

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLER VE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KEMAL DEMİR

DANIŞMAN

DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

EYLÜL 2024

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLER VE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KEMAL DEMİR

ORCID: 0009-0009-5315-7849

DANIŞMAN
DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

EYLÜL 2024
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**Singüler Pertürbe Problemler ve Nümerik Çözümleri**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 06/09/2024

İmza

Kemal DEMİR

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Singüler Pertürbe Problemler ve Nümerik Çözümleri” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 06/09/2024

Tezi Hazırlayan

İmza

Kemal DEMİR

Danışman

İmza

Doç. Dr. Derya ARSLAN

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Kemal DEMİR tarafından hazırlanan “**Singüler Pertürbe Problemler ve Nümerik Çözümleri**” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 06/09/2024 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ :

İMZA

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN
(Bitlis Eren Üniversitesi)

.....

Üye: Prof. Dr. Murat KARAKAŞ
(Bitlis Eren Üniversitesi)

.....

Üye: Doç Dr. Yener ALTUN
(Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi)

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

....../...../2024

Doç. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdürü

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Kemal DEMİR

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN

Eylül 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, pertürbasyon teorisi ve etki alanı hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca singüler pertürbe problemler ve singüler pertürbe problemlerin özellikleri üzerinde durulmuştur. Yaklaşık çözümü yapılan sağ veya sol sınır katlarına sahip gecikmeli singüler pertürbe differansiyel denkleme sahip problemlerin çözümü, düzgün şebeke ile nümerik integral metodu yardımıyla sağlanmıştır. Nümerik integral metodu ile birlikte yamuk metodu, sonlu fark yöntemi ve Thomas algortimasından da faydalanılmıştır. En son Thomas Algortiması yapılmasının ardından yöntemin verimli ve doğru çalışma durumunu gösteren tablo ve şekillerle de somuslatırma yapılmıştır. N ve ε 'nun farklı değerleri için yaklaşık çözümler arasındaki ilişki, uygulanabilir matematik programıyla elde edilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır: Giriş bölümünde, çalışmamızın kaynak tarama bilgileri verilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde, tezin içeriği ile ilgili temel tanımlar ve teoriler sunulmuştur. Bulgular ve tartışma bölümünde gecikmeli singüler pertürbe differansiyel integral sınır değerli denkleme sahip problemlerin nümerik integral metodu ile çözümüne yönelik örneklerin uygulamaları yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise tezin değerlendirildiği sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Singüler pertürbe differansiyel denklem, integral sınır durumu, lineer gecikmeli differansiyel denklemler, düzgün şebeke, nümerik inetgral yöntemi.

Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Mathematic
SİNGULAR PERTURBATION PROBLEMS AND THEIR NUMERICAL
SOLUTIONS

Master Thesis

Kemal DEMİR

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Derya ARSLAN

September 2024

ABSTRACT

In this thesis, information is provided about perturbation theory and domain of influence. Additionally, singular perturbation problems and the characteristics of singular perturbation problems are emphasized. The solution of problems with delayed singularly perturbed differential equations, which have boundary layers at the left or right, has been achieved using the numerical integration method with a uniform grid. Along with the numerical integration method, the trapezoidal method, finite difference method, and Thomas algorithm were also utilized. After the implementation of the Thomas algorithm, the efficiency and accuracy of the method were demonstrated with tables and figures. The relationship between approximate solutions for different values of ϵ and τ was obtained using an applicable mathematical program.

This thesis consists of four chapters: In the introduction, a literature review related to our study is provided. In the materials and methods section, basic definitions and theories related to the content of the thesis are presented. In the findings and discussion section, applications of examples for solving problems with delayed singularly perturbed differential equations using the numerical integration method are conducted. The fourth chapter includes the evaluation of the thesis in the conclusions and recommendations section.

Keywords: Singularly perturbed differentiale equation, integral boundary condition, linear delay differential equations, uniform grid, numerical integration method.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar her konuda benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Derya ARSLAN başta olmak üzere yüksek lisans öğrenimim süresince ders aldığım bütün kıymetli hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan değerli anneme ve ebediyete intikal eden rahmetli babama sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım. Ayrıca yoğun çalışma temposunda benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen kıymetli eşime de teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SİMGELER	VII
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	4
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2. Nümerik İntegral Yöntemi.....	10
2.2.1 Sağ Sınır Katlı Problemin Nümerik İntegral Yöntemine Göre Çözüm Basamakları.....	10
2.2.2 Sol Sınır Katlı Problemin Nümerik İntegral Yöntemine Göre Çözüm Basamakları.....	12
2.2.3 Kararlılık.....	14
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	15
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR	33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 Örnek 1'in Thomas algortmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları	17
Çizelge 3.2 Örnek 2'nin Thomas algortmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları	21
Çizelge 3.3 Örnek 3'ün Thomas algortmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları	25
Çizelge 3.4 Örnek 4'ün Thomas algortmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları	30



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Dünyanın Güneş yörüngesinde dolaşması durumu.	4
Şekil 3.1 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması.	18
Şekil 3.2 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi eğrilerinin karşılaştırılması.	18
Şekil 3.3 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması.	22
Şekil 3.4 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi eğrilerinin karşılaştırılması.	22
Şekil 3.5 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması.	26
Şekil 3.6 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi	26
Şekil 3.7 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması.	30
Şekil 3.8 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi	31

SİMGELER

Simgeler	Açıklama
ε	Singüler pertürbasyon parametresi
u	Problemin kesin çözümü
y	Problemin yaklaşık çözümü
N	Şebekenin adım sayısı
h	Düzgün şebeke adım uzunluğu



1. GİRİŞ

Dünyadaki pekçok tabiat olayları, farklı değişkenlere bağlı olarak birdenbire (ani) değişimler gösterebilir. Özellikle fen ve matematik disiplinlerinde, birdenbire yaşanan bu gibi değişimler küçük sapmalar analizi (singüler ve regüler pertürbe) olarak adlandırılır. Bu teori, ilk olarak 1904 yılında Heidelbergde düzenlenen III. Uluslararası Matematik Kongresinde Prandtl'ın sunduğu sınır tabakalarının varlığına dair çalışmasıyla ortaya çıkmış ve Lindstedt ile Poincare'in katkılarıyla günümüze kadar uzanan köklü geçmişe sahiptir (Farrel, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I, 2000).

Singüler Pertürbe problemler en yüksek mertebeden türevlerin terimlerinin katsayılarının oldukça küçük yani sıfır ile bir arasında bir sabit parametre (ε) olma durumunu ifade eder. Bu tür problemlerin çözümleri, tanım kümesinin uç (sınır) katları olarak adlandırılan hassas geçiş olan bölgelerinde süratli ve dağınık değişiklikler gösterirken, diğer alanlarda yavaş ve ritimli değişimler sergiler. Böyle bir dağınıklık neticesinde, çözümde sonsuz sayıda türevler meydana gelir. Bu durum, özellikle sınır katlarında belirgin hale gelir ve çözümün karmaşık yapısını daha da artırır. Böylece, singüler pertürbe özelliğine sahip problemlerin mekanizmasında çok ciddi sıkıntılar meydana gelir. Bu zorluklar, özellikle sınır katlarında meydana gelen ani ve düzensiz değişikliklerin analiz edilmesi ve bu değişikliklerin problemin genel çözümüne etkisinin belirlenmesi sürecinde kendini gösterir. Singüler pertürbasyon teorisi, bu karmaşık davranışları anlamak ve çözümlmek için özel yöntemler ve teknikler gerektirir. Bu nedenle, bu tür problemlerin çözümü, hem analitik hem de sayısal yaklaşımlarla dikkatlice ele alınmalı ve incelenmelidir. Bu karakteristikler, nümerik çözümler üzerinde de belirgin şekilde kendini gösterir. Şema adım uzunluğunun küçültülmesiyle birlikte yaklaşık çözüm, gerçek çözüme giderek daha fazla yaklaşır. Bu nedenle, singüler pertürbe özelliğindeki problemlerde bu karakteristikleri ifade edebilecek orijinal sayısal yöntemlerin geliştirilmesi çok ciddi manada önemlidir. Bilinen klasik sayısal yöntemler, genellikle gerçekçi çözüm yoluna mutabık netice üretmediğinden, tam olarak bu tarz problem çözümünde oldukça küçük yani sıfır ve bir arasında (sıfıra daha yakın) olan ε 'a göre düzenli yakınsayan etkili sayısal yöntemlerin kullanılması gerekmektedir (Nayfeh, A.H., 1993; O' Malley, R. E. Jr., 1991).

Matematiksel Modelleme ve Nümerik Analiz

Singüler pertürbasyon problemleri, matematiksel modelleme ve nümerik analiz alanlarında önemli araştırma konularıdır. Bu alanlarda yapılan çalışmalar, singüler pertürbasyonların çözüm yöntemlerini geliştirir ve bu yöntemlerin doğruluğunu ve etkinliğini artırır. Özellikle, tezin kapsama alanını teşkil eden nümerik yöntemler kullanılarak singüler pertürbasyon problemlerinin çözümü için etkili algoritmalar geliştirilir (Amiraliyev, G. M., Erdogan, F., 2007).

