



**ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ – SİMETRİK NORMAL
HEMEN HEMEN DEĞME METRİK
FİNSLER MANİFOLDLARI**

(Yüksek Lisans Tezi)

Osamah JUMAAH

Kütahya-2024

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ – SİMETRİK NORMAL
HEMEN HEMEN DEĞME METRİK
FİNSLER MANİFOLDLARI

Danışman:
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Hazırlayan:
Osamah JUMAAH

Kütahya-2024

Kabul ve Onay

KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim dalında, 202185000465 öğrenci numaralı, Osamah JUMAAH'ın hazırlamış olduğu “ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ – SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK FİNSLER MANİFOLDLARI” başlıklı yüksek lisans/doktora tez çalışması ile ilgili tez savunma sınavı jüri tarafından yapılmış ve adayın tezinin OY BİRLİĞİ ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

24/01/2024

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	Red
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER (Danışman)		
Prof. Dr. Mine TURAN		
Prof. Dr. Cumali EKİCİ		

Onay

Doç. Dr. Eray ACAR

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım “Üç Boyutlu Lokal ϕ – Simetrik Normal Hemen Hemen Değme Metrik Finsler Manifoldları” adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

24/01/2024

Osamah JUMAAH

Özgeçmiş

İlk, Orta ve lise eğitimini Irak'ta tamamladı. 2017-2021 yıllarında Tikrit Üniversitesi Matematik Bölümü okudu. 2022 yılında Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı.



ÖZET

ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ – SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK FİNSLER MANİFOLDLARI

JUMAAH, Osamah

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Aralık, 2024, 97 sayfa

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Manifoldlar üzerindeki yapılara temel oluşturması için tezimizin ilk bölümünde manifold üzerinde yapılar ve hemen hemen Kompleks manifoldlar ve Kompleks manifoldlar, Kompleks manifold ve hemen hemen Kompleks manifold örnekleri, Hermit manifoldları, Kaehler manifoldları, Değme manifoldları verildi. İkinci bölümde üç boyutlu lokal ϕ –Simetrik normal hemen hemen değme metrik manifoldlara yer verildi. Ricci tensörü η –paralel olan lokal ϕ –Simetrik üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları incelendi. Önce 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldun lokal ϕ - simetrik olması için gerek ve yeter şartın bulunuşu gösterildi. Daha sonra $\alpha, \beta =$ sabit iken böyle bir manifoldda Ricci tensörü η –paralel ise manifoldun lokal ϕ –Simetrik olduğunun ispatı verildi. Son olarak da skalar eğriliği sabit olan 3-boyutlu lokal ϕ –Simetrik normal hemen hemen değme metrik manifold örneği verildi. Üçüncü bölümde ise özgün çalışmamız olan üç boyutlu lokal ϕ -simetrik normal hemen hemen değme metrikli Finsler manifoldu çalışıldı. Finsler manifoldları hakkında biraz bilgi verildikten sonra Finsler manifoldları için lokal ϕ -simetrinin tanımı verilmiş ve lokal ϕ -simetrik Normal hemen hemen değme Finsler manifoldlarının sabit skalar eğriliğe sahip olduğu gösterilmiştir. Normal değme Finsler manifoldundaki η -paralel Ricci tensörünün skalar eğriliklerinin sabit olduğu kanıtlanmıştır. Son olarak sonuçları gösteren bir örnek verilmiştir. Son bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Değme Manifold, Finsler Manifoldu, Finsler Metrik, Hemen Hemen Değme Manifold, Lokal ϕ –Simetrik Manifold

ABSTRACT

LOCALLY ϕ –SYMMETRIC NORMAL ALMOST CONTACT METRIC FINSLER MANIFOLDS OF DIMENSION 3

JUMAAH, Osamah

Master Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

December, 2023, 97 pages

This thesis consists three of chapters. In order to provide a basis for the structures on manifolds, almost complex manifolds and complex manifolds are given in the first part of our thesis, complex manifolds, almost complex manifold examples, Hermit manifolds, Kaehler manifolds and Contact manifolds are given in the first part of our thesis. In the second part, three-dimensional locally ϕ -symmetric normal almost contact metric manifolds were discussed. Three-dimensional normal almost contact metric manifold which is locally ϕ -symmetric and whose Ricci tensor is η -parallel were examined. First, it was shown that the necessary and sufficient condition for the three-dimensional normal almost contact metric manifold to be locally ϕ -symmetric. Then, it was given the proof that if the Ricci tensor is η -parallel in such a manifold while $\alpha, \beta=$ is constant, the manifold is locally ϕ -symmetric. Finally, an example of a 3-dimensional local ϕ -symmetric normal almost contact metric manifold with constant scalar curvature is given. In the seventh chapter, our original work, the locally ϕ -symmetric almost contact metric Finsler manifold, which is normal in three dimensions, was studied. After giving some information about Finsler manifolds, the definition of locally ϕ -symmetry for Finsler manifolds is given and it is shown that locally ϕ -symmetric normal almost contact Finsler manifolds have constant scalar curvature. It has been proven that the scalar curvatures of the η -parallel Ricci tensor in the normal contact Finsler manifold are constant. Finally, an example is given to illustrate the results.

Keywords: Almost Contact Manifold, Contact Manifold, Finsler Manifold, Finsler Metric, Local ϕ -Symmetrical Manifold

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince tecrübelerinden faydalandığım, kıymetli zamanını bana ayırarak beni yönlendiren ve tezi titizlikle inceleyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER' ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisansım süresince maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan annem, babam, aileme, Maadh Al Wahab Bakr arkadaşımı ve Kahraman İNAN kardeşime teşekkür ederim.

Osamah JUMAAH



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

MANİFOLD ÜZERİNDE YAPILAR

1.1. HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLDLAR VE KOMPLEKS MANİFOLDLARI	4
1.2. KOMPLEKS MANİFOLD VE HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLD ÖRNEKLERİ.....	16
1.3. HERMİT MANİFOLDLARI.....	21
1.4. KAEHLER MANİFOLDLARI	28
1.5. DEĞME MANİFOLDLARI	30

İKİNCİ BÖLÜM

ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLAR

2.1. ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ – simetrik NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLAR	57
2.2. η – PARALEL RİCCİ TENSÖRÜ	58
2.3. ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLD ÖRNEĞİ	59

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

FİNSLER MANİFOLDLARI

3.1. HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER MANİFOLDLARI.....	67
3.2. β –KENMOTSU FİNSLER MANİFOLDLARI	69
3.3. α –SASAKİAN FİNSLER MANİFOLDLARI	71
3.4. TRANS-SASAKİAN FİNSLER MANİFOLDLARI.....	72
3.5. 3-BOYUTLU LOKAL ϕ –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER MANİFOLDLARI	76
3.6. η –PARALEL RİCCİ TENSÖRÜ	79

SONUÇ	81
KAYNAKÇA	82
DİZİN	85



SİMGELER VE KISALTMALAR

M	$2n + 1$ boyutlu düzgün manifold
TM	M^0 M nin tanjant demeti
TM^0	M nin double tanjant demeti
$(TM^0)^H$	Yatay distrübüsyon
$(TM^0)^V$	Dikey distrübüsyon
T^*M^0	TM nün dual vektör uzayı
π	Kanonik projeksiyon dönüşümü
G	Sasaki metrik
Ω	İkinci temel form
∇	Koneksiyon
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci eğrilik tensörü
K^*	Kesit eğriliği
C^∞	Düzgün fonksiyonların kümesi
$[,]$	Lie operatörü
F^{2n+1}	Finsler manifoldu
F	Finsler fonksiyonu
g^F	Finsler metrik
π_*	Türev dönüşümü
$(M^0)^h$	Yatay vektör demeti
$(M^0)^v$	Dikey vektör demeti
T	Torsiyon tensörü
V^c	V nin kompleksleştirilmiş



TEZ METNİ

GİRİŞ

Metrik manifoldlar teorisi, modern diferansiyel geometri için dikkate değer bir araştırma alanıdır. Oubina, (α, β) - tipindeki trans-Sasakian manifold sınıflandırması fikrini ortaya attı (Oubina, 1985). Sasakian manifoldu, $\alpha = 1, \beta = 0$ için trans-Sasakian manifoldunun dikkate değer bir kategorisidir. Ayrıca kosimplektik manifold, $\alpha = 0, \beta = 0$ için trans-Sasakian manifoldunun diğer bir kategorisidir. Kenmotsu manifoldu $\alpha = 0, \beta = 1$ şartı ile verilebilir. Son zamanlarda, üç boyutlu normal hemen hemen değme manifoldlarının eğriliği Olszak tarafından incelenmiştir (Olszak, 1986). Ayrıca local φ -simetrik Sasakian manifold kavramı Takashi tarafından ortaya atılmıştır (Takahashi, 1977). Boeckx, Buecken ve Vanhecke değme geometrisinde φ -simetri kavramını sundular (Boeckx, Buecken ve Vanhecke, 1999). Daha sonra De, Yıldız ve Yalınız üç boyutlu olan normal hemen hemen değme manifoldlarını incelediler. $\alpha, \beta =$ sabit iken η -paralel Ricci tensörünün lokal olarak φ -simetrik olduğunu gösterdiler (De, Yıldız ve Yalınız, 2009).

Öte yandan, birçok araştırma Finslerian Geometrisine ayrılmıştır, bkz. referanslar, (Miron, 1982, Sinha ve Yadav 1991, Sinha ve Yadav, 1988, Yalınız ve Çalışkan, 2013, Asanov, 1985, Atanasiv ve Sinha, 1984, Bejancu, 1996, Bejancu ve Deshmukh, 1997). Paul Finsler 1918'de tezini yayınladıktan sonra Miron, vektör demetinin toplam uzayı üzerinde Finslerian nesnelere incelemek için bir yaklaşım ortaya koydu (Miron, 1982). Ayrıca Sinha ve Yadav, Finsler vektör demeti üzerinde hemen hemen değme yapılarını ve yarı simetrik koneksiyonları çalışmıştır. Yalınız ve Çalışkan, Sasakian Finsler manifoldları için bazı sonuçlar bulmuşlardır (Yalınız ve Çalışkan, 2013).

Manifoldlar üzerindeki yapılara temel oluşturması için tezimizin ilk bölümünde hemen hemen Kompleks manifoldlar ve Kompleks manifoldlar, Kompleks manifold ve hemen hemen Kompleks manifold örnekleri, Hermit manifoldları, Kaehler manifoldları, Değme manifoldları verildi. (Bu bölümler için referansımız Yano, K. and Kon, M., "Structures on Manifolds", 1984). ikinci bölümde üç boyutlu lokal φ -simetrik Normal hemen hemen değme metrik manifoldlara yer verildi. Ricci tensörü η -paralel olan lokal \emptyset -Simetrik üç boyutlu Normal hemen hemen değme metrik manifoldları incelendi. Önce 3-boyutlu Normal hemen hemen değme metrik manifoldun lokal \emptyset -Simetrik olması için gerek ve yeter şartın bulunuşu gösterildi. Daha sonra

$\alpha, \beta =$ sabit iken böyle bir manifoldda Ricci tensörü η –paralel ise manifoldun lokal \emptyset –Simetrik olduğunun ispatı verildi. Son olarak da skalar eğriliği sabit olan 3-boyutlu lokal \emptyset –Simetrik Normal hemen hemen değme metrik manifold örneği verildi.

Orijinal çalışmamız olan 3. bölümde, üç boyutta normal olan lokal φ -simetrik hemen hemen değme metrikli Finsler manifoldu çalışıldı. Finsler manifoldları hakkında biraz bilgi verildikten sonra Finsler manifoldları için lokal φ -simetrinin tanımı verilmiş ve lokal φ -simetrik normal hemen hemen değme Finsler manifoldlarının sabit skalar eğriliğe sahip olduğu gösterilmiştir. Normal değme Finsler manifoldundaki η -paralel Ricci tensörünün skalar eğriliklerinin sabit olduğu kanıtlanmıştır. Son olarak sonuçları gösteren bir örnek verilmiştir.





BİRİNCİ BÖLÜM
MANİFOLD ÜZERİNDE YAPILAR

1.1. HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLDLAR VE KOMPLEKS MANİFOLDLARI

Öncelikle, reel ve kompleks vektör uzayları üzerinde birkaç lineer cebir ile alakalı sonuçları verelim.

R reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. V nin kompleksleştirilmiş V^c ile gösterilsin

$$V^c = \{X + iY; (i = \sqrt{-1}), \forall X, Y \in V\} \text{ dir}$$

V^c üzerinde aşağıdaki koşullar sağlanır:

$X + iY = X' + iY'$ olması için gerek ve yeter koşul $X = X'$ ve $Y = Y'$ olmasıdır.

V^c üzerinde vektörel toplam

$$+ : V^c \times V^c \rightarrow V^c$$

$$(X + iY) + (X' + iY') = (X + X') + i(Y + Y')$$

şeklinde tanımlanır ve skalar ile çarpma da

$$\cdot : C \times V^c \rightarrow V^c$$

$$(a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY)$$

şeklinde tanımlanırsa V^c , C kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

$\forall X \in V$ için $X = X + i0 \in V^c$ olduğundan $V \subset V^c$ dir. $Z = X + iY \in V^c$ için

$\bar{Z} = X - iY \in V^c$ elemanına Z nin V ye göre eşleniğidir deriz.

$$V^c \rightarrow V^c$$

$$Z \rightarrow \bar{Z}, \text{ yani } \overline{Z + W} = \bar{Z} + \bar{W} \text{ ve } \overline{\lambda \cdot Z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{Z} \ (\lambda \in C)$$

şeklinde tanımlanan eşlenik lineer dönüşüm bir kompleks eşlenik dönüşümdür

V R reel sayılar cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı ve V nin bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\forall X, Y \in V$ için $X = \sum_{j=1}^n a^j e_j$, $Y = \sum_{j=1}^n b^j e_j$ ise o zaman $X + iY = \sum_{j=1}^n (a^j e_j + i b^j e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda^j e_j$ olur, burada $\lambda^j = a^j + i b^j$ ($\forall j = 1, \dots, n$) dir. e_1, \dots, e_n elemanlarının V^c kompleks uzayında olduğunu düşünürsek C üzerinde lineer bağımsızdırlar gerçekten de eğer $\sum \lambda^j e_j = 0$

($\forall j = 1, 2, \dots, n$) ise, o zaman $\sum a^j e_j = 0$ ve $\sum b^j e_j = 0$ demektir. Böylece $a^j = b^j = 0$

$(\forall j= 1, \dots, n)$ olur yani $\forall j= 1, \dots, n$ için $\lambda^j = 0$ demektir. Bu yüzden $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lineer bağımsızdır. Bu nedenle $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, V^c$ de bir bazdır.

V , reel vektör uzayının bir j lineer endomorfizmi eğer $j^2 = -I$ şartını sağlıyorsa V üzerinde bir kompleks yapıdır denir, burada I ile V deki özdeşlik dönüşümü gösterilmiştir. V reel vektör uzayı üzerinde bir j kompleks yapısı verilsin. $X \in V$ ve

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \text{ olmak üzere}$$

$$\mathbb{C} \times V \rightarrow V$$

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bjX$$

çarpımını tanımlayabiliriz. Böylece V nin \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu düşünebiliriz. Açıkçası, V nin boyutu çift sayı olmalıdır.

Tersine kompleks boyutu n olan bir kompleks vektör uzayı V olsun. j de V nin $\forall X \in V$ için $jX = iX$ şeklinde tanımlı bir lineer endomorfizmi olsun. Eğer V nin $2n$ reel boyutlu bir reel vektör uzayı olduğunu düşünürsek o zaman j, V nin bir kompleks yapısı olur. Şimdi V, j kompleks yapıyla bir reel vektör uzayı olsun. O zaman, j kompleks yapısını V^c nin kompleks lineer endomorfizmine genişletebiliriz:

$$j(X + iY) = jX + i.jY, \quad j^2 = -I$$

j Kompleks yapıyla vermiş $2n$ boyutlu reel vektör uzayı V de X_1, X_2, \dots, X_n elemanları için $\{X_1, \dots, X_n, jX_1, \dots, jX_n\}$ bazı vardır.

