulunmayan araçtaki salınımların, eyleyici bulunan döner yük tarafından sönümlendirilmesidir. Yukarıda verilen m_1 aracın kütlesini, m_2 eyleyicinin kütlesini, k yay sabitini, q_1 ve q_2 ise sırasıyla aracın konumunu ve eyleyicinin açısını vermektedir. Bu örnekte $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $l = 1$, $k = 2$ alınmıştır.

1. Adım: EL sisteminin konfigürasyon uzayında 13 adet alt bölge tanımlayalım;

$$\mathbb{S}_i \triangleq \left\{ q \mid h_i(q) \geq h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, 13, \quad i \neq l, \quad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (5.16)$$

burada $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i \|q - q_i\|)^2} + b_i$ olarak seçilmiştir. q_i 'lerin $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ için $q_1^i = (\pi/2) - (i - 1)(\pi/12)$ 'e karşılık gelen genelleştirilmiş koordinatların değerleri olduğunu da belirtelim.

2. Adım: Bu alt bölgelerin merkezlerindeki potansiyel enerji eşleşme koşullarını bulalım.

Denklem (3.2)'de verilen koşulu çözmek için bir matris tanımlayalım:

$$S_i = M_i M_{ci}^{-1} \quad (5.17)$$

Parametreleri yukarıdaki gibi olan vinç sistemi için potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$G^\perp \left[\begin{bmatrix} kq_1 \\ 0 \end{bmatrix} - S_i \begin{bmatrix} \partial V_c / \partial q_1 \\ \partial V_c / \partial q_2 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (5.18)$$

$$kq_1 - S_i(1,1) \frac{\partial V_c}{\partial q_1} - S_i(1,2) \frac{\partial V_c}{\partial q_2}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad r = 13$$

Bu r adet PDE'lerin ortak çözümü olan V_c 'nin parametrik formdaki genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_c(q) = \frac{kq_1^2}{2S_i(1,1)} + \Phi(z(q)) \quad (5.19)$$

$$z(q) = (q_2) - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} q_1$$

Burada $\Phi(z(q))$, $\nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi türevlenebilir bir fonksiyondur. $V_{chess}(q^*) > 0$ oluşturmak için, $K_p > 0$ için $\Phi(z) = \left(\frac{K_p}{2}\right) z^2$ olarak alınabilir:

$$V_c(q) = K_p \left(\frac{1}{2} q_2^2 - q_1 q_2 \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} + \frac{q_1^2 S_i(1,2)^2}{2 S_i(1,1)^2} \right) + \frac{kq_1^2}{2S_i(1,1)} \quad (5.20)$$

$V_c(q)$ 'nin parametrik formda olduğunu ve bu aşamada kısmi olarak belirlendiğini dikkate alalım. $V_c(q)$ 'nin gradyanı ve Hessian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} kq_1 S_i(1,1) + \frac{K_p S_i(1,2) (-q_2 S_i(1,1) + q_1 S_i(1,2))}{S_i(1,1)^2} \\ K_p \left(q_2 - \frac{q_1 S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$V_{c_{\text{hess}}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{(K_p S_i(1,2)^2 + k S_i(1,1))}{S_i(1,1)^2} & -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \\ -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} & K_p \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$V_{c_{\text{hess}}}^q(q) > 0$ oluşturmak için sonraki koşullar şu şekilde bulunur:

$$S_i(1,1) > 0, \quad K_p > 0 \quad (5.23)$$

$S_i(1,1) > 0$ olduğu sürece, bu adımda belirlenen $V_c(q)$, herhangi bir $S_i(1,1)$ ve $S_i(1,2)$ için r sayıda denklemin ortak çözümüdür ve aranan şartları sağlamaktadır. Ayrıca M_{ci} 'nin sağlaması gereken bazı koşullar $S_i(1,1)$ üzerinden tanımlanmaktadır.

3. Adım: $M_{ci} > 0$ için gerekli ek koşulların bulunması. Bu amaçla, M_{ci} matrisleri S_i matrisinin elemanları cinsinden yazılacaktır.

$m_i = m_2 l \cos q_2^i$ ve $q_2^i = (\pi/2) - i(\pi/12)$ olmak üzere M_i matrisleri şu şekilde verilmiştir:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_i \\ m_i & l^2 m_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 13 \quad (5.24)$$

Ardından, M_{ci} 'lerin genel formu S_i matrisinin elemanları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{m_i S_i(1,2) + (m_1 + m_2) S_i(2,2)}{S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2)} & \frac{l^2 m_2 S_i(1,2) - m_i S_i(2,2)}{S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2)} \\ \frac{m_i S_i(1,1) - (m_1 + m_2) S_i(2,1)}{-S_i(1,2) S_i(2,1) + S_i(1,1) S_i(2,2)} & \frac{l^2 m_2 S_i(1,1) - m_i S_i(2,1)}{-S_i(1,2) S_i(2,1) + S_i(1,1) S_i(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$i = 1, 2, \dots, 13$

Gösterimi kolaylaştırmak için:

$$\begin{aligned}
S_i(1,1) &= \alpha_1 \\
S_i(1,2) &= \sqrt{3}\alpha_1\alpha_2 \\
S_i(2,1) &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{3}} \\
S_i(2,2) &= \alpha_1
\end{aligned} \tag{5.26}$$

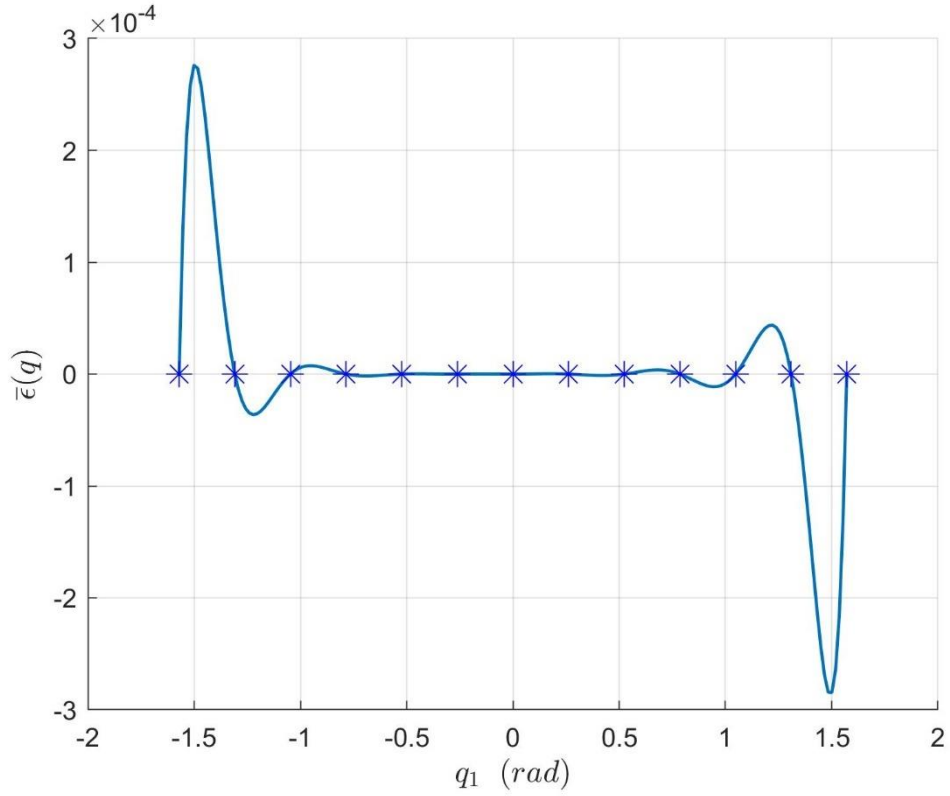
olarak seçilsin. Bu durumda $M_{ci} > 0$ sağlamak için $\alpha_1 > 0$, $-1 < \alpha_2 < 1$, koşullarının sağlanması yeterli olacaktır. M_{ci} matrisleri aşağıdaki formda düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
M_{ci}(1,1) &= \frac{3 - \sqrt{3}\alpha_2 m_i}{\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2^2} \\
M_{ci}(1,2) &= \frac{\sqrt{3}\alpha_2 - m_i}{\alpha_1(-1 + \alpha_2^2)} \\
M_{ci}(2,2) &= \frac{3 - \sqrt{3}\alpha_2 m_i}{3\alpha_1 - 3\alpha_1\alpha_2^2} \\
, i &= 1, 2, \dots, 13
\end{aligned} \tag{5.27}$$

4. Adım: Kapalı döngü sistemin genelleştirilmiş atalet matrisini yaklaşık olarak oluşturalım:

$$\hat{M}_c(q) = \left(\sum_i e^{-(\epsilon_i(q_i - q))^2} M_{ci} \right) + M_{cb} \tag{5.28}$$

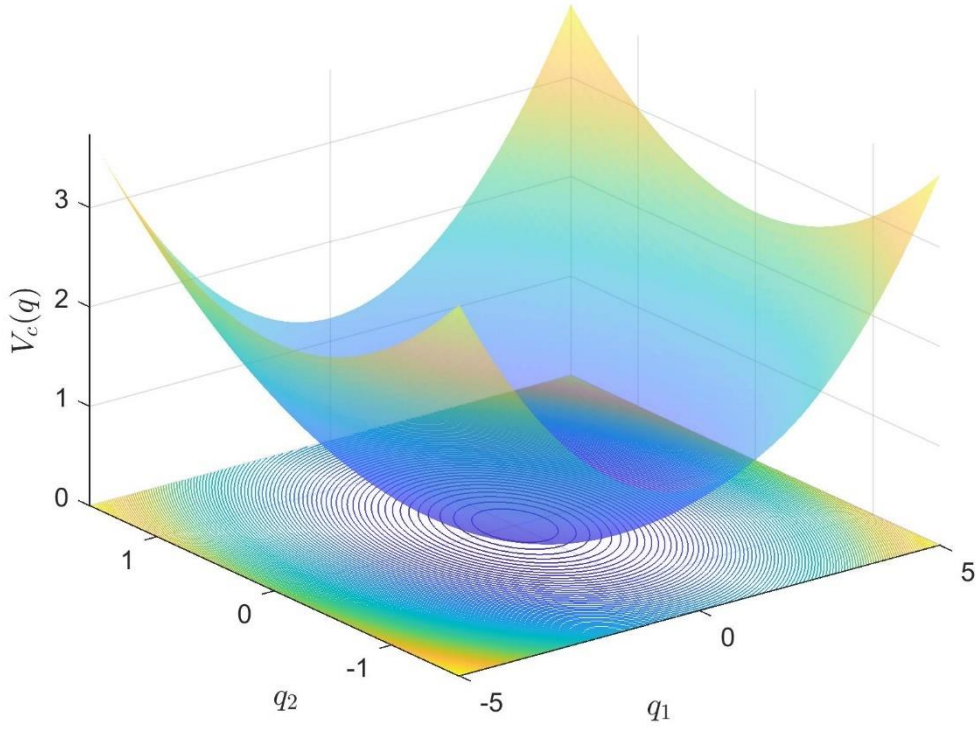
MATLAB neural network toolbox kullanılarak, Açıklama 3'te açıklanan ϵ_i ve M_{cb} parametreleri (5.14)'ü sağlayacak şekilde bulunmuştur. Potansiyel enerji eşleşme koşulu $\bar{\epsilon}(q)$ 'nin yakınsama hatası (3.27)'de tanımlanmıştır ve $\{-\pi/2 < q_1 < \pi/2\}$ aralığında 13 sayıda alt bölge olması durumunda oluşan yakınsama hatası da Şekil 5.10'de gösterilmiştir.



Şekil 5.10 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (TORA)

5. Adım: (3.9)'da verilen kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak şekilde $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrisleri (3.8) ve (3.54)'deki şekilde seçilebilir.

6. Adım: Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol kuralını oluşturalım. Tasarım parametreleri $K_p = 1$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 0$, olarak seçilmiştir. Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol girişi, önceki adımlarda bulunan $\hat{M}_c(q)$, $V_c(q)$, $J(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q})$ değerlerinin (3.10)'da verilen ifadede yerine konulmasıyla kolayca oluşturulabilir. Kapalı döngü sistem potansiyel enerji fonksiyonu yukarıda verilen kontrol tasarım parametreleri için Şekil 5.11'de gösterilmiştir.

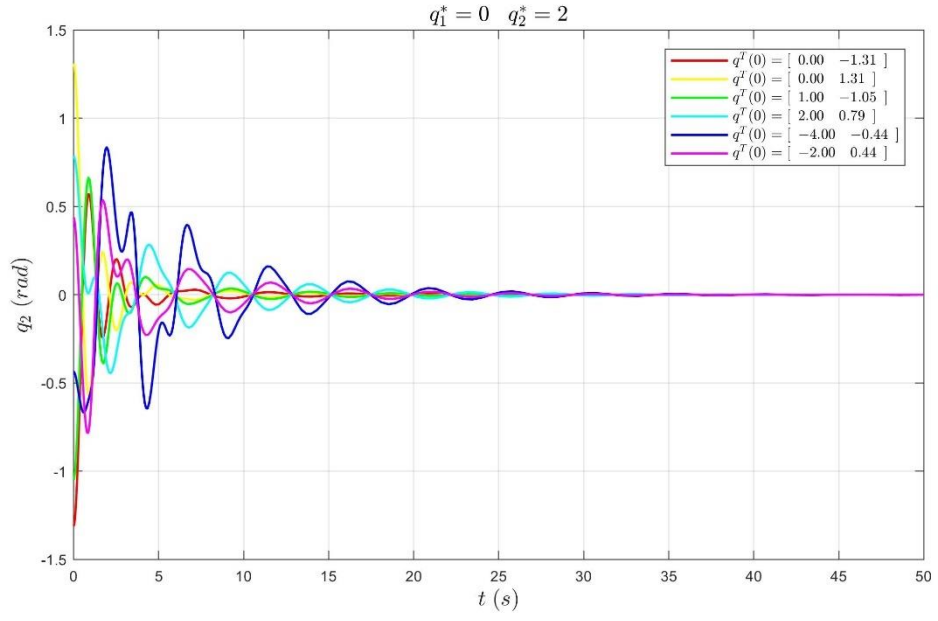
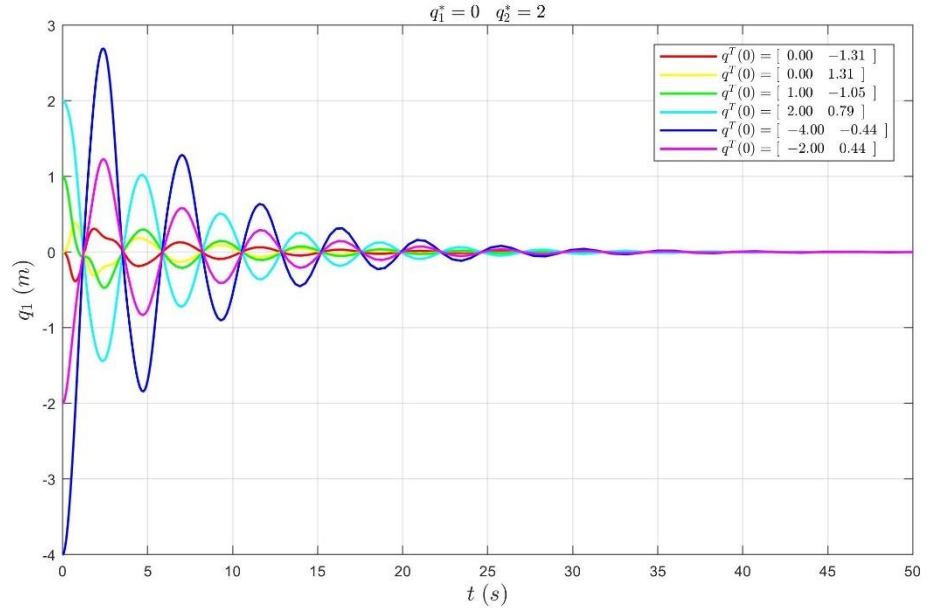


