

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

146759

**ÖNGÖRÜ VE ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE
BAYESYEN YAKLAŞIM**

KADİR KARAGÖZ

9625020212

146759

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. AHMET GÖKÇEN

(DÜZELTİLMİŞ TEZ)

İSTANBUL -2004

T.C
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜ
MÜDÜRLÜĞÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüz **EKONOMETRİ** Anabilim Dalında **9625020212** numaralı **KADİR KARAGÖZ'ÜN** hazırladığı **“ÖNGÖRÜ VE ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNE BAYESYEN YAKLAŞIM”** konulu ~~YÜKSEK LİSANS~~ / **DOKTORA TEZİ** ile ilgili **Tez Savunma Sınavı**, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin 28.Maddesi uyarınca **05.08.2004**, **PERŞEMBE** günü saat: **14.00'de** yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin ...*Kabul*.....'ne* **OYBİRLİĞİ / OYÇOKLUĞUYLA** karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	KANAATİ(*)	İMZA
PROF.DR.AHMET GÖKÇEN	<i>Kabul</i>	<i>Ahmet Gökçen</i>
PROF.DR.BESİM AKIN	<i>Kabul</i>	<i>Besim Akın</i>
PROF.DR.SELAHATTİN GÜRİŞ	<i>Kabul</i>	<i>S. Güriş</i>
DOÇ.DR.KARUN NEMLİOĞLU	<i>Kabul</i>	<i>Karun Nemlioğlu</i>
YRD.DOÇ.DR.ENİS SINKSARAN	<i>Kabul</i>	<i>Enis Sinksaran</i>

ÖZ

Bu çalışmada öngörü ve zaman serileri analizi konusunda Bayesyen bir yaklaşım tanıtılmaktadır. Bayesyen öngörünün ilkeleri ele alınmakta ve *ön-bilginin* biçimsel olarak öngörü sistemine dahil edilmesi önemli bir özellik olarak vurgulanmaktadır. Genel model, dinamik lineer model, Kalman filtresindeki yineleme ilişkilerine dayalı olarak tanımlanmaktadır. Yöntemin temel bileşenleri şunlardır; i) durum-uzayı biçiminde *parametrik* bir model, ii) herhangi bir zaman için parametrelere ilişkin *olasılıksal* bilgi, iii) hem sistematik hem de rassal şoklara bağlı olarak parametrelerin zaman içindeki değişimini ifade eden bir *ardışık* model tanımı, iv) gerçek modelin kendisine ilişkin *belirsizlik*. Alternatif yöntemlerden farklı olarak analizde ön-bilginin kullanılmasının gerçeğe daha yakın öngörüler vermesi beklenir. Her ne kadar Bölüm 4'teki örnek de bunu doğruluyorsa da yöntemin başarısı temelde kullanılan ön-bilginin uygunluğuna bağlıdır.

ABSTRACT

In this dissertation, a Bayesian approach to analysis and forecasting of time series data is presented. The principles of Bayesian forecasting are discussed and the formal inclusion of *a priori information* in the forecasting process is emphasized as a major feature. The general model, that is, the dynamic linear model, is defined based on the Kalman filter recurrence relations. The essential components of the method are; i) a *parametric* model, in a state space form, ii) *probabilistic* information on the parameters at any given time, iii) a *sequential* model definition which describes how the parameters change in time, both systematically and as a result of random shocks, iv) *uncertainty* as to the underlying model. Being different from the alternative methods, the use of prior information in the analysis is expected to give more realistic forecasts. Although the example in Chapter 4 verifies this expectation, the success of the method actually depends on appropriateness of the prior information used.

ÖNSÖZ

İstatistiksel öngörü, “herhangi bir değişkenin şimdiki ve geçmiş dönemlerdeki değerlerini, davranışını inceleyerek, belirli varsayımlar altında, gelecek dönemlerde alabileceği değerleri tahmin etmeye dönük uğraşlar” şeklinde tanımlanabilir. Buna göre öngörü geçmiş, şimdi ve gelecek ile ilgilidir ve eldeki zaman serisinin analizine dayalı bir süreçtir. Analiz sonucunda elde edilecek mümkün olduğunca az hatalı, yani gerçeğe yakın öngörüler daha doğru kısa, orta ve uzun vadeli karar alma ve gerçekçi plânlama açısından hayati önemi haizdir. Geleceğin tahmininin doğru yapılması makro ekonomiden mikro ekonomiye, mühendislikten tıba kadar hemen tüm alanlarda büyük önem taşımaktadır.

En iyi öngörü yöntemini geliştirmeye dönük çalışmalar genel olarak istatistiksel araçların gelişmesine paralel bir seyir izlemiştir. Bu süreç içerisinde birbirinden farklı ve benzer birçok öngörü yöntemi önerilmiştir. Bununla birlikte tüm bu (geleneksel) yöntemler eldeki tarihsel veri setine dayanmaktadır. Ancak sadece tarihsel bir gözlem dizisine dayanarak bir zaman serisi analizine girişmek ve bu analize dayanarak öngöründe bulunmak, sahip olunabilecek birtakım dışsal bilgiler göz ardı edilebileceğinden, gerçekten daha uzak öngörülere, yani daha büyük öngörü hatasına yol açabilecektir. Bayesyen yöntem sayesinde bu tür dışsal bilgileri analize katmak ve böylece daha düşük öngörü hatasına sahip yöntemler geliştirmek mümkündür. Yönteme asıl farklılığını ve cazibesini kazandıran da bu özelliğidir.

Klasik veya geleneksel zaman serileri analizi ve öngörü yaklaşımları dışsal bilgiyi ve analiz doğrultusunda alınacak kararların kayıp/kazanç fonksiyonunu göz önüne almamaktadır. Ayrıca bu yaklaşım, öngörü sisteminde yer alan kişilerin birbirleriyle ve öngörü sistemiyle etkileşimlerini/ilişkilerini ihmal etmektedir. Bu bilgiler örneklerdeki gibi niteliksel olabileceği kadar niceliksel bazı bilgilerden ibaret de olabilir. Nitel bir olaya ait bilginin etkisini analize dahil etmek, nicel bir bilgiye nazaran daha zor olsa da, mümkündür. Bayesyen yöntemle nitel veya nicel bilgilerin etkileri ve bunlarla ilişkili belirsizlikler olasılık dağılımları kullanılarak eldeki zaman serisi

bilgisine eklenilebilir hale getirilebilir ve böylece sahip olunan belirsiz bilgi karar alıcılar tarafından açık seçik biçimde yorumlanıp kabul edilebilir.

Geleneksel öngörü yöntemleri geçmiş dönem değerlerine dayalı olarak öngörüler verdiklerinden özellikle yapısal değişim dönemleri öncesinde değişim sonrası döneme ait öngörülerinde başarısız olmaları kuvvetle muhtemeldir. Bayesyen yöntem ise, değişimin büyüklüğü ve yönüne ilişkin uygun bilgilerin öngörü döneminde analize katılmasına imkân verdiğiinden daha gerçekçi öngörüler verebilecektir.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Bayesyen çıkarsama mekanizmasının temel işleyişi tanıtılmaktadır. Burada, anakitle varyansının bilinip bilinmediği duruma göre ve her bir durum için de kullanılan ön yoğunluk fonksiyonunun niteliğine göre ayırım yapılabilir. Her bir mümkün durum için Bayesyen çıkarsama süreci anakitle ortalaması bağlamında ele alınmıştır. Aynı yol Bayesyen regresyon analizi kısmında da izlenmiştir. İkinci bölümde öngörünün tanımı, önemine değinilmekte ve sonraki bölümde ele alınacak olan Bayesyen yaklaşımla karşılaştırma yapmaya imkân vermesi amacıyla belli başlı geleneksel öngörü yöntemlerinin işleyişine ilişkin genel bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde çalışmanın asıl konusunu oluşturan Bayesyen öngörü yöntemi tanıtılmaktadır. Bu bölümde Bayesyen öngörü ve yöntemin genel yapısını oluşturan dinamik lineer modellemenin genel ilkeleri ve işleyişi ele alınmaktadır. Bu arada, en basit ve en yaygın kullanıma sahip dinamik model olan birinci dereceden polinomial model veya sabit model üzerinde özellikle durulmaktadır. Dördüncü bölümde yöntemin sabit model çerçevesinde işleyişini göstermek amacıyla Türkiye ekonomisine ait sabit fiyatlarla kişi başına millî gelir verilerinin kullanıldığı bir örneğe yer verilmektedir. Ayrıca alternatif birkaç yönteme ait sonuçlarla bir karşılaştırma da bu kısımda bulunabilir. Çalışmanın son bölümünde ise genel değerlendirmeler ve elde edilen sonuçlar üzerinde durulmaktadır.

Son olarak, bu çalışmanın ortaya çıkmasındaki katkılarından dolayı, danışman hocam Prof.Dr. Ahmet Gökçen'e, tez izleme komitesi üyeleri Prof.Dr. Besim Akın ve Doç.Dr. Karun Nemlioğlu'na, ayrıca Doç.Dr. Murat Karagöz ve Öğr.Grv. Murat Yağmurlu'ya ve tüm bu süreç boyunca desteğini eksik etmeyen eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Öz (Abstract)	iii
Önsöz	iv
Tablo ve Grafik Listesi	ix
Kısaltmalar Listesi	x
Giriş	1
Tarihsel Arkaplân	6
Bölüm 1. Bayesyen Çıkarsama Yaklaşımı	
1.1. Süreksiz ve Sürekli Değişkenler İçin Bayes Kuralı	10
1.2. Anakitle Varyansı Biliniyorken Son-dağılımın Elde Edilmesi	14
1.2.1. Bilgi-vermeyen Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi	15
1.2.2. Bilgi-veren Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi	17
1.3. Anakitle Varyansı Bilinmiyorken Son-dağılımın Elde Edilmesi	21
1.3.1. Bilgi-vermeyen Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi	22
1.3.2. Bilgi-veren Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi	26
1.3.3. Marjinal Son OYF'ler	28
1.4. Bayesyen Regresyon Analizi	30
1.4.1. Bilinen Varyans Durumu	31
1.4.1.1. Bilgi-vermeyen Ön-OYF İle Çıkarsama	31
1.4.1.2. Bilgi-veren Ön-OYF İle Çıkarsama	32
1.4.2. Bilinmeyen Varyans Durumu	35
1.4.2.1. Bilgi-veren Ortak Ön-OYF İle Çıkarsama	35
1.4.2.2. Bilgi-vermeyen Ortak Ön-OYF İle Çıkarsama	39

Bölüm 2. Klasik Öngörü ve Zaman Serileri Analizi

2.1. Giriş	41
2.2. Öngörü ve Önemi	43
2.3. Zaman Serileri Analizi	44
2.4. Klasik Öngörü Yöntemleri	48
2.4.1. Ayırıştırma Yöntemi	48
2.4.2. Düzleştirme Yöntemleri	51
2.4.2.1. Basit Üssel Düzleştirme Yöntemi	52
2.4.2.2. Doğrusal Hareketli Ortalamalar ve Kendi Kendini Yenileyen ÜDY	53
2.4.2.3. Doğrusal ÜDY'ler	54
2.4.2.4. Doğrusal ve Dönemsel ÜDY'ler	55
2.4.2.5. Diğer ÜDY'ler	56
2.4.3. Otoregresif Modeller ve Hareketli Ortalama Modelleri	56
2.4.3.1. Otoregresif Modeller	61
2.4.3.2. Hareketli Ortalama Modelleri	63
2.4.4. Karma Model (Box-Jenkins Yöntemi)	66

Bölüm 3. Bayesyen Öngörü ve Zaman Serileri Analizi

3.1. Giriş	75
3.2. Durum Uzayı Gösterimi ve Kalman Filtreleme Yöntemi	78
3.3. Dinamik Lineer Modeller ve Bayesyen Öngörü Yöntemi	85
3.3.1. Bayes Teoremi ile DLM'de Güncelleme	87
3.3.2. Bayes Teoremi'ne Dayalı Ardışık Güncelleme Algoritması	87
3.3.3. Genel Yapı	89
3.3.3.1. Tek-değişkenli DLM'de Güncelleme Denklemleri	91
3.3.3.2. Öngörü Dağılımları	94
3.3.3.3. Gözlem Varyansı	95
3.3.4. Seri Ortalaması İçin Bir DLM	98
3.3.5. Sabit Varyanslı Model	103
3.3.6. Klâsik Zaman Serisi Modelleri ve DLM	106

3.3.7. DLM ve Durağanlık	107
3.4. Sabit Katsayılı Model ile Öngörü	108
3.4.1. Sabit Model	108
3.4.2. Genel Zaman Serisi Modelleri	111
 Bölüm 4. Uygulama	
4.1. Doğrusal Trend Fonksiyonu	114
4.2. İkinci Derece Trend Fonksiyonu	117
4.3. Üssel Trend Fonksiyonu	120
4.4. Basit ÜDY	123
4.5. İki Parametrelili Doğrusal ÜDY	125
4.6. Üssel Trende Göre İki Parametrelili ÜDY	127
4.7. ARIMA (Box-Jenkins) Modeli	129
4.8. Bayesyen Öngörü Yöntemi	142
 Sonuç	
Kaynakça	
Ek	
Özgeçmiş	

TABLO VE GRAFİK LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1	115
Tablo 2	118
Tablo 3	121
Tablo 4	123
Tablo 5	126
Tablo 6	128
Tablo 7	131
Tablo 8	134
Tablo 9	137
Tablo 10	141
Tablo 11	145
Tablo 12	147
Grafik 1	117
Grafik 2	119
Grafik 3	122
Grafik 4	124
Grafik 5	125
Grafik 6	127
Grafik 7	129
Grafik 8	130
Grafik 9	133
Grafik 10	135
Grafik 11	136
Grafik 12	138
Grafik 13	139
Grafik 14	142

KISALTMALAR LİSTESİ

AR: (Autoregressive) Otoregresif

ARMA : (Autoregressive Moving Average) Otoregresif Hareketli Ortalama

ARIMA: (Autoregressive Integrated Moving Average) Otoregresif Bütünleşik Hareketli Ortalama

DLM: Dinamik Lineer Model

EEG: Elektroensefalogram

EKK: En Küçük Kareler

GSMH: Gayrısafı Millî Hasıla

H.K.O.: Hata Kareleri Ortalaması

KBMG: Kişi Başına Millî Gelir

MA: (Moving Average) Hareketli Ortalama

o.y.f.: olasılık yoğunluk fonksiyonu

ÜDY: Üssel Düzleştirme Yöntemi

VD oyf: Veriye Dayalı olasılık yoğunluk fonksiyonu

VDO oyf: Veriye Dayalı Olmayan olasılık yoğunluk fonksiyonu

GİRİŞ

İstatistiksel çıkarsama, örneklem verilerinden hareketle anakitlenin bilinmeyen parametrelerine ilişkin sonuçlara varılması şeklinde tanımlanabilir. İstatistiksel çıkarsama nasıl yapılırsa yapılsın bilinenlerden hareketle bilinmeyene ilişkin bir sonucun elde edilmesi söz konusudur. Çıkarsama ile varılan sonucun kesin olduğu hiç bir zaman iddia edilemez, ancak sonuçların yüksek bir olasılıkla doğru olması amaçlanır. Bu nedenle istatistiksel çıkarsama ile ulaşılan bilimsel bulgular olasılık teorisinden ayrı düşünülemez.

Klâsik çıkarsama yaklaşımında bir parametrenin anakitle değeri bilinmemekte, ancak örneklem verileri kullanılarak bu bilinmeyen anakitle değeri tahmin edilmeye çalışılmaktadır.* Seçilen her farklı örneklem farklı bir gözlem kümesi içerdiğinden sonuçta farklı bir tahmin değeri elde edilmektedir. Birbirinden bağımsız çok sayıda örneklem çekildiğinde bunlardan elde edilen tahmini parametre değerleri belirli bir varyansla bir ortalama değer etrafında dağılım sergilerler. Bu dağılımın ortalama da anakitle değerine yaklaşması beklenir. Dağılımın ortalaması ile gerçek değer arasındaki fark kullanılan tahmin edicinin sapmasını gösterir ve bu sapma sapmasız bir tahmin edici kullanıldığında ortadan kalkar. Dağılımın varyansı ne kadar küçük olursa gerçek değere yakın tahmin değerleri elde etme şansı o kadar artar. Elde edilen örnek dağılımının varsayımsal olarak defalarca tekrar edilen

* *Klasik çıkarsama yaklaşımı* ile en yaygın istatistiksel çıkarsama yöntemi olan *örnekleme teorisi yaklaşımı* kastedilmektedir. Bunun dışında, ilk olarak Fisher tarafından önerilen ve prensip olarak Bayesyen çıkarsama teorisine daha yakın olan *güvenli (fiducial) çıkarsama* ve *olabilirlik çıkarsaması* yaklaşımlarını çok az kullanıma sahip olduklarından göz ardı etmekteyiz. Son iki yaklaşım hakkında özlü bir tanıtım için bkz. G.E.P. Box ve G.C. Tiao, **Bayesian Inference in Statistical Analysis**, Wiley, New York, 1992

örnekleme sürecinden türetildiği düşünülmektedir. Klasik yaklaşım tamamen örnekleme bilgisine dayandığından “örnekleme teorisi yaklaşımı” olarak da adlandırılmaktadır.

Klâsik çıkarsama yaklaşımında anakitle parametresi bir sabit sayıdır, fakat değeri bilinmemektedir. Bu nedenle bu parametreye bir olasılık ifadesi veya olasılık dağılımı atanamaz. Ancak yinelenen örnekleme sürecinde kullanılan tahmin edici bir rassal değişkendir ve bunun sağladığı tahmin değerleri bir olasılık dağılımı oluşturur. Bayesyen çıkarsama yaklaşımında ise bunun tersine, örnek gözlem değerleri ve bundan elde edilen parametre tahmin değeri veri, anakitle parametresi ise rassal değişken olarak kabul edilir.

Örnekleme teorisi yaklaşımında bir olayın olasılığı o olayın defalarca tekrarlanan deney (örnekleme) sürecindeki nisbi frekansının limit değeri olarak tanımlanmakta ve olasılıklar nisbi frekanslara dayanmaktadır. Bu nedenle klâsik yaklaşım frekansçı yaklaşım olarak da adlandırılır. Bayesyen yaklaşımda ise olasılıklar yinelenen deney (örnekleme) sürecine dayalı değildir, bir kişisel kanaat düzeyini yansıtır. Bu tür kişisel kanaat düzeyini yansıtan olasılıklara “subjektif (öznel) olasılıklar” denilmektedir. Objektif olasılıklar değişme göstermezken subjektif olasılıklar kişiden kişiye farklılık gösterebilir. Bir parametreye ilişkin subjektif olasılık dağılımı o parametre hakkındaki kişisel bilgi durumunu yansıtır. Bu bilgi örnekleme çekilmeden/gözlenmeden önce de mevcut olabilir. Bu durumda dağılım *ön dağılım* adını alır. Örnekleme çekildikten sonra, elde edilen örnekleme bilgisi ile daha önce mevcut olan ön bilgi birleştirilerek son bilgi elde edilir. Bu durumda dağılım da *son dağılım* adını alır. Daha önceki bir analize ait son dağılım şimdiki bir analiz için ön dağılım görevi görebileceği gibi bu analize ait son dağılım da sonraki bir analiz için ön dağılım olarak kullanılabilir. Ön dağılım parametreye ilişkin belirsizliği/bilgi eksikliğini ifade etmek amacıyla kullanılmaktadır ve nihai amaç son dağılımı elde etmektir. Ön bilgi ile örnekleme bilgisini birleştirerek son bilgiye ulaşma süreci “Bayes kuralı” aracılığıyla gerçekleştirilmektedir.¹ Bayesyen

¹ N. Gürsakal, *Bayesgil İstatistik*, Bursa, 1992, s. 59

yaklaşımında kullanılan ön bilgi genellikle bu tür bir subjektif olasılığa dayanır.* Bu bilginin kaynağı sayısal veya sayısal olmayan bir bilgi (önceki araştırmalara ait sonuçlar, kişisel tecrübe, uzman görüşü vb.) olabilir.²

Parametre değerine ilişkin olarak iki tür olasılık dağılımı sözkonusudur. Birincisi, örneklem henüz gözlenmeden önce sahip olunan ön (a priori) bilgiye dayanan olasılık dağılımı. İkincisi ise, ön bilgi ile örneklemden elde edilen bilginin birleştirilmesiyle elde edilen son (a posteriori) bilgiye dayanan olasılık dağılımı.

Bayesyen yaklaşım subjektif olasılıklara dayanmasından dolayı bir takım sert eleştirilere uğrasa da, sahip olunan ön bilginin subjektif olasılık biçiminde ifade edilerek analiz sürecine dahil edilmesinin üstünlükleri de kanıtlanmıştır. H. Jeffreys olasılığı “mantıksal bir kanaat düzeyi” olarak tanımladıktan sonra bilimsel çıkarsamaya yönelik en sağlam yaklaşımın Bayesyen yaklaşım olduğu sonucuna varırken, J.H. Savage da belirsizlik altında karar verme konusunda en akılcı prosedürün Bayesyen prosedür olduğunu iddia etmektedir. Bayesyen çıkarsama ve karar prosedürleri tahmin, kestirim**, test etme, kontrol ve benzeri birçok ekonometrik sorunların analizinde iyi sonuçlar vermiştir.³

Zellner, subjektiflik-objektiflik konusunda pragmatik bir yaklaşımı önermekte, önemli olanın iyi bir model kurulması olduğunu ve bu modelin tahmin, kestirim ve politika analizi açısından performansına bakılması gerektiğini savunmaktadır. Bayesyen ekonometriciler kadar Bayesyen-olmayanlar* da bir hayli ön-bilgi kullanmaktadırlar.⁴ O halde bu bilgi daha biçimsel (formel) bir tarzda ve

* Bayesyen yaklaşımın subjektifliği ve subjektiflik-objektiflik üzerine kısa bir felsefi açıklama için bkz. A. Zellner, “Bayesian Econometrics”, *Econometrica*, V. 52, 2, 1985, s. 253-269

² Klasik (frekansçı) yaklaşım ile Bayesyen yaklaşımın özlü bir karşılaştırması için bkz. Lindley D.V., “Theory and practice of Bayesian statistics”, *The Statistician*, V. 32, 1983, s. 1-11 ve J. O. Berger, *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985, chapter 3

** Tüm çalışma boyunca tahmin ve kestirim terimleri, sırasıyla, “estimation” ve “prediction” sözcüklerinin karşılığı olarak kullanılmaktadır.

³ Zellner, 1985, s. 254

* “Bayesyen-olmayan” (non-Bayesian) ifadesi ile hem baştan beri değinilen klasik istatistiksel yaklaşım hem de Bayesyen prosedürü kullanmayan modern yaklaşımlar kast edilmektedir. Lindley, her iki anlamı da karşılamak üzere “Berkeley istatistiği” ifadesini önermektedir. Gerekçeleri için bkz. (Lindley, 1985)

⁴ Bayesyen-olmayan yaklaşımlarda da model formülasyonunda şu veya bu şekilde ön-bilgi kullanıldığı konusunda bkz. A.Zellner, “Models, prior information and Bayesian analysis”, *Journal of Econometrics*, V. 75, 1996, s. 51-68, ayrıca bkz., G.E.P. Box, “Sampling and Bayes’ inference in

daha dikkatli kullanılmalıdır. Bunun yolu da Bayesyen yaklaşımdır. Lindley ise Bayesyen olasılıkların subjektifliğinin analizi yapan kişiye keyfi davranma hakkı verildiği anlamına gelmediğini, örneklem (gözlem) verilerinin ve tutarlılık ilkesinin bu anlamda analisti kısıtladığını belirtmektedir. Ayrıca, de Finetti'ye atfen, uyması gereken kurallar yardımıyla test edilebileceği için, olasılığa en objektif bakış açısının subjektif olasılıklar olduğunu söylemektedir.⁵

Model kurmada ön-bilginin kullanılması daha basit, fakat yeterince etkin modellerin kurulmasına imkan verir. Böylece karmaşık ve çok sayıda parametre içeren (bu yüzden de güvenilir olamayan tahminler veren) modellerle uğraşmaktan kaçınılmış olur.

Analizde kullanılan ön-bilgi önceki bir örneklemde elde edilen bir bilgiye dayanabilir. Bu tür bir bilgiyi yansıtan olasılık yoğunluk fonksiyonuna (oyf) *veriye dayalı* (VD) ön oyf denir. Bunun dışında kişisel görüş, teorik değerlendirme vb. kaynaklardan elde edilen bilgiyi yansıtan oyf'ye ise *veriye dayalı olmayan* (VDO) ön oyf denir.⁶ Bir analizde hem veriye dayalı hem de veriye dayalı olmayan ön oyf'ler kullanılabilir. Örneğin, kişisel görüşün örnek verileri karşısında ne yönde değişime uğrayacağını araştırmak için VDO ön oyf kullanılacaktır. Farklı VDO ön oyf'lerle aynı örneklem verisinin birleştirilmesi farklı son oyf'lere götürebileceği gibi aynı VDO ön oyf ile farklı örneklem verilerinin birleştirilmesi de farklı son oyf'lerle sonuçlanabilir.⁷

Bayesyen analizde araştırmacının parametrelerle ilgili sahip olduğu ön-bilgi, bu bilginin yapısına uygun olarak seçilen bir oyf ile ifade edilmekte ve bu ön-bilgi tüm analiz boyunca çok önemli bir rol oynamaktadır. Ne tür bir oyf'nin eldeki bilgiyi daha iyi ifade edeceğine parametrenin davranışına, yani dağılımına bakılarak karar

scientific modelling and robustness", *J. R. Statist. Soc.*, (A), 143, 1980, s. 383-430. Box, model kurulurken başvuru varsayımların ve dolayısıyla modelin kendisinin de bir tür ön-bilgi olduğunu, ön-bilgiyi kullanmanın Bayesyen yaklaşıma özgü olduğu inancının ise, düz bir varsayımın bir ön-bilgi sayılamayacağı fikrinden kaynaklandığını belirtmektedir.

⁵ Lindley, a.g.m., 1985, s. 4

⁶ A. Zellner, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley, New York, 1971, s. 18

⁷ Tahminde VDO ön oyf'nin kullanıldığı bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu analizi için bkz. A. Zellner ve J.F.Richard, "Use of prior information in the analysis and estimation of Cobb-Douglas production function models", *International Economic Review*, V. 14, 1, 1973, s. 107-119

verilir. Örneğin, bir oranı belirten bir parametre için normal bir oyf kullanmak uygun değildir. Bu tür bir parametre $[0,1]$ aralığında değerler alabileceğinden normal bir dağılım değerleri bu aralığın dışına taşır. Bu durumda kullanılabilecek uygun oyf, bir beta oyf olabilir.⁸

Sonuç olarak klasik çıkarsama (örnekleme teorisi) yaklaşımı ile Bayesyen çıkarsama yaklaşımı arasındaki temel farklar şöyle sıralanabilir,

- 1- Örnekleme teorisi yaklaşımında hesaplanan olasılıklar sabit ancak bilinmeyen parametre değerlerine ilişkin farklı istatistik değerlerinin frekanslarıyla bağlantılıdır. Ancak bu olasılıklar gerçekleşen verilere dayanmamakta, eldeki verilerden hesaplanmakta olduğundan dolayı eleştiriye uğramaktadır. Ayrıca parametrelere ilişkin herhangi bir ön-dağılım kullanılmamaktadır.*
- 2- Örnekleme teorisi yaklaşımında, ancak, parametre değerlerine ilişkin bilgi sunan verilerin tüm özelliklerinin uygun bir *yeterli* istatistikler* kümesi ile açıklanabilir olduğu durumda, sonlu örneklerde verilerin parametre değerleri hakkında söylediklerinin tümünün bilindiği iddia edilebilir.
- 3- Parametrelere ilişkin çıkarımda bulunurken, genellikle, problemin tam olarak ifade edilebilmesi için başağrsı parametrelerin de hesaba katılması gerekmektedir. Eğer uygun yeterli istatistikler bulunmuyorsa örnekleme teorisi yaklaşımı ile bunu yapmak zordur.
- 4- Örnekleme teorisi yaklaşımında parametre uzayının tanımlanmasında söz konusu olabilen kısıtlamaları hesaba katmak zordur.⁹

Bayesyen analizde ise çıkarımlar farklı parametre değerleriyle ilişkili olasılıklara dayanmaktadır. Bu olasılıklar hesaplanırken ön dağılımlara ilişkin varsayımlarda bulunulması gerekmektedir. Analiz yeterli istatistiklerin varlığını gerektirmediği gibi parametre kısıtlamalarını hesaba katarken de zorlukla

⁸ Zellner, a.g.e., 1971, s. 18

* Örnekleme teorisi yaklaşımında da bir şekilde ön-bilgiye yer verildiği iddiası için bkz. 4 nolu dipnot.

* Bir istatistik gözlemlerin sunduğu tüm bilgiyi kullanıyorsa *yeterlidir*.

⁹ Genel regresyon sorunlarının bayesyen bir izahı konusunda bkz. M. Goldstein, "Bayesian analysis of regression problems", *Biometrika*, 63, 1, 1976, s. 52-58

karşılaşılmamaktadır.¹⁰ Ayrıca, Bayes Teoremi'nin kullanılmasıyla sadece parametrelere ait bir nokta tahmini değil, parametrelerin tümüyle son oyf'si de elde edilmektedir. Gerekğinde nokta tahminleri bu oyf'den çıkarılabilmektedir.¹¹

TARİHSEL ARKAPLÂN

1763'te Thomas Bayes'in "An Essay Towards Solving a problem in Doctrin of Chances" başlıklı makalesinin yayınlanmasından bu yana, Bayes Teoremi'nin istatistiksel çıkarsama için ciddi bir temel teşkil edip etmeyeceği konusunda lehte ve aleyhte birçok görüş öne sürülmüştür. Ancak son 40-50 yıl içinde, özellikle 1990'dan sonra, Bayesyen yaklaşım gitgide artan bir kabul görmüş ve yerleşik bir disiplin haline gelmiştir.¹² Bu durumun ortaya çıkışında, alternatif yaklaşımların eksikliklerinin zamanla anlaşılmasının yanı sıra, (bazıları doğrudan bunu amaçlamasalar da) aşağıda adları anılan bilim adamlarının Bayesyen yaklaşımın barındırdığı bir takım teorik ve pratik zorlukları gidermeleri, alternatif çıkarsama teorileri hata terimlerinin normallığı ve bağımsızlığı gibi oldukça özel varsayımlar altında iyi sonuçlar verirken Bayesyen yöntemlerin daha esnek olmaları ve araçtan çok amaca vurgu yapmaları ve son olarak hesaplama teknolojisindeki olağanüstü gelişmeler sonucunda Bayesyen yöntemlerin alternatifleri karşısındaki dezavantajını oluşturan hesaplama zorluğunun sorun olmaktan çıkması etkili olmuştur.¹³

1940'lara gelindiğinde, ekonometrik çalışmalar daha ziyade eşanlı denklem modelleri biçimindeki yapısal modellerin katsayılarını tahmin etmek için uygun yöntemler geliştirme konusunda yoğunlaşmış durumdaydı. Bu yıllarda olasılık teorisinin tam bir kabul görmesiyle birlikte tahmin, çıkarsama ve politika belirleme konusunda Bayes teoremi eksenli analizler üzerine de kafa yorulmaya başlanmıştır.

¹⁰ G.E.P. Box ve G.C. Tiao, **Bayesian Inference in Statistical Analysis**, New York, Wiley, 1992, s. 72

¹¹ A. Zellner, "Statistical analysis of econometrics models", **J. Amer. Stat. Assoc.**, Vol. 74, N: 367, 1979, s. 632.

¹² Bayesyen aktivitenin gelişim süreci ve süreç üzerinde etkili olan konular için bkz. J. O. Berger, "Bayesian analysis: A look at today and thoughts of tomorrow", **J. Amer. Stat. Assoc.**, Vol. 95, N:452, 2000, s. 1269-1277

¹³ Box ve Tiao, a.e., s.1

İktisatçılar açısından Bayesyen yaklaşımın asıl cazip yönü, karar alıcıların belirsizlik altındaki davranışları ve deneysel bulgularla a priori kanaatlerin birleştirilmesi konusundaki öğrenme süreçleri bakımından sağladığı faydaydı. Bayes teoremi gerçekten de bu amaçlar için uygun bir araç olarak görünmekteydi.

Klasik yöntemde mutlak belirlilik ve tahmin edilen model katsayılarının tahmin veya politika benzetişim aşamasında değişmezliği varsayımında bulunulmaktaydı. Bu da açıktır ki çok iddialı (zorlayıcı) bir varsayımdır.¹⁴

Bayesyen çıkarsama yaklaşımının ekonometri açısından sağlayacağı imkanlar 1950'lerin başında J. Marschak tarafından ortaya konmuştur. Ancak konu ile ilgili izleyen çalışmaların ortaya çıkışı yaklaşık on yıl sonra 1960'ların başında olmuştur.¹⁵ 1960'ların başından bu yana ekonometriciler ve istatistikçilerin ciddi biçimde birbirlerini etkilemeleriyle Bayesyen ekonometri hızlı bir gelişim göstermiştir. 1763'de Thomas Bayes'in denemesinin yayınlanmasından sonra aralarında Laplace, Edgeworth, Jeffreys, de Finetti, Box, Savage, Lindley, Raiffa, Jaynes, Schlaifer, Pratt, Good, Geisser, De Groot, Tiao ve daha birçoklarının da bulunduğu bilim adamları Bayesyen istatistiğin gelişimine önemli katkıda bulunmuşlardır. Modern Bayesyen ekonometri ise 1960'ların başlarında J. Dréze, T. Rothenberg, W. Fisher, A. Ando, G. Kaufman ve A. Zellner'in çalışmalarıyla doğmuştur.¹⁶ Sonraki yıllarda çalışmalar gittikçe artarak ve uygulama alanları çeşitlenerek devam etmiştir.

Bayesyen çıkarsama yaklaşımıyla ilgili olarak ülkemizde risk altında karar alma problemleri dışında pek çalışılmamıştır.¹⁷ Buna karşılık yabancı literatür son derece zengindir. 1974'ten 1994'e kadar, Bayesyen analiz konusundaki yayın sayısı

¹⁴ Qin D., "Bayesian econometrics: First twenty years", *Econometric Theory*, Vol.12, 1996, s. 501-503

¹⁵ Qin, a.e., s. 504

¹⁶ Zellner, 1985, s. 253

¹⁷ Az sayıdaki çalışmalar arasında şunlar sayılabilir: Y.B. Gündüz, *Stokastik Katsayılı Modeller için Tahmin Yöntemleri*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, No:89703, Bilkent Üniversitesi, 1999; M. Orhan, *Robust Regresyon, HSKM Tahmin Edicileri ve Bir Amprik Bayes Uygulaması*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, No:89669, Bilkent Üniversitesi, 1999; F. Çakır, *Gibbs Örneklemesi, Hiyerarşik Bayes Analizinde Kullanılması ve Bir Uygulama*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, No:74670, Marmara Üniversitesi, 1998.

doğrusal bir trend izleyerek her on yılda ikiye katlanırken sonraki yıllarda daha da yükselme eğilimine girmiştir.¹⁸

Bayesyen yöntemler birçok uygulamalı çalışmada başarıyla kullanılmıştır. Bunlardan bazıları şöylece sıralanabilir. D.T. Barnum ve J.M. Gleason, çok aşamalı bir Bayesyen analizi uyğşturucu hap testlerine uygulamıştır.¹⁹ J.H. Dorfman ve W.D. Lastrapes, tarımsal ürünlerin fiyatlarının para-arzı şokları karşısındaki tepkilerini Bayesyen bir analize tabi tutmuşlardır.²⁰ L.R. James ve M.W. Knuiman, kentsel su kullanımı çalışmasına Bayesyen metodolojiyi uygulamışlardır.²¹ S.G. Coles ve J.A. Tawn²² ile D. Walshaw²³ meteorolojik modelleme çalışmasında, P. Congdon ve N. Best sağlık hizmetlerinin analizinde²⁴, D.J. Spiegelhalter ise sağlık verilerinin görüntülenmesinde Bayesyen yöntemi kullanmışlardır.²⁵ N.G. Polson ve B.V. Tew²⁶ ile O. Aguilar ve M. West²⁷ ise portföy seçimi konusunda Bayesyen bir yaklaşımı ele almışlardır.

Bayesyen çıkarsama ilkesinin zaman serileri analizi ve öngörü tekniklerine uygulanması P.J. Harrison ve C.F. Stevens'in 1970'lerin başlarındaki çalışmaları ile başlamış, sonraki yıllarda da yaygınlık ve hız kazanmıştır.²⁸ Harrison ve Stevens'in yaklaşımı, genel durum-uzayı modelleriyle yakından ilişkili olan dinamik lineer

¹⁸ Berger, 2000, a.e., s. 1269

¹⁹ D.T. Barnum ve J.M. Gleason, "The credibility of drug tests: A multi-stage Bayesian analysis", **Industrial and Labor Relations Review**, V.47, 4, 1994, s. 610-622

²⁰ J.H. Dorfman ve W.D. Lastrapes, "The dynamic responses of crop and livestock prices to money-supply shocks: A Bayesian analysis using long-run identifying restrictions", **Amer. J. Agricultural Economics**, Vol. 78, 3, 1996, s. 530-542

²¹ L.R. James ve M.W. Knuiman, "An application of Bayes methodology to the analysis of diary records from a water use study", **J. Amer. Statist. Soc.**, Vol. 82, N: 399, 1987, s. 705-711

²² S.G. Coles ve J.A. Tawn, "A Bayesian analysis of extreme rainfall data", **Applied Statistics**, Vol. 45, 4, 1996, s. 463-478

²³ D. Walshaw, "Modelling extreme wind speeds in regions prone to hurricanes", **Applied Statistics**, Vol. 49, 1, 2000, s. 51-62

²⁴ P. Congdon ve N. Best, "Small area variation in hospital admission rates: Bayesian adjustment for primary care and hospital factors", **Applied Statistics**, Vol. 49, 2, 2000, s. 207-226

²⁵ D.J. Spiegelhalter, "Bayesian graphical modelling: A case study in monitoring health outcomes", **Applied Statistics**, Vol. 47, 1, 1998, s. 115-133

²⁶ N.G. Polson ve B.V. Tew, "Bayesian portfolio selection: An empirical analysis of the S&P 500 Index 1970-1996", **J. Amer Statist. Assoc.**, V. 18, 2, 2000, s. 164-173

²⁷ O. Aguilar ve M. West, "Bayesian dynamic factor models and portfolio allocation", **J. Amer Statist. Assoc.**, Vol. 18, N: 3, 2000, s. 338-357

²⁸ P.J. Harrison ve C.F. Stevens, "Bayesian forecasting", **J. Roy. Statist. Soc. (B)**, 38, 1976, s. 205-247

modellere dayanmaktadır. Yaklaşım daha sonraları doğrusal-dışı ve normal-dışı zaman serilerine de uygulanmıştır.²⁹ Günümüzde konu ile ilgili geniş bir literatür oluşmuştur.³⁰



²⁹ M. West, P.J. Harrison ve H.S. Migon, "Dynamic generalized linear models and Bayesian forecasting", **J. Amer. Statist. Soc.**, Vol. 80, N.389, 1985, s. 73-83

³⁰ Önemli çalışmalar arasında şunlar sayılabilir:

B.M. Hill, "Bayesian forecasting of economic time series", **Econometric Theory**, V.10, 1994, s. 483-513

M. West ve P.J. Harrison, "Monitoring and adaptation in Bayesian forecasting models", **J. Amer. Statist. Soc.**, Vol. 81, N.395, 1986, s. 741-750

P.J. Harrison ve M. West, "Practical Bayesian Forecasting", **The Statistician**, 36, 1987, s. 115-125

G. Koop, J. Osiewalski ve M.F.J. Steel, "Bayesian long-run prediction in time series models", **J. Econometrics**, Vol. 69, 1995, s. 61-80

B. Nandram ve J.D. Petrucci, "A Bayesian analysis of autoregressive time series panel data", **J. Business and Economic Statistics**, Vol.15, N.13, 1997, s. 328-334

J. Wang ve E. Zivot, "A Bayesian time series model of multiple structural changes in level, trend and variance", **J. Business and Economic Statistics**, Vol.18, N: 3, 2000, s. 374-386

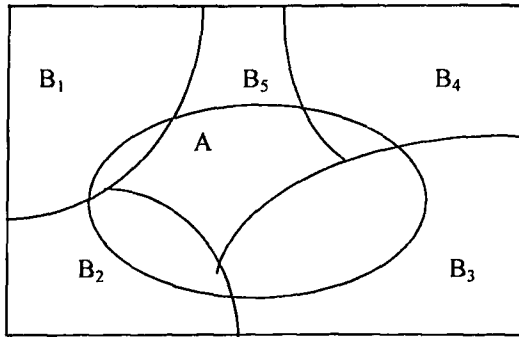
BÖLÜM 1. BAYESYEN ÇIKARSAMA YAKLAŞIMI

1.1. Süreksiz ve Sürekli Değişkenler İçin Bayes Kuralı

$P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ olmak üzere, B olayı veri iken A olayının koşullu olasılığı $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ 'dir. Buna göre $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$ olur. Benzer şekilde A olayı veri iken B'nin olasılığı $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ 'dir. $P(B|A)$ 'da $P(A \cap B)$ yerine $P(B) P(A|B)$ yazılabilir. Bu durumda $P(B|A) = [P(B) P(A|B)]/P(A)$ yazılabilir. A ve B olaylarının olasılıkları arasındaki bu ilişki "Bayes Teoremi" olarak bilinmektedir.

Bayes teoremi, A olayı veri iken B'nin olasılığını bulmaya yaradığı gibi, ters yönde, B olayı veri iken A'nın olasılığını bulmaya da yarar. Burada veri olan durum "doğal durum" olarak adlandırılmaktadır.

B olayı $B_1, B_2, \dots, B_n$ gibi n tane ayrık olayın bir kümesi ise $P(B_i) > 0$, $P(A) > 0$ ve A, B'de bir olay olmak üzere $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A)$ yazılabilir. $n=5$ için bu durum Venn diyagramı ile aşağıda gösterilmiştir.



$(B_i \cap A)$ olayları ayrık olaylar olduklarından $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cap A)$ 'dır. Yukarıdaki koşullu olasılık ifadesine göre $P(B_i \cap A) = P(B_i) P(A|B_i)$ 'dir. Buna göre $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i)$ yazılabilir. Bu durumda A olayı veri iken B_i olayının gerçekleşmesi olasılığı Bayes teoremine göre,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

olur. Burada, $P(B_i)$ olasılıkları ön olasılıklar, $P(B_i|A)$ koşullu olasılığı ise son olasılık olarak adlandırılmaktadır. Bayesyen çıkarsamada $P(B|A)$ ifadesindeki B, analize konu olan parametrenin belirli bir değerini temsil etmektedir.

İstatistiksel çıkarsamada *doğal durum* anakitleye, olasılığı hesaplanan olay ise örnek gözlemlerine karşılık gelmektedir. Bu durumda Bayes teoremi, örnek gözlemlerine dayanarak anakitleye olasılık atamak amacıyla kullanılmaktadır. Bundan dolayı Bayesyen olasılıklar *ters olasılıklar* ve Bayes teoremi de *Bayes kuralı* olarak tanımlanmaktadır.³¹

Her hangi bir çıkarsama problemi içi genel olarak, sürekli ve süreksiz değişkenler için Bayes kuralı

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta)p(y|\theta)}{p(y)}$$

olarak yazılabilir. Sürekli değişken durumunda ön ve son olasılıklar olasılık yoğunluk fonksiyonları biçiminde temsil edilirler. Burada, $p(y|\theta)$ fonksiyonu, θ ilgilenilen parametrelerin bir vektörü ve y de örnek gözlemlerinin bir vektörü olmak üzere, θ parametre vektörü veri iken y 'ye ait koşullu dağılımdır ve θ hakkındaki örneklemden sağlanan tüm bilgileri kapsamaktadır. $p(y)$, θ 'nın değeri ne olursa olsun, eldeki örneklemi gözlemin marjinal olasılığıdır. Buna göre $p(y)$, θ ile ilişkili olmadığından θ 'nın aldığı değerlerden etkilenmez, eşitlikte sadece bir normalleştirme

³¹ J. Kmenta, *Elements of Econometrics*, Macmillan, New York, 1990, s. 51

sabiti olarak yer almaktadır ve $p(\theta|y)$ olasılığını 1'e tamamlama görevi görmektedir.³² $p(y)$ daha açık olarak sürekli ve süreksiz değişken durumu için

$$p(y) = E p(y|\theta) = \begin{cases} \int p(y|\theta)p(\theta)d\theta \\ \sum p(y|\theta)p(\theta) \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. y gözlem seti veri iken, $p(y|\theta)$ y 'nin değil ama θ 'nın fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu durumda $p(y|\theta)$, y veri iken θ 'nın olabilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır ve $l(\theta|y)$ şeklinde yazılır. Buna göre normalleştirme sabiti ihmal edilir, $p(y|\theta)$ ifadesi $l(\theta|y)$ şeklinde yazılırsa şu genel ifade yazılabilir,

$$p(\theta|y) \propto p(\theta) \times l(\theta|y)$$

Burada $\propto$ işareti “orantılıdır” anlamına gelmektedir. $p(\theta)$ ön bilgiyi, $l(\theta|y)$ örneklem bilgisini, $p(\theta|y)$ ise son bilgiyi gösterdiğine göre aynı bağıntı sözcüklerle şöyle ifade edilebilir,

$$(\text{son dağılım}) \propto (\text{ön dağılım}) \times (\text{örneklem bilgisi})$$

veya

$$(\text{son oyf}) \propto (\text{ön oyf}) \times (\text{olabilirlik f.})$$

Buna göre son dağılımı elde etmek için ön dağılım ile olabilirlik fonksiyonunun (örneklem bilgisinin) birleştirilmesi gerekmektedir. Böylece θ hakkındaki örneklem öncesinde mevcut olan ön bilgi, örneklemden elde edilen ek bilgi ışığında revize edilerek son bilgiye ulaşılmaktadır. Bu son bilgi, herhangi bir karar alma probleminde veya nokta, aralık tahmini ya da hipotez testi sürecinde kullanılabilir.³³ Olabilirlik fonksiyonu Bayes formülünde önemli bir rol üstlenmektedir. y örneklem verisi θ hakkındaki ön-bilgiyi bu fonksiyon yoluyla dönüştürmektedir. Bu nedenle olabilirlik fonksiyonunun θ hakkında verilerden gelen bilgiyi temsil ettiği düşünülebilir.³⁴

³² Kmenta, a.e., s. 194

³³ G.G. Judge, R.C. Hill, W.E. Griffiths, H. Lütkepohl, T.C. Lee, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley, New York, (1988), s. 119

³⁴ Box ve Tiao, a.e., s. 10

Yukarıdaki ifade ön-oyf'nin, ön-bilgi ve örnek bilgisi kullanılarak nasıl son-oyf'ye dönüştürüldüğünü göstermektedir. θ parametre vektörü için böyle bir oyf kurgulamak ile rassal katsayılı regresyon modelleri ve değişkenleri yapısal hata içeren modeller gibi rassal parametrelili modellerin Bayesyen-olmayan analizinde parametreler için bir oyf kurgulanması yakından ilişkilidir. Parametre vektörüne ilişkin olarak kullanılan ön-oyf'nin uygun olup olmadığı çeşitli şekillerde (örneğin, son-kanıt oranı ile- *posterior odds ratio*) kontrol edilebilir.³⁵

Ana dağılım biliniyorsa olabilirlik fonksiyonunu oluşturmak zorluk çıkarmaz. Ön dağılım bir formül şeklinde belirlenmişse ve olabilirlik fonksiyonu ile birleştirildiğinde aynı türden bir dağılım ortaya çıkıyorsa buna “bileşik ön dağılım” adı verilir. İşlem yapmayı kolaylaştırdığından bu tür dağılımlar uygulamada daha çok tercih edilmektedir.³⁶

Ön-bilgi ile örneklem bilgisini birleştirme süreci uyarlanabilir ve güncelleştirilebilir bir süreçtir. Elde edilen her yeni bilgi önceki mevcut bilgiye Bayes kuralı kullanılarak eklenebilir. Başlangıçta ön oyf'si $p(\theta)$ olan bir θ parametre vektörü ve oyf'si $p(y_1|\theta)$ olan bir y_1 veri kümesi bulunduğunu düşünelim. y_1 veri iken θ 'nın son oyf'si,

$$p(\theta|y_1) \propto p(\theta) p(y_1|\theta)$$

şeklindeydir. y_1 veri kümesinden bağımsız bir y_2 veri kümesi daha elde edildiğinde bu yeni bilgiye göre son oyf revize edilebilir. Bu durumda $p(\theta|y_1)$ bir ön oyf haline gelmektedir. y_2 'nin oyf'sinin $p(y_2|\theta)$ olduğu düşünülürse, yeni son oyf,

$$p(\theta|y_1, y_2) \propto p(\theta|y_1) p(y_2|\theta)$$

$$\propto p(\theta) p(y_1|\theta) p(y_2|\theta)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $p(\theta)$ ön oyf ile her bir veri kümesinin olabilirlik fonksiyonu tek tek çarpılabileceği gibi, bunun yerine veri kümelerinin birleşiminin olabilirlik fonksiyonu ile de çarpılabilir. Her eklenen yeni veri kümesi için süreç

³⁵ Zellner, 1985, s. 261

³⁶ Kmenta, a.e., s. 194

tekrar eder. Bu nedenle Bayes Teoremi, dinamik öğrenme süreci için güçlü bir yordam sunmakta ve θ ile temsil edilen *doğal durum*ün yeni bilgiler elde edildikçe sürekli olarak nasıl güncellenebileceğini göstermektedir.