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - ijX_k), \quad \bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + ijX_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

O zaman $\{Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n\}, V^c$ nin bazıdır ve

$$jZ_k = iZ_k, \quad j\bar{Z}_k = -i\bar{Z}_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Böylece

$$V^{1,0} = \{z \in V^c ; jz = iz\}$$

$$V^{0,1} = \{z \in V^c ; jz = -iz\}$$

alırsak

$$V^c = V^{1,0} + V^{0,1}$$

direkt toplam vektör uzayını buluruz. Burada

$$V^{1,0} = V^{0,1} \text{ dir. } \forall Z \in V^c \text{ için}$$

$$Z = \frac{1}{2}(Z - ijZ) + \frac{1}{2}(Z + ijZ)$$

dir, burada $\frac{1}{2}(Z - ijZ) \in V^{1,0}$ ve $\frac{1}{2}(Z + ijZ) \in V^{0,1}$ dir. Bu

$$V^{1,0} = \{X - ijX : X \in V\}$$

$$V^{0,1} = \{X + ijX : X \in V\} \text{ dir.}$$

V reel vektör uzayının dual uzayını V^* ile gösteririz. V^* dual uzayının kompleks leştirilmesini de V^{c*} dual uzayı ile gösteririz. Aslında V^{c*} dual uzayı, V nin kompleks leştirilmiş olan V^c nin dualidir. V üzerindeki j kompleks yapısı V^* üzerinde bir kompleks yapıya indirgenebilir.

$$\langle jX, X^* \rangle = \langle X, jX^* \rangle, \quad X \in V, X^* \in V^*$$

O zaman aşağıdaki ayrıştırmayı yazabiliriz.

$$V^{*c} = V_{1,0} + V_{0,1}$$

burda

$$V_{1,0} = \{X^* \in V^{*c}; \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{0,1}\}$$

$$V_{0,1} = \{X^* \in V^{*c}; \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{1,0}\}$$

M bir reel diferensiyallenebilir manifold olsun. M üzerindeki j tensör alanı, $\forall X \in M$ için $T_X M$ tanjant uzayının $j^2 = -I$ olacak şekilde bir endomorfizmi ise M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır denir. M manifoldu üzerinde tanımlanan j hemen hemen kompleks yapısıyla birlikte bir hemen hemen kompleks manifold olur. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur. Her M kompleks manifoldunun bir j hemen hemen kompleks yapısına sahip olduğunu gösterelim. M nin her bir $P \in M$ noktasının bir u komşuluğu üzerinde bir kompleks lokal koordinat sistemi (z^1, \dots, z^n) olsun. $Z^j = x^j + iy^j$, $j = 1, \dots, n$, alalım. $T_p(M)$ tanjant uzayının bir j endomorfizmini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

j nin tanımının kompleks lokal koordinat sisteminin seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim:

$T_p^c(M)$, $T_p(M)$ nin kompleksleştirilmişini gösterebiliriz. j yapısını $T_p^c(M)$ ye genişletelim.

$$j\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = -i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right), \quad j=1, \dots, n, \quad (1.2)$$

burada

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right). \quad (1.3)$$

Dir. Böylece eğer $T_p^c(M)$ nin Z elemanı $\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)$ nin bir lineer kombinasyonu ise o zaman

$jZ = iZ$ dir ve eğer Z sadece $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$ nin bir lineer kombinasyonu ise o zaman $jZ = -iZ$ dir. Şimdi de P nin U koordinat komşuluğunda bir diğer lokal koordinat sistemi (w^1, \dots, w^n) olsun. Eğer $w^k = u^k + iv^k$, $k = 1, \dots, n$, ise o zaman $T_p(M)$ nin j' endomorfizmi

$$j'\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial}{\partial v^k}, \quad j'\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right), \quad k=1, \dots, n$$

şeklinde tanımlıdır. j' endomorfizmini $T_p^c(M)$ ye genişleterek

$$j'\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}\right), \quad j'\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}\right) = -i\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right), \quad k=1, \dots, n$$

buluruz. Diğer yönden, $p \in M$ noktasında

$$\frac{\partial}{\partial w^k} = \sum_j \frac{\partial F^j}{\partial w^k}(p) \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}^k} = \sum_j \frac{\partial \bar{F}^j}{\partial \bar{w}^k}(p) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \quad k=1, \dots, n.$$

Böylece $\frac{\partial}{\partial w^k}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}$, $\frac{\partial}{\partial z^j}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ nin lineer kombinasyonlarıdır

$$j\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}\right), \quad j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}\right) = -i\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right).$$

Dir. Sonuç olarak, $j, p \in M$ nin komşuluğundaki Kompleks lokal koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır. $j^2 = -I$ olup M üzerinde bir hemen hemen Kompleks yapısıdır.

M ve M' , sırasıyla, j ve j' hemen hemen kompleks yapılarıyla hemen hemen kompleks manifoldlar olsunlar. Eğer $j'f_* = f_*j$ ise

$$f: M \rightarrow M'$$

dönüşümüne hemen hemen kompleks dönüşüm denir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Önerme 1.1.1. M ve M' birer kompleks manifold olsunlar. $f: M \rightarrow M'$ dönüşümünün holomorfik olabilmesi için gerek ve yeter koşul f nin M ve M' nün kompleks yapılarına göre hemen hemen kompleks olmasıdır.

İspat. j ve j' , sırasıyla M ve M' nin hemen hemen kompleks yapıları olsunlar. $P \in M$ ve $f(P) \in M'$ nün komşuluklarındaki kompleks lokal koordinat sistemleri, sırasıyla (z^1, \dots, z^n) ve (w^1, \dots, w^m) olsun $z^k = x^k + iy^k$ ve $w^j = u^j + iv^j$ alalım. Eğer

$$f^*u^j = \alpha^j(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

$$f^*v^j = \beta^j(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

alırsak

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} \right) (P) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^k} \right) (P) \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \right)$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y^k} \right) (P) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^k} \right) (P) \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \right)$$

olur.

$f_* \left(j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right)$ yi $j \left(f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right)$ ile ve $f_* \left(j \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) \right)$ yi $j' \left(f_* \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) \right)$ ile karşılaştırsak f bir hemen hemen kompleks yapı olur ancak ve ancak

$$\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} \right) (P) = \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^k} \right) (P), \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y^k} \right) (P) = - \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x^k} \right) (P)$$

$(\forall j, k = 1, \dots, n)$ dir. Bu $f^*w^j = f^*u^j + if^*v^j = \alpha^j + i\beta^j$ Cauchy-Riemann denklemdir.

Böylece f bir hemen hemen kompleks dönüşümdür ancak ve ancak f , holomorfiktir.

M nin X noktasındaki kompleks tanjant uzayını $T_x^c(M)$ ile gösterelim. $T_x^c(M)$ nin elemanına, X noktasındaki kompleks tanjant vektörü denir. M hemen hemen kompleks yapısı j olan bir hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman

$$T_x^c(M) = T_x^{1,0}(M) + T_x^{0,1}(M)$$

dir, burada $T_x^{1,0}(M)$ ve $T_x^{0,1}(M)$, j nin, sırasıyla, i ve $-i$ özdeğer değerlerine karşılık gelen özdeğer uzaylarıdır.

$T_x^{1,0}(M)$ ye ait olan bir kompleks tanjant vektör alanı $(1,0)$ tipindedir denir. Benzer şekilde $T_x^{0,1}(M)$ ye ait olan kompleks tanjant vektör alanı da $(0,1)$ tipindedir.

Bir Z kompleks tanjant vektör alanı $(1,0)$ tipindedir ancak ve ancak $Z = X - ijX$, $X \in T_x(M)$ dir. Benzer şekilde Z kompleks tanjant vektör alanının $(0,1)$ tipinde olabilmesi için gerek ve yeter koşul $Z = X + ijX$, $X \in T_x(M)$ olmasıdır.

M hemen hemen kompleks yapısı j olan reel $2n$ boyutlu kompleks manifold olsun. (z^1, \dots, z^n) de kompleks lokal koordinat sistemi olsun. O zaman, (1.2) den görebiliriz ki

$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\}$, $T_x^{1,0}(M)$ nin bir bazıdır. Benzer şekilde $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$ de, $T_x^{0,1}(M)$ nin bir bazıdır. Dahası $\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$ de $T_x^c(M)$ nin bazı olur.

$T_x(M)$ nin dual uzayı olan $T_x^*(M)$ nin kompleksleştirilmişini $T_x^{*c}(M)$ ile gösterelim.

$\forall j = 1, \dots, n$, için $z^j = x^j + iy^j$, alalım ve duallerini

$$dz^j = dx^j + idy^j, \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\{dz^1, \dots, dz^n, d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n\}$ de $T_x^{*c}(M)$ nin bazıdır. Üstelik

$$dz^j \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) = d\bar{z}^j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = \delta_k^j$$

$$dz^j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = d\bar{z}^j \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) = 0, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

M manifoldu üzerindeki r -formların uzayı $D^r(M)$ olsun. $D^r(M)$ uzayının kompleksleştirilmiş $C^r(M)$, w_1 ve w_2 reel r -formları göstermek üzere $w = w_1 + iw_2$ şeklindeki formların cümlesidir. $W \in C^r(M)$, M üzerinde bir kompleks r -formdur denir. M üzerindeki W kompleks r -formu, her $X \in M$ noktasında $\Lambda^r T_x^{*c}(M)$ nin bir elemanı verir, yani, her $X \in M$ noktasında

$$T_x^c(M) \times T_x^c(M) \times \dots \times T_x^c(M) \rightarrow C$$

şeklinde tanımlı bir skew-simetrik r -lineer dönüşümdür. Daha genel olarak, M üzerindeki kompleks tensör uzayını reel tensör alanlarının uzayının kompleksleştirilmiş olarak tanımlayabiliriz.

V bir reel vektör uzayı olsun. O zaman $V^{*c} = V_{1,0} + V_{0,1}$ dir. $\Lambda V_{1,0}$ ve $\Lambda V_{0,1}$ dış çarpım cebirleri ΛV^{*c} nin alt cebirleri olarak da düşünülebilir. $\Lambda^{p,q} V^{*c}$, ΛV^{*c} nin alt

uzayı olsun. $\Lambda^{p,q}V^{*c}$ alt uzayı $\alpha \in \Lambda^p V_{1,0}$ ve $\beta \in \Lambda^q V_{0,1}$ olmak üzere $\alpha \wedge \beta$ tarafından gerilen alt uzaydır. O zaman

$$\Lambda V^{*c} = \sum_{r=0}^p \Lambda^r V^{*c} \quad , \quad \Lambda^r V^{*c} = \sum_{p+q=r} \Lambda^{p,q} V^{*c}$$

dır. V^{*c} de kompleks eşlenik $\Lambda^{p,q}V^{*c}$ ve $\Lambda^{q,p}V^{*c}$ arasındaki reel lineer izomorfizmi verir. Bu sonuçları $T_x^*(M)$ ye uygulayarak aşağıdaki ayrışımı buluruz.

$$C(M) = \sum_{r=0}^n C^r(M) = \sum_{p,q=0}^n C^{p,q}(M), \quad C^r(M) = \sum_{p+q=r} C^{p,q}(M)$$

burada $C(M)$ M üzerindeki kompleks diferansiyel formların uzayıdır. $C^{p,q}(M)$ nin elemanına (p,q) dereceli kompleks form denir. Bir W kompleks 1-formunun derecesi $(1,0)$ dir ancak ve ancak $(0,1)$ tipindeki her Z kompleks vektör alanı için $w(Z) = 0$ dir. Benzer şekilde derecesi $(0,1)$ dir ancak ve ancak her $(1,0)$ tipli Z kompleks vektör alanı için $w(Z) = 0$ dir.

$C^{1,0}(M)$ nin bir lokal bazı $\{w^1, \dots, w^n\}$ olsun. O zaman kompleks eşleniği olan $\{\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^n\}$ de $C^{0,1}(M)$ nin bir lokal bazıdır. Buradan $w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_p} \wedge \bar{w}^{k_1} \wedge \bar{w}^{k_2} \wedge \dots \wedge \bar{w}^{k_q}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$ ve $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n$ formlarının cümlesi de $C^{p,q}(M)$ nin bir lokal bazıdır diyebiliriz. $C^{0,0}(M)$, $C^{1,0}(M)$ ve $C^{0,1}(M)$ nin lokal olarak genellemesi $C(M)$ olduğundan aşağıdakileri yazabiliriz:

$$dC^{0,0}(M) \subset C^{1,0}(M) + C^{0,1}(M),$$

$$dC^{1,0}(M) \subset C^{2,0}(M) + C^{1,1}(M) + C^{0,2}(M),$$

$$dC^{0,1}(M) \subset C^{2,0}(M) + C^{1,1}(M) + C^{0,2}(M),$$

buradan da

$$dC^{p,q}(M) \subset C^{p+2,q-1}(M) + C^{p+1,q}(M) + C^{p,q+1}(M) + C^{p-1,q+2}(M).$$

dir. Burada j hemen hemen kompleks yapısının $(1,2)$ tipindeki N torsiyon tensör alanını

M üzerindeki her X, Y vektör alanı için aşağıdaki gibi tanımlarız (Yano, K. and Kon, M., 1984).

$$N(X, Y) = [jX, jY] - j[X, jY] - j[jX, Y] - [X, Y] \quad (1.5)$$

Teorem 1.1.1. Bir hemen hemen kompleks M manifoldu için, aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

a) Eğer Z ve W $(1,0)$ tipinde kompleks vektör alanlar iseler $[Z,W]$ da $(1,0)$ tipinde kompleks vektör alanıdır ;

b) Eğer Z ve W $(0,1)$ tipinde kompleks vektör alanlar iseler $[Z,W]$ da $(0,1)$ tipinde kompleks vektör alanıdır ;

$$c) dC^{1,0}(M) \subset C^{2,0}(M) + C^{1,1}(M), dC^{0,1}(M) \subset C^{1,1}(M) + C^{0,2}(M);$$

$$d) dC^{p,q}(M) \subset C^{p+1,q}(M) + C^{p,q+1}(M) , (p,q=0,1,\dots,n) ;$$

e) hemen hemen kompleks yapı torsiyonsuzdur .

İspat. Her $Z = X + iY$ ve $W = X' + iY'$ kompleks vektör alanları için $[Z,W]$ braketi

$$[Z, W] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

şeklindedir. Böylece $([\bar{Z}, \bar{W}]) = [\bar{Z}, \bar{W}]$ olur, bu da (a) ve (b) koşullarının sağladığını gösterir

$W \in C^{1,0}(M)$ olsun. Eğer Z ve W $(0,1)$ tipinde kompleks vektör alanlarıysalar o zaman (b) den $2d\omega(Z, W) = Z(\omega(W)) - W(\omega(Z)) - \omega([Z, W]) = 0$.

olur. Böylece $d\omega$ $(0,2)$ dereceden bir birleşen içermez benzer şekilde, eğer $w \in C^{0,1}(M)$ ise, dw nin $(2,0)$ tipinden bir bileşen içermeyeceğini de söyleyebiliriz. (c) \Rightarrow (a) şartını ispatlamak için ; $(1,0)$ tipinden Z ve W vektörlerini alalım. O zaman $(1,0)$ tipli her W formu için

$$w([Z, W]) = 0 \text{ olur. Böylece, } [Z, W] \text{ de } (1,0) \text{ tiplidir.}$$

(c) \Rightarrow (b) şartıda benzer şekilde gösterilebilir $C^{0,0}(M)$, $C^{1,0}(M)$ ve $C^{0,1}(M)$ nin genelleştirilmiş $C(M)$ olduğundan (c) \Rightarrow (d) dir. (d) \Rightarrow (c) şartı da aşıkardır

$$(a) \Rightarrow (e) \text{ şartı için } X \text{ ve } Y \text{ reel vektör alanları için}$$

$Z = [X - iY, Y - iX]$ alalım. $\forall X, Y$ reel vektör alanı için Z nin $(1,0)$ tipinde olması için gerek ve yeter şart (a) nın sağlanmasıdır. Diğer yönden

$$Z + iZ = -N(X, Y) - iN(X, Y).$$

Dir. $Z + iZ = 0$ olması için gerek ve yeter şartın Z nin $(1,0)$ tipli olması gerektiğinden her $X, Y \in \mathbb{R}$ için $N(X, Y) = 0$ olması gerek ve yeter şart olduğundan (a) sağlanır.