Şekil 5.11 : Potansiyel enerji fonksiyonu (TORA)

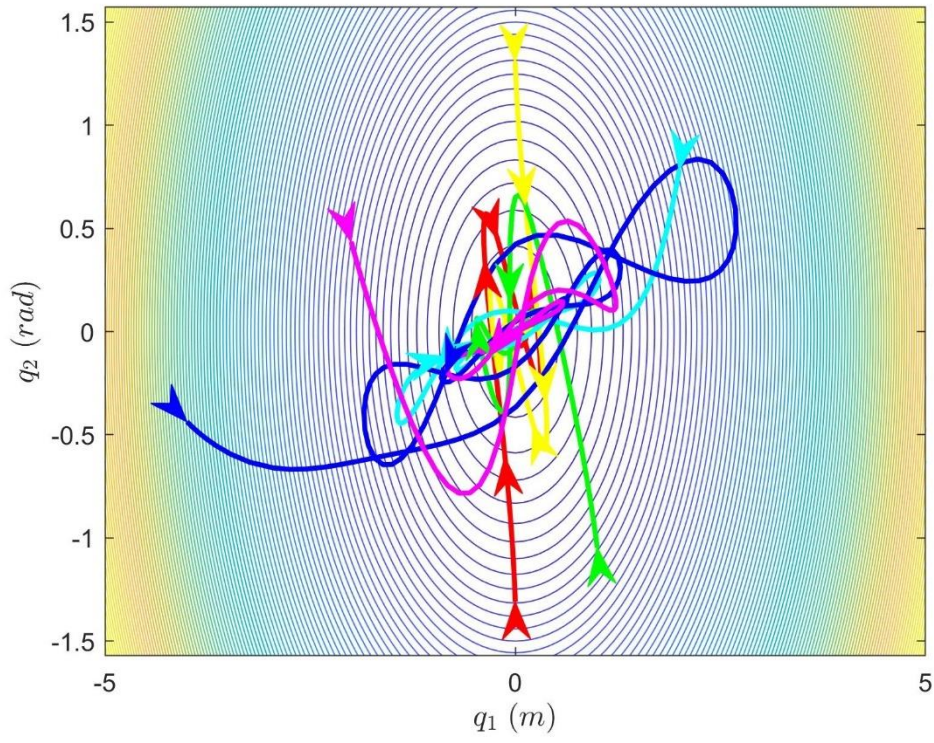
7. Adım: Sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için, sönüm enjeksiyonundan sorumlu kontrol girişi aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır:

$$u_d = -k_v G^T M^{-1}(q) \hat{M}_c(q) \dot{q}, \quad k_v = 10$$

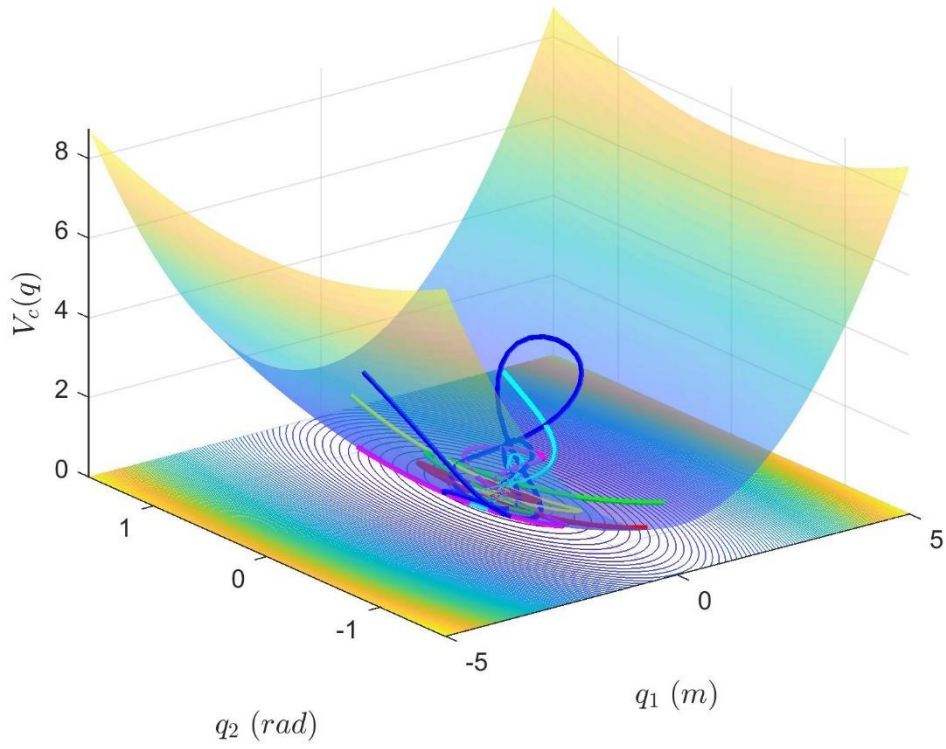
TORA sisteminin farklı başlangıç koşullarındaki durum yörüngeleri Şekil 5.12'de, $V_c(q)$ üzerindeki durum yörüngeleri ise Şekil 5.13 ve 5.14'de verilmiştir. Son olarak, $\dot{H}_c(q, \dot{q})$ ve $H_c(q, \dot{q})$ 'ın zamana karşı değişimi Şekil 5.15'de gösterilmiştir.



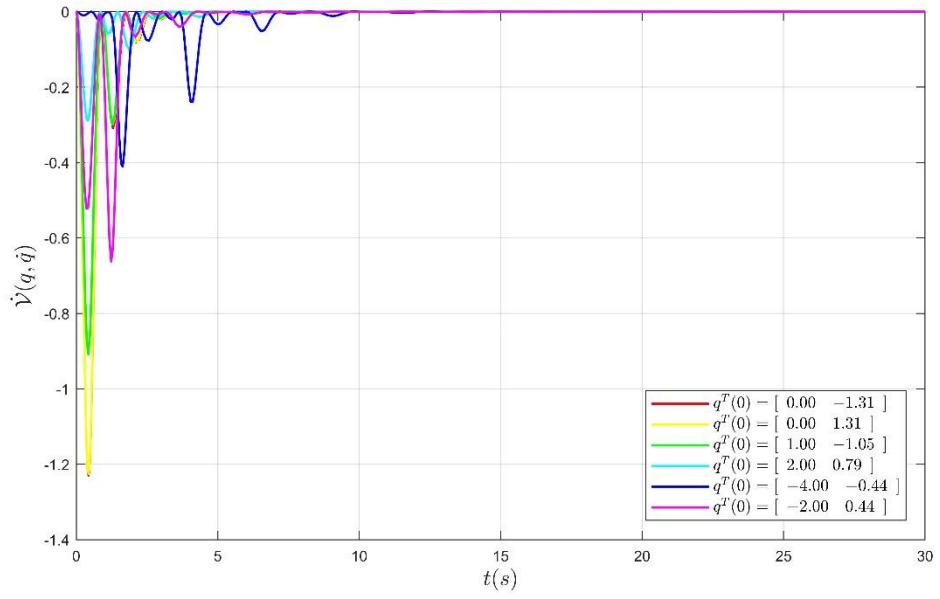
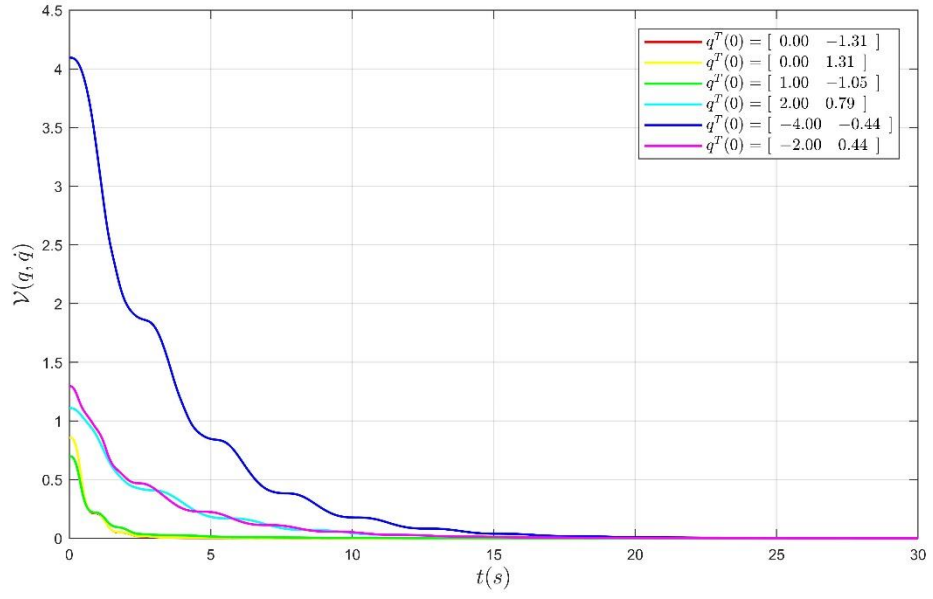
Şekil 5.12 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (TORA)



Şekil 5.13 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B (TORA)

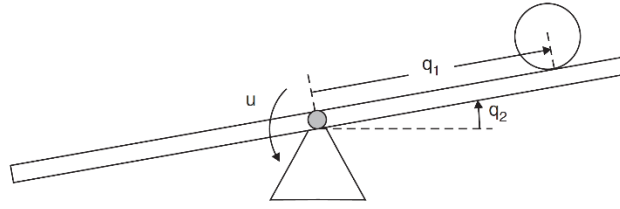


Şekil 5.14 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B (TORA)



Şekil 5.15 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (TORA)

5.3 Top ve Çubuk Sistemi



Şekil 5.16 : Top ve çubuk sistemi

Top ve çubuk sisteminin dinamik denklemi Liu ve Tu (2013)'de aşağıdaki gibi verilmiştir

$$M = \begin{bmatrix} \frac{I_b}{r^2} + m & 0 \\ 0 & J + J_b + m q_1^2 \end{bmatrix}, \quad V(q) = m g q_1 \sin(q_2), \quad (5.29)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Burada m topun kütlesi J_b topun eylemsizlik momenti, r topun yarıçapı, J çubuğun eylemsizlik momenti, g yerçekimi ivmesi, q_1 ve q_2 ise sırasıyla topun kütle merkezinin çubuğun merkezine olan uzaklığı ve çubuğun açısıdır. Kontrol kuralının amacı, topu herhangi bir başlangıç hızıyla herhangi bir başlangıç konumundan çubuğa tork uygulayarak çubuk üzerinde istenen bir q_1^* konumda kararlı kılmaktır. Bu örnekte sistem parametreleri $m = 1$, $J_b = 1/100$, $J = 1/100$, $r = 1$, $g = 9.81$ olarak alınmıştır.

1. Adım: EL sisteminin konfigürasyon uzayında 24 adet alt bölge tanımlayalım;

$$\mathbb{S}_i \triangleq \{q \mid h_i(q) \geq h_l(q), \quad l = 1, 2, \dots, 24, \quad i \neq l, \quad -5 < q < 5\} \quad (5.30)$$

burada $h_i(q) = e^{-(\epsilon_i \|q - q_i\|)^2} + b_i$ olarak seçilmiştir. q_i 'lerin $h_i(q)|_{q=q_i} = 1$ için $q_1^i = 5 - (i - 1)(10/24)$ 'e karşılık gelen genelleştirilmiş koordinatların değerleri olduğunu da belirtelim.

2. Adım: Bu alt bölgelerin merkezlerindeki potansiyel enerji eşleşme koşullarını bulalım.

Denklem (3.2)'de verilen koşulu çözmek için bir matris tanımlayalım:

$$S_i = M_i M_{ci}^{-1} \quad (5.31)$$

Parametreleri yukarıdaki gibi olan top ve çubuk sistemi için potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$G^\perp \left[\begin{bmatrix} gm q_1 \cos q_2 \\ gm \sin q_2 \end{bmatrix} - S_i \begin{bmatrix} \partial V_c / \partial q_1 \\ \partial V_c / \partial q_2 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (5.32)$$

$$gm \sin q_2 - S_i(1,1) \frac{\partial V_c}{\partial q_1} - S_i(1,2) \frac{\partial V_c}{\partial q_2}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad r = 24$$

Bu r adet PDE'lerin ortak çözümü olan V_c 'nin parametrik formdaki genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_c(q) = \frac{gm \cos q_2}{S_i(1,2)} + \Phi(z(q)) \quad (5.33)$$

$$z(q) = q_2 - \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)}(q_1 - q_1^*)$$

Burada $\Phi(z(q))$, $\nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi türevlenebilir bir fonksiyondur. $V_{\text{hess}}(q^*) > 0$ 'ı oluşturmak için, $K_p > 0$ için $\Phi(z) = \left(\frac{K_p}{2}\right)z^2 + \frac{gm}{S_i(1,2)}$ olarak alınabilir:

$$V_c(q) = K_p \left(\frac{1}{2} q_2^2 - q_2(q_1 - q_1^*) \frac{S_i(1,2)}{S_i(1,1)} + \left(\frac{q_1^2}{2} - q_1 q_1^* + \frac{q_1^2}{2} \right) \frac{S_i(1,2)^2}{S_i(1,1)^2} \right) + \frac{gm - gm \cos q_1}{S_i(1,2)} \quad (5.34)$$

$V_c(q)$ 'nin parametrik formda olduğunu ve bu aşamada kısmi olarak belirlendiğini dikkate alalım. $V_c(q)$ 'nin gradyanı ve Hessian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} -\frac{K_p S_i(1,2)(q_2 S_i(1,1) + (-q_1 + q_1^*) S_i(1,2))}{S_i(1,1)^2} \\ K_p \left(q_2 + \frac{(-q_1 + q_1^*) S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \right) + \frac{gm \sin q_2}{S_i(1,2)} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$V_{\text{chess}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{K_p S_i(1,2)^2}{S_i(1,1)^2} & -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} \\ -\frac{K_p S_i(1,2)}{S_i(1,1)} & K_p + \frac{gm \cos q_2}{S_i(1,2)} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$V_{\text{chess}}^q(q) > 0$ oluşturmak için sonraki koşullar şu şekilde bulunur:

$$S_i(1,2) > 0, \quad S_i(1,1) > 0, \quad K_p > 0 \quad (5.37)$$

(5.37) koşulları sağlandığı sürece (5.34) r sayıda denklemin ortak çözümüdür ve aranan şartları sağlamaktadır. Ayrıca M_{ci} 'nin sağlaması gereken bazı koşullar $S_i(2,1)$, ve $S_i(2,2)$ üzerinden tanımlanacaktır.