Bu şekildeki bir toplama (integration) otokorelasyon katsayıları, bozucu terim varyans-kovaryansları v.b. gibi, Bayesyen-olmayan yaklaşımda önemli zorluklar çıkaran başağrısı (nuisance) parametrelerden kurtulmak için uygun bir yol sunmaktadır. Sadece olabilirlik fonksiyonuna dayanan yöntemlerde bu gibi parametreleri elimine etmek için genel bir yol yoktur.³⁷

Parametrelere ilişkin nokta tahminleri $L(\theta, \hat{\theta})$ biçiminde bir kayıp fonksiyonu dolayısıyla yapılmaktadır. Optimum tahminleri elde etmek için kayıp fonksiyonunun son-beklentisi $\hat{\theta}$ 'ya göre minimize edilmektedir. Bayesyen tahminlerin küçük ve büyük örneklerde çok iyi örnekleme özelliklerine sahip oldukları bulgulanmıştır.³⁸

Kestirim konusunda da Bayesyen yaklaşım iyi sonuçlar vermektedir. Kestirimler parametre vektörüne ait son oyf veri iken, $L(y_f, \hat{y}_f)$ biçimindeki kayıp fonksiyonunun $\hat{y}_f$ 'ye göre minimize edilmesiyle elde edilir.

1.2. Anakitle Varyansı Biliniyorken Son-dağılımın Elde Edilmesi

İstatistiksel araştırmalarda ele alınan anakitlenin varyansı genellikle bilinmeyen bir sabit sayıdır ve bu nedenle bir tahmin problemi konusudur. Bir dağılımın ortalaması ile ilgili olarak Bayes kuralı aracılığıyla bir son-oyf geliştirilirken varyansın bilinmemesi işlemler açısından karmaşa yaratmaktadır. Anakitle varyansının bilindiğini varsayarak şimdilik bu karmaşadan kaçınılmaktadır.

³⁷ Lindley, a.e., s. 3

³⁸ Zellner, 1985, s. 262

1.2.1. Bilgi-vermeyen Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi

Bayesyen çıkarsama yaklaşımını klasik çıkarsama yaklaşımından ayıran en büyük fark sahip olunan ön bilginin de hesaba katılabilmesidir. Daha önce de belirtildiği gibi Bayesyen analizde sahip olunan bilgi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) biçiminde ifade edilir. Ancak ön bilginin bulunmadığı veya çok belirsiz olduğu bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonu son oyf üzerinde neredeyse tek başına etkili olduğundan son oyf'nin olabilirlik fonksiyonuna benzemesi gerekmektedir. Bu da ancak ön-oyf'nin bir c sabitine oranlanmasıyla sağlanmaktadır. Buna göre ön dağılım, tanım aralığındaki her bir değeri alma olasılığı eşit olan bir düzgün (dikdörtgen) dağılım biçimindedir. Böyle bir oyf pratik olarak hiç bir bilgi içermemektedir. Daha doğru bir ifadeyle, parametrenin herhangi bir değerine daha yüksek bir olasılık vermek için önsel olarak hiç bir geçerli neden yok demektir. Bundan dolayı bu tür oyf'ler bilgi-vermeyen (noninformative) ön-oyf olarak adlandırılmaktadır. Bu tür bir oyf'yi kullanmayı gerektiren başlıca nedenler şunlardır:

1. Tahmin edilmek istenen parametreye ilişkin gerçekten çok az veya belirsiz bilgiye sahip olunabilir. Yani bir bilgi eksikliği sözkonusu olabilir.
2. Önemli bir ön bilgiye sahip olmakla birlikte son dağılımın ön bilgi doğrultusunda sapmaya uğramaksızın sadece örnek bilgisini yansıtmayı istenebilir.
3. Bazen ön bilgiyi uygun bir şekilde formüle etmek tam mümkün olmayabilir, ancak yine de ön bilginin kullanılması isteniyorsa bunun en kolay yolu bilgi-vermeyen bir ön oyf kullanmaktır.³⁹

Bilgi-vermeyen bir ön oyf kullanılması durumunda bir anlamda olmayan (veya çok belirsiz) bir bilgi kullanıldığından son dağılım neredeyse tümüyle örneklem bilgisine (olabilirlik fonksiyonuna) dayalı olacaktır. Bundan dolayı bilgi-vermeyen bir ön oyf kullanılması halinde Bayesyen yaklaşım ile klasik (örnekleme teorisi) yaklaşımı hemen hemen aynı sonucu vermektedir. Buna göre son dağılım olabilirlik fonksiyonuna göre belirleneceğinden kullanılacak ön dağılımın biçimi bu

³⁹ Judge v.d., a.e., s. 127

etkileşimi bozmayacak biçimde olmalıdır. Bu durumda (söz gelimi) anakitle ortalaması için en uygun bilgi-vermeyen ön oyf “ $p(\mu) \propto c$ ” biçiminde olacaktır* . Ancak bu durumda,

$$p(\mu|y) \propto p(\mu) l(\mu|y)$$

$$\propto c l(\mu|y)$$

$$\propto l(\mu|y)$$

olmaktadır. Bu tür bir bilgi-vermeyen ön oyf tekdüze (uniform) bir yoğunluk fonksiyonudur. Eğer varyans gibi negatif olmayan bir parametre söz konusuysa bu tekdüze dağılım

$$p(\log \sigma) \propto c \quad \text{veya} \quad p(\sigma) \propto 1/\sigma$$

biçiminde de olabilir. Bu tür bir fonksiyonun $(-\infty, \infty)$ veya $(0, \infty)$ aralığındaki toplam değeri alışlageldiği gibi “toplam olasılık =1” kuralına uymadığından bu dağılımlar *uygun olmayan (improper) dağılımlar* olarak da adlandırılır. Olabilirlik fonksiyonu ile bilgi-vermeyen bir ön oyf'nin birleştirilmesinden elde edilen son oyf ise *bilgi-veren (informative) ve uygun (proper) bir oyf* dir.

Buna göre, μ için aşağıdaki tekdüze ön-oyf ile olabilirlik fonksiyonu birleştirilerek son-oyf'ye ulaşılabilir.

$$p(\mu|\sigma) \propto c \quad \text{ve} \quad l(\mu|\sigma, y) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right]$$

c , sabit bir sayı

$\hat{\mu}$, anakitle ortalamasının dağılımının ortalaması

$$p(\mu|\sigma, y) \propto c \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right]$$

$$p(\mu|\sigma, y) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right]$$

İhmal edilen normalleştirme sabiti de yerine yazılırsa,

* c , bir sabit sayı

$$p(\mu|\sigma, y) \propto \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\sigma} \right] \exp \left[-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \right]$$

sonucuna ulaşılır. Ön-oyf'de tekdüze bir fonksiyon kullanıldığından son-oyf olabilirlik fonksiyonu ile aynı biçimdedir.⁴⁰

Parametre uzayının tümü için tekdüze bir ön dağılım kullanmak yerine sadece olabilirlik fonksiyonunun etkili değerlere sahip olduğu aralıkta tekdüze bir ön dağılım kullanmak da önerilmektedir.⁴¹ Bu durumda sözkonusu aralıkta olabilirlik fonksiyonu etkili olduğundan son dağılım üzerinde asıl belirleyici etken de olabilirlik fonksiyonu olacaktır. Bu tür *kısmen tekdüze* (locally uniform) bir ön oyf'nin kullanılması olabilirlik fonksiyonu hakkında belirli bir fikre sahip olunduğunu gösterir.⁴²

Bilgi-vermeyen ön oyf'lerin önemi ve seçimi konusunda Zellner (1971), Berger (1985) ve Box ve Tiao (1992)'de detaylı bilgi verilmektedir.

1.2.2. Bilgi-veren Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi

Önceki bölümde tahmin edilmek istenen bir parametre hakkında örnekleme öncesinde hiç bir ön-bilgiye sahip olunmaması durumunda Bayes kuralının nasıl uygulanacağı ele alındı. Bu tür bir ön oyf kullanılması halinde elde edilen sonuç klasik örnekleme teorisi yaklaşımı ile bulunan sonuç ile hemen hemen aynıdır. Ancak Bayesyen yaklaşımın asıl farklılığı parametre hakkında az veya çok bir ön-bilgiye sahip olduğu durumda ortaya çıkmaktadır. Bu tür bir ön-bilgiyi ifade eden oyf'ye *bilgi-veren (informative)* ön oyf denir.

y değişkeni, μ ortalama ve σ^2 varyansla normal dağılan bir rassal değişken olsun. Dağılımın ortalaması olan μ hakkında çıkarımda bulunmak istediğimizi

⁴⁰ Box ve Tiao, a.e., s. 82

⁴¹ Box ve Tiao, a.e., s. 23

⁴² Zellner, 1971, s. 46

düşünelim. Genellikle anakitle varyansları bilinemezse de işlemlerde kolaylık sağlaması bakımından (şimdilik) dağılımın varyansının bilindiğini varsayalım. Buna göre amaç,

$$p(\mu|y, \sigma^2) \propto p(\mu) l(\mu|\sigma^2, y)$$

ilişkisini kullanarak μ 'ye ait son oyf'i elde etmektir. Burada,

$p(\mu|y, \sigma^2)$, örnekleme ve σ^2 bilgisi veri iken μ 'nün son oyf'i

$p(\mu)$, μ 'ye ait ön oyf,

$l(\mu|\sigma^2, y)$ ise bilinmeyen μ 'nün fonksiyonu olan olabilirlik fonksiyonudur.

μ 'ye ait ön oyf $p(\mu)$, μ hakkındaki ön-bilgiyi yansıtmaktadır. Daha önce ifade edildiği gibi bu bilginin çeşitli kaynakları olabilir. μ 'ye ait bu ön dağılımın da bir ortalaması ve varyansı vardır. μ 'ye ilişkin subjektif oyf'nin μ_0 ortalama ve σ_0^2 varyanslı bir normal dağılıma uyduğunu varsayalım. Yani,

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu - \mu_0)^2\right]$$

μ_0 ve σ_0^2 önceden bilinebileceği gibi bu ön oyf mevcut bir başlangıç bilgisi ile birleştirilerek de μ_0 ve σ_0^2 'ye ait değerler elde edilebilir. Örneğin, $p(a < \mu < b) = 0.95$ şeklinde bir başlangıç bilgisi mevcut olsun. Daha önce belirtildiği gibi Bayesyen yaklaşımda anakitle parametresi rassal bir değişken gibi işlem gördüğünden bu tür bir olasılık ifadesi yazılabilir. Buna göre,

$$p(-1.96 < z < 1.96) = p\left(-1.96 < \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0} < 1.96\right) = 0.95$$

$$p(\mu_0 - 1.96\sigma_0 < \mu < \mu_0 + 1.96\sigma_0) = 0.95$$

buradan, $\mu_0 - 1.96\sigma_0 = a$ ve $\mu_0 + 1.96\sigma_0 = b$ denklemleri eşanlı olarak çözülerek μ_0 ve σ_0 tahmin edilebilir. Buna göre $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 'dir.

$l(\mu|\sigma^2, y)$ olabilirlik fonksiyonu ise şu biçimdedir,

$$l(\mu|\sigma^2, y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2\right]$$

σ^2 bilindiğinden $(2\pi\sigma^2)^{-n/2}$ sabittir ve fonksiyon temelde üssel terim ile orantılıdır.

Ayrıca, $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$ terimi biraz daha düzenlenebilir. Örnek ortalaması $\hat{\mu} (= \frac{\sum y_i}{n})$

parantez içine bir defa eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{\mu}) - (\mu - \hat{\mu})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})(\mu - \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})(\mu - \hat{\mu}) = 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2$$

olur. Buna göre,

$$l(\mu|\sigma^2, y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 \right]\right\}$$

$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2$ ifadesi μ 'yü içermediğinden üssel terimin dışına atılabilir. Bu durumda,

$$l(\mu|\sigma^2, y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} n(\mu - \hat{\mu})^2\right]$$

yazılabilir. Bayes kuralı doğrultusunda $p(\mu)$ ve $p(y|\mu, \sigma^2)$ oyf'leri birleştirilirse μ için aşağıdaki son oyf elde edilir,

$$\begin{aligned} p(\mu|y, \sigma_0^2) &\propto p(\mu)l(\mu|\sigma^2, y) \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} (\mu - \mu_0)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} n(\mu - \hat{\mu})^2\right] \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_0^2} (\mu - \mu_0)^2 + \frac{n}{\sigma^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \right]\right\} \end{aligned}$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^2 - \tilde{\mu}_0 \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \right) + \frac{n\hat{\mu}^2}{\sigma_0^2} + \frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2} \right] \right\}$$

Son ifade elde edilirken,

$$A(z-a)^2 + B(z-b)^2 = (A+B)(z-c)^2 + \frac{A \cdot B}{A+B} (a-b)^2$$

$$c = \frac{1}{A+B} (Aa+Bb)$$

eşitliğinden yararlanılmıştır.⁴³

Parantez içindeki son üç terim μ 'ye bağlı olmadığından son oyf sadece ilk terim ile orantılıdır. Yani,

$$p(\mu|y, \sigma^2) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_0^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^2 \right]$$

$$p(\mu|y, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_0}} \exp \left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_0^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^2 \right]$$

Son oyf'yi belirleyen üssel ifade olmakla beraber oyf altındaki alanı (yani toplam olasılığı) 1'e tamamlamak için $(2\pi\tilde{\sigma}_0)^{-1/2}$ sabiti de ifadeye eklenmektedir.⁴⁴

Burada,

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{\frac{n\hat{\mu}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} = \frac{h_s \hat{\mu} + h_0 \mu_0}{h_s + h_0} \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} = \frac{1}{h_s + h_0} = \frac{1}{h}$$

$$h_s = \frac{n}{\sigma^2} \quad h_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \quad h = h_s + h_0$$

⁴³ Box ve Tiao, a.e., s. 74

⁴⁴ I. Guttman, L.S.S. Wilks, J.S. Hunter, **Introductory Engineering Statistics**, 2nd. ed., John Wiley, New York, 1971, s. 195,196

h_s ve h_0 'a sırasıyla, örneklem ve ön-bilginin kesinlik (precision) parametreleri denilmektedir ve ilgili bilgi kaynağının sağladığı bilginin kesinliğinin bir ölçüsüdürler.⁴⁵

Görüldüğü gibi son ortalama $\tilde{\mu}_0$, ön ortalama ve örneklem ortalamasının ilgili kesinlik parametreleriyle ağırlıklandırılmış bir ortalamasıdır. Örneklem hacmi büyüdükçe ve varyansı küçüldükçe örneklem ortalamasının son ortalamayı belirlemedeki ağırlığı daha da artacaktır.

Diğer taraftan, son-bilginin kesinliği de her iki kesinlik parametresinin toplamının tersi olduğundan örneklem ve ön-bilginin kesinliğinin artması son-bilginin varyansını küçültmektedir. Ayrıca son-dağılımın varyansı her zaman örneklem ve ön-dağılımın varyansından küçük çıkacaktır.⁴⁶

1.3. Anakitle Varyansı Bilinmiyorken Son-dağılımın Elde Edilmesi

Uygulamada çoğu zaman anakitlelerin varyanslarının gerçek değeri bilinmez. Bu nedenle, önceki bölümde kullanılan σ^2 'nin bilindiği yolundaki varsayım oldukça zorlayıcı, fakat işlem kolaylığı sağlaması bakımından başvurulmuş bir varsayımdır. Bu bölümde bu varsayım gevşetilmektedir. Ancak, birden fazla değişkenle (μ ve σ) ilgilenildiğinden olabilirlik fonksiyonunun matematiksel biçimi de karmaşıklaşmakta ve bir takım yaklaşıklara (normal dağılım gibi) başvurmazdan önce Bayesyen yöntemleri kullanmak zorlaşmaktadır. Bu gibi durumlarda ön dağılım değişkenlerin ortak dağılımlarından oluşmaktadır. Sürecin normal dağıldığı düşünülerek hem ortalamanın hem de standart sapmanın Bayesyen çıkarılma sürecinde son oyf ile nasıl ifade edildiği ele alınacaktır. Burada da, yine kullanılan ön oyf'nin niteliğine, başka bir deyişle sahip olunan ön-bilginin düzeyine göre ikili bir ayrım söz konusudur.*

⁴⁵ Judge v.d., a.e., s. 123

⁴⁶ Guttman v.d., a.e., s. 196 ve Judge v.d., a.e., s. 125

* Ortalama ve varyansın her ikisinin de bilinmediği durumda, her ne kadar ön dağılımın büyük ihtimalle bileşik (conjugate) olmaması nedeniyle bir takım zorluklar çıkıyorsa da, asıl problem gerekli

1.3.1. Bilgi-vermeyen Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi

Anakitle varyansının bilindiği durumda olduğu gibi bilinmediği durumda da, Kesim 1.2.1.'de değinilen nedenlerle, bilgi-vermeyen bir son oyf kullanılarak çıkarsamada bulunulabilir. Burada yine bir anakitlenin ortalama ve varyansı için bilgi-vermeyen bir ön oyf'den hareketle son oyf'nin nasıl elde edilebileceği anlatılacaktır.

μ ve σ 'nın bağımsız oldukları varsayımından hareketle, bunlara ait bilgi-vermeyen ortak ön oyf $p(\mu, \sigma) = p(\mu)p(\sigma)$ şeklinde ifade edilebilir. Burada, $p(\mu)$ ve $p(\sigma)$, ortalama ve varyansa ait marjinal bilgi-vermeyen ön oyf'lerdir. Daha önce de belirtildiği gibi parametrelere ait ön oyf'ler olarak,

$$p(\mu) \propto \text{sabit} \quad \text{ve} \quad p(\sigma) \propto 1/\sigma \quad \text{veya} \quad p(\ln \sigma) \propto \text{sabit}$$

şeklinde düzgün dağılan oyf'ler kullanmak uygundur.⁴⁷ Buna göre ortak ön oyf

$$\begin{aligned} p(\mu, \sigma) &= p(\mu) p(\sigma) \\ &\propto (\text{sabit}) (1/\sigma) \\ &\propto (1/\sigma) \end{aligned}$$

olur. Bu bilgi-vermeyen ortak ön oyf ile olabilirlik fonksiyonunun Bayes kuralı aracılığıyla birleştirilmesiyle ortak son oyf elde edilir.

Kullanılacak olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$l(\mu, \sigma | y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right]$$

girdilerin belirlenememesidir. Sürecin normal olduğu düşünülse bile ön dağılımın belirlenmesi güç olabilir. Duruma uygun ön dağılımın belirlenmesine yönelik olarak değişik yöntemler önerilmiştir. Bu konuda bkz. R.L. Winkler, *An Introduction to the Bayesian Inference and Decision*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1972, s. 182-192

⁴⁷ Guttman v.d., a.e., s. 203

Daha önce $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2$ olduğu gösterilmişti. $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2$ 'yi

$\bar{v} = (n-1)$ ile çarpıp bölersek,

$$(n-1) \frac{\sum (y_i - \hat{\mu})^2}{(n-1)} = \bar{v} \bar{s}^2$$

bulunur. Buna göre,

$$l(\mu, \sigma | y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\bar{v}\bar{s}^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2]\right\}$$

$$l(\mu, \sigma | y) \propto \frac{1}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\bar{v}\bar{s}^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2]\right\}$$

Varyansın değeri bilinmediğinden üssel ifadenin önünde σ görünmektedir. O halde son oyf şu şekilde hesaplanır,⁴⁸

$$p(\mu, \sigma | y) \propto p(\mu, \sigma) l(\mu, \sigma | y)$$

$$\begin{aligned} &\propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{n(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sigma^n} \exp\left[-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right] \\ &\propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [vs^2 + n(\mu - \mu_0)^2]\right\} \end{aligned}$$

Burada ihmal edilen normalleştirme sabiti ise $\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{-1} \left(\frac{vs^2}{2}\right)^{v/2}$ şeklindedir.

$p(\mu, \sigma | y)$, μ 'ye ait koşullu son oyf ile σ 'ya ait marjinal son oyf'nin birleşimi olarak da ifade edilebilir. Yani,

$$p(\mu, \sigma | y) \propto p(\mu | \sigma, y) p(\sigma | y)$$

$$p(\mu | \sigma, y) \propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{n(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{ve} \quad p(\sigma | y) \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left[-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right]$$

σ 'ya ait marjinal oyf ise bir gama dağılımına sahiptir. Genel olarak gama dağılımına sahip bir X rassal değişkeninin oyf'sinden hareketle bazı değişken dönüştürmeleri

⁴⁸ Box ve Tiao, a.e., s. 93

yapılarak σ 'ya ait marjinal oyf elde edilebilir. Gama dağılımının genel ifadesi şu biçimdedir,⁴⁹

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad , \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{ve} \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

α bir ölçek parametresidir. Gama dağılımı sağa çarpık bir dağılımdır. Ancak α 'nın değeri arttıkça (β veri iken) dağılım giderek normal dağılıma yaklaşır.

$z = x / \beta$ dönüştürmesi ile gama dağılımı standartlaştırılabilir. Buna göre,

$$p(z|\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-z} \quad , \quad 0 < z < \infty$$

Diğer taraftan $\alpha = \nu/2$ ve $\beta = 2$ alınırsa gama dağılımı ν serbestlik dereceli bir χ^2 dağılımına dönüşür,⁵⁰

$$p(x|\nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

χ^2 oyf, gama oyf'nin özel bir durumu olduğundan $z = x/\beta = x/2$ ve $\alpha = \nu/2$ alınırsa standart χ^2 oyf elde edilir.

Yukarıdaki gama oyf $y^2 = 1/x$ şeklinde bir değişken dönüşümü ile yeniden yazılırsa bir ters-gama oyf elde edilir.

$$p(y|\alpha,\beta) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha y^{2\alpha+1}} \exp\left(-\frac{1}{\beta y^2}\right) \quad , \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{ve} \quad 0 < y < \infty$$

Ters-gama oyf genellikle standart sapmaya ait ön ve son oyf'leri temsil etmek amacıyla kullanılmaktadır. Buna göre $y = \sigma$, $\alpha = \nu/2$ ve $\beta = 2/\nu s^2$ alınırsa,

⁴⁹ I. Miller ve M. Miller, J.E. Freund'dan Matematiksel İstatistik, Çev: Ü. Şenesen, Literatür Yay., İstanbul, 2002, s. 205

⁵⁰ Miller ve Miller, a.e., s. 208

$$p(\sigma|v,s) = \frac{2}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(\frac{vs^2}{2} \right)^{\frac{v}{2}} \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right), \quad v,s>0 \text{ ve } 0<\sigma<\infty$$

elde edilir.

Burada $\frac{2}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(\frac{vs^2}{2} \right)^{\frac{v}{2}}$ ifadesi normalleştirme sabitidir. σ ile ilgili olmadığından gözardı edilerek şu orantı yazılabilir,

$$p(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right)$$

Görüldüğü gibi bilgi-vermeyen ön oyf durumunda da (μ, σ) 'ya ait son oyf, $N(\mu, \sigma^2/n)$ şeklinde normal dağılımlı bir koşullu oyf ile $(\sigma^2 / v) \chi_v^2$ şeklinde ters-gama dağılımlı bir marjinal oyf'nin birleşmesinden doğan normal-gama dağılımlı bir oyf'dir.

Burada μ 'ye ilişkin koşullu oyf kullanılmıştır. Eğer koşulsuz oyf elde edilmek ve buna dayalı çıkarsamada bulunmak isteniyorsa σ 'nın (sabit sayı gibi düşünülüp) ortak ön oyf'nin dışına çıkarılması gerekir. Buna göre,

$$\begin{aligned} p(\mu|y) &= \int_0^\infty p(\mu, \sigma|y) d\sigma \\ &= \int_0^\infty p(\mu|\sigma, y) p(\sigma|y) d\sigma \\ p(\mu|y) &\propto \exp\left[1 + \frac{n(\mu - \mu_0)^2}{vs^2}\right]^{-\frac{v+1}{2}} \end{aligned}$$

şeklindeki marjinal son oyf'ye ulaşılır.

$$t = \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad \text{ve} \quad B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q) / \Gamma(p+q) \text{ olmak üzere}$$

$$p(t|y) = \frac{1}{B(\frac{v}{2}, \frac{1}{2})\sqrt{v}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

Bu oyf, $v = n-1$ serbestlik derecesi ile bir t-dağılımına sahiptir.⁵¹

1.3.2. Bilgi-veren Bir Ön-dağılımdan Son-dağılımın Elde Edilmesi

Anakitle varyansının bilinmediği durumda hem ortalama hem de varyansa ait bir ortak ön oyf'nin tanımlanması gerekmektedir. Koşullu olasılık kuralına göre μ ve σ 'ya ait ortak ön oyf,

$$p(\mu, \sigma) = p(\mu|\sigma) p(\sigma)$$

biçimindedir. Burada, $p(\mu|\sigma)$ ortalamaya ait ön oyf'yi, $p(\sigma)$ ise varyansa ait ön oyf'yi göstermektedir.

Daha önce de belirtildiği gibi bileşik ön oyf'ler son oyf ile aynı tip olasılık dağılımına sahiptirler ve işlem kolaylığı bakımından tercih edilmektedirler. Buna göre, burada kullanılacak ön oyf için normal-gama dağılımlı bir ön oyf seçilecektir. Bu tür ön oyf'ler normal dağılımlı bir olabilirlik fonksiyonu ile birleştirildiklerinde yine normal-gama dağılımlı bir son oyf vermektedirler. Buna göre, normal dağılımlı $p(\mu|\sigma)$ ile gama (daha doğrusu ters-gama) dağılımlı $p(\sigma)$ oyf'leri bir araya gelerek bir normal-gama dağılımlı ortak ön oyf oluşturmaktadırlar.

$P(\mu|\sigma)$ 'ya göre ortalamanın değerlerinin olasılıkları σ ile koşulludur. Yani, μ hakkındaki ön-bilgi σ 'nın muhtemel değerlerine göre değişir. Sözgelimi, ortalamanın belirli bir olasılıkla içinde yer alacağı düşünülen aralık, daha büyük veya daha küçük bir varyans durumunda genişler veya daralır. σ ile ön-bilgi arasındaki bu bağıntı ön-varyans (σ_0^2) aracılığıyla sağlanır ve $\sigma_0^2 = \sigma^2/t$ şeklindedir. Burada t , σ^2 veri iken σ_0^2 'yi kontrol altında tutan bir parametredir ve μ 'ye ilişkin ön-bilginin nisbeten kesin olması durumunda yüksek, nisbeten bulanık (zayıf) olması durumunda ise düşük bir değer almaktadır.⁵²

⁵¹ Box ve Tiao, a.e., s. 97

⁵² Judge v.d., a.e., s. 140

Buna göre μ , σ 'ya koşullu olarak, μ_0 ortalama ve $\sigma_0^2 = \sigma^2/t$ varyansla bir normal dağılım gösterir. Yani,

$$p(\mu|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{t}}} \exp\left[-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{t}}(\mu - \mu_0)^2\right]$$

$$p(\mu|\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{t}{2\sigma^2}(\mu - \mu_0)^2\right]$$

μ ve σ 'nın her ikisi de bilinmediğinden $1/\sigma$ ifadesi, normalleştirme sabiti $(t/2\pi)^{-1/2}$ ile birlikte orantı sabitine dahil edilememektedir.

$p(\sigma)$ oyf'si daha önce aşağıdaki biçimde elde edilmişti,

$$p(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right)$$

O halde, μ ve σ 'ya ait ön oyf'ler elde edildiğine göre ortak ön oyf şu şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned} p(\mu, \sigma) &= p(\mu|\sigma) p(\sigma) \\ &\propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{t}{2\sigma^2}(\mu - \mu_0)^2\right] \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Burada t , s^2 , v ve μ_0 değerleri eldeki ön-bilgiden çıkarılabilecek parametrelerdir.

Ortak ön oyf bu şekilde elde edildikten sonra bunun Bayes kuralı doğrultusunda olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesiyle son oyf'ye ulaşılır.

$$p(\mu, \sigma|y) \propto p(\mu, \sigma) l(\mu, \sigma|y)$$

$$\propto \frac{1}{\sigma^{v+n+2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[t(\mu - \mu_0)^2 + vs^2 + \bar{v}\bar{s}^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\}$$

Judge v.d. izlenerek aşağıdaki sadeleştirmeler yapıldıktan sonra son oyf'ye ilişkin daha toplu bir ifade elde edilebilir.⁵³

$$t(\mu - \mu_0)^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 = (t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2 - (t+n)\tilde{\mu}_0^2 + t\mu_0^2 + n\hat{\mu}^2$$

⁵³ Judge v.d., a.e., s. 145

Burada, $\tilde{\mu}_0 = \frac{t\mu_0 + n\hat{\mu}}{t+n}$, dir. Ayrıca,

$$vs^2 + \bar{v}\bar{s}^2 = \sum y_i^2 - n\hat{\mu}^2 + \bar{v}\bar{s}^2 = y'y - n\hat{\mu}^2 + \bar{v}\bar{s}^2$$

Elde edilen ifadeler son oyf denkleminde yerine yazılırsa,

$$(t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2 - (t+n)\tilde{\mu}_0^2 + t\mu_a^2 + n\hat{\mu}^2 + y'y + \bar{v}\bar{s}^2 = (t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2 + \bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2$$

Burada, $\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 = \bar{v}\bar{s}^2 + y'y - (t+n)\tilde{\mu}_0^2 + t\mu_0^2$ ve $\bar{\bar{v}} = \bar{v} + n$ 'dir. Son ifade son oyf denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} p(\mu, \sigma|y) &\propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sigma^{\bar{\bar{v}}+1}} \exp\left[-\frac{\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2}{2\sigma^2}\right] \\ &\propto p(\mu|\sigma, y) p(\sigma|y) \end{aligned}$$

Son ifadede son oyf, ortalamaya ait koşullu son oyf ile standart sapmaya ait marjinal son oyf'nin çarpımı ile orantılı olarak ifade edilmiştir. $p(\mu|\sigma, y)$ 'nin $\tilde{\mu}_0$ ortalama ve $\sigma^2/(t+n)$ varyansla normal dağılıma, $p(\sigma|y)$ 'nin ise v ve s^2 parametreli bir ters-gama dağılıma uyduğu görülmektedir.

1.3.3. Marjinal Son OYF'ler

Yukarıda geliştirilen ortak ve koşullu son oyf'lere dayalı olarak yapılacak çıkarsamalar (μ, σ) veya $(\mu|\sigma)$ 'ya göre yapılmış olur. Ancak sadece μ veya σ 'ya ilişkin koşulsuz çıkarsamada bulunmak istenebilir. Bunun için μ ve σ 'ya ait marjinal son oyf'lerin elde edilmesi gerekir.

σ 'ya ait marjinal son oyf, ortak son oyf elde edilirken bulunmuştu zaten. Bu, $\bar{\bar{v}}$ ve $\bar{\bar{s}}^2$ parametreli bir ters-gama dağılımdır. μ 'ye ait marjinal son oyf bulunurken $p(\mu|\sigma, y)$ koşullu son oyf ve $p(\sigma|y)$ marjinal son oyf'den yararlanılır.

$$\begin{aligned} p(\mu|y) &= \int_0^{\infty} p(\mu, \sigma|y) d\sigma \\ &= \int_0^{\infty} p(\mu|\sigma, y) p(\sigma|y) d\sigma \end{aligned}$$

Buna göre $p(\mu|y)$ bulunurken ortak son oyf'nin σ 'ya göre integrali alınmaktadır. Burada, σ 'ya, μ ile ilişkili olmadığı halde denklemde yer alan bir parametre durumunda olduğundan “başağırsı” (nuisance) parametre denilmektedir ve bir sabit gibi işlem görerek integral dışına çıkarılmaktadır. Son eşitliğe göre $p(\mu|y)$, koşullu oyf $p(\mu|\sigma,y)$ 'nin $p(\sigma|y)$ ile ağırlıklandırılmış bir tartılı ortalaması olarak görülebilir.⁵⁴

O halde,

$$p(\mu|y) = \int_0^{\infty} p(\mu, \sigma|y) d\sigma$$

$$\propto \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^{\bar{\bar{v}}+2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2 + \bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2]\right\} d\sigma$$

integrali hesaplanmalıdır. $a = [(t+n)(\mu - \tilde{\mu}_0)^2 + \bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2]$ olmak üzere $x = a/2\sigma^2$ alınarak, bunun σ 'ya göre diferansiyeli alınırsa,

$$dx = -a\sigma^{-3}d\sigma$$

$$d\sigma = -2^{-3/2}a^{1/2}x^{-3/2}dx$$

$$\sigma^{-(\bar{\bar{v}}+2)} = 2^{(\bar{\bar{v}}+2)/2}a^{-(\bar{\bar{v}}+2)/2}x^{(\bar{\bar{v}}+2)/2}$$

bulunur. Bunlar integral ifadesinde yerlerine yerleştirilirse,

$$p(\mu|y) \propto a^{-(\bar{\bar{v}}+2)/2} \int_0^{\infty} x^{(\bar{\bar{v}}+2)/2} e^{-x} a^{1/2} x^{-3/2} dx$$

$$= a^{-(\bar{\bar{v}}+1)/2} \int_0^{\infty} x^{(\bar{\bar{v}}-1)/2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{\bar{\bar{v}}+1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{(\bar{\bar{v}}-1)/2} e^{-x} dx \text{ olduğuna göre,}$$

$$p(\mu|y) = a^{-(\bar{\bar{v}}+1)/2} \Gamma\left(\frac{\bar{\bar{v}}+1}{2}\right)$$

bulunur. $\Gamma\left(\frac{\bar{\bar{v}}+1}{2}\right)$ ifadesi σ ile ilişkili olmadığından orantı sabitine dahil edilir, a yerine de yukarıdaki eşdeğeri yazılırsa,

⁵⁴ Judge v.d., a.e., s. 147

$$p(\mu|y) \propto [(t+n)(\mu-\tilde{\mu}_0)^2 + \bar{v}\bar{s}^2]^{-\frac{\bar{v}+1}{2}}$$

olduğu bulunur.⁵⁵

Bu marjinal oyf'nin $\bar{v}$ serbestlik dereceli tek değişkenli bir Student-t dağılımına uyduğu gösterilebilir.

t-dağılımına uyan bir X değişkeninin oyf'si şöyledir,

$$f(x|\theta, h, v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(1/2)\Gamma(v/2)} \left(\sqrt{\frac{h}{v}} \right) \left[1 + \frac{h}{v} (x - \theta)^2 \right]^{-\frac{v+1}{2}}$$

$$f(t) \propto \left[1 + \frac{h}{v} (x - \theta)^2 \right]^{-\frac{v+1}{2}}$$

Yukarıdaki $p(\mu|y)$ ifadesi şöyle de yazılabilir,⁵⁶

$$p(\mu|y) \propto \left[1 + \frac{(t+n)(\mu-\tilde{\mu}_0)^2}{\bar{v}\bar{s}^2} \right]^{-\frac{v+1}{2}}$$

Burada, $h = (t+n)/\bar{s}^2$ kesinlik parametresidir. Buna göre μ 'ye ait marjinal son oyf $\bar{v}$ serbestlik derecesi ile bir t-dağılımına uymaktadır. Dağılımın ortalaması $\tilde{\mu}_0$, varyansı ise $\bar{v}\bar{s}^2/(t+n)(\bar{v}-2)$ 'dir.

1.4. Bayesyen Regresyon Analizi

Bundan önceki bölümlerde normal dağılıma sahip bir anakitlenin ortalama ve varyansı bağlamında genel olarak Bayesyen çıkarsama ele alınarak sürecin nasıl işlediği ortaya konuldu. Aynı çıkarsama yaklaşımı, temel özellikleri korunarak, regresyon modellerinin analizinde de kullanılabilir.⁵⁷ Burada da yine anakitle varyansının bilindiği ve bilinmediği durumların her biri için bilgi-vermeyen ve bilgi-

⁵⁵ Zellner, 1971, s. 23 ve Judge v.d., a.e., s. 147

⁵⁶ Judge v.d., a.e., s. 148

⁵⁷ Doğrusal regresyon probleminin Bayesyen bir yaklaşımla analizi için bkz. J.A. Hartigan, "Linear Bayesian methods", J. Roy. Statist. Soc., (B), V. 31, 1969, s. 446-454 ve ayrıca M. Goldstein, "Bayesian analysis of regression problems", Biometrika, V. 63, 1, 1976, s. 51-58

veren ön oyf'lere dayalı çıkarsama ayrımı yapılabilir. Analize konu olan regresyon modeli bir veya daha fazla açıklayıcı değişken içerebilir. Açıklayıcı değişken sayısının birden fazla olması sadece işlemlerin daha karmaşıklaşması açısından bir farklılık doğurmaktadır, bunun dışında süreç tamamen aynıdır. Burada konu, k sayıda açıklayıcı değişken içeren genel doğrusal regresyon modeli bağlamında ele alınacaktır. Analiz basit tek-değişkenli regresyon modellerine kolayca uyarlanabilir.

1.4.1. Bilinen Varyans Durumu

1.4.1.1. Bilgi-vermeyen Ön-OYF İle Çıkarsama

Aşağıdaki doğrusal regresyon modelini ele alalım.

$$y = X\beta + e$$

Burada y , $(n \times k)$ boyutlu bağımlı değişken vektörü; X , $(n \times k)$ boyutlu k tane açıklayıcı değişkene ait gözlemlerin matrisi; β , $(k \times 1)$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü ve e ise hata terimidir. Ayrıca $e \sim N(0, \sigma^2 I)$ olduğu ve σ^2 'nin bilindiği varsayılmaktadır.

Bayes kuralını kullanarak β vektörünün elemanlarına ilişkin değerleri elde etmek için β 'ya ait ön oyf ile y 'ye ait olabilirlik fonksiyonunun birleştirilmesi ve böylece bir son oyf elde edilmesi gerekir. Ancak kullanılacak ön ve son oyf'ler, bundan önceki bölümlerdekinden farklı olarak, çok-değişkenli oyf'ler olacaktır.

Bilgi-vermeyen bir ön oyf'nin kullanılması durumunda β parametre uzayındaki her bir eleman için " $p(\beta_i) \propto \text{sabit}$ " şeklindeki bilgi-vermeyen ön oyf kullanılır.

Olabilirlik fonksiyonu ise şöyledir,

$$l(\beta|y) \propto \exp \left[-\frac{(y - Xb)'(y - Xb)}{2\sigma^2} \right]$$

$(y - Xb)'(y - Xb) = (\beta - b)'X'X(\beta - b) + (y - Xb)'(y - Xb)$ yazılır ve eşitliğin sağ yanındaki ikinci kısım β ile ilişkili olmadığından orantı sabitine dahil edilirse,

$$l(\beta|y) \propto \exp\left[-\frac{(\beta - b)'X'X(\beta - b) + (y - Xb)'(y - Xb)}{2\sigma^2}\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{(\beta - b)'X'X(\beta - b)}{2\sigma^2}\right]$$

olur. Burada b , EKK tahmincisidir. Bir sabitle orantılı bilgi-vermeyen bir oyf ile olabilirlik fonksiyonu Bayes kuralı doğrultusunda birleştirildiğinde elde edilecek son oyf'yi olabilirlik fonksiyonu tayin edecektir. Buna göre,

$$p(\beta|y) \propto \exp\left[-\frac{(\beta - b)'X'X(\beta - b)}{2\sigma^2}\right]$$

Elde edilen bu son oyf b ortalama ve $\sigma^2(X'X)^{-1}$ kovaryans matrisine sahip bir çok-değişkenli normal oyf'dir. Yani,

$$(\beta|y) \sim N[b, \sigma^2(X'X)^{-1}]$$

Burada normalleştirme sabiti, $\frac{|X'X|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^k}$ şeklindedir. k , parametre sayısıdır.

β 'nın herhangi bir elemanına ait bilgiye ulaşmak için o elemana ait marjinal son oyf'yi elde etmek gerekmektedir.⁵⁸

1.4.1.2. Bilgi-veren Ön-OYF ile Çıkarsama

β 'ya ilişkin çok-değişkenli normal bileşik oyf şöyledir,

$$p(\beta) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\bar{\Sigma}_\beta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})' \bar{\Sigma}_\beta (\beta - \bar{\beta})}{2}\right]$$

Üssel ifadenin önündeki kısım orantı sabitine dahil edilirse,

$$p(\beta) \propto \exp\left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})' \bar{\Sigma}_\beta (\beta - \bar{\beta})}{2}\right]$$

⁵⁸ Box ve Tiao, a.e., s.115 ve Judge v.d., a.e., s.288

Burada $\bar{\beta}$ ön ortalama, $\bar{\Sigma}_{\beta}$ ise β 'ya ait ön kovaryans matrisidir ve sahip olunan ön bilgiye dayanarak değerleri belirlenmektedir.

Bu çok-değişkenli normal bileşik ön oyf ile birleştirilecek olabilirlik fonksiyonu ise şöyledir,⁵⁹

$$l(\beta|y) \propto \exp\left[-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

Ön oyf ile olabilirlik fonksiyonu birleştirilmeden önce ön oyf $p(\beta)$ üzerinde aşağıdaki değişikliği yapmak uygun olacaktır.

$A = \sigma^2 \bar{\Sigma}_{\beta}^{-1}$ şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı bir A matrisi alalım. $A^{1/2} A^{1/2} = A$ 'dır. $\bar{\Sigma}_{\beta}^{-1} = A/\sigma^2$ olduğuna göre $p(\beta)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.⁶⁰

$$p(\beta) \propto \exp\left[-\frac{(A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta)'(A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

Bayes kuralına göre $p(\beta)$ ve $l(\beta|y)$ birleştirilirse

$$p(\beta|y) \propto p(\beta) l(\beta|y)$$

$$\propto \exp\left[-\frac{(A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta)'(A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta)}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta \\ y - X\beta \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A^{1/2}\bar{\beta} - A^{1/2}\beta \\ y - X\beta \end{bmatrix}\right\}$$

$$w = \begin{bmatrix} A^{1/2}\bar{\beta} \\ y \end{bmatrix}_{(k+n) \times 1} \quad \text{ve} \quad G = \begin{bmatrix} A^{1/2} \\ X \end{bmatrix}_{(k+n) \times k} \quad \text{olarak ifade edilirse, son oyf}$$

$$p(\beta|y) \propto \exp\left[-\frac{(w - G\beta)'(w - G\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

⁵⁹ Uygulamalı ekonometride, regresyon analizinde kullanılan bağımsız değişkenler alışlagelenin dışında doğrusal-dışı, zaman serisi, süreksiz rassal ve ikili tercih değişkeni biçiminde de olabilir. Bu durumda parametrelere ait olabilirlik fonksiyonları daha karmaşık hale gelmektedir. Bunların Bayesyen doğaları ve karşılaşılan sorunlarla ilgili olarak bkz. A. Zellner, "Applications of Bayesian Analysis in Econometrics", *The Statistician*, V.32, 1983, s. 23-34

⁶⁰ Judge v.d., a.e., s.285

şeklinde yazılabilir. Pay kısmındaki çarpım işleminin sonucu şöyledir,⁶¹

$$(w - G\beta)'(w - G\beta) = (\beta - \bar{\beta})'G'G(\beta - \bar{\beta}) + (w - G\bar{\beta})'(w - G\bar{\beta})$$

Eşitliğin sağ yanının ikinci kısmı β içermediğinden orantı sabitine dahil edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= (G'G)^{-1}G'w \\ &= \left[\begin{bmatrix} A^{1/2} & X \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A^{1/2} \\ X \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} A^{1/2} & X \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A^{1/2} \bar{\beta} \\ y \end{bmatrix} \\ &= [A + X'X]^{-1} [A\bar{\beta} + X'y]\end{aligned}$$

$y = Xb$ ve $b = (X'X)^{-1}X'y$ olduğuna göre

$$\bar{\beta} = [A + X'X]^{-1} [A\bar{\beta} + X'Xb] \text{ olur.}$$

Buna göre son oyf daha sade olarak şöyle yazılabilir,

$$\begin{aligned}p(\beta|y) &\propto \exp \left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})'G'G(\beta - \bar{\beta})}{2\sigma^2} \right] \\ &\propto \exp \left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})'(A + X'X)(\beta - \bar{\beta})}{2\sigma^2} \right] \\ &\propto \exp \left[-\frac{1}{2}(\beta - \bar{\beta})'(\bar{\Sigma}_\beta^{-1} + \frac{X'X}{\sigma^2})(\beta - \bar{\beta}) \right] \\ &\propto \exp \left[-\frac{1}{2}(\beta - \bar{\beta})'\bar{\Sigma}_\beta^{-1}(\beta - \bar{\beta}) \right]\end{aligned}$$

Burada, $\bar{\Sigma}_\beta^{-1} = \bar{\Sigma}_\beta^{-1} + \frac{X'X}{\sigma^2}$

ve $\bar{\beta} = (A + X'X)^{-1}(A\bar{\beta} - X'Xb)$

$$= \left[\bar{\Sigma}_\beta^{-1} + \frac{X'X}{\sigma^2} \right]^{-1} \left[\bar{\Sigma}_\beta^{-1}\bar{\beta} + \left(\frac{X'X}{\sigma^2} \right)b \right], \text{dir.}$$

⁶¹ Judge v.d., a.e., s.286

Buna göre, $(\beta|y) \sim N(\bar{\bar{\beta}}, \bar{\bar{\Sigma}}_\beta)$ 'dir.⁶²

Ön-kovaryans matrisinin tersi olan $\bar{\bar{\Sigma}}_\beta^{-1}$ ön oyf'nin kesinlik matrisidir. $X'X/\sigma^2$ ise örneklem bilgisinin kesinlik matrisidir. Önceki bölümlerde de belirtildiği gibi son oyf'nin kesinlik matrisi ise bu iki kesinlik matrisinin toplamından oluşan $\bar{\bar{\Sigma}}_\beta^{-1}$ 'dir. Son ortalama $\bar{\bar{\beta}}$ ise ön ortalama $\bar{\beta}$ ile EKK tahmincisi b 'nin ilgili kesinlik matrisleri ile ağırlıklandırılmış bir ortalaması biçimindedir.

Elde edilen son oyf $p(\beta|y)$, β parametre vektörünün tümüne ilişkin bilgiyi yansıtmaktadır. β parametre uzayındaki herhangi bir β_j elemanına ait bilgiye ulaşmak istendiğinde yapılması gereken β_j 'ye ait tek-değişkenli marjinal oyf'yi türetmek olacaktır.⁶³

1.4.2. Bilinmeyen Varyans Durumu

1.4.2.1. Bilgi-veren Ortak Ön OYF ile Çıkarsama

Anakitle varyansı σ^2 'nin bilinmediği durumda analize β parametre vektörü ve σ 'nın her ikisine ait bir ortak ön oyf, $p(\beta, \sigma)$, oluşturularak başlanır. Daha önce bölüm 4.2'de belirtildiği gibi bu durumda kullanılacak bileşik bilgi-veren ön oyf çok-değişkenli normal-gama dağılıma sahip olacaktır.⁶⁴ Bu ön oyf'de β 'nın ön oyf'sinin varyansı σ 'nın değerine koşullu olarak ifade edilmektedir. Daha açık olarak, $\bar{\bar{\Sigma}}_\beta = \sigma^2 A^{-1}$ yazılabilir.

β 'ya ilişkin ön-bilgi A matrisi ile ifade edilebileceği gibi σ^2 'nin belirli bir değeri için $\bar{\bar{\Sigma}}_\beta$ hesaplandıktan sonra da buradan A matrisi elde edilebilir. Daha sonra σ^2 'nin başka bir bilinmeyen değerine koşullu olarak $\bar{\bar{\Sigma}}_\beta$ hesaplanmak istendiğinde, A^{-1}

⁶² Judge v.d., a.e., s.287

⁶³ W.H. Greene, *Econometric Analysis*, 3rd ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1997, s. 318

⁶⁴ Normal-gama dağılımlı doğal-bileşik ön-oyf kullanılsa bile uygulamada bilgi-veren ön dağılımların formülleştirilmeleri zordur. Bu durumda regresyon parametreleri için Jeffrey'in *referans bilgi-veren ön dağılımlarının* kullanılabileceği konusunda bkz. (Zellner, 1983)

β 'in sabit kaldığı düşünülerek, σ^2 'ye koşullu olarak değişen bir $\bar{\Sigma}_\beta$ bulunur.