Eğer (α) şartı sağlanıyorsa j hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğunu söyleyebiliriz yani, j integrallenebilir ancak ve ancak $N = 0$ dır (Yano, K. and Kon, M.,1984).

Teorem 1.1.2. j hemen hemen kompleks yapılı bir hemen hemen kompleks manifold M olsun. O zaman j bir kompleks yapıdır ancak ve ancak j torsiyonsuzdur.

İspat: M üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1, x^2, \dots, x^{2n})$ olsun, N nin bu lokal koordinat sistemine göre N_{jk}^i bileşenleri

$$N_{jk}^i = \sum_{h=1}^{2n} (j_j^h \partial_h j_k^i - j_k^h \partial_h j_j^i - j_h^i \partial_j j_k^h + j_h^i \partial_k j_j^h).$$

şeklindedir, burada j_j^i ile j nin bileşenleri gösterilmiştir. j , M üzerinde bir kompleks yapı olsun. O zaman (1,1) den, j nin bileşenlerinin sabit olduğunu görürüz. Böylece de $N_{jk}^i = 0$ olur (Newlander ve Nirenberg, 1957) (Matsushima, 1972).

Teorem 1.1.3. M hemen hemen kompleks yapısı j olan $2n$ -boyutlu hemen hemen kompleks manifold olsun. M nın bir $\{U\}$ açık komşuluğu aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde vardır. Her U açık komşuluğu üzerinde bir $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ lokal koordinat sistemi vardır ve

$$j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

O zaman M bir kompleks manifolddur (Yano, K. and Kon, M.,1984).

İspat. U ve V lokal koordinat sistemleri üzerindeki lokal koordinat sistemleri, sırasıyla,

(x^j, y^j) ve (u^j, v^j) olsunlar. $U \cap V \neq \emptyset$ üzerinde

$$u^j = \alpha^j(x^k, y^k), \quad v^j = \beta^j(x^k, y^k)$$

dır. O zaman

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \left(\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) + \left(\frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_k \left(\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial y^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) + \left(\frac{\partial \beta^k}{\partial y^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) \right).$$

Dır, yukarıdaki denklemlerde eşitliğin her iki tarafına j uygularsak

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_k \left(\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) - \left(\frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = - \sum_k \left(\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial y^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) + \left(\frac{\partial \beta^k}{\partial y^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) \right)$$

buluruz. Bu denklemlerden de

$$\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} = \frac{\partial \beta^k}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial \alpha^k}{\partial y^j} = - \left(\frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right), \quad j, k = 1, \dots, n,$$

elde ederiz. $z^j = x^j + iy^j$, $w^j = u^j + iv^j$ alırsak o zaman (z^1, \dots, z^n) ve (w^1, \dots, w^n) , sırasıyla, U ve V üzerinde lokal koordinat komşulukları üzerindeki local kompleks koordinat sistemleri olurlar.

$$w^k = f^k(z^1, \dots, z^n), \quad f^k = \alpha^k + i\beta^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

demektir. f^k holomorfik olduğundan da M bir kompleks manifolddur.

Eğer X vektör alanı M üzerindeki $L_{Xj} = 0$ şartını sağlıyorsa o zaman X , j hemen hemen kompleks yapısının bir analitik vektör alanıdır denir (Burada L_X, X vektör alanına göre lie türevini gösterir)

M üzerindeki her X, Y vektör alanı için

$$(L_X j)Y = L_X jY - jL_X Y = [X, jY] - j[X, Y] \text{ dir (Yano, K. and Kon, M., 1984).}$$

Önerme 1.1.2. M deki j hemen hemen kompleks yapısının analitik vektör alanı X dir ancak ve ancak M deki her Y vektör alanı için $[X, jY] = j[X, Y]$ dir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Teorem 1.1.4. M kompleks manifoldu üzerinde 1- parametrelili grup ϕ_t ve X de ϕ_t nin analitik transformasyonu olsun. O zaman X vektör alanı M deki j hemen hemen kompleks yapısının bir analitik otomorfizmidir ancak ve ancak her $t \in \mathbb{R}$ için ϕ_t, M nin bir holomorfik izomorfizmidir.

İspat. M üzerindeki her Y vektör alanı için

$$[X, jY]_x = j_x [X, Y]_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(jY)_x - (\phi_t)_* (jY)_{\phi_t^{-1}(x)}]$$

$$- j_x (Y_x - (\phi_t)_* Y_{\phi_t^{-1}(x)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [j_x ((\phi_t)_* Y_{\phi_t^{-1}(x)} - (\phi_t)_* (jY)_{\phi_t^{-1}(x)})]$$

($\forall x \in M$). Böylece önerme 1.1 den, ϕ_t holomorfik bir izomorfizm ise,

$$[X, jY] = j[X, Y] \text{ dir yani } X \text{ bir analitik otomorfizmdir.}$$

Karşıt olarak X bir analitik otomorfizm olsun

$$\phi(t; Y) = j(\phi_t)_* Y - (\phi_t)_* jY, \quad \forall Y \in M$$

alalım

$$\phi(t+s; Y) = \phi(s; (\phi_t)_* Y) + (\phi_s)_* \phi(t; Y).$$

dir. Böylece

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\phi(t+s; Y)_x - \phi(t; Y)_x] = -[X, \phi(t; Y)]_x$$

bulunur, t nin bir fonksiyonu olarak, $\phi(t; Y)_x$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür

$$\frac{d\phi(t; Y)_x}{dt} = -[X, \phi(t; Y)]_x.$$

Burada $\phi(0; Y) = 0$ dir, yani $\phi(t; Y)_x = 0$, dir ϕ_t bu nedenle, holomorfik izomorfizmdir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 1.1.3. Hemen hemen kompleks yapısı j olan M manifoldu üzerinde bir analitik vektör alanı X olsun. O zaman jX de bir analitik vektör alanıdır ancak ve ancak M deki her Y vektör alanı için $N(X, Y) = 0$ dir.

İspat. Önerme 1.1.2 den her Y vektör alanı için

$$N(X, Y) = [jX, jY] - j[jX, Y]$$

dir. Buradan jX 'in de bir analitik olduğu aşikardır

M bir kompleks manifold ve M nin bir kompleks lokal koordinat sistemi de (z^1, \dots, z^n) ,

$$z^j = x^j + iy^j \text{ olsun.}$$

$$d': C^{p,q}(M) \rightarrow C^{p+1,q}(M), \quad d'': C^{p,q}(M) \rightarrow C^{p,q+1}(M).$$

Dönüşümlerini

$$d = d'w + d''w \quad (\forall w \in C^{p,q}(M))$$

şeklinde tanımlayalım

$$, (d')^2 = 0, \quad (d'')^2 = 0, \quad d'd'' + d''d' = 0, \text{ dir.}$$

$(p, 0)$ tipli bir w formu holomorfiktir denir eğer $d''\omega = 0$ ise

(z^1, \dots, z^n) lokal koordinat sistemine göre w nin bileşenleri

$$w = \sum f_{j_1, \dots, j_p} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_p}$$

olduğundan $d''w = 0 \Leftrightarrow d''f_{j_1, \dots, j_p} = 0$ dir.

M üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için

$$df = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z^j} \right) dz^j + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \right) d\bar{z}^j.$$

olur, buradan

$$d'f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z^j} \right) dz^j, \quad d''f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \right) d\bar{z}^j$$

yazabiliriz, yani her $j = 1, \dots, n$, için $d''\omega = 0 \Leftrightarrow \partial f_{j_1, \dots, j_p} / \partial \bar{z}^j = 0$ dir.

Böylece w formu holomorftir ancak ve ancak w nin f_{j_1, \dots, j_p} bileşenlerinin hepsi de holomorftir.

M kompleks manifoldu üzerindeki $(1,0)$ tipi bir Z kompleks vektör alanı holomorftir eğer her lokal tanımlı f holomorftik fonksiyonu için Zf holomorftik ise

$$Z = \sum f^j \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right)$$

alalım Z holomorftir ancak ve ancak f^j lerin hepsi de holomorftik fonksiyonlardır. (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Önerme 1.1.4. M , üzerinde j hemen hemen kompleks yapıyla bir kompleks manifold olsun. Eğer X , M üzerindeki j hemen hemen kompleks yapısının bir analitik otomorfizmi ise o zaman $X - ijX$ bir holomorftik vektör alanıdır.

$$\text{İspat: } \frac{1}{2} (X - ijX) = \sum f^j \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right)$$

$$\frac{1}{2} (Y - ijY) = \sum g^j \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right) \quad \text{alalım}$$

$$[X, jY] = j[X, Y] \Leftrightarrow \text{her } j = 1, \dots, n, \text{ için}$$

$$\sum g^k \left(\frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^k} \right) = 0 \text{ dir. } Y \text{ bir keyfi vektör alanı olduğundan } \frac{\partial f^j}{\partial \bar{z}^k} = 0, \quad (\forall j = 1, \dots, n).$$

Böylece $X - ijX$ holomorftir Z , M de bir holomorftik vektör alanı olsun

$$Z = \sum f^j \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right) = \frac{1}{2} \sum_j \left(\alpha^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_j \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \alpha^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right)$$

olur, burada $f^j = \alpha^j + i\beta^j$ dir, eğer $X = \sum \left(\alpha^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right)$ alırsak

$Z = \frac{1}{2} (X - ijX)$ olur. X vektör alanı koordinat komşuluğu seçiminden bağımsızdır.

$$\frac{\partial f}{\partial z^k} = 0 \quad (\forall j, k = 1, \dots, n.)$$

olduğundan, $[X, jY] = j[X, Y]$ ($\forall Y$) dır yani X bir analitik otomorfizmdir.

$\theta: X \rightarrow \frac{1}{2}(X - ijX)$ dönüşümü j nin analitik otomorfizmlerinin Lie cebirinden holomorfik vektör alanlarının Lie cebirine tanımlıdır. Her X ve Y analitik otomorfizmi için

$$\theta [X, Y] = [\theta X, \theta Y]$$

olduğunu $j [X, Y] = [jX, Y] = [X, jY]$ ve $[jX, jY] = -[X, Y]$ eşitliklerini kullanarak görebiliriz, θ , 1:1 bir dönüşümdür. Böylece θ bir izomorfizmdir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

1.2. KOMPLEKS MANİFOLD VE HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLD ÖRNEKLERİ

Örnek 2.1. $\mathbb{C}^n = \{ (z^1, \dots, z^n) / z^k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n. \}$ kompleks vektör uzayında $z^k = x^k + iy^k, \quad x^k, y^k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n,$

alırsak

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(z^1, \dots, z^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

eşlemesini yapabiliriz. \mathbb{R}^{2n} in

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n, -x^1, \dots, -x^n)$$

şeklinde tanımlanan kompleks yapısına kanonik kompleks yapı denir. \mathbb{R}^{2n} in standart bazı cinsinden matris formunda yazılışı

$$j_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

olur

\mathbb{R}^{2n} in $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ standart bazı için

$$j_0(e_1) = j_0(1,0,\dots,0) = (0,\dots,0,-1,0,\dots,0) = -e_{n+1}$$

$$j_0(e_2) = j_0(0,1,\dots,0) = (0,\dots,0,0,-1,\dots,0) = -e_{n+2}$$

$$j_0(e_n) = j_0(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = (0,\dots,0,0,\dots,-1) = -e_{2n}$$

$$j_0(e_{n+1}) = j_0(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = (1,0,\dots,0) = e_1$$

$$j_0(e_{n+2}) = j_0(0,\dots,0,0,1,\dots,0) = (0,1,\dots,0) = e_2$$

$$j_0(e_{2n}) = j_0(0,\dots,0,0,\dots,1) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) = e_n \text{ (Yano ve Kon, 1984).}$$

Örnek 1. 2.1. \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde \mathfrak{g} Lie cebiri bir kompleks Lie cebiri olarak adlandırılır. \mathfrak{g} bir reel vektör uzayı olsun. \mathfrak{g} reel vektör uzayı üzerinde bir j kompleks yapısını $\forall X \in \mathfrak{g}$ için $jX = iX$ şeklinde tanımlayalım. j kompleks yapısı $[jX,Y]=j[X,Y]=[X,jY]$

($\forall X, Y \in \mathfrak{g}$) eşitliğini sağlar, yani $\text{ad}(X)j = j \text{ad}(X)$ ($\forall X \in \mathfrak{g}$).

Tersine, $\forall X \in \mathfrak{g}$ için $\text{ad}(X)j = j \text{ad}(X)$ olacak şekilde tanımlı bir j kompleks yapılı reel \mathfrak{g} lie cebiri olsun, $(a + ib)X = aX + bjX$ tanımıyla

$$\begin{aligned} [(a + ib)X,Y] &= a[X,Y] + b[jX,Y] = a[X,Y] + bj[X,Y] \\ &= (a + ib)[X,Y] \end{aligned}$$

olur. Böylece j bir kompleks Lie cebiri dir (Yano, K. and Kon, M.,1984).

Örnek 1.2.2. G Kompleks lie grubu

$$(a, b) \in G \times G \rightarrow ab \in G$$

ve

$$a \in G \rightarrow a^{-1} \in G$$

holomorfik dönüşümler olmak üzere

(a) $G(n, \mathbb{C})$ kompleks Lie grubudur

(b) \mathbb{C}^n , kompleks Lie grubudur

(c) İki kompleks Lie grubunun direk çarpımı da kompleks Lie grubudur

(d) Her bir çift boyutlu komutatif Lie grubu bir kompleks Lie grubudur ;

Eğer G bir kompleks Lie grubu ise, G nin \mathfrak{g} Lie cebiri bir kompleks Lie cebiridir. Tersine, eğer bir G reel Lie grubunun \mathfrak{g} Lie cebiri kompleks ise, G bir kompleks Lie grubu yapısındadır (Matsushima, 1972).

Örnek 1.2.3. M bir kompleks manifold olsun. $P : \tilde{M} \rightarrow M$ projeksiyonunu düşünelim. \tilde{M} nin bir açık örtüsü $\{U_i\}$ olsun öyleki her i için U_i , $p(U_i)$ üzerine P ile holomorfik olarak haritalansın. \tilde{M} nin böyle bir örtülüşü her zaman vardır. M nin kompleks yapısı j olsun P nin U_i deki bileşeni P_i olsun

$$j_i = (P_i^{-1})^* \cdot j \cdot (P_i)^*$$

alalım $U_i \cap U_j$ de $P_i^{-1} \cdot P_j$ özdeşlik olduğundan j_i ve j_j çakışır. Böylece \tilde{M} üzerindeki j_i operatörü \tilde{M} üzerinde bir kompleks yapı tanımlar (Yano, K. and Kon, M.,1984).

Örnek 1.2.4. \mathbb{C}^n , $2n$ boyutlu reel vektör uzayı olarak alınsın. \mathbb{C}^n in bir $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ bazı için

$$\Gamma = \{ \sum_{j=1}^{2n} m_j a_j : m_j \in \mathbb{Z} \}$$

\mathbb{C}^n toplamaya göre abel grubu olarak düşünölsün. O zaman Γ , \mathbb{C}^n in bir alt grubudur. \mathbb{C}^n in \mathbb{C}^n / Γ bölüm grubunu T ile gösterelim $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow T$ bir dönüşüm olsun. T nin bir açık alt cümlesini U ile gösterelim eğer $\pi^{-1}(U)$ da \mathbb{C}^n de bir açık ise T üzerinde bir topoloji tanımlarız o zaman $a \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere T nin her bir $\pi(a)$ noktası, $a \in \mathbb{C}^n$ in bir komşuluğuna homeomorf olan bir komşuluğa sahiptir. T kompleks boyutu n olan bir kompleks manifolddur (Yano, K. and Kon, M.,1984).