3. Adım: $M_{ci} > 0$ için gerekli ek koşulların bulunması. Bu amaçla, M_{ci} matrisleri S_i matrisinin elemanları cinsinden yazılacaktır.

$m_i = J + J_b + mq_1^{2^i}$ ve $q_1^i = 5 - (i - 1)(10/24)$ olmak üzere M_i matrisleri şu şekilde tanımlanır:

$$M_i = \begin{bmatrix} \frac{J_b}{r^2} + m & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 24 \quad (5.38)$$

Ardından, M_{ci} 'lerin genel formu S_i matrisinin elemanları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{(J_b + r^2 m) S_i(2,2)}{r^2 (S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2))} & \frac{mi S_i(1,2)}{S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2)} \\ \frac{(J_b + r^2 m) S_i(2,1)}{r^2 (S_i(1,2) S_i(2,1) - S_i(1,1) S_i(2,2))} & \frac{mi S_i(1,1)}{-S_i(1,2) S_i(2,1) + S_i(1,1) S_i(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

$i = 1, 2, \dots, 13$

Gösterimi kolaylaştırmak için:

$$\begin{aligned}
S_i(1,1) &= \alpha_1 \\
S_i(1,2) &= \alpha_2 \\
S_i(2,1) &= \frac{\alpha_2 r^2 m_i}{J_b + r^2 m} \\
S_i(2,2) &= \beta + \frac{\alpha_2^2 r^2 m_i}{\alpha_1 J_b + \alpha_1 r^2 m}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

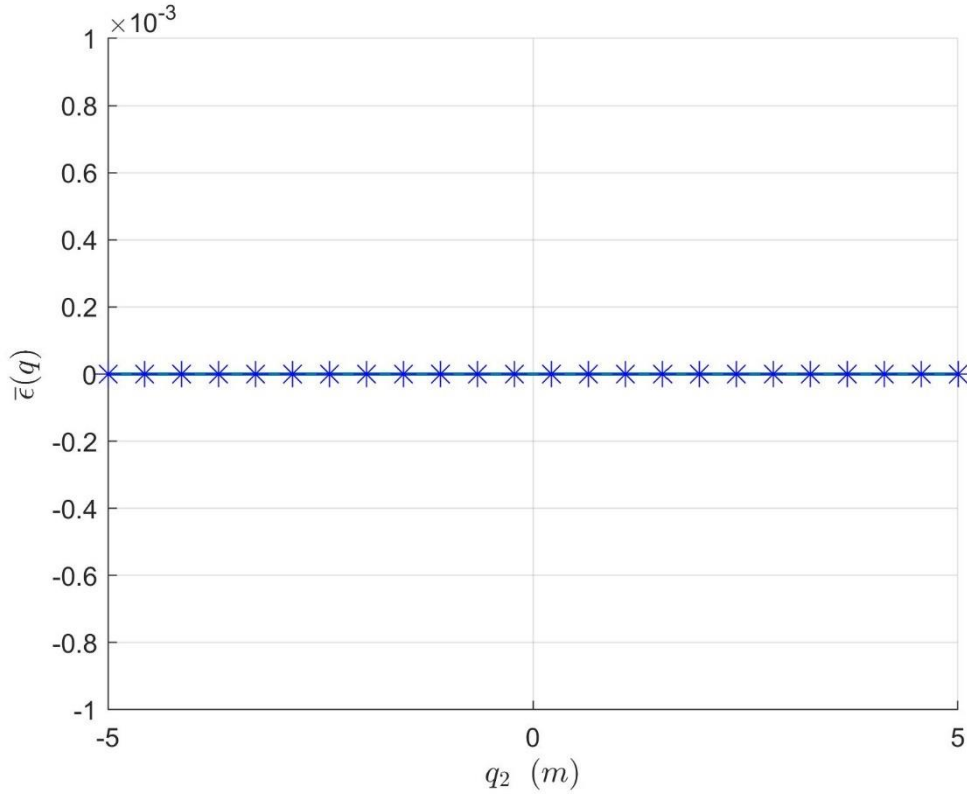
olarak seçilsin. Bu durumda $M_{ci} > 0$ sağlamak için $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta > 0$ koşullarının sağlanması yeterli olacaktır. (5.40), (5.39)'da yerine yazıldığında M_{ci} matrisleri aşağıdaki şekilde düzenlenir:

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_1\beta + \alpha_2^2 m_i}{\alpha_1^2 \beta} & -\frac{\alpha_2 m_i}{\alpha_1 \beta} \\ -\frac{\alpha_2 m_i}{\alpha_1 \beta} & \frac{m_i}{\beta} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 24 \tag{5.41}$$

4. Adım: Kapalı döngü sistemin geliştirilmiş atalet matrisini yaklaşık olarak oluşturalım:

$$\hat{M}_c(q) = \left(\sum_i e^{-(\epsilon_i(q_i - q))^2} M_{ci} \right) + M_{cb} \tag{5.42}$$

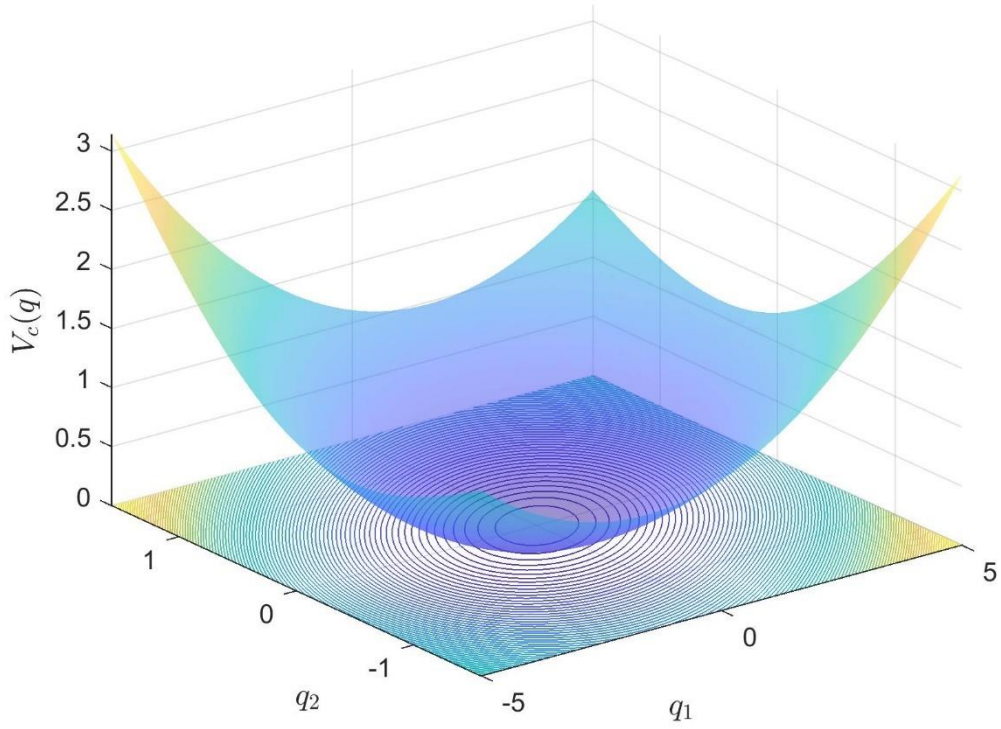
MATLAB neural network toolbox kullanılarak, Açıklama 3'te açıklanan ϵ_i ve M_{cb} parametreleri (5.14)'ü sağlayacak şekilde bulunmuştur. Potansiyel enerji eşleşme koşulu $\bar{\epsilon}(q)$ 'nin yakınsama hatası (3.27)'de tanımlanmıştır ve $\{-5 < q_1 < 5\}$ aralığında 24 sayıda alt bölge olması durumunda oluşan yakınsama hatası da Şekil 5.17'de gösterilmiştir. Top ve çubuk sistemi özelinde kuadratik bir fonksiyon radyal temelli fonksiyonlardan oluşturulduğu için modelleme hatası önemsemeyecek kadar küçüktür.



Şekil 5.17 : Potansiyel enerji eşleşme koşulu hatası (Top ve Çubuk)

5. Adım: (3.9)'da verilen kinetik enerji eşleşme koşulunu sağlayacak şekilde $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrisleri (3.8) ve (3.54)'deki şekilde seçilebilir.

6. Adım: Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol kuralını oluşturalım. Tasarım parametreleri $K_p = 1/10$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$, $\beta = 50$ olarak seçilmiştir. Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol girişi, önceki adımlarda bulunan $\hat{M}_c(q)$, $V_c(q)$, $J(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q})$ değerlerinin (3.10)'da verilen ifadede yerine konulmasıyla kolayca oluşturulabilir. Kapalı döngü sistem potansiyel enerji fonksiyonu yukarıda verilen kontrol tasarım parametreleri için Şekil 5.18'de gösterilmiştir.

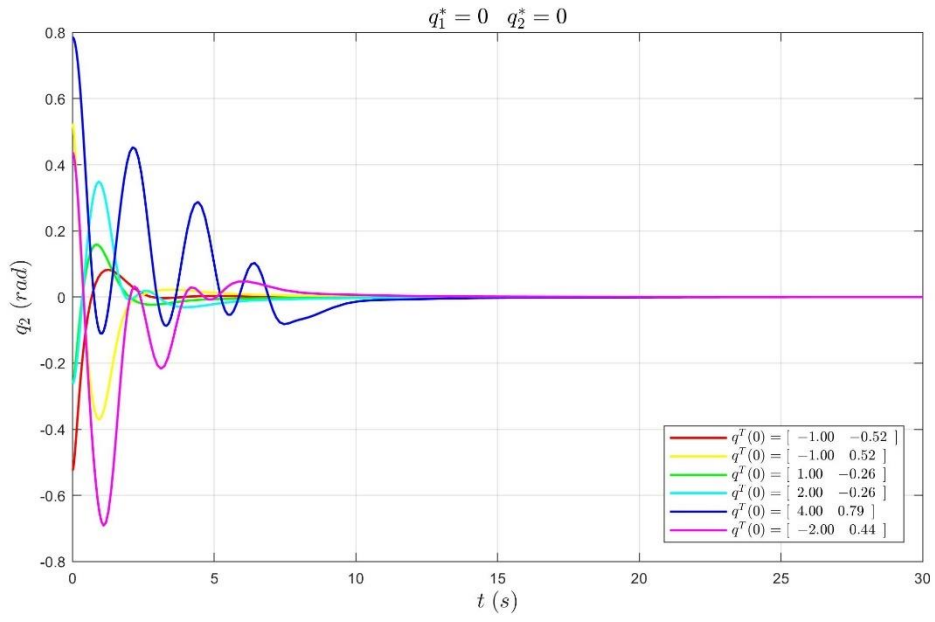
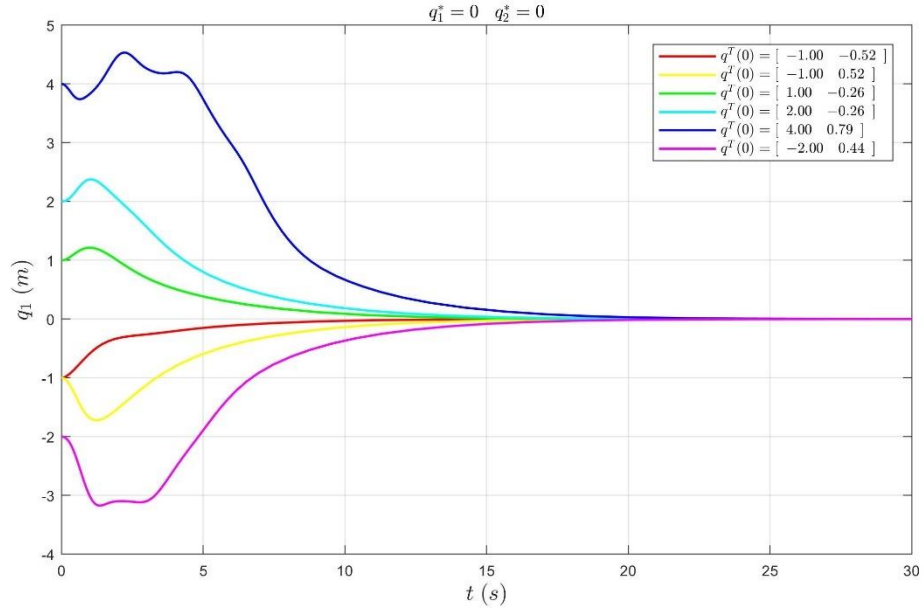


Şekil 5.18 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Top ve çubuk)

