EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(DOKTORA TEZİ)

ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMLAR

ALİ GÜVEN
Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.03.01
Sunuş Tarihi: 03. 11. 2004

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İlkay KARACA
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Bornova-İZMİR

Ali GÜVEN tarafından Doktora tezi olarak sunulan "Orlicz uzaylarında polinom ve rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımlar" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03. 11. 2004 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Yrd. Doç. Dr. İlkay KARACA**	....
Raportör Üye:	**Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV**	....
Üye	**: Prof. Dr. Harun TUNCAY**	....
Üye	**: Prof. Dr. Güzin GÖKMEN**	....
Üye	**:Prof. Dr. Gülhan ASLIM**	....

ÖZET

ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMLAR

GÜVEN, Ali

Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. İlkay KARACA
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV
03 . 11 . 2004, 49 sayfa

Giriş ve sonuç bölümü dışında bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır.

2. Bölümde; Yaklaşım problemlerinin inceleneceği fonksiyon uzayları ve analitik fonksiyonların sınıfları tanıtılmıştır. Ayrıca, Carleson eğrileri tanıtılmış ve yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Cauchy Singüler Operatörünün sınırlılığı ile ilgili sonuçlara değinilmiştir.

3. Bölümde; Bir Jordan eğrisinin iç ve dış bölgelerinin birim diskin dışına konform dönüşümleri ve bunların bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu dönüşümler yardımıyla yaklaşım problemlerinin çözümünde kullanılacak olan polinom ve rasyonel fonksiyonlar inşa edilmiştir.

4. Bölümde; Orlicz uzaylarının ve Smirnov-Orlicz sınıflarının bazı uygun alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarda yaklaşım teorisinin bazı düz teoremleri ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

5. Bölümde; Rearrangement invariant uzayların uygun alt sınıfları tanımlanmış ve önceki bölümde elde edilen sonuçlar bu sınıflara genelleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Carleson eğrisi, Cauchy singüler operatörü,
Orlicz uzayı, Rearrangement invariant uzay.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS AND RATIONAL FUNCTIONS IN ORLICZ SPACES

GÜVEN, Ali

PhD Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. İlkay KARACA
Prof. Daniyal M. İSRAFİLOV
03 . 11 . 2004, 49 pages

Except the introductory and the conclusion chapters, the thesis consists of four chapters.

In Chapter 2; The function spaces and some classes of analytic functions, which the approximation problems will be investigated in them were introduced. Further, Carleson curves were introduced and the results about boundedness of the Cauchy singular operator, which plays an important role in approximation theory, were mentioned.

In Chapter 3; The conformal mappings of interior and exterior domains of a Jordan curve onto the exterior of the unit disk and their some properties were discussed. In this chapter, the polynomials and rational functions, which will be used in solutions of the approximation problems were constructed.

In Chapter 4; Some suitable subclasses of Orlicz spaces and Smirnov-Orlicz classes were defined and some direct theorems of approximation theory in these classes were stated and proved.

In Chapter 5; Some suitable subclasses of Rearrangement invariant spaces were defined and the results obtained in the previous chapter were generalized to these classes.

Keywords: Carleson curve, Cauchy singular operator,
Orlicz space, Rearrangement invariant space.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran ve destekleyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. İlkay KARACA' ya teşekkürü borç bilirim.

Bilimsel anlamda olduğu kadar, karşılaştığım diğer problemlerde de yardımını ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV' a çok teşekkür ederim.

Çalışmam süresince ilgi ve desteğini gördüğüm Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Başkanları sayın Prof. Dr. Gülhan ASLIM ve Prof. Dr. M. Şerif YENİGÜL' e teşekkür ederim.

Öğrencilik döneminden başlayarak benimle ilgilenen, Matematiği sevdiren ve yetişmemde büyük emeği olan değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Seyit Ahmet KILIÇ, Prof Dr. Turgut BAŞKAN ve Prof. Dr. Musa ERDEM' e çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca, türlü zorluklara katlanarak beni yetiştiren sevgili Annem ile Babama ve anlayış ve desteğini hiç esirgemeyen sevgili eşim Fatma' ya sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

1. GİRİŞ

Matematiğin hemen hemen tüm alanlarında, araştırılması zor olan fonksiyonlara iyi özelliklere sahip daha basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri büyük önem taşımaktadır. Genellikle iyi özelliklere sahip basit fonksiyonlar kümesi olarak incelenmesi gereken temel fonksiyonlar uzayının belirli alt uzayları seçilir. Bu alt uzayların elemanlarının temel uzayın elemanlarına göre daha basit ve iyi özelliklere sahip olmaları gerekir. Bu açıdan baktığımızda yaklaşım teorisinde sık kullanılan alt uzay olarak cebirsel polinomlar, rasyonel fonksiyonlar kümesi veya trigonometrik polinomlar kümesi (periyodik durumda) alınır.

Yaklaşım teorisinde önemli problemlerden biri de yaklaşım hızının değerlendirilmesidir. Bu yönde yapılan araştırmalardan da görüldüğü gibi yaklaşım hızı verilen temel uzaydakı fonksiyonların diferansiyel ve diğer önemli özelliklerine ve aynı zamanda yaklaşan polinomların veya rasyonel fonksiyonların özelliklerine göre değişmektedir. Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemlerine yaklaşım teorisinin düz problemleri denir.

Bu tez çalışmasında Orlicz ve onun bir genelleşmesi olan Rearrangement invariant uzaylarda yaklaşım teorisinin düz problemleri incelenmektedir. Temel uzaylar olarak bakılan Orlicz ve Rearrangement invariant uzaylar, Lebesgue uzaylarının doğal genelleştirmeleridirler. Ayrıca Smirnov-Orlicz sınıfları ve sınır değerleri $X(\Gamma)$ Rearrangement invariant uzayına ait olan $f \in E_1(G)$ fonksiyonlarının $E_X(G)$ sınıfları $E_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ Smirnov sınıflarının genelleştirmeleri olarak düşünülebilir.

$E_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Γ, s yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş düzgün bir Jordan eğrisi ve $\theta(s)$, pozitif reel eksen ile Γ eğrisine s yay uzunluğuna karşılık gelen noktadaki teğet arasındaki açı olsun. θ fonksiyonunun $\Omega(s,\theta)$ süreklilik modülünün

$$\int_0^\delta \frac{\Omega(s,\theta)}{s} ds < \infty, \quad \delta > 0 \tag{1.1}$$

koşulunu sağladığı durumda, $p>1$ için $E_p(G)$ sınıfında yaklaşım teorisinin bazı problemleri (özel halde düz teoremler) Al'per (1960) tarafından çalışılmıştır. Al'per' in sonuçları, Cauchy singüler operatörünün sınırlı olduğu duruma, $p>1$ için Kokilashvili (1969) ve $p \geq 1$ için Andersson (1977) tarafından genişletilmiştir. Faber polinomları serisinin yaklaşım özelliklerini kullanarak $E_p(G)$, $p>1$, uzaylarında bir düz teorem Israfilov (1987) ispatlamıştır. Benzer problemler Ibragimov ve Mamedhanov (1975) tarafından incelenmiştir.

Daha sonraları Çavuş ve İsrafilov (1995), Γ eğrisinin Carleson eğrisi olması durumunda $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$, Lebesgue uzaylarında düz problemleri incelemişlerdir.

Carleson eğrisi ile sınırlanmış G bölgesi üzerindeki $E_p(G,w)$ ağırlıklı Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz teoremleri İsrafilov (2001) tarafından elde edilmiştir.

Kokilashvili (1968), Smirnov sınıflarının bir genelleştirmesi olarak Smirnov-Orlicz sınıflarını tanımlamış ve bu sınıflarda polinomlarla yaklaşım teorisinin bazı düz ve ters problemlerini çalışmıştır. Kokilashvili burada (1.1) koşulunu sağlayan yeterince düzgün Jordan eğrilerini kullanmıştır.

Bütün bu çalışmalarda, Faber polinomları ve p-Faber polinomları kullanılmış ve yaklaşımın derecesi fonksiyonların Faber serilerine değişik toplama yöntemleri uygulanarak çalışılmıştır. Faber polinomları, 1903 yılında Alman matematikçi G. Faber tarafından tanımlanmıştır. Bu polinomlar kompleks fonksiyonların yaklaşımı teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Faber polinomlarının serileri, basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılmış ve analitik fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili birçok teorem bu seriler yardımıyla ispatlanmıştır. Faber serileri, dairesel bölgeler için mevcut olan Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgelere doğal bir genelleştirmesidir.