Örnek 1.2.5. $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ cümesinde bir eşdeğerlik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım. $z = (z^k)$ ve $w = (w^k)$ noktalarının eşdeğer olması için $z = \lambda w$, yani

$z^k = \lambda w^k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ kompleks sayısı olması gerekir. Bu şekildeki eşdeğerlik bağıntısıyla tanımlanan eşdeğerlik sınıflarının cümlesine n -boyutlu kompleks projektif uzay denir ve $\mathbb{C}P^n$ ile gösterilir. $\mathbb{C}P^n$ in topolojisi de doğal bölüm topolojisi ile tanımlanır. $\forall j = 0, 1, \dots, n$, için

$$U_j^* = \{z : z^j \neq 0\} \subset (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$$

olsun. U_j^* in $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ doğal projeksiyonu altındaki görüntüsü U_j olsun. U_j den \mathbb{C}^n ye \emptyset dönüşümü z nin eşdeğerlik sınıflarının \mathbb{C}^n deki ($z^j \neq 0$)

$(z^0/z^j, \dots, z^{j-1}/z^j, z^{j+1}/z^j, \dots, z^n/z^j)$ elemanlarına dönüştürülür. O zaman $\{(U_j, \emptyset_j), 0 \leq j \leq n\}$ $\mathbb{C}P^n$ in bir kompleks koordinat sistemidir. $(z^0/z^j, \dots, z^{j-1}/z^j, z^{j+1}/z^j, \dots, z^n/z^j)$ lokal koordinat sistemi, $\mathbb{C}P^n$ in homojen olmayan koordinat sistemi olarak adlandırılır (z^0, z^1, \dots, z^n) koordinat sistemi de $\mathbb{C}P^n$ in homojen koordinat sistemi olarak adlandırılır.

Sıfırdan farklı kompleks sayıların çarpım grubunu C^* ile gösterelim.

$$C^* \times (C^{n+1} - \{0\}) \rightarrow C^{n+1} - \{0\}$$

$$(\lambda, Z) \rightarrow \lambda Z$$

dış çarpım işlemini tanımlayalım. O zaman

$$\mathbb{C}P^n = (C^{n+1} - \{0\}) / C^* \cdot C^{n+1} - \{0\}, \mathbb{C}P^n \text{ üzerinde asli lif demetidir.}$$

$$\pi: C^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

projeksiyondur. $\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \approx U_j \times C^*$ lokal eşdeğerlik

$$\psi_j(z) = (\pi(z), z^j) \in U_j \times C^*, \quad z = (z^j) \in C^{n+1} - \{0\}$$

şeklindedir.

$\psi_{kj}: U_j \cap U_k \rightarrow C^*$ fonksiyonlarını (z^0, \dots, z^n) Homojen koordinat sistemi için

$\psi_{kj} = z^k / z^j$ ile tanımlayalım.

S^{2n+1}, C^{n+1} de birim küreyi gösterebiliriz, yani $S^{2n+1} = \{ (z^0, \dots, z^n) \in C^{n+1} : \sum_{k=0}^n |z^k|^2 = 1 \}$ dir, $S^1 = \{ z \in C : |z| = 1 \}$ birim çemberi çarpım grubu olarak düşünülebilir ve

$$\lambda = e^{2\pi i \theta} \in S^1 \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \log \lambda = \theta \in R / Z.$$

$C^{n+1} - \{0\}$ in alt demeti olan $S^{2n+1} \subset C^{n+1}$ üzerinde bir asli lif demetidir.

$\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ bir projeksiyondur.

$\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \approx U_j \times S^1$, lokal eşdeğerlikler ve $\psi_{kj}: U_j \cap U_k \rightarrow S^1$ geçiş fonksiyonları, sırasıyla,

$$\psi_j(z) = (\pi(z), z^j / |z^j|) \in U_j \times S^1, \quad z \in S^{2n+1}$$

$$\psi_{kj} = (z^k / |z^k|) / (z^j / |z^j|)$$

şeklindedir. S^{2n+1} in CP^n üzerinde R/Z grubuyla bir asli lif demeti olduğunu düşünürsek, $\psi_{kj}: U_j \cap U_k \rightarrow R/Z$ geçiş fonksiyonları aşağıdaki gibidir (Yano, K. and Kon, M.,1984):

$$\psi'_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \log \psi_{kj} = \frac{1}{2\pi i} (\log z^k/z^j - \log |z^k| / |z^j|)$$

Örnek 1.2.6. S^{2p+1} ve S^{2q+1} birim küreleri verilsin $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ ($p, q \geq 0$) çarpım manifoldu bir kompleks yapıya sahiptir (Calabi ve Eckmann, 1958; Hopf, 1948).

Örnek 1.2.7. Cayley sayılar cebirini C ile gösterelim ve bazını da $\{I, e_0, e_1, \dots, e_6\}$, olarak alalım. C nin birim elemanı I olarak alınmıştır. Çarpım tablosu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Yano, K. and Kon, M.,1984) :

$$e_1^2 = -I, \quad e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i, \quad (i \neq j), \quad i, j = 0, 1, \dots, 6.$$

$$e_0 \cdot e_1 = e_2, \quad e_0 \cdot e_3 = e_4, \quad e_0 \cdot e_5 = e_6$$

$$e_1 \cdot e_4 = e_5, \quad e_1 \cdot e_3 = e_6, \quad e_2 \cdot e_3 = e_5,$$

$$e_2 \cdot e_4 = -e_6$$

$$C \text{ nin bütün elemanları } XI + X, \quad X \in R$$

şeklindedir, burada

$$X = \sum_{i=0}^6 x^i e_i, \quad x^i \in R, \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

Eğer $x = 0$ ise, sadece imajiner Cayley sayısıdır.

$$X = \sum_{i=0}^6 x^i e_i, \quad Y = \sum_{i=0}^6 y^i e_i, \quad \in E^7 \quad (E^7 \in C)$$

$$X \cdot Y = -\langle X, Y \rangle I + X \times Y,$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=0}^6 x^i y^i, \quad E^7 \text{ de skalar çarpımdır.}$$

$X \times Y = \sum_{i \neq j} x^i y^j e_i \cdot e_j$, X ve Y nin vektör çarpımıdır. Vektörel çarpım işlemi bilineerdir.

$\langle X, X \times Y \rangle = \langle Y, X \times Y \rangle = 0$ (X ve Y ortogonaldir) üstelik $X \times Y = -Y \times X$ dir.

E^7 de 6- boyutlu birim küre S^6 olsun

$$S^6 = \{X \in E^7 \mid \langle X, X \rangle = 1\}.$$

E^7 deki skaler çarpım işlemi S^6 daki g tensör alanına indirgenir. $T_x(S^6)$ tanjant uzayı E^7 'nin X 'e ortogonal alt uzayı ile eşlenebilir. $T_x(S^6)$ nin j_x endomorfizmini

$$j_x Y = X \times Y, \quad (\forall Y \in T_x(S^6))$$

şeklinde tanımlayalım o zaman

$$\begin{aligned} j_x^2 Y &= j_x(X \times Y) = X \times (X \times Y) \\ &= X \cdot (X \times Y) = X \cdot (X \cdot Y) + \langle X, Y \rangle X \\ &= (X \cdot X) \cdot Y = -\langle X, X \rangle Y = -Y \end{aligned}$$

burada $j_x^2 = -I$ olur. $X \rightarrow j_x$ dönüşümü $j^2 = -I$ olacak şekilde j tensör alanını tanımlar. Diğer yönden de

$$g(j_x Y, j_x Z) = g(Y, Z), \quad Y, Z \in T_x(S^6).$$

Sonuç olarak, S^6 (j, g) Hermit yapısına sahiptir (Yano ve Kon, 1984).

1.3. HERMİT MANİFOLDLARI

Hemen hemen kompleks yapısı j olan bir hemen hemen kompleks manifold M olsun. M üzerinde bir Hermit metriği her X, Y vektör alanı için

$$g(jX, jY) = g(X, Y)$$

şeklinde tanımlanan bir g Riemann metriğidir. Hermit metrikli bir hemen hemen kompleks manifold hemen hemen Hermit manifold olarak adlandırılır. Benzer şekilde Hermit metrikli bir kompleks manifold da Hermit manifoldu olur (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 1.3.1. Hermit metrikli her hemen hemen kompleks manifold parakompakttır (Yano, K. and Kon, M., 1984)..

İspat. M manifoldu parakompakt olduğundan g Riemann metriğini kullanabiliriz.

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(jX, jY), \quad \forall X, Y \in X(M)$$

alırsak h metriği M üzerinde bir Hermit metriği olur

$$h(jX, jY) = g(jX, jY) + g(j^2 X, j^2 Y)$$

$$\begin{aligned}
&= g(jX, jY) + g(-X, -Y) \\
&= g(jX, jY) + g(X, Y) \\
&= h(X, Y)
\end{aligned}$$

Kabul edelim ki her M Manifoldu daima parakompakt olsun. Kolaylıkla görebiliriz ki bir M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde tanımlı g Hermit metriği ikinci dereceden kovaryant olan bir kompleks simetrik tensör alanı g ye genişletilebilir öyle ki

$$(3.1) \text{ Her } Z \text{ ve } W \text{ kompleks vektör alanı için } g(\bar{Z}, \bar{W}) = g(\bar{Z}, \bar{W}) \text{ dır.}$$

$$(3.2) \text{ Sıfırdan farklı her kompleks vektör alanı } Z \text{ için } g(Z, \bar{Z}) > 0 \text{ dır.}$$

$$(3.3) (1,0) \text{ tipli her } Z \text{ vektör alanı ve } (0,1) \text{ tipli her } W \text{ vektör alanı için } g(Z, \bar{W}) = 0 \text{ dır.}$$

Tersine, (3.1),(3.2) ve (3.3) şartlarını sağlayan her g kompleks simetrik tensör alanı M üzerindeki g Hermit metriğinin doğal bir genişlemesidir.

Hemen hemen kompleks yapısı j ve Hermit metriği g olan bir hemen hemen Hermit manifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu olan \emptyset aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\emptyset(X, Y) = g(X, jY), \quad \forall X, Y \in X(M).$$

O zaman

$$\emptyset(jX, jY) = \emptyset(X, Y)$$

dır g her noktada pozitif tanımlı ve non singüler olduğundan da

$$\emptyset^p = \emptyset \wedge \dots \wedge \emptyset \text{ (p defa)}, 1 \leq p \leq n, 2n = \dim M$$

her noktada sıfırdan farklı olur.

Önerme 1.3.2. M , reel $2n$ -boyutlu bir hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman M yönlendirilebilirdir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 1.3.1. M , hemen hemen kompleks yapısı j olan bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M nin bir kompleks manifold olabilmesi için gerek ve yeter koşul M nin $\nabla j = 0$ ve $T = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonuna ve T torsiyon tensörüne sahip olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. M üzerinde $\nabla j = 0$ ve $T = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall X, Y \in X(M)$

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \nabla_X jY = j\nabla_X Y \text{ dir,}$$

bu denklemlerden

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [jX, jY] - j[X, jY] - j[jX, Y] - [X, Y] \\ &= \nabla_{jX} jY - \nabla_{jY} jX - j(\nabla_X jY - \nabla_{jY} X) - j(\nabla_{jX} Y - \nabla_Y jX) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= j\nabla_{jX} Y - j\nabla_{jY} X - j\nabla_X jY + j\nabla_{jY} X - j(\nabla_{jX} Y) + j(\nabla_Y jX) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= -j^2 \nabla_X Y + j^2 \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz.

Bu yüzden, Teorem 1.2 den dolayı M bir kompleks manifolddur.

Tersine, M bir kompleks manifold olsun, yani $N = 0$ olsun. Torsiyon tensörü $T = 0$ olan bir ∇ lineer konneksiyonu alabiliriz.

$$A(X, Y) = (\nabla_X j)Y - (\nabla_Y j)X,$$

$$S(X, Y) = (\nabla_X j)Y + (\nabla_Y j)X$$

alalım

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4} [A(X, jY) - jS(X, Y)]$$

alırsak, ∇' konneksiyonunun istenilen konneksiyon olduğunu gösterebiliriz ∇' konneksiyonunun tanımdan M üzerinde bir lineer konneksiyonun olduğu açıktır.

∇' 'nin torsiyon tensörü T' olmak üzere $T' = 0$ ve $\nabla'j = 0$ olduğunu gösterelim:

$$\forall X, Y \in X(M)$$

$$\begin{aligned} (\nabla'_X j)Y &= \nabla'_X jY - j\nabla'_X Y \\ &= \nabla_X jY + \frac{1}{4} [A(X, j^2 Y) - jS(X, jY)] - j(\nabla_X Y + \frac{1}{4} [A(X, jY) - jS(X, Y)]) \\ &= \nabla_X jY + \frac{1}{4} [-A(X, Y) - jA(X, jY) - jS(X, jY) - S(X, Y)] - j\nabla_X Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla'_x j)Y &= (\nabla_x jY - j\nabla_x Y) - \frac{1}{4} [A(X, Y) + jA(X, jY) + jS(X, jY) + S(X, Y)] \\
&= (\nabla_x j)Y - \frac{1}{4} [A(X, Y) + S(X, Y) + j(A(X, jY) + jS(X, jY))] \\
&= (\nabla_x j)Y - \frac{1}{4} [(\nabla_x j)Y - (\nabla_y j)X + (\nabla_x j)Y + (\nabla_y j)X + \\
&j\{(\nabla_x j)(jY) - (\nabla_y j)X\} + j\{(\nabla_x j)(jY) + (\nabla_y j)X\}] \\
&= (\nabla_x j)Y - \frac{1}{4} [2(\nabla_x j)Y + j(\nabla_x j)(jY) - j(\nabla_y j)X + j(\nabla_x j)(jY) + j(\nabla_y j)X] \\
&= (\nabla_x j)Y - \frac{1}{2} [(\nabla_x j)Y - j(\nabla_x j)(jY)] \\
&= \frac{1}{2} ((\nabla_x j)Y - j(\nabla_x j)(jY))
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
j(\nabla_x j)(jY) &= j(\nabla_x(j^2 Y) - j\nabla_x(jY)) \\
&= j(\nabla_x(-Y) - j^2 \nabla_x(jY)) \\
&= -j\nabla_x Y + \nabla_x(jY) \\
&= (\nabla_x j)Y
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\nabla'_x j = 0$ olur. Şimdi $T' = 0$ olduğunu gösterelim: $T = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
A(jX, Y) + A(X, jY) &= (\nabla_{jX} j)Y - (\nabla_y j)(jX) + (\nabla_x j)(jY) - (\nabla_{jY} j)X \\
&= (\nabla_{jX}(jY) - j\nabla_{jX} Y) - \nabla_y(j^2 X) + j(\nabla_y(jX) + \nabla_x(j^2 Y) \\
&\quad - j(\nabla_x(jY)) - \nabla_{jY}(jX) + j(\nabla_{jY} X)) \\
&= \nabla_{jX} jY - j\nabla_{jX} Y + \nabla_y X + j(\nabla_y(jX)) - \\
&\quad \nabla_x Y - j(\nabla_x(jY)) - \nabla_{jY}(jX) + j(\nabla_{jY} X) \\
&= (\nabla_{jX} jY - \nabla_{jY} jX) - (\nabla_x Y - \nabla_y X) - j(\nabla_{jX} Y - \nabla_y(jX)) - \\
&\quad j(\nabla_x(jY) - \nabla_{jY} X) \\
&= [jX, jY] - [X, Y] - j[jX, Y] - j[X, jY] \\
&= N(X, Y)
\end{aligned}$$