Uygulamalı Matematik

Uygulamalı matematik alanında, singüler pertürbasyon teorisi üzerine yapılan çalışmalar, bu tezinin çeşitli bilim ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarını genişletir. Bu çalışmalar, teorik yaklaşımların pratik uygulamalarda nasıl kullanılacağını gösterir ve bu alandaki bilgi birikimini artırır (Amiraliyeva, I. G., Erdogan, F., Amiraliyev, G. M., 2010).

Singüler pertürbasyon problemleri üzerine kaynak taraması yaparken, bu alanda önemli katkılar sağlamış klasik ve güncel literatüre odaklanmak gerekmektedir. Aşağıda, singüler pertürbasyon teorisi ve uygulamaları hakkında kapsamlı bilgi edinebileceğiniz temel kaynaklar ve önemli çalışmaların bir kısmı listelenmiştir:

- Nayfeh (1973), genel olarak pertürbasyon yöntemlerini ifade eder ve singüler pertürbasyon teorisine kapsamlı bir giriş sağlar. Asimptotik yöntemler, çok ölçekli analiz ve sınır katman teorisi gibi konular detaylı bir şekilde ele alınmıştır.
- Bender ve Orszag (1978), bilim insanları ve mühendisler için ileri matematiksel yöntemleri ifade etmişlerdir. Singüler pertürbasyon problemleri, asimptotik analiz ve diğer ilgili teknikler ayrıntılı olarak açıklanmıştır.
- O'Reilly, Kokotovic ve Khalil (1986), kontrol teorisinde singüler pertürbasyon yöntemlerinin analiz ve tasarımını ele almış olup, hızlı ve yavaş dinamiklerin ayrıştırılması ve kontrol sistemlerinin kararlılık analizi gibi konuları detaylı bir şekilde incelemişlerdir.
- O'Malley (1974), singüler pertürbasyon teorisine giriş niteliğindeki temel kavramları ve yöntemleri açıklar. Özellikle mühendislik ve uygulamalı matematikte kullanılan tekniklere odaklanmıştır.

Lokal olmayan sınır tipli problemleri ilk kez Bitsadze ve Samarskii bilim adamları tarafından incelenmiştir. Bahsedilen tarzda problemlerde, özellikle quantum

mekaniği, gök mekaniği ve mühendislikte dinamik sistemlerin davranışlarını anlamak için sıkça kullanılmıştır.

Tez bölüm olarak dört kısımdan meydana gelmektedir:

İlk kısım giriş bölümünden oluşmaktadır. Bu kısımda ayrıca literatürle alakalı bilgiler sunulmaktadır.

İkinci bölümde tez ile alakalı olan tanım, teorem ve yöntemlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin asıl anlamını ifade eden nümerik integral metodu ele alınmıştır.

Bundan sonraki kısımlarda ise tezde incelenen problemlere odaklanılır. Gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır durumlu problemlerin nümerik integral yöntemi ile çözümü ele alınmaktadır.

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + r(t)u'(t) + s(t)u(t) - u(t - \theta) &= y(t), \quad t \in (a, b) \cup (b, c), \\ u(a) &= G \quad \text{ için } t \in [a - \theta, b - \theta], \quad \theta > 0, \\ \xi u(c) &= u(c) - \varepsilon \int_a^c \frac{t}{z} u(t) d(t) = c, \\ r(t), s(t), y(t) &\text{ sürekli fonksiyonlar, } r(t) > 0, \\ G, z, c &\text{ sonlu sabitler.} \end{aligned}$$

Yukarıdaki problemin denklemlerinin $u(t)$ çözümü, $t = b$ noktasında bir sınır değerine sahiptir. Dolayısıyla, problemin bu parametre değeri (ε) altında tek bir çözümü vardır (Ma, 1997; Adzic, 2000).

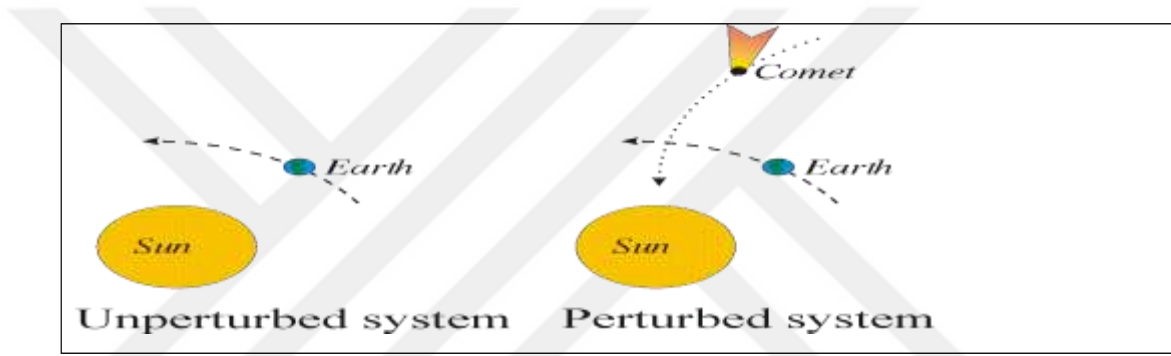
Tezin son bölümünde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, nümerik integral metodu ile gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli problemlerin yaklaşık çözümleri araştırılırken kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 Pertürbasyon Teorisi

Pertürbasyon, denklemlerde çok küçük bir pozitif sayının (pertürbasyon parametresi) etkisinin incelenmesine dayanan bir teoridir. Örneğin, Dünyanın Güneşin etrafında hareketi gibi bir olay, pertürbasyonla ilgili teoriyi aşağıdaki gibi resmederek aklımızda çağrışım yapmasını sağlar.



Şekil 2.1 Dünyanın Güneş yörüngesinde dolaşması durumu

Şekli incelediğimiz zaman dünyanın kütesini m ve Dünyanın Güneşin yörüngesindeki hareketini $s = s(t)$ olarak tanımlayalım. Ünlü bilim adamı Newtonun ikinci yasası ile

$$ms'' = F_{güneş}$$

biçimindedir. Bu formül pertürbasyon olmayan bir ifadedir, yani Güneş ile Dünya arasındaki yörüngeye etki edecek bir dış etken yoktur. Ancak, herhangi bir kuyruklu yıldızın bu yörüngeye yakın olarak geçtiğini düşünelim. Bu durumda hareket pertürbe edilmiş olur ve ek bir terim olan ε ile ifade edilebilir. Böylece aşağıdaki pertürbe denklem oluşur (Persson, 1987):

$$ms'' = F_{güneş} + \varepsilon F_{comet}$$

Bu ek terim ε , Dünyanın Güneşten gelen çekim kuvveti dışında başka bir cismin etkisini temsil eder. Bu şekilde, pertürbasyon teorisi, başlangıçta dengede olan bir sistemde dış etkilerin nasıl hesaplanabileceğini ve bu etkilerin sistemin dinamiklerini nasıl değiştirebileceğini açıklar.

Pertürbe özellikli problemler $0 < \varepsilon \ll 1$ için bir ε değişkeni ile bağlantılı problemler $\varepsilon = 0$ için asıl probleme indirgenmiş problemler denir. Problemin indirgenmiş haliyle asıl problem eş derecede olup problemlerin ikisinin de tek çözümü varsa, bu problem regüler pertürbasyon problemleri olarak adlandırılır; diğer türlü singüler pertürbasyon problemleri olarak adlandırılır (Chegis, 1988). Şimdi tek tek singüler ve regüler pertürbasyon problemlerini örnekle açıklayalım:

$$P_\varepsilon : \begin{cases} u'(t) + \varepsilon u(t) = 0, & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = 2, \end{cases}$$

Regüler pertürbe problemini ifade eder.

$$P_\varepsilon : \begin{cases} \varepsilon u'(t) + u(t) = 0, & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = 2, \end{cases}$$

Singüler pertürbe problemini ifade eder (Kudu & Amiraliev, 2002; Persson, 1987).

Tanım 2.1.2 Başlangıç Katı ve Sınır Katı

Başlangıç ve sınır katı varlığı problemi, bir pertürbasyonun singüler varlığını gösteren bir kanıttır. Singüler pertürbasyon probleminin çözümü, herhangi bir sınır veya başlangıç noktasının çevresinde ani ve hızlı değişebilir. Bu noktanın sınır veya başlangıç katına sahip olduğunu gösterir.

Sınır katı, çözümün hassas bir şekilde değişebileceği bir bölgeyi ifade eder. Sınır katı dışındaki bölgelerde ise, fonksiyon değerleri genellikle küçük üstel değerlere sahiptir ve bu tür bir fonksiyona sınır veya başlangıç katı fonksiyon denir (Kudu, M., Amiraliev, 2007).

Tanım 2.1.3 Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu fark yöntemi, türevli denklemlerin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, diferansiyel denklemlerdeki türevlere karşılık fark türevleri kullanılarak fark denklemi oluşturulur. Bu fark denklemi, genellikle bir lineer cebirsel denklem sistemi olarak ifade edilir. Bu sistemin çözümü, çözüm fonksiyonunun ayrık noktadaki değerlerine ulaşmayı sağlar, bu da nümerik bir çözüm elde edilmesini sağlar. Yani, belirli bir ağ veya şebeke yapısındaki fonksiyonun değerleri hesaplanarak, sistemin davranışı anlaşılır hale getirilir (Cakir & Amiraliev, 2005).