Dolayısıyla $(\beta|\sigma) \sim N[\bar{\beta}, \sigma^2 A^{-1}]$ yazılabilir.⁶⁵

σ veri iken β 'ya ilişkin çok-değişkenli normal oyf şöyledir,

$$p(\beta|\sigma) = (2\pi)^{-k/2} \sigma^{-k} |A|^{1/2} \exp\left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})' A (\beta - \bar{\beta})}{2\sigma^2}\right]$$

β ile ilişkili olmayan $(2\pi)^{-k/2} |A|^{1/2}$ ifadesi orantı sabitine ilave edilirse,

$$p(\beta|\sigma) \propto \sigma^{-k} \exp\left[-\frac{(\beta - \bar{\beta})' A (\beta - \bar{\beta})}{2\sigma^2}\right]$$

olur. Burada, yukarıda belirtildiği şekilde A matrisinin elemanları belirlendiğinde ve β 'nın değerleri önsel olarak atandığında $p(\beta|\sigma)$ da belirlenmiş olur. β ve σ 'ya ait ortak ön oyf,

$$p(\beta, \sigma) = p(\beta|\sigma) p(\sigma)$$

biçimindedir. Dolayısıyla σ 'ya ait marjinal ön oyf'nin de elde edilmesi gerekmektedir. Daha önce de belirtildiği gibi bu marjinal ön oyf ters-gama oyf biçimindedir. Yani,

$$p(\sigma) = \frac{2}{\Gamma(\bar{v}/2)} \left(\frac{\bar{v} \bar{s}^2}{2}\right)^{\bar{v}/2} \frac{1}{\sigma^{\bar{v}+1}} \exp\left[-\frac{\bar{v} \bar{s}^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\propto \frac{1}{\sigma^{\bar{v}+1}} \exp\left[-\frac{\bar{v} \bar{s}^2}{2\sigma^2}\right]$$

Burada, $\bar{v}$ ve $\bar{s}^2$ değerleri eldeki bilgilerle belirlenecek parametrelerdir. $P(\beta|\sigma)$ ve $p(\sigma)$ bilindiğine göre ortak ön oyf yazılabilir.

$$p(\beta, \sigma) = p(\beta|\sigma) p(\sigma)$$

$$\propto \sigma^{-k-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{[\bar{v} \bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})' A (\beta - \bar{\beta})]}{2\sigma^2}\right]$$

⁶⁵ Judge v.d., a.e., s.308

Ortak son oyf'yi elde edebilmek için bu ön oyf ile birleştirilecek olabilirlik fonksiyonu ise şöyledir,

$$l(\beta, \sigma|y) = (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

$$\propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

Artık Bayes kuralı doğrultusunda ortak ön oyf ile olabilirlik fonksiyonu birleştirilebilir.

$$p(\beta, \sigma|y) = p(\beta, \sigma) l(\beta, \sigma|y)$$

$$\propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{[\bar{v}\bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})'A(\beta - \bar{\beta}) + (y - X\beta)'(y - X\beta)]}{2\sigma^2}\right]$$

Yine bu uzun ifadeyi basitleştirmek için aşağıdaki yol izlenebilir⁶⁶.

$$w = \begin{bmatrix} A^{1/2} \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad G = \begin{bmatrix} A^{1/2} \\ X \end{bmatrix} \quad \text{alınırsa}$$

$$p(\beta, \sigma) \propto \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{[\bar{v}\bar{s}^2 + (w - G\bar{\beta})'(w - G\bar{\beta})]}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{[\bar{v}\bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})'G'G(\beta - \bar{\beta}) + (w - G\bar{\beta})'(w - G\bar{\beta})]}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{[\bar{v}\bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})'(A + X'X)(\beta - \bar{\beta})]}{2\sigma^2}\right]$$

Burada, $\bar{\bar{\beta}} = (G'G)^{-1} G'w = (A + X'X)^{-1} (A\bar{\beta} + X'Xb)$

ve $\bar{\bar{v}}\bar{\bar{s}}^2 = \bar{v}\bar{s}^2 + (w - G\bar{\beta})'(w - G\bar{\beta})$

$$= \bar{v}\bar{s}^2 + (y - X\bar{\beta})'(y - X\bar{\beta}) + (\bar{\beta} - \bar{\beta})'A(\bar{\beta} - \bar{\beta})$$

⁶⁶ Judge v.d., a.e., s.310

$$= \bar{v} \bar{s}^2 + y'y + \bar{\beta}' A \bar{\beta} - \bar{\beta}' (A + X'X) \bar{\beta}$$

$p(\beta, \sigma|y)$ 'nin yeniden düzenlenmesiyle $\bar{v}$ ve $\bar{s}^2$ 'nin ayrı ayrı değerlerini veren ifadeler elde edilebilir. Son oyf aşağıdaki gibi iki kısma ayrılabilir,

$$\begin{aligned} p(\beta, \sigma|y) &\propto \frac{1}{\sigma^k} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \bar{\beta})' (A + X'X) (\beta - \bar{\beta}) \right] \frac{1}{\sigma^{\bar{v}+1}} \exp \left[-\frac{\bar{v} \bar{s}^2}{2\sigma^2} \right] \\ &\propto p(\beta|\sigma, y) p(\sigma|y) \end{aligned}$$

Burada, $\bar{v} = n + \bar{v}$ bağıntısı kullanılmıştır. Yukarıdaki ifadenin ilk kısmı β 'ya ait $\bar{\beta}$ ortalama ve $\sigma^2(A+X'X)^{-1}$ kovaryans matrisli çok-değişkenli normal dağılım biçimindeki koşullu son oyf'yi göstermektedir. İkinci kısmı ise σ 'ya ilişkin marjinal son oyf'yi vermektedir ve görüldüğü gibi $\bar{v}$ ve $\bar{s}^2$ parametrelili bir ters-gama dağılımı formundadır. $\bar{v}$ elde edildikten sonra $\bar{v} \bar{s}^2$ değeri $\bar{v}$ ile bölünerek $\bar{s}^2$ hesaplanabilir.

$\bar{\beta}$ 'nin yapısı ve anlamı σ^2 'nin bilindiği durumdaki ile aynıdır.

β 'nin Marjinal Son OYF'si

Ortak son oyf'ye ulaşılırken σ 'nın marjinal son oyf'si elde edilmişti. β 'ya ait marjinal son oyf'yi elde etmek için ise ortak son oyf'nin σ 'ya göre integralini almak gerekmektedir. Yani,

$$\begin{aligned} p(\beta|y) &= \int_0^\infty p(\beta, \sigma|y) d\sigma \\ &\propto \int_0^\infty \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp \left[-\frac{\left[\bar{v} \bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})' (A + X'X) (\beta - \bar{\beta}) \right]}{2\sigma^2} \right] d\sigma \end{aligned}$$

$a = \bar{v} \bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})' (A + X'X) (\beta - \bar{\beta})$ alınırsa,

$$p(\beta|y) \propto \int_0^\infty \sigma^{-n-k-\bar{v}-1} \exp \left[-\frac{a}{2\sigma^2} \right] d\sigma$$

Gama oyf'ye uygun türev işlemleri yapılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır,

$$p(\beta|y) \propto a^{-(\bar{v}+k)/2}$$

$$\propto \left[\bar{v} \bar{s}^2 + (\beta - \bar{\beta})'(A + X'X)(\beta - \bar{\beta}) \right]^{-(\bar{v}+k)/2}$$

$$\propto \left[1 + \frac{1}{\bar{v}} (\beta - \bar{\beta})' \frac{(A + X'X)}{\bar{s}^2} (\beta - \bar{\beta}) \right]^{-(\bar{v}+k)/2}$$

Elde edilen bu marjinal son oyf $\bar{v}$ serbestlik dereceli, $\bar{\beta}$ ortalama ve $\left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}-2} \right) \bar{s}^2 (A + X'X)^{-1}$ kovaryans matrisli bir çok-değişkenli t-dağılımına uymaktadır.

1.4.2.2. Bilgi-vermeyen Ortak Ön-OYF ile Çıkarsama

Daha önce de belirtildiği gibi bilgi vermeyen ön oyf durumunda parametreler hakkındaki bilgi eksikliğini/yokluğunu ifade etmenin en uygun yolu

$$p(\beta, \sigma) \propto 1/\sigma$$

olduğunu varsaymaktır. Bu ön oyf ile birleştirilecek olabilirlik fonksiyonu ise şöyledir,

$$l(\beta, \sigma|y) \propto \sigma^{-n} \exp \left[-\frac{[v\hat{\sigma}^2 + (\beta - b)'X'X(\beta - b)]}{2\sigma^2} \right]$$

Burada b EKK tahmincisi ve $v\hat{\sigma}^2 = (y - Xb)'(y - Xb)$ dir. Ayrıca $v = n - k$ serbestlik derecesini göstermektedir.

Buna göre, bilgi-vermeyen ortak ön oyf'ye dayalı ortak son oyf,

$$p(\beta, \sigma|y) \propto p(\beta, \sigma) l(\beta, \sigma|y)$$

$$\propto \sigma^{-(n+1)} \exp \left[-\frac{[v\hat{\sigma}^2 + (\beta - b)'X'X(\beta - b)]}{2\sigma^2} \right]$$

olarak ifade edilebilir. Ortak son oyf aşağıdaki gibi β 'ya ait koşullu son oyf ve σ 'ya ait marjinal son oyf'nin çarpımı halinde yazılabilir.

$$p(\beta, \sigma | y) = p(\beta | \sigma, y) p(\sigma | y)$$

$$= \frac{1}{\sigma^k} \exp \left[-\frac{[(\beta - b)' X' X (\beta - b)]}{2\sigma^2} \right] \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp \left[-\frac{[v\hat{\sigma}^2]}{2\sigma^2} \right]$$

Burada, σ 'ya ait marjinal son oyf'nin ters-gama formunda olduğu gör÷lmektedir. $p(\beta | \sigma, y)$ 'nin σ 'ya göre integralinin alınması ile de β 'nın marjinal son oyf'si $p(\beta | y)$ 'nin çok-değişkenli t-dağılımına uyduğu gör÷lebilir.⁶⁷



⁶⁷ Judge v.d., a.e., s.318

BÖLÜM II. KLASİK ÖNGÖRÜ VE ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ YÖNTEMLERİ

2.1. Giriş

İktisadi verilerin analizinde değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü ve büyüklüğünü belirleme amacı kadar bu değişkenlerin ileriki dönemlerde alacağı değerleri önceden tahmin etmek de büyük önem taşımaktadır*. Bir değişkenin gelecek dönemlerdeki değeri tek denklemden veya (eşanlı) bir denklemler takımından oluşan yapısal bir model yardımıyla tahmin edilebilir. Ancak bunun için modelin yapısı hakkında çok sağlam bir fikre sahip olmak, yani modelin en uygun fonksiyonel biçimini ve ilgili bağımsız değişkenleri tam olarak bilmek ve dahası bunlarla ilgili verilere sahip olmak gerekmektedir. Bu bilgilerdeki her bir eksiklik, çok sayıda değişkenle işlem yapmanın zorluğu ve yöntemlerin kendi içlerinde barındırdıkları potansiyel aksaklıklar (yöntemin varsayımlarından sapmalar) bir araya geldiğinde önemli parametre tahmini hatalarına yol açacaktır. Hatalı bir modelden elde edilecek öngörüler de doğal olarak güvenilirliklerini yitireceklerdir.

Tek veya çok denklemlili yöntemlere nazaran daha az zaman, çaba ve bilgi gerektiren alternatif öngörü yöntemleri de geliştirilmiştir. Bir değişkenin geçmiş dönem değerlerinden oluşan zaman serisi verileri bu amaçla yaygın bir kullanım görmektedir.

* İngilizce literatürde “bir değişkenin gelecek bir dönemdeki değerini tahmin etmek” karşılığında “*forecasting*” terimi kullanılmaktadır. Ancak Türkçe literatürde aynı anlamı ifade etmek için üzerinde uzlaşılmış tek bir karşılık bulunmamaktadır. “Forecast” terimini karşılamak üzere *tahmin* (Orhunbilge, 1999), *öntahmin* (Kayım, 1985), *öngörü* (Genceli, 1989 ve Gürış, 2000), *kestirim* (Şenesen ve

1960'lar ve 1970'lerde ekonomik değişkenlerin öngörülerinde yoğun olarak kullanılan tek ve çok denklemlı regresyon yöntemleri özellikle 1970'li yıllardaki ekonomik bunalımların ardından güvenilirlik bakımından sorgulanmaya başlanmıştır. Özellikle bir ekonometrik model yardımıyla elde edilen parametre tahminlerinin herhangi bir politika değişikliği halinde artık geçerliliklerini yitirebilecekleri yolunda eleştiriler getirilmiştir.¹ Bundan dolayı dikkatler zaman serileri analizine yönelmiş ve zaman serilerine dayalı alternatif öngörü yöntemleri geliştirilmiştir.

Yukarıda da belirtildiği gibi zaman serisi, bir değişkenin önceki dönemlere ait (tarihsel) değerlerinden oluşur. Zaman serisi analizinde amaç, değişkenin önceki değerlerinin incelenmesiyle davranış kalıbını ortaya koymak ve bu bilgiden hareket ederek gelecek dönemlerde değişkenin alacağı değerleri tahmin etmektir. Bunu yaparken, incelenen değişkenle nedensellik ilişkisi içinde bulunan diğer değişkenler ve konu ile ilgili teori hakkında hiç bir bilgiye ihtiyaç yoktur. Bir açıdan zaman serisi analizi *veri ekstrapolasyonu* olarak görülebilir. Bunun en basit yöntemleri deterministik zaman serisi modelleri sayılabilecek basit ve mevsimsel düzleştirme yöntemleridir. Bunun yanı sıra öngörüsü yapılacak serinin stokastik (rassal) bir süreç yoluyla türediği prensibine dayanan daha sofistike öngörü yöntemleri de vardır. Otoregresif ve hareketli ortalama modelleri adı verilen bu yöntemler değişkenin ve hata teriminin belirli sayıdaki gecikmeli değerlerine regresyon uygulanmasından ibarettir. Bir zaman serisi hem otoregresif hem de hareketli ortalama özelliklerine sahip olabilir.

G.P.E. Box ve G.M. Jenkins tarafından 1970'lerde geliştirilen birleşik otoregresif hareketli ortalamalar (ARIMA) yöntemi ise durağan (değilse durağanlaştırılan) bir serinin otoregresif ve hareketli ortalama yöntemiyle modellenmesini öngörmektedir. Literatürde *Box-Jenkins yöntemi* olarak anılan bu teknik tanımlama, tahmin ve uygunluk testi aşamalarından oluşmaktadır.²

Şenesen, 1999 [Gujarati çevirisinde]) ve *önraporlama* (İşyar,1994) gibi farklı sözcükler kullanılmaktadır. Biz bu çalışma boyunca “*öngörü*” ifadesini kullanmayı tercih ettik.

¹ D. N. Gujarati, *Basic Econometrics*, New York, McGraw-Hill, 1995, s. 735

² N. Orhunbilge, *Zaman Serileri Analizi, Tahmin ve Fiyat İndeksleri*, İ.Ü. İşletme Fak. Yayın No:277, İstanbul, 1999, s. 189

2.2. Öngörü ve Önemi

Öngörü, herhangi bir değişkenin şimdiki ve geçmiş dönemlerdeki değerlerini, davranışını inceleyerek, belirli varsayımlar altında, gelecek dönemlerde alabileceği değerleri tahmin etmeye dönük uğraşlar olarak tanımlanabilir.³ Burada, değişkene ait şimdiki dönem değerini de içeren bir tarihsel veri kümesi mevcuttur. Yapılan şey ise, bu tarihsel veri setine dayanarak değişkenin gelecek dönem değerleri için koşullu olasılık dağılımlarını bulmaktır. Sonuçta öngöründe bulunulurken kullanılan yöntemler sistemin gerçek modeli olmadıklarından az veya çok hata ile gerçeği temsil etmeye çalışmaktadırlar. Dolayısıyla elde edilen öngörü değerleri mutlaka hata içerecektir.⁴ Önerilen farklı öngörü yöntemleri, verdikleri sonuçların hataları karşılaştırılarak bir değerlendirmeye tabi tutulabilir en küçük hataya sahip öngörülerini veren yöntem seçilebilir.

Öngörü, istatistiksel ve ekonometrik modellemenin parametre tahmini, hipotez testi v.b. kadar önemli amaçlarından biridir. Ekonomik değişkenlerin gelecekteki değerlerine ve seyrine ilişkin bir ön fikre sahip olmak gerek makro gerekse mikro ölçekte karar alma ve politika oluşturma açısından büyük önem taşımaktadır.

Makro ölçekte, özellikle planlı ekonomilerde, rasyonel ve tutarlı bir planlama için temel makroekonomik değişkenlerin sağlıklı, gerçeğe yakın, geçerli öngörülerini büyük önem taşımaktadır.⁵ Ekonomi politikalarına ilişkin kararlar alınırken ekonomik büyüklüklerin gelecekteki değerlerini bilmek, politika saptayıcısının bu değişkenlere yönelik olarak herhangi bir önlem almasının gerekli olup olmadığına karar vermesinde yardımcı olur. Öngörü hem gelişmiş ekonomilerin yönlendirilmesinde hem de azgelişmiş ekonomilerin planlanmasında önemli bir yer tutmaktadır.⁶ Mikro ölçekte ise firmaların üretim, satış, stoklama, pazarlama,

³ H. Kayım, *İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri*, H.Ü. İİBF Yayın No: 11, Ankara, 1985, s. 1

⁴ Kayım, a.e., s. 18

⁵ E. Öney, *İktisadi Planlama*, 5. Baskı, Savaş Yayınları, Ankara, 1987, s. 21

⁶ A. Koutsoyiannis, *Ekonometri Kuramı*, Çev: Ü. Şenese-G.G. Şenese, Verso Yay., Ankara, 1989, s. 9

istihdam gibi temel politikalarının belirlenmesinde ve karar alınmasında öngörünün önemi hissedilir.

Öngörü metodolojisinde *ekonometrik öngörü* ve *zaman serisi öngörüsü* şeklinde iki ana yaklaşımdan söz edilebilir. Ekonometrik öngörü, bir bağımlı değişkeni bir grup bağımsız değişkenle ilişkilendiren regresyon modellerine dayanmaktadır. Bu yaklaşım, ekonomik ve diğer davranışsal değişkenlerdeki değişime bağlı olarak bağımlı değişkendeki değişimi açıklamaya imkan vermesinden dolayı daha popülerdir. Zaman serisi öngörüsü ise, bir değişkenin gelecek dönemlerdeki değerlerini öngörürken sadece değişkenin geçmiş dönem değerlerinden yararlanmaktadır.⁷

Öngörü kapsamında üç tür öngörüden bahsedilebilir. Birincisi, zaman serisinin örneklem olarak alınan kısmına dayanarak tahmin edilen modelden elde edilebilen serinin tahmini değerleri (*örnek-içi öngörü*). Mevcut seri değerleri ile bu öngörü değerleri karşılaştırılarak modelin performansı öğrenilebilir. İkinci olarak, tahmin edilen model yardımıyla serinin örneklem dışında kalan kısmı için de öngöründe bulunulabilir(*ex-post öngörü*). Böylelikle modelin örneklem dışındaki performansı da belirlenebilir. Üçüncü olarak da, zaman serisi bilgisinin bulunmadığı daha ileri dönemlerin öngörüsü yapılabilir (*ex-ante öngörü*).⁸

2.3. Zaman Serileri Analizi

Herhangi bir değişkenin ardışık zaman birimlerinde almış olduğu değerlerin kümesi bir zaman serisi oluşturur. Söz konusu değişkenin niteliğine ve amaca göre zaman birimi değişebilir. Örneğin, elektroensefalogram (EEG) sinyali saniyeye göre, hisse senedi fiyatları günlük, m²'ye düşen yağış miktarı aylık, GSMH düzeyi yıllık olarak ölçülerek seriler oluşturulabilir. Aylık olarak derlenmiş olan bir seri üçer aylık değerler halinde toplulaştırılarak da kullanılabilir. Serinin değerleri arasındaki eksik

⁷ R. Ramanathan, *Introductory Econometrics*, 3rd ed., Dryden Press, Florida, 1995, s. 599

⁸ Ramanathan, a.e., s. 600

gözlemler analiz açısından sakınca doğurduğundan çeşitli enterpolasyon teknikleriyle telafi edilmesi gerekir.

Zaman serileri süreksiz olabileceği gibi sürekli de olabilir. Değişken değeri her an için gözlenebiliyorsa sürekli, sadece belirli (eşit) zaman aralıklarıyla gözlenebiliyorsa süreksiz bir zaman serisi elde edilir. Süreksiz zaman serileri de belirli bir andaki değerleriyle ölçülenler (sıcaklık, fiyat, faiz oranı v.b.) ve eşit zaman aralıklarındaki birikimli değerleriyle ölçülenler (yağış miktarı, üretim değerleri, satış hacmi gibi) olmak üzere iki gruba ayrılabilir.

Değişkenin zaman içinde almış olduğu değerleri t indisi ile göstermek gelenek haline gelmiştir. Buna göre X_t ifadesi ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) X değişkeninin t anındaki (gözlenen) değerini belirtir. Bununla birlikte, genellikle t ile içinde bulunulan zamana da işaret edilir. Dolayısıyla X_{t-1} , X_{t-2} , ... geçmiş dönem değerlerini, X_{t+1} , X_{t+2} , ... ise gelecek dönem değerlerini ifade etmektedir.

Zaman serilerine ilişkin olarak iki önemli varsayımdan söz edilebilir. Birincisi, zaman serileri sonsuz hacimli bir anakitleden olasılık kurallarına göre elde edilmiş bir örneklem olarak görülmektedir. Bu varsayım, zaman serileri analizi ile sonsuz yinelenmeli örnekleme süreci ilkesine dayalı regresyon analizi arasındaki temel farklılığı belirtir. Regresyon analizinde parametre tahmincilerinin performansları defalarca yinelenen örnekleme süreci sonunda ortaya çıkar. Oysa, zamanı geriye döndürmek mümkün olmadığından, bir zaman serisi için tekrarlama söz konusu olamaz. Bununla birlikte gerçekleşen serinin, seriyi üreten stokastik mekanizma tarafından sonsuz sayıda eleman içeren bir anakitleden çekilebilecek sonsuz sayıda örnek seriden biri olduğu kabul edilmekte ve bundan dolayı rassal bir örneklem olarak işlem görmektedir. Klasik istatistikteki anakitle ve örneklem kavramlarının zaman serileri analizindeki karşılığı stokastik süreç ve gözlenen seridir.⁹

İkinci varsayım ise, zaman serisinin ardışık gözlem değerleri arasında ilişki olduğu şeklindedir ve belki de zaman serisi analizini mümkün kılan zemini oluşturmaktadır. Ardışık gözlemler arasındaki ilişki başlıca iki biçimde olabilir.

⁹ C.W.J. Granger and P. Newbold, *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, New York, 1977, s. 2

Birincisi, gözlemler (dönemler) arasında kesin, belirli, tam bir ilişkidir. Bu tür *deterministik* bir ilişkinin bulunması durumunda gelecek dönemlerde neler olabileceği tam bir doğrulukla, hatasız olarak öngörülebilir ve ilişki matematiksel bir modelle tam olarak ifade edilebilir. Bu tür ilişkiler genellikle fiziksel değişkenler arasında görülmekle birlikte mühendislikte bazı istisnalarına da rastlanmaktadır. Örneğin, sismik veriler, myoelektrik sinyaller, EEG sinyalleri vb.¹⁰ Ancak gerçek dünyada daha çok gözlenen ve zaman serileri analizinin de zeminini oluşturan ilişki türü istatistiksel zaman serileri de denilen *stokastik süreçler* biçimindeki ilişkilerdir. Burada ardışık (veya farklı dönemlere ait) değerler bir takım rassal faktörlerin etkisi altındadır. Buna göre bir zaman serisinin gözlemleri olasılıksal bir mekanizma doğrultusunda gerçekleşiyorsa söz konusu seri bir stokastik süreç belirtir. Belirli bir zaman serisi, altında yatan stokastik sürecin belirli bir gelişimidir ve bu bakımdan söz konusu sürecin ortaya çıkarması olası olan tüm serilerin oluşturduğu anakitleden çekilmiş bir örneklem olarak görülebilir. Bu durumda seri bir o_yf 'ye sahip rassal bir değişken olarak nitelenebilir.¹¹ Bu tür bir rassal değişken dağılım fonksiyonu ile karakterize edilebilir. Sözgelimi süreç Gaussyen ise, seri her bir zaman kümesi için normal dağılımlı bir rassal değişkendir ve bu süreç ortalama ve kovaryansı ile tam olarak ifade edilebilir. Ancak, daha önce de söylendiği gibi, zaman serilerinde tekrar mümkün olmadığından ortalama ve varyans alışılageldik yolla hesaplanamaz. Bu nedenle zaman serileri analizinde bazı zorlayıcı varsayımlara başvurulmaktadır. Bunlardan biri de *durağanlıktır*. Durağan bir serinin ortalama ve varyansı zamanla değişmez ve iki farklı zamana ait gözlem değerlerinin kovaryansı uzaklıklarına bağlıdır. Bu durumda durağanlık varsayımı seriyi üreten rassal sürecin biçim ve parametre bakımından zaman içinde sabit olduğu anlamına gelmektedir.¹² Durağan seriler istatistiksel olarak modellenabilir, ancak durağan-olmayan seriler dengede olmadıklarından modellenmeleri mümkün değildir. Bir takım dönüştürme yöntemleri uygulanıp durağan hale getirilerek modellenebilirler.

¹⁰ Mühendislikte deterministik olmayan zaman serilerinin analizi için bkz. Daniel Graupe, *Time Series Analysis, Identification and Adaptive Filtering*, 2nd. ed., R.E. Kreiger Publishing, Florida, 1989

¹¹ G.E.P. Box, G.M. Jenkins ve G.C. Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3rd. ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1994, s. 23

¹² Granger ve Newbold, a.e., s.4

Zaman serileri analizinde güdülen amaçlar genel olarak, i) açıklama, ii) öngörü ve iii) kontrol, şeklinde üçe ayrılabilir.¹³

Açıklama; zaman serilerinin analiz edilmesinin temel amacının değişkenlerin zaman içindeki değişimlerinin ve davranışlarının karakteristiklerinin açıklanmaya, anlaşılmaya çalışılması olduğu söylenebilir. Bir değişkenin davranışı belirlendikten sonra buna etki eden başka değişkenlerin bulunup bulunmadığı, varsa neler olduğu ve etkileşimin boyutu, biçimi ayrıca analiz edilebilir. Bu amaçla çeşitli ekonometrik yöntemler geliştirilmiştir. Açıklama amacının bulguları diğer analiz amaçlarına da zemin oluşturur.

Öngörü; önceki kesimde de belirtildiği gibi zaman serilerinin analizinde önemli amaçlardan biri de değişkenin gelecek dönem değerlerine ait tahminler elde etmektir. Öngörünün önemi ve işlevine daha önce değinilmişti.

Kontrol; zaman serileri analizinin bir diğer amacı sistem kontrolüdür. Analize konu olan değişken değerlerini üreten stokastik sürecin ortaya çıkarılması, özellikle politika değişkenleri için, sonraki gelişmelere göre hazırlık yapılması ve rasyonel karar alınması açısından önem taşımaktadır.

Box v.d. zaman serilerinin analizinin amaçlarını kullanım alanlarından hareketle dört gruba ayırıştırarak açıklamaktadırlar. Bunlar; öngörü, transfer fonksiyonunun tahmini, müdahale analizi ve istatistiksel süreç kontrolüdür.¹⁴

Buna göre genel olarak zaman serileri analizinin amacı, gözlenen seriden edinilen bilgiler yoluyla stokastik sürecin temel özelliklerine ilişkin çıkarsamada bulunmaktır. Analizin ilk adımında birtakım özet istatistikler elde edilir. Diğer adımlar ise verilere uygun modeli belirlemek ve model parametrelerinin değerlerini tahmin etmektir. Model bir kez kurulduktan sonra süreçle ilgili birtakım hipotezleri test etmekte, serinin gelecek dönem değerlerini öngörmekte ve gelecek değerleri kontrol etmek üzere sistemle ilgili karar vermekte kullanılabilir.¹⁵

¹³ Kayım, a.e., s. 15

¹⁴ Box v.d., a.e., s. 1-6

¹⁵ Granger ve Newbold, a.e., s. 2

Bir zaman serisinin analizinde ilk aşama, değişkenin zamana göre grafiğinin çizilmesidir. Serinin grafiği çoğu zaman serinin karakteristikleri ve izlenecek hareket tarzı konusunda önemli ipuçları vermektedir. Böylece serinin durağan olup olmadığı, mevsim etkisi veya dönemsellik içerip içermediği, yapısal değişim bulunup bulunmadığı gibi problemlere dair bir fikir edinilerek bundan sonraki aşamada (gerekliyse) bu tür sorunları giderme yoluna gidilir.

2.4. Klasik Öngörü Yöntemleri

Bu çalışmada daha ziyade açıklama (zaman serilerinin istatistiksel analizi) ve öngörü amaçları ilgi alanımıza girmektedir. Dolayısıyla bundan sonraki kesimlerde bir zaman serisinin analiz biçimini ve analiz sonrasında serinin öngöründe kullanılmasına yönelik olarak önerilen belli başlı klasik öngörü tekniklerini ele alacağız.¹⁶

2.4.1. Ayrıştırma Yöntemi

Bu yöntemde, bir zaman serisinin davranışının, etkisinde kaldığı faktörlere bağlı olarak, dört farklı karakteristik barındırdığı düşünülmektedir. Bir başka deyişle değişken üzerinde etkili olan unsurlar oluşan seriyi kısa dönemden uzun döneme dört tür davranışa zorlayabilir. Birincisi, trend veya genel eğilim olarak adlandırılan, serinin tüm etkenlerin baskısı sonucu uzun dönemde (en az 10-15 yıl) izlediği seyirdir. Serinin trendi uzun dönem içinde artan, azalan ya da değişmeyen karakterde olabilir. Tabii ki çok uzun dönemde trend de dalgalanma gösterebilir. İkinci karakteristik davranış, daha kısa süreli (3-5 yıl) hareketlerden oluşan konjonktürel veya devresel dalgalanmalardır. Ekonomik açıdan konjonktür dalgalanmaları ekonomideki daralma, durgunluk ve genişleme salınımlarına denk düşmektedir. Konjonktür eğrisi trend eğrisi etrafında sarmal bir yol izler.

¹⁶ Burada ele alınmayan daha az kullanıma sahip bazı öngörü yöntemleri için bkz. Ş. Bağırkan, *İstatistiksel Analiz*, Bilim Teknik Yayınevi, 3. Baskı, İstanbul, 1993, 3. ayırım

Üçüncü olarak, değişken dönemlere göre farklı davranışlar sergiliyorsa seri üzerinde bir dönem etkisinden söz edilebilir. Bunun en tipik örneği mevsime bağlı olarak değişim gösteren değişkenlerin sergiledikleri dalgalanmalardır.¹⁷ Tatiller, bayramlar gibi özel dönemler de değişkenlerde davranış kaymasına neden olabilirler. Bu durumda seri gözlemlerinin aylık veya üç aylık olması gerekmektedir. Yıllık verilerle mevsim etkisi ortaya çıkarılamaz.

Son olarak, seride yukarıdaki gibi düzenli dalgalanmaların yanı sıra bir takım rassal faktörlere bağlı olarak düzensiz, ani, arızı dalgalanmalar da görülebilir. Bunlar tamamen kontrol dışı ve öngörülemeyen değişimlerdir.

Süreç üzerinde etkili olan unsurların neden olduğu bu dört bileşen arasındaki ilişki çarpımsal ve toplamsal olarak şöyle ifade edilebilir,

$$\text{Çarpımsal: } X_t = T \times K \times D \times R$$

$$\text{Toplamsal: } X_t = T + K + D + R$$

X_t :Zaman serisi değişkeni

T: Trend

K: Konjonktürel değişim

D: Dönemsel değişim

R: Rassal değişim

Uygulamada genellikle çarpımsal ilişki biçimi kullanılmaktadır.¹⁸

Analize önce serinin trendi tesbit edilerek başlanır. Bundan sonra yıllık veriler trend değerine bölünerek konjonktürel ve rassal değişim etkisi belirlenir. Veriler aylık veya üçer aylık olarak mevcutsa mevsim indeksiyle düzeltilen trend değerine bölünerek konjonktür ve rassal değişim etkisi belirlenir.¹⁹

¹⁷ Bağırkan, a.e., s. 201

¹⁸ P. Newbold, **Statistics for Business and Economics**, 3rd ed, Prentice-Hall, New Jersey, 1991, s. 735

¹⁹ Orhunbilge, a.e., s. 11

Trendin belirlenmesinde serinin durağan olup olmaması ve mevsim etkisi içerip içermemesine göre farklı yöntemler izlenir. Bunlardan ikisi, hareketli ortalamalar ve en küçük kareler (EKK) yöntemleridir. Hareketli ortalamalar yönteminin doğru sonuç vermesi için trendin doğrusal, konjonktür dalgalarının ise uzunluk ve şiddet bakımından eşit olması gerekmektedir. En küçük kareler yönteminde ise modelin fonksiyonel biçiminin doğru seçilmesi önemlidir.²⁰ Bununla birlikte, her iki yöntemi de uygulamadan önce serinin grafiğinin çizilmesi hem hareketli ortalamaların kaç değer üzerinden hesaplanacağı hem de EKK için hangi trend fonksiyonunun (doğrusal, karesel, üssel v.b.) uygun olduğunu anlamak bakımından yararlıdır.

Aylık veya üçer aylık verilerde mevsim etkisini belirlemek için mevsim indeksleri hesaplanmaktadır. Bunun için kullanılan başlıca yöntem *hareketli ortalamalara oranlama* yöntemidir. Aylık veriler için 12, üçer aylık veriler için 4'erli hareketli ortalamalar hesaplanır. Gözlem değerlerinin bu hareketli ortalamalara oranlanmasıyla mevsimsel ve rassal unsurların etkisi belirlenmektedir. Seriyi mevsim etkisinden arındırmak için ise gözlem değerleri hesaplanan mevsim indeksine bölünmektedir.

Konjonktürel dalgalanmalar genel ekonomik koşullardaki genişleme, durgunluk ve daralma dönemlerini yansıtmaktadır. Bu bakımdan konjonktür analizi kısa dönemli ekonomik değerlendirmelere ve planlama ve kontrol amaçlı kısa dönem tahminlerinin yapılmasına imkan vermektedir.²¹ Konjonktür dalgasının uzunluğu belirlenirken iki genişleme veya daralma döneminin uzunluğuna bakılır. Bu da genellikle 3-5 yıldır.

Konjonktür etkisini belirlerken gözlemler trend değerine bölünür. Rassal dalgalanmaları önceden tahmin etmek mümkün olmadığından konjonktür etkisiyle birlikte ifade edilmektedir.

²⁰ N. Çömlekçi, *Temel İstatistik*, 2. baskı, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1994, s. 454

²¹ Orhunbilge, a.e., s. 70

2.4.2. Düzleştirme Yöntemleri

Düzleştirme, bir zaman serisinde kısa dönemli dalgalanmalardaki aşırı iniş ve çıkışları gidererek serinin genel eğilimini ortaya çıkarmaktır. Böylece genel eğilimi göz önünde bulundurarak öngörülebilir bulunulabilmektedir.

Düzleştirme yöntemlerinin en basiti hareketli ortalamalar yöntemidir. Bu yöntemde aylık verilerden oluşan bir y_t serisinin n terimli hareketli ortalaması alınmaktadır. Genel olarak $\hat{y}_{t+1} = 1/n (y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-n+1})$ yazılabilir. n büyüdükçe seri daha düzgün hale gelmektedir. y_t 'den başlayarak geriye doğru n değer ortalaması alındığı gibi y_t ortaya getirilerek de n değer ortalaması alınabilir. Aylık veriler için 12'şerli hareketli ortalamalar alınmaktadır. 12 ayın ortalaması sonraki ay için öngörü değerini oluşturmaktadır. Buna göre y_{t+1} dönemine ait değer öngörüsü $\hat{y}_{t+1} = 1/12 (y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-11})$ olur. Görüldüğü gibi her bir öngörü değeri önceki 12 ayın basit hareketli ortalamalarından elde edilmektedir. Yani her aya eşit önem (ağırlık) verilmektedir. Gerçekle pek bağdaşmayan bu durumun sakıncası, daha yakın aylara daha büyük ağırlık veren *üssel ağırlıklandırılmış hareketli ortalamalarla* veya daha kısa ifadeyle *üssel düzleştirme yöntemiyle* (ÜDY) giderilmektedir. Yani,

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots \\ &= \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s y_{t-s}\end{aligned}$$

Burada α , 0 ile 1 arasında bir değerdir. ÜDY geçmiş değerleri ortaladığından yukarı doğru trend durumunda öngörü değerleri gerçek değerden daha düşük, aşağı doğru trend durumunda ise gerçek değerden daha yüksek olmaktadır. Bu nedenle ÜDY uygulanmadan önce serinin trend etkisinden arındırılması gerekmektedir. Hareketli ortalamalar ve ÜDY modelleriyle elde edilen öngörüler hep uyarlanabilir öngörülerdir. Yani öngörüler otomatik olarak son verilere uyarlanmaktadır.²²

²² R.S. Pindyck ve D.L. Rubinfeld, *Econometric Models and Economic Forecasts*, McGraw-Hill, New York, 1991, s. 427

Basit ve üssel olarak ağırlıklandırılmış hareketli ortalamalar yöntemleri serileri düzleştirmek için kullanıldıkları gibi öngörü amaçlı olarak da kullanılmaktadırlar.

2.4.2.1. Basit Üssel Düzleştirme Yöntemi

Yöntem R.C. Brown tarafından durağan ve dönemsellik içermeyen seriler için önerilmiştir. Üssel olarak ağırlıklandırılmış hareketli ortalamalar ile düzleştirilen bir seri

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots$$

biçiminde ifade edilmişti.* Denklem bir dönem öncesi için yazılır ve eşitliğin her iki yanı $(1-\alpha)$ ile çarpılırsa

$$(1-\alpha)\tilde{y}_t = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \dots$$

olur. Bu ifade ilk denklemden çıkarılırsa

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\tilde{y}_t$$

elde edilir. α , *düzleştirme sabiti* olarak adlandırılmakta ve 0-1 aralığında değerler almaktadır. α 'nın değeri küçüldükçe seri daha çok düzleşir.²³ Burada $\tilde{y}_{t+1}$ bir dönem sonrasının öngörü değeri, y_t şimdiki dönem gerçek değeri, $\tilde{y}_t$ ise şimdiki dönemin öngörülen değeridir. Yukarıdaki son denklem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir,

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha y_t + \tilde{y}_t - \alpha \tilde{y}_t = \tilde{y}_t + \alpha(y_t - \tilde{y}_t) = \tilde{y}_t + \alpha e_t$$

Dolayısıyla e_t , şimdiki dönemin gerçek değeri ile öngörü değeri arasındaki fark, yani öngörü hatasıdır. Uygulamada α 'nın değerinin nasıl seçileceğine dair kesin bir kural yoktur. Tecrübe, kişisel görüş, benzer bir analiz sonucu gibi subjektif bir yolla veya α 'ya farklı değerler verilerek bunlar arasından $\sum e_t^2$ 'yi minimum yapan değer

* Daha önce kullanılan $\hat{y}_{t+1}$ ifadesi öngörü değerini belirtirken, burada kullanılan $\tilde{y}_{t+1}$ ifadesi hem düzleştirilen hem de öngöründe kullanılan seriyi belirtmektedir.

²³ Pindyck ve Rubinfeld, a.e., s. 429

seçilmesi gibi objektif bir yolla da belirlenebilir.²⁴ Toplam hata kareyi minimum yapan değer seçildiğinde tahmin hataları gelecek dönem tahminlerinin düzeltilmesinde de kullanılmaktadır. α 'nın 1'e yakın değerleri hata kareleri toplamını minimum yapıyorsa seride güçlü bir trend ve dönemsel dalgalanma olabilir. Bu durumda basit ÜDY uygun bir yöntem değildir.²⁵

İlk dönemin öngörüsü yapılırken (daha önceki dönem bilgisi bulunmadığından) bir başlangıç değeri gerekmektedir. Bunun için genellikle serinin aritmetik ortalaması veya ilk gözlem değeri kullanılmaktadır.²⁶

2.4.2.2. Doğrusal Hareketli Ortalamalar ve Kendi Kendini Yenileyen ÜDY

Seride belirgin bir trend veya dönemsel dalgalanma varsa ÜDY ile elde edilen öngörü değerleri gerçek değerın üstünde veya altında çıkacaktır. Bu sakıncayı gidermek için iki yol izlenebilir. Birinci yol, doğrusal hareketli ortalamalar yöntemine göre hesaplanan ortalama değerlerini kullanarak ikinci defa hareketli ortalamalar hesaplamaktır.

$$a_t = \tilde{y}_t + (\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t) = 2\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t \quad \text{ve} \quad b = 2/(n-1) (\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t)$$

olmak üzere $\hat{y}_{t+\ell} = a_t + b_t \ell$ fonksiyonu ile ℓ dönem sonrasının öngörü değeri elde edilmektedir. Burada, $\tilde{y}_t$ ilk hareketli ortalama değerlerini, $\tilde{\tilde{y}}_t$ ikinci hareketli ortalama değerlerini, n ise hesaplanan hareketli ortalamalardaki terim sayısını göstermektedir.²⁷

İkinci bir yol ise, dalgalanmalara göre α 'nın kendi kendini yenilemesine imkan veren yöntemdir. Burada öngörü değerinin gerçek değerin üstünde veya altında kalmasına göre α 'nın değeri değişmektedir. Kullanılan öngörü fonksiyonu

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha_t y_t + (1-\alpha_t) \tilde{y}_t$$

²⁴ Newbold, a.e., s. 754

²⁵ Kayım, a.e., s. 35

²⁶ Kayım, a.e., s. 36

²⁷ Orhunbilge, a.e., s. 101

biçimindedir. Ancak yöntemin verilerdeki her türlü değişime karşı hassas olması nedeniyle rassal değişimler de verilerde gerçek bir değişimmiş gibi algılanmakta ve bu nedenle öngörü hatası yüksek çıkmaktadır.²⁸

2.4.2.3. Doğrusal ÜDY'ler

Uygulamada rastlanan ekonomik değişkenlerin çoğu durağan değildir ve trend barındırmaktadır. Bu durumda daha önce tanıtılan öngörü yöntemleri uygun olmamaktadır. Trend içeren seriler için Brown'ın geliştirdiği tek parametrelili doğrusal üssel düzleştirme yöntemi (ikili düzleştirme yöntemi olarak da bilinmektedir) doğrusal hareketli ortalama yöntemine benzetmekle birlikte trendi de öngörüye aksettirebilme üstünlüğüne sahiptir.

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_{t-1}$$

$$\tilde{\tilde{y}}_t = \alpha \tilde{y}_t + (1-\alpha)\tilde{\tilde{y}}_{t-1}$$

İlk denklem birinci düzleştirmeyi, ikinci denklem ise ikinci düzleştirmeyi göstermektedir. ℓ dönem sonrasının öngörüsü,

$$\hat{y}_{t+\ell} = a_t + b_t \ell$$

fonksiyonu ile elde edilmektedir. Burada,

$$a_t = \tilde{y}_t + (\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t) = 2\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t \quad \text{ve} \quad b_t = \alpha/(1-\alpha) (\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t)$$

dir. Böylece öngörü değeri a_t gibi bir sabit ve b_t trend teriminin doğrusal bir fonksiyonu olarak hesaplanmaktadır.²⁹

Holt'un geliştirdiği iki parametrelili doğrusal üssel düzleştirme yönteminde ise yukarıdaki ilk denklem uzun dönem trendindeki ortalama değişimi içerecek biçimde dönüştürülmektedir. Yöntemin α ve β parametrelili iki denklemi,

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\tilde{y}_{t-1} + r_{t-1})$$

²⁸ Kayım, a.e., s. 36

²⁹ Kayım, a.e., s. 37

$$r_t = \beta(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1-\beta)r_{t-1}$$

şeklindedir. α ve β parametreleri 0-1 aralığında değer almaktadır. Burada, r_t düzleştirilen $\tilde{y}_t$ serisindeki ortalama artış oranını, yani trendi göstermektedir. ℓ dönem sonrasının öngörüsü $\hat{y}_{t+\ell} = \tilde{y}_t + r_t \ell$ ile elde edilmektedir. Yani en son düzleştirilen seri değeri $\tilde{y}_t$ 'ye düzleştirilen uzun dönem trendi $r_t \ell$ eklenmektedir. Böylece, $\tilde{y}_t$ 'nin orijinal seri y_t 'den fazla sapması önlenmektedir.³⁰

2.4.2.4. Doğrusal ve Dönemsel ÜDY

P.R. Winters tarafından Brown ve Holt'un üssel düzleştirme yöntemlerine dayalı olarak geliştirilmiş bir yöntemdir. Yalnız farklı olarak, serideki trendin yanı sıra dönemsel (mevsimsel) etkileri de hesaba katmaktadır. Ancak yöntem sadece dönemsel etki içeren serilere de uygulanabilmektedir. Yöntem üç parametre ve üç denklem içermektedir.

$$\tilde{y}_t = \alpha \frac{y_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{t-1} + b_{t-1}) \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$b_t = \beta(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \quad (0 < \beta < 1)$$

$$I_t = \gamma \frac{y_t}{\tilde{y}_t} + (1-\gamma)I_{t-L} \quad (0 < \gamma < 1)$$

şeklindedir. Burada L , bir yıl içindeki dönem sayısı; I_t dönem düzeltme faktörü; α , β , γ ise sırasıyla model, trend ve dönem için düzleştirme sabitleridir.

Üçüncü denklemde orijinal seri düzleştirilmiş $\tilde{y}_t$ ile bölünerek dönem indeksi elde edilmektedir.

İkinci denklem trendi düzleştirmek içindir ve Holt'un iki parametrelili yöntemindeki ile aynıdır.

İlk denklem de Holt'un yöntemindeki ile aynı olmakla birlikte farklı olarak dönemsel etkileri gidermek için y_t dönem indeksine bölünmektedir.

³⁰ Pindyck ve Rubinfeld, a.e., s. 429,430

$\hat{y}_{t+\ell} = (\tilde{y}_t + b_t \ell) + I_{t-L-\ell}$ fonksiyonu kullanılarak ℓ dönem sonrasının öngörüsü yapılabilir. Bu yöntemde de hata karelerinin toplamını en küçük yapan düzeltme sabitleri seçilmektedir.³¹

2.4.2.5. Diğer ÜDY'ler

Buraya kadar tanıtılan üssel basit düzeltme yöntemleri uygulamada en çok kullanılan düzeltme (ve bunlara dayalı öngörü) yöntemleridir. Ancak, daha az kullanım alanı bulsalar da, bunların dışında birçok düzeltme yöntemi mevcuttur. Bunlar arasında,

- Brown'ın doğrusal olmayan trend içeren seriler için geliştirdiği ikinci derece üssel düzeltme yöntemi
- Harrison'un geliştirdiği, üssel düzeltme ve ARMA yöntemlerinin karması biçimindeki harmonik düzeltme ve öngörü yöntemi
- Chow'un uyarlanabilir kontrol yöntemi
- Brown'ın uyarlanabilir tek parametrelili yöntemi
- Box-Jenkins'in üç parametrelili düzeltme yöntemi
- Uyarlanabilir tepki oranlı basit üssel düzeltme yöntemi sayılabilir.³²

2.4.3. Otoregresif Modeller ve Hareketli Ortalama

Yöntemleri

Regresyon modelleri, bir bağımlı değişken ile bunu etkilediği düşünülen bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi tanımlayan ve analiz eden modellerdir. Gelecek bir dönem için, bağımsız değişkenlerin değerleri biliniyorsa eğer bağımlı değişkenin değeri öngörülebilir. Ancak bu çalışmada zaman serileri ile

³¹ Orhunbilge, a.e., s. 114

³² Orhunbilge, a.e., s. 119

ilgilendiğinden sadece regresyon analizinin zaman serilerine uygulandığı modeller üzerinde durulacaktır.

Zaman serileri ile öngöründe esas olan, bir değişkenin geçmiş dönemlerdeki davranışından hareketle gelecekteki değerlerini kestirmektir. Bu durumda, değişkenlerin çeşitli dönemlerdeki değerlerinin çoğu zaman birbirleriyle ilişkili oldukları gerçeğinden hareketle, bir regresyon denkleminde bağımlı değişkenin çeşitli gecikme uzunluğuna sahip değerlerinin bağımsız değişkenler olarak alındığı *otoregresif* bir yapı düşünülebilir.

Benzer şekilde, değişkenin şimdiki değeri ile geçmiş dönemlere ait rassal hatalar arasında da bir regresyon ilişkisi kurulabilir. *Hareketli ortalama modeli* olarak adlandırılan bu ilişkide şimdiki ve geçmiş dönem rassal hatalarının tartılı bir ortalaması alınmaktadır.

Otoregresif ve hareketli ortalamalar modellerine geçmeden önce analizde karşılaşılan bazı temel kavramları tanımakta yarar vardır.

Üç Yararlı İşlec: Zaman serileri analizinin matematiksel formülasyonunda kolaylık sağladıkları için *geri götürme*, *ileri götürme* ve *geriye fark işleçleri* sık sık kullanılmaktadır. Geri götürme işleci (B), bir önceki dönem değerini ifade eder. Yani, $By_t = y_{t-1}$ 'dir. Dolayısıyla $B^k y_t = y_{t-k}$ olur. İleri götürme işleci (F) ise bunun tersi bir görev görür. $Fy_t = y_{t+1}$ ve $F^k y_t = y_{t+k}$ 'dir. Buna göre $F = B^{-1}$ ilişkisi kurulabilir. Geriye fark işleci (∇) ise B cinsinden şöyle ifade edilebilir; $\nabla y_t = y_t - y_{t-1} = (1-B)y_t$.

Stokastik Zaman Serisi: Bir zaman serisinin gözlemlerinin bir olasılık dağılımına uyan rassal bir süreç tarafından üretildiği düşünülmektedir. Buna göre seri, her biri bir rassal değişken olan gözlemlerin ortak dağılımının bir kümesidir. Stokastik zaman serilerinin en basit örneği $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ biçimindeki *rassal yürüyüş süreci*dir. Burada ε_t , 0 ortalama ve sabit varyanslı bir beyaz gürültü hata terimidir. Buna göre y_t değeri önceki dönem değeri olan y_{t-1} artı rassal bir faktör tarafından belirlenmektedir. Dolayısıyla herhangi bir dönem için öngörü değeri son dönem (y_t) değerine eşit olacaktır.

Durağanlık: Bir zaman serisi özellikleri zaman içinde değişmeyen bir stokastik süreç tarafından üretiliyorsa *durağan* bir seridir. Bir seri durağansa geçmiş ve gelecek davranışı kolaylıkla modellenenebilir.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ gözlemlerinin oluşturduğu y_t serisi $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ortak olasılık dağılımı fonksiyonunun belirli bir gerçekleşimidir. y_{t+1} gözlemi $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 'ye koşullu olarak $p(y_{t+1} | y_1, y_2, \dots, y_n)$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre,

$$p(y_t, \dots, y_{t+k}) = p(y_{t+m}, \dots, y_{t+k+m})$$

oluyorsa y_t serisi durağandır. Bu durumda serinin ortalaması $\mu_y = E(y_t)$, varyansı $\sigma_y^2 = E[(y_t - \mu_y)^2]$ ve k gecikme için kovaryansı $\gamma_k = E[(y_t - \mu_y)(y_{t+k} - \mu_y)]$ da durağan olmalıdır.³³

Durağan olmayan bir zaman serisi bir veya daha fazla kez farkları alınarak durağan hale getirilebilir. Farkı alınarak durağanlaşan seri *homojen* seridir. Kaç defa fark alındığıysa homojenliğin derecesini belirler. Buna göre 1. dereceden homojen durağan olmayan bir y_t serisi için $z_t = y_t - y_{t-1} = \Delta y_t$ durağandır. 2. dereceden durağan olmayan y_t serisi için ise $z_t = \nabla^2 y_t = \nabla y_t - \nabla y_{t-1}$ durağandır.