Smirnov ve ağırlıklı Smirnov sınıfları ile Lebesgue uzaylarında yaklaşım problemleri çalışılırken Cauchy singüler operatörü de en az Faber polinomları kadar önemli bir rol oynamaktadır. Bu operatörün Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı problemi David (1984) tarafından çözülmüştür. Orlicz uzaylarında ise Cauchy singüler operatörünün sınırlı olabilmesi için bir gerek ve yeter koşul A. Yu.

Karlovich (1996) tarafından verilmiş ve daha sonra bu problem daha geniş olan Rearrangement invariant uzaylar ve ağırlıklı Rearrangement invariant uzaylar için de aynı yazar tarafından çözülmüştür (Karlovich, 1998, 2002).

Bu tez çalışmasında, Carleson eğrileri üzerinde tanımlı Orlicz uzayları ve Rearrangement invariant uzaylarda yeni süreklilik modülleri tanımlanmıştır. Bu süreklilik modülleri yardımıyla Carleson eğrileri ve bu eğrilelrle sınırlanan bölgeler üzerinde yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarda yaklaşım teorisinin bazı düz teoremleri çalışılmıştır.

Metin içinde geçen c, c_1, c_2, ..., farklı bağıntılarda genelde farklı olan ve tanım ve teoremlerdeki esas parametrelere bağlı olmayan sabitlerdir.

2. UZAYLAR VE EĞRİLER

2. 1. Fonksiyon Uzayları

Γ kompleks düzlemde bir eğri olsun. Eğer Γ bir çembere homeomorfik ise buna bir Jordan eğrisi denir. Γ eğrisinin sınırlı değişimli bir parametrizasyonu var ise, bu eğriye sonlu uzunluklu eğri adı verilir.

Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Γ eğrisinin $|d\tau|$ (Lebesgue yay uzunluğu) ölçüsü ile donatıldığını kabul edelim.

$M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

koşulları sağlanıyorsa, M fonksiyonuna bir *Young* fonksiyonu denir.

M bir Young fonksiyonu olsun.

$$N(x)=\max\{xy-M(y):\ y\geq 0\}$$

biçiminde tanımlanan N: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu da bir Young fonksiyonu olur. Buna M fonksiyonunun tümleyen fonksiyonu adı verilir.

Eğer

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{M(2x)}{M(x)}<\infty$$

oluyor ise, M fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlıyor denir.

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve M bir Young fonksiyonu olsun. Ölçülebilir ve

$$\int_{\Gamma} M(|f(\tau)|)\,|d\tau| < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün f: $\Gamma \to$ **C** fonksiyonlarının kümesini $\widetilde{L}_M(\Gamma)$ ile gösterelim.

$\widetilde{L}_M(\Gamma)$ genelde bir lineer uzay değildir. $\widetilde{L}_M(\Gamma)$ kümesinin bir lineer uzay olması için gerekli ve yeterli koşul M fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

$\widetilde{L}_M(\Gamma)$ kümesinin ürettiği lineer uzayı $L_M(\Gamma)$ ile gösterelim. Bu durumda $L_M(\Gamma)$ uzayı, $\widetilde{L}_M(\Gamma)$ kümesini kapsayan en küçük lineer uzaydır ve $\widetilde{L}_M(\Gamma) = L_M(\Gamma)$ olması için gerekli ve yeterli koşul M fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

N, M Young fonksiyonunun tümleyeni olmak üzere, $L_M(\Gamma)$ üzerinde

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_{\Gamma} |f(\tau)\, g(\tau)|\, |d\tau| : \ g \in \widetilde{L}_N(\Gamma),\ \int_{\Gamma} N(|g(\tau)|)\, |d\tau| \le 1 \right\}$$

ve

$$\|f\|^{*}_{L_M(\Gamma)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\Gamma} M\left(\frac{|f(\tau)|}{\lambda} \right) |d\tau| \le 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_{L_M(\Gamma)}$ ve $\|.\|^*_{L_M(\Gamma)}$ fonksiyonelleri birer norm olurlar. $\|.\|_{L_M(\Gamma)}$ normuna *Orlicz normu*, $\|.\|^*_{L_M(\Gamma)}$ normuna da *Luxemburg normu* adı verilir. Bu iki norm, her $f \in L_M(\Gamma)$ için

$$\|f\|^*_{L_M(\Gamma)} \leq \|f\|_{L_M(\Gamma)} \leq 2\ \|f\|^*_{L_M(\Gamma)}$$

eşitsizliklerini sağlarlar, yani denk normlardır (Krasnoselskii and Rutickii, 1961).

$L_M(\Gamma)$, Orlicz ya da Luxemburg normu ile birlikte düşünüldüğünde bir Banach uzayı olur. Bu uzaya bir *Orlicz uzayı* adı verilir (Krasnoselskii and Rutickii, 1961; Rao and Ren, 1991).

Orlicz normu ve Luxemburg normu, birbirlerinin yardımıyla

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_\Gamma |f(\tau)\ g(\tau)|\ |d\tau| : g \in L_N(\Gamma),\ \|g\|^*_{L_N(\Gamma)} \leq 1 \right\} \tag{2.1}$$

ve N fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlıyorsa

$$\|f\|^*_{L_M(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_\Gamma |f(\tau)\ g(\tau)|\ |d\tau| : g \in L_N(\Gamma),\ \|g\|_{L_N(\Gamma)} \leq 1 \right\} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanabilir (Rao and Ren, 2002).

$M(x) = \dfrac{x^p}{p}, 1 < p < \infty$ Young fonksiyonunu göz önüne alalım. M fonksiyonunun tümleyeni, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere $N(x) = \dfrac{x^q}{q}$ fonksiyonudur. Bu durumda

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} = q^{1/q}\left(\int_\Gamma |f(\tau)|^p\,|d\tau|\right)^{1/p}, \quad \|f\|^*_{L_M(\Gamma)} = p^{-1/p}\left(\int_\Gamma |f(\tau)|^p\,|d\tau|\right)^{1/p}$$

olur. Bir başka deyişle, $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayı $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayına izomorfiktir.

$\mathbf{M}(\Gamma)$ ile, ölçülebilir bütün $f:\Gamma\to\mathbf{C}$ fonksiyonlarının kümesini ve $\mathbf{M}^+(\Gamma)$ ile $\mathbf{M}(\Gamma)$ kümesinin $[0,\infty]$ aralığında değer alan elemanlarının kümesini gösterelim.

Bir $\rho:\mathbf{M}^+(\Gamma)\to[0,\infty]$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $f,g,f_n\in\mathbf{M}^+(\Gamma)(n\in\mathbf{N})$ fonksiyonları, her $a\geq 0$ sabiti ve ölçülebilir her $E\subset\Gamma$ kümesi için aşağıdakiler sağlanıyorsa , ρ dönüşümüne bir *fonksiyon normu* adı verilir:

(i) $\rho(f)=0 \Leftrightarrow f=0$ *h. h.* $(\textit{hemen her yerde})$,
$\rho(af)=a\,\rho(f)$,
$\rho(f+g)\leq\rho(f)+\rho(g)$

(ii) $0\leq g\leq f$ *h. h.* $\Rightarrow \rho(g)\leq\rho(f)$

(iii) $0\leq f_n\uparrow f$ *h. h.* $\Rightarrow \rho(f_n)\uparrow\rho(f)$

(iv) $\rho(\chi_E)<\infty$,

$$\int_E f\,|d\tau|\leq C_E\,\rho(f).$$

Burada $C_E\in(0,\infty)$, E ve ρ'ya bağlı fakat f fonksiyonuna bağlı olmayan bir sabittir.

ρ bir fonksiyon normu ise, $\mathbf{M}^+(\Gamma)$ üzerinde

$$\rho'(g) = \sup\left\{ \int_\Gamma f(\tau) g(\tau) \; |d\tau| : f \in \mathbf{M}^+(\Gamma), \;\; \rho(f) \leq 1 \right\}$$

dönüşümü de bir fonksiyon normu olur. Buna ρ fonksiyon normunun *eşlenik* normu adı verilir.