Buradan

$$T'(X, Y) = \nabla'_x Y - \nabla'_y X - [X, Y]$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X Y + \frac{1}{4} [A(X, jY) - jS(X, Y)] - \nabla_Y X - \frac{1}{4} [A(Y, jX) - jS(Y, X)] - [X, Y] \\
&= \frac{1}{4} [A(X, jY) - A(Y, jX) - jS(X, Y) + jS(Y, X)] \\
&= \frac{1}{4} N(X, Y).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $N = 0 \implies T' = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 1.3.1. M j hemen hemen kompleks yapısı ve g Hermit metriğiyle bir hemen hemen Hermit manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in X(M)$ için

$2g((\nabla_{Xj})Y, Z) - g(jX, N(Y, Z)) = 3d\emptyset(X, jY, jZ) - 3d\emptyset(X, Y, Z)$ dir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Burada ∇ Riemann konneksiyonu, \emptyset , 2. temel form, N de j nin nijenhuis torsiyon tensörüdür.

$$\text{İspat : } (\nabla_{Xj})jY = -j(\nabla_X j)Y, \quad (\nabla_X \emptyset)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X j)Z),$$

$$N(Y, Z) = (\nabla_{jY})Z - (\nabla_{jZ})Y + j(\nabla_Z)Y - j(\nabla_Y)Z.$$

Diğer taraftan \emptyset , 2. temel formu için

$$3d\emptyset(X, Y, Z) = X(\emptyset(Y, Z)) + Y(\emptyset(Z, X)) + Z(\emptyset(X, Y))$$

$$- \emptyset([X, Y], Z) - \emptyset([Y, Z], X) - \emptyset([Z, X], Y)$$

$$= X(g(Y, jZ)) + Y(g(Z, jX)) + Z(g(X, jY))$$

$$- g([X, Y], jZ) - g([Y, Z], jX) - g([Z, X], jY)$$

$$= X(g(Y, jZ)) + Y(g(Z, jX)) + Z(g(X, jY))$$

$$- g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, jZ) - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, jX) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, jY)$$

$$= g(\nabla_X Y, jZ) + g(Y, \nabla_X(jZ)) + g(\nabla_Y Z, jX)$$

$$+ g(Z, \nabla_Y jX) + g(\nabla_Z X, jY) + g(X, \nabla_Z jY)$$

$$- g(\nabla_X Y, jZ) + g(\nabla_Y X, jZ) - g(\nabla_Y Z, jX)$$

$$+ g(\nabla_Z Y, jX) - g(\nabla_Z X, jY) + g(\nabla_X Z, jY)$$

$$= g(Y, \nabla_X(jZ)) + g(\nabla_Y X, jZ) + g(Z, \nabla_Y(jX))$$

$$+ g(X, \nabla_Z jY) + g(\nabla_Z Y, jX) + g(\nabla_X Z, jY)$$

$$= g(Y, (\nabla_X j)Z + j(\nabla_X Z)) + g(\nabla_Y X, jZ) + g(Z, (\nabla_Y j)X + j(\nabla_Y X)) + g(X, (\nabla_Z j)Y$$

$$\begin{aligned}
& + j(\nabla_Z Y)) + g(\nabla_Z Y, jX) + g(\nabla_X Z, jY) \\
& = g(Y, (\nabla_X j)Z) + g(Z, (\nabla_Y j)X) + g(X, (\nabla_Z j)Y) \\
& + g(Y, j(\nabla_X Z)) + g(\nabla_Y X, jZ) + g(Z, j(\nabla_Y X)) \\
& + g((\nabla_Z Y, jX)) + g(X, j(\nabla_Z Y)) + g(\nabla_X Z, jY) \\
& = g(Y, (\nabla_X j)Z) + g(Z, (\nabla_Y j)X) + g(X, (\nabla_Z j)Y) \\
& - g(jY, (\nabla_X Z)) + g(\nabla_Y X, jZ) - g(jZ, (\nabla_Y X)) \\
& + g((\nabla_Z Y, jX)) - g(jX, (\nabla_Z Y)) + g(\nabla_X Z, jY) \\
& = g(Y, (\nabla_X j)Z) + g(Z, (\nabla_Y j)X) + g(X, (\nabla_Z j)Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz eşitlikte Y yerine jY, Z yerine jZ alırsak

$$3d\phi(X, jY, jZ) = g(jY, (\nabla_X j)jZ) + g(jZ, (\nabla_{jY} j)X) + g(X, (\nabla_{jZ} j)(jY))$$

bulunur.

Bu denklemlerden

$$\begin{aligned}
& 3d\phi(X, jY, jZ) - 3d\phi(X, Y, Z) \\
& = g(jY, (\nabla_X j)jZ) + g(jZ, (\nabla_{jY} j)X) + g(X, (\nabla_{jZ} j)(jY)) \\
& - g(Y, (\nabla_X j)Z) - g(Z, (\nabla_Y j)X) - g(X, (\nabla_Z j)Y) \\
& = -g((\nabla_X j)(jY), jZ) - g((\nabla_{jY} j)(jZ), X) - g(X, j(\nabla_{jZ} j)Y) \\
& + g((\nabla_X j)Y, Z) + g((\nabla_Y j)Z, X) - g(jX, j(\nabla_Z j)Y) \\
& = 2g((\nabla_X j)Y, Z) + g(j(\nabla_{jY} j)Z, X) + g(jX, (\nabla_{jZ} j)Y) \\
& + g((\nabla_Y j)Z, X) + g((\nabla_Z j)X, Y) \\
& = 2g((\nabla_X j)Y, Z) - g((\nabla_{jY} j)Z, jX) + g(jX, (\nabla_{jZ} j)Y) \\
& + g((\nabla_Y j)Z, X) - g(jX, j(\nabla_Z j)Y) \\
& = 2g((\nabla_X j)Y, Z) - g((\nabla_{jY} j)Z, jX) + g(jX, (\nabla_{jZ} j)Y) \\
& + g(j(\nabla_Y j)Z, jX) - g(jX, j(\nabla_Z j)Y).
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$g(jX, N(Y, Z)) = g(jX, (\nabla_{jY} j)Z) - (\nabla_{jZ} j)Y + j(\nabla_Z j)Y - j(\nabla_Y j)Z$$

$$= g(jX, (\nabla_{jY}j)Z) - g(jX, (\nabla_{jZ}j)Y) \\ + g(jX, j(\nabla_{jZ}j)Y) - g(jX, j(\nabla_{jY}j)Z)$$

olduğundan

$$2g((\nabla_{jX}j)Y, Z) - g(jX, N(Y, Z)) \\ = 2g((\nabla_{jX}j)Y, Z) - g(jX, (\nabla_{jY}j)Z) + g(jX, (\nabla_{jZ}j)Y) \\ - g(jX, j(\nabla_{jZ}j)Y) + g(jX, j(\nabla_{jY}j)Z).$$

Sonuç olarak

$$2g((\nabla_{jX}j)Y, Z) - g(jX, N(Y, Z)) \\ = 3d\emptyset(X, jY, jZ) - 3d\emptyset(X, Y, Z)$$

dır.

Teorem 1.3.2. M, j hemen hemen kompleks yapısı ve g Hermit metriği ile bir hemen hemen kompleks manifold olsun. ∇ kovaryant türev operatörü g ile tanımlı Riemann konneksiyonu olsun. O zaman aşağıdaki şartlar eşdeğerdir (Yano, K. and Kon, M., 1984) :

$$(a) \nabla j = 0;$$

$$(b) \nabla \emptyset = 0;$$

(c) Hemen hemen kompleks yapı torsiyonsuzdur ve \emptyset 2'inci temel form kapalıdır, yani $N = 0$ ve $d\emptyset = 0$ dir.

İspat. $\forall X, Y, Z \in X(M)$ için

$$(\nabla_X \emptyset)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X j)Z)$$

dir. Böylece $\nabla j = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla \emptyset = 0$ olmasıdır. Böylece $a \Leftrightarrow b$ dir.

$\nabla \emptyset = 0$ olsun. O zaman $d\emptyset = 0$ dır üstelik Lemma 3.1 den $N = 0$ olur.

Tersine, $N = 0$ ve $d\emptyset = 0$ olsun Lemma 3.1 gereğince $\nabla j = 0$ ve böylece $\nabla \emptyset = 0$ olur. Böylece $(b) \Leftrightarrow (c)$ dir.

Bir M hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermit metriği Kaehler metriğidir denir eğer \emptyset 2'inci temel form kapalı ise. Kaehler metrikli bir hemen hemen kompleks manifold M hemen hemen Kaehler manifoldu olarak adlandırılır. Kaehler

metrikli M kompleks manifoldu da Kaehler manifoldu olarak adlandırılır. Teorem 3.2. gereğince bir M Hermit manifoldunun Kaehler manifoldu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\nabla_j=0$ olmasıdır. j hemen hemen kompleks yapısıyla bir M Hermit manifoldu için

$$(\nabla_X j)Y + (\nabla_Y j)X = 0 \quad , \quad \forall X, Y \in X(M)$$

şartı sağlanırsa hemen hemen Kaehler manifoldu olarak adlandırılır. Bu eşitlikten $\forall X \in X(M)$ için $(\nabla_X j)X = 0$ yazabiliriz.

Eğer $\forall X, Y \in X(M)$

$$(\nabla_X j)Y + (\nabla_{jX})jY = 0$$

oluyorsa M bir quasi Kaehler manifoldu olur. M nin bir $\{e_1, \dots, e_n, je_1, \dots, je_n\}$ bazını alalım. O zaman

$$\delta \phi(x) = -\sum_{i=1}^n [(\nabla_{e_i} \phi)(e_i, X) + (\nabla_{je_i} \phi)(je_i, X)] \text{ dir.}$$

Eğer $\delta \phi = 0$ ise, M hemen hemen yarı Kaehler manifold $N = 0$ ise, bir yarı-Kaehler manifoldu olur (Yano, K. and Kon, M.,1984).

1.4. KAEHLER MANİFOLDLARI

M reel $2n$ boyutlu Kaehler manifoldu j hemen hemen kompleks yapısı ve g Kaehler metriğiyle verilsin. M nin Riemann eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü S ile gösterilsin.

Önerme 1.4.1. Bir M Kaehler manifoldu için aşağıdaki şartlar sağlanır (Yano, K. and Kon, M.,1984).

$$(a) \quad R(X, Y)j = jR(X, Y) \text{ ve } R(jX, jY) = R(X, Y) \quad \forall X, Y \in X(M).$$

$$(b) \quad S(jX, jY) = S(X, Y) \text{ ve } S(X, Y) = \frac{1}{2}(\text{Trace of } jR(X, jY)) \quad \forall X, Y \in X(M).$$

İspat: a) j paralel olduğu için birinci eşitlik sağlanır ikinci eşitliğe bakalım.

$$\forall X, Y, Z, W \in X(M)$$

$$\begin{aligned} g(R(jX, jY)Z, W) &= g(R(W, Z)jY, jX) = g(jR(W, Z)Y, jX) \\ &= g(R(W, Z)Y, X) = g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

Böylece $R(jX, jY) = R(X, Y)$ olur.

b) M nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
S(jX, jY) &= \sum_i g(R(e_i, jX) jY, e_i) \\
&= \sum_i g(R(je_i, jX) jY, je_i) = \sum_i g(R(e_i, X) jY, je_i) \\
&= \sum_i g(jR(e_i, X) Y, je_i) = \sum_i g(R(e_i, X) Y, e_i) \\
&= S(X, Y)
\end{aligned}$$

Birinci Bianchi özdeşliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
S(X, Y) &= \sum_i g(R(e_i, X) Y, e_i) = - \sum_i g(jR(e_i, X) jY, e_i) \\
&= \sum_i [g(jR(X, jY) e_i, e_i) + g(jR(jY, e_i) X, e_i)] \\
&= \sum_i [g(jR(X, jY) e_i, e_i) + g(jR(jY, je_i) X, je_i)] \\
&= \sum_i [g(jR(X, jY) e_i, e_i) + g(R(Y, e_i) X, e_i)] \\
&= -S(X, Y)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önerme 1.4.2. M Kaehler manifoldunun S Ricci tensörü

$$(\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_{jY} S)(jX, Z)$$

eşitliğini sağlar (Yano, K. and Kon, M., 1984).

İspat. Önerme 4.1 'deki (b) den ve 2'inci Bianchi özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z S)(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum_i g(j(\nabla_Z R)(X, jY) e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i g(j(\nabla_X R)(Z, jY) e_i, e_i) + \frac{1}{2} \sum_i g(j(\nabla_{jY} R)(X, Z) e_i, e_i) \\
&= (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_{jY} S)(jX, Z)
\end{aligned}$$

Önerme 1.4.3. M reel $2n$ -boyutlu bir Kaehler manifoldu olsun. Eğer M sabit eğrilikli ise. O zaman M flatdır (Yano, K. and Kon, M., 1984).

İspat. M nin sabit eğriligi C olsun. O zaman

$$R(X, Y)Z = c[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad \forall X, Y, Z, W \in X(M).$$

Önerme 4.1 deki (a) nin ikinci formülünden.

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Y &= c[g(Y, Y)X - g(X, Y)Y] \\
&= c[g(jY, Y)jX - g(jX, Y)jY]
\end{aligned}$$

$$= R(jX, jY)Y$$

buluruz, $(2n-1)cX = cX$ dır $n > 1$ için $c = 0$ olur.

1.5. DEĞME MANİFOLDLARI

Eğer bir $(2n + 1)$ -boyutlu M manifoldu üzerinde ve M nin heryerinde;

$$\eta \Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde global bir η 1-formu mevcut ise M bir değme yapıya sahiptir denir ve bir değme manifold olarak adlandırılır. Biz η yı M nin bir değme formu olarak adlandıracağız. Buradaki $(d\eta)^n$ ile n inci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani $(d\eta)^n = (d\eta) \wedge \dots \wedge (d\eta)$ dır (Yano, K. and Kon, M.,1984).

V^*, V vektör uzayına dual olmak üzere eğer dış çarpım, ΛV^* Grassman cebirinin bir θ kuadratik formu için

$$\theta^r \neq 0 \text{ ve } \theta^{r+1} = 0$$

şartlarını sağlıyorsa θ nın $2r$ ranklı olduğu söylenir. Buna eşdeğer olarak

$$\text{rank}\theta = \text{boy}V - \text{boy}V_0$$

dır, burada

$$V_0 = \{X: X \in V, \theta(X, V) = 0\}$$

dır, yani

$$V_0 = \{X \in V | (\forall Y)(Y \in V \Rightarrow \theta(X, Y) = 0)\}$$

dır. Buna ilaveten bir M değme manifoldu üzerinde

$$\eta \Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

denklemini gereğince $\Lambda T_M^*(P)$ Grassman cebirindeki $d\eta$ kuadratik formunun rank $2n$ dir. Bu durumda

$$V_0 = \{X: X \in T_M(P), d\eta(X, T_M(P)) = 0\}$$

altuzayı 1-boyutlu bir altuzaydır ve V_0 üzerinde $\eta \neq 0$ dır, diğer sözlerle V_0 altuzayı, $\eta = 0$ olacak şekildeki $2n$ boyutlu bir altuzayın tümleyenidir. $\xi_p \in V_0$ elemanı $\eta(\xi_p) = 1$ olacak şekilde V_0 nın bir elemanı olsun. O zaman ξ bir vektör alanıdır ve M üzerinde η

ile tanımlı, η ya karşılık gelen vektör alanı (η ya dual olan vektör alanı) adını alır ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan asla sıfır olamaz.

Teorem 1.5.1. Değme yapısı η olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Teorem 1.5.2. n -boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir 1-form W olsun. M üzerinde

$$W \wedge (dW)^P \neq 0$$

ve

$$(dW)^{P+1} = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman her bir noktanın bir komşuluğunda

$$W = dy^{P+1} - \sum_{i=1}^P y^i dx^i$$

olacak şekilde bir

$$(x^1, x^2, \dots, x^P, y^1, \dots, y^{n-P})$$

koordinat sistemi vardır (YANO ve KON, 1984).