Otokorelasyon Fonksiyonu: Bir zaman serisine dayalı olarak öngöründe bulunmadan önce seriyi üreten sürecin karakteristiklerinin öğrenilmesi gerekir. Aslında bu serinin modellenmesi açısından da gerekli bir adımdır. Her ne kadar stokastik bir süreci tam olarak modellemek mümkün değilse de, otokorelasyon fonksiyonu yardımıyla en uygun model konusunda bir fikre varılabilir. Otokorelasyon fonksiyonu bir serinin belirli uzaklıktaki (gecikme uzunluğu, k) gözlemleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Bir y_t serisinin k gecikme uzunluğundaki değerleri arasındaki otokorelasyon,

$$\rho_k = \frac{E[(y_t - \mu_y)(y_{t+k} - \mu_y)]}{\sqrt{E[(y_t - \mu_y)^2]E[(y_{t+k} - \mu_y)^2]}} = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+k}}} \cong \frac{E[(y_t - \mu_y)(y_{t+k} - \mu_y)]}{\sigma_y^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

³³ Pindyck ve Rubinfeld, a.e., s. 445

şeklinde ifade edilebilir.³⁴ $k = 0$ için $\rho_k = 1$ olur. ρ_k 'nın değeri sıfıra yaklaştıkça serinin rassallığı artar. Ayrıca birkaç dönem gecikmeli ρ_k değerlerinin sıfıra yakın olması da seride dönemsellik bulunmadığını gösterir.

Uygulamada ρ_k yerine bunun örneklemdeki tahmini olan,

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

örneklem otokorelasyon katsayısı kullanılmaktadır. Rassal süreçlerde otokorelasyon katsayılarının örnekleme dağılımı ortalaması 0, standart sapması $1/\sqrt{n}$ olan normal dağılıma yaklaşmaktadır.³⁵ Genellikle $\hat{\rho}_k$ hesaplanırken gecikme uzunluğu toplam gözlem sayısının $1/4$ 'ünden fazlasına götürülmez. Örneklem otokorelasyon fonksiyonu sadece durağan seriler için anlamlıdır. Bu nedenle örneklem otokorelasyon fonksiyonu hesaplanmadan önce trend etkisinin giderilmesi gerekmektedir.³⁶

Box ve Pierce tarafından geliştirilen bir χ^2 testi ile hatalara ve y_t değerlerine ait otokorelasyon katsayılarının sıfırdan farklılıklarının anlamlı olup olmadığı test edilebilmektedir. Bu amaçla kullanılabilecek bir başka test ise *t-benzeri* testidir. Bu testte anlamlılık sınavasında otokorelasyon katsayılarının standart hataları kullanılmaktadır.³⁷

Otokorelasyon katsayılarının yorumlanmasında katsayıların farklı gecikme uzunlukları karşısında serpilmesini gösteren ve bir tür histogram sayılabilecek *korelogram* grafiklerinden yararlanılır. Korelogram veya otokorelasyon katsayılarının dağılımından yararlanarak,

- serinin rassal olup olmadığı,
- kısa dönemli ilişki bulunup bulunmadığı

³⁴ G.E.P. Box ve G.M. Jenkins, **Time Series Analysis**, rev. ed., Holden-Day, San Francisco, 1976, s.28

³⁵ C. Chatfield, **The Analysis of Time Series**, 4th ed., Chapman and Hall, London, 1988, s. 21

³⁶ Chatfield, a.e., s.22

³⁷ Orhunbilge, a.e., s. 143,145

- serinin durağan olup olmadığı,
- dönem etkisinin bulunup bulunmadığı ve varsa uzunluğu,
- aşırı değerlerin varlığı belirlenebilir.³⁸

Daha önce de belirtildiği gibi, rassallığın belirlenmesinde değişik gecikme uzunlukları için otokorelasyon katsayılarının sıfırdan farklılıklarının anlamlılığı araştırılır. Seri trend etkisinde ise durağan olmayacaktır. Bu durumda gözlem değerleri arasında hesaplanan otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklı çıkar. Durağanlığın sınanması için bir dönem gecikmeli değerlerle fark alınarak tekrar otokorelasyon katsayıları hesaplanır. Durağan seriye ulaşmak için birkaç kez fark almak gerekebilir. Yine, serinin 4,8,12, ... gecikmeli değerleri için otokorelasyon katsayıları hesaplanarak, sıfırdan farklılığın anlamlı olması halinde dönem etkisi bulunduğu sonucuna varılabilir.

Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu: ρ_k için aşağıdaki fark denklemi yazılabilir.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

$k = 1, 2, \dots, p$ alınırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir,

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}$$

.....

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p$$

Burada, $\rho_0 = 1$ olduğundan denklemlerde yer almamaktadır. ρ 'ların aşağıda ele alınacak olan otoregresif model parametreleri (ϕ_k) cinsinden ifade edildiği bu denklemler *Yule-Walker denklemleri* olarak anılmaktadır. Denklem sistemi matris notasyonu ile $\phi = P_p^{-1} \rho_p$ şeklinde gösterilebilir. Burada,

³⁸ Chatfield, a.e., s. 21 ve devamı

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad \rho_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ρ 'ların yerine $\hat{\rho}_k$ kullanılarak denklemlerin katsayıları tahmin edilebilir. ϕ 'nin elemanları k gecikme için *kısmi otokorelasyon katsayılarını* göstermektedir. Kısmi otokorelasyon katsayıları herhangi bir durağan süreçte otokorelasyon katsayılarının bir fonksiyonudur, ancak farklı olarak $k > p$ için $\phi_k = 0$ 'dır. Bu da otoregresif bir sürecin derecesini belirler.³⁹

2.4.3.1. Otoregresif Model

Aşağıdaki gibi, bir değişkenin kendi geçmiş değerleri ve bir rassal terim üzerine regresyonunu gösteren denklemlere *p. dereceden otoregresif model* denir ve $y_t \sim \text{AR}(p)$ ile gösterilir.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

AR modellerinde genellikle kesme parametresi bulunmaz. Buna göre y_t , geçmiş değerleri ve rassal bir hata teriminin tartılı bir ortalaması şeklinde gösterilmektedir.

Geri götürme işlemi kullanarak da model ifade edilebilir. Buna göre,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) y_t = \varepsilon_t \quad \text{veya} \quad \phi(B) y_t = \varepsilon_t$$

Bir AR modelinin kurulması için ilk yapılması gereken sürecin durağanlık koşullarının ortaya konulmasıdır.

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, ($t = 1, 2, \dots, n$)* şeklindeki AR(1) sürecini gözönüne alalım. Model y_t 'nin her bir gecikmeli değeri için yazılır ve her denklem bir öncekinde yerine konulursa,

³⁹ Box v.d., a.e., s. 66

* Burada, her ne kadar ilk gözlem $t = 1$ anına ait gibi görünüyorsa da sürecin daha önceki bir zamanda başladığı varsayılmaktadır.

$$y_t = \sum_{j=0}^{J-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^J y_{t-J}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında ilk kısım hata teriminin gecikmeli değerleri, ikinci kısım ise kesin bir değer olan y_{t-j} 'den oluşmaktadır. Buna göre, ifadenin beklenen değeri alındığında,

$$E(y_t) = E\left(\sum_{j=0}^{J-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right) + E(\phi^J y_{t-J}) = \phi^J y_{t-J}$$

elde edilir. Bu durumda, $|\phi| \geq 1$ ise, sürecin ortalama değeri başlangıç değeri y_{t-j} 'ye bağlıdır. Buna göre, y_{t-j} 'ye ilişkin bir bilgi ve deterministik bir bileşen içeren $y_t = \sum_{j=0}^{J-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^J y_{t-J}$ ifadesi kullanılarak serinin gelecek bir değeri tahmin edilebilir. Eğer, $|\phi| \leq 1$ ve J büyük ise deterministik bileşen ihmal edilebilir. Bu durumda $j \rightarrow \infty$ iken AR(1) süreci,

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

biçiminde yazılabilir. $|\phi| < 1$ iken AR(1) süreci deterministik değildir.⁴⁰

AR modelinin katsayılarını tahmin etmeden önce uygun gecikme uzunluğunun, yani modelin derecesinin belirlenmesi gerekir. Bu amaçla örnek otokorelasyon katsayıları kullanılabilirse de $p > 1$ durumunda bu otokorelasyon katsayıları sinüsoidal bir davranış gösterebildiğinden bu şekilde modelin derecesini belirlemek zordur. Alternatif bir yol, giderek artan derecede AR modelleri kurarak bunların hata terimleri toplamı ile p 'nin serpilmesine bakmaktır. Eğrinin yataylaşmaya başladığı yerdeki p değeri uygun AR derecesi olarak seçilebilir.⁴¹

Box vd. ise uygun gecikme uzunluğunun belirlenmesinde kısmi otokorelasyon katsayılarından yararlanmayı önermektedirler.⁴² Buna göre AR(p) modeli ile AR(p-1) modeli arasındaki fark $\phi_p y_{t-p}$ terimidir. Burada ϕ_p katsayısı y_t ile y_{t-p} arasındaki kısmi korelasyonu göstermektedir. Bu şekilde her bir kısmi

⁴⁰ A.C. Harvey, **Time Series Models**, 2nd ed., Harvester-Wheatsheaf, New York, 1993, s. 16,17

⁴¹ Chatfield, a.e., s. 56

⁴² Box v.d., a.e., s. 64

otokorelasyon katsayısının p karşısındaki dağılımı kısmi otokorelasyon fonksiyonunu verir. Uygulamada kısmi otokorelasyonlar yerine bunların örneklemden elde edilen tahminleri kullanılabilir. Örneklem kısmi otokorelasyon fonksiyonun belli bir anlamlılık düzeyinde kritik sınır değerlerini kestiği p değeri uygun model derecesi olarak seçilir. Bundan daha yüksek p değeri için kısmi otokorelasyon katsayılarının sıfırdan farklılıkları anlamsız çıkacaktır.⁴³

Modelin derecesi böylece belirlendikten sonra artık parametrelerin tahminine geçilebilir. Parametre tahminleri, otoregresif modele en küçük kareler yöntemi uygulanarak elde edilir. Bu konuda iki yol izlenebilir. Biri,

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

denklemine sıradan EKK uygulamaktır. Diğeri ise örneklem otokorelasyon katsayılarını ikame ederek Yule-Walker denklemlerinin ilk p tanesinin çözümünü bulmaktır.⁴⁴

2.4.3.2. Hareketli Ortalama Modeli

Bir zaman serisi otoregresif olarak modellenip de çok küçük dereceli bir otoregresif model ortaya çıktığında serideki bazı eğilimler ortadan kalkmayabilir. Bu eksiklik hareketli ortalama modelleriyle giderilebilir.⁴⁵ Bu modellerde değişkenin şimdiki değeri geçmiş q dönemin rassal hatalarının tartılı bir ortalaması olarak ifade edilmektedir.* q. Dereceden bir hareketli ortalama modeli MA(q) ile gösterilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Burada θ_i ($i = 1, 2, \dots, q$) modelin parametreleridir. ε_t ise beyaz gürültü hata termidir. Bu yüzden, $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ ve $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0$ 'dır. Buna göre MA(q) süreci, $q + 2$ parametre ($\mu, \sigma_\varepsilon^2$ ve θ_i) ile tam olarak ifade edilebilir.

⁴³ Chatfield, a.y.

⁴⁴ Chatfield, a.e., s. 55

⁴⁵ Orhunbilge, a.e., s. 165

* q değeri sürecin hafıza uzunluğu olarak da bilinir.

MA modeli geri götürme işleci kullanılarak ifade edilirse,

$$y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad \text{veya} \quad y_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

Hareketli ortalama modelinin ortalaması (μ) zamandan bağımsızdır, dolayısıyla $E(y_t) = \mu$ 'dür. Varyansı ise

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= \gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] \\ &= E(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2 \varepsilon_{t-q}^2 - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \dots) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \end{aligned}$$

Durağanlık varsayımının geçerli ise genel olarak $\sum_{i=1}^q \theta_i^2 < \infty$ olması gerekir. Ancak bu durumda q büyüdükçe otokorelasyon fonksiyonu ρ_k sıfıra yaklaşır.⁴⁶

k gecikme için kovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k} & k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Otokorelasyon fonksiyonu ise,

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} & k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Uygun MA derecesini ρ_k 'nın (veya onun yerine $\hat{\rho}_k$ 'nın) sıfırdan farklılığının anlamlı olduğu en yüksek k düzeyi belirler. $\hat{\rho}_k$ 'nin anlamlılığı incelenirken genellikle $\pm 2/\sqrt{n}$ aralığına düşüp düşmediğine bakılır.⁴⁷

⁴⁶ Pindyck ve Rubinfeld, a.e., s. 474

⁴⁷ Judge v.d., a.e., s. 692

Hareketli ortalama modelleri ekonometride genellikle trendi giderme yöntemleri kapsamında kullanılmaktadır.⁴⁸ Ayrıca, bazı rassal olayların ekonomik değişkenleri üzerindeki ardışık dönemler boyunca giderek azalan etkilerinin modellenmesi bakımından da uygun bir araçtır.⁴⁹

Hareketli ortalama modelinin parametrelerinin tahmin edilmesinde, etkin bir tahminci bulunmamasından dolayı bazı sıkıntılar söz konusudur. Tahminde izlenebilecek bir yöntem, AR modelinde olduğu gibi, sıradan EKK uygulamaktır. Fakat hata kareleri toplamı parametrelerin karesel bir fonksiyonu değildir ve kesin EKK tahminleri elde edilememektedir.⁵⁰

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ biliniyorsa eğer yukarıdaki otokorelasyon denklemi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ için çözülebilir. Ancak denklemler AR modelindeki aksine doğrusal olmadığından iteratif bir süreç izlenerek çözülebilmektedir. ρ_k yerine bunların tahmini olan $\hat{\rho}_k$ kullanılarak yapılan hesaplamalar sonunda elde edilen tahminler pek de yüksek bir istatistiksel etkinliğe sahip olmayabilmektedir.⁵¹

Box v.d. ise şu almaşık yöntemi önermektedir.⁵² Sözgelimi MA(1) süreci için, $\mu = \bar{y}$ ve $\hat{\rho}_1 = -\hat{\theta}_1 / (1 + \hat{\theta}_1^2)$ 'den μ ve θ_1 için bir başlangıç değeri elde edilir. Daha sonra $\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ ifadesinden yararlanarak

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = y_1 - \mu, \quad \varepsilon_2 = y_2 - \mu - \theta_1 \varepsilon_1, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = y_n - \mu - \theta_1 \varepsilon_{n-1}$$

ardışık çözümleriyle $\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$ 'nin değeri hesaplanabilir. Başka μ ve θ_1 ikilileri için aynı işlemler tekrarlanarak bunlara karşılık gelen $\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$ değerleri hesaplandıktan sonra bunlar arasından hata kareleri toplamını minimum yapan μ ve θ_1 'in EKK tahminleri elde edilebilir.

Bir başka önerilen yöntem ise verilere yüksek dereceden bir AR süreci uygulamak ve AR ve MA süreçleri arasındaki ikili yapıdan yararlanmaktır.⁵³

⁴⁸ G.S. Maddala, **Introduction to Econometrics**, 2nd ed., Mc Hill, India, 1988, s. 533

⁴⁹ Chatfield, a.e. s. 35

⁵⁰ Chatfield, a.e., s. 57

⁵¹ Box v.d., a.e., s. 71

⁵² Box v.d., a.e., 7. bölüm

⁵³ Chatfield, a.e., s. 57

2.4.4. Karma Model (Box-Jenkins Yöntemi)

Bir zaman serisinin modellenmesinde göz önünde bulundurulması gereken iki temel ilkedен söz edilebilir. Bunlar; uygunluk ve sadeliktir. Benimsenen modelin serinin karakter ve davranışına en çok uyan model olması gerektiği kadar bunu en az parametre ile sağlayan model olması da önemlidir. Birinci ilke öngörü açısından büyük önem taşıırken, ikinci ilke tahmin ve öngörü amacıyla yapılan hesaplamalar açısından kolaylık sağlamaya dönüktür.

Önceki bölümlerde ele alınan AR ve MA modellerinden sadece birini kullanarak eldeki seriyi modellemek, bahsedilen ilkelerden sapmayı doğurabilir. Bu durumda başvurulabilecek bir yol seriyi her iki model yapısını da kullanarak modellemektir. Böylece otoregresif ve hareketli ortalamalara uyan bir model elde edilmiş olmaktadır. Bu tür bir model ARMA(p,q) şeklinde gösterilmektedir. Burada p modelin otoregresif bileşeninin gecikme uzunluğunu, q ise hareketli ortalama bileşeninin uzunluğunu (sürecin hafızasını) ifade etmektedir. Modelin ortalamalardan farklara göre açık ifadesi şöyledir,

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

veya geri götürme işleci kullanılarak,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

$$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

şeklinde yazılabilir. AR ve MA süreçlerinin tersinirliklerinden yararlanılarak ARMA modeli tümüyle AR veya tümüyle MA cinsinden de ifade edilebilir. Yani,

$$y_t = \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

$$\pi(B) y_t = y_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j} = \varepsilon_t$$

Burada, $\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B)$ ve $\pi(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B)$ 'dir. ψ_j ve π_j ise ağırlıklardır.⁵⁴

⁵⁴ Box v.d., a.e., s. 77,78

Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Katsayıları: Karma modelin otokorelasyon fonksiyonu AR modelininki gibi türetilir. Buna göre, ARMA (p,q) denkleminin her iki tarafı y_{t-1} ile çarpılır ve beklenen değeri alınırsa aşağıdaki kovaryans fonksiyonu elde edilir.

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{ye}(k) - \theta_1 \gamma_{ye}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{ye}(k-q)$$

$\gamma_{ye}(k)$, y_t ile ε_t 'nin çapraz kovaryansıdır, yani $\gamma_{ye}(k) = E[y_{t-k} \varepsilon_t]$ dir. y_{t-k} , MA sürecine göre $(t-k)$ anına kadar rassal şoklara bağlı olduğundan $y_{t-k} = \psi(B) \varepsilon_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}$ dir. Buna göre,

$$\gamma_{ye}(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k > 0 \\ \psi_{t-k} \sigma_{\varepsilon}^2 & , \quad k \leq 0 \end{cases}$$

Bu durumda γ_k şöyle yazılabilir,

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} - \sigma_{\varepsilon}^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-k}) \quad (\theta_0 = -1)$$

O halde

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad , \quad k \geq q+1$$

$$k=0 \text{ ise} \quad \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p - \sigma_{\varepsilon}^2 (\psi_0 + \theta_1 \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_q)$$

Dolayısıyla,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad , \quad k \geq q+1$$

veya⁵⁵ $\phi(B) \rho_k = 0$

$k \geq q+1$ iken otokorelasyon ve otokovaryans fonksiyonu tümüyle otoregresif bir süreç özelliği göstermektedir.⁵⁶ Buna göre q gecikmeden sonraki örneklem otokorelasyon fonksiyonunun biçimine bakılarak pür MA süreci ile pür AR veya ARMA süreci ayırdedilebilir. Ancak uygulamada pür AR ve ARMA sürecini ayırtetmek güç olabilir. Bu güçlüğü üstesinden gelmek ve aynı zamanda AR

⁵⁵ Box v.d., a.e., s. 78,79

⁵⁶ Pindyck ve Rubinfeld, a.e., s. 488

sürecinin derecesini belirlemek için kısmi otokorelasyon fonksiyonundan yararlanılmaktadır.⁵⁷

ARMA(p,q) sürecinde p ve q'ya bağlı olarak q sayıda otokorelasyon katsayısı vardır. p tane p değeri $\phi(B)p_k = 0$ fark denklemi için başlangıç değerlerini oluşturur. Eğer $q - p < 0$ ise otokorelasyon katsayıları üssel ve/veya sinüsoidal olarak azalır. $q - p \geq 0$ ise $q - p + 1$ sayıda bu davranışa uymayan başlangıç değeri bulunur.

ARMA(p,q) modelinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise MA sürecinde olduğu gibi hareketli ortalamanın derecesine ve parametre sayısına bağlı olarak üssel ve/veya sinüsoidal olarak azalma eğilimindedir.⁵⁸

Pür AR süreci giderek azalan otokorelasyon fonksiyonu ve bir noktada kesilen kısmi otokorelasyon fonksiyonuna, pür MA süreci ise bir noktada kesilen otokorelasyon fonksiyonu ve giderek azalan kısmi otokorelasyon fonksiyonuna sahiptir. Karma süreçte ise her iki fonksiyon da kesilmez. Buna göre, ilke olarak üç muhtemel durumdan hangisinin en uygun olduğu belirlenebilir ve dereceler hakkında bir fikir edinilebilir. Karma model seçilmişse eğer, öncelikle düşük dereceli süreçlerin denenmesi önerilmektedir. Genellikle $p + q \leq 3$ tavsiye edilmektedir.⁵⁹

Bütünleşik Seri: Çoğu iktisadi zaman serisi durağan değildir. Durağan olmayan bir seri fark alma yoluyla durağanlaştırılabilir. Kimi durumlarda durağan bir seriye ulaşmak için peşpeşe birkaç kez fark almak gerekebilir.

y_t durağan olmayan bir zaman serisi olmak üzere, d kez farkı alındığında bir z_t durağan serisi elde ediliyorsa,

$$z_t = \nabla^d y_t \quad \text{ve} \quad y_t = \sum^d z_t$$

yazılabilir. y_t 'yi tekrar elde etmek için z_t 'ler toplandığından y_t 'ye d . *dereceden bütünleşik (integrated) seri* denir.

y_t serisi d kez fark alındıktan sonra uygun bir ARMA(p,q) sürecine göre modellendiğinde bir *otoregresif bütünleşik hareketli ortalama modeli* elde edilir. Bu

⁵⁷ J. Stewart, *Econometrics*, Philip Allan, London, 1991, s. 225

⁵⁸ Box vd., a.e., s. 80

⁵⁹ Stewart, a.e., s. 226

tür bir model $ARIMA(p,d,q)$ şeklinde ifade edilir. Kısaca, $\phi(B)\nabla^d y_t = \theta(B)\epsilon_t$ biçiminde gösterilebilir. Burada bütünleşik (integrated) ifadesi z_t 'den ziyade y_t 'ye ilişkindir.

$ARIMA(p,d,q)$ biçimindeki zaman serisi modelleme yaklaşımı literatürde *Box-Jenkins zaman serisi modelleme yöntemi* olarak adlandırılmaktadır. Yöntem genel olarak belirleme, tahmin ve test olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır.* daha önce tanıtilen öngörü yöntemleri birtakım teorik temellere dayanmakta ve duruma uygun düştüğünde kullanılmakta olan bir ölçüde otomatik yöntemlerdir. Bu bakımdan Box-Jenkins yöntemi otomatik sayılmaz. Her bir değişkenin özelliklerine uygun olarak kullanılabilecek farklı bir model kurulabilir.⁶⁰

1. *Belirleme*: Yöntem durağan serilere uygulandığından öncelikle serinin durağan olup olmadığı araştırılır. Bunun için serinin grafiğinin incelenmesiyle işe başlanabilir. Grafikte aşağı veya yukarı doğru bir trend gözleniyorsa ve gözlemlerin değişkenliği zamanla artıyor ya da azalıyorsa durağanlıktan söz edilemez. Bu durumda orijinal serinin (doğal) logaritması ile çalışılabilir. Logaritmik dönüşüm varyanstaki zamana bağlı değişimi ortadan kaldıramasa da, böyle bir seri için sabit varyans varsayımı daha çok akla uygundur.⁶¹

Serinin durağan olup olmadığı grafikten açık seçik anlaşılmıyorsa örneklem otokorelasyon fonksiyonuna (korelogram) bakılabilir. Gecikme uzunluğu (k) arttıkça örneklem otokorelasyon katsayıları hızla belirli bir değerin altına doğru azalıyorsa seri durağandır. Ancak bunu belirlemek her zaman kolay değildir. Otokorelasyon katsayıları yavaş yavaş azalıyorsa seri durağan olmayabilir.

Grafik veya korelogram incelemesinden serinin durağan olmadığı anlaşıldığında ilk farklar alınarak durağanlık sağlanmaya çalışılır. Dönemsellik göstermeyen seriler genellikle bir kez fark alındıktan sonra durağan hale gelmekteyse de durağan bir seriye ulaşmak için birkaç kez fark almak gerekebilir.⁶² Bununla

* Model öngöründe kullanılacaksa dördüncü aşama olarak *öngörü* de sayılabilir.

⁶⁰ Kaym, a.e., s. 69

⁶¹ Stewart, a.e., s. 213

⁶² Chatfield, a.e., s. 72

birlikte, çoğu durağan olmayan ekonomik zaman serisi bir-iki kez fark alındığında durağanlaşmaktadır. Durağanlığı sağlamak için kaç kez fark alındığı ARIMA(p,d,q) modelinin d parametresini belirler. p ve q değerlerini belirlemek için yapılması gereken AR ve MA süreçlerinde olduğu gibi otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları incelemektir. Bu katsayıların davranışları (üssel veya sinüsoidal olarak azalan dalga) hangi modelin uygun olduğunu (AR, MA veya ARMA) belirlemeye yardımcı olurken sıfırdan farklılığı anlamlı olan katsayı sayısı da p ve q derecelerini tesbit etmek açısından önemlidir.

2. *Tahmin*: Model kurulduktan sonra parametrelerinin (ϕ_i ve θ_i) tahmin edilmesi aşamasına geçilmektedir. Tahminde amaç, en küçük hata kareleri toplamını veren tahmini parametre değerlerini elde etmektir. Bunun için formel bir yöntem yoktur. Tahminler, çeşitli parametre değerleri denenerek bunlar arasından en küçük hata kareleri toplamını verenlerin seçildiği iteratif bir süreçle elde edilmektedir. Günümüzde bu uzun işlemler bilgisayar programlarıyla kolayca yapılabilmektedir.

3. *Test*: Bu aşamada, kurulan ve parametreleri tahmin edilen model uygunluk testine tabi tutulmaktadır. Bunun için, hatalar arasında otokorelasyon bulunup bulunmadığı birkaç dönem kaydırma yapılarak araştırılmaktadır. Bu amaçla elde edilen otokorelasyon katsayıları için χ^2 testi uygulanmaktadır. χ^2 istatistiği belirli bir anlamlılık düzeyinde kritik sınır değerinden küçük ise modelin uygun olduğu ve öngöründe kullanılabileceği sonucuna varılmaktadır.⁶³

Böylece uygunluğuna hükmedilen bir ARIMA(p,d,q) modeli 4. aşama olarak öngöründe kullanılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken noktalar, işlemler değişkenin ortalamadan farkına göre yapılmışsa ortalamanın öngörü değerine eklenmesi ve durağanlaştırma için farklar alınmışsa kaç kez fark alındığının öngöründe göz önünde bulundurulmasıdır.⁶⁴

Durağan olmayan bir y_t serisi d kez farkı alındığında durağan bir z_t serisine dönüşüyorsa, y_t için ARIMA (p,d,q) modeli $\phi(B)\nabla^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ biçiminde, z_t için

⁶³ Orhunbilge, a.e., s. 196

⁶⁴ Orhunbilge, a.e., s. 198

ARMA (p,q) modeli ise $\phi(B) z_t = \theta(B)\varepsilon_t$ biçiminde ifade edilebilir. Box-Jenkins yöntemiyle öngörü iki aşamadan oluşmaktadır. Önce durağan z_t serisi ile öngörüler elde edilmekte, ikinci aşamada ise bu öngörü değerleri orijinal y_t serisi için dönüştürülmektedir.⁶⁵

z_t için ARMA (p,q) modeli,

$$z_t = \phi^{-1}(B)[\theta(B)\varepsilon_t] \quad \text{veya} \quad z_t = \psi(B)\varepsilon_t$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\psi(B)$, $\phi^{-1}(B)$ ve $\theta(B)$ 'nin çarpımı şeklinde tanımlanan gecikme polinomudur.

$a(B)X_t = b(B)\varepsilon_t$ biçimindeki bir ARMA(p,q) süreci $X_t = c(B)\varepsilon_t$ şeklinde sonsuz bir hareketli ortalama sürecine dönüştürülebilir ve $c(B) = c_0 + c_1B + c_2B^2 + \dots$ ifadesinin elemanları $a(B)c(B) = b(B)$ denkleğinden yararlanarak elde edilebilir.⁶⁶

Buna göre $\phi^{-1}(B)$ sonsuz dereceden bir gecikme polinomu belirttiğinden $\psi(B)$ de sonsuz derecelidir. Bununla birlikte z_t 'nin durağan olması $\psi(B)$ 'nin yakınsak olması sonucunu doğurur. Bu durumda $\psi(B)$, z_t 'yi ε_t 'nin geçmiş ve cari değerlerinin ağırlıklı bir toplamı şeklinde ifade etmek için kullanıldığında ağırlıklar gitgide azaldığından veri döneminin ilerisi için öngöründe bulunurken bu (örneklem-dışı) dönemlerdeki ε_t 'nin katkısı (etkisi) göz ardı edilebilir.⁶⁷

$t = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere z_t 'nin bir dönem ileri değeri hatalar cinsinden z_{n+1} şöyle ifade edilebilir,

$$z_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \psi_1\varepsilon_n + \psi_2\varepsilon_{n-1} + \dots + \psi_n\varepsilon_1$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ değerleri n. dönemde belli olduğundan beklenen değerleri kendilerine eşittir. Hatalar birbirlerinden bağımsız olduğundan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ile ε_{n+1} ilişkisizdir ve $E(\varepsilon_{n+1}) = 0$ 'dır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \hat{z}_{n+1} &= E(z_{n+1} | z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= 0 + \psi_1\varepsilon_n + \psi_2\varepsilon_{n-1} + \dots + \psi_n\varepsilon_1 \end{aligned}$$

⁶⁵ Stewart, a.e., s.238

⁶⁶ Granger ve Newbold, a.e., s. 150

⁶⁷ Stewart, a.e., s. 237

olur. Öngörü hatası ise,

$$e_{n+1} = z_{n+1} - \hat{z}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$$

dir. Öngörü varyansı ise,

$$\text{var}(e_{n+1}) = \text{var}(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$$

Genel olarak l dönem ileri öngörü için,

$$\begin{aligned} \hat{z}_{n+l} &= E(z_{n+l} | z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= \psi_l \varepsilon_n + \psi_{l+1} \varepsilon_{n-1} + \dots + \psi_{l+n} \varepsilon_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Öngörü varyansı ise,

$$\text{var}(e_{n+l}) = \sigma^2(1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2)$$

biçimindedir.⁶⁸

z_t için ARMA (p,q)'nın tahmin edilmiş biçimi şöyledir,

$$z_t = \hat{\phi}_1 z_{t-1} + \hat{\phi}_2 z_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p z_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} - \hat{\theta}_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{t-q} \quad (\theta_0 = 1)$$

z_t 'nin $n+1$ dönemindeki değeri,

$$z_{n+1} = \phi_1 z_n + \phi_2 z_{n-1} + \dots + \phi_p z_{n-p+1} + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n - \theta_2 \varepsilon_{n-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{n-q+1} \quad (\theta_0 = 1)$$

$E(z_n | z_1, z_2, \dots, z_n) = z_n$ ve $E(\varepsilon_n | z_1, z_2, \dots, z_n) = \varepsilon_n$ 'dir. Oysa, $E(\varepsilon_{n+1} | z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ 'dır. Buna göre, $n+1$ dönemi için öngörü değeri,

$$\hat{z}_{n+1} = \hat{\phi}_1 z_n + \hat{\phi}_2 z_{n-1} + \dots + \hat{\phi}_p z_{n-p+1} + \hat{\varepsilon}_{n+1} - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_n - \hat{\theta}_2 \hat{\varepsilon}_{n-1} - \dots - \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{n-q+1}$$

biçiminde elde edilebilir. Genel olarak, $l > (p,q)$ olmak üzere, l dönem ileri öngörü,

$$\hat{z}_{n+l} = \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j \hat{z}_{n+l-j} + \sum_{j=0}^q \hat{\theta}_j \hat{\varepsilon}_{n+l-j}$$

şeklinde elde edilebilir. Buna göre, ardışık dönemler için hesaplanacak öngörü değerleri belli bir değere yaklaşır. Bu durumda ARMA (veya ARIMA) modellerinin daha ziyade kısa dönem öngörü için uygun olduğu söylenebilir. Uzun dönem öngörü

⁶⁸ Stewart, a.e., 238

için başka öngörü yöntemleri (örneğin yapısal bir ekonometrik model) daha uygun olabilir.⁶⁹

Yukarıdaki öngörü değerleri durağan olmayan y_t 'nin d kez farkı alınarak elde edilen durağan z_t serisi içindir. Fark alma işleminin tersinden gidilerek y_t için öngörü değerleri de elde edilebilir.

Daha önce geriye fark işlecinin işlevi $\nabla y_t = y_t - y_{t-1} = (1-B)y_t$ şeklinde açıklanmıştı. Kısaca $\nabla = (1 - B)$ 'dir. Ayrıca $\nabla^{-1} = (1 - B)^{-1} = 1+B+B^2+\dots = \Sigma$ 'dir. $t=2,3,\dots,n$ olmak üzere $z_t = \nabla y_t$ ise, $y_t = (1 - B)^{-1}z_t = \Sigma z_t + y_1$ yazılabilir. Yani,

$$y_2 = z_2 + y_1, \quad y_3 = z_3 + z_2 + y_1, \quad \dots, \quad y_t = z_t + z_{t-1} + \dots + z_2 + y_1$$

Buna göre y_t , ardışık farklar ile bir başlangıç değerinin toplamından ibarettir.

$\phi(B)\nabla^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ biçimindeki orijinal ARIMA (p,d,q) ifadesinde $\phi(B)\nabla^d$ sağ tarafa tersi alınarak geçirilirse,

$$y_t = \nabla^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)\varepsilon_t \quad \text{veya} \quad y_t = \psi(B)\varepsilon_t$$

olur. Burada $\psi(B)$, $\phi^{-1}(B)$, $\theta(B)$ ve ∇^{-d} nin çarpımıdır. $\psi(B)$ yine sonsuz dereceli bir polinomdur ve sonsuz sayıdaki geçmiş ε değerlerinin toplamının yakınsak olacağı kesin değildir. Diğer taraftan p ve q dereceleri yükseldikçe ψ ağırlıklarını hesaplamak zorlaşmaktadır.⁷⁰

Box-Jenkins yöntemine dayalı ARIMA modelleriyle öngörülerin örneklem-dışı dönemlerde performanslarının düşük olduğu yönünde bulgular vardır. Makridakis ve Hibon (1997), Box-Jenkins metodolojisini kullanarak ARIMA modellerini incelemişler ve deneysel testlerde neden bu sınıftan modellerin daha basit zaman serisi yöntemlerine göre daha kötü örneklem-dışı öngörü verdiğini araştırmışlardır. Asıl sorunun, ortalamadan fark alınarak serinin durağanlaştırılması konusunda Box ve Jenkins'in önermiş olduğu yoldan kaynaklandığı sonucuna varmışlardır. Ayrıca AR(1), AR(2) ve ARMA(1,1) modellerinin, Box-Jenkins

⁶⁹ Stewart, a.e., s. 240

⁷⁰ Stewart, a.e., s. 240,241

metodolojisi kullanılarak bulunanlara göre daha doğru örneklem-dışı öngörüler verdiklerini bulgulamışlardır.⁷¹



⁷¹ S. Makridakis and M. Hibon, “ARMA models and the Box-Jenkins methodology”, **Journal of Forecasting**, Vol. 16, 1997, s. 147-163

BÖLÜM 3. BAYESYEN ÖNGÖRÜ VE ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ

3.1. Giriş

Önceki bölümde öngörü, “bir değişkene ait tarihsel verilerden başka bir şey olmayan bir zaman serisinden yararlanarak değişkenin gelecek dönemlerde alacağı değerleri önceden tahmin etmek” şeklinde tanımlanmıştı. Buna göre öngörü geçmiş, şimdi ve gelecek ile ilgilidir ve eldeki zaman serisinin analizine dayalı bir süreçtir. Ancak sadece tarihsel bir gözlem dizisine dayanarak bir zaman serisi analizine girişmek ve bu analize dayanarak öngörüde bulunmak, sahip olunabilecek birtakım dışsal bilgiler göz ardı edilebileceğinden gerçekten daha uzak öngörülere, yani daha büyük öngörü hatasına yol açabilecektir. Birinci bölümde de belirtildiği gibi, Bayesyen yöntem sayesinde bu tür dışsal bilgileri analize katmak ve böylece daha düşük öngörü hatasına sahip yöntemler geliştirmek mümkündür.

Önceki bölümde tanıtılan klâsik veya geleneksel zaman serileri analizi ve öngörü yaklaşımları dışsal bilgiyi ve analiz doğrultusunda alınacak kararların kayıp/kazanç fonksiyonunu göz önüne almamaktadır. Ayrıca bu yaklaşım, öngörü sisteminde yer alan kişilerin birbirleriyle ve öngörü sistemiyle etkileşimlerini/ ilişkilerini ihmal etmektedir. Oysa, kullanılan gözlem seti dışında, rakip bir firmanın yakında batacağı, rakip bir ürünün yakında piyasaya sürüleceği veya yeni bir yasal düzenlemenin yakında yürürlüğe gireceği v.b. gibi birtakım dışsal bilgilere de sahip olunabilir. Bu bilgiler örneklerdeki gibi niteliksel olabileceği kadar niceliksel bazı bilgilerden ibaret de olabilir. Nitel bir olaya ait bilginin etkisini analize dahil etmek, nicel bir bilgiye nazaran daha zor olsa da, mümkündür. Nitel veya nicel bilgilerin etkileri ve bunlarla ilişkili belirsizlikler olasılık dağılımları kullanılarak eldeki zaman serisi bilgisine eklenlenebilir hale getirilebilir ve böylece sahip olunan belirsiz bilgi

karar alıcılar tarafından açık seçik biçimde yorumlanıp kabul edilebilir. İyi bir öngörü sistemi önemli dalgalanmalara derhal tepki verebilmeli ve süreçte gerçekten az hareketlilik olduğu “sükûnet dönemleri”nde büyük sıçramalar gösteren öngörüler vermemelidir.¹

Bayesyen istatistiğe göre her türlü belirsizlik olasılıklarla ifade edilebilir ve ölçülebilir. Böylece Bayesyen yaklaşım aracılığıyla birçok nedenden kaynaklanabilen belirsizlik durumları karşısında bireysel davranışa yönelik akılcı ve tutarlı bir normatif yapı oluşturulmaktadır.² Belirsizlik durumu matematiksel bir dille ifade edildikten sonra eldeki niceliklere olasılık kuralları uygulanarak olasılıksal çıkarsamalarda bulunmaktadır. Öngörü bağlamında bu nicelikler zaman serisinin ve model parametrelerinin gelecek dönem değerleri olabilir. Buna göre Bayesyen öngörü, olasılık dağılımı biçimindeki öngörü bilgisinin elde edilmesini ve halihazırda sahip olunan belirsiz bilgi ve kanaatlerin ifade edilmesini içermektedir. Tüm olasılıklar subjektiftir ve öngörü bilgisinin elde edilmesi model kurucu veya öngöründe bulunan kişinin yükümlülüğündedir.³

Bayesyen yaklaşım doğaldır, çünkü ekonomik konularda insanlar kümülatif olasılıklar halinde parametrelere ilişkin bilgilerini almak ya da vermek istemekle birlikte belirsizlik karşısında karar almakla da ilgilidirler. Bu kararlar gelecekle ilgili kanaatleri ve gelecekteki olası sonuçlara ilişkin alınacak kararların maliyetini de içermektedir. Geleceğe ilişkin belirsizlik sadece rassal şoklardan değil, parametrelerin cari dönemdeki değerlerinin belirsizliğinden ve kullanılan modelin şimdi ile geleceği ilişkilendirme yeteneğinden de kaynaklanmaktadır.⁴

Bayesyen yöntemin cazip özellikleri,

i) veri yokluğunda bile işe yaraması,

¹ P.J. Harrison ve C.F. Stevens, “Bayesian forecasting”, *J. Roy. Statist. Soc.*, (B), 38, 1976, s. 206

² M. West ve P. J. Harrison, *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997, s. 20

³ West ve Harrison, a.g.e., s. 21

⁴ Harrison ve Stevens, a.g.y., s. 208

- ii) ister otomatik olarak ister kullanıcı kontrolü altında, birçok farklı karmaşıklığı belirtme ve uygun biçimde tepki verme yeteneği,
- iii) gözlem hatasına (noise) olduğu kadar parametre belirsizliğine de dayalı olarak gerçekçi öngörü hatası tahminleri vermesidir.⁵

Bayesyen öngörü ve zaman serileri analizi, orijin olarak iletişim ve kontrol mühendisliği problemleri için geliştirilen ancak sonraları ekonomi, finans ve sosyal bilimlerdeki tahmin ve öngörü konularında da yaygın bir kullanım alanı bulan Kalman doğrusal filtreleme yönteminin özel bir halidir.⁶ Bununla birlikte, özel bir durum olarak, sabit katsayılı bir regresyon denkleminde hareketle öngöründe bulunmak da mümkündür. Montgomery v.d. (1990)'da Bayesyen öngörü tekniği bu bağlamda ele alınmaktadır.⁷ Bu çalışmada ele alınan dinamik lineer modeller, sabit katsayılı regresyon modelleri de dahil olmak üzere birçok farklı duruma uyarlanabilen kullanışlı bir araç sunmaktadır.

Bayesyen öngörü yaklaşımı sayesinde lineer regresyon, üssel düzleştirme ve lineer zaman serileri modelleri gibi geleneksel yöntemler ele alınabildiği kadar, sözgelimi, hiç bir başlangıç verisinin bulunmadığı durumlarda öngöründe bulunabilmek gibi başka bir takım kolaylıklara sahip olmak da mümkündür.

Bayesyen yaklaşımda model durum-uzayı biçiminde oluşturularak parametrelere ilişkin herhangi bir andaki bilgi olasılıksal olarak ifade edilmekte ve ardışık bir model yapısıyla parametrelerin sistematik olarak veya rassal şoklardan dolayı zaman içinde nasıl değişime uğradıkları tanımlanmaktadır. Ayrıca modelin kendisinin içerdiği belirsizlik göz önüne alınabilmektedir.⁸ Buna göre, Bayesyen yaklaşımın özellikle öngörülere ilişkin belirsizliklerin ve ani tepki fonksiyonlarının incelenmesinde yararlı olduğu söylenebilir.⁹ Koop v.d. (1995)'de son çıkarsama

⁵ Harrison ve Stevens, a.g.y., s. 209

⁶ Kayım, a.e., s. 24

⁷ D.C. Montgomery, L.A. Johnson ve J.S. Gardiner, **Forecasting and Time Series Analysis**, 2nd ed., McGraw-Hill, Singapore, 1990, Chapter 12

⁸ Harrison ve Stevens, a.g.y., s. 206

⁹ G.S. Maddala ve I.M. Kim, **Unit Roots, Cointegration and Structural Change**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, s. 290

veya kısa dönemli öngöründe pek etkili olmayan ön- bilginin uzun dönemli öngörülerde belirleyici olduğu ortaya konulmakta ve uzun dönemli öngörülerin öndağılıma ilişkin görünüşte zararsız olan varsayımlara karşı ne kadar hassas olabildikleri gösterilmektedir.¹⁰ Ani tepki fonksiyonlarında ise bu sorun daha da ciddileşmektedir.¹¹

3.2. Durum Uzayı Gösterimi ve Kalman Filtreleme Yöntemi

Etkin bir öğrenme süreci, öğrenilen yeni bilgilerin daha önceden sahip olunan bilgilere uygun bir şekilde eklenmesini gerektirir. Yeni bilgi önceki bilgiyi güçlendirir, değiştirir veya geçersiz kılar. Bu nedenle öğrenme dinamik bir süreçtir ve ancak dinamik bir model aracılığıyla gerektiği gibi ifade edilebilir. Bu amaçla kullanılabilecek en uygun araçlardan biri süreci *durum uzayı modeli* biçiminde ifade etmektir. Bir durum uzayı modeli en genel şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$y_t = x_t' \theta_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, V_t)$$

$$\theta_t = \lambda \theta_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, W_t)$$

Burada, θ_t gözlenemeyen ($p \times 1$) boyutlu durum vektörü, y_t gözlenebilen ($q \times 1$) boyutlu gözlem vektörü, x_t ($q \times p$) boyutlu gözlenebilen bağımsız (dışsal) değişkenler matrisi, λ ise parametrelerin evrimini tanımlayan bilinen bir matristir. v_t ve ω_t ise bağımsız ve benzer dağılımlı hata ve sapma terimleridir. İlk denklemdeki x_t 'nin önceden belirlenmiş (dışsal) olması θ_t (veya v_t) hakkında hiçbir bilgi içermediği anlamına gelmektedir. Bu nedenle x_t vektörü y_t 'nin gecikmeli değerlerini veya θ_t (veya v_t) ile ilişkisiz değişkenleri içerebilir.¹²

Durum uzayı modelleri mühendislikte çok yaygın olarak kullanılmakla birlikte daha sonraları ekonomi, finans ve genel olarak sosyal bilimlerde de uygulama alanı bulmuştur. Mühendislik terminolojisinde modeldeki ilk denklem

¹⁰ G. Koop, J. Osiewalski ve M.F.J. Steel, "Bayesian long-run prediction in time series models", *Journal of Econometrics*, 69, 1995, s. 61-80

¹¹ Maddala ve Kim, a.e., s. 291

¹² J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton, New Jersey, 1994, s. 373

ölçüm (gözlem) denklemi olarak adlandırılmaktadır ve bağımlı değişkenin gözlenen değerlerini, gözlenemeyen θ_t parametreleri yoluyla bağımsız değişkenlerle ilişkilendirmektedir. İkinci denklem ise geçiş (sistem, evrim) denklemidir ve gözlenemeyen parametrelerin zaman içindeki evrimini tanımlamaktadır.¹³ Böylece carî gözlemlerle önceki bir öngörüü birleştirmek ve θ_t 'lerin gelecekteki değerlerini öngörmek konusunda uygun bir yöntem sağlamaktadır. Ayrıca durum uzayı modelleri θ_t 'lerin diğer klasik yöntemlere göre daha doğru bir şekilde tahmin edilmesini kolaylaştırmaktadır.¹⁴ Çoğu zaman serisi modeli durum uzayı biçiminde ifade edilebilir. Regresyon ve ARMA modelleri, üssel düzeltme yöntemlerine uygun olduğu düşünülen trend ve dönemsel etki modelleri ile katsayıları zaman içinde değişen modeller bu kapsama girmektedir.¹⁵ Sabit varyanslı durum uzayı modeli rassal gürültü terimi eklenmiş bir Markov sürecine dayandığından hisse senedi fiyatlarının modellenmesi açısından uygundur.¹⁶

Durum uzayı modelleri, yeni veriler elde edildikçe mevcut bilginin güncellenmesi ilkesine dayandığından özellikle Bayesyen yaklaşım açısından elverişli bir araç sunmaktadır.¹⁷ Bayesyen yaklaşım sayesinde durum uzayı modelinin ölçüm denklemi ile geçiş denkleminin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını (oyf) birleştirmek mümkün olmaktadır. Bu bileşik oyf'den birincil (θ_t) ve ikincil parametrelerin (λ , W_t) son dağılımları elde edilebilir.¹⁸ Durum uzayı modeline dayalı olarak zaman serisi ve regresyon modellerinin Bayesyen yaklaşım çerçevesinde kullanım imkânları ilk olarak Harrison ve Stevens (1976)'da ortaya konulmuş, West

¹³ P. Newbold ve T. Bos, **Stochastic Parameter Regression Models**, 3rd ed., Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, Series No: 07-051, Sage Pubns., Newbury Park, 1990, s. 25

¹⁴ L.M. Liu ve D.M. Hanssens, "A Bayesian approach to time-varying cross-sectional regression models", **Journal of Economics**, 15, 1981, s. 355

¹⁵ Chatfield, a.e., s. 182

¹⁶ T. Leonard ve J.S.J. Hsu, **Bayesian Methods**, Cambridge, 1999, s. 233

¹⁷ B.P. Carlin ve T.A. Louis, **Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis**, Monographs on Statistics and Applied Probability: 69, Chapman and Hall, London, 1997, s. 253

¹⁸ Liu ve Hanssens, a.e., s. 354

ve Harrison (1997) ve Pole, West ve Harrison (1994)'de ise daha detaylı olarak ele alınmıştır.¹⁹

Mühendislik uygulamalarında her bir zaman biriminde sadece bir veri noktasının gözlemlendiği ve $V_t = 0$ olduğu varsayılmaktadır. Bu nedenle ikincil parametreleri tahmin etmek mümkün değildir ve önceden bilindiklerini varsaymak gerekmektedir.²⁰ Bu ise mühendislik kontrol teorisinden istatistik ve ekonometriye geçildiğinde çok katı bir kısıt oluşturmaktadır.

Yukarıdaki durum uzayı modeli *Kalman filtresi* kullanılarak tahmin edilebilir. R.E. Kalman tarafından 1960'ların başında geliştirilen doğrusal filtreleme ve kestirim (prediction) yöntemi ilk olarak uygulandığı mühendislik problemlerinin yanı sıra zamanla istatistik ve ekonometride de uygulama alanı bulmuş, stokastik katsayılı modellerden düzgünleştirmeye, eksik gözlem sorunundan toplulaştırma konusuna kadar çok çeşitli problemlerin çözümünde kullanılmıştır.²¹ Algoritmasının yinelemeye dayanması nedeniyle bilgisayar programlamasına elverişlidir.

Kalman filtresi durum-uzay modelinin kurulmasından sonra durum vektörünün ortalama ve kovaryansının elde edilmesi için kullanılmaktadır. Böylece normallik ve doğrusallık koşulları altında y_t için hata kareleri ortalamasını minimum yapan tahminler elde edilmektedir.²² Diğer taraftan, dinamik makroekonomik modellerin Bayesyen analizinde genellikle olabilirlik fonksiyonunun tam biçimi bilinemediğinden, verilere ilişkin olabilirlik fonksiyonunu belirlemek için de Kalman filtresinden yararlanılmaktadır.²³

¹⁹ P. Congdon, **Bayesian Statistical Modelling**, Wiley, Chichester, 2001, s. 277

²⁰ A.H. Sarris, "Kalman filter models: A Bayesian approach to estimation of time-varying regression coefficients", **Annals of Economic and Social Measurement**, 2, 1973, s. 501-523

²¹ Kalman filtresinin mühendislik problemlerine yönelik kullanımı konusunda bkz. A. Papoulis, **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**, 2nd ed., McGraw Hill, 1984, chapter 13

²² S. Yurt, "Dinamik sistem modelleri ile mekan süreçleri analizi ve Türkiye buğday verimi üzerine bir uygulama", **DİE Araştırma Sempozyumu Bildirileri**, Ankara, 1997, s. 225

²³ D.N. DeJong, B.F. Ingram ve C.H. Whiteman, "A Bayesian approach to dynamic macro-economics", **J. Econometrics**, 98, 2000, s. 203-223

Kalman filtresi ile durum uzayı modelinin tahmini ardışık bir süreçte dayanmaktadır ve yeni bir gözleme ulaşıldığında θ_t 'nin tahminini güncelleme imkânı veren bir denklemler takımından ibarettir. Bu güncelleme işlemi *kestirim (öngörü)* ve *güncelleme* olmak üzere iki aşamadan oluşmaktadır.²⁴ Bunu yaparken v_t ve ω_t 'nin normal dağılıma uyduğu varsayılmaktadır.