ρ bir fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ biçimindeki bütün $f \in \mathbf{M}(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesini $X(\Gamma)$ ile gösterelim. $X(\Gamma)$ bir lineer uzaydır. Buna bir *Banach fonksiyon uzayı* adı verilir. $f \in X(\Gamma)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \rho(|f|)$$

olarak tanımlanırsa, $X(\Gamma)$ bir Banach uzayı olur.

ρ', ρ fonksiyon normunun eşlenik normu olsun. ρ' ile üretilen Banach fonksiyon uzayına $X(\Gamma)$ uzayının *eşlenik uzayı* denir ve $X'(\Gamma)$ ile gösterilir. Her $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayı, ikinci eşlenik uzayı ile çakışır, yani, $X(\Gamma) = X''(\Gamma)$ olur. Ayrıca, her $f \in X(\Gamma)$ için

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \|f\|_{X''(\Gamma)}$$

olur. Böylece

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_\Gamma |f(\tau) g(\tau)| \; |d\tau| : g \in X'(\Gamma), \;\; \|g\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\} \tag{2.3}$$

ve

$$\|g\|_{X'(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_\Gamma |f(\tau) g(\tau)| \; |d\tau| : f \in X(\Gamma), \;\; \|f\|_{X(\Gamma)} \leq 1 \right\} \tag{2.4}$$

elde edilir.

$\mathbf{M}_0(\Gamma)$ ve $\mathbf{M}_0^+(\Gamma)$, sırasıyla $\mathbf{M}(\Gamma)$ ve $\mathbf{M}^+(\Gamma)$'nın hemen her yerde sonlu fonksiyonlarının sınıfları olsunlar. Bir $f \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ fonksiyonunun *dağılım* (*distribution*) fonksiyonu,

$$m_f(\lambda) = \left|\left\{z \in \Gamma : |f(z)| > \lambda\right\}\right|, \quad \lambda \geq 0$$

olarak tanımlanır. Eğer $f, g \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ fonksiyonları için

$$m_f(\lambda) = m_g(\lambda), \ \lambda \geq 0$$

oluyorsa, f ve g fonksiyonlarına *eş-ölçülebilir* (*equimeasurable*) fonksiyonlar denir.

Tanım 2. 1. *Eğer her* $f, g \in \mathbf{M}_0^+(\Gamma)$ *eş-ölçülebilir fonksiyon çifti için* $\rho(f) = \rho(g)$ *oluyorsa,* ρ *fonksiyon normuna rearrangement invariant fonksiyon normu denir. Bu durumda,* ρ *ile üretilen Banach fonksiyon uzayına bir rearrangement invariant* (*R. I.*) *uzay adı verilir.*

Bir $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayını gözönüne alalım.

$$\rho_M(f) = \|f\|_{L_M(\Gamma)}^*$$

biçiminde tanımlanan ρ_M dönüşümü bir R. I. fonksiyon normudur (Bennett and Sharpley, 1988). Bu nedenle, her Orlicz uzayı bir R. I. uzaydır.

Bir $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayının R. I. olması için gerekli ve yeterli koşul, bunun $X'(\Gamma)$ eşlenik uzayının R. I. olmasıdır (Bennett and Sharpley, 1988). $X(\Gamma)$ R. I. uzayı için

$$L_\infty \subset X(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)$$

olur.

$f \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ olsun.

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : m_f(\lambda) \le t\}, \quad t \ge 0$$

biçiminde tanımlanan f^* fonksiyonuna, f fonksiyonunun *azalan rearrangementi* denir.

$X(\Gamma)$, sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisi üzerinde bir R. I. uzay olsun. Luxemburg gösterim teoremine göre (Bennett and Sharpley, 1988), $\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ üzerinde, her $f \in \mathbf{M}_0^+(\Gamma)$ için

$$\rho(f) = \overline{\rho}(f^*)$$

olacak şekilde bir $\overline{\rho}$ R. I. fonksiyon normu vardır. $\mathbf{R}_+$ üzerinde $\overline{\rho}$ ile üretilen R. I. uzayı $\overline{X}$ ile gösterelim.

$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_+)$ üzerinde, $x > 0$ için

$$E_x(f)(t) = \begin{cases} f(xt), & xt \in [0,|\Gamma|] \\ 0, & xt \notin [0,|\Gamma|] \end{cases}, \quad t > 0$$

biçiminde tanımlanan E_x operatörünü gözönüne alalım. $\mathbf{B}(\overline{X})$ ile, $\overline{X}$ üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini gösterelim. Her

$x > 0$ için $E_{1/x} \in \mathbf{B}(\overline{X})$ olur (Bennett and Sharpley, 1988). $h_X(x)$ ile $E_{1/x}$ operatörünün operatör normunu gösterelim, yani,

$$h_X(x) = \left\| E_{1/x} \right\|_{\mathbf{B}(\overline{X})}$$

olsun.

$$\alpha_X = \sup_{0<x<1} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

ve

$$\beta_X = \inf_{1<x<\infty} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

biçiminde tanımlanan α_X ve β_X sayılarına $X(\Gamma)$ R. I. uzayının sırasıyla alt ve üst *Boyd indisleri* denir. Boyd indisleri,

$$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$$

eşitsizliklerini sağlarlar. Eğer

$$0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$$

ise, Boyd indisleri *nontrivial*'dir denir. $X(\Gamma) = L_M(\Gamma)$ bir Orlicz uzayı ise,

$$\alpha_X = \alpha_M = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\log h(t)}{\log t}, \quad \beta_X = \beta_M = \lim_{t\to 0^+} -\frac{\log h(t)}{\log t}$$

olur. Burada, $M^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, M Young fonksiyonunun tersi ve h,

$$h(t) = \lim_{x\to\infty} \sup \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0$$

biçiminde tanımlı fonksiyondur. Orlicz uzayı durumunda Boyd indislerinin nontrivial olması, uzayın yansımalı olmasına denktir (Karlovich, 1996).

$L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$ Lebesgue uzayı için $\alpha_X = \beta_X = 1/p$ olur.

2. 2. Analitik Fonksiyonların Bazı Sınıfları

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $0 < p < \infty$ olsun. Jordan eğri teoremine göre, her Jordan eğrisi, kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız olan ve bu eğriyi ortak sınır kabul eden iki basit bağlantılı bölgeye ayırır. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini ve G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim. Ayrıca $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ olsun.

$\Gamma_r, 0 < r < 1$, $\mathbf{D}$ diskinin G bölgesi üzerine bir konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r, 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $E_p(G)$ ile gösterelim. $E_p(G)$'ye *Smirnov sınıfı* denir.

Her $f \in E_p(G)(0 < p < \infty)$ fonksiyonunun Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır ve bu limit değerleri için yine f gösterimini kullanırsak $f \in L_p(\Gamma)$ olur (Duren, 1970).

Smirnov sınıflarının önemli bir özelliği Cauchy integral gösterimidir (Duren, 1970):

Teorem 2. 1. $f \in E_1(G)$ *ise*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=\begin{cases} f(z), & z\in G \\ 0, & z\in G^{-}\end{cases} \tag{2.5}$$

olur.

$E_p(G^-)$ Smirnov sınıfları da benzer şekilde tanımlanır ve $E_p(G)$ ile aynı özelliklere sahiptir. Cauchy integral gösterimi ise, $f\in E_1(G^-)$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=\begin{cases} f(\infty)-f(z), & z\in G^{-} \\ f(\infty), & z\in G\end{cases} \tag{2.6}$$

biçimni alır.

V. Kokilashvili, Smirnov sınıflarının bir genelleştirmesi olarak *Smirnov-Orlicz* sınıflarını tanımlamıştır (Kokilashvili, 1968).

M bir Young fonksiyonu olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1}\int_{\Gamma_r}M(|f(z)|)|dz|<\infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $E_M(G)$ ile gösterelim. $E_M(G)$ sınıfına *Smirnov-Orlicz* sınıfı denir. $E_M(G)\subset E_1(G)$ olur ve her $f\in E_M(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Bu limit değerleri $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayına ait olur (Kokilashvili, 1968). $E_M(G^-)$ sınıfları da benzer şekilde tanımlanır.