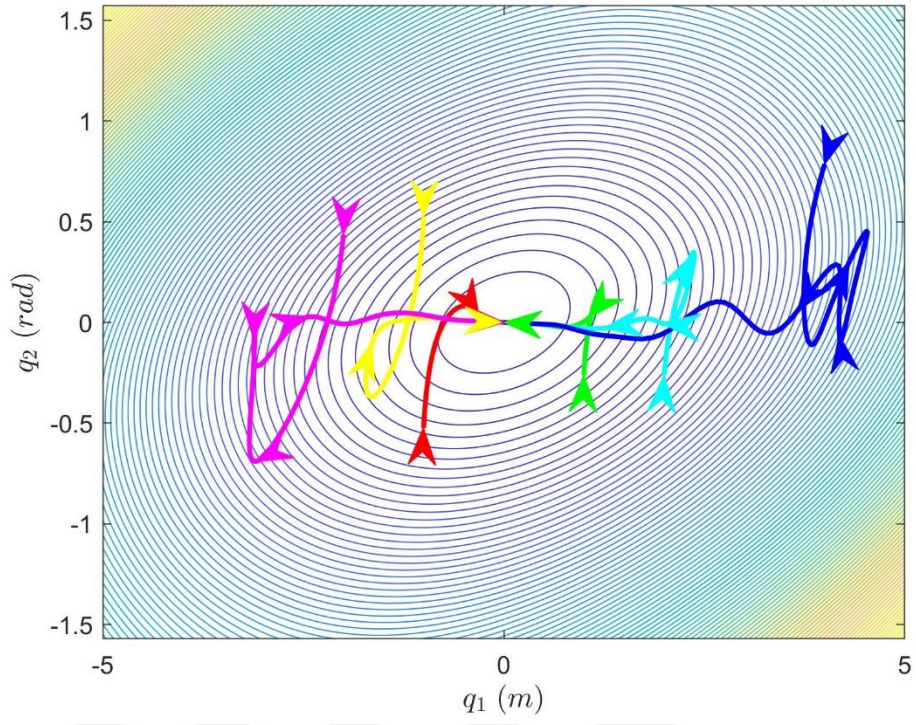
7. Adım: Sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için, sönüm enjeksiyonundan sorumlu kontrol girişi aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır:

$$u_d = -k_v G^T M^{-1}(q) \hat{M}_c(q) \dot{q}, \quad k_v = 1000$$

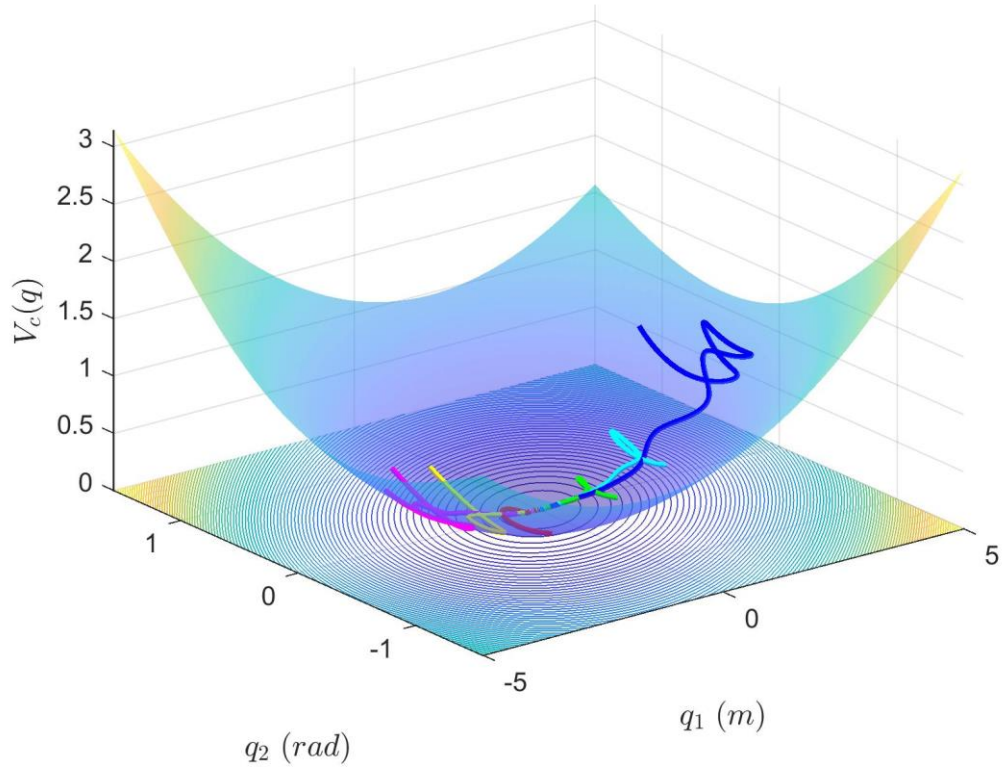
TORA sisteminin farklı başlangıç koşullarındaki durum yörüngeleri Şekil 5.19'da, $V_c(q)$ üzerindeki durum yörüngeleri ise Şekil 5.20 ve 5.21'de verilmiştir. Son olarak, $\dot{H}_c(q, \dot{q})$ ve $H_c(q, \dot{q})$ 'ın zamana karşı değişimi Şekil 5.22'de gösterilmiştir.



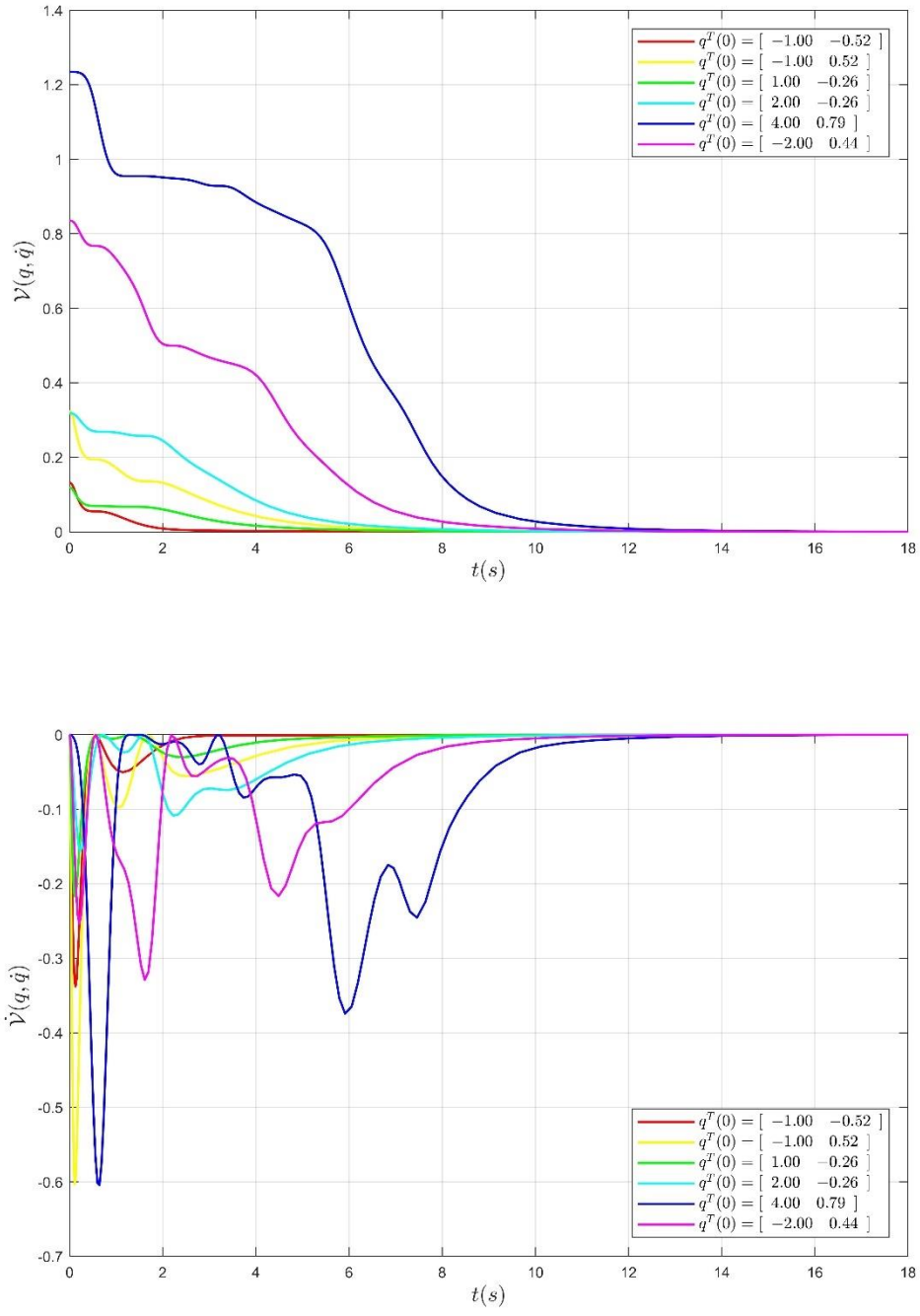
Şekil 5.19 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Çubuk)



Şekil 5.20 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B
(Top ve Çubuk)



Şekil 5.21 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B
(Top ve Çubuk)



Şekil 5.22 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Top ve Çubuk)

5.4 Top ve Çubuk Sistemi (Tam Çözüm)

Top ve çubuk sisteminin genel atalet matrisi özel bir yapıdadır ve G^T ile soldan çarpıldığında elde edilen matris q 'dan bağımsızdır. Top ve çubuk sistemin bu özelliğini kullanarak eğer q 'dan bağımsız sabit bir $M_c > 0$ matrisi tasarlanabilirse uygun $R \geq 0$ ve $J = -J^T$ için top ve çubuk sisteminin tam çözümü bulunabilir.

Tez çalışmasında verilen çözüm yöntemini kullanarak, top ve çubuk sisteminin bu özel durumunu kullanarak tam çözümünü bulmak için benzer şekilde aynı adımları uygulayalım:

1. Adım: Tam çözüm üzerine çalışılacağı için konfigürasyon uzayını alt bölgelere ayırmaya ihtiyaç yoktur.

2. Adım: (2.95)'de verilen potansiyel enerji eşleşme koşulunun çözümü için $M_c^{-1} > 0$ özelliğine sahip aşağıdaki sabit matrisi tanımlayalım:

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} m_c^{i1} & m_c^{i2} \\ m_c^{i2} & m_c^{i3} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Bu durumda potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\frac{(J_b + r^2 m)(m_c^{i1} \partial V_c / \partial q_1 + \partial V_c / \partial q_2)}{r^2} + gm \sin q_2 = 0 \quad (5.44)$$

Bu PDE'nin çözümü olan V_c parametrik formda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_c(q) = -\frac{gr^2 m \cos q_2}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}} + \Phi(z(q)) \quad (5.45)$$

$$z(q) = q_2 - \frac{m_c^{i2}}{m_c^{i1}}(q_1 - q_1^*)$$

Burada $\Phi(z(q))$, $\nabla_q \Phi(z(0)) = 0$ koşulunu sağlayan keyfi türevlenebilir bir fonksiyondur. $V_{\text{chess}}(q^*) > 0$ 'ı oluşturmak için, $K_p > 0$ için $\Phi(z) = \left(\frac{K_p}{2}\right)z^2 + \frac{gr^2 m}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}}$ olarak alınabilir:

$$\begin{aligned}
V_c(q) = & \frac{gr^2m}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}} \\
& + Kp \left(\frac{m_c^{i2^2} q_1^2}{2m_c^{i1^2}} + \frac{q_2^2}{2} + \frac{m_c^{i2} q_2 q_1^*}{m_c^{i1}} + \frac{m_c^{i2^2} q_1^{*2}}{2m_c^{i1^2}} \right. \\
& \left. + q_1 \left(-\frac{m_c^{i2} q_2}{m_c^{i1}} - \frac{m_c^{i2^2} q_1^*}{m_c^{i1^2}} \right) \right) - \frac{gr^2m \cos q_2}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$V_c(q)$ 'nin parametrik formda olduğunu ve bu aşamada kısmi olarak belirlendiğini dikkate alalım. $V_c(q)$ 'nin gradyanı ve Hessian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nabla_q V_c(q) = \begin{bmatrix} -\frac{K_p m_c^{i2} (m_c^{i1} q_2 + m_c^{i2} (-q_1 + q_1^*))}{m_c^{i1^2}} \\ Kp \left(q_2 + \frac{m_c^{i2} (-q_1 + q_1^*)}{m_c^{i1}} \right) + \frac{gr^2m \sin q_2}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

$$V_{\text{chess}}^q(q) = \begin{bmatrix} \frac{K_p m_c^{i2^2}}{m_c^{i1^2}} & -\frac{K_p m_c^{i2}}{m_c^{i1}} \\ -\frac{K_p m_c^{i2}}{m_c^{i1}} & Kp + \frac{gr^2m \cos q_2}{J_b m_c^{i2} + r^2 m m_c^{i2}} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

$V_{\text{chess}}^q(q) > 0$ oluşturmak için sonraki koşullar şu şekilde bulunur:

$$m_c^{i2} > 0, \quad m_c^{i1} > 0, \quad K_p > 0 \tag{5.49}$$

(5.61) koşulları sağlanması durumunda kapalı çevrim sistem istenen denge noktasında kararlı olacaktır. $M_{ci} > 0$ koşulu sağlayan durumlar bir sonraki adımda bulunacaktır.

3. Adım: $M_{ci} > 0$ için gerekli ek koşulların bulunması amacıyla, M_c matrisini M_c^{-1} matrisinin elemanları cinsinden yazalım.

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{m_c^{i3}}{-m_c^{i2^2} + m_c^{i1} m_c^{i3}} & \frac{m_c^{i2}}{m_c^{i2^2} - m_c^{i1} m_c^{i3}} \\ \frac{m_c^{i2}}{m_c^{i2^2} - m_c^{i1} m_c^{i3}} & \frac{m_c^{i1}}{-m_c^{i2^2} + m_c^{i1} m_c^{i3}} \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Gösterimi kolaylaştırmak için:

$$\begin{aligned} m_c^{i1} &= \alpha_1 \\ m_c^{i2} &= \alpha_2 \\ m_c^{i3} &= \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} + \beta \end{aligned} \quad (5.51)$$

olarak seçilsin. Bu durumda $M_c > 0$ sağlamak için $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta > 0$ koşullarının sağlanması yeterli olacaktır.(5.63), (5.62)'de yerine yazıldığında M_c matrisleri aşağıdaki şekilde düzenlenir:

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2^2 + \alpha_1\beta}{\alpha_1^2\beta} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1\beta} \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

4. Adım: Kapalı döngü sistemin genelleştirilmiş atalet matrisini q 'dan bağımsız olarak oluşturduğumuz için bu adım atlanabilir.

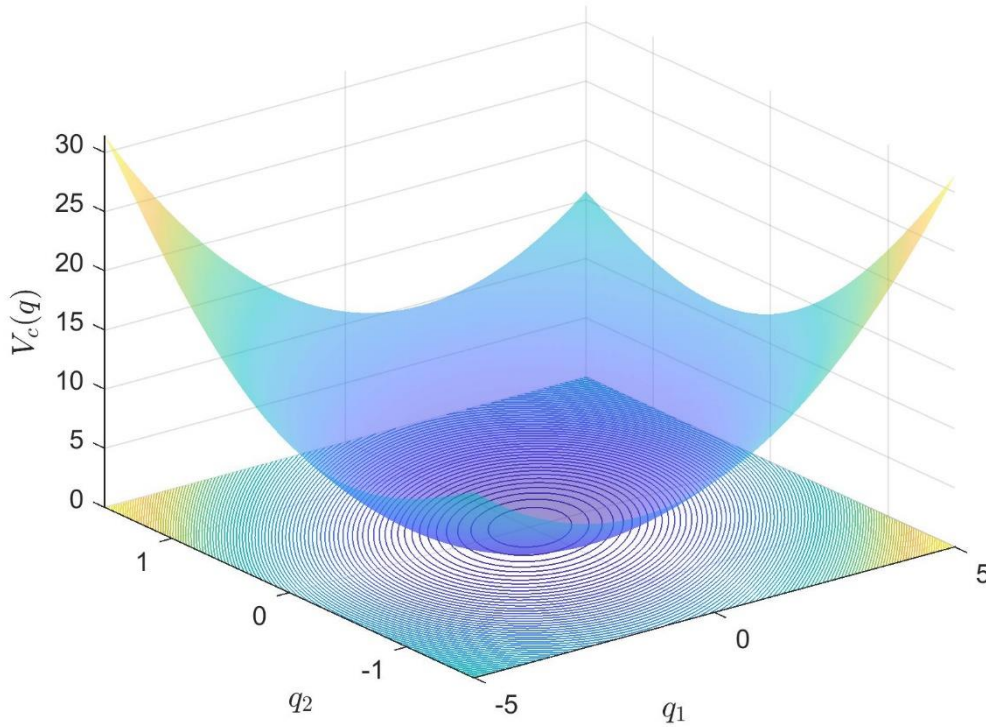
5. Adım: M_c matrisi q 'ya bağımlı olmadığı için $C_c = 0$ olacaktır. Bu durumda (2.94)'de verilen kinetik enerji eşleşme koşulunun sağlanması için $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrisleri aşağıdaki yapıda oluşturulması gerekmektedir:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{r^2 m q_1 \dot{q}_2}{2\alpha_1 J_b + 2\alpha_1 r^2 m} \\ -\frac{r^2 m q_1 \dot{q}_2}{2\alpha_1 J_b + 2\alpha_1 r^2 m} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2 r^2 m q_1 \dot{q}_2}{4\alpha_1^2 (J_b + r^2 m)} & -\frac{l^2 m q_1 \dot{q}_2}{4\alpha_1 J_b + 4\alpha_1 r^2 m} \\ -\frac{l^2 m q_1 \dot{q}_2}{4\alpha_1 J_b + 4\alpha_1 r^2 m} & -\frac{l^2 m q_1 \dot{q}_2}{4\alpha_2 J_b + 4\alpha_2 r^2 m} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

6. Adım: Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol kuralını oluşturalım. Tasarım parametreleri $K_p = 1/10$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$, $\beta = 50$ olarak seçilmiştir. Enerji fonksiyonunu şekillendiren kontrol girişi, önceki adımlarda bulunan $M_c(q)$, $V_c(q)$, $J(q, \dot{q})$ ve $R(q, \dot{q})$ değerlerinin (3.10)'da verilen ifadede yerine konulmasıyla kolayca

oluşturulabilir. Kapalı döngü sistem potansiyel enerji fonksiyonu yukarıda verilen kontrol tasarım parametreleri için Şekil 5.23'de gösterilmiştir.