Tanım 2.1.4 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[a, b]$ aralığının sonlu miktarda noktanın oluşturduğu bölünmüş hali şebeke olarak adlandırılır. Bu, bir aralığın belirli noktalara bölünmesini ifade eder.

$$\bar{\omega}_k = \{t_i : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\},$$

bu bağımsız noktaların kümesi elemanları kapalı bir aralık üzerinde tanımlanmış düzenli olmayan bir şebekeden bahsedildiğinde, bu şebekeden "düzgün olmayan şebeke" olarak söz edilir. Bu şebeke, belirli bir aralık üzerinde düzensiz bir şekilde dağılmış noktalardan oluşur. Bu noktalar genellikle "düğüm noktaları" veya "şebeke düğümleri" olarak adlandırılır. Yani, bu düğüm noktaları şebekenin temel yapı taşlarıdır ve şebekenin düzensiz dağılmış olduğu belirli bir kapalı aralığı ifade eder.

Şebekenin adımları:

$$h = t_i - t_{i-1},$$

olmak üzere düğüm noktaları arasındaki aralıklar eşitse, yani düğümler aynı aralıklarla düzenli bir şekilde yerleştirilmişse, bu durumda oluşan şebekeden "düzgün şebeke" olarak bahsedilir.

$$\omega_h = \left\{ t_i = a + ih : i = 0, 1, 2, \dots, N \text{ ve } h = \frac{b-a}{N} \right\},$$

burada $t_i \in \omega_h$, şebekenin düğüm noktalarını temsil eden elemanları gösterir ve h ise şebeke adımlarını belirtir.

Şebekeler için tanımlanan $g_i = g(t_i)$ fonksiyonu tanımlanırken t_i düğümlerindeki şebeke fonksiyonu adını alır (Samarskii, 2001).

Tanım 2.1.5

Eğer $g(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında düzgün bir şebekede tanımlı fonksiyonu için fark türevleri (Samarskii, 2001),

$$h = \frac{b-a}{N},$$

olmak üzere,

ileri fark türevi

$$g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h},$$

geri fark türevi

$$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h},$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.6 Gauss Eliminasyon Yöntemi (Thomas Algoritması)

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= k_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2, \end{aligned}$$

üç noktaya sahip fark şeması, üç şeritli bir matris sistemi oluşturmaktadır. Sınır şartları kullanarak aşağıda gösterilen Gauss Eliminasyon yöntemiyle belirtilen sistemin çözümünü elde etmek mümkündür.

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0 \\ y_N &= \frac{k_2 \beta_N}{1 - k_2 \alpha_N}, \quad (1 - k_2 \alpha_N \neq 0) \\ \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \alpha_1 &= k_1, \quad \beta_1 = \mu_1 \quad (C_i - \alpha_i A_i \neq 0) \end{aligned}$$

biçimindedir.

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, N-1 \text{ için} \\ A_i &> 0, B_i > 0, D_i = C_i - A_i - B_i > 0 \end{aligned}$$

Koşulları çerçevesinde yukarıdaki algoritma kararlılık gösterir.

Tanım 2.1.7 Gecikmeli Differansiyel Denklem

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri (en yüksek mertebeden türev hariç) t ve t anından önceki anlara bağlı olarak ortaya çıkan diferansiyel denklemlere gecikmeli diferansiyel denklem denir.

En basit değişen (deviating) argümanla diferansiyel denklem,

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq t_0, \quad \tau > 0,$$

biçimindedir ve bu denkleme ilaveten $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için tanımlı ve sürekli,

$$y(t) = \phi(t),$$

başlangıç koşulu ile temel başlangıç değer problemi;

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \geq t_0, \tau > 0,$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0,$$

biçimindedir (Elsgolts, Norkin & Casti, 1973).

Tanım 2.1.8 Yamuk (Trapez) Yöntemi

Yamuk (trapez) yöntemi, bir integrali yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılan bir sayısal integrasyon tekniğidir. Bu yöntemde, integrandın grafiği altındaki alan, trapezler kullanılarak tahmin edilir. Yani, belirli bir aralıktaki fonksiyon değerleri kullanılarak trapezler oluşturulur ve bu trapezlerin alanları toplanarak toplam alanın yaklaşık değeri bulunur.

Trapez yönteminde, her aralıkta $f(t)$ değerleri birleştirilen fonksiyonun bir doğru olarak kabul edilmesi esas alınır. Bu durumda, her bir aralık trapezoid şeklinde düşünülür ve bu trapezoidlerin altındaki alanlar toplanarak integralin yaklaşık değeri elde edilir.

$f(t)$ eğrisinin t_i 'den t_{i+1} 'e kadar altında kalan yaklaşık alan:

$$\frac{1}{2} [f(t_i) + f(t_{i+1})] \Delta t. \quad (1.1)$$

Eğer $f(t)$ fonksiyonu belirli bir aralıkta eşit parçaya bölündüğünde trapez yöntemi uygulanıyorsa, her bir trapezoidin altındaki yaklaşık alanı bulmak için aşağıdaki formül kullanılır

$$F_N = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_1)] \Delta t + \frac{1}{2} [f(t_1) + f(t_2)] \Delta t + \dots + \frac{1}{2} [f(t_{N-1}) + f(t_N)] \Delta t$$

veya

$$F_N = [\frac{1}{2} f(t_0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + \frac{1}{2} f(t_N)] \Delta t \quad (1.2)$$

olarak bulunur. Trapez yönteminde, integralin boyutu sayısı "d" olsun. Bu durumda, kullanılan trapezoidlerin genişliği $N^{-2/d}$ ile orantılı olduğundan, hata da bu genişlikle doğru orantılıdır. Yani, $N^{-2/d}$ değeri küçüldükçe veya büyüdüğü hata da buna bağlı olarak azalır veya artar. Hata terimi genellikle integralin ikinci türevi ile ilgili olduğundan, trapez yöntemi daha fazla trapez kullanılarak hassasiyet artırılabilir (Tavukcu, 2000).



2.2. Nümerik İntegral Yöntemi

Bu bölümde, üzerinde çalışılan gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli problemine yönelik çözüm arayışında, nümerik integral yöntemi adımları; sağ veya sol sınır katları ile ilgili durumları ayrı ayrı gözeterek incelenir. Yöntemin kararlılığı için gereken koşullar sunulur.

2.2.1 Sağ sınır katlı problemin nümerik integral yöntemine göre çözüm basamakları aşağıda şu şekilde verilmiştir:

1.
$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t - \sigma) &= f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma > 0 \\ u_0 &= A, \quad \xi u(1) = u(1) - \varepsilon \int_0^1 \frac{t}{4} u(t) d(t) = 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

denkleminde $a(t) < \alpha < 0$, α sabit olma durumu mevcuttur. $t = 1$ noktası civarında sağdan sınır katı vardır (Arslan, 2019).

2. (2.1) denkleminde gecikme terimi yerine $u(t - \sigma) = u(t) - \sigma u'(t)$ Taylor açılımı yazılır (Cengizci, 2017)

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)[u(t) - \sigma u'(t)] &= f(t), \\ \varepsilon u''(t) + [a(t) - \sigma b(t)]u'(t) + b(t)u(t) &= f(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. $[0,1]$ aralığı N eşit parçaya ayrılır ve düzgün şebeke oluşur. Mevcut şebekeye ait noktalar;

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, \dots, N,$$

biçimindedir.

4. $i = 1, \dots, N - 1$ değerleri (2.2) denkleminin $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında integrali aşağıdaki gibi alınır.

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u''(t) + [a(t) - \sigma b(t)]u'(t) + b(t)u(t)]dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

ve

$$\varepsilon u'(t_i) - \varepsilon u'(t_{i-1}) + (a_i - \sigma b_i)u(t_i) - (a_{i-1} - \sigma b_{i-1})u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt.$$

5. Bir önceki adımda yer alan birinci türevler $u'(t_i)$ ve $u'(t_{i-1})$ için

$$u'_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{fark yaklaşımları kullanıldığında aşağıdaki gibi}$$

denklem elde edilir:

$$\varepsilon \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] - \varepsilon \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] + (a_i - \sigma b_i)u(t_i) - (a_{i-1} - \sigma b_{i-1})u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt.$$

6. Fark yaklaşımı kullanılarak elde edilen denklemdeki integrallere yamuk yöntemi uygulanır ve

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + (a_i - \sigma b_i)u'_i - (a_{i-1} - \sigma b_{i-1})u'_{i-1} + \frac{h}{2} [b_i u_i + b_{i-1} u_{i-1}] = \frac{h}{2} [f_i + f_{i-1}],$$

denklemini meydana gelir.

7. Bir önceki adımda u_{i-1}, u_i, u_{i+1} göre gerekli düzenleme yapılır

$$u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} - a_{i-1} + \sigma b_{i-1} + h \frac{b_{i-1}}{2} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} - a_i + \sigma b_i - h \frac{b_i}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = \frac{h}{2} [f_i + f_{i-1}],$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

fark denklemi meydana gelir.

8. Elde ettiğimiz fark denklemi için sınır koşullarını da dahil edersek aşağıdaki problem ortaya çıkar.

$$u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} - a_{i-1} + \sigma b_{i-1} + h \frac{b_{i-1}}{2} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} - a_i + \sigma b_i - h \frac{b_i}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = \frac{h}{2} [f_i + f_{i-1}],$$

$$u_0 = A, \quad u_N = \frac{1}{1-\xi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{4} h t_j u_j + 1. \quad (2.3)$$

Fark probleminin çözümü, aşağıda açıklanan Thomas algoritması kullanılarak sağlanır (Arslan, 2021).