$X(\Gamma)$ bir R. I. Uzay olsun. $f\in X(\Gamma)$ biçimindeki $f\in E_1(G)$ fonksiyonlarının kümesini $E_X(G)$ ile ve $f\in X(\Gamma)$ biçimindeki $f\in E_1(G^-)$ fonksiyonlarının kümesini de $E_X(G^-)$ ile gösterelim.

2. 3. Carleson Eğrileri ve Cauchy Singüler Operatörü

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $t \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için, Γ eğrisinin t merkezli ve ε yarıçaplı açık disk içinde kalan parçasını $\Gamma(t,\varepsilon)$ ile gösterelim, yani,

$$\Gamma(t,\varepsilon) = \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$$

olsun.

Tanım 2. 2. *Eğer*

$$C_\Gamma = \sup_{t\in\Gamma} \sup_{\varepsilon>0} \frac{|\Gamma(t,\varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty$$

koşulu sağlanıyor ise Γ *eğrisine bir Carleson eğrisi denir.*

Bu tanımdaki C_Γ sayısına Carleson sabiti adı verilir. Bazı kaynaklarda Carleson eğrilerine Ahlfors regüler eğri, David regüler eğri ya da Ahlfors-David eğrisi de denmektedir (Böttcher and Karlovich, 1997).

Carleson eğrileri sınıfı çok geniş bir eğriler sınıfıdır. Al'per eğrileri, Lyapunov eğrileri ve Lavrentiev eğrileri Carleson eğrileridirler. Carleson eğrisi örnekleri (Böttcher and Karlovich, 1997) de bulunabilir.

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi , $G = Int\Gamma$ ve $G^- = Ext\Gamma$ olsun. $f \in L_1(\Gamma)$ için

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G \tag{2.7}$$

ve

$$f^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^{-} \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları, sırasıyla G ve G^{-} bölgelerinde analitiktirler ve $f^{-}(\infty)=0$ dır.

$f\in L_1(\Gamma)$ fonksiyonunun bir $z\in\Gamma$ noktasındaki *Cauchy singüler integrali*,

$$S_{\Gamma}(f)(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

olarak tanımlanır. Bu limit hemen her $z\in\Gamma$ için mevcuttur (Böttcher and Karlovich, 1997).

Bir $f\in L_1(\Gamma)$ için, f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarından birinin Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri varsa, $S_{\Gamma}(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Tersine olarak, $S_{\Gamma}(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcut ise, f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarının Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Her iki durumda da hemen her $z\in\Gamma$ için

$$f^{+}(z)=S_{\Gamma}(f)(z)+\frac{1}{2}f(z) \tag{2.9}$$

ve

$$f^{-}(z)=S_{\Gamma}(f)(z)-\frac{1}{2}f(z) \tag{2.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Goluzin, 1969) ve böylece Γ üzerinde hemen her yerde

$$f = f^{+} - f^{-} \tag{2.11}$$

olur.

$f \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonuna, Γ üzerinde hemen her yerde $S_\Gamma(f)(z)$ değerini alan $S_\Gamma(f)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu şekilde tanımlanan S_Γ lineer operatörüne *Cauchy singüler operatörü* denir.

S_Γ lineer operatörünün sınırlılığı, yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu operatörün $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayı üzerinde sınırlılığı problemi G. David tarafından çözülmüştür (David, 1984). Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında ise sınırlılık problemi Muckenhoupt ağırlıkları kullanılarak çözülmüştür. Bu teoremlerin ayrıntılı ispatları ve Cauchy singüler integrali ile ilgili geniş bilgi (Böttcher and Karlovich, 1997) kitabında bulunabilir.

A. Yu. Karlovich, David in teoremini ve Boyd interpolasyon teoremini kullanarak, S_Γ operatörünün Orlicz uzayları üzerinde sınırlılığı problemini çözmüştür (Karlovich, 1996).

Teorem 2. 2. *S_Γ lineer operatörünün yansımalı bir $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayı üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul, Γ eğrisinin bir Carleson eğrisi olmasıdır.*

Rearrangement invariant uzaylar üzerinde Cauchy singüler operatörünün sınırlılığı problemi yine Karlovich tarafından çözülmüştür (Karlovich, 1998).

Teorem 2. 3. $X(\Gamma)$ *nontrivial Boyd indislerine sahip bir R. I. Uzay olsun.* S_Γ *lineer operatörünün* $X(\Gamma)$ *uzayı üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul,* Γ *eğrisinin bir Carleson eğrisi olmasıdır.*

3. YAKLAŞAN POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLAR

3. 1. Konform Dönüşümler

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $G = Int\Gamma$ ve $G^- = Ext\Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0 \in G$ olduğunu varsayalım. Ayrıca, $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, $\mathbf{D} = Int\mathbf{T}$ ve $\mathbf{D}^- = Ext\mathbf{T}$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoreminden aşağıdakiler elde edilir:

(1) G^- bölgesinin, $\mathbf{D}^-$ üzerine

$$\varphi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ konform dönüşümü vardır.

(2) G bölgesinin $\mathbf{D}^-$ üzerine

$$\varphi_1(0) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ_1 konform dönüşümü vardır.

φ dönüşümünün tersini ψ ve φ_1 dönüşümünün tersini de ψ_1 ile gösterelim.

Γ bir Jordan eğrisi olduğundan, φ ve φ_1 dönüşümlerinin Γ üzerine, ψ ve ψ_1 dönüşümlerinin de $\mathbf{T}$ üzerine homeomorfik genişlemeleri vardır. Ayrıca Γ sonlu uzunluklu olduğundan $\varphi' \in E_1(G^-)$, $\varphi_1' \in E_1(G)$ ve $\psi', \psi_1' \in E_1(\mathbf{D}^-)$ olur (Goluzin, 1969). Böylece, φ' ve φ_1' fonksiyonları Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptirler ve bu limit değerleri $L_1(\Gamma)$ uzayına aittirler. Aynı şekilde, ψ' ve ψ_1' fonksiyonlarının da $\mathbf{T}$ üzerinde hemen her yerde açısal limitleri vardır ve bu limit değerleri $L_1(\mathbf{T})$ uzayına aittir.

k negatif olmayan bir tamsayı olsun. $[\varphi(z)]^k \varphi'(z)$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu nedenle

$$[\varphi(z)]^k \varphi'(z) = B_k(z) + H_k(z), \; z \in G^-$$

olacak şekilde, derecesi k olan bir $B_k(z)$ polinomu ve G^- bölgesinde analitik olan ve $H_k(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan bir $H_k(z)$ fonksiyonu vardır.

$B_k(z)\,(k = 0,1,2,...)$ polinomlarına G bölgesinin ikinci tür *Faber polinomları* denir.

Cauchy integral formülü kullanılır ve $\varsigma = \psi(e^{it})$ dönüşümü yapılırsa, her $z \in G$ ve $k = 0,1,2,...$ için

$$B_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[\varphi(\varsigma)]^k \varphi'(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}}{\psi(e^{it}) - z}\, e^{ikt} dt$$

elde edilir.

$[\varphi_1(z)]^{k-2} \varphi_1'(z)$ fonksiyonu $G \setminus \{0\}$ kümesinde analitiktir ve 0 noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu fonksiyonun 0 noktasındaki esas kısmını $\widetilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ ile gösterelim. Bu durumda, G bölgesinde analitik olan ve her $z \in G \setminus \{0\}$ için

$$\left[\varphi_1(z)\right]^{k-2}\varphi_1'(z)=\tilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)+\tilde{H}_k(z)$$

olacak şekilde bir $\tilde{H}_k(z)$ fonksiyonu vardır. $\tilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,...)$ esas kısımlarına, G bölgesinin ikinci tür *Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları* adı verilir. Cauchy integral formülü ve $\varsigma=\psi_1\left(e^{it}\right)$ dönüşümü uygulanarak, her $z\in G^-$ için,

$$-\tilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left[\varphi_1(\varsigma)\right]^{k-2}\varphi_1'(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-it}}{\psi_1\left(e^{it}\right)-z}\,e^{ikt}dt,\ k=0,\ 1,\ 2,...$$

elde edilir.