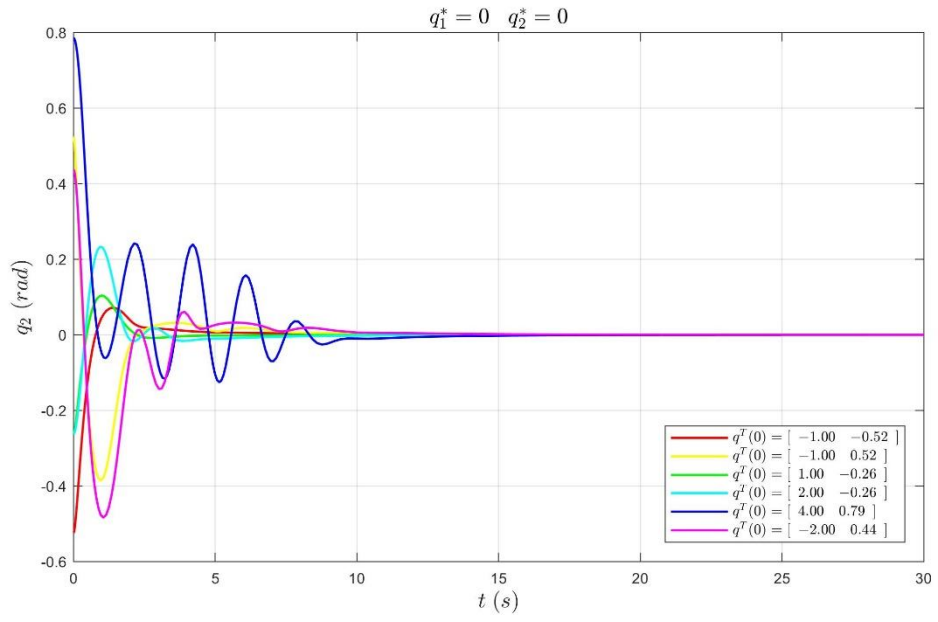
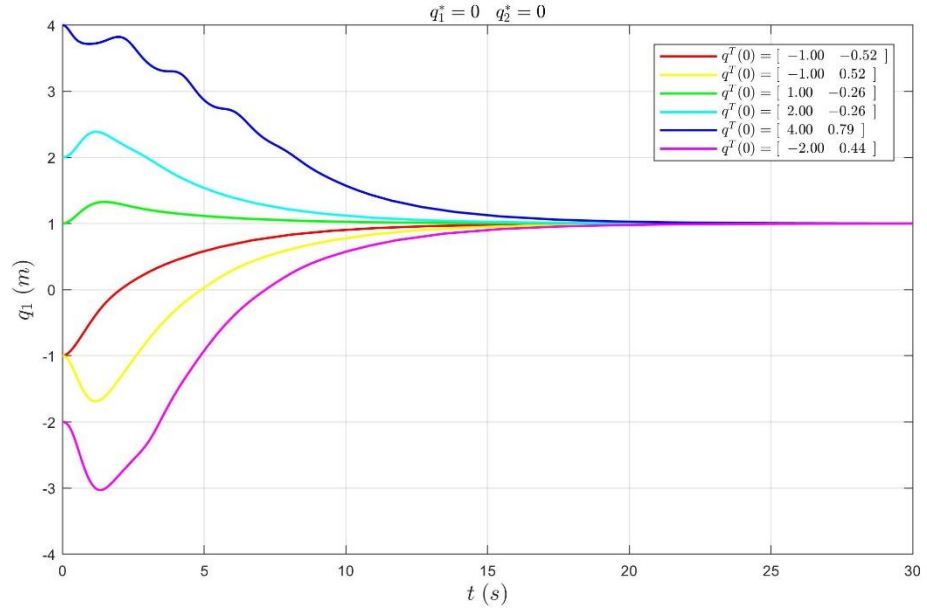


Şekil 5.23 : Potansiyel enerji fonksiyonu (Top ve çubuk tam çözüm)

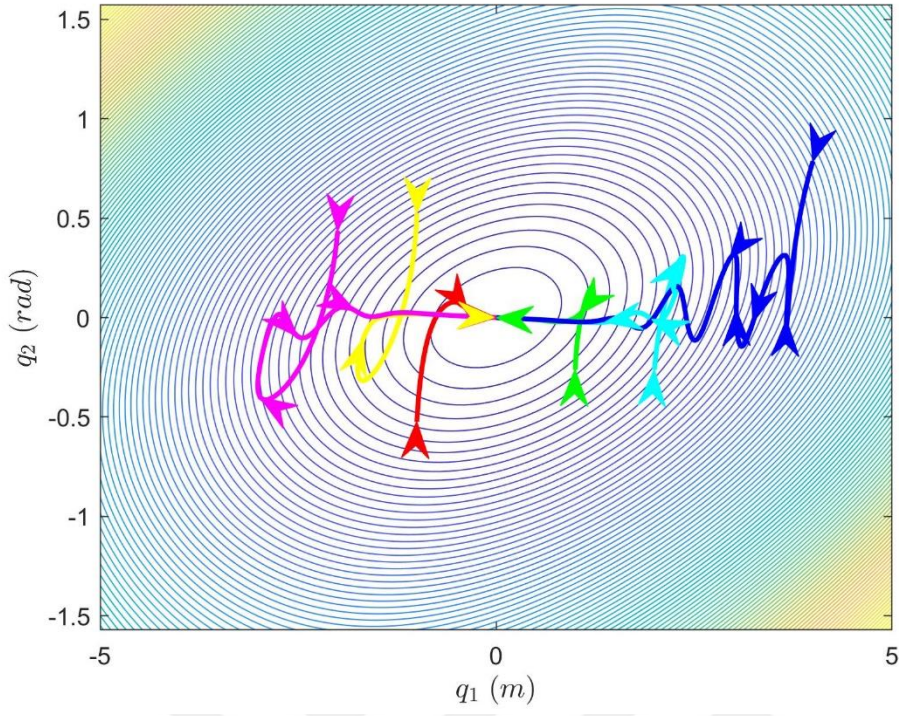
7. Adım: Sistemin asimptotik kararlılığını sağlamak için, sönüm enjeksiyonundan sorumlu kontrol girişi aşağıdaki ilişki kullanılarak hesaplanmıştır:

$$u_d = -k_v G^T M^{-1}(q) M_c(q) \dot{q}, \quad k_v = 1000$$

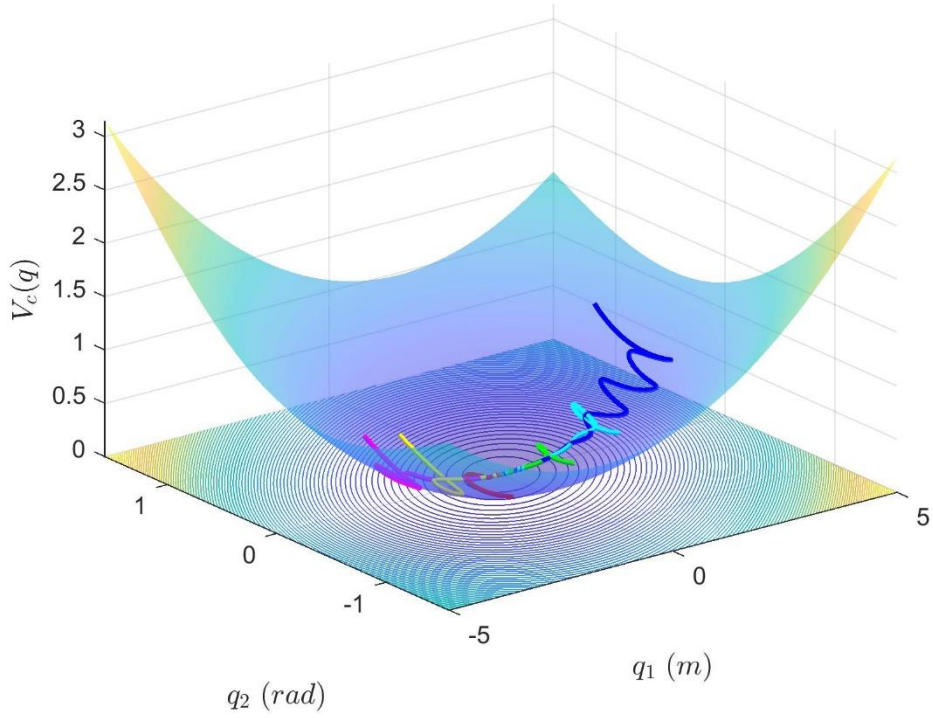
Top ve çubuk sisteminin farklı başlangıç koşullarındaki durum yörüngeleri Şekil 5.24'de, $V_c(q)$ üzerindeki durum yörüngeleri ise Şekil 5.25 ve 5.26'da verilmiştir. Son olarak, $\dot{H}_c(q, \dot{q})$ ve $H_c(q, \dot{q})$ 'ın zamana karşı değişimi Şekil 5.27'de gösterilmiştir.



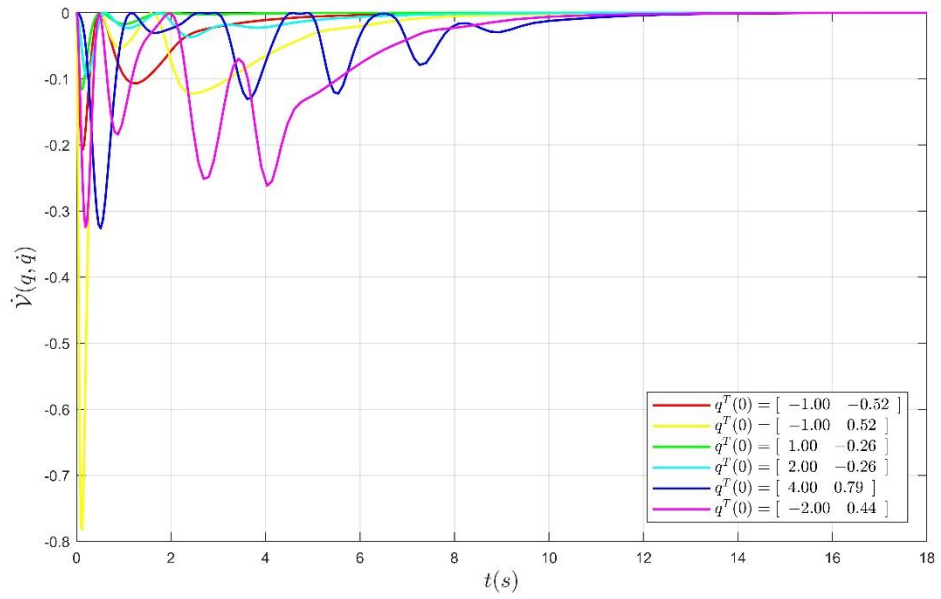
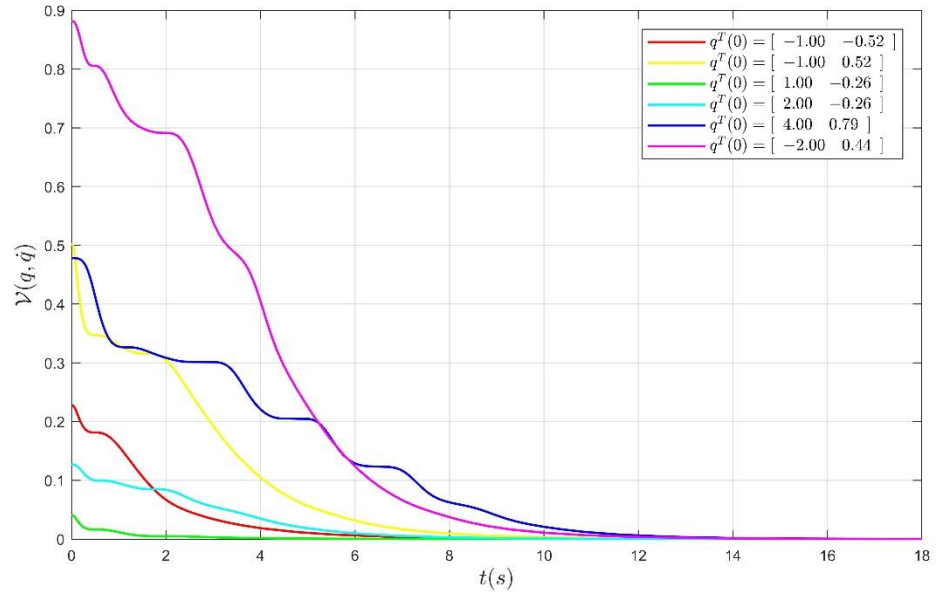
Şekil 5.24 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Çubuk tam çözüm)



Şekil 5.25 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 2B
(Top ve Çubuk tam çözüm)



Şekil 5.26 : Potansiyel enerji fonksiyonu üzerinde durumların yörüngesi 3B
(Top ve Çubuk tam çözüm)



Şekil 5.27 : Aday lyapunov fonksiyonu ve türevi (Top ve Çubuk tam çözüm)

5.5 Top ve Tabla sistemi

Top ve tabla sisteminin dinamik denklemleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Nokhbeh ve Khashabi, 2011):

$$M(q) = \begin{bmatrix} m + \frac{J_b}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_b + mq_1^2 & 0 & mq_1q_3 \\ 0 & 0 & m + \frac{J_b}{r^2} & 0 \\ 0 & mq_1q_3 & 0 & J_b + mq_3^2 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

$$V(q) = mg(q_1 \sin(-q_2) + q_3 \sin(-q_4)),$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve ayrıca potansiyel enerji fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$V(q) = mg(q_1 \sin(-q_2) + q_3 \sin(-q_4)) \quad (5.56)$$

Burada m topun kütlesi J_b topun eylemsizlik momenti, r topun yarıçapı, J tablanın eylemsizlik momenti, g yerçekimi ivmesi, q_1, q_2, q_3, q_4 ise sırasıyla topun kütle merkezinin tablanın merkezine olan x eksenindeki uzaklığı, tablanın x eksenindeki açısı, topun kütle merkezinin tablanın merkezine olan y eksenindeki uzaklığı, tablanın x eksenindeki açısıdır. Kontrol kuralının amacı, topu herhangi bir başlangıç hızıyla herhangi bir başlangıç konumundan tablaya tork uygulayarak tabla üzerinde istenen bir q_1^*, q_3^* konumda kararlı kılmaktır. Bu örnekte sistem parametreleri $m = 1, J_b = 1/100, J = 1/100, r = 1, g = 9.81$ olarak alınmıştır.