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h} - a_{i-1} + \sigma b_{i-1} + h \frac{b_{i-1}}{2}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} - a_i + \sigma b_i + h \frac{b_i}{2}, \quad F_i = \frac{h}{2} [f_i + f_{i-1}],$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1,$$

(2.1) - (2.3) problemine göre

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = A.$$

2.2.2 Soldan sınır katlı problemin nümerik integral yöntemine göre çözüm basamakları aşağıda şu şekilde verilmiştir

(2.1) sol sınır katlı problem için ($a(t) > \alpha > 0$, α sabit) çözüm prosedürleri, sağ sınır katlı probleminkine benzerdir ancak kendine özgü özelliklere sahip olup aşağıda ifade edilmiştir:

$i = 0, 1, \dots, N-1$ için (2.2) probleminde bütün terimlerin $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında integrali alınır (Arslan, 2022).

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varepsilon u''(t) + [a(t) - \sigma b(t)]u'(t) + b(t)u(t)] dx = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt,$$

ve

$$\varepsilon u'(t_{i+1}) - \varepsilon u'(t_i) + (a_{i+1} - \sigma b_{i+1})u(t_{i+1}) - (a_i - \sigma b_i)u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t)u(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

burada

$u'_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$, $u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ fark yaklaşımları kullanıldığında

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + [a_{i+1} - \sigma b_{i+1}] u(t_{i+1}) - [a_i - \sigma b_i] u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t) u(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt,$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde bulunan integrallere yamuk yöntemi uygulanır ve

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + (a_{i+1} - \sigma b_{i+1}) u_{i+1} - (a_i - \sigma b_i) u_i + \frac{h}{2} [b_{i+1} u_{i+1} + b_i u_i] = \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i],$$

$i = 1, 2, \dots, N-1,$

denklemleri bulunur. Düzenlemeler yapılırsa

$$u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + a_i - \sigma b_i - h \frac{b_i}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + a_{i+1} - \sigma b_{i+1} + h \frac{b_{i+1}}{2} \right) = \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i],$$

$i = 1, 2, \dots, N-1,$

$$u_0 = A, \quad u_N = \frac{1}{1-\xi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{4} h t_j u_j + 1. \quad (2.4)$$

Fark problemi için çözüm, aşağıda açıklanan Thomas algoritması yöntemiyle sağlanır.

Thomas algoritmasında ise

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h} + a_{i+1} - \sigma b_{i+1} + h \frac{b_{i+1}}{2}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + a_i - \sigma b_i - h \frac{b_i}{2}, \quad F_i = \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i],$$

$i = 1, 2, \dots, N-1,$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1,$$

belirtilen adımlar takip edilerek yaklaşık çözüm bulunur (Arslan, 2023).

2.2.3 Kararlılık

$$\begin{aligned} A_i > 0, B_i > 0 \text{ ve } C_i > A_i + B_i > 0, \\ |\alpha_i| < 1, i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Thomas algoritmasının yukarıdaki şartlar doğrultusunda kararlı olduğu anlaşılmaktadır (Amirali, 2018).



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada nümerik integral yönteminin etkin ve işlevsel olduğunu görmek amacıyla aşağıdaki dört örnek üzerinde çalışma yapılmıştır.

Örnek 1 :

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + 3u'(t) + u(t) - u(t-1) &= 1, \quad t \in (0,1) \cup (1,2), \\ u(t) &= 1 \text{ için } t \in [-1,0], \quad \kappa u(2) = u(2) - \varepsilon \int_0^2 \frac{t}{3} u(t) dt = 2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli probleminin nümerik integral yöntemi ile çözümü (Elango & Tamilsevan, 2018):

(3.1) probleminde yer alan gecikmeli terimine karşılık olarak

$$u(t-1) = u(t) - u'(t),$$

Taylor açılımından faydalanılırsa (Cengizci, 2017)

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) - 3u'(t) - u(t) + u(t) - u'(t) &= -1, \\ \varepsilon u''(t) - 4u'(t) &= -1, \end{aligned}$$

problemi oluşur.

2. terimin katsayısı $-3 < 0$ olması nedeniyle problem sağ sınırlı katlı problemidir ve bu probleme nümerik integral yöntemi uygulandığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varepsilon u''(t) - 4u'(t)) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} 1 dt,$$

ve ardından

$$\varepsilon u'(t_i) - \varepsilon u'(t_{i-1}) - 4u(t_i) + 4u(t_{i-1}) = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} 1 dt,$$

denklemini elde edilir.

Buradaki integrale karşılık yamuk yöntemi uygulandığında ve düzenlemeler yapıldığında

$$\varepsilon u'_i - \varepsilon u'_{i-1} - 4u_i + 4u_{i-1} = -h,$$

şeklinde denklem elde edilir. Bununla beraber

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{ileri fark yaklaşımı ve} \quad u'_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{geri fark yaklaşımı}$$

uygulandığında

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - 4u_i + 4u_{i-1} = -h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

fark denklemi oluşur ve ardından bu denklemde

$$u_{i-1}, u_i, u_{i+1},$$

katsayılarına göre düzenleme yapılırsa ve sınır değerleri de eklenirse

$$\begin{aligned} u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4 \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4 \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) &= -h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 &= 1, \\ u_N &= \frac{1}{(1-\kappa)} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{ht_j u_j}{3} \right) + 2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

sınır fark problemi meydana gelir.

Fark problemi için çözüm, aşağıda açıklanan Thomas algoritması yöntemiyle sağlanır.

Thomas algoritmasında ise

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\varepsilon}{h} + 4, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + 4 \quad \text{ve} \quad F_i = h, \\ u_0 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1, \\ 1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 \quad (u_1 \neq 0), \\ \alpha_1 &= 0, \quad \beta_1 = 1, \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca $h = \frac{2-0}{N}$ olarak ifade edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_i &= \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 1, \end{aligned}$$

yukardaki algoritmaya ait basamaklar izlenerek problemin yaklaşık olarak çözümüne ulaşılır.

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{\varepsilon}{h}}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{h + \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4\right)\beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4\right)\alpha_i},$$

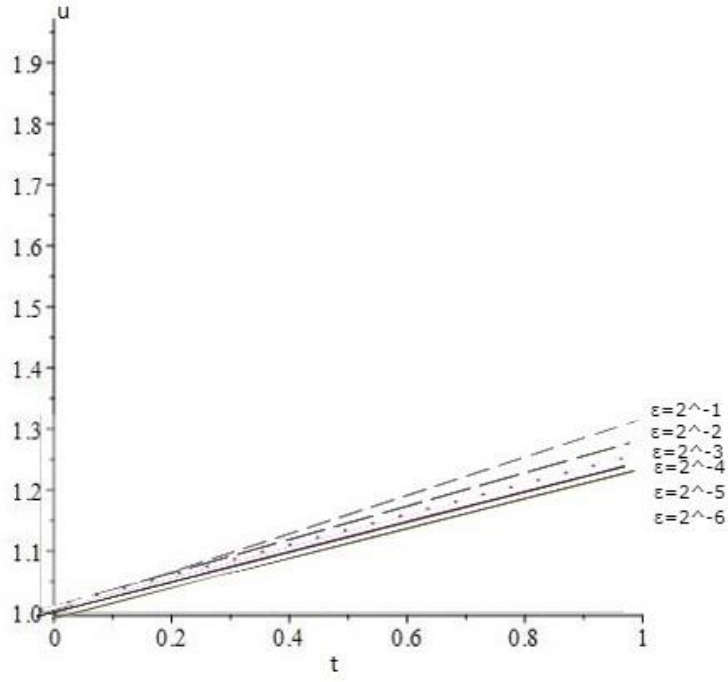
$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Thomas algoritmasıyla elde edilen çözüme ait şablon, uygun matematik programı aracılığıyla adım adım çözülür ve bu süreç sonucunda detaylı sayısal sonuçlar elde edilir.