$t\in[-\pi,\pi]$ olmak üzere,

$$h(t,z)=\frac{e^{it}}{\psi\left(e^{it}\right)-z},\quad z\in G$$

ve

$$h_1(t,z)=\frac{e^{-it}}{\psi_1\left(e^{it}\right)-z},\quad z\in G^-$$

gösterimleri kullanılırsa, $k=0,\ 1,\ 2,...$ için

$$B_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t,z)\,e^{ikt}dt,\quad z\in G$$

ve

$$-\tilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_1(t,z)\,e^{ikt}dt,\quad z\in G^-$$

elde edilir. Buradan, $B_k(z)$ polinomunun $h(\cdot,z)$ fonksiyonunun $(-k)$. Fourier katsayısı ve $-\tilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ rasyonel fonksiyonunun da $h_1(\cdot,z)$

fonksiyonunun $(-k)$. Fourier katsayısı olduğu görülmektedir. Böylece, $t \in [-\pi, \pi]$ için, $h(\cdot, z)$ ve $h_1(\cdot, z)$ fonksiyonlarına

$$h(t,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k(z) e^{-ikt}$$

ve

$$h_1(t,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} -\widetilde{B}_k\left(\frac{1}{z}\right) e^{-ikt}$$

Fourier serileri karşılık getirilebilir.

3. 2. Yaklaşan Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlar

$n = 1, 2, \ldots$ için, $K_n(\theta) = \sum_{m=-n}^{n} \lambda_m^{(n)} e^{im\theta}$, negatif olmayan, çift ve her n için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\, d\theta = 1 \tag{3.1}$$

ve

$$\int_{0}^{\pi} \theta\, K_n(\theta)\, d\theta \leq \frac{c}{n} \tag{3.2}$$

koşullarını sağlayan bir trigonometrik polinom olsun. Bu tür trigonometrik polinomlara örnek olarak

$$J_n(\theta) = \frac{3\left(\sin \frac{n\theta}{2}\right)^4}{n\,(2n^2+1)\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^4}$$

biçiminde tanımlanan Jackson çekirdekleri verilebilir.

$f \in L_1(\Gamma)$ olsun. Bu durumda,

$$f_0(w)=f(\psi(w))\psi'(w)$$

ve

$$f_1(w)=f(\psi_1(w))\psi_1'(w)w^2$$

biçiminde tanımlanan f_0 ve f_1 fonksiyonları **T** üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olurlar. f_0 ve f_1 fonksiyonlarının Fourier serileri

$$f_0(w)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k w^k$$

ve

$$f_1(w)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_k w^k$$

olsun.

$\varsigma\in\Gamma$ ve $\theta\in[-\pi,\pi]$ olmak üzere

$$\varsigma_\theta=\psi\left[\varphi(\varsigma)e^{i\theta}\right],\quad \varsigma_{1\theta}=\psi_1\left[\varphi_1(\varsigma)e^{i\theta}\right]$$

noktalarını tanımlayalım. ς_θ ve $\varsigma_{1\theta}$ noktalarının Γ eğrisi üzerinde olduğu açıktır.

$$I(\theta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varphi'(\varsigma_{-\theta})}\frac{\varphi'(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma,\quad z\in G,\quad \theta\in[-\pi,\pi]$$

integralini göz önüne alalım. $\varsigma=\psi(e^{it})$ dönüşümü uygulanırsa,

$$I(\theta,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\psi\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right)\psi'\left(e^{i(t-\theta)}\right)\frac{e^{it}}{\psi(e^{it})-z}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0\left(e^{i(t-\theta)}\right)h(t,z)\,dt$$

elde edilir. $I(\theta,z)$ hemen her $\theta\in[-\pi,\pi]$ için mevcuttur ve $I(\cdot,z)\in L_1([-\pi,\pi])$ olur (Bary, 1964).

$$f_0(e^{it})\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{ikt}$$

ve

$$h(t,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}B_k(z)e^{-ikt}$$

olduğundan, $I(\cdot,z)$ fonksiyonuna

$$I(\theta,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k B_k(z)e^{-ik\theta}$$

Fourier serisi karşılık gelir (Bary, 1964). $I(\cdot,z)\in L_1([-\pi,\pi])$ ve K_n sınırlı değişimli olduğundan, genelleştirilmiş Parseval özdeşliği (Bary, 1964) kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\,I(\theta,z)\;d\theta=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k B_k(z),\quad z\in G$$

elde edilir. Böylece her $n=1,\ 2,\ \ldots$ için

$$P_n(z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\,d\theta\;\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varphi'(\varsigma_{-\theta})}\,\frac{\varphi'(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma,\quad z\in G$$

derecesi n olan bir cebirsel polinomdur.

Şimdi $z\in G^-$ ve $\theta\in[-\pi,\pi]$ olmak üzere

$$I_1(\theta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma_{1(-\theta)})}{\varphi_1'(\varsigma_{1(-\theta)})}\frac{\varphi_1'(\varsigma)e^{-2i\theta}}{\varsigma-z}\,d\varsigma$$

integralini göz önüne alalım. $\varsigma=\psi_1(e^{it})$ dönüşümü yapılırsa

$$I_1(\theta,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\psi_1\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right)\psi_1'\left(e^{i(t-\theta)}\right)e^{2i(t-\theta)}\frac{e^{-it}}{\psi_1\left(e^{it}\right)-z}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1\left(e^{i(t-\theta)}\right)h_1(t,z)\,dt$$

elde edilir. $I_1(\theta,z)$ hemen her $\theta\in[-\pi,\pi]$ için mevcuttur ve $I_1(\cdot,z)\in L_1([-\pi,\pi])$ olur (Bary, 1964).

$$f_1\left(e^{it}\right)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_k e^{ikt}$$

ve

$$h_1(t,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}-\tilde{B}_k\left(1/z\right)e^{-ikt}$$

olduğundan,

$$I_1(\theta,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}-\tilde{a}_k\tilde{B}_k\left(1/z\right)e^{-ik\theta}$$

olur. $I_1(\cdot,z)\in L_1([-\pi,\pi])$ ve K_n sınırlı değişimli olduğundan, genelleştirilmiş Parseval özdeşliğinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\,I_1(\theta,z)\;d\theta=\sum_{k=0}^{n}-\lambda_k^{(n)}\tilde{a}_k\tilde{B}_k\left(1/z\right),\quad z\in G^-$$

elde edilir. Buradan, her n doğal sayısı için

$$\tilde{Q}_n\left(1/z,f\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma}\frac{f\left(\varsigma_{1(-\theta)}\right)}{\varphi_1'\left(\varsigma_{1(-\theta)}\right)}\frac{\varphi_1'(\varsigma)\;e^{-2i\theta}}{\varsigma-z}\,d\varsigma,\quad z\in G^-$$

ifadesinin $1/z$ 'nin derecesi n olan bir polinomu olduğu görülmektedir.

K_n çift fonksiyon olduğundan, $z\in G$ için

$$P_n(z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\,d\theta\int_\Gamma\left[\frac{f(\varsigma_\theta)}{\varphi'(\varsigma_\theta)}+\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varphi'(\varsigma_{-\theta})}\right]\frac{\varphi'(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma$$

ve $z\in G^-$ için

$$\tilde{Q}_n\left(1/z,f\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\,d\theta\int_\Gamma\left[\frac{f(\varsigma_{1\theta})}{\varphi_1'(\varsigma_{1\theta})}\,e^{2i\theta}+\frac{f\left(\varsigma_{1(-\theta)}\right)}{\varphi_1'\left(\varsigma_{1(-\theta)}\right)}\,e^{-2i\theta}\right]\frac{\varphi_1'(\varsigma)}{\varsigma-z}\,d\varsigma$$

olduğu görülür.

4. ORLICZ UZAYLARINDA YAKLAŞIM

4. 1. Giriş ve Ana Sonuçlar

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $L_M(\Gamma)$, Γ üzerinde bir Orlicz uzayı olsun. $L_M(\Gamma)$ üzerinde, $\theta \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere, $f \in L_M(\Gamma)$ ve $\varsigma \in \Gamma$ için

$$T_\theta f(\varsigma) = \frac{f(\varsigma_\theta)}{\varphi'(\varsigma_\theta)} \varphi'(\varsigma)$$

ve

$$T_{1\theta} f(\varsigma) = \frac{f(\varsigma_{1\theta})}{\varphi_1'(\varsigma_{1\theta})} \varphi_1'(\varsigma) e^{2i\theta}$$

biçiminde T_θ ve $T_{1\theta}$ operatörlerini tanımlayalım.