Sistemin dinamik denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial V(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \nabla_{q_{1,2}} V \\ \nabla_{q_{3,4}} V \end{bmatrix}, \quad G^\perp = [G_{1,2}^\perp \quad G_{3,4}^\perp],$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,2} \\ q_{3,4} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Kapalı çevrim EL sistemi de aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$M_c(q)\ddot{q} + \frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} \right)^T + \frac{\partial V_c(q)}{\partial q} = Gu \quad (5.58)$$

İstenen kapalı çevrim sistemin atalet matrisinin tersi $M_c^{-1}(q)$ ve potansiyel enerji matrisini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$M_c^{-1}(q) = \begin{bmatrix} MI_{c11} & MI_{c12} \\ MI_{c21} & MI_{c22} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial V_c(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \nabla_{q_{1,2}} V_c \\ \nabla_{q_{3,4}} V_c \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

(5.57) ve (5.59) potansiyel enerji eşleşme koşulu (2.95)'de yerine yazılırsa:

$$[G_{1,2}^\perp \quad G_{3,4}^\perp] \left[\begin{bmatrix} \nabla_{q_{1,2}} V \\ \nabla_{q_{3,4}} V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MI_{c11} & MI_{c12} \\ MI_{c21} & MI_{c22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_{1,2}} V_c \\ \nabla_{q_{3,4}} V_c \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (5.60)$$

Burada $MI_{c12} = MI_{c21}^T = 0$ seçilmesi durumunda $M(q)$ 'nin yapısı sebebi ile, potansiyel enerji eşleşme koşulu aşağıdaki iki parçaya ayrılabilir:

$$\begin{aligned} G_{1,2}^\perp [\nabla_{q_{1,2}} V - M_{11} MI_{c11} \nabla_{q_{1,2}} V_c] &= 0 \\ G_{3,4}^\perp [\nabla_{q_{3,4}} V - M_{22} MI_{c22} \nabla_{q_{3,4}} V_c] &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

Burada $M_{11} = M_{22}$ olması sebebi ile $\nabla_{q_{1,2}} V_c = \nabla_{q_{3,4}} V_c$ seçilebilir. Aynı zamanda $M_c^{-1}(q)$ seçimi sebebi ile M_c matrisi de aşağıdaki formda olacaktır:

$$M_c(q) = \begin{bmatrix} M_{c11} & 0 \\ 0 & M_{c22} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Bu matrisin Schur eşleniği M_{c22} olduğu için, $M_c(q) > 0$ koşulu ancak ve ancak $M_{c11} > 0$ ve $M_{c22} > 0$ olması ile sağlanabilir. Burada da $M_{11} = M_{22}$ olması sebebi ile $M_{c11} = M_{c22}$ seçilebilir.

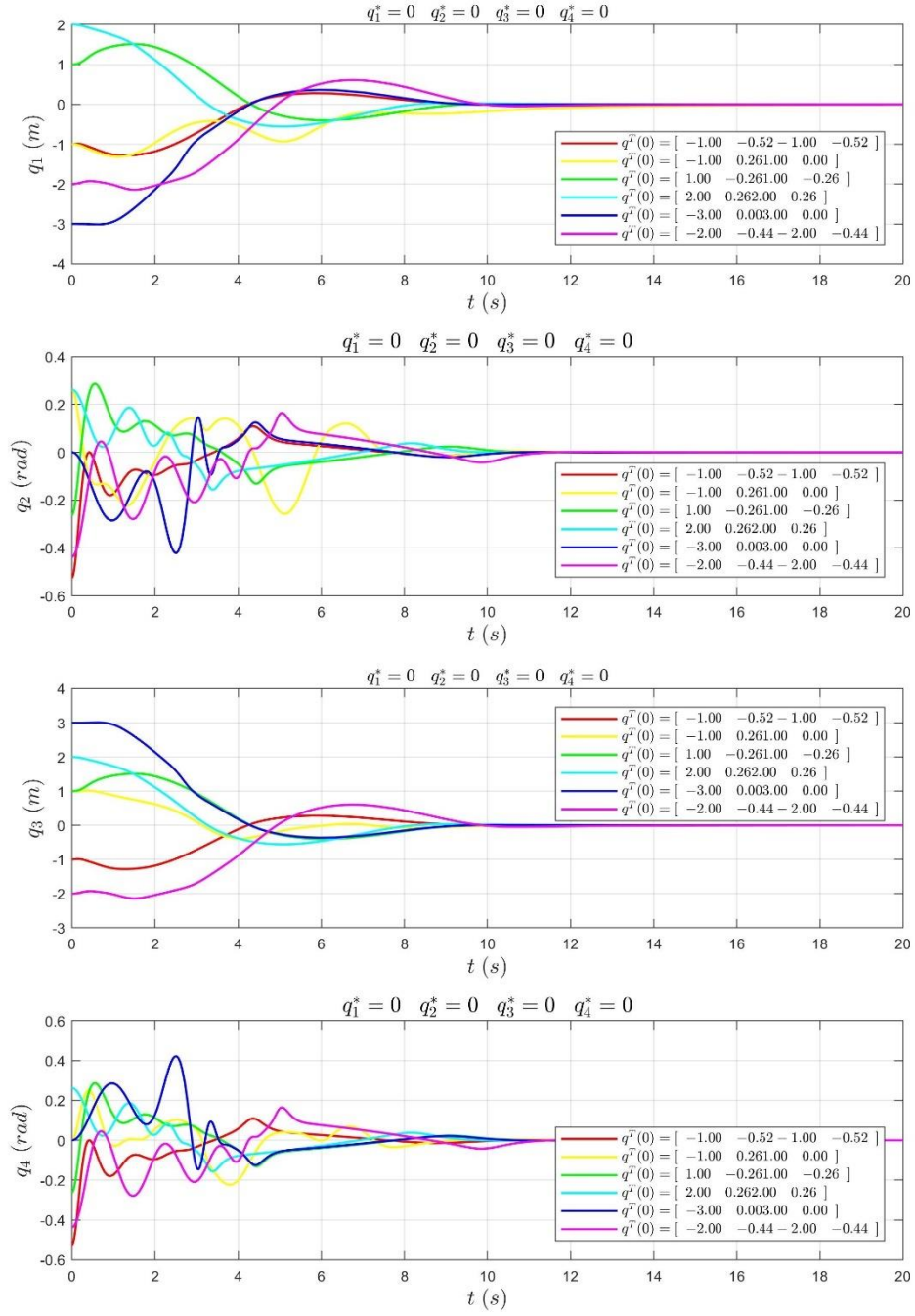
Top ve tabla sisteminin kontrolü için, top ve çubuk sisteminde seçilen $V_c(q)$ ve $\hat{M}_c(q)$, ayrıca $J(q, \dot{q}) = -J^T(q, \dot{q})$ matrisi (3.8)'e göre seçilmesi durumunda $G^\perp M \hat{M}_c^{-1}$ matrisi,

$$G^\perp M \hat{M}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{c11}(1,1) \left(m + \frac{J_b}{r^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{M}_{c22}(1,1) \left(m + \frac{J_b}{r^2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

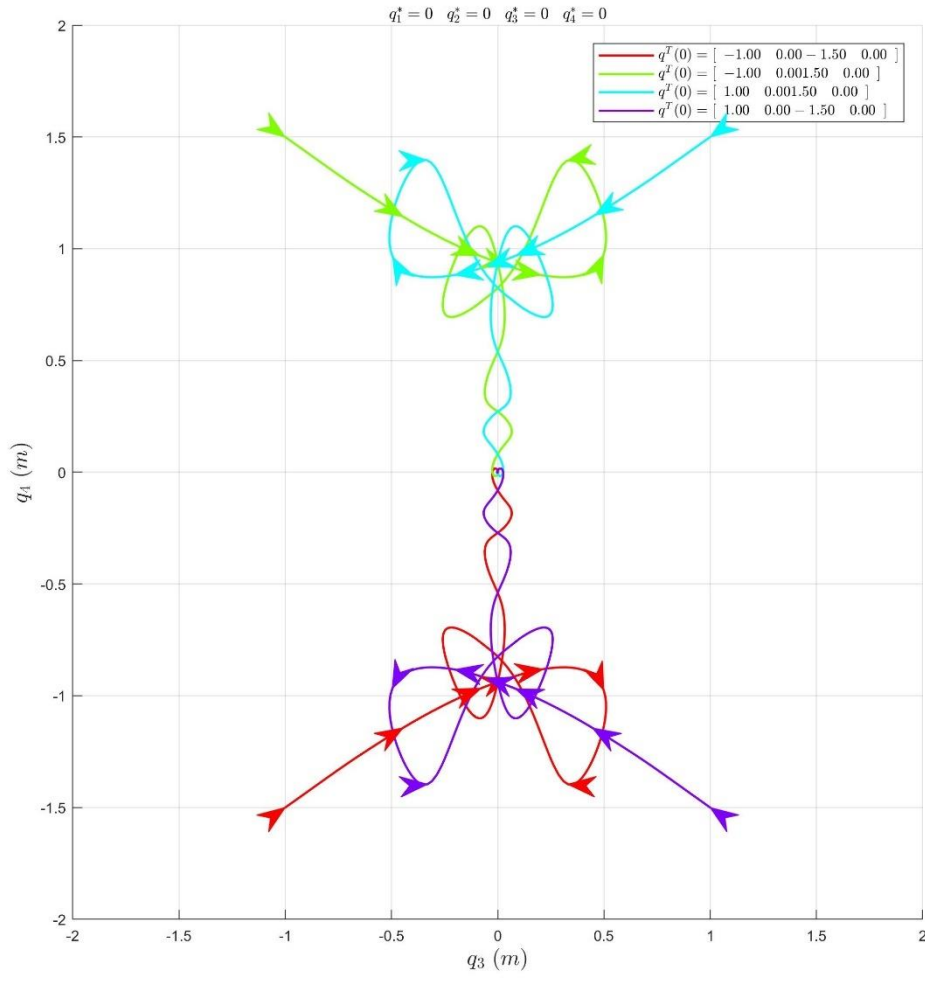
yapısında olduğu için $R(q, \dot{q}) = R^T(q, \dot{q}) \geq 0$ matrisi (3.54)'de verilen seçim kullanılarak,

$$R^{4 \times 4}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} R(q, \dot{q}) & 0 \\ 0 & R(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

şeklinde seçilebilir. Top ve tabla sisteminin farklı başlangıç koşullarındaki durum yörüngeleri Şekil 5.28'de, farklı başlangıç koşullarından bırakılan topun tabl üzerindeki hareketi ise Şekil 5.29'da verilmiştir



Şekil 5.28 : Farklı başlangıç koşulları için durum yörüngeleri (Top ve Tabla)



Şekil 5.29 : Farklı başlangıç koşulları için topun tabla üzerindeki konumu (Top ve Tabla)

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında eksik sürülmüş sistemlerin enerji tabanlı kontrol yöntemleri olan Kontrollü Lagrange ve IDA-PBC yöntemlerinin en zorlayıcı bölümlerden biri olan ve eşleşme koşulları adı verilen bir dizi doğrusal ve homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemin (PDE) çözülmesi problemine, yaklaşık bir çözüm önerilmiş ve böylece oluşan kapalı çevrim sistemin kararlılığının analizi üzerine çalışılmıştır.

Eşleşme koşulların çözülmesi Blankenstein ve diğ (2006) ve Viola ve diğ (2007)'de belirtildiği üzere, eksik sürülmüş sistemlerin kontrolünde güçlü birer yöntem olan Kontrollü Lagrange ve IDA-PBC yöntemlerinin başarı kriterlerinden biridir. Eşleşme koşullarının çözümü kolaylaştırmak adına çeşitli yöntemler geliştirmiştir. Bu çalışmalara Aucky ve Kapitanski (2002) tarafından sunulan ve bir sınıf EL sisteminin eşleşme koşullarının çözümüne kolaylık sağlayan λ yöntemini, jiroskopik kuvvetleri ekleyerek daha da genişleten Chang (2005)'in çalışmasını, Viola ve diğ (2013)'de, koordinat değişimi yaparak bir sınıf Hamiltonian sistemin kontrolü için eşleşme koşullarının çözümünü önerdikleri çalışmalarını gösterebiliriz. Ayrıca Crasta ve Ortega (2015)'de, jiroskopik kuvvetler kullanarak kinetik enerji eşleşme koşulunun çözülebildiği bir sınıf Hamiltonian sistemi tanıtmışlardır. Donaire ve diğ. (2016) ise, bazı kısıtlayıcı koşullar altında eşleşme koşullarını çözmek için PDE'ler yerine adi diferansiyel denklemler kullanarak bir yöntem geliştirmişlerdir. Nihayetinde görülecektir ki Kontrollü Lagrange ve IDA-PBC yöntemlerinin temellerin 2000'li yılların başından vberi atıldığından beri yapılan akademik çalışmaların yoğunluğu eşleşme koşullarının çözülmesi üzerinedir.

Sümer-Gören ve Şengör (2015)'in bir sınıf Hamiltonian sistemde eşleşme koşullarının yaklaşık çözümü ile ilgili yaptıkları çalışma, kapalı çevrim sistemin kararlılığının eşleşme koşullarının yaklaşık çözümleri ile de sağlanabileceğini gösteren ilk çalışma olarak alınabilir. Bu tez çalışmasında bu yöntem Euler-Lagrange sistemler için genişletilmiş ve Butz (1969), Heinen ve Vidyasagar (1970), Ahmadi (2008) ve Ahmadi ve Parrilo (2014)'de verilen sonuçlar kullanılarak kapalı çevrim sistemin kararlılığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında eşleşme koşullarının yaklaşık bir çözümünü bulmak amacı ile kapalı çevrim sistemin genelleştirilmiş atalet matrisi M_c 'nin bir yaklaşıklığı kullanılmıştır. Bu amaçla denklem (3.3)'de görülebileceği üzere radyal temelli fonksiyonlar kullanılarak $\hat{M}_c$ matrisi oluşturulmuştur. $\hat{M}_c$ matrisini oluşturmak için kullanılabilecek farklı interpolasyon yöntemleri bu tez çalışmasının devamında önerilebilecek çalışmalardan birisidir.