Herhangi bir t anında, $t-1$ anına kadarki ($t-1$ dahil) veriler kullanılarak tahmin edilen θ değeri $\hat{\theta}_{(t|t-1)}$ ile gösterilsin. Bu tahmine ait varyans-kovaryans matrisi $P_{(t-1)}$ olsun. Bu aşamada henüz ω_t değeri bilinmediğinden

$$\hat{\theta}_{(t|t-1)} = \lambda \hat{\theta}_{(t-1)}$$

yazılabilir. Varyans-kovaryans matrisi ise

$$P_{(t|t-1)} = \lambda P_{(t-1)} \lambda' + W_t$$

Kurulan durum uzayı modeli yardımıyla t başlangıç anından itibaren ℓ dönem ileri öngörüler aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t(\ell) &= E(\theta_{t+\ell} | \theta_j, j \leq t) \\ &= \lambda \hat{\theta}_t(\ell-1) = \lambda \lambda \hat{\theta}_t(\ell-2) = \dots = \lambda^\ell \hat{\theta}_t \end{aligned}$$

Buna göre y_t için ℓ dönem ileri öngörü,

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(\ell) &= E(y_{t+\ell} | y_j, j \leq t) \\ &= x_t' \hat{\theta}_t(\ell) = x_t' \lambda^\ell \hat{\theta}_t \end{aligned}$$

olur. Burada $\hat{\theta}_t$, durum vektörü θ_t 'nin tahminidir ve $\hat{\theta}_t = E(\theta_t | \theta_j, j \leq t) = \theta_t$ 'dir. $\hat{\theta}_t$, geleceği öngörmek için gerekli olan geçmişten gelen bilgiyi temsil etmektedir. Yeni bir gözleme ulaşıldığında bu veri kullanılarak durum vektörünün ve öngörülerin güncellenmesi gerekmektedir.²⁵

²⁴ Chatfield, a.e., s. 187

²⁵ W.W.S. Wei, *Time Series Analysis*, Addison-Wesley, 1994, s. 399

$\theta_{t|t}$ 'nin evrimi *filtreleme* olarak bilinmektedir. $\theta_{t|s}$ ($s > t$) nin evrimi *düzleştirme*, $\theta_{t|s}$ ($s < t$) nin evrimi ise *kestirim (öngörü)* olarak adlandırılmaktadır.²⁶

$\theta_{(t|t-1)}$ 'in dağılımının ortalama ve varyansı;

$$\theta_{(t|t-1)} = E(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) \quad \text{ve} \quad P_{(t|t-1)} = \text{Var}(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1})$$

$y_{(t|t-1)}$ 'in dağılımının ortalama ve varyansı;

$$y_{(t|t-1)} = E(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) \quad \text{ve} \quad h_t = \text{Var}(y_t | y_1, \dots, y_{t-1})$$

Öncelikle $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ gözlemleri (bilgisi) veri iken θ_t ve y_t 'nin ortak dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. θ_t ve y_t normal dağıldıklarından bunların ortak dağılımı da çok değişkenli normal dağılıma sahip olacaktır, dolayısıyla ortalama ve varyans-kovaryans matrisi ile bu dağılım karakterize edilebilir.

Şimdi θ_t ile y_t arasındaki ilişkiye bakalım,

$$E(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = \lambda E(\theta_{t-1} | y_1, \dots, y_{t-1}) + E(v_t | y_1, \dots, y_{t-1})$$

v_t ile y_t varsayım gereği ilişkisiz olduğundan eşitliğin sağ yanındaki son ifade sıfıra eşittir. Buna göre, $\theta_{(t|t-1)} = \lambda \theta_{(t-1|t-1)}$ olur.

$$\text{Var}(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = \lambda' P_{(t-1|t-1)} \lambda + \text{Var}(\omega_t)$$

Burada, $\text{Var}(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = P_{(t|t-1)}$, $\text{Var}(\omega_t) = W_t$ olduğundan kısaca,

$$P_{(t|t-1)} = \lambda' P_{(t-1|t-1)} \lambda + W_t \text{ yazılabilir.}$$

$$E(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = x_t' E(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) + E(v_t | y_1, \dots, y_{t-1})$$

Yine varsayım gereği eşitliğin sağ yanındaki son terim sıfırdır. Dolayısıyla, $y_{(t|t-1)} = x_t' \theta_{(t|t-1)}$

$$\text{Var}(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = x_t' \text{Var}(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) x_t + \text{Var}(v_t)$$

$$h_t = x_t' P_{(t|t-1)} x_t + V_t$$

Ve son olarak θ_t ve y_t 'nin kovaryansı,

$$\text{Cov}(\theta_t, y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) = \text{Var}(\theta_t | y_1, \dots, y_{t-1}) x_t = P_{(t|t-1)} x_t$$

²⁶ G.C. Chow, **Random Changing Coefficient Models**, Handbook of Econometrics, Vol. II içinde, Chapter 21, Ed. by Z. Griliches and M.D. Intriligator, Elsevier Science, 1984, s. 1214

Buna göre,

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \theta_{(t-1|t-1)} \\ x_t' \theta_{(t|t-1)} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' P_{(t-1|t-1)} \lambda + W_t & P_{(t|t-1)} x_t \\ x_t' P_{(t|t-1)} & x_t' P_{(t|t-1)} x_t + V_t \end{pmatrix}$$

Daha toplu olarak ifade edilecek olursa,

$$\begin{pmatrix} \theta_t \\ y_t \end{pmatrix}_{t-1} \sim N \left[\begin{pmatrix} \lambda \theta_{(t-1|t-1)} \\ x_t' \theta_{(t|t-1)} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} P_{(t|t-1)} & P_{(t|t-1)} x_t \\ x_t' P_{(t|t-1)} & h_t \end{pmatrix} \right]$$

Bundan sonra t anında y_t gözlemlendikten sonra $y_1, y_2, \dots, y_t$ veri iken θ_t 'nin dağılımını tanımlamak gerekmektedir. Bu da $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ veri iken θ_t 'nin dağılımının, $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ veri iken y_t 'nin dağılımına koşullu olarak ifade edilmesiyle elde edilebilir.

Çok-değişkenli normal dağılımın özelliklerine göre, z_1 ve z_2 gibi normal dağılımlı iki rassal değişken vektörünün ortak olasılık dağılımı çok-değişkenli bir normal dağılımdır. Bu değişkenlerin ortalama ve kovaryans matrisleri μ_i ve Σ_{ii} ($i = 1, 2$) olmak üzere,

$$E(z_i) = \mu_i \quad \text{ve} \quad E[(z_i - \mu_i)(z_i - \mu_i)'] = \Sigma_{ii} \quad , (i = 1, 2)$$

Değişkenler arasındaki kovaryans ise $E[(z_1 - \mu_1)(z_2 - \mu_2)'] = \Sigma_{12}$ 'dir.* Buna göre,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right]$$

z_2 veri iken z_1 'in dağılımı da çok-değişkenli normal dağılımdır ve ortalama ve varyansı aşağıdaki gibidir,^{27,28}

$$E(z_1|z_2) = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (z_2 - \mu_2) \quad \text{ve} \quad \text{Var}(z_1|z_2) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} E(\theta_t|y_t) &= \theta_{(t|t)} = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (z_2 - \mu_2) \\ &= \lambda \theta_{(t-1|t-1)} + P_{(t|t-1)} x_t h_t^{-1} [y_t - x_t' \theta_{(t|t-1)}] \end{aligned}$$

* Kovaryans matrisi simetrik olduğundan $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ 'dir.

²⁷ Newbold ve Bos, a.e., s. 42, 43

²⁸ Wei, a.e., s. 400

$$\begin{aligned}\text{Var}(\theta_t|y_t) &= P_{(t|t)} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ &= P_{(t|t-1)} - P_{(t|t-1)} x_t h_t^{-1} x_t' P_{(t|t-1)}\end{aligned}$$

biçiminde olmaktadır. Böylece yukarıdaki sonuçları toparlayarak Kalman filtresi algoritmasını oluşturabilecek aşamaya gelinmiş olunmaktadır.

$$\begin{aligned}\theta_{(t|t-1)} &= \lambda \theta_{(t-1|t-1)} \\ P_{(t|t-1)} &= \lambda' P_{(t-1|t-1)} \lambda + W_t \\ h_t &= x_t' P_{(t|t-1)} x_t + V_t \\ \theta_{(t|t)} &= \lambda \theta_{(t-1|t-1)} + K_{(t|t)} [y_t - x_t' \theta_{(t|t-1)}] \\ P_{(t|t)} &= P_{(t|t-1)} - K_{(t|t)} x_t' P_{(t|t-1)}\end{aligned}$$

Burada, $K_{(t|t)} = P_{(t|t-1)} x_t h_t^{-1}$ dir ve Kalman artışı (gain) olarak da adlandırılmaktadır. Yukarıdaki beş denklem Kalman filtresi algoritmasını oluşturmaktadır. Buna göre Kalman filtreleme tekniği, şu anki durumun bir başlangıç tahminini oluşturmak ve bu tahmini bir düzeltme ekleyerek gözden geçirmekten ibaret olan ardışık bir güncelleme yöntemidir. Yapılan düzeltmenin derecesi ise başlangıç tahmininin yeni gözlemi (y_t) ne kadar iyi kestirdiğine bağlıdır. Ardışık güncelleme sürecinde Kalman artışı bir limit değere yaklaştıkça Kalman filtresi de durgunlaşma eğilimi gösterir.²⁹

Parametrelerin tahmini yukarıda olduğu gibi Kalman filtresi ile ardışık bir yolla yapılabileceği gibi Aitken'in *genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi* ile de aynı sonuçlar elde edilebilir. V_t , W_t ve λ 'nın değerleri bilinmediğinde en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilebilir.³⁰

Kalman filtresini kullanarak parametreleri tahmin edebilmek ve öngöründe bulunabilmek için $\theta_{0|0}$ ve $P_{0|0}$ başlangıç değerlerine ihtiyaç vardır. Bu değerler hiçbir gözlem bilgisi mevcut değilken θ_0 parametre vektörünün ortalama ve varyans matrisidir. Çoğu kez bu başlangıç değerleri oldukça keyfi bir şekilde tayin edilmektedir. Bununla birlikte ardışık olarak hesaplama süreci ilerledikçe bu keyfi seçimin son hesaplanan değer üzerindeki etkisi giderek azalmaktadır. $\theta_{0|0}$ ve $P_{0|0}$

²⁹ Wei, a.g.e., s. 402

³⁰ Chow, a.e., s. 1214, 1215

başlangıç değerleri kullanılarak $\theta_{1|0}$, $P_{1|0}$, h_1 , $\theta_{1|1}$ ve $P_{1|1}$ hesaplanır. Sonraki adımda $\theta_{1|1}$ ve $P_{1|1}$ kullanılarak $\theta_{2|2}$, $P_{2|1}$, h_2 , $\theta_{2|2}$ ve $P_{2|2}$ bulunur. Bu şekilde ardışık hesaplamalar sonunda nihayet $t = n$ için $\theta_{n|n-1}$, $P_{n|n-1}$, h_n , $\theta_{n|n}$ ve $P_{n|n}$ değerlerine ulaşılmaktadır.³¹ Ayrıca Kalman algoritması modelin sabit parametrelerinin (V , W , λ) en çok olabilirlik tahminleri, stokastik parametrelerin (θ_t) ve bağımlı değişkenin gelecek dönemlerdeki değerlerinin öngörülerini için bir temel sağlamaktadır.³²

Kalman filtresi algoritması yukarıdaki şekilde klâsik regresyon teorisinden hareketle türetilbildiği gibi Bayesyen yöntemlere başvurarak da geliştirilebilir. Bunun için, $\theta_{t-1|t-1}$ ortalama ve $P_{t-1|t-1}$ kovaryans matrisi ile normal bir dağılıma sahip olan θ_{t-1} ön yoğunluk fonksiyonu veri iken, θ_t 'ye ait, $\theta_{t|t-1} = \lambda\theta_{t-1|t-1}$ ortalama ve $P_{t|t-1} = \lambda P_{t-1|t-1}\lambda' + W_t$ varyansla normal dağılan bir ön yoğunluk fonksiyonu bulunabilir. Kalman filtresinde verildiği gibi, y_t veri iken θ_t 'nin son yoğunluk fonksiyonu $\theta_{t|t}$ ortalama ve $P_{t|t}$ kovaryans matrisli bir normal dağılım göstermektedir.³³

3.3. Dinamik Lineer Modeller ve Bayesyen Öngörü Yöntemi

Regresyon modellerinin yanı sıra otoregresif bütünsel hareketli ortalamalar (ARIMA) ve üssel ağırlıklandırılmış hareketli ortalamalar (EWMA) gibi klâsik zaman serisi modelleri, parametreleri gözlem süresi boyunca değişmeyen sabit sayılar kümesi olarak alan *statik* modellerdir. Statik model formülasyonunda sayısal ilişkinin tüm veri uzayında aynı olduğu varsayılmaktadır. Bazı durumlarda bu varsayım tatminkâr olsa da çoğu durumda önemli bir kısıt oluşturmaktadır. Oysa sadece zamanın geçmesi bile birçok durumu, koşulu, ilişkiyi değiştirmeye yeter.

Süreçlerin ya da sistemlerin dinamik yapıları zamanın geçişine bağlı olarak ortaya çıkan belirsizliğin göz önüne alınmasını gerekli kılar. $Y = X\theta + \varepsilon$ modelinde belirsizlik içeren θ parametresine ait bilgi $p(\theta)$ olasılık dağılımı ile ifade edilebilir. Modelin biçimi belli bir andaki durumu yansıttığından değişime bağlı olarak θ 'nın

³¹ Newbold ve Bos, a.e., s. 30

³² Newbold ve Bos, a.e., s. 31

³³ Chow, a.e., s. 1216

evirilmesi gerekir. Hatta daha ileri dönemlerde girdi değişkenlerinin tamamen farklılaşmasından dolayı modelin biçimini de değiştirmek gerekebilir. Bu gibi durumlar “denklem takımları dizisi” olarak da adlandırılan dinamik modelleri gerekli kılmaktadır. Zaman serileri ve regresyon modellemesi için uygun bir araç olan ve zamanla değişen parametrelili modellerin daha geniş bir sınıfını oluşturan dinamik lineer modeller (DLM), Harrison ve Stevens (1976) tarafından tanıtılmış, West ve Harrison (1997)’de ise detaylı olarak ele alınmıştır. Konunun daha uygulamaya dönük olarak anlatımı ise Pole, West ve Harrison (1994)’de bulunabilir. Doğrusal ve normal olmayan regresyon ve zaman serisi problemleri için standart genelleştirilmiş doğrusal modellere dinamik bir açılım sağlayan dinamik Bayesyen modeller ise West, Harrison ve Migon (1985)’de incelenmiştir.³⁴

Bayesyen öngörü ve zaman serileri analizinin temel aracı Bayes teoremi olmakla beraber, yaklaşımın temelini durum-uzay modeli olarak da adlandırılan dinamik lineer model (DLM) oluşturmaktadır.

Bayesyen öngörü ve dinamik modellemenin başvurduğu ilkeler,

- anlamlı dinamik parametrelere sahip parametrik modelleri,
- parametrelere ilişkin bilginin olasılıksal bir ifadesini,
- koşullu bağımsızlığa dayalı bir model tanımını,
- güçlü (robust) koşullu bağımsız model bileşenlerini,
- olasılık dağılımları biçiminde türetilen öngörülerini,
- uzman bilgisini hesaba katmak için bir araç, ve
- model kalite kontrolünü, içermektedir.

Dinamik modeller zaman serileri analizinde yaygın ve doğal bir kullanıma sahiptir. *Dinamik* terimi, zamanın geçmesine bağlı olarak süreçte de değişim olduğunu ifade etmek amacıyla kullanılmaktadır. Zamanın ilerlemesiyle geleceği öngörmekte kullanılabilecek bilgi elde edilir ve bu bilgi modelin biçiminin,

³⁴ M. West, P. J. Harrison ve H. S. Migon, “Dynamic generalized linear models and Bayesian Forecasting”, *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 80, N. 389, s. 73-83

kavramsal altyapısının ve değişkenlerinin revize edilmesinde kullanılabilir. Bu revizyon süreci ardışık (sequential) model yaklaşımı olarak nitelendirilebilir.

Dinamik parametreleştirme, özellikle sosyal bilimler açısından gerçek durumu daha iyi yansıtmaktadır, çünkü bir zaman serisini etkileyen faktörlerin kendileri de değişime uğrayabilmektedir. Bu tür olaylar gerçekleştikten sonra fark edilebilirlerse de, daha önceden belirlenmeleri zordur ve (bu nedenle) gerçekleşinceye kadar dikkate alınmamaktadırlar.³⁵

3.3.1. Bayes Teoremi

1. Bölüm'ün başında A ve B gibi iki olay için Bayes Teoremi ifadesi verilmişti. Buna göre,

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

dir. Burada, $p(x|y)$ şeklindeki koşullu olasılık ifadeleri, y bilgisine koşullu olarak x'in oyf'sini göstermektedir. Bayesyen analiz bağlamında $p(A)$, θ parametre vektörüne ilişkin ön olasılıkları; $p(B|A)$ koşullu oyf'si, parametre uzayını belli bir değer kümesini alması durumu için Y'nin olasılığını (başka bir deyişle, $Y_t = y_t$ iken θ 'nın olabilirliğini); $p(A|B)$ koşullu olasılığı ise θ parametre vektörünün $Y_t = y_t$ için son oyf'sini ifade etmektedir. $p(B)$ ise $p(Y_t = y_t)$ 'ye karşılık gelmektedir ve θ_t ile ilişkili olmayıp denklemde sadece bir normalleştirme sabiti olarak yer almaktadır. Bu güncelleme veya öğrenme tarzı sözel olarak da çoğu zaman, (son olasılık) $\propto$ (gözlenen olabilirlik) $\times$ (ön olasılık) şeklinde ifade edilmektedir.

3.3.2. Bayes Teoremi'ne Dayalı Güncelleme Algoritması

D_0 , içinde bulunulan (cari) zamanda ($t = 0$) sahip olunan bilgi setini ifade etsin. Bu bilgi, gelecek hakkındaki başlangıçta sahip olunan görüşleri biçimlendirmekte kullanılan başlangıç bilgisidir. Gelecek bir anı ($t > 0$) öngörürken

³⁵ West and Harrison, a.e., s. 97

temel hedef, $(Y_t|D_0)$ için öngörü dağılımını hesaplamaktır. Dolayısıyla bir t anında daha ileriye (Y_{t+1}) öngörürken D_t bilgi seti ve $(Y_{t+1}|D_t)$ öngörü dağılımı kullanılmaktadır. Zaman ilerledikçe eldeki bilgiler de değişecektir. Herhangi bir t anında Y_t değeri gözlemlendiğinde eldeki bilgi stoku (D_t), önceki bilgiler (D_{t-1}) ve Y_t 'nin toplamından oluşur, yani $D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$. Bir serinin gelecekteki gelişimi, geçmişe dönük bilgi birikimine (D_{t-1}) koşullu olarak, $Y_t, Y_{t+1}, \dots$, değerlerine ait bir olasılık dağılımı ile ifade edilir. Genellikle bu olasılık dağılımı parametre vektörüne de bağımlı olur. Buna göre Y_t için olasılık dağılımı $p(Y_t|\theta_t, D_{t-1})$ biçiminde yazılabilir. θ_t , t anındaki parametre vektörüdür ve bu haliyle dinamik bir parametrelendirmeye işaret etmektedir.

θ_t parametre vektörü, öngörü bilgisini özetleyen ve öngörü dağılımlarının oluşturulmasında kullanılan araçları sunmaktadır. Öğrenme süreci sayesinde bu parametrelere ait bilgiler düzenli olarak revize edilmektedir. Sahip olunan tüm belirsiz (kesin olmayan) bilginin olasılıksal olarak ifade edilmesi, bu bilgi ister gelecekle ilgili olsun isterse gözlenebilir niceliklerle veya gözlenemez model parametreleriyle ilgili olsun, Bayesyen yaklaşımın esasını oluşturmaktadır. Bir t anında, D_{t-1} bilgi birikimi gelecek model parametreleri için bir ön dağılım olarak ifade edilir. Bu $p(\theta_t|D_{t-1})$ ön oyf ve $p(\theta_t|D_t)$ son oyf zaman serisi sürecine ilişkin bilginin zaman boyunca özlü, tutarlı ve etkili biçimde nakledilmesini sağlamaktadır. Bu olasılıksal ifade tarzı, gözlemlerden elde edilen bilgiyi işleme ve öngörüde kullanmanın yanı sıra dışsal kaynaklardan gelen bilginin sisteme eklemlenmesine ve buna bağlı belirsizlikleri göz önünde bulundurmaya da imkân tanımaktadır. Bu hareket tarzı öngörülerini birleştirmeyi ve belirli kısıtlara uygun öngörü üretmeyi de kolaylaştırmaktadır. Ayrıca, sistemin gelişimi ve değişimine ilişkin çıkarsamalar standart bir istatistiksel yöntemle doğrudan bu dağılımların bileşenlerinden çıkarılmaktadır.³⁶

Uygulamada Bayesyen dinamik modeller *istisnaya göre yönetim ilkesi* ile uyum içindedir. İstisnaî durumlar ortaya çıkmadıkça oluşturulan bir model rutin olarak kullanılmaya devam eder. Olası istisnaî durumlar da iki farklı yön ve şekilde

³⁶ West and Harrison, a.e., s. 24, 25.

ortaya çıkabilir. Birincisi; sistem dışı bir kaynaktan uygun bir uzman görüşü ulaşabilir. Bu tür bir bilgi genellikle gelecekte ortaya çıkması muhtemel değişim ve olaylarla ilgilidir ve bu nedenle ileri-besleme (feedforward) etkisine sahiptir. İkincisi; kullanılan modelin niteliksel performansının gözlenmesi (monitoring) sonucunda anlamlı uygunsuzluk (inadequacy) işaretlerinin bulgulanmasıdır. Bu tür bir bilgi ise geri-besleme (feedback) etkisine sahiptir. Bu tür işaretlerin ortaya çıkması halinde de yine uzman görüşüne ve otomatik hata düzeltme mekanizmalarına başvurulabilir. Böylece öngörüğü sağlayan model dışsal bilgi doğrultusunda sıra dışı duruma göre uyarlanmış olmaktadır.³⁷

3.3.3. Genel Yapı

Genel normal DLM aşağıdaki gibi bir dörtlü kümesi ile karakterize edilmektedir,

$$\{F, G, V, W\}_t = \{F_t, G_t, V_t, W_t\}$$

Burada, F_t : ($n \times r$) boyutlu bilinen bir matris

G_t : ($n \times n$) boyutlu bilinen bir matris

V_t : ($r \times r$) boyutlu bilinen bir matris

W_t : ($n \times n$) boyutlu bilinen bir matristir.

Bu dörtlü, ($n \times 1$) boyutlu Y_t gözlem serisi vektörünü, t anında, ($n \times 1$) boyutlu θ_t parametre vektörü ile bağlantılandıran modeli ve θ_t 'nin zaman içindeki evrimini tanımlamaktadır. Bu da ardışık olarak belirlenen aşağıdaki dağılımlar yoluyla yapılmaktadır,

$$(Y_t|\theta_t) \sim N(F_t'\theta_t, V_t) \quad \text{ve} \quad (\theta_t|\theta_{t-1}) \sim N(G_t\theta_{t-1}, W_t)$$

³⁷ A. Pole, M. West and J.F. Harrison, *Applied Bayesyen Forecasting and Time Series Analysis*, Chapman-Hall, 1994, s. 9 ve devamı.

Bu dağılımlar zımnen t anından öncesine ait bilgi kümesi olan D_{t-1} 'e koşulludurlar. Bu da V_t , W_t ve Y_{t-1} , Y_{t-2} , ... gözlemlerini içermektedir. Model durum uzayı biçiminde aşağıdaki gibi de ifade edilebilir,

$$Y_t = F_t' \theta_t + v_t \quad , v_t \sim N(0, V_t)$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + \omega_t \quad , \omega_t \sim N(0, W_t)$$

v_t ve ω_t hata terimleri birbirleriyle ve ardışık terimleri kendi aralarında ilişkisizdir. θ_t 'nin daha gecikmeli değerleri ile ilişkili olduğu bir yapı tasarlamak da mümkündür.³⁸ İlk denklem *gözlem denklemi* olarak adlandırılmakta ve θ_t 'ye koşullu olarak Y_t 'nin örneklem dağılımını tanımlamaktadır. θ_t veri iken, Y_t önceki gözlemlerden ve parametre değerlerinden bağımsızdır. Y_t ile θ_t arasında dinamik bir ilişki vardır. Hataların varyansı bilinmekte ve muhtemelen zamanla değişmektedir.

F_t ; bağımlı değişkenin bilinen değerlerinin matrisi

θ_t ; durum (sistem) vektörü

$F_t' \theta_t = \mu_t$; ortalama tepki (veya düzey)

v_t ; gözlem hatası

İkinci denklem *evrim (durum, sistem) denklemi* olarak adlandırılmakta ve durum vektörünün zaman içindeki evrimini tanımlamaktadır. θ_{t-1} , G_t ve W_t veri iken, θ_t D_{t-1} 'den bağımsızdır. Evrimin deterministik bileşeni G_t geçiş matrisidir.³⁹

G_t ; evrim (sistem, transfer, durum) matrisi

ω_t ; sistem (evrim) hatası

(F_t, G_t) çifti zaman içinde sabitse, model bir *zaman serisi DLM (ZSDLM)* olarak adlandırılır. Gözlem ve evrim varyanslarının (V_t ve W_t) sabit olduğu bir zaman serisi DLM ise *sabit DLM* olarak adlandırılmaktadır. Bir sabit DLM, $(F, G, V,$

³⁸ Harrison and Stevens, a.e., s. 214

³⁹ Pole v.d., a.e., s. 29

W) dörtlüsü ile karakterize edilebilir. Bu tür DLM'ler tüm klasik doğrusal zaman serseri modellerini içermektedirler.⁴⁰

Tek değişkenli ($r = 1$) genel DLM,

$$(Y_t|\theta_t) \sim N(F_t'\theta_t, V_t) \quad \text{ve} \quad (\theta_t|\theta_{t-1}) \sim N(G_t\theta_{t-1}, W_t)$$

biçimindedir ve kısaca (F_t, G_t, V_t, W_t) dörtlüsü ile ifade edilebilir. Buna $t = 0$ anındaki başlangıç bilgisi de eklendiğinde aşağıdaki tam tanım elde edilir,

$$\text{gözlem denklemi:} \quad Y_t = F_t'\theta_t + v_t \quad , \quad v_t \sim N(0, V_t)$$

$$\text{sistem denklemi:} \quad \theta_t = G_t\theta_{t-1} + \omega_t \quad , \quad \omega_t \sim N(0, W_t)$$

$$\text{başlangıç bilgisi:} \quad (\theta_0|D_0) \sim N(m_0, C_0)$$

v_t hata terimi Y_t gözlemini etkileyen ölçüm sürecindeki rassal bir dalgadır sadece ve seri üzerinde başka bir etkisi yoktur. Oysa bunun aksine ω_t sistemin zaman içindeki gelişimini ve geleceğini etkilemektedir.⁴¹

F_t ve G_t 'nin seçimi tercih edilen modele ve incelenen serinin doğasına bağlıdır. Modelin bütüncül bir ifadesi V_t ve W_t 'nin tam bir tanımını gerekli kılmaktadır. Genellikle bunların zaman içinde sabit oldukları ve uygulamada V_t 'nin W_t 'den büyük değerlere sahip olduğu varsayılmaktadır.⁴²

3.3.3.1. Tek Değişkenli DLM'de Güncelleme Denklemleri

Dışsal bilgiye kapalı bir DLM'de $t = 0$ anındaki ön-bilgi (D_0) veri iken, sonraki bir t anındaki bilgi stoku $D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ dir. D_{t-1} , (F_t, G_t, V_t, W_t) dörtlüsünün değerlerini de içermektedir.

Sisteme ilişkin mevcut bilgi carî döneme ait durum vektörünün son dağılımında yeterli biçimde özetlenmektedir.

⁴⁰ West and Harrison, a.e., s. 101

⁴¹ West and Harrison, a.e., s. 103

⁴² D. Gamerman, *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Chapman-Hall, London, 1997, s. 59

Ön bilgi – öngörü – son dağılım şeklinde yinelemeli olarak devam eden güncelleme süreci aşağıdaki şekilde işlemektedir;⁴³

$$a) t-1 \text{ anındaki son dağılım: } (\theta_{t-1}|D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$$

t-1 anına ait bu bilgi veri olarak alınmaktadır. Daha önce belirtilen bilgi kaynaklarından birine dayanabilir.

$$b) t \text{ anındaki ön dağılım: } (\theta_t|D_{t-1}) \sim N(a_t, R_t)$$

$$a_t = G_t m_{t-1} \quad R_t = G_t' C_{t-1} G_t + W_t$$

t-1 anındaki son-dağılım bilgisinin sistem denkleminde uyarlanmasıyla yukarıdaki ön-dağılım elde edilmektedir.

$$c) \text{ Bir dönemlik öngörü: } (Y_t|D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t)$$

$$\begin{aligned} E(Y_t|D_{t-1}) &= E(F_t' \theta_t + v_t|D_{t-1}) \\ &= E(F_t' \theta_t|D_{t-1}) + E(v_t|D_{t-1}) \\ &= F_t' E(\theta_t|D_{t-1}) + E(v_t) \\ &= F_t' a_t = f_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y_t|D_{t-1}) &= V(F_t' \theta_t + v_t|D_{t-1}) \\ &= V(F_t' \theta_t|D_{t-1}) + V(v_t|D_{t-1}) \\ &= F_t' V(\theta_t|D_{t-1}) F_t + V(v_t) \\ &= F_t' R_t F_t + V_t = Q_t \end{aligned}$$

t-1 anındaki son-dağılım bilgisinin gözlem denkleminde uyarlanmasıyla yukarıdaki öngörü dağılımı elde edilmektedir.⁴⁴ Bu dağılım Y_t ile θ_t 'nin ortak dağılımının normal olduğunu göstermektedir. Y_t ile θ_t 'nin kovaryansı ise,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\theta_t, Y_t | D_{t-1}) &= \text{Cov}[\theta_t, F_t' \theta_t + v_t | D_{t-1}] \\ &= \text{Var}(\theta_t | D_{t-1}) F_t + 0 = R_t F_t = A_t Q_t \end{aligned}$$

⁴³ West and Harrison, a.e., s. 103 ve devamı.

⁴⁴ Pole v.d., a.e., s. 31

d) t anındaki son dağılım: $(\theta_t|D_t) \sim N(m_t, C_t)$

$$m_t = a_t + A_t e_t \quad C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$$

$$A_t = R_t F_t Q_t^{-1} \quad e_t = Y_t - f_t$$

Yukarıdaki ifadenin doğruluğu Normal teori ve Bayes Teoremi kullanılarak gösterilebilir. Bayes Teoremine göre;

$$p(\theta_t|D_t) \propto p(\theta_t|D_{t-1}) p(Y_t|\theta_t)$$

Gözlem denkleminde göre,

$$p(Y_t|\theta_t) \propto \exp \left[-\frac{(Y_t - F_t' \theta_t)' V_t^{-1} (Y_t - F_t' \theta_t)}{2} \right]$$

ve $(\theta_t|D_{t-1}) \sim N(a_t, R_t)$ olduğundan,

$$p(\theta_t|D_{t-1}) \propto \exp \left[-\frac{(\theta_t - a_t)' R_t^{-1} (\theta_t - a_t)}{2} \right]$$

Son iki ifade Bayes Teoremi'nde yerine yazılır ve iki tarafın logaritması alınarak (-2) ile çarpılırsa,

$$-2\ln[p(\theta_t|D_t)] = (\theta_t - a_t)' R_t^{-1} (\theta_t - a_t) + (Y_t - F_t' \theta_t)' V_t^{-1} (Y_t - F_t' \theta_t) + \text{sabit}$$

Sondaki sabit bileşen θ_t ile ilişkisizdir. θ_t 'nin bu karesel fonksiyonu yeniden düzenlenirse,

$$\theta_t' (R_t^{-1} + F_t V_t^{-1} F_t') \theta_t - 2\theta_t' (R_t^{-1} a_t + F_t V_t^{-1} Y_t) + \text{sabit}$$

$(R_t^{-1} + F_t V_t^{-1} F_t') C_t = I$ olduğundan $R_t^{-1} + F_t V_t^{-1} F_t' = C_t^{-1}$ dir.

Ayrıca, $C_t^{-1} m_t = R_t^{-1} a_t + F_t V_t^{-1} Y_t$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} -2\ln[p(\theta_t|D_t)] &= \theta_t' C_t^{-1} \theta_t - 2\theta_t' C_t^{-1} m_t + \text{sabit} \\ &= (\theta_t - m_t)' C_t^{-1} (\theta_t - m_t) + \text{sabit} \end{aligned}$$

Üssel olarak yazılırsa,

$$p(\theta_t|D_t) \propto \exp \left[-\frac{(\theta_t - m_t)' C_t^{-1} (\theta_t - m_t)}{2} \right]$$

olduğundan $(\theta_t|D_t) \sim N(m_t, C_t)$ dir.

Yukarıdaki ifadeden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir,⁴⁵

$$A_t = R_t F_t Q_t^{-1} = C_t F_t V_t^{-1}$$

$$C_t = R_t - A_t Q_t A_t' = R_t (I - F_t A_t')$$

$$C_t^{-1} = R_t^{-1} + F_t V_t^{-1} F_t'$$

$$Q_t = (1 - F_t' A_t)^{-1} V_t$$

$$F_t' A_t = 1 - V_t Q_t^{-1}$$

Son-ortalama, ön-ortalama ile bir dönemlik öngörü hatası tarafından düzeltilmektedir. Düzeltmenin derecesini *uyarlama katsayısı* olarak da adlandırılan A_t büyüklüğü belirlemektedir. A_t , durum vektörünün ön-varyansı ile gözlem varyansının (yukarıda görüldüğü gibi öngörü varyansı Q_t , ön-dağılım varyansı ve gözlem varyansının bir fonksiyonudur) bir oranıdır. Buna göre gözlem varyansı ön-varyansa oranla büyüdükçe A_t değeri küçülür.

Durum vektörünün son-varyansları, yeni gözlemle birlikte bilgi stoğu genişlediğinden, ön-varyanslara nazaran daha küçüktür. Bunun tek istisnası Y_t 'nin hiçbir bilgi sağlamadığı $F_t = 0$ durumudur.⁴⁶

3.3.3.2. Öngörü Dağılımları

Herhangi bir t anındaki öngörü fonksiyonu $f_t(k)$ şöyledir;

$$f_t(k) = E(\mu_{t+k}|D_t) = E(F'_{t+k} \theta_{t+k}|D_t)$$

Burada, $\mu_s = F'_s \theta_s$ dir ve ($s \geq 0$ için) ortalama tepki fonksiyonudur. $k \geq 1$ iken öngörü fonksiyonu, şimdiki bilgi veri iken gelecek gözlemlerin beklenen değerini verir,

$$f_t(k) = E(Y_{t+k}|D_t)$$

⁴⁵ West and Harrison, a.e., s. 104, 105.

⁴⁶ Pole v.d., a.e., 35

$0 \leq j \leq k$ iken, her bir t için gelecek ortak dağılımlar aşağıdaki kovaryanslar ve k -dönemlik marjinal dağılımlarla tanımlanmaktadır,

$$\text{durum dağılımı:} \quad (\theta_{t+k}|D_t) \sim N[a_t(k), R_t(k)]$$

$$\text{öngörü dağılımı:} \quad (Y_{t+k}|D_t) \sim N[f_t(k), Q_t(k)]$$

$$\text{durum kovaryansları:} \quad \text{Cov}(\theta_{t+k}, \theta_{t+j}|D_t) = C_t(k, j)$$

$$\text{gözlem kovaryansları:} \quad \text{Cov}(Y_{t+k}, Y_{t+j}|D_t) = F'_{t+k} C_t(k, j) F_{t+j}$$

$$\text{diğer kovaryanslar:} \quad \text{Cov}(\theta_{t+k}, Y_{t+j}|D_t) = C_t(k, j) F_{t+j}$$

$$\text{Cov}(Y_{t+k}, \theta_{t+j}|D_t) = F'_{t+k} C_t(k, j)$$

Burada, $f_t(k) = F'_{t+k} a_t(k)$

$$Q_t(k) = F'_{t+k} R_t(k) F_{t+k} + V_{t+k}$$

$$a_t(k) = G_{t+k} a_t(k-1)$$

$$R_t(k) = G_{t+k} R_t(k-1) G'_{t+k} + W_{t+k}$$

$$C_t(k, j) = G_{t+k} C_t(k-1, j), \quad k = j+1, \dots$$

Başlangıç değerleri olarak $a_t(0) = m_t$, $R_t(0) = C_t$ ve $C_t(j, j) = R_t(j)$ alınmaktadır.⁴⁷ Parametre tahminleri bir dağılıma sahiptir ve bu dağılım carî parametre belirsizliği, gelecek dönem gözlem hataları (V_{t+k}) ve dağılım varyansı (W_{t+k}) tarafından belirlenmektedir. Bu tahminler geleceğe dönük olduklarından *öngörü* olarak adlandırılabilir. Belirli yöndeki hatalar aynı büyüklükte fakat ters yöndeki hatalardan daha önemli sonuçlar doğurabilir. Kullanıcı dağılım bilgisinden hangi tür öngörülerin daha uygun olduğuna karar verebilir.⁴⁸

3.3.3.3. Gözlem Varyansı

Buraya kadar (F_t , G_t , V_t , W_t) dörtlüsünün bileşenlerine ait değerlerin tüm zamanlar için bilindiği varsayıldı. F_t değişkenler matrisi, G_t transfer matrisi ve W_t

⁴⁷ West and Harrison, a.e., s. 106, 107

⁴⁸ Harrison and Stevens, a.e., s. 212

sistem hatası matrisi genellikle belirli ilkeler doğrultusunda model kurucu tarafından belirlenmektedir. Gözlem varyansı matrisi V_t ise çoğu zaman bilinmemektedir ve W_t 'ye göre daha büyüktür.

Değeri bilinmese de, tüm zamanlar için gözlem hataları varyansının sabit kaldığı düşünülebilir ($V_t = V$). Varyansın tersi (V^{-1}) gözlemlerin kesinliğini (precision) gösterir ve işlemlerde kolaylık sağladığından bazen tercih edilmektedir, ($V^{-1} = 1 / V = \phi$). Buna uygun DLM şöyle yazılabilir,

$$Y_t = F_t' \theta_t + v_t \quad , \quad v_t \sim N(0, V)$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + \omega_t \quad , \quad \omega_t \sim N(0, V W_t^*)$$

$$(\theta_0 | D_0, \phi) \sim N(m_0, V C_0^*)$$

$$(\phi | D_0) \sim G(n_0/2, n_0 S_0/2)$$

m_0 , C_0^* , n_0 , S_0 başlangıç değerleridir ve önceden belirlenmektedir. Evrim ve başlangıç varyanslarının içerdiği ortak çarpan (V) ölçme biriminin etkisinden arındırılmış bir model sağlamaktadır. S_0 , gözlem varyansı V 'nin bir nokta tahminidir ve ϕ (veya V) nin bilinmesine koşullu olarak $E(\phi | D_0) = 1/S_0$ dir.

Aşağıda sıralanan dağılımsal sonuçlar çok-değişkenli t -dağılımlarına dayanmaktadır. $n \times 1$ boyutlu bir θ rassal vektörü serbestlik derecesi h , modu m ve pozitif belirli ölçek matrisi C olmak üzere aşağıdaki oyf 'ye sahiptir,

$$p(\theta) \propto [h + (\theta - m)' C^{-1} (\theta - m)]^{-(n+h)/2}$$

Dağılım, tek-değişkenli durumda olduğu gibi, kısaca $\theta \sim t_h(m, C)$ şeklinde gösterilebilir. Burada, $h > 1$ ise $E(\theta) = m$ ve $h > 2$ ise $Var(\theta) = Ch/(h-2)$ dir. $h \rightarrow \infty$ iken dağılım $\theta \sim N(m, C)$ normal dağılımına yaklaşmaktadır.⁴⁹

Yukarıdaki model tanımından, her $t \geq 1$ için aşağıdaki dağılımlara ulaşılabilir.⁵⁰

a) V 'ye koşullu olarak;

⁴⁹ West and Harrison, a.e, s. 109

⁵⁰ West and Harrison, a.e, s. 109, 110

$$(\theta_{t-1}|D_{t-1}, V) \sim N(m_{t-1}, VC_{t-1}^*)$$

$$(\theta_t|D_{t-1}, V) \sim N(a_t, VR_t^*)$$

$$(Y_t|D_{t-1}, V) \sim N(f_t, VQ_t^*)$$

$$(\theta_t|D_t, V) \sim N(m_t, VC_t^*)$$

$$a_t = G_t m_{t-1} \quad R_t^* = G_t C_{t-1}^* G_t' + W_t^* \quad f_t = F_t' a_t$$

$$Q_t^* = 1 + F_t' R_t^* F_t \quad e_t = Y_t - f_t \quad A_t = R_t^* F_t / Q_t^*$$

$$m_t = a_t + A_t e_t \quad C_t^* = R_t^* - A_t A_t' Q_t^*$$

b) $\phi = V^{-1}$ kesinlik parametresi için;

$$(\phi|D_{t-1}) \sim G[n_{t-1}/2, n_{t-1} S_{t-1}/2]$$

$$(\phi|D_t) \sim G[n_t/2, n_t S_t/2]$$

$$n_t = n_{t-1} + 1 \quad n_t S_t = n_{t-1} S_{t-1} + e_t^2 / Q_t^*$$

c) V 'ye koşulsuz olarak;

$$(\theta_{t-1}|D_{t-1}) \sim t_{n(t-1)}(m_{t-1}, C_{t-1})$$

$$(\theta_t|D_{t-1}) \sim t_{n(t-1)}(a_t, R_t)$$

$$(Y_t|D_{t-1}) \sim t_{n(t-1)}(f_t, Q_t)$$

$$(\theta_t|D_t) \sim t_{n(t)}(m_t, C_t)$$

$$R_t = S_{t-1} R_t^* \quad Q_t = S_{t-1} Q_t^* \quad C_t = S_t C_t^*$$

d) Güncelleme denklemlerinin işlemsel tanımları;

$$Q_t = F_t' R_t F_t + S_{t-1} \text{ ve } A_t = R_t F_t / Q_t \text{ olmak üzere,}$$

$$n_t = n_{t-1} + 1, \quad S_t = S_{t-1} + \frac{S_{t-1}}{n_t} \left(\frac{e_t^2}{Q_t} - 1 \right), \quad m_t = a_t + A_t e_t, \quad C_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} (R_t - A_t A_t' Q_t)$$

3.3.4. Polinomsal Trend Modelleri

Önceki kısımda, DLM'ye dayalı Bayesyen öngörü yaklaşımı genel yapı itibariyle ele alınıp tanıtılmaya çalışıldı. Bu kısımda, bir zaman serisinin ortalama düzeyindeki rassal değişimlere göre DLM biçiminde nasıl modellendiği ve öngörüler elde edildiği ele alınmaktadır. Bu tür modeller, özellikle üretim plânlaması, stok kontrolü, talep analizi gibi konularda sıklıkla kullanılmakta ve kısa dönemli etkin öngörüler elde edilmektedir. Serinin ortalama düzeyinin lokal olarak doğrusal bir seyir izlediği varsayımı DLM ile kısa dönemli öngörude bulunmaya imkân tanımaktadır. Uzun dönemde ortalama düzeyin doğrusal-dışı bir yol izlemesi muhtemel olduğundan (özellikle düzenli dönemsel değişim gösteren değişkenler durumunda) bu modelin yüksek öngörü hatası vereceği açıktır.

DLM biçimindeki bir Y_t zaman serisi en basit haliyle bir 1. dereceden polinomsal model olarak yazılabilir. Yani,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + v_t & v_t &\sim N(0, V_t) \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \omega_t & \omega_t &\sim N(0, W_t) \end{aligned}$$

Burada μ_t serinin düzeyi (level), v_t gözlem hatası, ω_t ise evrilme hatasıdır. Yine, genel yapıda olduğu gibi, v_t ve ω_t 'nin birbirleriyle ve ardışık elemanlarıyla ilişkisiz oldukları varsayılmaktadır. Görüldüğü gibi seri düzeyinde zaman içindeki evrilmenin bir rassal yürüyüş sürecine uyduğu ve kısa dönemde (lokal olarak) serinin ortalama düzeyinin sabit kaldığı düşünülmektedir. Ayrıca regresyon ve sistem evrim matrislerinin sabit olduğu ($F_t = 1$ ve $G = 1$) görülmektedir. Kolaylık sağlayacağından V_t ve W_t 'nin bilindiğini varsayalım. Model bu haliyle, sınırlı bir tekrarılama ilişkisine izin verilmiş, üssel olarak ağırlıklandırılmış hareketli ortalamalara benzemektedir. Önceki gözleme en fazla ağırlık verilirken gözlem sayısı artıkcı ağırlık (bkz. aşağıda A_t) azalmaktadır.⁵¹

Her bir $t = 1, 2, \dots$ için yukarıdaki iki denklem (gözlem ve evrim denklemleri) dağılımsal olarak şöyle de ifade edilebilir,

⁵¹ Harrison and Stevens, a.e., s. 216

$$(Y_t|\mu_t) \sim N(\mu_t, V_t)$$

$$(\mu_t|\mu_{t-1}) \sim N(\mu_{t-1}, W_t)$$

Burada W/V oranı *parazit-sinyal oranı* (signal-to-noise ratio) olarak adlandırılmaktadır ve modelin özelliklerinin belirlenmesinde önem taşımaktadır. Gözlemlerdeki değişkenliğin (V_t) seri düzeyindeki değişkenliğe (W_t) oranı büyüdükçe μ_t düzgünleşir.

t anından k -dönem ilerisinin öngörüsünde, serinin beklenen değeri şimdiki düzeyine koşulludur, yani

$$E(Y_{t+k}|\mu_t) = E(\mu_{t+k}|\mu_t) = \mu_t$$

t anında, mevcut D_t bilgisi veri iken, μ_t 'nin son dağılımı geçmiş veriye dayalı olarak bir m_t ortalamasına sahip olacaktır. Bu nedenle öngörü fonksiyonu (f_t) sabittir,

$$f_t(k) = E(Y_{t+k}|D_t) = E(\mu_{t+k}|D_t) = m_t, \quad (\forall k > 0 \text{ için})$$

Sonuç olarak, bu tür bir DLM özellikle (V_t ile ölçülen) gözlemlerdeki değişimin (W_t ile ölçülen) düzeydeki değişimden büyük olduğu kısa dönemli analizler için uygundur.⁵²

Buna göre, 1. dereceden polinomsal DLM, $(1,1,V_t,W_t)$ şeklinde gösterilebilir. $t = 0$ başlangıç anında serinin düzeyi (μ_t) hakkında sahip olunan kanaat/bilgi ($\mu_0|D_0$) $\sim N(m_0, C_0)$ şeklindeki olasılık dağılımı ile temsil edilir. m_0 , bu başlangıç düzeyinin bir nokta tahmini, C_0 ise bu noktadaki belirsizliğin ölçüsü olan varyanstır.

Başlangıç bilgisi ($m_0|D_0$), $t = 0$ anında μ_0 'a ilişkin olarak sahip olunan bilginin olasılıksal bir ifadesidir. Her bir D_i bilgi kümesi i . dönemde mevcut olan tüm bilgiyi (V_t , W_t varyansları ve $D_0 = Y_i, Y_{i-1}, \dots, Y_1$ dahil) kapsamaktadır. Buna göre t anında tek yeni bilgi Y_t değerinin gözlenmesiyle elde edilmektedir. Bu durumda, $D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ olmaktadır.

⁵² Pole v.d., a.e., s. 44 ve West and Harrison, a.e., s. 34

t anındaki bilgi stoku göz önünde bulundurularak bir-dönem ileri öngörü ve seri düzeyi (ortalaması) μ_t 'ye ilişkin son dağılım aşağıdaki ardışık ilişki (Kalman filtresi) denklemleri kullanılarak elde edilebilir,

a) μ_{t-1} için son dağılım: $(\mu_{t-1} | D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$

b) μ_t için ön dağılım: $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N(m_t, R_t)$

$$\text{Burada, } R_t = C_{t-1} + W_t$$

c) 1-dönem ileri öngörü: $(Y_t | D_{t-1}) \sim N(f_t, Q_t)$

$$\text{Burada, } f_t = m_{t-1} \text{ ve } Q_t = R_t + V_t$$

d) μ_t için son dağılım: $(\mu_t | D_t) \sim N(m_t, C_t)$

$$\text{Burada, } m_t = m_{t-1} + A e_t \text{ ve } C_t = A_t V_t$$

$$A_t = R_t / Q_t \text{ ve } e_t = Y_t - f_t$$

μ_{t-1} 'e ait son-dağılım başlangıç bilgisi olarak alındıktan sonra, bu bilginin doğruluğuna dayanılarak (D_{t-1} 'e koşullu olarak) μ_{t-1} ve ω_t normal rassal değişkenlerinin toplanmasıyla μ_t 'ye ait ön dağılım elde edilmektedir. Dağılımın ortalaması ve varyansı μ_{t-1} ve ω_t 'nin ortalamalarının ve varyanslarının toplamından ibarettir ($m_{t-1} + 0, C_{t-1} + W_t$). Y_t ise, yine D_{t-1} 'e koşullu olarak, μ_t ve v_t normal rassal değişkenlerinin toplamından elde edilmektedir. Benzer şekilde, bunların ortalamalarının ve varyanslarının toplamı da Y_t 'nin ortalama ve varyansını vermektedir.