Özel halde, $\Gamma = \mathbf{T}$ ise, $T_\theta f(w) = f(we^{i\theta})$, $T_{1\theta} f(w) = f(we^{-i\theta})$ ve böylece $T_\theta f \in L_M(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f \in L_M(\Gamma)$ olur. Ayrıca Γ eğrisi, c_1, c_2, c_3, c_4 sabitler olmak üzere,

$$0 < c_1 \le |\varphi'(z)| \le c_2 < \infty, \; z \in \Gamma$$

ve

$$0 < c_3 \le |\varphi_1'(z)| \le c_4 < \infty, \; z \in \Gamma$$

biçiminde ise, $f \in L_M(\Gamma)$ için $T_\theta f \in L_M(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f \in L_M(\Gamma)$ olur.

Buradan hareketle, $f \in L_M(\Gamma)$ olmak üzere, $\delta \ge 0$ için,

$$\omega_M^*(\delta, f) = \sup_{|\theta| \le \delta} \|f - T_\theta f\|_{L_M(\Gamma)},$$

$$\omega_{1M}^{*}(\delta, f) = \sup_{|\theta|\le\delta} \|f - T_{1\theta} f\|_{L_M(\Gamma)}$$

ve

$$\Omega_M^{*}(\delta, f) = \omega_M^{*}(\delta, f) + \omega_{1M}^{*}(\delta, f)$$

biçiminde $\omega_M^{*}(\cdot, f), \omega_{1M}^{*}(\cdot, f)$ ve $\Omega_M^{*}(\cdot, f)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, sürekli, azalmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

(1) $\omega(0) = 0$,

(2) $\delta > 0$ için $\omega(\delta) > 0$,

(3) Her n doğal sayısı için, c n ve δ dan bağımsız bir sabit olmak üzere $\omega(n\delta) \le c\, n\, \omega(\delta)$.

Aşağıdaki fonksiyon sınıflarını tanımlayalım:

$$H_\Gamma^\omega L_M(\Gamma) = \{f \in L_M(\Gamma) : \Omega_M^{*}(\delta, f) \le c\, \omega(\delta), \delta > 0\},$$

$$H_\Gamma^\omega E_M(G) = \{f \in E_M(G) : \omega_M^{*}(\delta, f) \le c\, \omega(\delta), \delta > 0\},$$

$$H_\Gamma^\omega E_M(G^-) = \{f \in E_M(G^-) : \omega_{1M}^{*}(\delta, f) \le c\, \omega(\delta), \delta > 0\}.$$

Eğer f fonksiyonu bu fonksiyon sınıflarından birine ait ise, $T_\theta f \in L_M(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f \in L_M(\Gamma)$ olacağı açıktır.

ω yukarıda belirtilen koşulları sağlayan bir fonksiyon, Γ bir Carleson eğrisi ve $L_M(\Gamma)$ yansımalı bir Orlicz uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 4. 1. $f \in H_\Gamma^\omega L_M(\Gamma)$ *ise, her n doğal sayısı için*

$$\|f - R_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \le c\,\omega\left(1/n\right)$$

olacak şekilde bir

$$R_n(z, f) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{a_1}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

rasyonel fonksiyonu vardır.

Teorem 4. 2. $f \in H_\Gamma^\omega E_M(G)$ *ise, her n doğal sayısı için*

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \le c\,\omega\left(1/n\right)$$

olacak şekilde, derecesi n olan bir $P_n(z, f)$ *polinomu vardır.*

Teorem 4. 3. $f \in H_\Gamma^\omega E_M(G^-)$ *ise, her n doğal sayısı için*

$$\|f - Q_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \le c\,\omega\left(1/n\right)$$

olacak şekilde, $1/z$ *'nin derecesi n olan bir* $Q_n\left(1/z, f\right)$ *polinomu vardır.*

Bu teoremlerde $c > 0$, n doğal sayılarına bağlı olmayan bir sabittir.

4. 2. Ana Sonuçların İspatı

Teorem 4. 1 in İspatı:

$f \in H_\Gamma^\omega L_M(\Gamma)$ olsun. $z' \in G$ için (2.7) ve(3.1) den

$$f^+(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^+(z') K_n(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2 f^+(z') K_n(\theta)\,d\theta$$

olur. Bu eşitlik ve $P_n(., f)$ polinomu birlikte düşünüldüğünde

$$f^{+}(z')-P_n(z',f)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{2f^{+}(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{f(\varsigma_{\theta})}{\varphi'(\varsigma_{\theta})}+\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varphi'(\varsigma_{-\theta})}\right]\frac{\varphi'(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{2f^{+}(z')-\left[(T_{\theta}f)^{+}(z')+\left(T_{(-\theta)}f\right)^{+}(z')\right]\right\}d\theta$$

elde edilir.

Γ eğrisinin iç tarafındaki bütün açısal yollar üzerinden $z'\to z\in\Gamma$ için limit alınırsa, (2.9) dan hemen her $z\in\Gamma$ için

$$f^{+}(z)-P_n(z,f)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[S_{\Gamma}(f-T_{\theta}f)(z)+S_{\Gamma}\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right]d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[(f-T_{\theta}f)(z)+\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right]d\theta$$

bulunur. Bu eşitlik, (2.1) formülü ve Fubini teoremi kullanılır ve supremum integral işareti içine alınırsa,

$$\left\|f^{+}-P_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}=sup\int_{\Gamma}\left|f^{+}(z)-P_n(z,f)\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\leq sup\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[S_{\Gamma}(f-T_{\theta}f)(z)+S_{\Gamma}\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right]d\theta\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$+sup\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[(f-T_{\theta}f)(z)+\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right]d\theta\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\leq sup \int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)\right|\right]d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

$$+ sup \int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left|(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|(f-T_{(-\theta)}f)(z)\right|\right]d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

$$= sup \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\int_{\Gamma}\left[\left|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+ sup \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\int_{\Gamma}\left[\left|(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\right]|g(z)|\,|dz|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{sup \int_{\Gamma}\left[\left|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)\right|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{sup \int_{\Gamma}\left[\left|(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|(f-T_{(-\theta)}f)(z)\right|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left\|S_\Gamma(f-T_\theta f)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{(-\theta)}f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$

elde edilir. Burada supremum $\|g\|^*_{L_N(\Gamma)} \leq 1$ biçimindeki bütün $g \in L_N(\Gamma)$ fonksiyonları üzerinden alınmıştır. Teorem 2. 2 den

$$\left\|f^+ - P_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{(-\theta)}\right\|_{L_M(\Gamma)}\right\}d\theta$$

bulunur. $\omega^*_M(\cdot,f)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\left\|f^+ - P_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c\int_0^{\pi}K_n(\theta)\omega^*_M(\theta,f)\,d\theta \qquad (4.1)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $z' \in G^-$ için

$$f^-(z') - \tilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{2f^-(z') - \left[(T_{1\theta}f)^-(z') + \left(T_{1(-\theta)}f\right)^-(z')\right]\right\}$$

ve Γ dışındaki bütün açısal yollar üzerinden $z' \to z \in \Gamma$ için limit alınırsa, hemen her $z \in \Gamma$ için (2.10) dan

$$f^-(z) - \tilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left[S_\Gamma(f - T_{1\theta}f)(z) + S_\Gamma\left(f - T_{1(-\theta)}f\right)(z)\right]d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left[(T_{1\theta}f - f)(z) + \left(T_{1(-\theta)}f - f\right)(z)\right]d\theta$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\|f^- - \tilde{Q}_n(\cdot, f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{\left\|f - T_{1\theta}\right\|_{L_M(\Gamma)} + \left\|f - T_{1(-\theta)}\right\|_{L_M(\Gamma)}\right\}d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. $\omega_{1M}^*(\cdot, f)$ fonksiyonunun tanımından

$$\left\|f^- - \tilde{Q}_n(\cdot, f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c\int_0^\pi K_n(\theta)\,\omega_{1M}^*(\theta, f)\,d\theta \qquad (4.2)$$

bulunur. Şimdi

$$R_n(z, f) = P_n(z, f) - \tilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right)$$

rasyonel fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece (2.11), (4.1), (4.2), $\Omega_M^*(\cdot,f)$ fonksiyonunun tanımı ve ω fonksiyonunun (3) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|f-R_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)} &\le \|f^+-P_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)}+\|f^--\widetilde{Q}_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)}\\
&\le c\int_0^\pi K_n(\theta)\,\{\omega_M^*(\theta,f)+\omega_{1M}^*(\theta,f)\}\,d\theta\\
&= c\int_0^\pi K_n(\theta)\,\Omega_M^*(\theta,f)\,d\theta\\
&\le c\int_0^\pi K_n(\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta\\
&\le c\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^\pi K_n(\theta)\,(n\theta+1)\,d\theta
\end{aligned}$$

bulunur. K_n trigonometrik polinomunun (3.1) ve (3.2) özellikleri

$$\|f-R_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)}\le c\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu verir. □

Teorem 4. 2 nin İspatı:

$f\in H_\Gamma^\omega E_M(G)$ olsun. $z'\in G^-$ alalım.