Bu tez çalışmasında ele alınan sistemlerin tümü holonomik kısıtlara sahip basit mekanik sistemlerdir. Ancak Zenkov (2000), Blankenstein (2007), Muralidharan ve diğ (2009), Tsolakis ve Keviczky (2021), gibi çalışmalar göstermiştir ki enerji tabanlı kontrol yöntemleri non-holonomik kısıtlara sahip sistemler için de kullanılabilmektedir. Non-holonomik sistemlerde, eşleşme koşullarının yaklaşık çözümlerini kullanarak, kapalı çevrim sistemin kararlılığının sağlanması bu çalışmayı genişletebilecek en ilgi çekici konulardan biridir.

Eksik sürülmüş sistemlerde, eksik sürülen serbestlik derecesi sayısı kadar eşleşme koşulu oluşmaktadır. Özellikle Kinetik enerji eşleşme koşulunda bu PDE'lerin çözümünü veren ortak bir M_c bulmak oldukça zordur. Bu tez çalışmasında verilen yöntem endüstriyel robotlar gibi serbestlik derecesi yüksek sistemler için oldukça uygundur. Bu örnekler üzerinde yapılacak çalışmalar, bu konuya ilgi duyan araştırmacılar için potansiyel araştırma alanları arasında yer alır.

KAYNAKLAR

- Acosta, J. A., Ortega, R., Astolfi, A.** (2004). Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 50, Issue: 12, pp: 1936 - 1955.
- Ahmadi, A. A.** (2008). *Non-monotonic Lyapunov Functions for Stability of Nonlinear and Switched Systems: Theory and Computation*. Massachusetts Institute of Technology.
- Ahmadi, A. A., Parrilo, P. A.** (2011). On higher order derivatives of Lyapunov functions. *Proceedings of the 2011 American Control Conference*.
- Ahmadi, A. A., Parrilo, P. A.** (2014). Towards scalable algorithms with formal guarantees for Lyapunov analysis of control systems via algebraic optimization. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*.
- Arpent, P., Ruggiero, F., Lippiello, V.** (2022). A Constructive Methodology for the IDA-PBC of Underactuated 2-DoF Mechanical Systems with Explicit Solution of PDEs. *Int. J. Control Autom. Syst.* 20, pp. 283–297.
- Auckly, D., Kapitanski, L.** (2003). On the λ - equations for matching control laws. *SIAM J. Control Optim.*, Volume 41, Issue 5, pp. 1372-1388.
- Blankenstein, G., Ortega, R., Van Der Schaft, A. J.** (2002). The matching conditions of controlled Lagrangians and IDA-passivity based control. *INT. J. CONTROL*, VOL. 75, NO. 9, pp. 645-665.
- Blankenstein, G., Ortega, R., Van der Schaft, A. J.** (2006). Matching in the method of controlled Lagrangians and IDA-passivity based control. *Nonlinear and Adaptive Control*, pp. 79-114.
- Blankenstein, G.** (2007). Matching and stabilization of constrained systems. *Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems*.
- Bloch, A. M., Leonard, N. E., & Marsden, J. E.** (1997). Stabilization of Mechanical Systems Using Controlled Lagrangians. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2356-2361 vol.3.
- Bloch, A. M., Leonard, N. E., & Marsden, J. E.** (1998). Matching and Stabilization by the Method of Controlled Lagrangians. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Bloch, A. M., Leonard, N. E., & Marsden, J. E.** (2000). Controlled Lagrangians and the Stabilization of Mechanical Systems I: The First Matching Theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 45, Issue: 12, pp. 2253 - 2270.

- Bloch, A. M., Chang, D. E., Leonard, N. E., Marsden, J. E.** (2001). Controlled Lagrangians and the Stabilization of Mechanical Systems II: Potential Shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 46, Issue: 10, pp. 1556 - 1571.
- Brizard, A. J.** (2007). An Introduction to Lagrangian Mechanics. *Department of Chemistry and Physics*, Saint Michael's College, Colchester.
- Butz, A.** (1969). Higher order derivatives of Liapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Chang, D. E., Bloch, A. M., Leonard, N. E., Marsden, J. E., & Woolsey, C. A.** (2002). The Equivalence of Controlled Lagrangian and Controlled Hamiltonian Systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Volume 8, pp. 393-422.
- Chang, D. E.** (2002). *Controlled Lagrangian and Hamiltonian Systems* (Doktora Tezi). California Institute of Technology.
- Chang, D. E.** (2005). The Extended λ -Method for Controlled Lagrangian Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Volume 38, Issue 1, pp. 592-597.
- Chang, D. E.** (2009). The Method of Controlled Lagrangians: Energy plus Force Shaping. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2009 28th Chinese Control Conference.
- Chang, D. E.** (2010). Generalization of the IDA-PBC Method for Stabilization of Mechanical Systems. *18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, MED'10.
- Chang, D. E.** (2010). Stabilizability of Controlled Lagrangian Systems of Two Degrees of Freedom and One Degree of Under-Actuation by the Energy-Shaping Method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 55, Issue: 8, pp. 1888 - 1893.
- Chang, D. E.** (2014). On the Method of Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control for the Stabilization of Mechanical Systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, Volume 19, pp. 556–575.
- Chang, D. E., Eun, Y.** (2015). On the method of energy shaping via static output feedback for stabilization of mechanical systems. *Journal of the Franklin Institute*, Volume 352, Issue 8, pp. 3394-3404.
- Cheng, D., Astolfi, A., & Ortega, R.** (2005). On feedback equivalence to port controlled Hamiltonian systems. *Systems & Control Letters*, Volume 54, Issue 9, pp. 911-917.
- Cline, D.** (2018). *Variational Principles in Classical Mechanics*. River Campus Libraries.
- Crasta, N., Ortega, R., & Pillai, H. K.** (2015). On the matching equations of energy shaping controllers for mechanical systems. *International Journal of Control*, Volume 88, Issue 9.
- Dirks, D. A., Scherpen, J. M. A., & Ortega, R.** (2008). Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control for port-Hamiltonian mechanical systems with only position measurements. *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, pp. 4957-4962.

- Dixon, W. E., Behal, A., Dawson, D. M., & Nagarkatti, S. P.** (2003). *Nonlinear Control of Engineering Systems*. Birkäuser Boston.
- Donaire, A., Mehra, R., Ortega, R., Satpute, S., Romero, J. G., Kazi, F., & Singh, N. M.** (2016). Shaping the Energy of Mechanical Systems Without Solving Partial Differential Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 61, Issue: 4, pp. 1051 - 1056.
- Fantoni, I., & Lozano, R.** (2002). *Nonlinear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag London.
- Fujimoto, K., & Sugie, T.** (2001). Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems. *Systems & Control Letters*, Volume 42, Issue 3, 15 March, pp. 217-227.
- Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. L.** (2001). *Classical Mechanics*. Pearson.
- Gomez-Estern, F., Ortega, R., Rubio, F. R., & Aracil, J.** (2001). Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Total Energy Shaping. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, USA, pp. 1137-1143 vol.2.
- Gomez-Estern, F., & van der Schaft, A. J.** (2004). Physical Damping in IDA-PBC Controlled Underactuated Mechanical Systems. *European Journal of Control*, Volume 10, Issue 5, Pages 451-468.
- Gören-Sümer, L., Yalçın, Y.** (2011). A Direct Discrete-time IDA-PBC Design Method for a Class of Underactuated Hamiltonian Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Volume 44, Issue 1, Pages 13456-13461.
- Gören-Sümer, L., Şengör, N. S.** (2015). Stabilizing a Class of Under-actuated Hamiltonian Systems Using an Approximate Model. *European Control Conference (ECC)*, Linz, 15–17 July.
- Hamberg, J.** (1999). General Matching Conditions in the Theory of Controlled Lagrangians. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2519-2523 vol.3.
- Hamberg, J.** (2000). Simplified conditions for matching and for generalized matching in the theory of controlled Lagrangians. *American Control Conference ACC*, pp. 3918-3923 vol.6.
- Heinen, J. A., Vidyasagar, M.** (1970). Lagrange stability and higher order derivatives of Liapunov functions. *Proceedings of the IEEE*, Volume 58, Issue 7, pp. 1174 - 1174.
- Lanczos, C.** (1986). *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications; 4th edition.
- Liu, Y., & Yu, H.** (2013). A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, Volume 7, Issue 7, pp. 921-935.
- Marsden, J. E., & Ratiu, T. S.** (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer Science-Business Media, LLC.

- Muralidharan, V. , Ravichandran M. T., Mahindrakar A. D.** (2009), Extending interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC) to underactuated mechanical systems with nonholonomic Pfaffian constraints: The mobile inverted pendulum robot, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 6305-6310
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., Escobar, G.** (1999). Energy-shaping of port-controlled Hamiltonian Systems by Interconnection. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Ortega, R., Spong, M. W.** (2000). Stabilization of underactuated mechanical system via interconnection and damping assignment. *IFAC Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, Princeton, New Jersey, USA.
- Ortega, R., Spong, M. W., Gomez-Estern, F., & Blankenstein, G.** (2002). Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 8, pp. 1218-1233, Aug.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., & Escobar, G.** (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, Volume 38, Issue 4, Pages 585-596.
- Ortega, R., & Garcia-Canseco, E.** (2004). Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey. *European Journal of Control*, Volume 10, Issue 5, Pages 432-450.
- Özmutlu, E.** (2007). En az eylem ilkesi. *Kaygı : Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Felsefe Dergisi*, Issue 8, pp. 173-179.
- Prajna, S., van der Schaft, A., Meinsma, G.,** (2002) An LMI approach to stabilization of linear port-controlled Hamiltonian systems, *Systems & Control Letters*, Volume 45, Issue 5, pp 371-385
- Ryalat, M., & Laila, D. S.** (2016). A simplified IDA-PBC design for underactuated mechanical systems with applications. *European Journal of Control*, Volume 27, January, Pages 1-16.
- Ryalat, M., & Laila, D. S.** (2018). A Robust IDA-PBC Approach for Handling Uncertainties in Underactuated Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 10, pp. 3495-3502.
- Sarras, I., Acosta, J. Á., Ortega, R., Mahindrakar, A. D.** (2013). Constructive immersion and invariance stabilization for a class of underactuated mechanical systems. *Automatica*, Volume 49, Issue 5, pp. 1442-1448.
- Shiriaev, A. S., Freidovich, L. B., & Spong, M. W.** (2013). A Açıklama on Controlled Lagrangian approach. *European Journal of Control*, Volume 19, Issue 6, Pages 438-444.
- Tsolakis, A., Keviczky, T.** (2021), Distributed IDA-PBC for a Class of Nonholonomic Mechanical Systems, *IFAC-PapersOnLine*, Volume 54, Issue 14, pp. 275-280,

- Viola, G., Ortega, R., Banavar, R., Acosta, J. A., & Astolfi, A.** (2007). Total Energy Shaping Control of Mechanical Systems: Simplifying the Matching Equations Via Coordinate Changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 52, Issue: 6, June 2007, Page(s): 1093 - 1099.
- Viola, G., Ortega, R., Banavar, R., Acosta, J. A., & Astolfi, A.** (2013). Some Açıklamas on Interconnection and Damping Assignment Passivity–Based Control of Mechanical Systems. *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control*, pp. 721-735.
- Woolsey, C. A., Bloch, A. M., Leonard, N. E., & Marsden, J. E.** (2001). Physical dissipation and the method of controlled Lagrangians. *European Control Conference (ECC)*, pp. 2570-2575.
- Woolsey, C., Reddy, C. K., Bloch, A. M., Chang, D. E., Leonard, N. E., & Marsden, J. E.** (2004). Controlled Lagrangian Systems with Gyroscopic Forcing and Dissipation. *European Journal of Control*, Volume 10, Issue 5, Pages 478-496.
- Zenkov, D. V., Bloch, A. M., Leonard, N. E., Marsden, J. E.** (2000), Matching and stabilization of low-dimensional nonholonomic systems, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, NSW, Australia, pp. 1289-1294



EKLER

EK A: Matematiksel Sonuçlar



EK A: Matematiksel Sonuçlar

(A.1)

Mekanik bir sistem için Lagrange denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q)$$

Bu denklem (2.58)'de yerine yazıldığında:

$$M(q)\ddot{q} + \frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Gu$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.59)'da verilen kapalı çevrim EL sistemi de basit mekanik bir sistem olarak tanımlayalım:

$$M_c(q)\ddot{q} + \frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M_c(q) \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} = 0$$

Açık çevrim ve kapalı çevrim sistemin kinematik denklemleri de aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(q) \left[Gu - \frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \right] \\ \ddot{q} &= M_c^{-1}(q) \left[-\frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M_c(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

Bu sistemlerin eşleşmesi durumunda Blankenstein (2002)'de belirtildiği gibi, sistemlerin durumları da eşdeğer olacağı için:

$$\begin{aligned} M^{-1}(q) \left[Gu - \frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \right] \\ = M_c^{-1}(q) \left[-\frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M_c(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

Burada eşitliğin her iki tarafı $M(q)$ ile çarpılır ve Gu 'lu terim yalnız bırakıldığında aşağıdaki denklem elde edilecektir:

$$\begin{aligned} Gu &= \frac{\partial M(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \\ &+ M(q)M_c^{-1}(q) \left[-\frac{\partial M_c(q)\dot{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}^T M_c(q) \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

Anlaşılrlık açısından bu denklemi ∂_q indisini kullanarak aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz:

$$Gu = \left[\left\{ \partial_q (M(q)\dot{q}) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q (M_c(q)\dot{q}) \right\} \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + \partial_q V(q) \right. \\ \left. + M(q)M_c^{-1}(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) - \partial_q V_c(q) \right] \right]$$

G tam ranklı bir matris olmadığı için aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır

$$G^\perp(q) \left[\left\{ \partial_q (M(q)\dot{q}) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q (M_c(q)\dot{q}) \right\} \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + \partial_q V(q) \right. \\ \left. + M(q)M_c^{-1}(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) - \partial_q V_c(q) \right] \right] = 0$$

Bu denklemde bize (2.73)'ü verir.