Buradan şu sonucu kolayca çıkarabiliriz.

Sonuç 1.5.1. Bir $(2n+1)$ -boyutlu M değme manifoldunun her bir noktasının bir komşuluğu üzerinde

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

olacak şekilde

$$(x^i, y^i, z), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

koordinatları vardır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 1.5.3. $(2n+1)$ -boyutlu öklid uzayı \mathbb{R}^{2n+1} de

$$(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z)$$

kartezyen koordinatlarını alalım. \mathbb{R}^{2n+1} de bir 1-form η_0 olmak üzere,

$$\eta_0 = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

ile tanımlansın. O zaman,

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır. Burada η_0 'a \mathbb{R}^{2n+1} üzerinde bir değme formdur denir (Yano ve Kon, 1984).

$$\text{İspat: } \eta_0 = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 - \dots - y^n dx^n$$

$$d\eta_0 = -dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - \dots - dy^n \wedge dx^n$$

n-defa

$$d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0 = (-dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \dots - dy^n \wedge dx^n) \wedge$$

$$(-dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \dots - dy^n \wedge dx^n) \wedge \dots \wedge (-dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \dots - dy^n \wedge dx^n)$$

$$= (-1)^n [dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$+ dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$+ dy^3 \wedge dx^3 \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$+ dy^n \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^{n-1} \wedge dx^{n-1}]$$

$$= (-1)^n (n! dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n).$$

Yukarıda

$\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$dy^1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dy^i \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dy^j \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$= dy^1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dy^j \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dy^i \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

eşitliğini kullandık.

$$(d\eta_0)^n = \frac{1}{n!} (d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0)$$

$$= \frac{1}{n!} n! (-1)^n (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n)$$

ve

$$\eta_0 = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 - y^3 dx^3 - \dots - y^n dx^n$$

dan

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n = \frac{n! \cdot (-1)^n}{n!} (dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n)$$

buluruz.

$$dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge dx^n \neq 0$$

olduğundan da

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır.

Tanım 1.5.1. \mathbb{R}^{2n+1} in iki açık altcümlesi U ve U' olmak üzere bir

$$f: U \rightarrow U'$$

diffeomorfizmi için,

$$f^* \eta_0 = \tau \cdot \eta_0$$

ise f ye bir değme transformasyonu denir. Burada τ, U üzerinde sıfır olmayan reel değerli bir fonksiyondur.

Γ ile bütün değme dönüşümlerinin cümlesini tanımlayalım. O zaman Γ aşağıdaki anlamda bir grubumsudur, yani

i) eğer

$$f: U \rightarrow U' \text{ ve } g: V \rightarrow V'$$

değme transformasyonlar ve

$$U' \cap V \neq \emptyset$$

ise g ile f nin çarpımı olan $g \circ f$ fonksiyonu da

$$g \circ f: f^{-1}(U' \cap V) \rightarrow g(U' \cap V)$$

biçiminde bir diğer değme transformasyonudur.

ii) i deki işlem Γ da bileşimlidir.

iii) Γ nın her bir elemanının (i) deki işleme göre bir inversi vardır ve bu invers Γ da dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.5.2. Bir $f \in \Gamma$ değme transformasyonu için,

$$f^* \eta_0 = \eta_0$$

ise f ye bir kesin değme transformasyonu denir (YANO ve KON, 1984).

Sonuç 1.5.2. $f^*\eta_0 = \eta_0$ biçimindeki bütün f^* kesin değme transformasyonlarının cümlesi Γ_0 olsun. Γ_0 cümlesi Γ için bir alt grubumdur (YANO ve KON, 1984).

Teorem 1.5.4. Değme transformasyonlarının cümlesi çarpma işlemine göre bir grubumdur (Yano ve Kon, 1984).

İspat: Değme transformasyonları cümlesi

$$\Gamma = \{f|f: U \rightarrow U', U, U' \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{açıklar}, f^*\eta_0 = \tau \cdot \eta_0 \text{ ve } \tau \neq 0: U \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$i) o: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

dır (yani o işlemi kapalıdır): Yani $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$

$$(g, f) \rightarrow gof$$

dır.

$$f: U \rightarrow U', g: V \rightarrow V', U' \cap V \neq \emptyset$$

değme transformasyonları verilsin. Buna göre

$$f^*: (U')^* \rightarrow U^*, g^*: (V')^* \rightarrow V^*$$

dualleri için

$$f^*\eta_0 = \tau_0\eta_0, g^*\eta_1 = \tau_1\eta_1$$

dır. Buradaki τ_0, U da, τ_1 de V üzerinde reel değerli fonksiyonlardır.

Böylece

$$gof: f^{-1}(U' \cap V) \subset U \rightarrow g(U' \cap V) \subset V'$$

dönüşümünün de bir değme transformasyonu olduğunu şu şekilde görebiliriz:

$$(gof)^*: (g(U' \cap V))^* \rightarrow (f^{-1}(U' \cap V))^*$$

olur.

$$(gof)^*\eta_1 = \tau \cdot \eta_1$$

olduğunu gördüğümüz zaman gof de bir değme transformasyondur diyeceğiz.

$$(gof)^*\eta_1 = (f^*og^*)\eta_1 = f^*(g^*\eta_1) = f^*(\tau_1\eta_1) = \tau_0(\tau_1\eta_1) = (\tau_0\tau_1)\eta_1$$

dir. Burada $\tau_0\tau_1 = \tau$ konumu yapılırsa

$$(\text{gof})^* \eta_1 = \tau \cdot \eta_1$$

bulduğundan gof de bir değme transformasyonudur. Yani $\text{gof} \in \Gamma$ dir.

ii) (o) işlemi Γ da birleşimlidir:

$\forall f, g, h \in \Gamma$ için

$$(\text{fog})\text{oh} = \text{fo}(\text{goh})$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} [(\text{fog})\text{oh}]^*(\eta_0) &= [h^* \circ (\text{fog})^*](\eta_0) \\ &= [h^* \circ (g^* \circ f^*)](\eta_0) \\ &= h^*((g^* \circ f^*)(\eta_0)) \\ &= h^*(g^*(f^*\eta_0)) \end{aligned}$$

olup

$$f: U_0 \rightarrow V_0, \quad g: U_1 \rightarrow V_1, \quad h: U_2 \rightarrow V_2$$

$$V_0 \cap U_1 \neq \emptyset, \quad V_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

ve

$$f^*(\eta_0) = \tau_0 \eta_0, \quad g^*(\eta_1) = \tau_1 \eta_1, \quad h^*(\eta_2) = \tau_2 \eta_2$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} [(\text{fog})\text{oh}]^*(\eta_0) &= h^*(g^*(\tau_0 \eta_0)) \\ &= h^*(\tau_1(\tau_0 \eta_0)) \\ &= \tau_2(\tau_1(\tau_0 \eta_0)) \\ &= (\tau_2 \tau_1 \tau_0)(\eta_0) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} [\text{fo}(\text{goh})]^*(\eta_0) &= [(\text{goh})^* \circ f^*](\eta_0) \\ &= [(h^* \circ g^*) \circ f^*](\eta_0) \\ &= (h^* \circ g^*)(f^*\eta_0) \\ &= (h^* \circ g^*)(\tau_0 \eta_0) \\ &= h^*(g^*(\tau_0 \eta_0)) \end{aligned}$$

$$= h^*(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$

$$= \tau_2(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$

bulunur. $\forall \eta_0$ için

$$[(f \circ g) \circ h]^*(\eta_0) = [f \circ (g \circ h)]^*(\eta_0)$$

olduğundan $\forall f, g, h \in \Gamma$ için

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

dır. Yani (\circ) işlemi Γ da birleşimlidir.

iii) (\circ) işlemine göre $\forall f \in \Gamma$ için f nin tersi vardır ve $f^{-1} \in \Gamma$ dir. $\forall f \in \Gamma$, f bir lokal diffeomorfizm olduğundan öyle bir f^{-1} fonksiyonu vardır ki

$$f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$$

dir. Şimdi $f^{-1} \in \Gamma$ olduğunu gösterelim:

$I \in \Gamma$ birim değme transformasyon olduğundan $\forall \eta_0$ için

$$I^*\eta_0 = \eta_0$$

dir. Ayrıca $f \in \Gamma$ olduğundan $f(\eta_0) = \tau_0\eta_0$ olacak şekilde $\tau_0 \neq 0$ fonksiyonu vardır.

Buna göre,

$$(f \circ f^{-1})^*(\eta_0) = I^*(\eta_0)$$

$$[(f^{-1})^* \circ f^*](\eta_0) = I^*(\eta_0)$$

$$(f^{-1})^*(f^*(\eta_0)) = \eta_0$$

$$(f^{-1})^*(\tau_0\eta_0) = \eta_0$$

dir. O halde $\eta_1 = \tau_0\eta_0$ olmak üzere; $\tau_0 \neq 0$ olduğundan,

$$\eta_0 = \frac{1}{\tau_0}\eta_1$$

olup

$$(f^{-1})^*(\eta_1) = (\eta_0)$$

$$= \frac{1}{\tau_0}\eta_1$$

yazılabilir. O halde

$$f^{-1} \in \Gamma$$

dır. O halde $\forall f \in \Gamma$ için bir f^{-1} vardır ve $f^{-1} \in \Gamma$ dir.

Tanım 1.5.3. $\forall (i, j)$ çifti için f_{ij}

$$f_{ij} = f_i \cdot f_j^{-1}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\forall U_i, V_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ açıkları için

$$f_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

homeomorfizmleri verilmiş olsun. Ayrıca M nin bir açık örtüsü $\{U_i\}$ ve boy $M = (2n + 1)$ olsun. Eğer

$$f'_i \cdot f_j^{-1} \in \Gamma$$

ise

$$\{U_i, f_i\} \text{ ve } \{U'_i, f'_i\}$$

koordinat sistemleri (haritalar) denktirler denir. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının cümlesi M üzerinde en geniş anlamda bir değme yapı olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 1.5.3. $f_j(U_i \cap U_j)$

üzerinde

$$(f_i \cdot f_j^{-1})^*(\eta_0) = \rho_{ij}\eta_0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir ρ_{ij} fonksiyonu vardır (Yano ve Kon, 1984).

İspat: Gerçekten de $f_i \in \Gamma$ olduğundan $f_i^*\eta_0 = \tau_0\eta_0$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} (f_i f_j^{-1})^*(\eta_0) &= [(f_j^{-1})^* \cdot f_i^*] \eta_0 \\ &= (f_j^{-1})^*(f_i^* \eta_0) \\ &= (f_j^{-1})^*(\tau_0 \eta_0) \end{aligned}$$

dır. $f_j^{-1} \in \Gamma$ olduğundan da $(f_j^{-1})^* \eta_0 = \tau'_j \eta_0$ olup

$$\begin{aligned} (f_i f_j^{-1})^* \eta_0 &= \tau'_j (\tau_0 \eta_0) \\ &= (\tau'_j \tau_0) \eta_0 \end{aligned}$$

$$= \rho_{ij}\eta_0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\rho_{ij}\eta_0 = (f_i f_j^{-1})^* (\eta_0)$$

eşitliğinin her iki tarafına f_j^* yi uygularsak

$$\begin{aligned} f_j^*(\rho_{ij}\eta_0) &= [f_j^*(f_i f_j^{-1})^*] \eta_0 \\ &= [f_j^*((f_j^{-1})^* f_i^*)] \eta_0 \\ &= [(f_j^*(f_j^{-1})^*) f_i^*] \eta_0 \\ &= [(f_j^{-1} f_j)^* f_i^*] \eta_0 \\ &= [I^* f_i^*] \eta_0 \\ &= f_i^* \eta_0 \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 1.5.4. $f_j^*(\rho_{ij}\eta_0) = f_j^*(\rho_{ij})f_i^*(\eta_0)$ dır (Yano ve Kon, 1984).

İspat: f_j bir değme transformasyonu olduğundan U_j üzerinde reel değerli bir τ' fonksiyonu

$$f_j^*(\rho_{ij}\eta_0) = \tau'(\rho_{ij}\eta_0) \dots \dots \dots (*)$$

olacak şekilde vardır. τ_0 ve τ_1 yine U_j üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} (f_j^* \rho_{ij})(\rho) &= (\tau_0 \rho_{ij})(\rho) \\ &= \tau_0(\rho) \rho_{ij} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f_j^* \eta_0)(\rho) &= (\tau_1 \eta_0)(\rho) \\ &= \tau_1(\rho) \eta_0 \end{aligned}$$

olduğundan da

$$\begin{aligned} [(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)](\rho) &= (f_j^* \rho_{ij})(\rho)(f_j^* \eta_0)(\rho) \\ &= (\tau_0(\rho) \rho_{ij})(\tau_1(\rho) \eta_0) \end{aligned}$$

$$= \tau_0(\rho)\tau_1(\rho)\rho_{ij}\eta_0$$

$$= [(\tau_0 \tau_1)\rho_{ij}\eta_0](\rho)$$

$$[(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)](\rho) = [\tau'(\rho_{ij}\eta_0)](\rho) = f_j^*(\rho_{ij}\eta_0) \dots \dots \dots (**)$$

buluruz. Bu eşitlik $\forall P \in U_i$ için var olduğundan

(*) ve (**) dan

$$(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0) = \tau'(\rho_{ij} \eta_0)$$

$$= f_j^* \eta_0 = f_j^*(\rho_{ij} \eta_0)$$

elde edilir.

Sonuç 1.5.5. Eğer η_1 yi her U_i üzerinde

$$\eta = f_i^* \eta_0$$

olacak şekilde bir 1-form olarak tanımlarsak

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

üzerinde

$$\eta_i = f_j^*(\rho_{ij}) \eta_j$$

yazabiliriz (Yano ve Kon, 1984).

İspat: Bunu görebilmek için

$$f_i^* \eta_0 = (f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)$$

eşitliğinde $f_i^* \eta_0$ yerine η_i ve $f_j^* \eta_0$ yerine de η_j yazmamız yeterli olacaktır. Buna göre;

η_0 için

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

olduğundan

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

dır. Gerçekten de;

$$\eta_i = f_i^* \eta_0$$

olduğundan

$$d\eta_i = d(f_i^* \eta_0) = f_i^* (d\eta_0)$$

olup

$$\begin{aligned} (d\eta_i)^n &= \frac{1}{n!} (d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge \dots \wedge d\eta_i) \\ &= \frac{1}{n!} (f_i^* (d\eta_0) \wedge f_i^* (d\eta_0) \wedge \dots \wedge f_i^* (d\eta_0)) \\ &= \frac{1}{n!} f_i^* (d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0) \\ &= f_i^* \left[\frac{1}{n!} (d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0) \right] \\ &= f_i^* (d\eta_0)^n \end{aligned}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \eta_i \wedge (d\eta_i)^n &= (f_i^* \eta_0) \wedge (f_i^* (d\eta_0)^n) \\ &= f_i^* (\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n) \end{aligned}$$

olur. Bu ise f_i^* lineer ve

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

olduğundan

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

demektir

Tanım 1.5.4. $T(M) = \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ tanjant demetinin bir alt demeti D olsun.

$P \in U$ için D_P lifi de

$$D_P = \{X \in T_M(P) ; \eta_i(X) = 0\}$$

ile verilsin. Bir manifold üzerinde bir vektör demeti \mathbb{R}^n standart lif ile verilsin. Eğer

$GL(n, \mathbb{R})$ grubu ile birleştirilmiş asli lif demetinin grup yapısı, pozitif determinantlı matrislerin oluşturduğu ve $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu olan $GL^+(n, \mathbb{R})$ ye indirgenebilirse bu demet yönlendirilebilirdir denir (YANO ve KON, 1984).

burada $GL(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n, \det A \neq 0\}$ ve

$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n, \det A = +1\}$ dir.

Sonuç 1.5.6. D yönlendirilebilirdir(YANO ve KON, 1984).