$f\in E_1(G)$ olduğundan, (2.5) den

$$f^-(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z'}\,d\varsigma=0$$

olur. Böylece, hemen her $z \in \Gamma$ için $f^{-}(z) = 0$ ve bu nedenle Γ üzerinde hemen her yerde $f = f^{+}$ eşitliği sağlanır.

(4.1), ω fonksiyonunun (3) özelliği ve $K_n(\theta)$ fonksiyonunun (3.1) ve (3.2) özellikleri

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} = \|f^{+} - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega_M^{*}(\theta, f)\, d\theta$$

$$\leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega(\theta)\, d\theta \leq c\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu verir. □

Teorem 4. 3 ün İspatı:

$f \in H_{\Gamma}^{\omega} E_M(G^{-})$ ve $z' \in G$ olsun. $f \in E_1(G^{-})$ olduğundan, (2.6) dan

$$f^{+}(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z'}\, d\varsigma = f(\infty)$$

bulunur. Böylece Γ üzerinde hemen her yerde $f^{+}(z) = f(\infty)$ ve $f = f(\infty) - f^{-}$ olur.

$$Q_n\left(\frac{1}{z}, f\right) = f(\infty) - \widetilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right)$$

rasyonel fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.2), ω fonksiyonunun (3) özelliği ve $K_n(\theta)$ fonksiyonunun (3.1) ve (3.2) özelliklerinden

$$\|f - Q_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} = \|f^{-} - \widetilde{Q}_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega_{1M}^{*}(\theta, f)\, d\theta$$

$$\leq c\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta \leq c\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. □

5. REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM

5. 1. Giriş ve Ana Sonuçlar

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $X(\Gamma)$, Γ üzerinde bir R. I. uzay olsun. $\theta \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere 4. Bölümde tanımlanan T_θ ve $T_{1\theta}$ operatörlerini göz önüne alalım. $f \in X(\Gamma)$ olmak üzere, $\delta \geq 0$ için

$$\omega_X^*(\delta, f) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \|f - T_\theta f\|_{X(\Gamma)},$$

$$\omega_{1X}^*(\delta, f) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \|f - T_{1\theta} f\|_{X(\Gamma)}$$

ve

$$\Omega_X^*(\delta, f) = \omega_X^*(\delta, f) + \omega_{1X}^*(\delta, f)$$

biçiminde $\omega_X^*(., f)$, $\omega_{1X}^*(., f)$ ve $\Omega_X^*(., f)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, sürekli, azalmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

(1) $\omega(0) = 0$,

(2) $\delta > 0$ için $\omega(\delta) > 0$,

(3) her n doğal sayısı için, c δ ve n'den bağımsız bir sabit olmak üzere $\omega(n\delta) \leq cn\omega(\delta)$.

Aşağıdaki fonksiyon sınıflarını tanımlayalım:

$$X^{\omega}(\Gamma)=\left\{f\in X(\Gamma):\Omega_X^*(\delta,f)\le c\;\omega(\delta),\;\delta>0\right\},$$

$$E_X^{\omega}(G)=\left\{f\in E_X(G):\omega_X^*(\delta,f)\le c\;\omega(\delta),\;\delta>0\right\}$$

$$E_X^{\omega}(G^-)=\left\{f\in E_X(G^-):\omega_{1X}^*(\delta,f)\le c\;\omega(\delta),\;\delta>0\right\}.$$

Eğer f fonksiyonu bu sınıflardan birine ait ise $T_\theta f\in X(\Gamma)$ ve $T_{1\theta}f\in X(\Gamma)$ olacağı açıktır.

ω, yukarıda belirtilen koşulları sağlayan bir fonksiyon, Γ bir Carleson eğrisi ve $X(\Gamma)$ nontrivial Boyd indislerine sahip bir R. I. uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 5. 1. *$f\in X^{\omega}(\Gamma)$ ise, her n doğal sayısı için*

$$\left\|f-R_n(.,f)\right\|_{X(\Gamma)}\le c\;\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde bir

$$R_n(z,f)=\frac{a_{-n}}{z^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

rasyonel fonksiyonu vardır.

Teorem 5. 2. *$f\in E_X^{\omega}(G)$ ise, her n doğal sayısı için*

$$\left\|f-P_n(.,f)\right\|_{X(\Gamma)}\le c\;\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde, derecesi n olan bir $P_n(.,f)$ polinomu vardır.

Teorem 5. 3. $f \in E_X^{\omega}\left(G^-\right)$ *ise, her n doğal sayısı için*

$$\left\| f - Q_n(.,f)\right\|_{X(\Gamma)} \le c\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde bir

$$Q_n\left(\frac{1}{z}, f\right) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots. + \frac{a_{-1}}{z} + a_0$$

rasyonel fonksiyonu vardır.

Bu teoremlerde $c > 0$, n doğal sayılarına bağlı olmayan bir sabittir.

5. 2. Ana Sonuçların İspatı

Teorem 5. 1 in İspatı:

$f \in X^{\omega}(\Gamma)$ olsun. Teorem 4. 1 in ispatındaki yöntem kullanılarak hemen her $z \in \Gamma$ için

$$f^+(z) - P_n(z,f)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[S_\Gamma\left(f - T_\theta f\right)(z) + S_\Gamma\left(f - T_{(-\theta)} f\right)(z)\right] d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left(f - T_\theta f\right)(z) + \left(f - T_{(-\theta)} f\right)(z)\right] d\theta$$

bulunur.

(2.3) formülü uygulanarak

$$\left\| f^{+} - P_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[\left\| S_\Gamma (f - T_\theta f) \right\|_{X(\Gamma)} + \left\| S_\Gamma \left(f - T_{(-\theta)} f \right) \right\|_{X(\Gamma)} \right] d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[\left\| f - T_\theta f \right\|_{X(\Gamma)} + \left\| f - T_{(-\theta)} f \right\|_{X(\Gamma)} \right] d\theta$$

elde edilir. Teorem 2. 4 den

$$\left\| f^{+} - P_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \left\| f - T_\theta f \right\|_{X(\Gamma)} + \left\| f - T_{(-\theta)} \right\|_{X(\Gamma)} \right\} d\theta$$

bulunur. $\omega_X^*(\cdot, f)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\left\| f^{+} - P_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta) \omega_X^*(\theta, f) d\theta \tag{5.1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, hemen her $z \in \Gamma$ için

$$f^{-}(z) - \tilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[S_\Gamma (f - T_{1\theta} f)(z) + S_\Gamma \left(f - T_{1(-\theta)} f \right)(z) \right] d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[(T_{1\theta} f - f)(z) + \left(T_{1(-\theta)} f - f \right)(z) \right] d\theta$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\| f^- - \tilde{Q}_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \le c \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \left\| f - T_{1\theta} \right\|_{X(\Gamma)} + \left\| f - T_{1(-\theta)} \right\|_{X(\Gamma)} \right\} d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. $\omega_{1X}^{*}(\cdot, f)$ fonksiyonunun tanımından

$$\left\| f^- - \tilde{Q}_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \le c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega_{1X}^{*}(\theta, f)\, d\theta \tag{5.2}$$

bulunur. Şimdi

$$R_n(z, f) = P_n(z, f) - \tilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right)$$

rasyonel fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece (2.11) , (5.1), (5.2), $\Omega_M^{*}(\cdot, f)$ fonksiyonunun tanımı ve ω fonksiyonunun (3) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left\| f - R_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} &\le \left\| f^+ - P_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} + \left\| f^- - \tilde{Q}_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \\ &\le c \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \omega_X^{*}(\theta, f) + \omega_{1X}^{*}(\theta, f) \right\} d\theta \\ &= c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \Omega_X^{*}(\theta, f)\, d\theta \\ &\le c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega(\theta)\, d\theta \\ &\le c\omega\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{\pi} K_n(\theta)(n\theta + 1)\, d\theta \end{aligned}$$

bulunur. K_n fonksiyonunun (3.1) ve(3.2) özellikleri

$$\left\| f - R_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \le c\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu verir. □

Teorem 5. 2 nin İspatı:

$f \in E_X^{\omega}(G)$ olsun. $z' \in G^-$ alalım. $f \in E_1(G)$ olduğundan, (2.5) den,

$$f^-(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z'}\,d\varsigma = 0$$

olur. Böylece, hemen her $z \in \Gamma$ için $f^-(z) = 0$ ve bu nedenle Γ üzerinde hemen her yerde $f = f^+$ eşitliği sağlanır.