Aynı zamanda G 'nin tam ranklı olmaması sebebi ile u 'da aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(G^T G)^{-1} G^T \left[\left\{ \partial_q (M(q)\dot{q}) - M(q)M_c^{-1}(q) \partial_q (M_c(q)\dot{q}) \right\} \dot{q} \right. \\ \left. - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) + \partial_q V(q) \right. \\ \left. + M(q)M_c^{-1}(q) \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) - \partial_q V_c(q) \right] \right] = 0$$

(A.2)

Denklem (2.58)'in ilk terimi zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt} \left(\partial L(q, \dot{q}) \frac{1}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dL(q, \dot{q})}{dt} \frac{1}{\partial \dot{q}} + \partial L(q, \dot{q}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{1}{\partial \dot{q}} + \partial L(q, \dot{q}) \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} \\ &= \partial_{\dot{q}\dot{q}} L(q, \dot{q}) \ddot{q} + \partial_{q\dot{q}} L(q, \dot{q}) \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \\ &= \partial_{\dot{q}\dot{q}} L(q, \dot{q}) \ddot{q} + \partial_{q\dot{q}} L(q, \dot{q}) \dot{q} \end{aligned}$$

Bulunan bu eşitlik (2.58)'de yerine yazıldığında

$$(\partial_{\dot{q}\dot{q}} L) \ddot{q} + (\partial_{q\dot{q}} L) \dot{q} - \partial_q L = Gu$$

elde edilir ki bu da (2.64) denklemdir.

(A.3)

Kapalı çevrim Hamiltonian sistemin, kapalı çevrim EL sisteme eşleşmesi için gerek ve yeter koşulları Blankenstein ve diğ (2002)'de aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$M_c(q) = M(q)M_d^{-1}(q)M(q)$$

$$V_c(q) = V_d(q)$$

Bu koşullar altında eşleşme koşullarını inceleyelim. Okuma kolaylığı açısından (q) indisleri kullanılmayacaktır.

Hamiltonian sistemin potansiyel enerji ve kinetik enerji eşleşme koşulları sırası ile:

$$G^\perp(q)[\partial_q V - M_d M^{-1} \partial_q V_d] = 0$$

$$G^\perp \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right) - M_d M^{-1} \partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p \right) + J_2 M_d^{-1} p \right] = 0$$

aynı şekilde EL bir sistemin eşleşme potansiyel ve kinetik enerji eşleşme koşulları da $J = -J^T$ olmak üzere sırası ile:

$$G^\perp(q)[\partial_q V - M M_c^{-1} \partial_q V_c] = 0$$

$$G^\perp \left[\partial_q (M \dot{q}) \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right) - M M_c^{-1} \left(\partial_q (M_c \dot{q}) \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c \dot{q} \right) + J \dot{q} \right) \right] = 0$$

olarak verilmiştir. $V_c(q) = V_d(q)$ koşulu altında potansiyel enerji koşulları birbirlerine eşdeğerdir.

Hamiltonian sistemin kinetik enerji eşleşme koşulu aşağıdaki koşul altında EL sistemin kinetik enerji eşleme koşuluna eşdeğerdir:

$$J_2(q, p) = M_d M^{-1} \left[[\partial_q (M M_d^{-1} p)]^T - \partial_q (M M_d^{-1} p) \right] M^{-1} M_d - M_d M^{-1} J M^{-1} M_d$$

J_2 'yi Hamiltonian eşleşme koşulunda yerine yazalım:

$$\begin{aligned} & G^\perp \left[\partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M^{-1} p \right) - M_d M^{-1} \partial_q \left(\frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p \right) \right. \\ & \quad \left. + M_d M^{-1} \left[[\partial_q (M M_d^{-1} p)]^T - \partial_q (M M_d^{-1} p) \right] M^{-1} p - M_d M^{-1} J M^{-1} p \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

Blankenstein ve diğ (2002)'de aşağıdaki dönüşümler verilmiştir (Sırasıyla ilgili makalede sırası ile (61), (119), (120), (130) ve (131) numaralı denklemler):

$$p = M\dot{q}, \quad \partial_q(p^T M^{-1} p) = -\partial_q(\dot{q}^T M \dot{q})$$

$$\partial_q(p^T M_d^{-1} p) = -\partial_q(\dot{q}^T M M_d^{-1} M \dot{q}) + 2[\partial_q(M_d^{-1} M \dot{q})]^T M \dot{q}$$

$$[\partial_q(M M_d^{-1} p)]^T = [\partial_q(M_d^{-1} M \dot{q})]^T M$$

$$\partial_q(M M_d^{-1} p) = \partial_q(M M_d^{-1} M \dot{q}) - M M_d^{-1} \partial_q(M \dot{q})$$

Bu değerler yerine yazıldığında:

$$\begin{aligned} G^\perp \left[-\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right) + M_d M^{-1} \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M M_d^{-1} M \dot{q} \right) - M_d M^{-1} [\partial_q(M_d^{-1} M \dot{q})]^T M \dot{q} \right. \\ \left. + M_d M^{-1} [\partial_q(M_d^{-1} M \dot{q})]^T M \dot{q} - M_d M^{-1} \partial_q(M M_d^{-1} M \dot{q}) \dot{q} + \partial_q(M \dot{q}) \dot{q} \right. \\ \left. - M_d M^{-1} J \dot{q} \right] = 0 \end{aligned}$$

Elde edilir. Bu denklem aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} G^\perp \left[\partial_q(M \dot{q}) \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right) + M_d M^{-1} \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M M_d^{-1} M \dot{q} \right) \right. \\ \left. - M_d M^{-1} \partial_q(M M_d^{-1} M \dot{q}) \dot{q} - M_d M^{-1} J \dot{q} \right] = 0 \end{aligned}$$

Son olarak $M_c(q) = M(q)M_d^{-1}(q)M(q)$ dönüşümü yapılırsa:

$$G^\perp \left[\partial_q(M \dot{q}) \dot{q} - \partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right) + M M_c^{-1} \left(\partial_q \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c \dot{q} \right) - \partial_q(M_c \dot{q}) \dot{q} - J \dot{q} \right) \right] = 0$$

Elde edilecektir ki bu da EL sistem için kinetik enerji eşleşme koşuludur.

J_2 ve J matrisleri çarpık simetrik matrisler oldukları için, ayrıca M , M_d ve M_c matrisleri bu tezin kapsamında olan basit mekanik sistemler için pozitif tanımlı tersinir matrisler olduğundan, J ve J_2 matrisleri birbirleri cinsinden yazılabilir. Böyle J matrisi J_2 matrisi cinsinden

$$J = \left[[\partial_q(M M_d^{-1} p)]^T - \partial_q(M M_d^{-1} p) \right] - M_d^{-1} M J_2 M M_d^{-1}$$

Olarak yazılabilir. Burada gerekli dönüşümler yapıldığında J aşağıdaki şekilde bulunur:

$$J = \left[[\partial_q(M_c \dot{q})]^T - \partial_q(M_c \dot{q}) \right] - M^{-1} M_c J_2 M_c M^{-1}$$

Olarak elde edilecektir.

(A.4)

Denklem (3.21)'de verilen $n \times m$ boyutlu G matrisinin (3.20)'deki yapısını inceleyelim:

$$G(G^T G)^{-1} G^T = G(G^{-1}) G^{-T} G^T$$

Bu çarpım açık şekilde yazıldığında,

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ g_{m \times m} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} 0 & g_{m \times m}^{-1} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} 0 \\ g_{m \times m}^{-1} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} 0 & g_{m \times m} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Aşağıdaki eşitliğin elde edildiği görülecektir.

$$G(G^T G)^{-1} G^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m \times m} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Aynı şekilde (3.21)'de verilen $p \times n$ boyutlu $G^\perp$ matrisini aşağıdaki çarpım olarak yazalım:

$$(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp = (G^\perp)^T (G^\perp)^{-T} (G^\perp)^{-1} G^\perp$$

Bu çarpım da açık olarak yazılabilir:

$$= \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n}$$

Benzer şekilde aşağıdaki eşitliğin elde edildiği görülecektir:

$$(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp = \begin{bmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Sonuç olarak aşağıdaki ifadelerin doğruluğu sağlanmış olur:

$$G(G^T G)^{-1} G^T + (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp = I$$

$$G(G^T G)^{-1} G^T = I - (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp$$

(A.5)

Aşağıdaki ifadeyi inceleyelim:

$$(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n}$$

Bu ifadeyi açık olarak yazıp soldaki terimden itibaren çarparak ilerlersek:

$$= \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p} & 0 \end{bmatrix}_{p \times n}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} [\tilde{g}_{p \times p} \quad 0]_{p \times n} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{g}_{p \times p}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times p} [\tilde{g}_{p \times p} \quad 0]_{p \times n} = (G^\perp)^{-T} G^\perp
\end{aligned}$$

Sonuç olarak sistemin hareket denklemini etkilemeyecek şekilde aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp = (G^\perp)^{-T} G^\perp$$

(A.6)

(3.19)'da verilen hareket denkleminde (3.20) yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
M\ddot{q} + C\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \\
&= (I - (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp) \left[(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R))\dot{q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] + Gu_d
\end{aligned}$$

Burada çarpmanın dağılma kuralı kullanılarak:

$$\begin{aligned}
M\ddot{q} + C\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \\
&= \left[(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R))\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \dot{q} \\
&\quad - (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R))\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \right. \\
&\quad \left. - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \dot{q} + Gu_d
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Denklemin sol eşitliğine kapalı çevrim sistemin hareket denklemlerinin ifadelerini sağ eşitliğine ise eksik sürümden gelen ifadeleri yazalım:

$$\begin{aligned}
M\ddot{q} + M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c\dot{q} + M\hat{M}_c^{-1}(J + R)\dot{q} + M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \\
&= -(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R))\dot{q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] + Gu_d
\end{aligned}$$

Eşitliği $M^{-1}\hat{M}_c$ parantezine alalım:

$$\begin{aligned} M^{-1}\hat{M}_c \left(\hat{M}_c \ddot{q} + \hat{C}_c \dot{q} + (J + R)\dot{q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) \\ = -(G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[\left(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R) \right) \dot{q} \right] \\ - (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] + Gu_d \end{aligned}$$

Tüm denklemi $\hat{M}_c M^{-1}$ ile çarpıp tüm eşitlikleri denklemin sol tarafına toplayalım:

$$\begin{aligned} \left(\hat{M}_c \ddot{q} + \hat{C}_c \dot{q} + (J + R)\dot{q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) \\ + \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[\left(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R) \right) \dot{q} \right] \\ + \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^T (G^\perp (G^\perp)^T)^{-1} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] - Gu_d = 0 \end{aligned}$$

Son olarak (EK A.5)'de verilen eşitliği kullanarak kapalı çevrim sistemin hareket denklemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \left(\hat{M}_c \ddot{q} + \hat{C}_c \dot{q} + (J + R)\dot{q} + \frac{\partial V_c}{\partial q} \right) \\ + \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\left(C - M\hat{M}_c^{-1}\hat{C}_c - M\hat{M}_c^{-1}(J + R) \right) \dot{q} \right] \\ + \hat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M\hat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] - Gu_d = 0 \end{aligned}$$

(A.7)

Aday lyapunov fonksiyonu (3.24) zamana göre türevi şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(q, \dot{q}) &= H_c(q, \dot{q}) - V_c(q^*) \\ \frac{d\mathcal{V}(q, \dot{q})}{dt} &= \frac{dH_c(q, \dot{q})}{dt} - \frac{dV_c(q^*)}{dt} \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} \frac{dV_c(q^*)}{dt} &= 0 \\ \frac{dH_c(q, \dot{q})}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} + V_c(q) \right) \end{aligned}$$

Öncelikle kinetik enerji'nin zamana göre türevini alalım:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M_c(q) \dot{q} \right) = \dot{q}^T M_c(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}_c(q) \dot{q}$$

Burada zincir kuralından:

$$\dot{H}(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M_c \left(M^{-1} G u - M^{-1} C \dot{q} - M^{-1} \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}_c \dot{q} + \dot{V}_c$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{dM_c(q)}{dt} \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial M_c(q)}{\partial q} \dot{q} \right) \dot{q}$$

$$\frac{dV_c(q)}{dt} = \frac{\partial V_c(q)}{\partial q} \dot{q}$$

Böylece sonuç olarak:

$$\frac{dH_c(q, \dot{q})}{dt} = \dot{q}^T M_c(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial M_c(q)}{\partial q} \dot{q} \right) \dot{q} + \nabla_q V_c(q) \cdot \dot{q}$$

Burada $\widehat{M}_c \ddot{q}$ şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_c \ddot{q} = & -\widehat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\left(C - M \widehat{M}_c^{-1} \hat{C}_c - M \widehat{M}_c^{-1} (J + R) \right) \dot{q} \right] \\ & - \widehat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M \widehat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] - \hat{C}_c \dot{q} - (J + R) \dot{q} - \frac{\partial V_c}{\partial q} \\ & + G u_d \end{aligned}$$

Yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(q, \dot{q}) = & -\dot{q}^T R \dot{q} - \dot{q}^T \widehat{M}_c M^{-1} G K_v G^T M^{-1} \widehat{M}_c \dot{q} \\ & - \dot{q}^T \widehat{M}_c M^{-1} (G^\perp)^{-T} G^\perp \left[\frac{\partial V}{\partial q} - M \widehat{M}_c^{-1} \frac{\partial V_c}{\partial q} \right] \end{aligned}$$



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hüseyin Alpaslan YILDIZ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2007, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** : 2008, İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2007-2008 yıllarında Komsis Elektronikte Ar-ge mühendisi olarak çalıştı.
- 2008-2016 yılları arasında TÜBİTAK MAM Enerji Enstitüsünde Uzman araştırmacı olarak çalıştı.
- 2016 yılından beri Siemens A.Ş.'de Yazılım geliştirme lideri olarak çalışmaktadır.
- 2007 yılından itibaren batarya teknolojilerinden 5G gibi haberleşme teknolojilerine kadar geniş bir alanda 15 üzerinde projede çalıştı

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L.**, 2016, Yaklaşık Model Kullanarak Bir Sınıf Eksik Sürülmüş Euler Lagrange Sistemin Kararlı Kılınması, *International Conference on Electrical and Electronics Engineering – ELECO 2016*, 252-256
- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L.**, 2017, Stabilizing of Ball and Plate System Using an Approximate Model, *IFAC-PapersOnline*, 50(1), 9601-9606
- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L.** 2022. Stabilization of a class of underactuated Euler Lagrange system using an approximate model, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2022; 44(8)0 1569-1578

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L.**, 2007, PA10 Endüstriyel Robotun 3 Ekleminin Pasif Olma Temelli Kontrolü, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, 124-130

- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L.,** 2011, Lagrangian modeling of DC-DC buck-boost and flyback converters, *2009 European Conference on Circuit Theory and Design*, Antalya, Turkey, 2009, pp. 245-248
- **Yıldız, H.A., Gören-Sümer, L., Gürleyen F.,** 2009, Çapraz Tip DA-DA Çeviricinin Lagrangian Modellenmesi ve Kayma Kipli Kontrolü, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*
- **Akçakaya, H., Yıldız, H. A., Sağlam, G., Gürleyen F.,** 2009, Sliding mode control of autonomous underwater vehicle, *International Conference on Electrical and Electronics Engineering - ELECO 2009*, pp. II-332-II-336