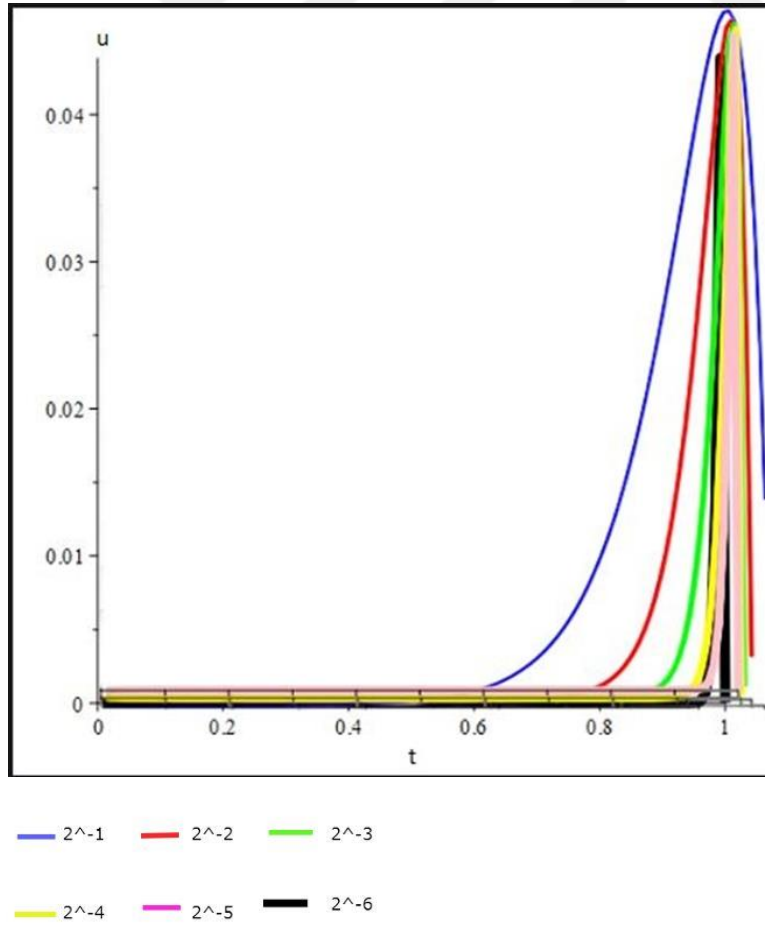
$\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ ve $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için en büyük hatalar elde edilir. Farklı N ve ε değerleri için yaklaşık çözüm ve hata eğrileri, her bir durumda detaylı olarak hesaplanarak çizilir ve bu grafikler, elde edilen sonuçların doğruluğunu ve hassasiyetini göstermek amacıyla kullanılır. Böylece, önerilen metodun gecikmeli singüler pertürbe özellikli problemler için ne kadar uygun olduğu sunulmuş olur. Değişik N için değerler ile ε pertürbe değişkeni için elde edilen çözümlerin maksimum hataları, her bir durum için ayrıntılı olarak hesaplanarak Tablo 3.1’de sunulur (Cakir & Arslan, 2016).

Çizelge 3.1 Örnek 1’in Thomas algoritmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları

ε / N	8	16	32	64	128	256	512
2^{-1}	0,029115705	0,019455015	0,011364014	0,006249471	0,003303023	0,001702521	0,000865761
2^{-2}	0,036639931	0,033876318	0,022588514	0,013954729	0,007894712	0,004223421	0,002192885
2^{-3}	0,032271111	0,040019713	0,037397951	0,024932566	0,015584487	0,008866406	0,004756850
2^{-4}	0,022144383	0,033746808	0,042102881	0,039441108	0,026294269	0,016478572	0,009386916
2^{-5}	0,013102681	0,022642732	0,034609526	0,043241654	0,040531442	0,027021225	0,016944658
2^{-6}	0,007146958	0,013248609	0,022928534	0,035072110	0,043835090	0,041093550	0,027396237



Şekil 3.1 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması



Şekil 3.2 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi

Örnek 2:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + 5u'(t) + (t+1)u(t) - u(t-1) &= t^2, \quad t \in (0,1) \cup (1,2), \\ u(t) &= 1 \text{ için } t \in [-1,0], \quad \kappa u(2) = u(2) - \varepsilon \int_0^2 \frac{t}{3} u(t) d(t) = 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli probleminin nümerik integral yöntemi ile çözümü (Elango & Tamilsevan, 2018):

(3.2) probleminde yer alan gecikmeli terimine karşılık olarak

$$u(t-1) = u(t) - u'(t),$$

Taylor açılımından faydalanılırsa (Cengizci, 2017)

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) - 5u'(t) - (t+1)u(t) + u(t) - u'(t) &= -t^2, \\ \varepsilon u''(t) - 6u'(t) - tu(t) &= -t^2, \end{aligned}$$

biçiminde olur.

2. terimin katsayısı $-5 < 0$ olması nedeniyle problem sağ sınırlı katlı problem olur ve bu probleme nümerik integral yöntemi uygulandığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varepsilon u''(t) - 6u'(t) - tu(t)) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^2 dt,$$

ve

$$\varepsilon u'(t_i) - \varepsilon u'(t_{i-1}) - 6u(t_i) + 6u(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} tu(t) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^2 dt,$$

denklemini elde edilir.

Buradaki integrallere karşılık yamuk yöntemi uygulandığında ve düzenlemeler yapıldığında

$$\varepsilon u'_i - \varepsilon u'_{i-1} - 6u_i + 6u_{i-1} - \frac{h}{2}(t_i u_i + t_{i-1} u_{i-1}) = -\frac{h}{2}(t_i^2 + t_{i-1}^2),$$

şeklinde denklem elde edilir. Bununla beraber

$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ ileri fark yaklaşımı ve $u'_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ geri fark yaklaşımı uygulandığında

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - 6u_i + 6u_{i-1} - \frac{h}{2} (t_i u_i + t_{i-1} u_{i-1}) = -\frac{h}{2} (t_i^2 + t_{i-1}^2),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

fark denklemi oluşur ve ardından bu denklemde

$$u_{i-1}, u_i, u_{i+1},$$

katsayılarına göre düzenleme yapılırsa ve sınır değerleri de eklenirse

$$u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + 6 - h \frac{t_{i-1}}{2} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + 6 + h \frac{t_i}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = -\frac{h}{2} (t_i^2 + t_{i-1}^2),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0 = 1,$$

$$u_N = \frac{1}{(1-\kappa)} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{ht_j u_j}{3} \right) + 2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

fark problemi meydana gelir.

Fark problemi için çözüm, aşağıda açıklanan Thomas algortiması yöntemiyle sağlanır.

Thomas algoritmasında ise

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h} + 6 - h \frac{t_{i-1}}{2}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + 6 + h \frac{t_i}{2} \quad \text{ve} \quad F_i = \frac{h}{2} (t_i^2 + t_{i-1}^2),$$

$$u_0 = \alpha_1 u_1 + \beta_1,$$

$$1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 \quad (u_1 \neq 0),$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1,$$

olur.

Ayrıca $h = \frac{2-0}{N}$ olarak ifade edilir.

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1,$$

yukardaki algoritmaya ait basamaklar izlenerek problemin yaklaşık olarak çözümüne ulaşılır.

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{\varepsilon}{h}}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 6 + h\frac{t_i}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 6 - h\frac{t_{i-1}}{2}\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{\frac{h}{2}(t_i^2 + t_{i-1}^2) + \left(\frac{\varepsilon}{h} + 6 - h\frac{t_{i-1}}{2}\right)\beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 6 + h\frac{t_i}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 6 - h\frac{t_{i-1}}{2}\right)\alpha_i},$$

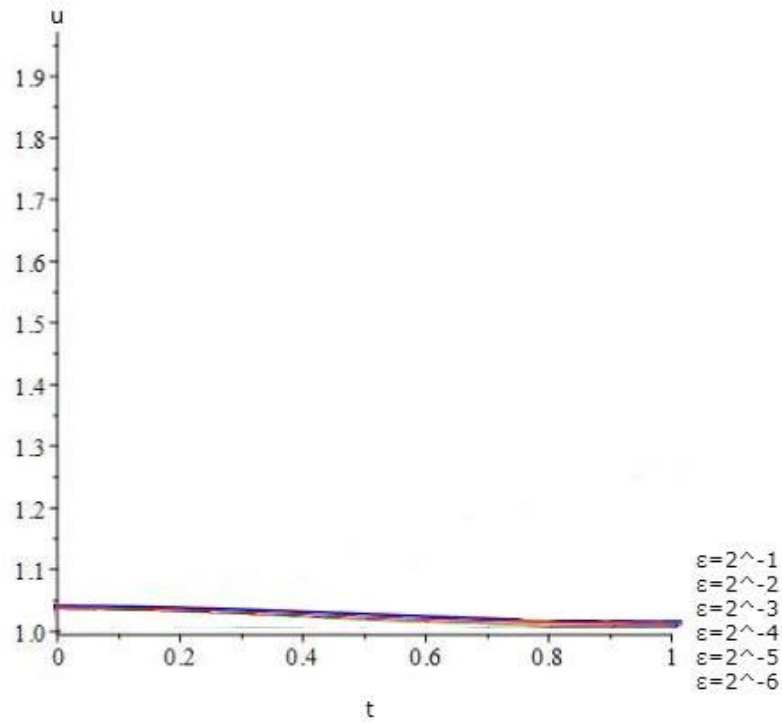
$i = 1, 2, \dots, N-1,$

Thomas algoritmasıyla ve uygun matematik programı aracılığıyla sayısal sonuçlar elde edilir.