μ_t 'ye ait son dağılımın elde edilişi ise iki şekilde doğrulanabilir. Birinci yol Bayes Teoremi ve buna dayalı hesaplamaları kullanırken ikincisi tüm DLM'ler için kullanılabilen standart bir yoldur. Biz burada konumuzla ilgisi bakımından birinci yolu tercih ediyoruz.

Gözlem denkleminin olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf'si) şöyledir,

$$p(Y_t | \mu_t, D_{t-1}) = (2\pi V_t)^{-1/2} \exp[-(Y_t - \mu_t)^2 / (2V_t)]$$

Yukarıda (b)'deki ifadeye göre D_{t-1} veri iken μ_t 'nin ön dağılımının oyf'si şöyledir,

$$p(\mu_t | D_{t-1}) = (2\pi R_t)^{-1/2} \exp[-(\mu_t - m_{t-1})^2 / (2R_t)]$$

Y_t gözlemlendikten sonra eldeki bilgi stoku $D_t = \{D_{t-1}, Y_t\}$ 'dir. μ_t 'ye ait son oyf ise şu şekilde ifade edilebilir,

$$p(\mu_t | D_t) = p(\mu_t | D_{t-1}) p(Y_t | \mu_t, D_{t-1}) / p(Y_t | D_{t-1})$$

Eşitliğin sağ yanında μ_t ile ilişkili olmayan terimler orantı sabitine dahil edildiğinde,

$$\begin{aligned} p(\mu_t | D_t) &\propto p(\mu_t | D_{t-1}) p(Y_t | \mu_t, D_{t-1}) \\ &\propto \exp \{ [-(\mu_t - m_{t-1})^2 / (2R_t)] - [(Y_t - \mu_t)^2 / (2V_t)] \} \end{aligned}$$

elde edilir. İfadeyi toplamsal hale dönüştürerek basitleştirmek için doğal logaritma alınarak, sabit ifadeler de k_i ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} 2\ln[p(\mu_t | D_t)] &= k_1 - (\mu_t - m_{t-1})^2 R_t^{-1} - (Y_t - \mu_t)^2 V_t^{-1} \\ &= k_2 - (R_t^{-1} + V_t^{-1})\mu_t^2 + 2(R_t^{-1}m_{t-1} + V_t^{-1}Y_t)\mu_t \\ &= k_3 - (\mu_t - m_t)^2 C_t^{-1} \end{aligned}$$

$$R_t/Q_t = R_t / (R_t + V_t) = A_t \quad \text{ve} \quad e_t = Y_t - m_{t-1} \text{ alınırsa,}$$

$C_t = 1 / [R_t^{-1} + V_t^{-1}] = R_t V_t / Q_t = A_t V_t$ ve $m_t = C_t(m_{t-1} / R_t + Y_t / V_t) = m_{t-1} + A_t e_t$ olur. İfade yine üssel orantı halinde yazılırsa, $p(\mu_t | D_t) \propto \exp[-(\mu_t - m_t)^2 / 2C_t]$ olur. Dolayısıyla, (d)'de ifade edildiği gibi $(\mu_t | D_t) \sim N(m_t, C_t)$ 'dir.⁵³

e_t , bir dönem ileri öngörü hatasını göstermektedir ve Y_t ile bunun beklenen değeri f_t arasındaki farka eşittir. A_t ise μ_t 'nin Y_t üzerine regresyonunun katsayısıdır.* $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$ ve $e_t = Y_t - m_{t-1}$ ilişkilerinden yararlanarak m_t şöyle de ifade edilebilir,

$$m_t = m_{t-1} + A_t(Y_t - m_{t-1}) = A_t Y_t + (1 - A_t) m_{t-1}$$

Buna göre m_t , (t-1) anındaki düzeyin tahmini olan m_{t-1} ile Y_t gözleminin ağırlıklı bir ortalamasıdır. A_t ağırlığı veya *uyarlama katsayısı* (0,1) aralığında bir değerdir. $R_t < V_t$ iken A_t 'nin 0'a yaklaşması, ön-dağılımın olabilirlik fonksiyonundan daha baskın olduğunu gösterirken, ön-dağılımın olabilirlik fonksiyonuna göre daha dağınık veya

⁵³ West and Harrison, a.e., s. 36

* Burada özel bir durum olarak μ_t ve Y_t arasındaki korelasyon katsayısının karesine eşittir, bu durumda $0 \leq A_t \leq 1$ 'dir.

az bilgi verici olması halinde $A_t \rightarrow 1$ olur. Ayrıca, $C_t < R_t$ olduğunda son dağılım ön-dağılımdan daha az dağınık olur. Bu da Y_t 'nin gözlenmesine bağlı olarak μ_t 'ye ilişkin bilgide bir artışa işaret etmektedir.⁵⁴

t anında başlıca iki öngörü dağılımından söz edilebilir; $[Y_{t+k} | D_t]$ ve $[X_t(k) | D_t]$ marjinal dağılımları. $k > 0$ için $X_t(k) = Y_{t+1} + Y_{t+2} + \dots + Y_{t+k}$ dir. Birincisi *k-dönem ileri öngörü* (k-step ahead forecast), ikincisi ise *k-dönem öncü öngörü* (k-step lead time forecast). Bu dağılımların ortalama ve varyansları genel olarak şöyle yazılabilir,

$$k\text{-dönem ileri: } [Y_{t+k} | D_t] \sim N[m_t, Q_t(k)]$$

$$k\text{-dönem öncü: } [X_t(k) | D_t] \sim N[km_t, L_t(k)]$$

$$Q_t(k) = C_t + \sum_{j=1}^k W_{t+j} + V_{t+k}$$

$$L_t(k) = k^2 C_t + \sum_{j=1}^k V_{t+j} + \sum_{j=1}^k j^2 W_{t+k+1-j}$$

İkinci dereceden polinomsal trend modeli ise seri düzeyindeki sistematik bir artış/azalışı betimlemek için uygun bir araçtır. Modele, bir zamandan diğerine düzeydeki değişimi ifade eden ilave bir parametrenin davranışını gösteren üçüncü bir denklem eklenmektedir.

$$Y_t = \mu_t + v_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \omega_{1t}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_{2t}$$

Durum vektörü $\theta_t = (\mu_t, \beta_t)'$ şeklinde iki bileşenden oluşmaktadır. Regresyon vektörü ve sistem matrisi ise aşağıdaki gibidir,⁵⁵

$$F_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁵⁴ West and Harrison, a.e., s. 38

⁵⁵ Pole v.d., a.e., s. 44

Uygulamada pek sık rastlanmasa da, temelini yukarıda tanıtılan birinci ve ikinci dereceden modellerin oluşturduğu daha yüksek dereceden polinomsal modeller de kullanılabilir.⁵⁶

3.3.5. Sabit Varyanslı Model

Sabit varyanslı model, gözlem ve evrim denkleminin varyanslarının zaman içinde değişmeyip sabit kaldığı model türüdür. $G_t = 1$ ve $F_t = 1$ olan bir sabit varyanslı model $(1,1,V,W)$ dörtlüsü ile temsil edilir. Modelin açık ifadesi ise şöyledir,

$$\text{Gözlem denklemi: } Y_t = \theta_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, V)$$

$$\text{Sistem denklemi: } \theta_t = \mu_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, W)$$

$$\text{Başlangıç bilgisi: } (\theta_0 | D_0) \sim N(m_0, C_0)$$

$D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ bilgi kümesi zaman serisi dışında herhangi bir bilgi içermediğinden model (dışsal bilgiye) *kapalı model* olarak da adlandırılmaktadır.

Dışsal bir şok veya müdahale durumunda ön ve son-dağılımın ne şekilde etkileneceği West ve Harrison, (1997)'de ele alınmaktadır.

Kapalı bir modelde, zaman içinde (yani $t \rightarrow \infty$ iken), A_t uyarılma katsayısı ile ölçülen yeni verilere uyarlanma oranı hızla sabit bir değere doğru yaklaşmaktadır.⁵⁷

$r = W/V$ idi. $t \rightarrow \infty$ iken, $A_t \rightarrow A$ ve $C_t \rightarrow C = AV$ 'dir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t = A = \frac{r}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{r}} - 1 \right)$$

$$r = A^2 / (1 - A)$$

İsbat: $0 < A_t < 1$ ve V sabit olduğundan $C_t = A_t V$ tanımı gereği C_t de sınırlıdır. Yani, $0 < C_t \leq V$ dir. Daha önce $A_t = R_t / Q_t = R_t / (R_t + V_t)$ 'den hareketle $C_t^{-1} = R_t^{-1} + V^{-1}$ olduğu gösterilmişti. Ayrıca, $R_t = C_{t-1} + W$ idi. Dolayısıyla,

⁵⁶ Bkz. A. Pole ve M. West, « Efficient Bayesyen learning in non-linear dynamic models », **Journal of Forecasting**, 9, 1990, s. 119-136.

⁵⁷ Pole v.d., a.e., s. 88

$$\begin{aligned}
C_t^{-1} - C_{t-1}^{-1} &= (R_t^{-1} + V^{-1}) - (R_{t-1}^{-1} + V^{-1}) = R_t^{-1} - R_{t-1}^{-1} \\
&= (C_{t-1} + W)^{-1} - (C_{t-2} + W)^{-1} = \frac{C_{t-2} - C_{t-1}}{C_{t-1}C_{t-2} + W(C_{t-1} + C_{t-2}) + W^2} \\
&= \frac{C_{t-2} - C_{t-1}}{R_t R_{t-1}} = \frac{(C_{t-2}^{-1} - C_{t-1}^{-1})(C_{t-1}C_{t-2})}{R_t R_{t-1}} = (C_{t-2}^{-1} - C_{t-1}^{-1})K_t
\end{aligned}$$

$$K_t = (C_{t-1} C_{t-2}) / (R_t R_{t-1})$$

yazılabilir. Burada, $C_t > 0$ ve $R_t > 0$ olduğundan $K_t > 0$ olacaktır. C_t tekdüze ve sonlu olduğundan C gibi bir limite sahiptir. Bu durumda R_t için $R = C + W$ limitinin bulunduğu gösterilebilir. Buna göre $C_t = R_t V / (R_t + V)$ ifadesi yerine $C = R V / (R + V)$ yazılabilir. $R = C + W$ olduğundan $C^2 + C W - V W = 0$ karesel ifadesi elde edilir. Bu denklemin tek pozitif kökü $C = r V (\sqrt{1 + 4/r} - 1) / 2$ dir. $C_t = A_t V$ ilişkisine göre A_t , $A = C/V$ 'ye yakınsanır. Bu ilişkinin tersinden $r = A^2 / (1 - A)$ 'ya ulaşılır.⁵⁸

Yukarıdaki ifadeden ve isbatından aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir;

$$A_t \rightarrow A = \frac{r}{2} (\sqrt{1 + \frac{4}{r}} - 1) , \quad r = A^2 / (1 - A)$$

$$Q_t \rightarrow Q = V / (1 - A)$$

$$C_t \rightarrow C = A V$$

$$R_t \rightarrow R = A Q$$

$$W = A^2 Q \text{ ve } V = (1 - A) Q$$

Başlangıç varyansı C_0 'ın limit değeri C 'den büyük/küçük olmasına göre C_t de tekdüze olarak azalır/artar. A_t için de benzer bir çıkarımda bulunulabilir.

C_t ve A_t 'nin yakınsaklığının olasılıksal bir isbatı limit değerinin parametrelerin başlangıç ön-dağılımından bağımsız olduğunu göstermektedir.⁵⁹

$\delta = 1 - A$ olarak tanımlansın. Dolayısıyla $0 < \delta < 1$ olacaktır. Daha önce $m_t = A_t Y_t + (1 - A_t) m_{t-1}$ olduğu gösterilmişti. Buna göre $m_t = \delta m_{t-1} + (1 - \delta) Y_t$ yazılabilir. C_0

⁵⁸ West and Harrison, a.e., s. 44

⁵⁹ P.J. Harrison, "Covergence and the constant dynamic linear model", **Journal of Forecasting**, Vol. 16, 1997, s. 287-292

veri iken başlangıç uyarılama katsayısı $A_1 = R_1 / Q_1 = R_1 / R_1 + V = (C_0 + W) / (C_0 + W + V)$ 'dir. Genel olarak,

$$A_t = A \left[\frac{(1 - \delta^{2t-2})A + (\delta + \delta^{2t-2})A_1}{(1 + \delta^{2t-1})A + (\delta - \delta^{2t-1})A_1} \right]$$

olduğu gösterilebilir.

$A = 1$ durumu, ($t \geq 2$ için) $A_t = 1$ iken $V = 0$ 'a karşılık gelmektedir. Bu durumda $r \rightarrow \infty$ olmakta ve model $Y_t = Y_{t-1} + \omega_t$ şeklinde tam bir rassal yürüyüşe indirgenmektedir. Ayrıca, $A_t = 1$ durumunda $m_t = Y_t$ olmakta ve modelin kestirim amacıyla kullanımı oldukça sınırlanmaktadır. Çoğu zaman günlük getiri, hisse senedi fiyatları gibi serilere uygulandığında 1. derece modeldeki uygun V değerleri sıfıra çok yakın veya sistematik varyans W 'ya göre çok küçük çıkabilmektedir. Bir başka deyişle kullanılan DLM, günlük fiyatlar arasındaki tüm hareketlerin altında yatan (ortalama) fiyat düzeyi μ_t 'ye yüklenebileceğini ima etmektedir. Bu durumda çoğu zaman bu tür serilerin tamamen rassal oldukları ve gelecek dönem fiyatları için $(Y_{t+k} | D_t) \sim N(Y_t, kW)$ 'den daha iyi öngörüler bulunamayacağı sonucuna götürmektedir. Oysa model kısıtlı olduğundan bu tür sonuçlar hatalıdır.

Sabit model daha ziyade kısa-dönemli öngörude kullanılmaktadır. Bu durumda öngörü uzaklığı (l) için $1 \leq l \leq 4$ veya $20 \leq 1/r \leq 1000$ olması tavsiye edilmektedir. Limit durumunda (yani $t \rightarrow \infty$) nokta tahminci $m_t = AY_t + (1 - A)m_{t-1}$ biçimindedir. $A = 1$ halinde $m_t = Y_t$ olduğundan Y_t 'deki herhangi bir değişim m_t tahmincisi tarafından yansıtılmaktadır. Diğer taraftan, $A \approx 0$ ise $m_t \approx m_{t-1}$ olmakta ve serideki hiçbir değişim kestirimci tarafından yakalanamamaktadır. $Y_t = \theta_{t-1} + v_t + \omega_t$ olduğu göz önüne alındığında A 'nın büyük olması ω_t 'nin yansıttığı süregelen değişimin m_t 'nin tahmininde tümüyle içerildiği, A 'nın küçük olması ise bozucu rassal gürültü v_t 'nin m_t 'nin tahmininde dışlandığını ifade etmektedir.⁶⁰

⁶⁰ West and Harrison, a.e., s. 46

3.3.6. Klâsik Zaman Serisi Modelleri ve DLM

2. Bölüm’de tanıtılan otoregresif (AR), hareketli ortalamalar (MA) ve bunların karması olan otoregresif hareketli ortalamalar (ARMA) modelleri Kalman filtresi yardımıyla DLM biçiminde ifade edilerek Bayesyen analize yatkın hale dönüştürülebilirler. Ayrıca bu tür modeller Gaussyen ARMA süreçlerinin olabilirlik fonksiyonları ve küçük-örnek öngörülerini hesaplamakta ve zaman içinde değişen katsayılara sahip vektör otoregresyonları tahmin etmekte de kullanılmaktadır.⁶¹

p. dereceden bir AR modeli,

$$y_t - \mu = \phi_1(y_t - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + e_t$$

q. dereceden bir MA modeli,

$$y_t = \mu - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} + e_t$$

p. ve q. Dereceden bir ARMA modeli ise toplu olarak,

$$y_t - \mu = \sum_{i=1}^p \phi_i (y_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + e_t$$

biçimindedir. Burada $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ dir. görüldüğü gibi katsayıların tümü zaman içinde sabittir.

ARMA(p,q) modeli katsayıların zaman içinde değişimine imkân tanıyacak şekilde DLM biçiminde şöyle yazılabilir,⁶²

$r = \max(p, q+1)$, $j > p$ iken $\phi_j = 0$ ve $j > q$ iken $\theta_j = 0$ olmak üzere,

$$y_t = \sum_{i=1}^r (\phi_i y_{t-i} + \theta_i e_{t-i}) + e_t$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{r-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \phi_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{r-2} \\ \theta_{r-1} \end{bmatrix} e_t$$

⁶¹ Hamilton, a.e., s. 372

⁶² Hamilton, a.e., s. 375

3.3.7. DLM ve Durağanlık

Klâsik ARMA model analizini kullanabilmek için durağanlık bir ön koşuldur. W_t sistem varyansı sıfırdan farklı ise AR modellemesinde durağan olmayan bir model yapısı ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan sıfırdan farklı gözlem varyanslarına sahip DLM biçimindeki ARMA modelleri de durağan olmamaktadır.⁶³

Durağanlık, özellikle kapalı sistemlerin modellenmesinde yararlı bir araç olmakla birlikte pür durağan modeller değişen koşullara uygun olarak müdahale ve model modifikasyonunu gerekli kılan açık sistemlerin modellenmesinde fazla değer taşımamaktadırlar.

Bir Z_t rassal zaman serisi için,

- i) (n bir tamsayı olmak üzere) eğer herhangi bir rassal $Z_{t,n+1} = (Z_t, \dots, Z_{t+n})'$ vektörünün dağılım fonksiyonu zamandan bağımsızsa Z_t *tam durağandır*.
- ii) eğer $E(Z_{t,n+1})$ ve $\text{Var}(Z_{t,n+1})$ 'in her ikisi de zamandan bağımsızsa Z_t *zayıf durağandır*.
- iii) zayıf durağan olmakla birlikte her $Z_{t,n+1}$ 'in dağılımı normal ise Z_t Gaussyen (normal) durağanlığa sahiptir.

Zayıf durağan bir Z_t rassal zaman serisi veri iken,

$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma_k$, k gecikme uzunluğundaki kovaryansı

$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ ise k gecikme uzunluğundaki teorik otokorelasyonu göstermektedir.

Zayıf durağanlık bütün t 'ler için $E(Z_t) = \mu$ biçiminde ortak bir ortalama ve bütün t ve s 'ler için $\text{Cov}(Z_t, Z_{t+s}) = \gamma_s$ biçiminde bir gecikme-bağımlı kovaryans yapısı dayatmaktadır. Gaussyen bir süreçte ise Z_t 'nin her bir alt-kümesinin birinci ve ikinci momentleri için bu durum geçerlidir.⁶⁴

⁶³ Pole v.d., a.e., s. 86

⁶⁴ West and Harrison, a.e., s. 169

3.4. Sabit Katsayılı Model ile Bayesyen Öngörü

Önceki bölümde DLM biçimindeki bir model kullanılarak bir zaman serisinin Bayesyen öngörüsünün nasıl yapıldığı ele alındı. Orada da belirtildiği gibi sistem (evrim) denkleminde ait hata teriminin varyansı (W_t) sıfır olduğunda θ_t 'nin dinamik yapısı ortadan kalkmakta ve genel, sabit katsayılı regresyon modeline dönüşmektedir. Her ne kadar DLM ile öngörü daha önce belirtilen avantajlara sahipse de sabit katsayılı doğrusal model kullanılarak da Bayesyen öngörüler elde edilebilir.

Yöntemin genel yapısı içinde Bayes Teoremi'nin işlevi dinamik modellerde olduğu gibidir. Buna göre yöntem, DLM'deki filtreleme algoritmasının $W_t = W = 0$ durumundaki özel hali olarak düşünülebilir.

Y_t değişkeni μ ortalama ve σ_y^2 (bilinen) varyansla normal dağılan bir dağılıma sahip olsun. μ 'nün ön-dağılımı $N(m, s^2)$ şeklinde iken, son-dağılımının aşağıdaki gibi olduğu Bayes Teoremi aracılığıyla gösterilebilir.⁶⁵

$$p(\mu|Y) \sim N(m', s'^2) = N\left[\frac{Ys^2 + m\sigma_y^2}{s^2 + \sigma_y^2}, \frac{s^2\sigma_y^2}{s^2 + \sigma_y^2}\right]$$

3.4.1. Sabit Model

Bir zaman serisi en basit haliyle $Y_t = \theta + v_t$ biçiminde bir sabit modelle tanımlanabilir. Burada θ serinin bilinmeyen ortalama düzeyi, v_t ise sıfır ortalama ve bilinen σ_v^2 varyansla normal dağılıma sahip bir beyaz gürültü hata terimidir. Buna göre herhangi bir t anında Y_t 'nin olasılık dağılımı $p(Y_t|\theta) \sim N(\theta, \sigma_v^2)$ şeklinde olacaktır. Varyans bilindiğinden θ tahmin edilerek Y_t 'nin dağılımı belirlenebilir. Bunun için işe, $t = 0$ anı için θ 'nın ön-dağılımının belirlenmesiyle başlanmaktadır. Bu ön-dağılım analiz öncesi sahip olunan ön-bilgiyi yansıtmaktadır ve daha önce bahsedilen kaynaklardan birine dayanabilir. θ 'nın başlangıç tahmini $\hat{\theta}_0$ ve varyansı s_0^2 olsun. Yani, $p(\theta) \sim N(\hat{\theta}_0, s_0^2)$.

⁶⁵ Bkz. 1. bölüm.

Bundan sonraki adım, bir sonraki dönemin ($t = 1$) sonunda elde edilen Y_1 gözleminin sağladığı bilgi doğrultusunda θ 'nın ön-dağılımının ($\hat{\theta}_0$ ve s_0^2 nin) Bayes Teoremi kullanılarak revize edilmesidir. Elde edilen $p(\theta|Y^1) \sim N(\hat{\theta}_1, s_1^2)$ son-dağılımı bu bilgiyi yansıtmaktadır.⁶⁶ Burada,

$$\hat{\theta}_1 = E(\theta|Y^1) = \frac{Y_1 s_0^2 + \hat{\theta}_0 \sigma_v^2}{s_0^2 + \sigma_v^2} \quad \text{ve} \quad s_1^2 = \text{Var}(\theta|Y^1) = \frac{s_0^2 \sigma_v^2}{s_0^2 + \sigma_v^2}$$

dir. 2. dönemin sonunda Y_2 gözlemine ulaşıldığında $p(\theta|Y^1)$ ön-dağılım yerine geçmekte ve bunun yardımıyla $p(\theta|Y^2) \sim N(\hat{\theta}_2, s_2^2)$ son-dağılımı elde edilmektedir. Burada,

$$\hat{\theta}_2 = E(\theta|Y^2) = \frac{\bar{Y} s_0^2 + \hat{\theta}_0 (\sigma_v^2/2)}{s_0^2 + (\sigma_v^2/2)} \quad \text{ve} \quad s_2^2 = \text{Var}(\theta|Y^2) = \frac{s_0^2 \sigma_v^2}{2s_0^2 + \sigma_v^2}$$

dir. $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2)/2$ 'dir. θ 'yı tahmin etmek için $\bar{Y}$ yeterli bir tahminci olduğundan ve $p(\theta|Y^2) = p(\theta|\bar{Y})$ olduğundan Y_1 ve Y_2 'yi ardışık (veya ortak) olarak kullanmak yerine $\bar{Y}$ tercih edilmektedir.⁶⁷

n dönem sonunda Y_n gözlemi elde edildiğinde son-dağılım $p(\theta|Y^n) \sim N(\hat{\theta}_n, s_n^2)$ şeklinde olacaktır. Burada,

$$\hat{\theta}_n = E(\theta|Y^n) = \frac{\bar{Y} s_0^2 + \hat{\theta}_0 (\sigma_v^2/n)}{s_0^2 + (\sigma_v^2/n)} \quad , \quad s_n^2 = \text{Var}(\theta|Y^n) = \frac{s_0^2 \sigma_v^2}{n s_0^2 + \sigma_v^2} \quad \text{ve} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}$$

Gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra, $r = \sigma_v^2/s_0^2$ olmak üzere,

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{r+n} \bar{Y} + \frac{r}{r+n} \hat{\theta}_0$$

yazılabileceği gösterilebilir. Buna göre θ 'nın Bayesyen tahmincisi örnek ortalaması ile başlangıç tahmini $\hat{\theta}_0$ 'nın ağırlıklı bir ortalamasından ibarettir. Bunun yanı sıra $\hat{\theta}_n$ 'yi ardışık bir sürecin sonucu olarak,

⁶⁶ Burada $y^t = y_1, y_2, \dots, y_t$ dir.

⁶⁷ Montgomery v.d., a.e., s. 336

$$\hat{\theta}_n = a_n Y_n + (1-a_n) \hat{\theta}_{n-1}$$

şeklinde yazmak da mümkündür. Burada, $a_n = 1/(r + n) = s_0^2/(n s_0^2 + \sigma_\nu^2)$ dir. Buna göre a_n zamanın bir fonksiyonu olarak giderek küçülmektedir. Diğer taraftan, $s_n^2 = a_n \sigma_\nu^2$ olduğundan θ 'nın tahminindeki belirsizlik de zaman içinde azalmaktadır. Ayrıca, başlama anından uzaklaştıkça başlangıç tahmin değeri $\hat{\theta}_0$ 'nin ağırlığının giderek azaldığı, buna karşılık Y_t gözlemlerinin (örnek bilgisinin) ağırlığının giderek arttığı açıktır.⁶⁸

Her ne kadar buraya kadar süreç varyansının (σ_ν^2) bilindiği varsayıldıysa da, gerçekte çoğu zaman bu varyans değeri bilinmez. Bu durumda varyansın da rassal bir değişken gibi kabul edilmesi ve ortalama ve varyans için ortak bir ön-dağılımın belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla güncelleme sürecinde de her gözlem için örnek ortalaması ile birlikte örnek varyansı da kullanılmaktadır.

Herhangi bir t anında son-dağılım yoluyla elde edilen ortalama tahmini sonraki dönem gözleminin (Y_{t+1}) öngörüsünü verir. Yani, $\hat{Y}_{t+1} = \hat{\theta}_t$ dir. Öngörü varyansı,

$$V(\hat{Y}_{t+1}) = s_t^2$$

dir. Öngörü hatasının varyansı ise,

$$V(e_{t+1}) = V(Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1}) = \sigma_\nu^2 + s_t^2$$

dir. Öngörü hatasının varyansı öngörü döneminin uzaklığından (forecast lead time) bağımsızdır.⁶⁹

⁶⁸ Montgomery v.d., a.e., s. 337

⁶⁹ Montgomery v.d., a.e., s. 338

3.4.2. Genel Zaman Serisi Modelleri

Bu kesimde doğrusal ve sabit parametrelili bir zaman serisi modelinde parametre tahmini ve öngörü konusu Bayesyen yaklaşımla ele alınmaktadır. Bir Y_t zaman serisi zamanın fonksiyonu olarak şu şekilde modellenilebilir,

$$Y_t = \theta_1 z_{1t} + \theta_2 z_{2t} + \dots + \theta_k z_{kt} + v_t$$

Burada, θ_i sabit parametreler, z_{it} ($i = 1, 2, \dots, k$) zamanın kuvvetleri şeklindeki bağımsız değişkenler ve v ise otokorelasyonsuz ve $N(0, \sigma_v^2)$ dağılımlı beyaz gürültü hata terimidir. σ_v^2 nin bilindiği varsayılmaktadır. Eğer modelde bir sabit terim (θ_1) de bulunması isteniyorsa $z_{1t} = 1$ dir. Model matris notasyonuyla,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{k1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1n} & z_{2n} & \dots & z_{kn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}$$

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre Y_t 'nin olasılık dağılımı; $p(Y_t | \boldsymbol{\theta}, \sigma_v^2) = N(\mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}, \sigma_v^2)$ şeklindedir. Modeli öngörü amacıyla kullanabilmek için tabii ki öncelikle $\boldsymbol{\theta}$ 'ya ilişkin tahminler elde edilmelidir. Parametrelerin Bayesyen tahmini için θ_i 'nin ön-dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Parametreler önsel olarak $E(\theta_i) = \hat{\theta}_{i0}$ ortalama, $\text{Var}(\theta_i) = s_{i0}^2$ varyans ve $\text{Cov}(\theta_i, \theta_j) = s_{ij0}^2$ kovaryans ile normal bir ön-dağılıma sahip olsun. Buna göre parametre vektörü için aşağıdaki çok-değişkenli normal dağılım geçerlidir,

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{(-1/2)k} (S_0^{-1})^{1/2} \exp[-1/2(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)' S_0^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)]$$

$$p(\boldsymbol{\theta}) \sim N(\boldsymbol{\theta}_0, S_0)$$

Burada, $\theta_0 = E(\theta)$ ve S_0 ise ön-dağılımın $k \times k$ boyutlu simetrik varyans-kovaryans matrisidir.⁷⁰ n dönem sonra Y_t 'ye ait gözlemler elde edilmekte ve bu bilgi doğrultusunda yukarıdaki ön-dağılım revize edilmektedir.

Parametre tahminlerini *en küçük kareler* yöntemiyle elde etmek mümkündür. Bu da, $Z'Z\hat{\theta} = Z'y$ denkleminin çözümünden elde edilen $\hat{\theta} = (Z'Z)^{-1} Z'y$ tahmincisi ile verilmektedir. $\hat{\theta}$ tahmincisi, θ ortalama ve $S = (Z'Z)^{-1} \sigma_v^2$ varyanslı bir normal dağılıma sahiptir, yani ⁷¹

$$p(\hat{\theta}|\theta; Z, \sigma_v^2) = (2\pi)^{-(1/2)k} |S^{-1}| \exp[(1/2)(\hat{\theta} - \theta)'(S^{-1})(\hat{\theta} - \theta)]$$

$$p(\hat{\theta}|\theta; Z, \sigma_v^2) \sim N(\theta, S)$$

Sabit Z ve σ_v^2 için $\hat{\theta}$ 'nin ön-dağılımı göz önünde bulundurularak marjinal dağılımı şöyle bulunabilir,

$$\begin{aligned} p(\hat{\theta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\hat{\theta}|\theta) p(\theta) d\theta \\ &= N(\theta_0, S_m) \end{aligned}$$

Burada, $S_m = S_0 + S$ dir.

n dönem sonunda, $\hat{\theta}$ veri iken θ 'nın son-dağılımı, Bayes Teoremi yoluyla, ⁷²

$$p(\theta|\hat{\theta}) = [p(\theta)p(\hat{\theta}|\theta) / p(\hat{\theta})] \sim N(\theta_n, S_n)$$

$$\theta_n = S_n(S_0^{-1}\theta_0 + S^{-1}\hat{\theta}) \quad \text{ve} \quad S_n^{-1} = S_0^{-1} + S^{-1}$$

n . dönemden m dönem sonrasının öngörüsü Y_{n+m} 'nin son-dağılımına dayalı olarak yapılmaktadır. $(n + m)$. dönemde,

$$E(Y_{n+m}) = \theta_1 Z_{1,n+m} + \theta_2 Z_{2,n+m} + \dots + \theta_k Z_{k,n+m}$$

dir. Bayesyen bakış açısına göre $E(Y_{n+m})$ normal dağılıma sahip bir rassal değişkendir. Dağılımın ortalama ve varyansı ise,

⁷⁰ Montgomery v.d., a.e., s. 340

⁷¹ Montgomery v.d., a.e., s. 341

⁷² Montgomery v.d., a.e., s. 342

$$\mathbf{z}'_{n+m}\boldsymbol{\theta}_n \quad \text{ve} \quad \mathbf{z}'_{n+m}\mathbf{S}_n\mathbf{z}_{n+m}$$

şeklindedir. Yani, $E(Y_{n+m}) \sim N(\mathbf{z}'_{n+m}\boldsymbol{\theta}_n; \mathbf{z}'_{n+m}\mathbf{S}_n\mathbf{z}_{n+m})$.

$Y_{n+m} = E(Y_{n+m}) + v_{n+m}$ olduğundan ve v_{n+m} $\boldsymbol{\theta}$ 'dan bağımsız olarak $(0, \sigma_v^2)$ dağılıma sahip olduğundan Y_{n+m} de normal dağılımlı bir rassal değişken olacaktır. Dağılımın ortalaması ve varyansı ise,

$$\mathbf{z}'_{n+m}\boldsymbol{\theta}_n \quad \text{ve} \quad \mathbf{z}'_{n+m}\mathbf{S}_n\mathbf{z}_{n+m} + \sigma_v^2$$

şeklindedir. Yani, $Y_{n+m} \sim N(\mathbf{z}'_{n+m}\boldsymbol{\theta}_n; \mathbf{z}'_{n+m}\mathbf{S}_n\mathbf{z}_{n+m} + \sigma_v^2)$



BÖLÜM IV. UYGULAMA

Bu bölümde, 1987 fiyatlarıyla Türkiye'nin 1968-1997 yıllarına ait yıllık sabit üretici fiyatlarıyla Kişi Başına Millî Gelir (KBMG) değerleri (bin TL olarak) kullanılarak, 3. Bölüm'de tanıtılan sabit katsayılı modele dayalı olarak sonraki dört yıla ilişkin öngörülerin Bayesyen yöntemle nasıl elde edileceği ele alınmaktadır. Fakat bundan önce bir karşılaştırma imkânı vermesi açısından, aynı veri seti kullanılarak 2. Bölüm'de bahsedilen geleneksel yöntemlerle de aynı yıllara ait öngörüler elde edilmiştir. Yöntemlerin performanslarını karşılaştırmak için öngörülerin hata kareleri ortalamaları kullanılmaktadır. Kullanılan tüm istatistiksel veriler Devlet İstatistik Enstitüsü yıllıklarından alınmıştır. Verilerin işlenmesi ve analizlerin yürütülmesinde SPSS ve Statistica istatistiksel paket programlarından yararlanılmıştır.

4.1. Doğrusal Trend Fonksiyonu

Yıllık KBMG verileri kullanılarak $y = a + bt + e$ şeklindeki doğrusal trend fonksiyonuna ait parametreler EKK yöntemiyle iki farklı şekilde tahmin edilebilir. Burada y bağımlı değişkeni yıllar itibariyle KBMG değerlerini, t bağımsız değişkeni ise trendi ifade eden yapay değişkenin değerlerini göstermektedir. Birinci yol, zamana 0'dan başlayıp giderek artan değerler vermek ve buna göre aşağıdaki denklem takımını eşanlı olarak çözmektir.

$$\begin{aligned}\sum y &= an + b\sum t \\ \sum yt &= a\sum t + b\sum t^2\end{aligned}$$

İkinci yol ise, toplamı 0 olacak şekilde zaman değerler vererek çözüme gitmektir. Bu durumda $\sum t = 0$ olacağından yukarıdaki denklem takımı $a = \sum y/n$ ve $b = \sum yt / \sum t^2$

biçimine dönüşecektir. Her iki yoldan da aynı $\hat{y}$ tahmini (KBMG) değerlerine ulaşılmaktadır. Biz ikinci yolu tercih ediyoruz.

Yıllara göre KBMG değerleri ve hesaplanan değerler aşağıdaki tablodadır.

Yıllar	y	t	t ²	yt	ytah	hata	(hata) ²
1968	942	-14,5	210,25	-13659,0	934,87	7,13	50,89
1969	958	-13,5	182,25	-12933,0	959,80	-1,80	3,25
1970	976	-12,5	156,25	-12200,0	984,74	-8,74	76,42
1971	1019	-11,5	132,25	-11718,5	1009,68	9,32	86,86
1972	1085	-10,5	110,25	-11392,5	1034,62	50,38	2538,35
1973	1110	-9,5	90,25	-10545,0	1059,56	50,44	2544,60
1974	1118	-8,5	72,25	-9503,00	1084,49	33,51	1122,65
1975	1155	-7,5	56,25	-8662,50	1109,43	45,57	2076,44
1976	1233	-6,5	42,25	-8014,50	1134,37	98,63	9727,88
1977	1244	-5,5	30,25	-6842,00	1159,31	84,69	7172,73
1978	1233	-4,5	20,25	-5548,50	1184,25	48,75	2376,95
1979	1202	-3,5	12,25	-4207,00	1209,18	-7,18	51,61
1980	1145	-2,5	6,25	-2862,50	1234,12	-89,12	7942,73
1981	1171	-1,5	2,25	-1756,50	1259,06	-88,06	7754,56
1982	1177	-0,5	0,25	-588,50	1284,00	-107,00	11448,57
1983	1197	0,5	0,25	598,50	1308,94	-111,94	12529,67
1984	1250	1,5	2,25	1875,00	1333,87	-83,87	7034,85
1985	1272	2,5	6,25	3180,00	1358,81	-86,81	7536,32
1986	1328	3,5	12,25	4648,00	1383,75	-55,75	3108,06
1987	1427	4,5	20,25	6421,50	1408,69	18,31	335,33
1988	1417	5,5	30,25	7793,50	1433,63	-16,63	276,42
1989	1409	6,5	42,25	9158,50	1458,56	-49,56	2456,59
1990	1505	7,5	56,25	11287,50	1483,50	21,50	462,16
1991	1481	8,5	72,25	12588,50	1508,44	-27,44	752,95
1992	1547	9,5	90,25	14696,50	1533,38	13,62	185,56
1993	1642	10,5	110,25	17241,00	1558,32	83,68	7003,01
1994	1514	11,5	132,25	17411,00	1583,25	-69,25	4796,12
1995	1606	12,5	156,25	20075,00	1608,19	-2,19	4,80
1996	1692	13,5	182,25	22842,00	1633,13	58,87	3465,68
1997	1839	14,5	210,25	26665,50	1658,07	180,93	32736,39
Topl.	38894	0	2247,5	56049	-	0	137658,4

Tablo 1: Yıllara göre KBMG değerleri ve hesaplanan değerler.

Buna göre, $a = 38894 / 30 = 1296,467$ ve $b = 56049 / 2247,5 = 24,938$ değerleri elde edilmektedir. Yani, doğrusal trend fonksiyonu $y = 1296,467 + 24,938t + e$ şeklinde tahmin edilmektedir. Tahmin edilen model aracılığıyla elde edilen tahminî KBMG, hata ve hata kareleri değerleri de Tablo 1'de yer almaktadır. Doğrusal trend fonksiyonunun tahminlerinin hata kareleri ortalaması (HKO) ise 4588,61'dir. Tahmin edilen doğrusal trend modeli ile elde edilen öngörüler ise aşağıda verilmiştir.

$$y_{1998} = 1296,467 + 24,938 (15,5) = 1683,006 \text{ bin TL}$$

$$y_{1999} = 1296,467 + 24,938 (16,5) = 1707,944 \text{ bin TL}$$

$$y_{2000} = 1296,467 + 24,938 (17,5) = 1732,882 \text{ bin TL}$$

$$y_{2001} = 1296,467 + 24,938 (18,5) = 1757,820 \text{ bin TL}$$

Öngörülerin hataları ise aşağıda verilmiştir;

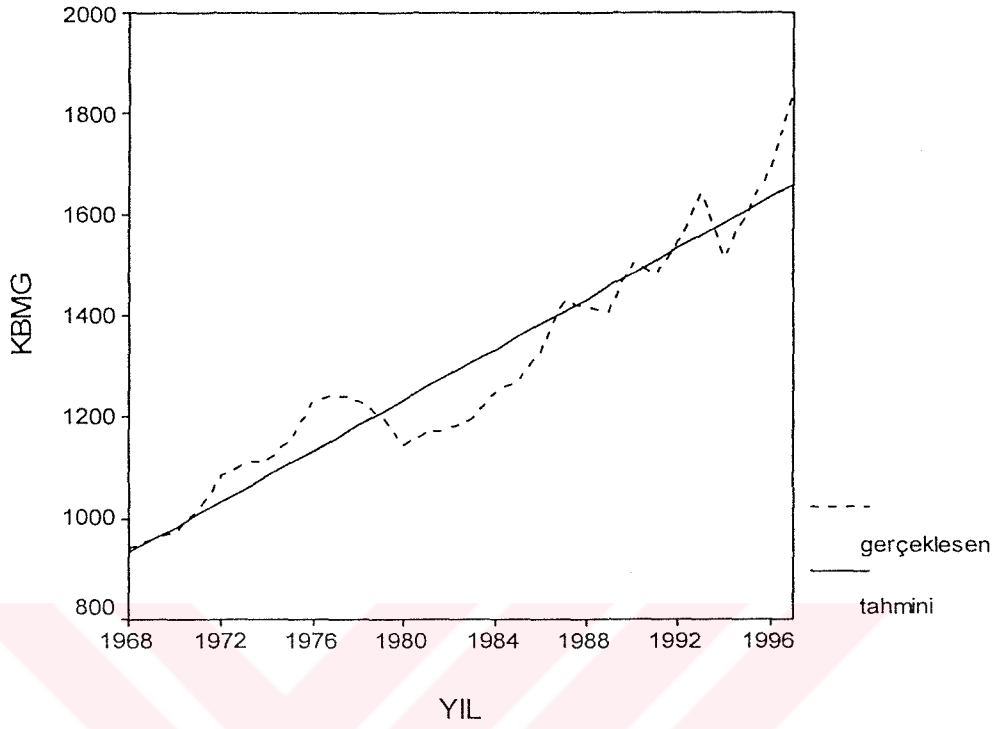
$$e_{1998} = 1880 - 1683,006 = 196,994$$

$$e_{1999} = 1741 - 1707,944 = 33,056$$

$$e_{2000} = 1766 - 1732,882 = 33,118$$

$$e_{2001} = 1601 - 1757,820 = -156,82$$

Buna göre öngörülerin hata kareleri ortalaması 16397,162 dir. Yıllara göre KBMG değerleri ile bunların birinci derece trend fonksiyonu ile elde edilen tahminlerinin seyrinin görsel bir ifadesi aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Grafik 1: Yıllara göre gerçek ve tahminî KBMG değerlerinin seyri.

4.2. İkinci Derece Trend Fonksiyonu

İkinci derece trend fonksiyonu için $y = a + bt + ct^2 + e$ denkleminin parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bunun için de aşağıdaki denklem takımının çözülmesi gerekir.

$$\sum y = an + b\sum t + c\sum t^2$$

$$\sum yt = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3$$

$$\sum yt^2 = a\sum t + b\sum t^3 + c\sum t^4$$

Yine yıllara toplamı 0 olacak şekilde değerler atandığında aşağıdaki denklemler çözülerek daha kısa yoldan katsayı tahminleri elde edilebilir.

$$b = \sum yt / \sum t^2$$

$$\sum y = an + c\sum t^2$$

$$\sum yt^2 = a\sum t^2 + c\sum t^4$$

Hesaplamalar için gerekli değerler Tablo 2’de verilmiştir.

Yıllar	y	t	t ²	yt	yt ²	t ⁴	ytah
1968	942	-14,5	210,25	-13659	198055,5	44205,06	1003,67
1969	958	-13,5	182,25	-12933	174595,5	33215,06	1014,37
1970	976	-12,5	156,25	-12200	152500,0	24414,06	1026,09
1971	1019	-11,5	132,25	-11718,5	134762,8	17490,06	1038,83
1972	1085	-10,5	110,25	-11392,5	119621,3	12155,06	1052,58
1973	1110	-9,5	90,25	-10545	100177,5	8145,06	1067,35
1974	1118	-8,5	72,25	-9503	80775,50	5220,06	1083,14
1975	1155	-7,5	56,25	-8662,5	64968,75	3164,06	1099,94
1976	1233	-6,5	42,25	-8014,5	52094,25	1785,06	1117,76
1977	1244	-5,5	30,25	-6842	37631,00	915,06	1136,60
1978	1233	-4,5	20,25	-5548,5	24968,25	410,06	1156,45
1979	1202	-3,5	12,25	-4207	14724,50	150,06	1177,32
1980	1145	-2,5	6,25	-2862,5	7156,25	39,06	1199,21
1981	1171	-1,5	2,25	-1756,5	2634,75	5,06	1222,12
1982	1177	-0,5	0,25	-588,5	294,25	0,06	1246,04
1983	1197	0,5	0,25	598,5	299,25	0,06	1270,98
1984	1250	1,5	2,25	1875	2812,50	5,06	1296,93
1985	1272	2,5	6,25	3180	7950,00	39,06	1323,90
1986	1328	3,5	12,25	4648	16268,00	150,06	1351,89
1987	1427	4,5	20,25	6421,5	28896,75	410,06	1380,90
1988	1417	5,5	30,25	7793,5	42864,25	915,06	1410,92
1989	1409	6,5	42,25	9158,5	59530,25	1785,06	1441,96
1990	1505	7,5	56,25	11287,5	84656,25	3164,06	1474,01
1991	1481	8,5	72,25	12588,5	107002,3	5220,06	1507,08
1992	1547	9,5	90,25	14696,5	139616,8	8145,06	1541,17
1993	1642	10,5	110,25	17241	181030,5	12155,06	1576,28
1994	1514	11,5	132,25	17411	200226,5	17490,06	1612,40
1995	1606	12,5	156,25	20075	250937,5	24414,06	1649,54
1996	1692	13,5	182,25	22842	308367,0	33215,06	1687,70
1997	1839	14,5	210,25	26665,5	386649,8	44205,06	1726,87
Topl.	38894	0	2247,5	56049	2982068	302625,8	38894

Tablo 2: KBMG değerleri ve ikinci derece trend fonksiyonu için gerekli işlemler.

Buna göre; $b = 56049 / 2247,5 = 24,938$

$$38894 = a \cdot 30 + c \cdot 2247,5$$

$$2982068 = a \cdot 2247,5 + c \cdot 302625,08$$

$$a = 1258,38 \quad \text{ve} \quad c = 0,5084$$

Böylece ikinci derece trend fonksiyonu $y = 1258,38 + 24,938t + 0,5084t^2 + e$ şeklinde tahmin edilmektedir. Modelin hata kareleri ortalaması ise 3431,76'dır.

Sonraki dört yıla ait öngörüler ise;

$$y_{1998} = 1258,38 + 24,938(15,5) + 0,5084 (240,25) = 1767,06 \text{ bin TL}$$

$$y_{1999} = 1258,38 + 24,938(16,5) + 0,5084 (272,25) = 1808,27 \text{ bin TL}$$

$$y_{2000} = 1258,38 + 24,938(17,5) + 0,5084 (306,25) = 1850,49 \text{ bin TL}$$

$$y_{2001} = 1258,38 + 24,938(18,5) + 0,5084 (342,25) = 1893,73 \text{ bin TL}$$

Öngörülerin hataları ise aşağıda verilmiştir;

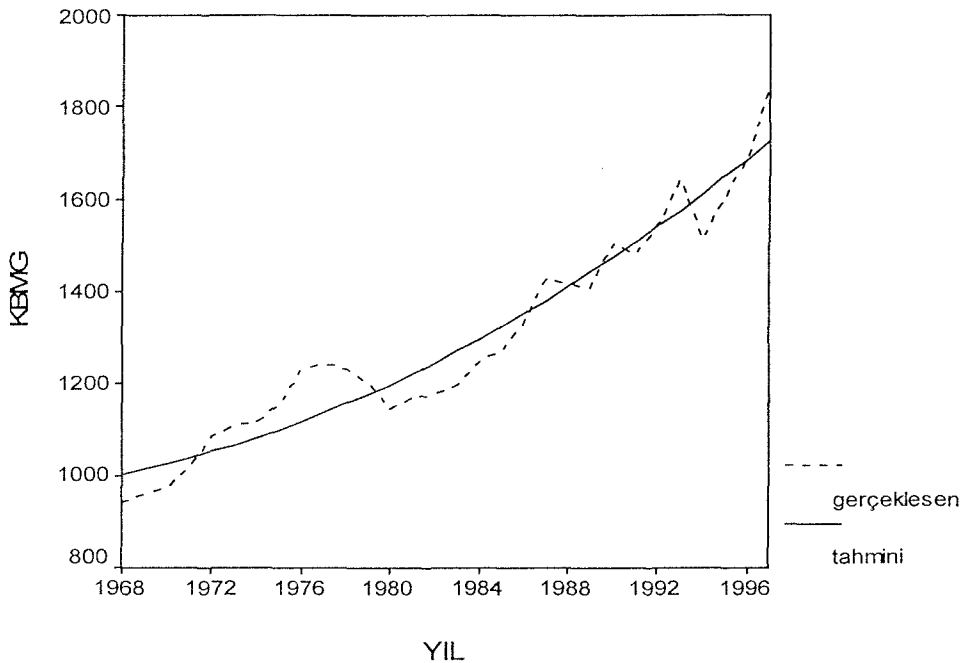
$$e_{1998} = 1880 - 1767,06 = 112,94$$

$$e_{1999} = 1741 - 1808,27 = -67,27$$

$$e_{2000} = 1766 - 1850,49 = -84,49$$

$$e_{2001} = 1601 - 1893,73 = -292,73$$

Buna göre öngörülerin hata kareleri ortalaması 27527,53'dür. Yıllara göre KBMG değerleri ile ikinci derece trend fonksiyonu ile elde edilen tahminî değerlerin seyri aşağıdaki grafikte de izlenebilir.



Grafik 2: Yıllara göre gerçek ve tahminî KBMG değerlerinin seyri.