İspat: $U_i \cap U_j$ üzerinde

$$\eta_i = \tau_{ij} \eta_j$$

alalım. O zaman

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n = \tau_{ij}^{n+1} (\eta_j \wedge (d\eta_j)^n)$$

dir, burada τ_{ij}^{n+1} , τ_{ij} koordinat dönüşümünün jakobiyenidir. Gerçekten de

$$d\eta_i = d(\tau_{ij} \eta_j) = \tau_{ij} d\eta_j$$

$$(d\eta_j)^n = \frac{1}{n!} (d\eta_j \wedge d\eta_j \wedge \dots \wedge d\eta_j)$$

$$= \frac{1}{n!} (\tau_{ij} d\eta_j \wedge \tau_{ij} d\eta_j \wedge \dots \wedge \tau_{ij} d\eta_j)$$

$$= \frac{1}{n!} \tau_{ij}^n (d\eta_j \wedge d\eta_j \wedge \dots \wedge d\eta_j)$$

$$(d\eta_i)^n = \tau_{ij}^n \left(\frac{1}{n!} d\eta_j \wedge d\eta_j \wedge \dots \wedge d\eta_j \right)$$

$$= \tau_{ij}^n (d\eta_j)^n$$

$$\eta_j \wedge (d\eta_j)^n = (\tau_{ij} \eta_j) \wedge (\tau_{ij}^n (d\eta_j)^n)$$

$$= \tau_{ij}^{n+1} (\eta_j \wedge (d\eta_j)^n)$$

olduğunu görmüş olduk. Böylece eğer n çift ve M yönlendirilebilir ise τ_{ij} pozitif olmalıdır ve bu yüzden D vektör demeti yönlendirilebilirdir.

Örnek 1.5.1. $(2n+1)$ -boyutlu bir öklid uzayı \mathbb{R}^{2n+1} olsun. O zaman

$$(x^i, y^i, z), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

kartezyen koordinatlar olmak üzere

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

1-formu \mathbb{R}^{2n+1} üzerinde bir değme formudur. O zaman ξ vektör alanı $\frac{\partial}{\partial z}$ dir.

Gerçekten

de

$$\eta(\xi) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \underbrace{dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)}_1 - \sum_{i=1}^n y^i \underbrace{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)}_0 = 1$$

olur

$n=2$ için

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\eta = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2$$

$$d\eta = -dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2$$

$$(d\eta)^2 = \frac{1}{2!} (d\eta \wedge d\eta)$$

$$= \frac{1}{2!} (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 + dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^1 \wedge dx^1)$$

$$= \frac{1}{2!} 2 \cdot dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2$$

dir.

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^2 &= (dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2) \wedge (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2) \\ &= dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

ve

$$dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \neq 0$$

olduğundan

$$\eta \wedge (d\eta)^2 \neq 0$$

olur.

Örnek 1.5.2. \mathbb{R}^{2n+1} nin $(2n+1)$ -boyutlu bir regüler hiperyüzeyi M olsun. (Örneğin her bir noktadaki C^∞ teğet düzlemi ile birlikte) $(x^1, x^2, \dots, x^{2n+2})$ Kartezyen koordinatları ile \mathbb{R}^{2n+2} de

$$\alpha = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots + x^{2n+1} dx^{2n+2} - x^{2n+2} dx^{2n+1}$$

ile tanımlı 1-formu dikkate alalım. O zaman

$$d\alpha = 2(dx^1 \wedge dx^2 + \dots + dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2})$$

olduğundan

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = 2^{n-1} n! \left[\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{2n+2} \right]$$

dır. Bunu $n=2$ hali için gösterelim.

\mathbb{R}^6 nin 5- boyutlu bir regüler hiperyüzeyi M olsun. $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$ kartezyen koordinatları ile \mathbb{R}^6 da

$$\alpha = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + x^3 dx^4 - x^4 dx^3 + x^5 dx^6 - x^6 dx^5$$

ile tanımlı 1-formu dikkate alalım. O zaman

$$d\alpha = dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^1 + dx^3 \wedge dx^4 - dx^4 \wedge dx^3 + dx^5 \wedge dx^6 - dx^6 \wedge dx^5$$

ve

$$dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$$

$$dx^3 \wedge dx^4 = -dx^4 \wedge dx^3$$

$$dx^5 \wedge dx^6 = -dx^6 \wedge dx^5$$

olduğundan

$$d\alpha = 2(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6)$$

olur.

$$\begin{aligned} (d\alpha)^2 &= \frac{1}{2!} (d\alpha \wedge d\alpha) \\ &= \frac{2^2}{2!} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6 \\ &\quad + dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 \\ &\quad + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^3 \wedge dx^4) \end{aligned}$$

ve

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6 = dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 = dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

olduğundan

$$(\mathrm{d}\alpha)^2 = \frac{1}{2!} 2^2 \cdot 2[\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6 + \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6]$$

dır.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^2 &= 4[x^1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6 \\ &- x^2 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6 + x^3 \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6 \\ &- x^4 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^6 \\ &+ x^5 \mathrm{d}x^6 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \\ &- x^6 \mathrm{d}x^5 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4] \end{aligned}$$

olur. \mathbb{R}^{2n+2} de

$$\alpha = x^1 \mathrm{d}x^2 - x^2 \mathrm{d}x^1 + x^3 \mathrm{d}x^4 - \dots + x^{2n+1} \mathrm{d}x^{2n+2} - x^{2n+2} \mathrm{d}x^{2n+1}$$

1-formu için

$$\mathrm{d}\alpha = 2(\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \dots + \mathrm{d}x^{2n+1} \wedge \mathrm{d}x^{2n+2})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n &= 2^{2n-1} n! [x^1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{2n+1} \wedge \mathrm{d}x^{2n+2} \\ &- x^2 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{2n+1} \wedge \mathrm{d}x^{2n+2} + \\ &x^3 \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^5 \wedge \dots \\ &\dots \wedge \mathrm{d}x^{2n+1} \wedge \mathrm{d}x^{2n+2} - \dots + x^{2n+1} \mathrm{d}x^{2n+2} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \dots \\ &\dots \wedge \mathrm{d}x^{2n} - x^{2n+2} \mathrm{d}x^{2n+1} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{2n-1} \wedge \mathrm{d}x^{2n}] \end{aligned}$$

olur.

M nin $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{2n+2})$ noktasındaki tanjant uzayını geren $(2n+1)$ tane lineer bağımsız vektörü $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$ ile gösterelim.

*; \mathbb{R}^{2n+2} de öklid metriğinin Hodge yıldız operatörünü göstermek üzere

$$W_j = * \mathrm{d}x^j(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n+1})$$

alalım. O zaman W_j bileşenleriyle bir W vektörü $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n+1}$ ile gerilmiş bir hiperyüze normal olur.

(.) \mathbb{R}^{2n+2} de bilinen skalar çarpımı göstermek üzer

$$(\alpha \wedge (d\alpha)^n)(v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}) = x_0 \cdot W$$

ifadesini de yazabiliriz.

Diğer taraftan, M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının deklemini

$$W \cdot (x - x_0) = 0$$

ile verilir. Bu yüzden, M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının orjinden geçmesi için gerek ve yeter koşul

$$W \cdot x_0 = 0$$

olmasıdır, yani x_0 da

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = 0$$

dır.

Bundan başka

$$\eta = i^* \alpha$$

olduğunu görürüz. M den \mathbb{R}^{2n+2} e bir immersiyon olan i dönüşümü

$$\eta \wedge (d\eta)^n = i^* (\alpha \wedge (d\alpha)^n)$$

eşitliğini sağlar. Gereğinden de ;

$$d\eta = d(i^* \alpha) = i^* d\alpha$$

iken

$$\begin{aligned} (d\eta)^n &= \frac{1}{n!} (d\eta \wedge \dots \wedge d\eta) \\ &= \frac{1}{n!} (i^* d\alpha \wedge \dots \wedge i^* d\alpha) \\ &= \frac{1}{n!} i^* (d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha) \\ &= i^* \left[\frac{1}{n!} (d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha) \right] \\ &= i^* (d\alpha)^n \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^n &= (i^* \alpha) \wedge (i^* (d\alpha)^n) \\ &= i^* (\alpha \wedge (d\alpha)^n) \end{aligned}$$

dır . Bu yüzden M nin x_0 noktasında

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$$

olması için gerek ve yeter koşul M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının \mathbb{R}^{2n+2} nin orjiniinden geçmemesidir (Gray, 1959).

Örnek 1.5.3. \mathbb{R}^{2n} de β' yı

$$\beta = \sum_{i=1}^n x^i dx^{n+i}$$

olarak ifade edelim $\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}^{2n}$ in $x^i = 0, i = 1, \dots, n$ ile belirlenmiş bir altuzayı ve \mathbb{R}_2^n de \mathbb{R}^{2n} in $x^j = 0, j = n+1, \dots, 2n$ ile belirlenmiş bir altuzayı olsun. O zaman β, \mathbb{R}^{2n} e daldırılmış $(2n-1)$ –boyutlu bir M hiperyüzeyi üzerinde bir değme formudur \Leftrightarrow

$$M \cap \mathbb{R}_1^n = \emptyset$$

dir.

$$\mathbb{R}^6 \text{ da } \beta = x^1 dx^4 + x^2 dx^5 + x^3 dx^6$$

1-formu için

$$d\beta = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^5 + dx^3 \wedge dx^6$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d\beta \wedge d\beta &= dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 + dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \\ &\quad + dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \\ &\quad + dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \\ &= 2[dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 + dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^6 + \\ &\quad dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6] \end{aligned}$$

$$(d\beta)^2 = \frac{2}{2!} [dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 + dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^6 + dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6]$$

$$\begin{aligned} \beta \wedge (d\beta)^2 &= x^1 dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 + \\ &\quad x^2 dx^5 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^6 + x^3 dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \end{aligned}$$

dır.

$$\mathbb{R}_1^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) \in \mathbb{R}^6 \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\}$$

olduğundan

$$M \cap \mathbb{R}_1^3 \neq \emptyset$$

olmasın $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ olacağından

$$\beta \wedge (d\beta)^2 = 0$$

olmasın karşılık gelir. Bu da β nın M üzerinde değme formu olmasıyla çelişir.

$$\mathbb{R}^{2n} \text{ de } \beta \text{ yi } \beta = x^1 dx^{n+1} + x^2 dx^{n+2} + \dots + x^n dx^{2n}$$

olarak alırsak

$$d\beta = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n}$$

olacağından

$$\begin{aligned} d\beta \wedge d\beta &= dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \\ &+ \dots + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} \\ &+ dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} + \dots \\ &+ dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} \\ &+ \dots + dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} + \\ &\dots + dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} + dx^n \wedge dx^{2n} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} + \\ &dx^n \wedge dx^{2n} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n} \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \\ d\beta \wedge d\beta &= 2(dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \\ &+ \dots + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} + dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \\ &+ dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^4 \wedge dx^{n+4} + \dots + dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} \\ &+ \dots + \\ &dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{d\beta \wedge d\beta \wedge \dots \wedge d\beta}_{(n-1)\text{-tane}} = 2.3 \dots (n-1) [dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots$$

$$\wedge dx^{n-2} \wedge dx^{2n-2} \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots$$

$$\wedge dx^{n-2} \wedge dx^{2n-2} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} + dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots$$

$$\wedge dx^{n-3} \wedge dx^{2n-3} \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n} + \dots +$$

$$dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n}$$

$$+ dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^n \wedge dx^{2n})$$

dır.

$$(d\beta)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} (d\beta \wedge \dots \wedge d\beta)$$

ve

$$\beta = x^1 dx^{n+1} + x^2 dx^{n+2} + \dots + x^n dx^{2n}$$

olduğundan da

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = x^1 dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dx^{2n}$$

$$+ x^2 \wedge dx^{n+2} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^3 \wedge dx^{n+3} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dx^{2n}$$

$$+ \dots +$$

$$x^{n-1} \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots \wedge dx^{n-2} \wedge dx^{2n-2}$$

$$\wedge dx^n \wedge dx^{2n} + x^n dx^{2n} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots$$

$$\wedge dx^{n-1} \wedge dx^{2n-1}$$

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = \sum_{i=1}^n x^i dx^{n+i} \wedge dx^1 \wedge dx^{n+1} \wedge dx^2 \wedge dx^{n+2} \wedge \dots$$

$$\wedge dx^{i-1} \wedge dx^{n+(i-1)} \wedge dx^{i+1} \wedge dx^{n+(i+1)} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dx^{2n}$$

olur.

$$\mathbb{R}_1^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}; x^i = 0, i = 1, \dots, n\}$$

olduğundan

$$M \cap \mathbb{R}_1^n \neq \emptyset$$

ise $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ olacağından

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = 0$$

olur. Bu ise β 'nin M üzerinde bir değme formu olmasıyla çelişir. O halde β , \mathbb{R}^{2n} 'e

daldırılmış $(2n - 1)$ -boyutlu bir M hiperyüzeyi üzerinde bir değme formu ise

$$M \cap \mathbb{R}_1^n = \emptyset$$

dır.

Örnek 1.5.4.: Şimdi en geniş anlamda bir değme manifold örneği vereceğiz.

n -boyutlu reel projektif uzay $\mathbb{R}P^{2n}$ ile gösterilmek üzere

$$M = \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}P^n$$

olsun.

$$(x^0, x^1, \dots, x^n)$$

\mathbb{R}^{n+1} deki koordinatlar ve

$$(t_0, t_1, \dots, t_n)$$

de $\mathbb{R}P^{2n}$ deki homogen koordinatlar olsunlar. M nin bir açık örtüsü de $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$, $t_i \neq 0$ olarak tanımlansın.

U_i içinde bir η_i 1-formunu da

$$\eta_i = \frac{1}{t_i} \sum_{j=0}^n t_j dx^j$$

ile tanımlayalım. O zaman;

$$\eta_i \wedge (\eta_i)^n \neq 0$$

dır. Gerçekten de ;

$$\eta_i = \frac{1}{t_i} (t_0 dx^0 + t_1 dx^1 + t_2 dx^2 + \dots + t_n dx^n)$$

1-formunu için

$$d\eta_i = \frac{1}{t_i} 2(dt_0 \wedge dx^0 + dt_1 \wedge dx^1 + dt_2 \wedge dx^2 + \dots + dt_n \wedge dx^n)$$

olduğundan

$$d\eta_i \wedge \eta_i = \frac{1}{t_i^2} 2(dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \dots +$$

$$\dots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \dots +$$

$$\dots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \dots +$$

$$\dots + dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n + \dots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \dots +$$

$$\dots + dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n)$$

ve

$$d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge d\eta_i = \frac{1}{t_i^3} 2.3. (dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \dots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \dots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n + \dots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \dots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n + \dots + dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n)$$

olup

$$(d\eta_i)^n = \frac{1}{n!} (d\eta_i \wedge \dots \wedge d\eta_i) = \frac{1}{n!} \frac{n!}{(t_i)^n} [dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \dots \wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_{n-3} \wedge dx^{n-3} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n + \dots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n]$$

dir. O halde

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n = \frac{1}{(t_i)^{n+1}} (t_0 dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_n \wedge dx^n + t_1 dx^1 \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dt_n \wedge dx^n + t_2 dx^2 \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dt_n \wedge dx^n + \dots + t_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_n \wedge dx^n + t_n \wedge dx^n \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1})$$

olur. Bu ise

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

olması demektir.





İKİNCİ BÖLÜM
ÜÇ BOYUTLU LOKAL \emptyset –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME
METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde Ricci tensörü η –paralel olan lokal \emptyset – simetrik üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları verdik. Önce 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldun lokal \emptyset – simetrik olması için gerek ve yeter şartı daha sonra $\alpha, \beta =$ sabit iken böyle bir manifoldda Ricci tensörü η –paralel ise manifoldun lokal \emptyset –simetrik olduğunu gördük. Son olarak da 3-boyutlu lokal \emptyset – simetrik normal hemen hemen değme metrik manifold örneği verdik.