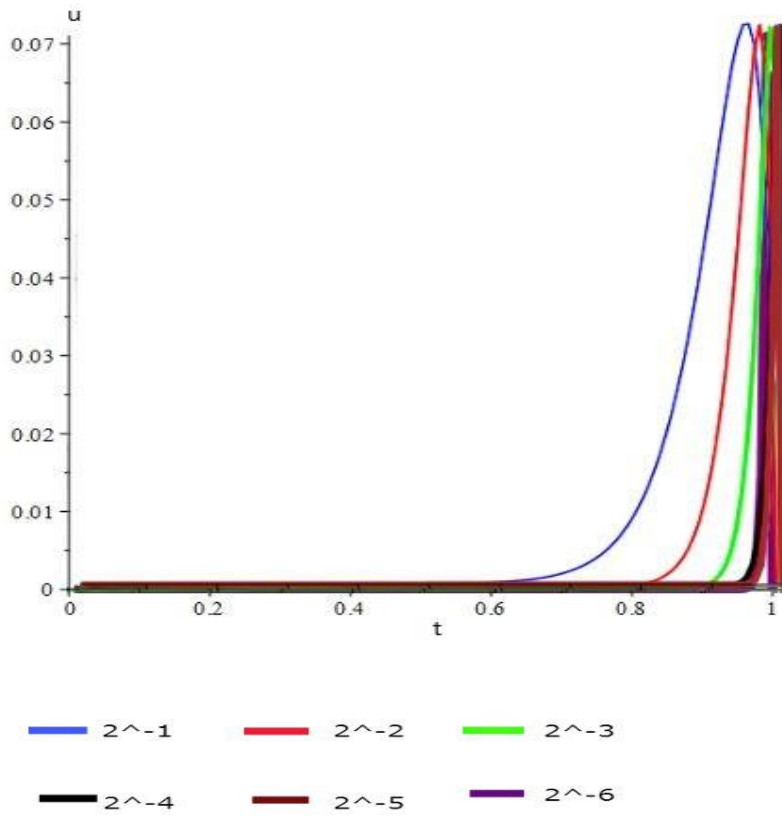
$\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ ve $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için en büyük hatalar elde edilir. Böylece, önerilen metodun gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli problemler için ne kadar uygun olduğunu göstermek amacıyla yapılan bu hesaplamalar ve çizilen hata eğrileri ile yaklaşık çözümler detaylı bir şekilde sunulmuş olur. Değişik N için değerler ile ε pertürbe değişkeni için elde edilen çözümlerin maksimum hataları, her bir durum için ayrıntılı olarak hesaplanarak Çizelge 3.2'de sunulur (Cakir & Arslan, 2016).

Çizelge 3.2 Örnek 2'nin Thomas algoritmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları

ε / N	8	16	32	64	128	256	512
2^{-1}	0,066569330	0,053748160	0,033422743	0,020089730	0,011001772	0,005804757	0,002984293
2^{-2}	0,065017491	0,071868807	0,058918729	0,037303821	0,022444707	0,012330564	0,006515334
2^{-3}	0,048340065	0,067406616	0,075695996	0,062075218	0,039464134	0,023721220	0,013044803
2^{-4}	0,030487345	0,048729189	0,069323283	0,077925542	0,063795942	0,040597643	0,024382411
2^{-5}	0,017765271	0,029928542	0,049422838	0,070475478	0,079121723	0,064691610	0,041177405
2^{-6}	0,010190517	0,016809905	0,030045310	0,049901332	0,071101599	0,079740461	0,065148229



Şekil 3.3 $N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması.



Şekil 3.4 $N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi

Örnek 3:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + 3u'(t) - u(t-1) &= 0, \quad t \in (0,1) \cup (1,2), \\ u(t) &= 1 \text{ için } t \in [-1,0], \quad \kappa u(2) = u(2) - \varepsilon \int_0^2 \frac{t}{3} u(t) dt = 2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gecikmeli singüler pertürbe integral sınır değerli problemin nümerik integral yöntemi ile çözümü (Elango & Tamilsevan, 2018):

(3.3) probleminde yer alan gecikmeli terimine karşılık olarak

$$u(t-1) = u(t) - u'(t),$$

Taylor açılımından faydalanılırsa (Cengizci, 2017)

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) - 3u'(t) + u(t) - u'(t) &= 0, \\ \varepsilon u''(t) - 4u'(t) + u(t) &= 0, \end{aligned}$$

biçiminde olur.

2. terimin katsayısı $-3 < 0$ olması nedeniyle problem sağ sınırlı katlı problem olur ve bu probleme nümerik integral yöntemi uygulandığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varepsilon u''(t) - 4u'(t) + u(t)) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} 0 dt,$$

ve

$$\varepsilon u'(t_i) - \varepsilon u'(t_{i-1}) - 4u(t_i) + 4u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) dt = 0,$$

denklemini elde edilir.

Buradaki integrallere karşılık yamuk yöntemi uygulandığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\varepsilon u'_i - \varepsilon u'_{i-1} - 4u_i + 4u_{i-1} + \frac{h}{2}(u_i + u_{i-1}) = 0,$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bununla beraber

$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ ileri fark yaklaşımı ve $u'_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ geri fark yaklaşımı uygulandığında,

$$\varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - 4u_i + 4u_{i-1} + \frac{h}{2}(u_i + u_{i-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

fark denklemi oluşur ve ardından bu denklemde

$$u_{i-1}, u_i, u_{i+1},$$

terimlerine göre düzenleme yapılırsa ve sınır değerleri de kullanılırsa

$$u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4 + \frac{h}{2} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4 - \frac{h}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0 = 1,$$

$$u_N = \frac{1}{(1-\kappa)} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{ht_j u_j}{3} \right) + 2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

fark problemi meydana gelir.

Fark problemi için çözüm, aşağıda açıklanan Thomas algoritması yöntemiyle sağlanır.

Thomas algoritmasında ise

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h} + 4 + \frac{h}{2}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + 4 - \frac{h}{2} \quad \text{ve} \quad F_i = 0,$$

$$u_0 = \alpha_1 u_1 + \beta_1,$$

$$1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 \quad (u_1 \neq 0),$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1,$$

olur.

Ayrıca $h = \frac{2-0}{N}$ olarak ifade edilir.

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1.$$

Yukardaki algoritmaya ait basamaklar izlenerek problemin yaklaşık olarak çözümüne ulaşılır.

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{\varepsilon}{h}}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4 - \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4 + \frac{h}{2}\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{0 + \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4 + \frac{h}{2}\right)\beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 4 - \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 4 + \frac{h}{2}\right)\alpha_i},$$

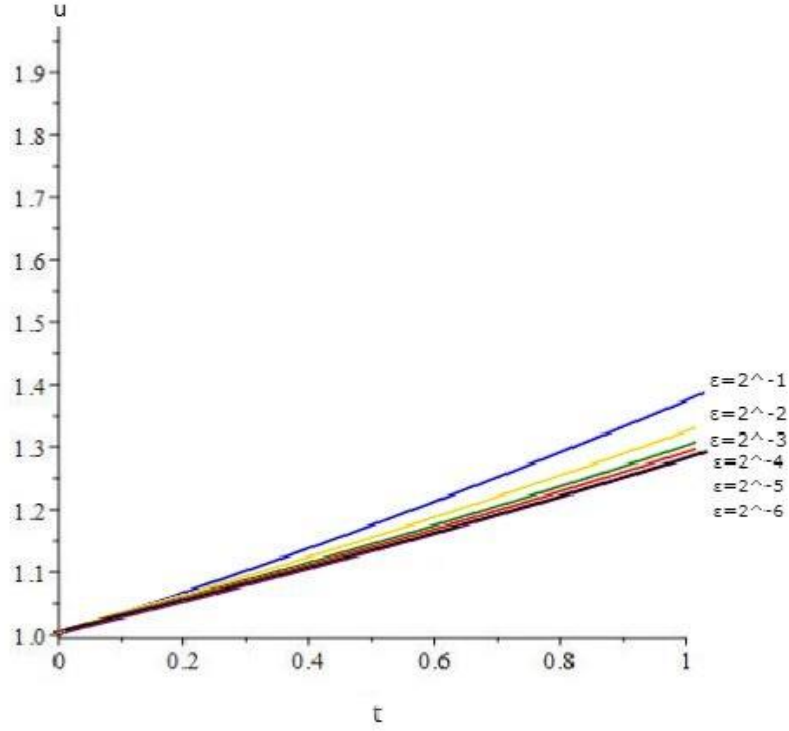
$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Thomas algoritmasıyla elde edilen çözüme ait şablon, uygun matematik programı aracılığıyla en uygun sayısal sonuçlar elde edilir.

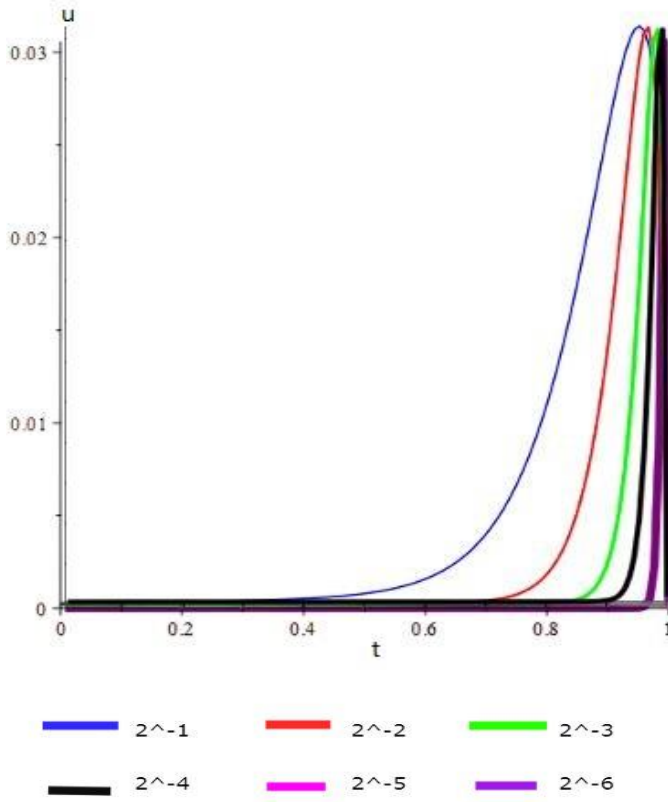
$\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ ve $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için maksimum hatalar elde edilir. Farklı N ve ε değerleri için yaklaşık çözüm ve hata eğrileri çizilir ve bu grafikler, elde edilen sonuçların doğruluğunu ve hassasiyetini göstermek amacıyla kullanılır. Böylece, önerilen metodun gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli problemler için ne kadar uygun olduğunu gösterir. Değişik N için değerler ile ε pertürbe parametresi için elde edilen çözümlerin maksimum hataları, her bir durum için ayrıntılı olarak hesaplanarak Çizelge 3.3'te sunulur (Cakir & Arslan, 2016).