4.3. Üssel Trend Fonksiyonu

Üssel trend fonksiyonu $y = ab^t$ şeklindedir. EKK ile katsayıların tahminlerini elde edebilmek için fonksiyonun doğrusal hale getirilmesi gerekir. Bunun için de her iki yanın logaritması alındıktan sonra,

$$\begin{aligned}\sum \ln y &= n \ln a + \ln b \sum t \\ \sum t \ln y &= \ln a \sum t + \ln b \sum t^2\end{aligned}$$

denklem takımının çözülmesi gerekmektedir. Yıllara toplamı 0 olacak şekilde değerler atandığında katsayılar kısa yoldan bulunabilir. Yani,

$$\ln a = \sum \ln y / n \quad \text{ve} \quad \ln b = \sum t \ln y / \sum t^2$$

İşlemler logaritmik ifadelerle yapılarak tahminî KBMG değerleri elde edildikten sonra bunların antilogaritmaları alınarak düz tahminî değerlere ulaşılabilir.

$$\ln a = 214,57 / 30 = 7,15 \quad \text{ve} \quad \ln b = 42,97 / 2247,5 = 0,019$$

Böylece üssel trend fonksiyonu,

$$\ln y = 7,15 + 0,019 t \quad \text{veya} \quad y = 1277,08 (1,019)^t + e$$

şeklinde tahmin edilmiş olmaktadır. İlk ifade kullanılarak tahminî KBMG değerleri elde edilmiştir. Üssel trend modelinin hata kareleri ortalaması 3777,95'tir. Yıllara göre KBMG değerleri ve hesaplamalarda kullanılan diğer serilere ait değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yıllar	lny	t	t ²	tlny	(lny)tah	ytah	(hata) ²
1968	6,85	-14,5	210,25	-99,30	6,87	967,29	639,66
1969	6,86	-13,5	182,25	-92,68	6,89	985,85	775,39
1970	6,88	-12,5	156,25	-86,04	6,91	1004,76	826,91
1971	6,93	-11,5	132,25	-79,66	6,93	1024,03	25,29
1972	6,99	-10,5	110,25	-73,39	6,95	1043,67	1708,05
1973	7,01	-9,5	90,25	-66,62	6,97	1063,69	2144,54
1974	7,02	-8,5	72,25	-59,66	6,99	1084,09	1149,61
1975	7,05	-7,5	56,25	-52,89	7,01	1104,89	2511,13
1976	7,12	-6,5	42,25	-46,26	7,03	1126,08	11431,37
1977	7,13	-5,5	30,25	-39,19	7,05	1147,68	9277,05
1978	7,12	-4,5	20,25	-32,03	7,06	1169,70	4007,27
1979	7,09	-3,5	12,25	-24,82	7,08	1192,13	97,34
1980	7,04	-2,5	6,25	-17,61	7,10	1215,00	4900,11
1981	7,07	-1,5	2,25	-10,60	7,12	1238,31	4530,17
1982	7,07	-0,5	0,25	-3,54	7,14	1262,06	7235,08
1983	7,09	0,5	0,25	3,54	7,16	1286,27	7968,71
1984	7,13	1,5	2,25	10,70	7,18	1310,94	3713,73
1985	7,15	2,5	6,25	17,87	7,20	1336,09	4107,06
1986	7,19	3,5	12,25	25,17	7,22	1361,71	1136,68
1987	7,26	4,5	20,25	32,68	7,24	1387,83	1533,93
1988	7,26	5,5	30,25	39,91	7,25	1414,46	6,47
1989	7,25	6,5	42,25	47,13	7,27	1441,59	1061,92
1990	7,32	7,5	56,25	54,87	7,29	1469,24	1278,83
1991	7,30	8,5	72,25	62,05	7,31	1497,42	269,67
1992	7,34	9,5	90,25	69,77	7,33	1526,14	434,95
1993	7,40	10,5	110,25	77,74	7,35	1555,42	7496,33
1994	7,32	11,5	132,25	84,21	7,37	1585,25	5077,15
1995	7,38	12,5	156,25	92,27	7,39	1615,66	93,35
1996	7,43	13,5	182,25	100,35	7,41	1646,65	2056,35
1997	7,52	14,5	210,25	109,00	7,43	1678,24	25844,27
Topl.	38894	0	2247,5	56049	-	38742,14	113338,4

Tablo 3: Logaritmik KBMG değerleri ve üssel trend fonksiyonu işlemleri.

Sonraki dört yıla ait öngörüler ise şöyledir,

$$\ln y_{1998} = 7,15 + 0,019 (15,5) = 7,4445 \rightarrow 1710,43 \text{ bin TL}$$

$$\ln y_{1999} = 7,15 + 0,019 (16,5) = 7,4635 \rightarrow 1743,24 \text{ bin TL}$$

$$\ln y_{2000} = 7,15 + 0,019 (17,5) = 7,4825 \rightarrow 1776,68 \text{ bin TL}$$

$$\ln y_{2001} = 7,15 + 0,019 (18,5) = 7,5015 \rightarrow 1810,76 \text{ bin TL}$$

Öngörülerin hataları ise aşağıda verilmiştir;

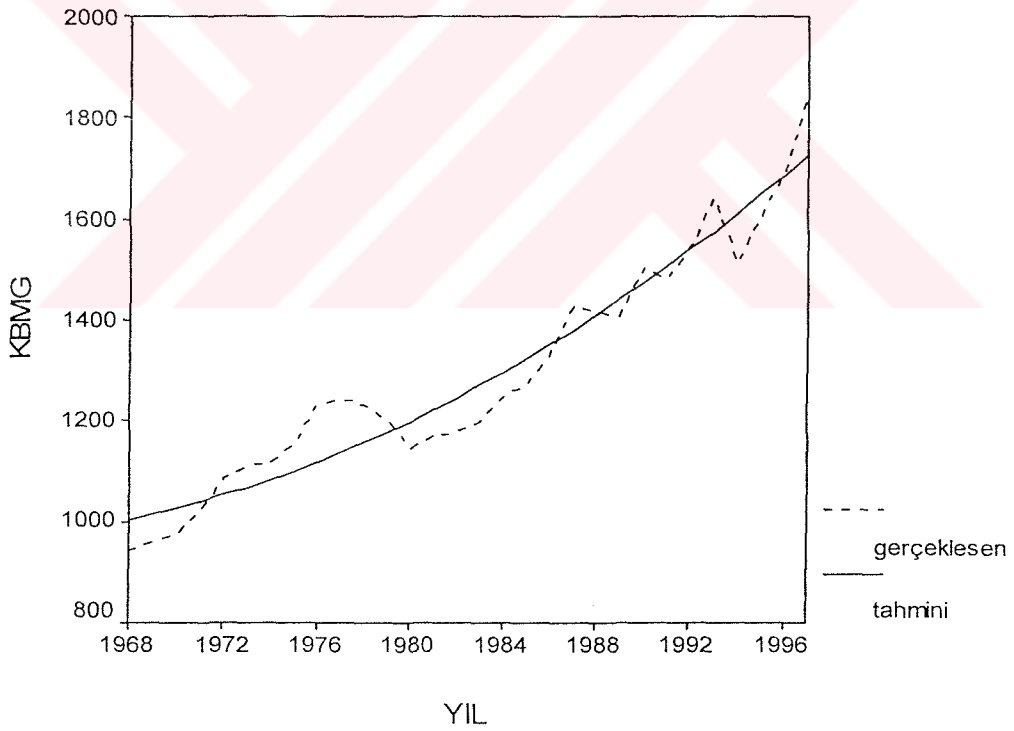
$$e_{1998} = 1880 - 1710,43 = 169,57$$

$$e_{1999} = 1741 - 1743,24 = -2,24$$

$$e_{2000} = 1766 - 1776,68 = -10,68$$

$$e_{2001} = 1601 - 1810,76 = -209,76$$

Buna göre öngörülerin hata kareleri ortalaması 18218,08'dir. Gerçek ve tahmin edilen seri değerlerinin yıllar içindeki seyri aşağıdaki grafikte de gözlenebilir.



Grafik 3: Yıllara göre gerçek ve tahminî KBMG değerlerinin seyri.

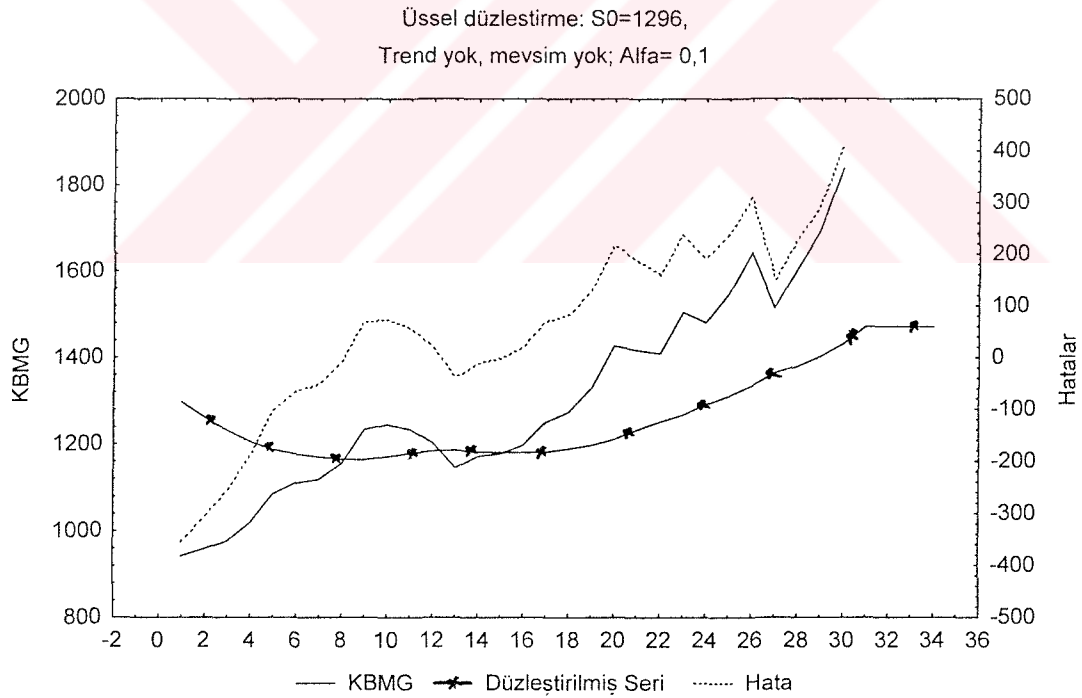
4.4. Basit ÜDY

Her ne kadar KBMG serisinde yukarı doğru bir trend olduğu seri grafiğinde açık bir şekilde görülmekte ise de sırf alması bir yöntem olması ve trendin göz ardı edilmesi halinde öngörülerin bundan nasıl etkileneceğini görmek açısından bu kısımda trendi yok sayan tek parametrelili (basit) üssel düzeltme yöntemine göre öngörüler elde edilmektedir. İki uç değer sayılabilecek $\alpha = 0,1$ ve $\alpha = 0,9$ düzeltme sabitleri için düzeltilmiş değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

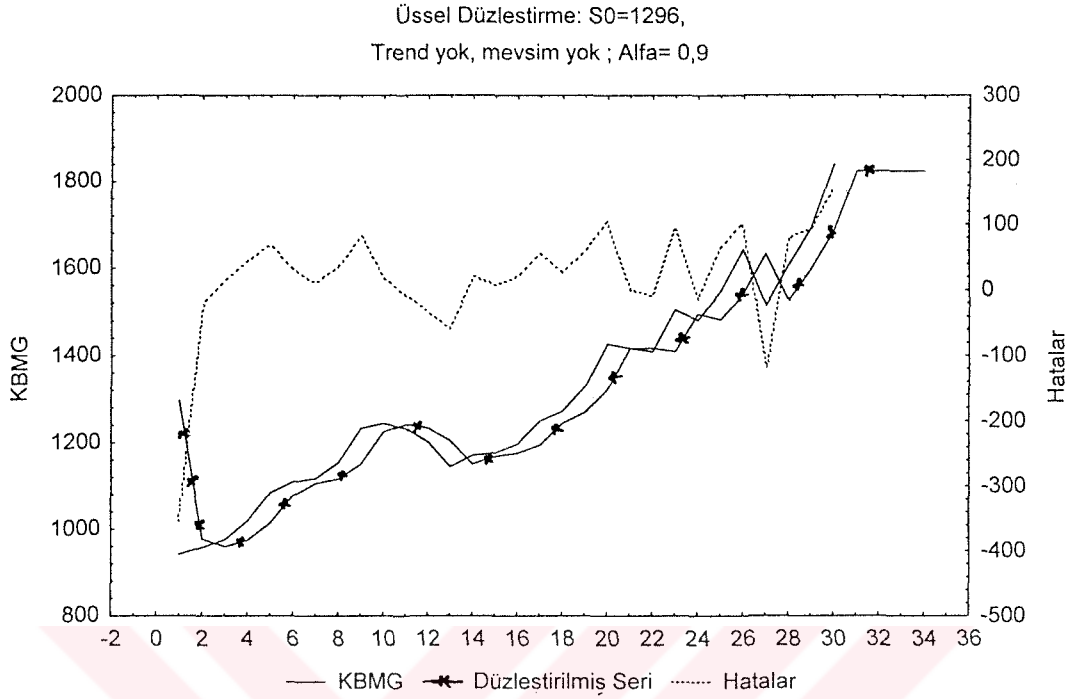
Yıllar	KBMG	Dz. Seri ($\alpha = 0,1$)	Hata	Dz. Seri ($\alpha = 0,9$)	Hata
1968	942	1296,467	-354,467	1296,467	-354,467
1969	958	1261,020	-303,020	977,447	-19,447
1970	976	1230,718	-254,718	959,945	16,055
1971	1019	1205,246	-186,246	974,394	44,606
1972	1085	1186,622	-101,622	1014,539	70,461
1973	1110	1176,459	-66,459	1077,954	32,046
1974	1118	1169,813	-51,813	1106,795	11,205
1975	1155	1164,632	-9,632	1116,880	38,120
1976	1233	1163,669	69,331	1151,188	81,812
1977	1244	1170,602	73,398	1224,819	19,181
1978	1233	1177,942	55,058	1242,082	-9,082
1979	1202	1183,448	18,552	1233,908	-31,908
1980	1145	1185,303	-40,303	1205,191	-60,191
1981	1171	1181,273	-10,273	1151,019	19,981
1982	1177	1180,245	-3,245	1169,002	7,998
1983	1197	1179,921	17,079	1176,200	20,800
1984	1250	1181,629	68,371	1194,920	55,080
1985	1272	1188,466	83,534	1244,492	27,508
1986	1328	1196,819	131,181	1269,249	58,751
1987	1427	1209,937	217,063	1322,125	104,875
1988	1417	1231,644	185,356	1416,512	0,488
1989	1409	1250,179	158,821	1416,951	-7,951
1990	1505	1266,061	238,939	1409,795	95,205
1991	1481	1289,955	191,045	1495,480	-14,480
1992	1547	1309,060	237,940	1482,448	64,552
1993	1642	1332,854	309,146	1540,545	101,455
1994	1514	1363,768	150,232	1631,854	-117,854
1995	1606	1378,791	227,209	1525,785	80,215
1996	1692	1401,512	290,488	1597,979	94,021
1997	1839	1430,561	408,439	1682,598	156,402

Tablo 4: $\alpha = 0,1$ ve $\alpha = 0,9$ 'a göre düzeltilmiş seriler ve hataları.

$\alpha = 0,1$ durumunda KBMG serisi, düzeltilmiş seri ve hataların seyri aşağıda Grafik 4'te görülmektedir. α 'nın değeri sıfıra yakın olduğundan düzeltilen değerler gerçekleşen değerlerden oldukça farklı çıkmaktadır. Gelecek dönemlerin öngörüsü açısından çok hatalı değerler elde edileceği ortadadır. Hata kareleri ortalaması 35229,8'dir. $\alpha = 0,9$ gibi daha büyük (1'e daha yakın) bir değer alındığında serilerin ne yönde değiştiği Grafik 5'te görülmektedir. Burada KBMG serisi ile düzeltilmiş seri daha benzer bir seyir izlerken hatalar da daha küçüktür. Hata kareleri ortalaması 8139,56'dır. Buna göre düzeltme sabiti olarak $\alpha = 0,9$ alınmasının daha doğru olacağı söylenebilir. Nitekim her iki durum için tahminlerin hata kareleri ortalamaları karşılaştırıldığında da bu sonuca varılmaktadır.



Grafik 4: $\alpha = 0,1$ için KBMG, düzeltilmiş seri ve hatalar.



Grafik 5: $\alpha = 0,9$ için KBMG, düzleştirilmiş seri ve hatalar.

$\alpha = 0,9$ alındığında 1998 yılına ilişkin öngörü değeri 1823,36 milyon TL'dir. Sonraki yıllara ait öngörü değerleri için KBMG değerlerinin gerçekleşmesini beklemek gerekmektedir. Aksi takdirde her yıl için 1998 yılı öngörü değeri kullanılacaktır. Bu durumda öngörülerin hata kareleri ortalaması 15681,35 olmaktadır.

4.5. İki Parametrelili Doğrusal ÜDY

Bu kısımda ise KBMG serisinde gözlenen yukarı doğru trendi dikkate alarak doğrusal trend varsayımıyla iki parametrelili üdy uygulanmaktadır. Statistica programında iteratif süreç sonunda $\alpha = 0.9$ ve $\gamma = 0.1$ değerleri hata kareleri ortalamasını minimum yapan değerler olarak bulunmuştur. Farklı parametre değerleri daha büyük hata kareleri ortalaması verdiği için bu değerler en uygun değer olarak alınmıştır. Buna göre elde edilen düzleştirilmiş seri ve hatalar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yıllar	KBMG	Dz. Seri ($\alpha = 0.9; \gamma = 0.1$)	Hatalar
1968	942	957,466	-15,466
1969	958	974,627	-16,627
1970	976	990,749	-14,749
1971	1019	1008,537	10,463
1972	1085	1048,767	36,233
1973	1110	1111,945	-1,945
1974	1118	1141,144	-23,144
1975	1155	1151,468	3,532
1976	1233	1185,535	47,465
1977	1244	1258,719	-14,719
1978	1233	1276,554	-43,554
1979	1202	1268,710	-66,710
1980	1145	1240,234	-95,234
1981	1171	1186,338	-15,338
1982	1177	1203,543	-26,543
1983	1197	1210,767	-13,767
1984	1250	1229,356	20,644
1985	1272	1278,579	-6,579
1986	1328	1303,571	24,429
1987	1427	1356,168	70,832
1988	1417	1450,089	-33,089
1989	1409	1451,509	-42,509
1990	1505	1444,530	60,470
1991	1481	1529,224	-48,224
1992	1547	1517,163	29,837
1993	1642	1574,587	67,413
1994	1514	1665,478	-151,478
1995	1606	1561,502	44,498
1996	1692	1631,960	60,040
1997	1839	1716,272	122,728
1998	1880	1856,420*	23,580
1999	1741	1887,340*	-146,34
2000	1766	1918,260*	-152,26
2001	1601	1949,180*	-348,18

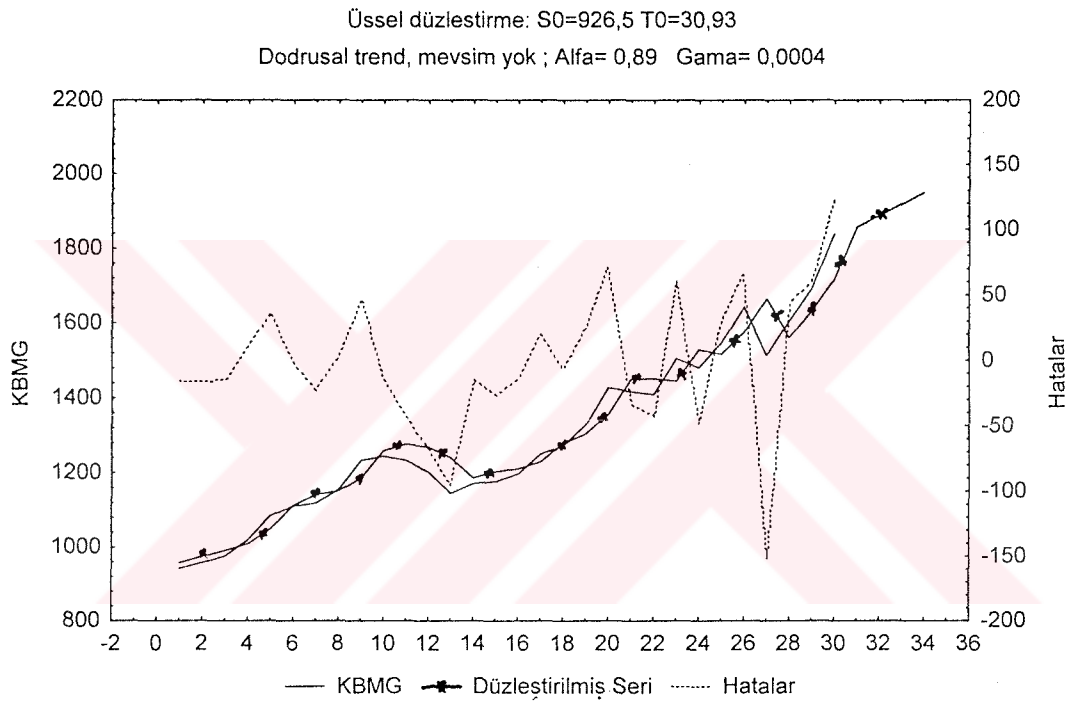
Tablo 5: KBMG değerleri ve iki parametrelili doğrusal düzleştirme ile elde edilen tahmin değerleri ve hatalar.

Tahminlerin hata kareleri ortalaması 2857,26'dır. Tablo 5'in son dört satırında öngörü değerleri yer almaktadır. Öngörülerin hata kareleri ortalaması 41595,96'dır.

* Öngörü değerleri.

Bu kadar büyük bir öngörü hatasında, serinin yukarı doğru bir trende sahip olmasına karşın öngörü döneminde KBMG düzeyinin giderek azalan bir seyir izlemesinin etkili olduğu söylenebilir.

KBMG serisinin ve doğrusal trende göre düzeltme ile elde edilen serinin zaman içindeki seyri aşağıdaki Grafik 6'da gözlenebilir.



Grafik 6: $\alpha = 0.9$ ve $\gamma = 0.1$ iken doğrusal trende göre düzeltilmiş değerler, KBMG ve hatalar.

4.6. Üssel Trende Göre İki Parametrelili ÜDY

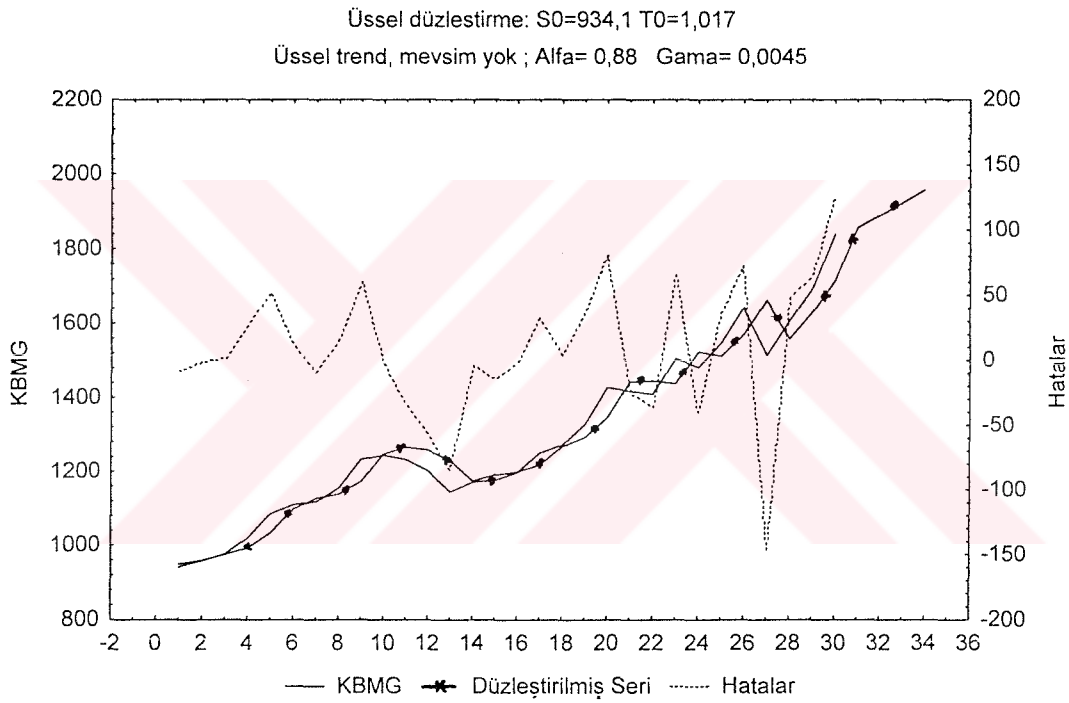
KBMG serisinin üssel trende uyabileceği varsayılarak hata kareleri ortalamasını minimum yapan $\alpha = 0,88$ ve $\gamma = 0,0045$ parametre değerlerine göre üssel düzeltme uygulandığında Tablo 6'daki düzeltilmiş seri değerleri ve hatalar elde edilmektedir.

Yıllar	KBMG	Dz. Seri ($\alpha = 0,88; \gamma = 0,0045$)	Hatalar
1968	942	949,966	-7,966
1969	958	958,940	-,940
1970	976	974,350	1,650
1971	1019	992,346	26,654
1972	1085	1033,134	51,866
1973	1110	1097,401	12,599
1974	1118	1127,677	-9,677
1975	1155	1138,496	16,504
1976	1233	1173,007	59,993
1977	1244	1247,302	-3,302
1978	1233	1266,211	-33,211
1979	1202	1258,539	-56,539
1980	1145	1229,628	-84,628
1981	1171	1174,754	-3,754
1982	1177	1191,310	-14,310
1983	1197	1198,643	-1,643
1984	1250	1217,429	32,571
1985	1272	1267,284	4,716
1986	1328	1293,077	34,923
1987	1427	1346,487	80,513
1988	1417	1441,960	-24,960
1989	1409	1444,564	-35,564
1990	1505	1437,580	67,420
1991	1481	1522,943	-41,943
1992	1547	1511,713	35,287
1993	1642	1569,571	72,429
1994	1514	1661,990	-147,990
1995	1606	1558,108	47,892
1996	1692	1627,978	64,022
1997	1839	1713,766	125,234
1998	1880	1856,400*	23,600
1999	1741	1889,404*	-148,404
2000	1766	1922,994*	-156,994
2001	1601	1957,183*	-356,183

Tablo 6: Yıllara göre KBMG değerleri, üssel düzeltirme ile elde edilen tahmin değerleri ve hatalar.

* Öngörü değerleri.

Tahminlerin hata kareleri ortalaması 2891,05'tir. Tablo 6'nın son dört satırında dört yıl için gerçekleşen ve öngörülen değerler yer almaktadır. Öngörülerin hata kareleri ortalaması 43523,54'tür. Yine burada da, doğrusal trend durumunda olduğu gibi, gerçekleşen değerlerin yukarı doğru üssel trendin süreceği beklentisine uymaması nedeniyle öngörülerin gerçek değere göre büyük bir sapma gösterdiği görülmektedir. KBMG ve üssel trende göre düzeltilmiş seri değerlerinin zaman içindeki seyri aşağıdaki grafikte izlenebilir.

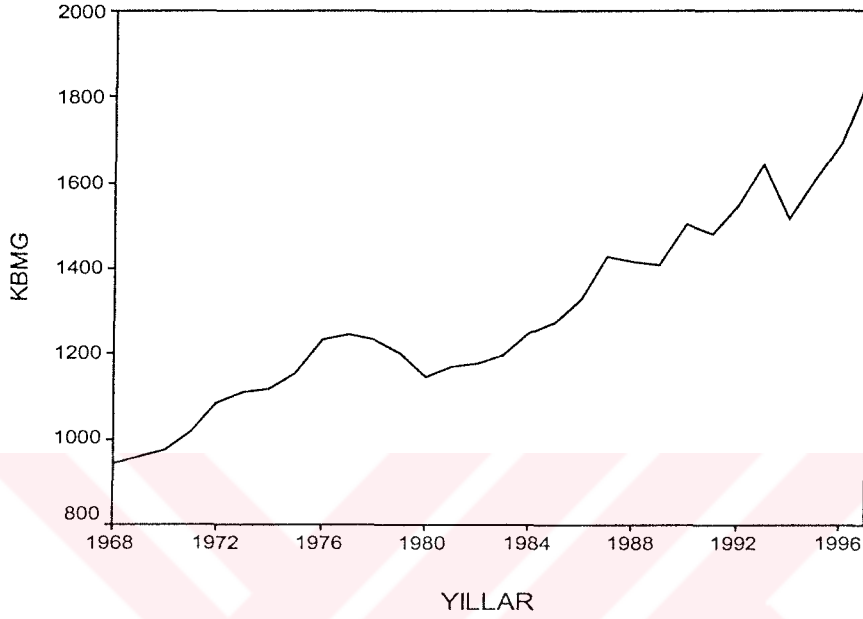


Grafik 7: $\alpha = 0.88$ ve $\gamma = 0.0045$ iken üssel trende göre düzeltilmiş değerler, KBMG ve hatalar.

4.7. ARIMA (Box-Jenkins) Modeli

ARIMA modellerinde analize genellikle serinin grafiksel olarak incelenmesiyle başlanmaktadır. Böylelikle orijinal serinin durağan olup olmadığı, yani serinin ortalamasının ve varyansının zaman içinde değişip değişmediği hakkında bir fikir edinmek mümkün olabilmektedir. Serinin durağan olmadığı anlaşıldığında duruma

göre ne tür bir dönüştürmeye başvurulacağı kararlaştırılabilmektedir. Yıllara göre KBMG değerleri ve bundan türetilen diğer seriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Grafik 8: KBMG serisinin grafiği.

Grafik incelendiğinde KBMG serisinin güçlü bir yukarı doğru trende sahip olduğu görülmektedir. Özellikle 1987 yılından sonra genelde yıldan yıla ters yönde bir değişim ve varyansın yavaşça artma eğilimine girdiği gözlenmektedir. Netice itibariyle seri durağan değildir.

Trendin varlığı, (doğrusal) trend fonksiyonunun parametrelerini tahmin edip anlamlılıklarını sınamak yoluyla da araştırılabilir. KBMG serisi için $y = a + bt + e$ şeklindeki doğrusal trend fonksiyonunun parametreleri tahmin edilmiş ve aşağıdaki değerler elde edilmiştir (ayrıca bkz. Kesim 4.1);

Yıllar	y	t	t ²	ty
1968	942	-14,5	210,25	-13659,0
1969	958	-13,5	182,25	-12933,0
1970	976	-12,5	156,25	-12200,0
1971	1019	-11,5	132,25	-11718,5
1972	1085	-10,5	110,25	-11392,5
1973	1110	-9,5	90,25	-10545,0
1974	1118	-8,5	72,25	-9503,00
1975	1155	-7,5	56,25	-8662,50
1976	1233	-6,5	42,25	-8014,50
1977	1244	-5,5	30,25	-6842,00
1978	1233	-4,5	20,25	-5548,50
1979	1202	-3,5	12,25	-4207,00
1980	1145	-2,5	6,25	-2862,50
1981	1171	-1,5	2,25	-1756,50
1982	1177	-0,5	0,25	-588,50
1983	1197	0,5	0,25	598,50
1984	1250	1,5	2,25	1875,00
1985	1272	2,5	6,25	3180,00
1986	1328	3,5	12,25	4648,00
1987	1427	4,5	20,25	6421,50
1988	1417	5,5	30,25	7793,50
1989	1409	6,5	42,25	9158,50
1990	1505	7,5	56,25	11287,50
1991	1481	8,5	72,25	12588,50
1992	1547	9,5	90,25	14696,50
1993	1642	10,5	110,25	17241,00
1994	1514	11,5	132,25	17411,00
1995	1606	12,5	156,25	20075,00
1996	1692	13,5	182,25	22842,00
1997	1839	14,5	210,25	26665,50
Toplam	38894	0	2247,5	56049

Tablo 7: Yıllara göre KBMG değerleri ve doğrusal trend fonksiyonunun tahmininde kullanılan diğer seriler.

$$y = 1296,467 + 24.938 t$$

$$\text{s. hata} \quad (12,802) \quad (1,479) \quad R^2 = 0,910$$

$$\text{t-değeri} \quad (101,274) \quad (16,861)$$

Görüldüğü gibi parametrelerin sıfırdan farklılığı oldukça anlamlıdır. 1. derece farklar serisi (f) için doğrusal trend fonksiyonu tahmin edildiğinde ise aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

$$f = 30,236 + 1,390 t$$

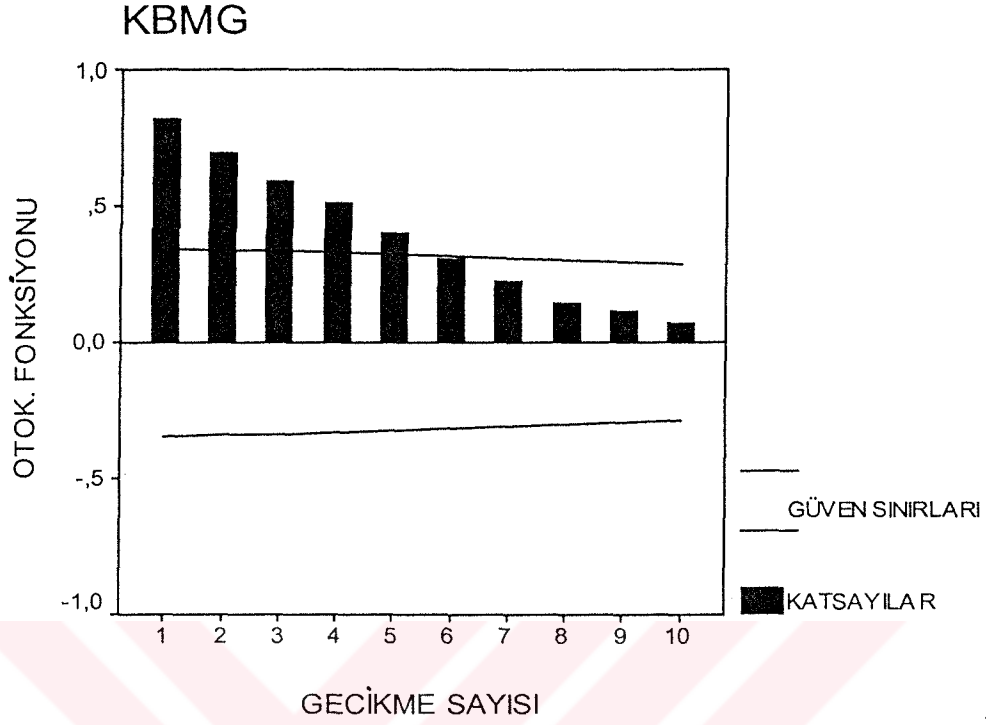
s. hata	(10,267)	(1,225)	$R^2 = 0,045$
t-değeri	(2,945)	(1,134)	

Eğim parametresinin (%5 anlamlılık düzeyinde) sıfırdan farklılığının anlamlı olmaması 1. derece farklar (f) serisinde trend bulunmadığını, böylece ilk farkları almakla trendin giderildiğini göstermektedir.

Grafiksel inceleme ve trend fonksiyonu seride deterministik trendin varlığını ortaya koymaktadır. Otokorelasyon katsayılarının incelenmesi de seride stokastik trendin varlığı, dolayısıyla durağanlığı hakkında fikir verebilmektedir. KBMG serisinin otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

	Oto-	Stand.									
Gec.	Kor.	Hata	-1	-.75	-.5	-.25	0	.25	.5	.75	1
			+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	0,826	0,174				.	I*****	*****			
2	0,697	0,171				.	I*****	*****			
3	0,593	0,168				.	I*****	*****			
4	0,514	0,165				.	I*****	***			
5	0,401	0,161				.	I*****	**			
6	0,310	0,158				.	I*****				
7	0,229	0,155				.	I*****	.			
8	0,148	0,151				.	I***	.			
9	0,118	0,148				.	I**	.			
10	0,073	0,144				.	I*	.			

Otokorelasyonlar * İki standart hatalık sınırlar .



Grafik 9: KBMG serisinin otokorelasyon fonksiyonu.

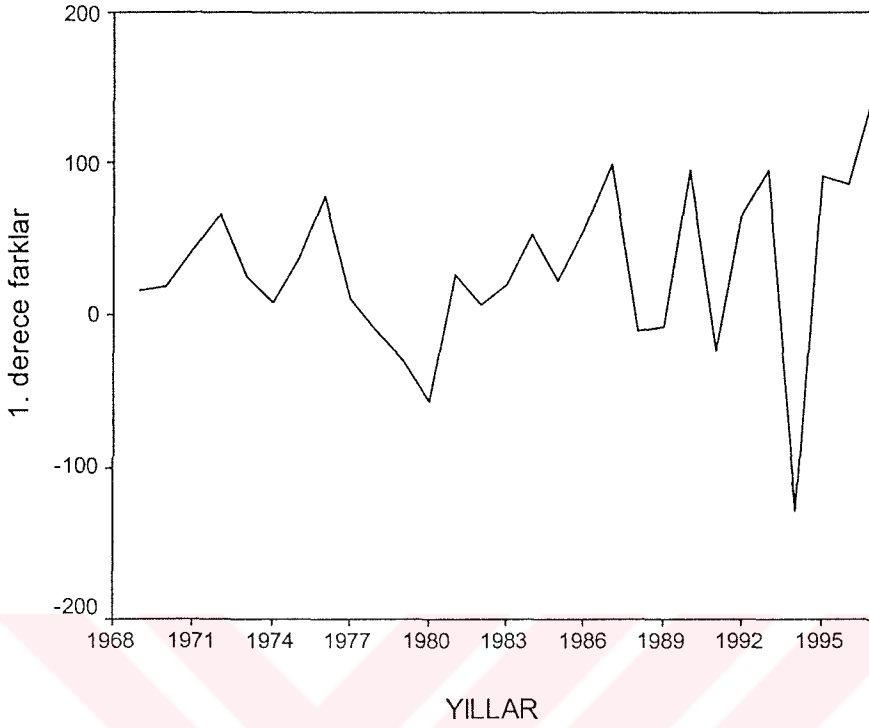
5. gecikmeden sonraki otokorelasyon katsayılarının %5 anlamlılık düzeyinde sıfırdan farklılıklarının anlamlı olmadığı görülmektedir. Yani 5. gecikmeye kadar seri değerleri arasında güçlü bir ilişki vardır. Buna göre KBMG serisinin durağan olmadığı söylenebilir.

Seriye durağan hale getirmek için 1. dereceden farklar alındıktan sonra yine bunların grafiğine bakılarak karar verilebilir.

KBMG serisi, bir dönem gecikmeli değerleri ve bunların farkları aşağıdaki tabloda verilmiştir. 1. derece farkların grafiği ise Grafik 10'daki gibidir.

Yıllar	(KBMG) _t	(KBMG) _{t-1}	1. Farklar
1968	942	-	-
1969	958	942	16
1970	976	958	18
1971	1019	976	43
1972	1085	1019	66
1973	1110	1085	25
1974	1118	1110	8
1975	1155	1118	37
1976	1233	1155	78
1977	1244	1233	11
1978	1233	1244	-11
1979	1202	1233	-31
1980	1145	1202	-57
1981	1171	1145	26
1982	1177	1171	6
1983	1197	1177	20
1984	1250	1197	53
1985	1272	1250	22
1986	1328	1272	56
1987	1427	1328	99
1988	1417	1427	-10
1989	1409	1417	-8
1990	1505	1409	96
1991	1481	1505	-24
1992	1547	1481	66
1993	1642	1547	95
1994	1514	1642	-128
1995	1606	1514	92
1996	1692	1606	86
1997	1839	1692	147

Tablo 8: Yıllara göre KBMG, gecikmeli KBMG ve 1. derece farklar



Grafik 10: KBMG 1. derece farklar serisinin grafiği

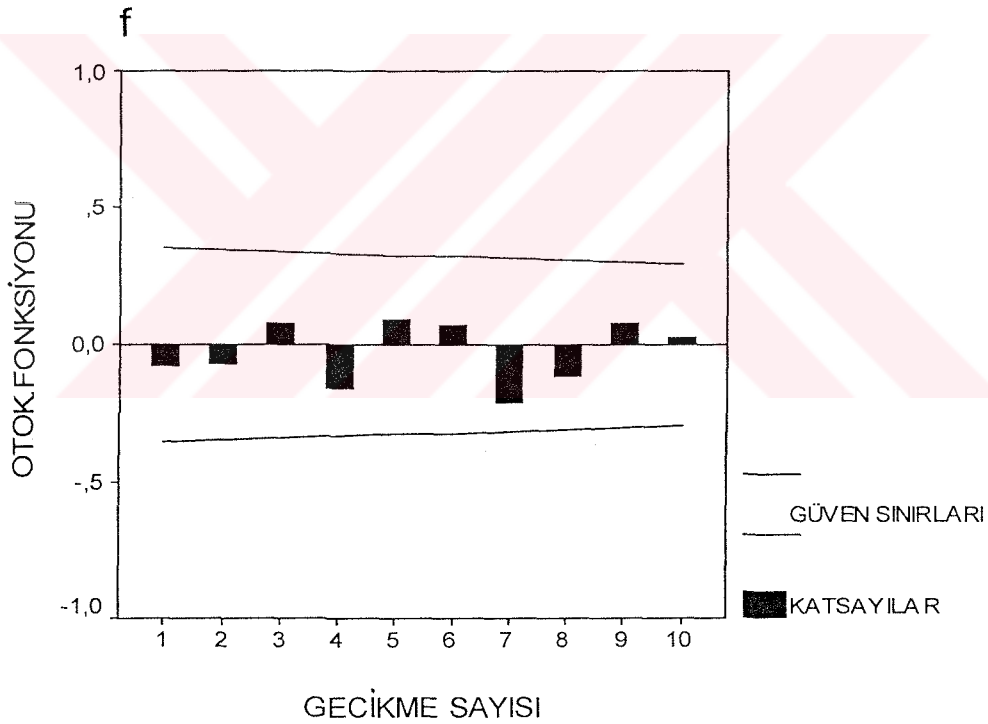
Grafikte serideki trendin giderildiği görülmektedir, bu nedenle daha yüksek dereceden fark almaya gerek yoktur. 1994 ve 1997 yıllarında iki aşıırı değer görülmektedir. Bunların parametre tahminlerinin standart hatalarının elde edilmesinde sorun çıkarmaları mümkündür.¹

Nitekim ilk farklar serisinin Grafik 11’de verilen otokorelasyon fonksiyonu incelendiğinde tüm gecikmeler için otokorelasyon katsayılarının sıfırdan farklılıklarının anlamlı olmadığı görülmektedir.

¹ M. Karagöz, **Doğrusal Zaman Serisi Modelleri İle Bazı İktisadî Göstergelerin Analiz ve  ntahmini**, Malatya, 1996, s. 113

Gec.	Oto-Kor.	Stand. Hata	-1	-.75	-.5	-.25	0	.25	.5	.75	1
			+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+								
1	-0,079	0,176					**I				
2	-0,076	0,173					**I				
3	0,083	0,170					I**				
4	-0,159	0,167					***I				
5	0,095	0,163					I**				
6	0,070	0,160					I*				
7	-0,210	0,156					****I				
8	-0,118	0,153					**I				
9	0,081	0,149					I**				
10	0,032	0,145					I*				

otokorelasyonlar * İki standart hatalık sınırlar .



Grafik 11: KBMG serisi 1. farklar serisinin otokorelasyon fonksiyonu.

Bundan sonraki adım uygun modelin, yani ARIMA modeli için p, d ve q derecelerinin belirlenmesidir. Durağan bir seriye (f) ilk farklarla ulaşıldığından d = 1 dir. Uygulamada p ve q değerleri genellikle 2'yi aşmamaktadır. Buna göre farklı parametre kombinasyonları denenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

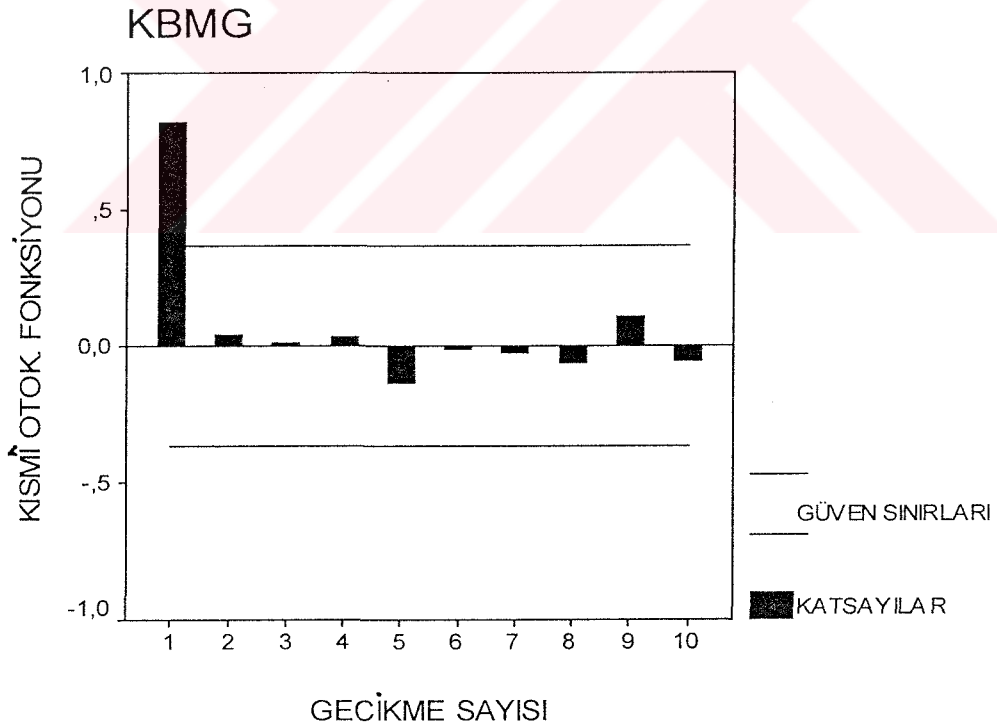
Model	Parametre Tahmini	Standart Hata	t-değeri	Olasılık	AIC
AR1	0,176	0,207	0,850	0,402	323,55
MA1	-0,145	0,203	-0,716	0,480	313,70
AR1	0,994	0,078	12,683	0,0000	321,52
MA1	0,940	0,380	2,473	0,020	
AR1	1,081	0,080	13,471	0,000	323,87
AR2	-0,082	0,069	-1,192	0,244	
MA1	0,980	0,858	1,143	0,264	
AR1	0,884	7,699	0,115	0,910	325,55
AR2	0,112	7,715	0,015	0,989	
MA1	0,872	7,604	0,115	0,910	
MA2	0,077	7,520	0,010	0,992	
AR1	0,167	0,208	0,802	0,430	325,03
AR2	0,152	0,217	0,702	0,488	
MA1	-0,111	0,204	-0,548	0,588	325,47
MA2	-0,125	0,215	-0,580	0,566	
AR1	0,994	0,092	10,771	0,000	323,57
MA1	0,941	0,391	2,407	0,023	
MA2	0,001	0,254	0,004	0,997	

Tablo 9: Farklı p ve q değerlerine göre ARIMA (p,1,q) modelleri.

Yukarıdaki sonuçlara göre tek anlamlı ve dolayısıyla en uygun model ARIMA(1,1,1) modelidir. Modelin hareketli ortalama kısmının derecesinin belirlenmesinde yardımcı olan otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Grafik 9’da verilmişti. Otoregresif kısmın derecesinin belirlenmesinde ise kısmî otokorelasyonların dağılımından yararlanılmaktadır. KBMG ve 1. farklar (f) serisinin kısmî korelasyon fonksiyonları aşağıdaki grafiklerde verilmektedir.

	Kıs.oto-	Stand.									
Gec.	Kor.	hata	-1	-.75	-.5	-.25	0	.25	.5	.75	1
			+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+								
1	0,826	0,183				.	I*****	.	*****		
2	0,045	0,183				.	I*	.			
3	0,017	0,183				.	*	.			
4	0,034	0,183				.	I*	.			
5	-0,138	0,183				.	***I	.			
6	-0,017	0,183				.	*	.			
7	-0,032	0,183				.	*I	.			
8	-0,066	0,183				.	*I	.			
9	0,111	0,183				.	I**	.			
10	-0,057	0,183				.	*I	.			

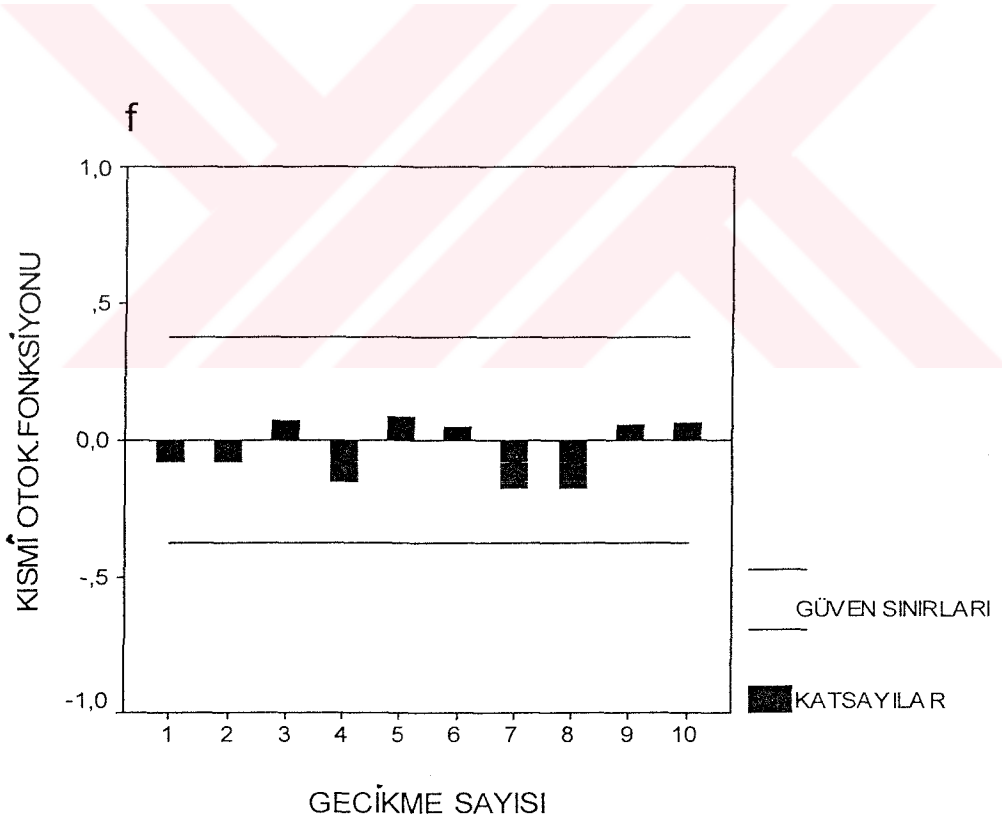
Otokorelasyonlar * İki Standart Hatalık Sınırlar .



Grafik 12: KBMG serisinin kısmî otokorelasyon fonksiyonu.