(5.1), ve $K_n(\theta)$ fonksiyonunun (3.1) ve (3.2) özelliklerinden

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} = \|f^+ - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \le c\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega_X^*(\theta, f)\,d\theta$$

$$\le c\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta \le c\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. □

Teorem 5. 3 ün İspatı:

$f \in E_X^{\omega}(G^-)$ ve $z' \in G$ olsun. (2.6) formülünden,

$$f^+(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z'}\,d\varsigma = f(\infty)$$

bulunur. Böylece Γ üzerinde hemen her yerde $f^+(z) = f(\infty)$ ve $f = f(\infty) - f^-$ olur.

$$Q_n\left(\frac{1}{z}, f\right) = f(\infty) - \widetilde{Q}_n\left(\frac{1}{z}, f\right)$$

rasyonel fonksiyonunu göz önüne alalım. (5.2), ve $K_n(\theta)$ fonksiyonunun (3.1) ve (3.2) özelliklerinden

$$\left\| f - Q_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} = \left\| f^- - \widetilde{Q}_n(\cdot, f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega_{1X}^{*}(\theta, f)\, d\theta$$

$$\leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega(\theta)\, d\theta \leq c\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. □

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, çok geniş bir eğriler sınıfı olan Carleson eğrileri üzerindeki Orlicz uzayları ve Rearrangement invariant uzayların bazı alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflara ait fonksiyonların polinom ve rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Yaklaşım problemlerinin çözümünde kullanılan polinom ve rasyonel fonksiyonlar, bazı trigonometrik polinomlar, ikinci tür Faber polinomları ve ikinci tür Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları kullanılarak inşa edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Al'per, S. Ja., 1960, Approximation in the Mean of Analytic Functions of Class E_p (Rusça), *Moscow: Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit.*,: 273-286.

Andersson, J. E., 1977, On the Degree of Polynomial Approximation in $E_p(D)$, *J. Approx. Theory*, 19: 61-68.

Bary, N. K., 1964, A Treatise on Trigonometric Series, Vol.I, Pergamon Press, 553pp.

Bennett, C., Sharpley, R., 1988, Interpolation of Operators, Academic Press, 469pp.

Boyd, D. W., 1967, Spaces Between a Pair of Reflexive Lebesgue Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18: 215-219.

Boyd, D. W., 1969, Indices of Function Spaces and Their Relationship to Interpolation, *Can. J. Math.*, 21: 1245-1254.

Boyd, D. W., 1971, Indices for the Orlicz spaces, *Pacific J. Math.*, 38: 315-323.

Böttcher, A., Karlovich, Yu. I., 1997, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators, Birkhauser-Verlag, 397pp.

Çavuş, A., Israfilov, D. M., 1995, Approximation by Faber-Laurent Rational Functions in the Mean of Functions of Class $L_p(\Gamma)$ with $1<p<\infty$, *Approx. Th. Appl.*, 11: 105-118.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

David, G., 1984, Operateurs Integraux Singuliers sur Certaines Courbes du Plan Complexe, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 17: 157-189.

Devore, R.A., Lorentz, G. G., 1993, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 449pp.

Duren, P. L., 1970, Theory of H^p Spaces, Academic Press, 258p.

Dynkin, E. M., 1979/1980, The Rate of Polynomial Approximation in Complex Domain, Complex Analysis and Spectral Theory, Leningrad: 90-142.

Dzjadyk, V., K., 1977, Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials (Rusça), Nauka, Moscow , 511pp.

Gaier, D., 1987, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser-Verlag, Boston, 196pp.

Goluzin, G. M., 1968, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translation of Mathematical Monographs, Vol.26, Providence, RI: AMS., 676pp.

Guven, A., Israfilov, D. M., 2002, Polynomial Approximation in Smirnov-Orlicz Classes, *Comp. Methods Funct. Theory*, 2: 509-517.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Guven, A., Israfilov, D. M., 2005, Rational Approximation in Orlicz Spaces on Carleson Curves, *Bull. Belg. Math. Soc.* (baskıda).

Ibragimov, I. I., Mamedhanov, D. I., 1976, A Constructive Characterization of a Certain Class of Functions, *Soviet Math. Dokl.,* 4: 820-823.

Israfilov, D. M., 1987, Approximate Properties of Generalized Faber Series in an Integral Metric (Rusça*), Izv. Akad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Math. Nauk.*, 2: 10-14.

Israfilov, D. M., 2001, Approximation by p-Faber Polynomials in the Weighted Smirnov Class $E_p(G,w)$ and the Bieberbach Polynomials, *Constr. Approx.*, 17: 335-351.

Karlovich, A. Yu., 1996, Algebras of Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients on Reflexive Orlicz Spaces, *Math. Nachr.,* 179: 187-222.

Karlovich, A. Yu., 1997, Singular Integral Operators with Regulated Coefficients in Reflexive Orlicz Spaces, *Siberian Math. J.,* 38: 253-266.

Karlovich, A. Yu., 1998, The Index of Singular Integral Operators in Reflexive Orlicz Spaces, *Math. Notes*, 64: 330-341.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Karlovich, A. Yu., 1998, Singular Integral Operators with *PC* Coefficients in Reflexive Rearrangement Invariant Spaces, *Integ. Eq. and Oper. Th.*, 32: 436-481.

Karlovich, A. Yu., 2000, On the Essential Norm of the Cauchy Singular Integral Operator in Weighted Rearrangement Invariant Spaces, *Integ. Eq. and Oper. Th.*, 38: 28-50.

Karlovich, A. Yu., 2002, Algebras of Singular Integral Operators with *PC* Coefficients in Rearrangement Invariant Spaces with Muckenhoupt Weights, *J. Operator Theory,* 47:303-323.

Kokilashvili, V., 1967, Approximation in the Mean of Analytic Functions of Class E_p, *Soviet Math. Dokl.,* 8: 1393-1397.

Kokilashvili, V., 1968, On Analytic Functions of Smirnov-Orlicz Classes, *Studia Mathematica,* 31: 43-59.

Kokilashvili, V., 1969, A Direct Theorem on Mean Approximation of Analytic Functions by Polynomials, *Soviet Math. Dokl.,* 10: 411-414.

Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Ya. B., 1961, Convex Functions and Orlicz Spaces, Noordhoff Ltd., Groningen, 249pp.

Pommerenke, C., 1992, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 300pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rao, M. M., Ren, Z. D., 1991, Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, 449pp.

Rao, M. M., Ren, Z. D., 2002, Applications of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, 464pp.

Smirnov, V. I., Lebedev, N. A., 1964, Functions of a Complex Variable: Constructive Theory, MIT Press, Massachusetts, 488pp.

Suetin, P. K., 1998, Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 301pp.

ÖZGEÇMİŞ

15. 08. 1976 tarihinde Antakya'da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Antakya'da tamamladı. 1997 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden birincilikle mezun oldu. 25. 09. 1997 tarihinde Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2000 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne bağlı olarak, Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov danışmanlığında "Faber polinomları ve onların yaklaşım özellikleri" adlı tez çalışmasıyla Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

2001 yılında Doktora eğitimini yapmak amacıyla Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne görevlendirildi. Halen bu görevini sürdürmektedir.