Çizelge 3.3 Örnek 3'ün Thomas algoritmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları

ε / N	8	16	32	64	128	256	512
2^{-1}	0,014850119	0,009658528	0,005267207	0,002765439	0,001216626	0,000727571	0,000350921
2^{-2}	0,022927348	0,020407006	0,013423958	0,008178205	0,004594929	0,002453252	0,001250950
2^{-3}	0,022029212	0,026510654	0,024436598	0,016188238	0,010091302	0,005699793	0,003063754
2^{-4}	0,015732385	0,023297672	0,028727485	0,026756722	0,017783607	0,011138896	0,006342512
2^{-5}	0,009532155	0,015938433	0,024085638	0,029941295	0,027990816	0,018634440	0,011682175
2^{-6}	0,005315485	0,009426185	0,016108075	0,024519261	0,030574372	0,028626839	0,019071201



Şekil 3.5. $N=128$ ve $\varepsilon=2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması



Şekil 3.6. $N=128$ ve $\varepsilon=2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi

Örnek 4:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + (t+10)u'(t) - u(t-1) &= t^2, \quad t \in (0,1) \cup (1,2), \\ u(t) &= 1 \text{ için } t \in [-1,0], \quad \kappa u(2) = u(2) - \varepsilon \int_0^2 \frac{t}{3} u(t) dt = 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gecikmeli singüler pertürbe integral sınır değerli probleminin nümerik integral yöntemi ile çözümü (Elango & Tamilsevan, 2018):

(3.4) probleminde yer alan gecikmeli terimine karşılık olarak

$$u(t-1) = u(t) - u'(t),$$

Taylor açılımından faydalanılırsa (Cengizci, 2017)

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(t) - (t+10)u'(t) + u(t) - u'(t) &= -t^2, \\ \varepsilon u''(t) - (t+11)u'(t) + u(t) &= -t^2, \end{aligned}$$

biçimini alır.

2. teriminin katsayısının

$$-(t+10) < 0,$$

olması nedeniyle problem sağ sınırlı katlı problem olur ve bu probleme nümerik integral yöntemi uygulandığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varepsilon u''(t) - (t+11)u'(t) + u(t)) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^2 dt, \quad \text{ve}$$

$$\varepsilon u'(t_i) - \varepsilon u'(t_{i-1}) - 11u(t_i) + 11u(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} tu(t) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^2 dt,$$

denklemini elde edilir.

Buradaki integrallere karşılık yamuk metodu uygulanıp ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\varepsilon u'_i - \varepsilon u'_{i-1} - 11u_i + 11u_{i-1} - \frac{h}{2}(t_i u'_i + t_{i-1} u'_{i-1}) + \frac{h}{2}(u_i + u_{i-1}) = -\frac{h}{2}((t_i)^2 + (t_{i-1})^2),$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bununla beraber

$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ ileri fark yaklaşımı ve $u'_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ geri fark yaklaşımı uygulandığında

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - 11u_i + 11u_{i-1} - \frac{h}{2} \left[t_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) + t_{i-1} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \right] \\ & + \frac{h}{2} (u_i + u_{i-1}) = -\frac{h}{2} [(t_i)^2 + (t_{i-1})^2], \\ & i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

fark denklemi oluşur ve ardından bu denklemde

$$u_{i-1}, u_i, u_{i+1},$$

terimlerine göre düzenleme yapılırsa ve sınır değerleri de ilave edilirse

$$\begin{aligned} & u_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + 11 + \frac{t_{i-1}}{2} + \frac{h}{2} \right) - u_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + 11 - \frac{t_i}{2} + \frac{t_{i-1}}{2} - \frac{h}{2} \right) + u_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{t_i}{2} \right) = -\frac{h}{2} [(t_i)^2 + (t_{i-1})^2], \\ & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ & u_0 = 1, \\ & u_N = \frac{1}{(1-\kappa)} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{ht_j u_j}{3} \right) + 2, \end{aligned}$$

fark problemi meydana gelir.

Fark problemi için çözüm, aşağıda açıklanan Thomas algoritması yöntemiyle sağlanır.

Thomas algoritmasında ise

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\varepsilon}{h} + 11 + \frac{t_{i-1}}{2} + \frac{h}{2}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h} - \frac{t_i}{2}, \\ C_i &= \frac{2\varepsilon}{h} + 11 - \frac{t_i}{2} + \frac{t_{i-1}}{2} - \frac{h}{2} \text{ ve } F_i = \frac{h}{2} [(t_i)^2 + (t_{i-1})^2], \\ u_0 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1, \\ 1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 \quad (u_1 \neq 0), \\ \alpha_1 &= 0, \quad \beta_1 = 1, \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca $h = \frac{2-0}{N}$ olarak ifade edilir.

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1,$$

yukardaki algoritmaya ait basamaklar izlenerek problemin yaklaşık olarak çözümüne ulaşılır.

$$\alpha_{i+1} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{t_i}{2} \right)}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 11 - \frac{t_i}{2} + \frac{t_{i-1}}{2} - \frac{h}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 11 + \frac{t_{i-1}}{2} + \frac{h}{2} \right) \alpha_i},$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\frac{h}{2} [(t_i)^2 + (t_{i-1})^2] + \left(\frac{\varepsilon}{h} + 11 + \frac{t_{i-1}}{2} + \frac{h}{2} \right) \beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 11 - \frac{t_i}{2} + \frac{t_{i-1}}{2} - \frac{h}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{h} + 11 + \frac{t_{i-1}}{2} + \frac{h}{2} \right) \alpha_i},$$

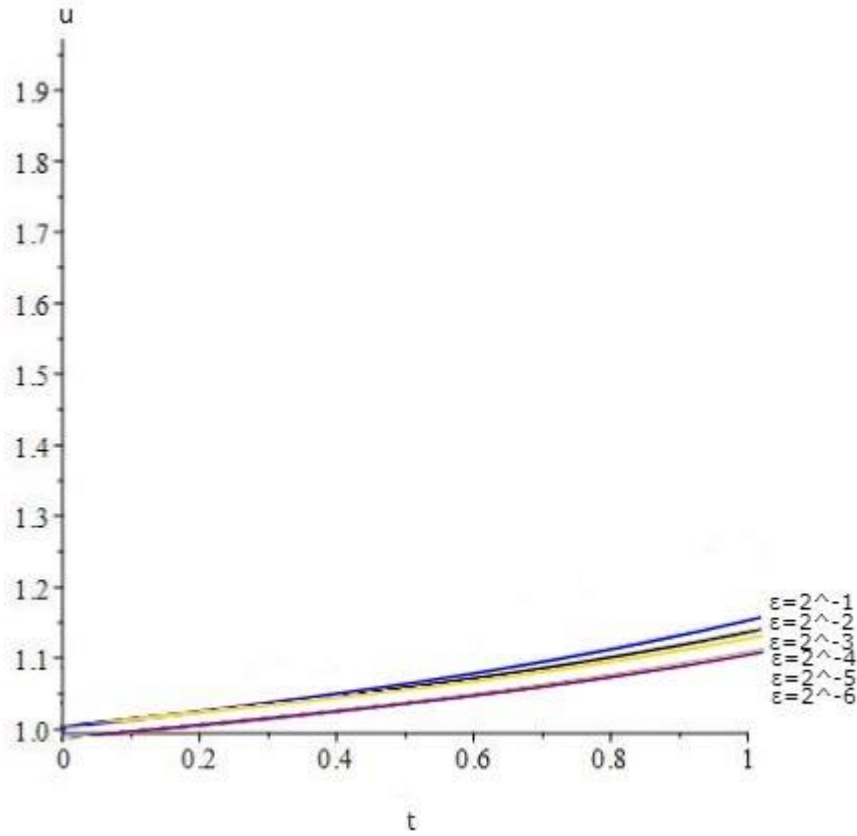
$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

Thomas algoritmasıyla elde edilen çözüme ait şablon, uygun matematik program aracılığıyla adım adım uygulanır ve bu süreç sonucunda detaylı sayısal sonuçlar elde edilir.