Kıs.oto- Stand.											
Gec.	kor.	Hata	-1	-.75	-.5	-.25	0	.25	.5	.75	1
			+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	-0,079	0,186					**I				
2	-0,082	0,186					**I				
3	0,071	0,186					I*				
4	-0,155	0,186					***I				
5	0,087	0,186					I**				
6	0,053	0,186					I*				
7	-0,174	0,186					***I				
8	-0,179	0,186					****I				
9	0,058	0,186					I*				
10	0,063	0,186					I*				

Otokorelasyonlar * İki Standart Hatalık Sınırlar.



Grafik 13: 1. farklar (f) serisinin kısmî otokorelasyon fonksiyonu.

Orijinal KBMG serisinin otokorelasyon ve kısmî otokorelasyon katsayılarının grafikleri incelendiğinde otokorelasyon katsayılarının uzun bir gecikmeden (6) sonra

sıfıra yaklaşması, kısmî otokorelasyon katsayılarının ise bir yıllık gecikmeden hemen sonra sıfırlanması AR modelinin uygun olduğunu göstermektedir. 1. derece farklar serisinin otokorelasyon ve kısmî otokorelasyon katsayılarının grafikleri incelendiğinde hepsinin de anlamsız olması ve dalgalanarak sıfıra yaklaşması model seçimini güçleştirmektedir. Bununla birlikte Tablo 9'daki sonuçlara göre en uygun modelin ARIMA (1,1,1) modeli olduğu söylenebilir. Buna göre tahmin edilen model aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} f_t &= \phi_1 f_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ f_t &= 0,994 f_{t-1} + e_t - 0,941 e_{t-1} \\ \text{sh.}(0,078) & \quad (0,380) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t &= y_t - y_{t-1} & f_{t-1} &= y_{t-1} - y_{t-2} \\ y_t - y_{t-1} &= \phi_1 (y_{t-1} - y_{t-2}) + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} + \phi_1 (y_{t-1} - y_{t-2}) + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ y_t &= (\phi_1 + 1) y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ y_t &= 1,994 y_{t-1} - 0,994 y_{t-2} - 0,941 e_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

Bu tahminler doğrultusunda yıllara göre KBMG değerleri, bunların tahminleri ve tahmin hataları ile ± 2 standart hata genişliğindeki güven sınırları aşağıda Tablo 10'da verilmiştir.

Tahminlerin hata kareleri ortalaması 3251,82'tür. Sonraki dört yılın öngörü değerleri ise aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} y_{1998} &= 1,994 (1839) - 0,994 (1692) - 0,941 (121,74) = 1870,90 \text{ bin TL} \\ y_{1999} &= 1,994 (1870,90) - 0,994 (1839) = 1902,61 \text{ bin TL} \\ y_{2000} &= 1,994 (1902,61) - 0,994 (1870,90) = 1934,13 \text{ bin TL} \\ y_{2001} &= 1,994 (1934,13) - 0,994 (1902,61) = 1965,46 \text{ bin TL} \end{aligned}$$

Öngörülerin hataları ise;

$$e_{1998} = 1880 - 1870,90 = 9,1$$

$$e_{1999} = 1741 - 1902,61 = -161,61$$

$$e_{2000} = 1766 - 1934,13 = -168,13$$

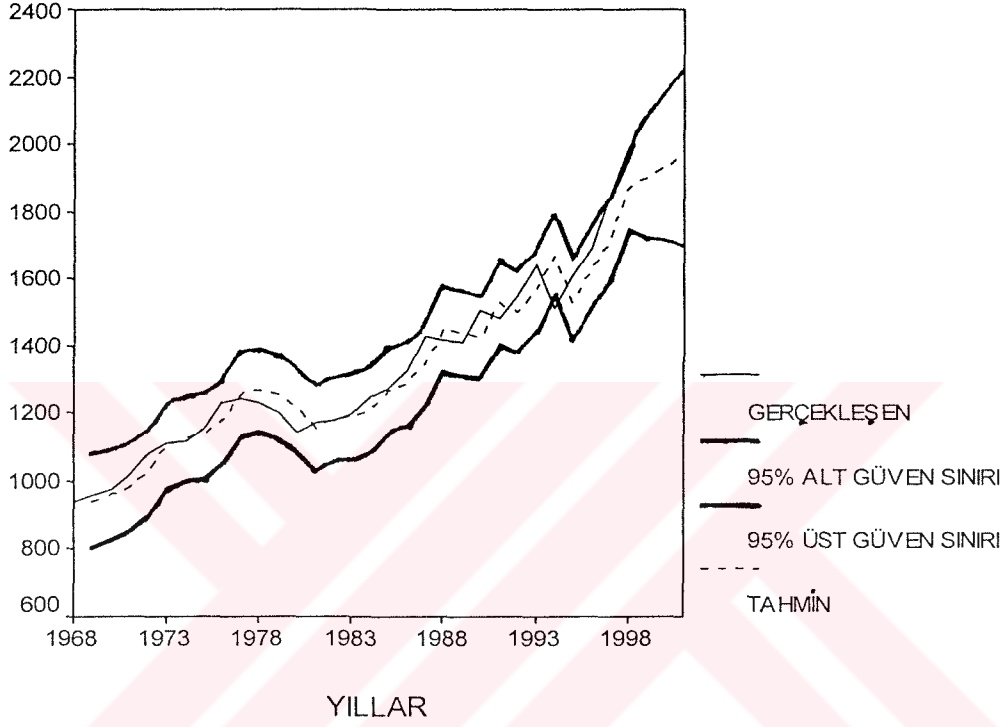
$$e_{2001} = 1601 - 1965,46 = -364,46$$

Buna göre öngörülerin hata kareleri ortalaması 46824,85'tir.

Yıllar	KBMG	Tahminler	Hatalar	Üst sınır	Alt sınır
1968	942	-	-	-	-
1969	958	942,000	16,000	808,502	1075,498
1970	976	961,651	14,349	831,675	1091,627
1971	1019	982,299	36,701	854,550	1110,049
1972	1085	1031,049	53,951	904,825	1157,273
1973	1110	1104,388	5,612	979,267	1229,508
1974	1118	1129,953	-11,953	1005,662	1254,244
1975	1155	1136,507	18,493	1012,859	1260,155
1976	1233	1175,266	57,734	1052,127	1298,405
1977	1244	1258,565	-14,565	1135,836	1381,294
1978	1233	1268,124	-35,124	1145,731	1390,518
1979	1202	1254,060	-52,060	1131,943	1376,176
1980	1145	1218,824	-73,824	1096,939	1340,709
1981	1171	1156,156	14,844	1034,467	1277,846
1982	1177	1183,162	-6,162	1061,637	1304,686
1983	1197	1188,655	8,345	1067,271	1310,039
1984	1250	1209,148	40,852	1087,885	1330,411
1985	1272	1264,765	7,235	1143,605	1385,925
1986	1328	1287,138	40,862	1166,068	1408,208
1987	1427	1345,616	81,384	1224,623	1466,609
1988	1417	1449,532	-32,532	1328,607	1570,458
1989	1409	1437,417	-28,417	1316,550	1558,283
1990	1505	1427,589	77,411	1306,773	1548,405
1991	1481	1528,043	-47,043	1407,272	1648,814
1992	1547	1501,155	45,845	1380,422	1621,887
1993	1642	1569,676	72,324	1448,978	1690,374
1994	1514	1668,672	-154,672	1548,004	1789,340
1995	1606	1531,729	74,271	1411,087	1652,371
1996	1692	1627,803	64,197	1507,184	1748,422
1997	1839	1717,260	121,740	1596,661	1837,859

Tablo 10: KBMG serisi, tahminleri, tahmin hataları ve %95 güven sınırları.

Serilerin öngörülleri ve %95 güven sınırlarını da içeren grafiğı aşağıda verilmiştir.



Grafik 14: Yıllara göre KBMG değerleri ve ARIMA (1,1,1) tahminleri.

4.8. Bayesyen Öngörü Yöntemi

Bu kesimde, Kesim 3.4.'de tanıtılan sabit katsayılı model yapısı yıllık KBMG serisine uygulanarak 1998-2001 yıllarına ilişkin öngörüler elde edilecektir. Kullanılacak modelde zamanın uygun kuvvetleri açıklayıcı değişken olarak yer alabilmektedir. Uygun model yapısını belirlemek için serinin grafiğini incelemek yeterli olabilmektedir. KBMG serisinin serpilme diyagramı daha önce Grafik 8'de verilmişti. Grafik incelendiğinde, seri zaman içinde tam olarak doğrusal bir seyir izlemese de, en azından başlangıçta doğrusal bir modelle analize başlanabileceği görülmektedir.

Bayesyen yöntemle öngörude bulunurken öncelikle başlangıçta kullanılacak olan ön-bilgiyi belirlemek gerekmektedir. 3. bölümde de belirtildiği gibi bu ön-bilgi çeşitli kaynaklara dayanabildiği gibi tamamen subjektif bir yargıya da bağlı olabilir. 1998-2001 yıllarına ilişkin öngörude bulunmak için (diyelim ki önceki bir analiz sonucundan hareketle) parametrelerin,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 850 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde bir ön-dağılıma sahip olduklarını düşünülebilir. Bu durumda, $\theta_0 = \begin{bmatrix} 850 \\ 25 \end{bmatrix}$ ve

$S_0 = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir. Bundan sonra yapılması gereken bu ön bilgi ile 1968-97

gözlemlerinin sağladığı bilgiyi birleştirmektir. Bu arada yine önsel olarak $\sigma_v^2 = 2000$ olduğunu varsayalım.

1968-97 dönemine ait KBMG değerleri için kurulacak doğrusal bir trend modelinin parametreleri tahmin edilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} Y_t &= \theta_0 + \theta_1 t + e_t \\ &= 909,92 + 24,94 t \\ \text{sh. } (26,26) \quad (1,48) \quad \sigma^2 &= 4667 \end{aligned}$$

Buna göre, ön-dağılıma nazaran örnek döneminde sabit parametre değerinin yükselmesine karşılık eğim parametresinin küçüldüğü görülmektedir. Regresyon varyansı ise önsel olarak örnek dönemi varyansının % 42.85'i kadardır. Nitekim Grafik 8'de serideki dalgalanmanın giderek arttığı görülmektedir.

Şimdi parametrelere ait son-dağılım elde edilebilir;

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 30 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}' = [942 \quad 958 \quad 976 \quad \cdots \quad 1839]$$
 olmak üzere,

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 130 & 465 \\ 465 & 9455 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 38893 \\ 658881 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,14023 & -0,0069 \\ -0,0069 & 0,00045 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 909,954 \\ 24,934 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \sigma_v^2 = \begin{bmatrix} 420,6897 & -20,6897 \\ -20,6897 & 1,3348 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_n^{-1} = \mathbf{S}_0^{-1} + \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,002 & 0,000 \\ 0,000 & 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,012 & 0,155 \\ 0,155 & 3,6517 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,155 \\ 0,155 & 4,1517 \end{bmatrix}$$

$$\theta_n = \mathbf{S}_n(\mathbf{S}_0^{-1}\theta_0 + \mathbf{S}^{-1}\hat{\theta})$$

$$\theta_n = \begin{bmatrix} 184,474 & -7,8302 \\ -7,8302 & 0,6062 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0,002 & 0,000 \\ 0,000 & 0,500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 850 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,012 & 0,155 \\ 0,155 & 3,6517 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 909,954 \\ 24,934 \end{bmatrix} \right\}$$

$\theta_n = \begin{bmatrix} 891,728 \\ 25,751 \end{bmatrix}$ olarak son değerler elde edilmektedir. Buna göre parametrelerin son dağılımları,

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 891,728 \\ 25,751 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,01 & 0,155 \\ 0,155 & 4,1517 \end{bmatrix} \right)$$

şeklindedir. Örnek verilerine dayalı doğrusal trend modeli ve Bayesyen son parametre tahminleri kullanılarak örnek-içi (1968-97 yılları) döneme ilişkin tahmin değerleri ve hatalar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yıllar	KBMG	D. Tr. Tahmini	Hatalar	Bayes Tahmini	Hatalar
1968	942	934,86	7,14	917,48	24,52
1969	958	959,80	-1,80	943,23	14,77
1970	976	984,74	-8,74	968,98	7,02
1971	1019	1009,68	9,32	994,73	24,27
1972	1085	1034,62	50,38	1020,48	64,52
1973	1110	1059,56	50,44	1046,23	63,77
1974	1118	1084,50	33,50	1071,98	46,02
1975	1155	1109,44	45,56	1097,74	57,26
1976	1233	1134,38	98,62	1123,49	109,51
1977	1244	1159,32	84,68	1149,24	94,76
1978	1233	1184,26	48,74	1174,99	58,01
1979	1202	1209,20	-7,20	1200,74	1,26
1980	1145	1234,14	-89,14	1226,49	-81,49
1981	1171	1259,08	-88,08	1252,24	-81,24
1982	1177	1284,02	-107,02	1277,99	-100,99
1983	1197	1308,96	-111,96	1303,74	-106,74
1984	1250	1333,90	-83,90	1329,50	-79,49
1985	1272	1358,84	-86,84	1355,25	-83,25
1986	1328	1383,78	-55,78	1381,00	-53,00
1987	1427	1408,72	18,28	1406,75	20,25
1988	1417	1433,66	-16,66	1432,50	-15,50
1989	1409	1458,60	-49,60	1458,25	-49,25
1990	1505	1483,54	21,46	1484,00	21,00
1991	1481	1508,48	-27,48	1509,75	-28,75
1992	1547	1533,42	12,58	1535,50	10,50
1993	1642	1558,36	83,64	1561,25	80,75
1994	1514	1583,30	-69,30	1587,01	-73,01
1995	1606	1608,24	-2,24	1612,76	-6,76
1996	1692	1633,18	58,82	1638,51	53,49
1997	1839	1658,12	180,88	1664,26	174,74

Tablo 11: 1968-97 dönemine ait doğrusal trend ve Bayesyen tahminler ve hataları.

Bayesyen tahminlerin hata kareleri ortalaması 4668,69'dur. 1998-2001 yıllarına ilişkin Bayesyen öngörü değerleri ve bunlara ait hatalar aşağıda verilmiştir.

$$Y_{1998} = 1690,01 \quad e = 189,83$$

$$Y_{1999} = 1715,76 \quad e = 24,94$$

$$Y_{2000} = 1741,51 \quad e = 24,05$$

$$Y_{2001} = 1767,26 \quad e = -166,84$$

Öngörülerin hata kareleri ortalaması 16267,86'dır.

Aşağıdaki ön-bilgilerden hareketle seriye $Y_t = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + e_t$ şeklinde eğrisel bir model de uygulanabilir.

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 250 \\ 12 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ve} \quad \sigma_v^2 = 3500$$

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 30 \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & 900 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}' = [942 \quad 958 \quad 976 \quad \cdots \quad 1839] \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 30 & 465 & 9455 \\ 465 & 9455 & 216225 \\ 9455 & 216225 & 5273999 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 38893 \\ 658881 \\ 14063245 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3438 & -0,0451 & 0,0012 \\ -0,0451 & 0,0076 & -0,00023 \\ 0,0012 & -0,00023 & 0,0000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 993,997 \\ 9,1759 \\ 0,5083 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \sigma_v^2 = \begin{bmatrix} 1203,448 & -157,759 & 4,3103 \\ -157,759 & 26,6111 & -0,8082 \\ 4,3103 & -0,8082 & 0,0261 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_n^{-1} = \mathbf{S}_0^{-1} + \mathbf{S}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0086 & 0,1329 & 2,7014 \\ 0,1329 & 2,7014 & 61,7786 \\ 2,7014 & 61,7786 & 1506,857 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0096 & 0,1329 & 2,7014 \\ 0,1329 & 2,7264 & 61,7786 \\ 2,7014 & 61,7786 & 1526,857 \end{bmatrix}$$

$$\theta_n = \mathbf{S}_n(\mathbf{S}_0^{-1} \theta_0 + \mathbf{S}^{-1} \hat{\theta})$$

$$\theta_n = \begin{bmatrix} 671,4347 \\ 43,3746 \\ -0,3061 \end{bmatrix} \text{ olarak son değerler elde edilmektedir. Buna göre parametrelerin}$$

son dağılımları,

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 671,4347 \\ 43,3746 \\ -0,3061 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 426,3314 & -44,278 & 1,0373 \\ -44,278 & 9,0080 & -0,2861 \\ 1,0373 & -0,2861 & 0,0104 \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde-dir. Eğrisel modelin tahminlerinin hata kareleri ortalaması 15902,96 dır. model yardımıyla elde edilen öngörüler ve hataları ise aşağıda verilmiştir.

$$Y_{1998} = 1721,88 \quad e = 158,12$$

$$Y_{1999} = 1745,97 \quad e = -4,97$$

$$Y_{2000} = 1769,44 \quad e = -3,44$$

$$Y_{2001} = 1792,31 \quad e = -191,31$$

Buna göre öngörülerin hata kareleri ortalaması 15409,52 tir. Tüm yöntemlere göre örnek dönemi (1968-97) ve öngörü dönemi (1998-2001) için hata kareleri ortalamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Model	�rnek HKO	�ng�r� HKO
Doğrusal trend	4588,61	16397,16
2. derece trend	3431,76	27527,53
Üssel trend	3777,95	18218,08
Basit �dy	8139,56	15681,35
İki par. doğrusal �dy	2857,26	41595,96
�s. trende göre 2 par. �dy	2891,05	43523,54
ARIMA (1,1,1)	3251,82	46824,85
Bayesyen (doğrusal)	4668,69	16267,86
Bayesyen (eğrisel)	15902,96	15409,52

Tablo 12: Modellerin  rnek ve öngörü dönemi performansları.

Yukarıdaki tabloda da görüldüğü gibi, örnek içi dönem tahminleri bakımından en başarılı yöntem iki parametrelili doğrusal üssel düzleştirme yöntemidir. Onu az bir farkla üssel trende göre iki parametrelili üssel düzleştirme yöntemi izlemektedir. Eğrisel Bayesyen yöntemin bu dönem tahminlerinden çok büyük hataya sahip olduğu görülmektedir. Oysa aynı model öngörü döneminde en küçük hataya sahip öngörülerini vermektedir. Doğrusal Bayesyen model de bu dönemde iyi sayılabilecek bir performans sergilemektedir. Öngörü döneminde en büyük hataya sahip model ARIMA (1,1,1) modelidir. Yine, iki parametrelili doğrusal ve üssel trende göre iki parametrelili doğrusal üy'ler kötü bir öngörü performansına sahip görünmektedirler. Bayesyen modellerin başarısı analize dahil edilen ön-bilginin niteliğine çok bağımlıdır. Kullanılan ön-bilgideki farklılığa bağlı olarak öngörü sonuçları da çok büyük sıçramalar gösterebilmektedir. Doğrusal olmayan model kullanılması hakkında ön-bilgi edinilmesi gereken parametre sayısını da artıracığından model çok bariz doğrusal-dışı bir davranış göstermedikçe doğrusal modeli kullanmak önerilebilir.

SONUÇ

Bir zaman serisinin gelecekte alacağı değerleri önceden tahmin etmek bir çok amaç açısından önem taşımaktadır. Elde edilen tahminler plânlamadan stoklamaya, üretimden yatırıma kadar pek çok önemli ve kritik kararların alınmasında başlıca yol göstericilerden birini oluşturmaktadır. Tahmin söz konusu olunca, az veya çok, bir miktar hata yapılması kaçınılmaz olmaktadır. Önemli olan, kullanılan öngörü yöntemi ile mümkün olduğunca küçük sapmalara sahip öngörüler elde etmektir. Öteden beri, zaman serileri analizindeki gelişmelere paralel olarak çeşitli karmaşıklık derecelerine, avantaj ve dezavantajlara sahip çok sayıda öngörü yöntemi önerilmiştir. Ancak bunların tümü sadece eldeki zaman serisinin sunduğu bilgiyi kullanmaktadırlar. Klâsik veya geleneksel zaman serileri analizi ve öngörü yaklaşımı içinde ele alınan bu yöntemler dışsal bilgiyi ve analiz doğrultusunda alınacak kararların kayıp/kazanç fonksiyonunu göz önüne almamaktadırlar. Ayrıca bu yaklaşım, öngörü sisteminde yer alan kişilerin birbirleriyle ve öngörü sistemiyle etkileşimlerini/ilişkilerini ihmal etmektedir.

Bayesyen öngörü yöntemi nicel (önceki araştırmalardan gelen bilgi, uzman görüşü, tecrübe v.b.) veya nitel (yasal veya sosyal değişiklikler, başka faktörlerin nitel etkileri v.b.) bir dışsal bilgiyi analiz sürecine ekleme konusunda etkili bir araçtır. Nitel veya nicel bilgilerin etkileri ve bunlarla ilişkili belirsizlikler olasılık dağılımları kullanılarak eldeki zaman serisi bilgisine eklenebilir hale getirilmekte ve böylece sahip olunan belirsiz bilgi karar alıcılar tarafından açık seçik biçimde yorumlanıp kabul edilebilir biçime dönüştürülmektedir.

Bayesyen yöntemde örneklem için herhangi bir alt sınır yoktur. Hatta hiçbir gözlem bilgisi mevcut olmasa dahi sahip olunan önsel kanaat/bilgiye dayanarak öngöründe bulunulabilmektedir.

Bayesyen yaklaşım her türlü belirsizliğin olasılıklarla ifade edilebilir ve ölçülebilir olduğu kabulüne dayanmaktadır. Böylece Bayesyen yaklaşım aracılığıyla birçok nedenden kaynaklanabilen belirsizlik durumları karşısında bireysel davranışa yönelik akılcı ve tutarlı bir normatif yapı oluşturulmaktadır. Belirsizlik durumu matematiksel bir dille ifade edildikten sonra eldeki niceliklere olasılık kuralları uygulanarak olasılıksal çıkarsamalarda bulunulmaktadır. Öngörü bağlamında ise bu nicelikler zaman serisinin ve model parametrelerinin gelecek dönem değerleri olabilir. Buna göre Bayesyen öngörü, olasılık dağılımı biçimindeki öngörü bilgisinin elde edilmesini ve halihazırda sahip olunan belirsiz bilgi ve kanaatlerin ifade edilmesini içermektedir. Tüm olasılıklar subjektiftir ve öngörü bilgisinin elde edilmesi model kurucu veya öngöründe bulunan kişinin yükümlülüğündedir.

Tekrarlanacak olursa, Bayesyen yöntemin cazip özellikleri,

- i) veri yokluğunda bile işe yaraması,
- ii) ister otomatik olarak ister kullanıcı kontrolü altında olsun, birçok farklı karmaşıklıkla belirtme ve uygun biçimde tepki verme yeteneği,
- iii) gözlem hatasına (noise) olduğu kadar parametre belirsizliğine de dayalı olarak gerçekçi öngörü hatası tahminleri vermesi,
- iv) dışsal bilgileri analize dahil etmeye imkân vermesidir.

Bunlara karşılık yöntemin matematiksel olarak biraz karmaşık olması, serilerin uzunluğuna ve sayısına göre uzun işlemler gerektirmesi ve ardışık güncelleme algoritmasına dayanması hesaplama güçlüğü doğurmaktadır. Bununla birlikte bu zorluğun üstesinden gelebilecek yazılımlar mevcuttur. Diğer taraftan, her ne kadar zamanın ilerlemesine bağlı olarak son öngörüler üzerindeki etkisi giderek azalsa da, başlangıç koşullarının (ön-dağılım) elde edilen tahminler üzerinde belirleyici bir etkisi vardır. Bu nedenle, parametre değerleri ve bunlara ait varyanslara ilişkin önsel dağılımların belirlenmesinde hassas olmak gerekmektedir. Parametrelere

ilişkin farklı başlangıç değerleri farklı öngörüler vermekte, buna bağlı olarak da farklı öngörü sapmaları elde edilmektedir.

Bayesyen öngörü yönteminin temel aracı Bayes Teoremi olmakla birlikte aynı zamanda yapısal olarak Kalman filtresine dayalı dinamik lineer modeller üzerine oturmaktadır. Bu şekildeki dinamik bir parametrelendirmeyle hem serinin zaman içindeki değişimi, hem de serinin altında yatan dinamiklerdeki değişim yakalanmaya çalışılmaktadır. Burada bir çok farklı durumdan söz edilebilir. Gözlem ve sistem denklemlerine ait hata terimlerinin varyanslarının bilindiği veya bilinmediği, zamanla değiştiği ya da sabit kaldığı durumlar göz önüne alınabilir. Yeni gözlem değerlerine ulaşıldıkça, belirsizlik azaldığından, parametre varyansları giderek küçülme eğilimi göstermektedir. Eğer süreci ifade eden modelin doğru olduğu ve parametrelerin zaman içerisinde değişmeyeceği düşünülüyorsa sistem varyansının sıfır olduğu bir yapı benimsenebilir. Bu durumda model bildik tek denklemlilik ve sabit katsayılı regresyon denklemine dönüşmektedir. Bununla birlikte, gerçekte içinde bulunan koşullar çoğu zaman değiştiğinden dinamik bir model kullanmak ve parametrelere ilişkin belirsizliğin arttığı ve azaldığı dönemlere göre varyansı sıfırdan farklı bir düzeyde kontrol altında tutmak daha uygun olacaktır.

Ele alınan örnekte ulaşılan sonuçlar da (bkz. Bölüm 4), uygun ön değerlerin kullanılması durumunda Bayesyen yöntemin birçok geleneksel yöntemle nazaran daha küçük sapmalı öngörüler verebileceğini göstermektedir. Analizde ön-bilginin kullanımına imkân vermesi yöntemin üstünlüğünü oluşturuyorsa da, sonuçlar kullanılan ön-bilgiye karşı çok hassas olduğundan bu avantaj aynı zamanda yöntemin zaafını da oluşturmaktadır. Bununla birlikte, özellikle yapısal değişim veya ciddi rejim değişiklikleri gösteren serilerde, bu değişimlerin yönü ve büyüklüğü önceden sezilebilirse, yöntemin başarılı sonuçlar verebileceği söylenebilir.

Kaynakça:

Aguilar O. ve M. West:

“Bayesian dynamic factor models and portfolio allocation”, **J. Amer. Statist. Assoc.**, Vol. 18, N: 3, 2000, s. 338-357

Bağırkan, Ş.:

İstatistiksel Analiz, Bilim Teknik Yayınevi, 3. Baskı, İstanbul, 1993

Barnum D.T. ve J.M. Gleason:

“The credibility of drug tests: A multi-stage Bayesian analysis”, **Industrial and Labor Relations Review**, V.47, 4, 1994, s. 610-622

Berger, J.O.:

Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1985

Berger, J.O.:

“Bayesian analysis: A look at today and thoughts of tomorrow”, **J. Amer. Stat. Assoc.**, (95), 452, 2000

Box, G.E.P.:

“Sampling and Bayes’ inference in scientific modelling and robustness”, **Journal of Royal Statist. Soc.**, (A), 143, 1980, s. 383-430

Box G.E.P. ve G.C. Tiao:

Bayesian Inference in Statistical Analysis, Wiley, New York, 1992

Box, G.E.P. ve G.M. Jenkins:

Time Series Analysis, revised edition, Holden-Day, San Francisco, 1976

Box, G.E.P., G.M. Jenkins ve G.C. Reinsel:

Time Series Analysis: Forecasting and Control, 3rd. edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1994

Carlin, B.P., ve T.A. Louis:

Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis, Monographs on Statistics and Applied Probability: 69, Chapman and Hall, London, 1997

Chatfield, C.:

The Analysis of Time Series, 4th edition, Chapman and Hall, London, 1988

Chow, G.C.:

Random Changing Coefficient Models, Handbook of Econometrics, Vol. II içinde, Chapter 21, Ed. by Z. Griliches and M.D. Intriligator, Elsevier Science, 1984

Coles, S.G. ve J.A Tawn:

“A Bayesian analysis of extreme rainfall data”, **Applied Statistics**, Vol. 45, 4, 1996, s. 463-478

Congdon, P. ve N. Best:

“Small area variation in hospital admission rates: Bayesian adjustment for primary care and hospital factors”, **Applied Statistics**, V. 49, 2, 2000, s. 207-226

Çakır, F.:

Gibbs Örnekleme, Hiyerarşik Bayes Analizinde Kullanılması ve Bir Uygulama, Yayınlanmamış Doktora Tezi, No:74670, Marmara Üniversitesi, 1998

Çömlekçi, N.:

Temel İstatistik İlke ve Teknikleri, 2. baskı, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1994

DeJong, D.N., B.F. Ingram ve C.H. Whiteman:

“A Bayesian approach to dynamic macroeconomics”, **Journal of Econometrics**, 98, 2000, s. 203-223

Dorfman, J.H. ve W.D. Lastrapes:

“The dynamic responses of crop and livestock prices to money-supply shocks: A Bayesian analysis using long-run identifying restrictions”, **Amer. J. Agricultural Economics**, V.78, 3, 1996, s. 530-542

Gamerman, D.:

Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference, Chapman-Hall, London, 1997

Goldstein, M.:

“Bayesian analysis of regression problems”, **Biometrika**, V. 63, 1, 1976, s. 51-58

- Granger, C.W.J. ve P. Newbold:
Forecasting Economic Time Series, Academic Press, New York, 1977
- Graupe, D.:
Time Series Analysis, Identification and Adaptive Filtering, 2nd ed., R.E. Kreiger Publishing, Florida, 1989
- Greene, W.H.:
Econometric Analysis, 3rd edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1997
- Griffiths, W.E., R.C. Hill ve G.G. Judge:
Learning and Practicing Econometrics, Wiley, New York, 1994
- Gujarati, D.N.:
Basic Econometrics, New York, McGraw-Hill, 1995
- Guttman, I., L.S.S. Wilks ve J.S. Hunter:
Introductory Engineering Statistics, 2nd. ed., John Wiley, New York, 1971
- Gündüz, Y.B.:
Stokastik Katsayılı Modeller için Tahmin Yöntemleri, Yayınlanmamış Doktora Tezi, No:89703, Bilkent Üniversitesi, 1999
- Güriş, S. ve E. Çağlayan:
Ekonometri: Temel Kavramlar, Der Yayınları, İstanbul, 2000
- Gürsakal, N.:
Bayesgil İstatistik, Bursa, 1992
- Hamilton, J.D.:
Time Series Analysis, Princeton, New Jersey, 1994
- Harrison, P.J.:
“Covergence and the constant dynamic linear model”, **Journal of Forecasting**, Vol. 16, 1997, s. 287-292
- Harrison, P.J. ve C.F. Stevens :
“Bayesian forecasting”, **Jornal of Royal Stat. Society**, (Ser. B), 38, 1976, s. 205-247
- Harrison, P.J. ve M. West:
“Practical Bayesian forecasting”, **The Statistician**, 1987, s. 115-125
- Hartigan, J.A.:
“Linear Bayesian methods”, **J. Roy. Statist. Soc.**, (B), V. 31, 1969, s. 446-454

Harvey, A.C.:

Time Series Models, 2nd ed., Harvester-Wheatsheaf, New York, 1993

Hill, B.M.:

“Bayesian forecasting of economic time series”, **Econometric Theory**, V. 10, 1994, s. 483-513

İşyar, Y.:

Ekonometrik Modeller, U.Ü. Güçlendirme Vakfı, Yayın No: 92, Bursa, 1994

James, L.R. ve M.W. Knuiman:

“An application of Bayes methodology to the analysis of diary records from a water use study”, **J. Amer. Statist. Soc.**, V. 82, 399, 1987, s. 705-711

Judge, G.G., R.C. Hill, W.E. Griffiths, H. Lütkepohl ve T.C. Lee :

Introduction to the Theory and Practice of Econometrics, John Wiley, NY, 1988

Karagöz, M.:

Doğrusal Zaman Serisi Modelleri İle Bazı İktisadî Göstergelerin Analiz ve Öntahmini, Medipres Yayınları, Malatya, 2003.

Kayım, H.:

İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri, H.Ü. İİBF Yayın No: 11, Ankara, 1985

Kmenta, J.:

Elements of Econometrics, Macmillan, New York, 1990

Koop, G., J. Osiewalski ve M.F.J. Steel:

“Bayesian long-run prediction in time series models”, **Journal of Econometrics**, V. 69, 1995, s. 61-80

Koutsoyiannis, A.:

Ekonometri Kuramı, Çev: Ü. Şenesen-G.G. Şenesen, Verso Yay., Ankara, 1989

Leonard, T. ve J.S.J. Hsu:

Bayesian Methods, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

Lindley, D.V.:

“Theory and practice of Bayesian statistics”, **The Statistician**, V. 32, 1983, s. 1-11

Liu, L.M. ve D.M. Hanssens:

“A Bayesian approach to time-varying cross-sectional regressions models”, **Journal of Economics**, 15, 1981, s. 341-356

Maddala, G.S.:

Introduction to Econometrics, 2nd ed., Mc Hill, India, 1988

Maddala, G.S. ve I.M. Kim:

Unit Roots, Cointegration and Structural Change, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

Makridakis, S. and M. Hibon:

“ARMA models and the Box-Jenkins methodology”, **Journal of Forecasting**, Vol. 16, 1997, s. 147-163

Miller, I. ve M. Miller:

John E. Freund'dan Matematiksel İstatistik, Çev: Ü. Şenesen, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2002

Montgomery, D.C., L.A. Johnson ve J.S. Gardiner:

Forecasting and Time Series Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, Singapore, 1990

Nandram, B. ve J.D. Petrucci:

“A Bayesian analysis of autoregressive time series panel data”, **J. Business and Economic Statistics**, V.15, N.13, 1997, s. 328-334

Newbold, P.:

Statistics for Business and Economics, 3rd ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1991

Newbold, P. ve T. Bos:

Stochastic Parameter Regression Models, 3rd ed., Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, Series No: 07-051, Sage Pubns., Newbury Park, 1990

Orhan, M.:

Robust Regresyon, HSKM Tahmin Edicileri ve Bir Amprik Bayes Uygulaması, Yayımlanmamış Doktora Tezi, No:89669, Bilkent Üniversitesi, 1999

Orhunbilge, N.:

Zaman Serileri Analizi, Tahmin ve Fiyat İndeksleri, İ.Ü. İşletme Fak. Yayın No:277, İstanbul, 1999

Öney, E.:

İktisadi Planlama, 5. Baskı, Savaş Yayınları, Ankara, 1987

Papoulis, A.:

Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 2nd ed., McGraw Hill, 1984

Pindyck, R.S. ve D.L. Rubinfeld:

Econometric Models and Economic Forecasts, McGraw-Hill, New York, 1991

Pole, A. ve M. West:

“Efficient Bayesian learning in non-linear dynamic models”, **Journal of Forecasting**, 9, 119-136.

Pole, A., M. West ve P.J. Harrison:

Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis, Chapman&Hall, New York, 1994.

Polson, N.G. ve B.V. Tew:

“Bayesian portfolio selection: An empirical analysis of the S&P 500 Index 1970-1996”, **J. Amer Statist. Assoc.**, V. 18, 2, 2000, s. 164-173

Qin, D.:

“Bayesian econometrics: First twenty years”, **Econometric Theory**, Vol. 12, 1996, s. 500-516

Ramathan, R.:

Introductory Econometrics, 3rd ed., Dryden Press, Florida, 1995

Sarris, A.H.:

“Kalman filter models: A Bayesian approach to estimation of time-varying regression coefficients”, **Annals of Economic and Social Measurement**, 2, 1973, s. 501-523

Spiegelhalter, D.J.:

“Bayesian graphical modelling: A case study in monitoring health outcomes”, **Applied Statistics**, V. 47, 1, 1998, s. 115-133

Stewart, J.:

Econometrics, Philip Allan, London, 1991

Walshaw, D.:

“Modelling extreme wind speeds in regions prone to hurricanes”, **Applied Statistics**, Vol. 49, 1, 2000, s. 51-62

Wang, J. ve E. Zivot:

“A Bayesian time series model of multiple structural changes in level, trend and variance”, **J. Business and Economic Statistics**, V.18, N.3, 2000, s. 374-386

Wei, W.W.S.:

Time Series Analysis, Addison-Wesley, 1994

West, M. and P.J. Harrison :

Bayesian Forecasting and Dynamic Models, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997

West, M. ve P.J. Harrison:

“Monitoring and adaptation in Bayesian forecasting models”, **J. Amer. Statist. Assoc.**, V.81, N.395, 1986, s. 741-750

West, M., P.J. Harrison ve H.S. Migon:

“Dynamic generalized linear models and Bayesian Forecasting”, **J. Amer. Statist. Assoc.**, Vol. 80, N. 389, 1985, s. 73-83

Winkler, R.L.:

An Introduction to the Bayesian Inference and Decision, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1972

Yurt, S.:

“Dinamik sistem modelleri ile mekan süreçleri analizi ve Türkiye buğday verimi üzerine bir uygulama”, **DİE Araştırma Sempozyumu Bildirileri**, Ankara, 1997

Zellner, A.:

“Bayesian econometrics”, **Econometrica**, V.52, 2, 1985, s. 253-269

Zellner, A.:

“Models, prior information and Bayesian analysis”, **Journal of Econometrics**, V. 75, 1996, s. 51-68

Zellner, A.:

An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, Wiley, New York, 1971

Zellner, A. ve J.F.Richard:

“Use of prior information in the analysis and estimation of Cobb-Douglas production function models”, **International Economic Review**, V. 14, 1, 1973, s. 107-119

Zellner, A.:

“Applications of Bayesian analysis in econometrics”, **The Statistician**, Vol. 32, 1983, s. 23-34

Zellner, A.:

“Statistical analysis of econometric models”, **J. Amer. Stat. Assoc.**, Vol. 74, N: 367, 1979, s. 628-642



**EK: Uygulama kısmında Bayesyen analizde hesaplamaları
gerçekleştiren Excel Makro Kodları**

```
Sub solve()
Dim zt(3, 250), z(250, 3)
Dim xt(1, 250), x(250, 1)
Dim G(3, 3), GT(3, 3), kg(3, 1), B(3, 1), V(3, 3), VT(3, 3), vc(3, 3), vct(3, 3),
vst(3, 3), vs(3, 3)
Dim m1(3, 1), m2(3, 1), m3(3, 1), bson(3, 1), bs(3, 1), zg(5)
Dim xtah(5)

zn = 2
While Cells(1, zn) <> ""
zn = zn + 1
Wend
zn = zn - 1

'xt alınıyor
For i = 2 To zn
xt(1, i - 1) = Cells(4, i)
Next i

'x hesaplanıyor
For i = 1 To zn - 1
x(i, 1) = xt(1, i)
Next i

'zt alınıyor
For i = 1 To 3
For j = 2 To zn
zt(i, j - 1) = Cells(i, j)
Next j
Next i

'z hesaplanıyor
For i = 1 To 3
For j = 1 To zn - 1
z(j, i) = zt(i, j)
Next j
Next i

'z nin yazılması
For i = 1 To 3
For j = 1 To zn - 1
```

```
Cells(13 + j, i) = z(j, i)
Next j
Next i
```

```
'x in yazılımı
For i = 1 To zn - 1
Cells(13 + i, 4) = x(i, 1)
Next i
```

```
'G=Zt*Z
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
G(i, j) = 0
For k = 1 To zn - 1
G(i, j) = G(i, j) + zt(i, k) * z(k, j)
Next k
Next j
Next i
```

```
'G yazdırılıyor
Cells(14, 6) = G(1, 1)
Cells(14, 7) = G(1, 2)
Cells(14, 8) = G(1, 3)
```

```
Cells(15, 6) = G(2, 1)
Cells(15, 7) = G(2, 2)
Cells(15, 8) = G(2, 3)
```

```
Cells(16, 6) = G(3, 1)
Cells(16, 7) = G(3, 2)
Cells(16, 8) = G(3, 3)
```

```
'g=Zt*x
For i = 1 To 3
For j = 1 To 1
kg(i, j) = 0
For k = 1 To zn - 1
kg(i, j) = kg(i, j) + zt(i, k) * x(k, j)
Next k
Next j
Next i
```

```
'g yazdırılıyor
Cells(14, 9) = kg(1, 1)
Cells(15, 9) = kg(2, 1)
Cells(16, 9) = kg(3, 1)
```

```

'G nin tersi alınıyor
For k = 1 To 3
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
If i = k Or j = k Then
GoTo 140
End If
 $G(i, j) = G(i, j) - G(i, k) * G(k, j) / G(k, k)$ 
140 Next j, i
 $G(k, k) = -1 / G(k, k)$ 
For i = 1 To 3
If i = k Then
GoTo 190
End If
 $G(i, k) = G(i, k) * G(k, k)$ 
190 Next i
For j = 1 To 3
If j = k Then
GoTo 230
End If
 $G(k, j) = G(k, j) * G(k, k)$ 
230 Next j, k
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
 $GT(i, j) = -1 * G(i, j)$ 
Next j
Next i

```

```

'G yazdırılıyor
Cells(14, 11) = GT(1, 1)
Cells(14, 12) = GT(1, 2)
Cells(14, 13) = GT(1, 3)

```

```

Cells(15, 11) = GT(2, 1)
Cells(15, 12) = GT(2, 2)
Cells(15, 13) = GT(2, 3)

```

```

Cells(16, 11) = GT(3, 1)
Cells(16, 12) = GT(3, 2)
Cells(16, 13) = GT(3, 3)

```

```

'b Hesaplanıyor
For i = 1 To 3
For j = 1 To 1
 $G(i, j) = 0$ 

```

```

For k = 1 To 3
B(i, j) = B(i, j) + GT(i, k) * kg(k, j)
Next k
Next j
Next i

```

```

'b yazdırılıyor
Cells(14, 14) = B(1, 1)
Cells(15, 14) = B(2, 1)
Cells(16, 14) = B(3, 1)

```

```

'V hesaplanıyor
sigma = Cells(6, 2)
V(1, 1) = sigma * GT(1, 1)
V(1, 2) = sigma * GT(1, 2)
V(1, 3) = sigma * GT(1, 3)

```

```

V(2, 1) = sigma * GT(2, 1)
V(2, 2) = sigma * GT(2, 2)
V(2, 3) = sigma * GT(2, 3)

```

```

V(3, 1) = sigma * GT(3, 1)
V(3, 2) = sigma * GT(3, 2)
V(3, 3) = sigma * GT(3, 3)

```

```

'V yazdırılıyor
Cells(20, 6) = V(1, 1)
Cells(20, 7) = V(1, 2)
Cells(20, 8) = V(1, 3)

```

```

Cells(21, 6) = V(2, 1)
Cells(21, 7) = V(2, 2)
Cells(21, 8) = V(2, 3)

```

```

Cells(22, 6) = V(3, 1)
Cells(22, 7) = V(3, 2)
Cells(22, 8) = V(3, 3)

```

```

'V nin tersi hesaplanıyor
For k = 1 To 3
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
If i = k Or j = k Then
GoTo 141
End If
V(i, j) = V(i, j) - V(i, k) * V(k, j) / V(k, k)

```

```

141 Next j, i
V(k, k) = -1 / V(k, k)
For i = 1 To 3
If i = k Then
GoTo 191
End If
V(i, k) = V(i, k) * V(k, k)
191 Next i
For j = 1 To 3
If j = k Then
GoTo 231
End If
V(k, j) = V(k, j) * V(k, k)
231 Next j, k
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
VT(i, j) = -1 * V(i, j)
Next j
Next i

```

'G yazdırılıyor

```

Cells(20, 9) = VT(1, 1)
Cells(20, 10) = VT(1, 2)
Cells(20, 11) = VT(1, 3)

```

```

Cells(21, 9) = VT(2, 1)
Cells(21, 10) = VT(2, 2)
Cells(21, 11) = VT(2, 3)

```

```

Cells(22, 9) = VT(3, 1)
Cells(22, 10) = VT(3, 2)
Cells(22, 11) = VT(3, 3)

```

'vc alınıyor

```

vc(1, 1) = Cells(8, 2)
vc(1, 2) = Cells(8, 3)
vc(1, 3) = Cells(8, 4)

```

```

vc(2, 1) = Cells(9, 2)
vc(2, 2) = Cells(9, 3)
vc(2, 3) = Cells(9, 4)

```

```

vc(3, 1) = Cells(10, 2)
vc(3, 2) = Cells(10, 3)
vc(3, 3) = Cells(10, 4)

```

```

'vc nin tersi alınıyor
For k = 1 To 3
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
If i = k Or j = k Then
GoTo 142
End If
 $vc(i, j) = vc(i, j) - vc(i, k) * vc(k, j) / vc(k, k)$ 
142 Next j, i
 $vc(k, k) = -1 / vc(k, k)$ 
For i = 1 To 3
If i = k Then
GoTo 192
End If
 $vc(i, k) = vc(i, k) * vc(k, k)$ 
192 Next i
For j = 1 To 3
If j = k Then
GoTo 232
End If
 $vc(k, j) = vc(k, j) * vc(k, k)$ 
232 Next j, k
For i = 1 To 3
For j = 1 To 3
 $vct(i, j) = -1 * vc(i, j)$ 
Next j
Next i

```

```

'G yazdırılıyor
Cells(20, 12) = vct(1, 1)
Cells(20, 13) = vct(1, 2)
Cells(20, 14) = vct(1, 3)

```

```

Cells(21, 12) = vct(2, 1)
Cells(21, 13) = vct(2, 2)
Cells(21, 14) = vct(2, 3)

```

```

Cells(22, 12) = vct(3, 1)
Cells(22, 13) = vct(3, 2)
Cells(22, 14) = vct(3, 3)

```

```

'vst
 $vst(1, 1) = vct(1, 1) + VT(1, 1)$ 
 $vst(1, 2) = vct(1, 2) + VT(1, 2)$ 
 $vst(1, 3) = vct(1, 3) + VT(1, 3)$ 

```

```
vst(2, 1) = vct(2, 1) + VT(2, 1)
vst(2, 2) = vct(2, 2) + VT(2, 2)
vst(2, 3) = vct(2, 3) + VT(2, 3)
```

```
vst(3, 1) = vct(3, 1) + VT(3, 1)
vst(3, 2) = vct(3, 2) + VT(3, 2)
vst(3, 3) = vct(3, 3) + VT(3, 3)
```

```
'vst yazdırılıyor
```

```
Cells(20, 15) = vst(1, 1)
Cells(20, 16) = vst(1, 2)
Cells(20, 17) = vst(1, 3)
```

```
Cells(21, 15) = vst(2, 1)
Cells(21, 16) = vst(2, 2)
Cells(21, 17) = vst(2, 3)
```

```
Cells(22, 15) = vst(3, 1)
Cells(22, 16) = vst(3, 2)
Cells(22, 17) = vst(3, 3)
```

```
'vs hesaplanıyor
```

```
For k = 1 To 3
```

```
For i = 1 To 3
```

```
For j = 1 To 3
```

```
If i = k Or j = k Then
```

```
GoTo 143
```

```
End If
```

```
vst(i, j) = vst(i, j) - vst(i, k) * vst(k, j) / vst(k, k)
```

```
143 Next j, i
```

```
vst(k, k) = -1 / vst(k, k)
```

```
For i = 1 To 3
```

```
If i = k Then
```

```
GoTo 193
```

```
End If
```

```
vst(i, k) = vst(i, k) * vst(k, k)
```

```
193 Next i
```

```
For j = 1 To 3
```

```
If j = k Then
```

```
GoTo 233
```

```
End If
```

```
vst(k, j) = vst(k, j) * vst(k, k)
```

```
233 Next j, k
```

```
For i = 1 To 3
```

```
For j = 1 To 3
```

```
vs(i, j) = -1 * vst(i, j)
```

Next j

Next i

' vs yazılıyor

Cells(20, 18) = vs(1, 1)

Cells(20, 19) = vs(1, 2)

Cells(20, 20) = vs(1, 3)

Cells(21, 18) = vs(2, 1)

Cells(21, 19) = vs(2, 2)

Cells(21, 20) = vs(2, 3)

Cells(22, 18) = vs(3, 1)

Cells(22, 19) = vs(3, 2)

Cells(22, 20) = vs(3, 3)

'bon alınıyor

bon(1, 1) = Cells(8, 10)

bon(2, 1) = Cells(9, 10)

bon(3, 1) = Cells(10, 10)

'm1 hesaplanıyor

For i = 1 To 3

For j = 1 To 1

m1(i, j) = 0

For k = 1 To 3

m1(i, j) = m1(i, j) + vct(i, k) * bon(k, j)

Next k

Next j

Next i

'm1 yazdırılıyor

Cells(26, 6) = m1(1, 1)

Cells(27, 6) = m1(2, 1)

Cells(28, 6) = m1(3, 1)

'm2 hesaplanıyor

For i = 1 To 3

For j = 1 To 1

m2(i, j) = 0

For k = 1 To 3

m2(i, j) = m2(i, j) + VT(i, k) * B(k, j)

Next k

Next j

Next i

'm2 yazdırılıyor

Cells(26, 8) = m2(1, 1)

Cells(27, 8) = m2(2, 1)

Cells(28, 8) = m2(3, 1)

'm3 hesaplanıyor

m3(1, 1) = m1(1, 1) + m2(1, 1)

m3(2, 1) = m1(2, 1) + m2(2, 1)

m3(3, 1) = m1(3, 1) + m2(3, 1)

'm3 yazdırılıyor

Cells(26, 10) = m3(1, 1)

Cells(27, 10) = m3(2, 1)

Cells(28, 10) = m3(3, 1)

'bs hesaplanıyor

For i = 1 To 3

For j = 1 To 1

bs(i, j) = 0

For k = 1 To 3

bs(i, j) = bs(i, j) + vs(i, k) * m3(k, j)

Next k

Next j

Next i

'bs yazdırılıyor

Cells(26, 12) = bs(1, 1)

Cells(27, 12) = bs(2, 1)

Cells(28, 12) = bs(3, 1)

'zg alınıyor

For i = 34 To 38

zg(i - 33) = Cells(i, 1)

Next i

For i = 1 To 5

xtah(i) = bs(1, 1) + bs(2, 1) * zg(i) + bs(3, 1) * zg(i) ^ 2

Cells(i + 33, 2) = xtah(i)

Next i

End Sub

ÖZGEÇMİŞ

Kadir Karagöz, 1972 yılında Malatya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya’da tamamladı. 1994 yılında Marmara Üniversitesi, İktisadî ve İdarî Bilimleri Fakültesi, Ekonometri Bölümü’nden mezun oldu. 1995 yılında İnönü Üniversitesi, İktisadî ve İdarî Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı. 1996 yılında İnönü Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İktisat Anabilim Dalı’ndan yüksek lisans derecesi aldı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı’nda doktora öğrenimine başladı. Hâlen 2547 sayılı YÖK kanununun 35. maddesi gereğince İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü’nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli, bir çocuk babasıdır.