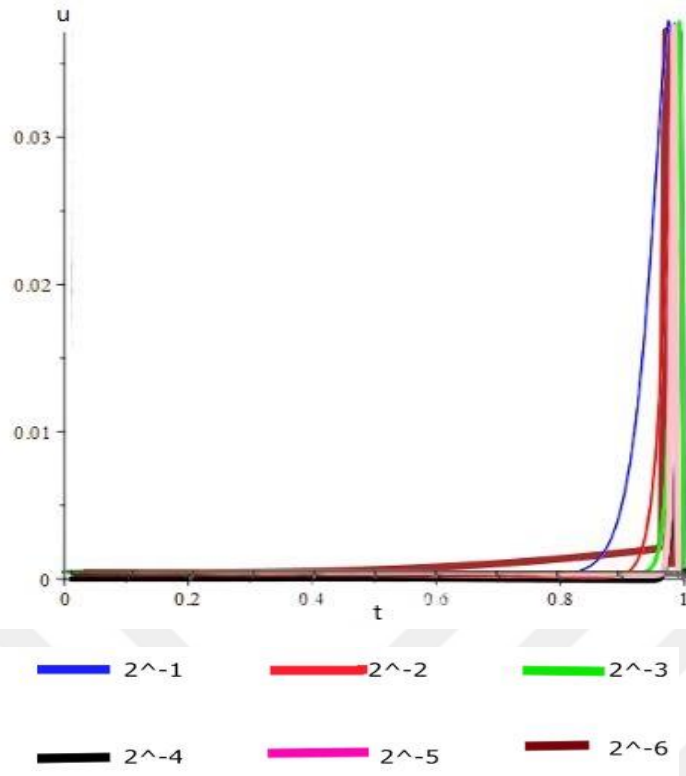
$\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ ve $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için en büyük hatalar elde edilir. Farklı N ve ε değerleri için yaklaşık çözüm ve hata eğrileri, her bir durumda detaylı olarak hesaplanarak çizilir ve bu grafikler, elde edilen sonuçların doğruluğunu ve hassasiyetini göstermek amacıyla kullanılır. Böylece, önerilen metodun gecikmeli singüler pertürbe özellikli integral sınır değerli problemler için ne kadar uygun olduğunu göstermek amacıyla yapılan bu hesaplamalar ve çizilen hata eğrileri ile yaklaşık çözümler detaylı bir şekilde sunulmuş olur. Değişik N için değerler ile ε pertürbe değişkeni için elde edilen çözümlerin maksimum hataları, her bir durum için ayrıntılı olarak hesaplanarak Çizelge 3.4'te sunulur (Cakir & Arslan, 2016).

Çizelge 3.4 Örnek 4'ün Thomas algoritmasıyla hesaplanmış maksimum hata miktarları

ε / N	8	16	32	64	128	256	512
2^{-1}	0,018751217	0,027470616	0,025543547	0,015998149	0,009887188	0,005485597	0,002892391
2^{-2}	0,001592335	0,019646287	0,032682998	0,031213068	0,019975315	0,012405211	0,006891194
2^{-3}	0,017685071	0,001026192	0,020485519	0,035597664	0,034293000	0,022050464	0,013712987
2^{-4}	0,031679018	0,021070857	0,002116293	0,021009438	0,037131888	0,035892864	0,023108617
2^{-5}	0,040079635	0,034916938	0,022535775	0,002599621	0,021298379	0,037918173	0,036707934
2^{-6}	0,044679694	0,043055259	0,036269986	0,023203821	0,002824911	0,021449665	0,038316612



Şekil 3.7 $N=128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrilerinin karşılaştırılması



Şekil 3.8 $N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ değerleri için hata değerlendirmesi

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada sağ sınır katı içeren singüler pertürbe özellikli gecikmeli lineer differansiyel denklemlere sahip problemler nümerik integral yöntemiyle incelenmiştir. Dört örnek uygulması ele alınmıştır. Yaklaşık çözümlere ait sonuçların birbirine oldukça yakınsadığını çizelge ve şekillerden de anlaşılmaktadır. Ayrıca ($t = 1$) noktası civarında (hassas geçiş olan bölgesinde) çözümün hızlı ve düzenli olmayan değişiklikler gösterdiği görülmüştür.

Sonuç olarak yapılan bu çalışmada kullanılan nümerik integral yönteminin, verilen örnekleri uygun bir matematik programı ile ne kadar kolay ve hızlı çözdüğü görülmüştür.

Farklı tipten differansiyel, integral; kesirli mertebeden ve bulanık differansiyel denklemlerin nümerik integral metodu ile nümerik çözümleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Adzic, N. (2000). Spectral approximation and nonlocal boundary value problems. *Novi Sad Journal of Mathematics*. 30: 1-10.
- Arslan, D. (2022). Approximate Solution of Singularly Perturbed Problems with Numerical Integration Method. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 27(3), 612-618.
- Arslan, D. (2019). A Numerical Solution Study on Singularly Perturbed Convection-Diffusion Nonlocal Boundary Value Problem. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2): 1482-1491.
- Arslan, D. (2023). A Robust Numerical Approach for Singularly Perturbed Problem with Integral Boundary Condition. *Gazi University Journal of Science*, 36(4).
- Arslan, D. (2019). A Novel Hybrid Method for Singularly Perturbed Delay Differential Equations. *Gazi University Journal of Science*, 32(1).
- Arslan, D. (2020). Sayısal İntegral Metodu ile Singüler Pertürbe Multi Point Sınır Değer Porblemlerin Sayısal Çözümü. *BEÜ Fen Bilimleri Dergisi* 9(1):157-167.
- Amirali, G., & Amirali, I. (2018). *Nümerik Analiz Teori ve Uygulamalarla*. Seçkin Yayıncılık.
- Amiraliyev, G. M. & Çakır, M. (2002). Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Mechanics*. (English Ed.) 23: 755 764.
- Amiraliyev, G. M., Amiraliyeva, I. G. & Kudu, M. (2007). A numerical treatment for singularly perturbed differential equations with integral boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*. 185: 574-582.
- Amiraliyev, G. M., & Erdoğan, F. (2007). Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations. *Computers & Mathematics Applications*. 53: 1251-1259.
- Amiraliyeva, I. G., Erdoğan, F., & Amiraliyev, G. M. (2010). A uniform numerical method for dealing with a singularly perturbed delay initial value problem. *Applied Mathematics Letters*. 23: 1221-1225.

- Bender, C., & Orszag, S. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer.
- Bitsadze, A. V., & Samarskii, A. A. (1969). On some simpler generalization of linear elliptic boundary value problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 185: 739-740.
- Cakir, M., & Arslan, D. (2021). A new numerical approach for a singularly perturbed problem with two integral boundary conditions. *Computational & Applied Mathematics*, 40(6).
- Cakir, M., & Amiraliyev, G. M. (2005). A finite difference method for the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*. 160: 539-549.
- Cakir, M. & Arslan, D. (2016). A numerical method for nonlinear singularly perturbed multi-point boundary value problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4: 1143-1156.
- Cakir M. & Arslan D. (2016). Numerical Solution of the Nonlocal Singularly Perturbed Problem. *International Journal of Modern Research in Engineering and Technology*, 1 (5): 13-24.
- Cakir M. & Arslan D. (2016). Finite Difference Method for Nonlocal Singularly Perturbed Problem. *International Journal of Modern Research in Engineering and Technology*, 1 (5): 25-39.
- Chegis, R. (1988). The Numerical solution of problems with small parameter at higher derivatives and nonlocal conditions. *Lietuvos Matematikos Rinkiny.* (in Russian). 28: 144-152.
- Cengizci, S. (2017). An Asymptotic-Numerical Hybrid Method for Solving Singularly Perturbed Linear Delay Differential Equations. *International Journal of Differential Equations*. Article ID 7269450, 8 pages.
- Elango, S., & Tamilselvan, A. (2018). Singularly perturbed delay differential equations of convection–diffusion type with integral boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Computing* · doi: 10.1007/s12190-018-1198-4.
- Elsgolts, L. E., Norkin, S. B., & Casti, J. L. (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Academic Press.
- Farrel, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I. (2000). *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*. Chapman Hall/CRC.

- Farrel, P. A., Miller, J. J. H., O’Riordan, E. & Shishkin, G. I. (1996). A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed semilinear equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 33: 1135-1149.
- Herceg, D. & Surla, K. (1991). Solving a Nonlocal Singularly Perturbed Nonlocal Problem by Splines in Tension. *Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Math.*, 21 (2): 119- 132.
- Kudu, M. & Amiraliyev, G. M. (2015). Finite difference method for a singularly perturbed differential equations with integral boundary condition. *International Journal of Mathematics and Computation*. 26: 72-79.
- Ma, R. (1997). Existence theorems for a second order m-point boundary value problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 211: 545-555.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E. & Shishkin, G. I. (1996). *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems*. World Scientific.
- Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley.
- Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbation Methods*. Blacksburg.
- O’Malley, R. E. Jr. (1974). *Introduction to Singular Perturbations*. Academic Press.
- O’Malley, R. E. Jr. (1991). *Singular Perturbations Method for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag.
- Persson, L. & Logan, J.D. (1987). *Applied Mathematics. A basic course in applied mathematics*. <http://staff.www.itu.se/larsenik/applmath/chap2en/part1.html>.
- Samarskii, A. A. (2001). *Theory of Difference Schemes. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 240*. Marcel Dekker.
- Tavukcu, D. (2000). *Monte Carlo Yönteminin Sayısal İntegrallere ve Elektromanyetik Denklemlerin İntegrallerine Uygulanması*, [Yüksek Lisans Tezi]. İstanbul Teknik Üniversitesi.