$M, (\emptyset, \xi, \eta)$ hemen hemen değme yapısıyla bir hemen hemen değme manifold olsun. Burada \emptyset, ξ, η M üzerinde, sırasıyla $(1,1), (1,0), (0,1)$ tipinde tensör alanlarıdır öyle ki

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi \quad , \quad \eta(\xi) = 1.$$

Buradan $\phi \xi = 0$ ve $\eta \circ \phi = 0$ sonuçları çıkartılır

\mathbb{R} , reel sayı eksenini ve t, \mathbb{R}' nin bir koordinatı olsun. $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıyı

$$j \left(X, \lambda \frac{d}{dt} \right) = \left(\phi X - \lambda \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlayalım, burada $\left(X, \lambda \frac{d}{dt} \right)$ ile $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir tanjant vektör alanı gösterilmiştir.

Eğer j integrallenebilir ise M ve (\emptyset, ξ, η) normaldir denir. Yani (\emptyset, ξ, η) yapısının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

olmasıdır. Burada $[\phi, \phi], \phi'$ nin Nijenhuis torsiyon tensörüdür:

$$[\phi, \phi](X, Y) = [\phi X, \phi Y] + \phi^2[X, Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] .$$

Eğer $(d\eta)^s \neq 0$ ve $\eta \wedge (d\eta)^s = 0$ ise η 'nın rankı $r = 2s$ dir

Eğer $\eta \wedge (d\eta)^s \neq 0$ ise η 'nın rankı $r = 2s + 1$ 'dir. M üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (\forall X, Y \in X(M))$$

şartını sağlayan g Riemann metriğine (\emptyset, ξ, η) yapısıyla uyumludur denir. Eğer g böyle bir metrik ise $(\emptyset, \xi, \eta, g)$ yapısı bir hemen hemen değme metrik yapı olur. Üzerinde bir $(\emptyset, \xi, \eta, g)$ h.h.d, metrik yapısıyla M de bir hemen hemen değme metrik manifold olur. Eğer M 'nin boyutlu 3 ise, g ve g' metrikleri M üzerindeki (\emptyset, ξ, η) yapısıyla

uyumludurlar $\Leftrightarrow g' = \sigma g + (1 - \sigma)\eta \otimes \eta$ 'dır (burada σ, M üzerinde pozitif fonksiyondur).

$d\eta = \phi$ şartını sağlayan (ϕ, ξ, η, g) yapısı Sasakian 'dır ve rankı 3 'tür. $d\phi = 0$ şartını sağlayan yapı quasi -Sasakian 'dır (Blair,1997).

Olszak, 3-boytluk normal h.h.d. manifoldun eğrilik özelliklerini çalıştı (olszak, 1986) .

Takahashi bir Sasakian manifold için locally ϕ -Symmetry notasyonunu verdi ve Değme geometrisinde ϕ - simetri notasyonu (Boeckx, buecken ve vonhecke, 1999). tarafından tanımlanıp çalışıldı.

M üzerinde bir hemen hemen Değme yapı (hemen hemen Değme metrik yapı) aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(\phi \nabla_X \xi, Y)\xi - \eta(Y)\phi \nabla_X \xi \quad (2.1)$$

$$\nabla_X \xi = \alpha\{X - \eta(X)\xi\} - \beta\phi X \quad (2.2)$$

burada $2\alpha = \text{div } \xi$ ve $2\beta = \text{tr}(\phi \nabla \xi)$,

$\text{div } \xi$, ξ nin divergensi olup $\text{div } \xi = \text{trace } \{X \rightarrow \nabla_X \xi\}$ ve $\text{tr}(\phi \nabla \xi) = \text{trace } \{X \rightarrow \phi \nabla_X \xi\}$ ile gösterilir

$$R(X, Y)\xi = \{Y\alpha + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\phi^2 X - \{X\alpha + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)\}\phi^2 Y \\ + \{Y\beta + 2\alpha\beta\eta(Y)\}\phi X - \{X\beta + 2\alpha\beta\eta(X)\}\phi Y \quad (2.3)$$

$$S(Y, \xi) = -Y\alpha - (\phi Y)\beta - \{\xi\alpha + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}\eta(Y), \quad (2.4)$$

$$\xi\beta + 2\alpha\beta = 0 \quad (2.5)$$

burada R eğrilik tensörünü, S de Ricci operatörünü gösterir.

Diğer yönden, 3-boyutta eğrilik tensörü

$$\tilde{R} = (X, Y, Z, W) = g(X, W) S(Y, Z) - g(X, Z) S(Y, W) + g(Y, Z) S(X, W) \\ - g(Y, W) S(X, Z) - \frac{r}{2}[g(X, W) g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)] \quad (2.6)$$

burada $\tilde{R} = (X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ve r skalar eğriliktir

$$\tilde{R}(\xi, Y, Z, \xi) = -\tilde{R}(\xi, Y, \xi, Z) = -g(R(\xi, Y)\xi, Z) \\ = -g(\{Y\alpha + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\phi^2 \xi - \{\xi\alpha + (\alpha^2 - \beta^2)\}\phi^2 Y$$

$$\begin{aligned}
& +\{Y\beta + 2\alpha\beta\eta(Y)\}\phi\xi - \{\xi\beta + 2\alpha\beta\}\phi Y, Z) \\
\tilde{R}(\xi, Y, Z, \xi) &= g(\{\xi\alpha + (\alpha^2 - \beta^2)\}\phi^2 Y, Z) + g(\{\xi\beta + 2\alpha\beta\}\phi Y, Z) \\
\tilde{R}(\xi, Y, Z, \xi) &= -(\xi\alpha + (\alpha^2 - \beta^2))g(\phi Y, \phi Z) \\
& -(\xi\beta + 2\alpha\beta)g(Y, \phi Z). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

(2.4), (2.6) ve (2.7) den $\alpha = \text{sabit}$ ve $\beta = \text{sabit}$ olmasını kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(\xi, Y, Z, \xi) &= g(\xi, \xi)S(Y, Z) - g(\xi, Z)S(Y, \xi) + \\
& g(Y, Z)S(\xi, \xi) - g(Y, \xi)S(\xi, Z) \\
& -\frac{r}{2}[g(\xi, \xi)g(Y, Z) - g(\xi, Z)g(Y, \xi)] \\
& = S(Y, Z) - \eta(Z)(-2(\alpha^2 - \beta^2))\eta(Y) \\
& +g(Y, Z)(-2(\alpha^2 - \beta^2)) - \eta(Y)\eta(Z)(-2(\alpha^2 - \beta^2)) \\
& -\frac{r}{2}[g(Y, Z) - \eta(Z)\eta(Y)] \\
& = S(Y, Z) + 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z) \\
& -2(\alpha^2 - \beta^2)g(Y, Z) - \frac{r}{2}g(\phi Y, \phi Z) + 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z) \\
& = S(Y, Z) - 2(\alpha^2 - \beta^2)g(\phi Y, \phi Z) - \frac{r}{2}g(\phi Y, \phi Z) \\
& +2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z) - (\alpha^2 - \beta^2)g(\phi Y, \phi Z) \\
& +\{2(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{r}{2}\}g(\phi Y, \phi Z) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z) \\
& = S(Y, Z) \\
S(Y, Z) &= \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right)g(\phi Y, \phi Z) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

(2.8) 'i, (2.6) da kullanırsak

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y, Z, W) &= g(X, W)\left\{\left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right)g(Y, Z) - \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. \beta^2)\right)\eta(Y)\eta(Z)\right\} \\
& -g(X, Z)\left\{\left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right)g(Y, W) - \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\eta(W)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(Y, Z) \left\{ \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 \right) g(X, W) - \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\eta(W) \right\} \\
& -g(Y, W) \left\{ \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 \right) g(X, Z) - \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\eta(Z) \right\} \\
& -\frac{r}{2}g(X, W)g(Y, Z) + \frac{r}{2}g(X, Z)g(Y, W) \\
& = \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 + \frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 - \frac{r}{2} \right) g(X, W)g(Y, Z) \\
& - \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2 \right) g(X, Z)g(Y, W) \\
& \quad -g(X, W) \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(Y)\eta(Z) \\
& \quad +g(X, Z) \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(Y)\eta(W) \\
& \quad -g(Y, Z) \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\eta(W) \\
& \quad +g(Y, W) \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\eta(Z) \\
R(X, Y)Z & = \left(\frac{r}{2} + 2(\alpha^2 - \beta^2) \right) (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\
& +g(X, Z) \left(\left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(Y)\xi \right. \\
& \left. - \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(Y)\eta(Z)X \right. \\
& \left. -g(Y, Z) \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\xi \right. \\
& \left. + \left(\frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right) \eta(X)\eta(Z)Y \right) \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Eğer $\alpha, \beta =$ sabit ise, o zaman manifold ya $\beta -$ Sasakian, ya $\alpha -$ Kenmostsu ya da Kosimplektiktir (Blair, 1976).

Önerme 2.1. Bir 3-boyutlu normal hemen hemen Değme manifold $\alpha, \beta =$ st ise ya $\beta -$ Sasakian ya $\alpha -$ Kenmostsu ya da Kosimplektik'tir

$\beta -$ Sasakian manifoldlar quasi-Sasakin dir (Blair, 1967).

2.1. ÜÇ BOYUTLU LOKAL \emptyset –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1. Bir normal hemen hemen Değme metrik manifold Lokal \emptyset –simetrik dir denir, eğer

$$\phi^2(\nabla_W R)(X, Y)Z = 0$$

ise, burada W, X, Y, Z vektör alanları ξ ye ortogonaldir (Bu notasyon Takahashi tarafından Saskian manifoldlar için verilmiştir) (Takahashi, 1977).

3-boyutlu normal hemen hemen Değme manifoldu düşünelim. (6.9) 'un W yönünde kovaryant türevini alalım ve $\alpha, \beta =$ sabit kabul edelim.

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X, Y)Z &= \frac{dr(w)}{2} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ &+ g(X, Z) \left[\frac{dr(w)}{2} \eta(Y)\xi + \left\{ \frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right\} \{(\nabla_W \eta)(Y)\xi - \eta(Y)\nabla_W \xi\} \right] \\ &- g(Y, Z) \left[\frac{dr(w)}{2} \eta(X)\xi + \left\{ \frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right\} \{(\nabla_W \eta)(X)\xi - \eta(X)\nabla_W \xi\} \right] \\ &- \left[\frac{dr(w)}{2} \eta(Y)\eta(Z)X + \left\{ \frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right\} \{(\nabla_W \eta)(Y)\eta(Z)X + \right. \\ &\left. \eta(Y)(\nabla_W \eta)(Z)X\} \right] \\ &+ \left[\frac{dr(w)}{2} \eta(X)\eta(Z)Y + \left\{ \frac{r}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right\} \{(\nabla_W \eta)(X)\eta(Z)Y - \right. \\ &\left. \eta(X)(\nabla_W \eta)(Z)Y\} \right] \end{aligned}$$

Lokal \emptyset –simetri için X, Y, Z, W, ξ ye ortogonal alınacağından

$$\begin{aligned} \phi^2(\nabla_W R)(X, Y)Z &= \frac{dr(w)}{2} [g(Y, Z)(-X) - g(X, Z)(-Y)] \\ &= -\frac{dr(w)}{2} [g(Y, Z)(X) - g(X, Z)(Y)] \end{aligned}$$

elde edilir

$$\phi^2 = (\nabla_W R)(X, Y)Z = 0 \iff r \text{ skalar eğriliği sabittir.}$$

Teorem 2.1.1. Bir 3-boyutlu normal almost contact metrik manifold lokal \emptyset –simetrik dir ancak ve ancak α ve β sabit olmak üzere skalar eğrilik sabittir.

Sonuç 2.1.1. Bir 3-boyutlu β –Saskian manifoldu lokal \emptyset –simetrik dir ancak ve ancak skalar eğrilik sabittir.

Özet olarak $\beta = 1$ ise β –Sasakian manifoldu Sasakian manifoldu olur.

Sonuç 2.1.2. Bir 3-boyutlu Sasakian manifoldu lokal \emptyset –simetriktir ancak ve ancak skalar eğrilik sabittir (watanabe, 1980).

Benzer sonuçlar α –Kenmotsu ve Kosimplektik manifold için de verilebilir $\alpha = 1$ ise α –Kenmotsu manifoldu Kenmotsu manifold olur.

Sonuç 2.1.3. Bir 3-boyutlu Kenmotsu manifoldu lokal \emptyset –simetriktir ancak ve ancak skalar eğrilik sabittir (Pathak, 2004).

2.2. η – PARALEL RİCCİ TENSÖRÜ

Tanım 2.2.1. Bir hemen hemen Değme metrik manifoldun S Ricci tensörü (Kon, 1976).

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z)Z = 0$$

eşitliğini sağlar ise η – paralel 'dir denir. ($\forall X, Y, Z$ için)

3-boyutlu normal hemen hemen Değme manifoldu düşünelim

$$S(Y, Z) = \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) g(\phi Y, \phi Z) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(Z)$$

eşitliğinde Y yerine ϕY , Z yerine ϕZ alırsak

$$\begin{aligned} S(\phi Y, \phi Z) &= \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) g(-Y + \eta(Y)\xi - Z + \eta(Z)\xi) \\ &\quad - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(\phi Y)\eta(\phi Z) \\ &= \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) (g(Y, Z) - \eta(Z)\eta(Y) - \eta(Y)\eta(Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned}$$

ya da

$$S(\phi Y, \phi Z) = \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) (g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z))$$

olur. X yönünde kovaryant türevini alırsak

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = \frac{dr(x)}{2} (g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z))$$

$$- \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) [(\nabla_X \eta)(Y)\eta(Z) + \eta(Y)(\nabla_X \eta)(Z)].$$

Farz edelim ki S Ricci tensörü η –Paralel olsun o zaman $(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0$ olduğundan

$$\frac{dr(x)}{2} [g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(z)] - \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) [(\nabla_X \eta)(Y)\eta(z) + \eta(Y)(\nabla_X \eta)(z)] = 0$$

$$\text{olur } Y = Z = e_i \quad \text{alalım} \quad (1 \leq i \leq 3)$$

$$\frac{dr(x)}{2} [g(e_i, e_i) - \eta(e_i)\eta(e_i)] - \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right)$$

$$[(\nabla_X \eta)(e_i)\eta(e_i) + \eta(e_i)(\nabla_X \eta)(e_i)] = 0$$

$$2 \cdot \frac{dr(x)}{2} - \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) (2(\nabla_X \eta)(\xi)) = 0$$

$$dr(x) - 2 \left(\frac{r}{2} + \alpha^2 - \beta^2\right) (\nabla_X \eta)(\xi) = 0$$

$$(\nabla_X \eta)(\xi) = \nabla_X(\eta(\xi)) - \eta(\nabla_X \xi) = -\eta(\alpha(\xi X - \eta(X)\xi) - \beta \phi X)$$

$$= -\eta(\alpha X - \alpha \eta(X)\xi - \beta \phi X)$$

$$= -\eta(\alpha X) + \alpha \eta(X) + \beta \eta(\phi X)$$

$$= -\alpha \eta(X) + \alpha \eta(X) = 0$$

$$(\nabla_X \eta)\xi = 0 \text{ olduğundan } dr(x) = 0 \text{ olur yani } r = \text{st 'dır}$$

Teorem 2.2.1. η –Paralel Ricci tensörlü bir 3-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldunda (α ve β sabit) skalar eğrilik sabittir.

Sonuç 2.2.1. Bir 3-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldunda α, β sabit olmak üzere Ricci tensörü η –Paralel ise Lokal ϕ –simetriktir.

2.3. ÜÇ BOYUTLU LOKAL ϕ –SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLD ÖRNEĞİ

3-boyutlu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | Z \neq 0\}$ manifoldunu alalım, burada $(x, y, z), \mathbb{R}^3$ ün standart koordinatlarıdır. Vektör alanlarını da

$$e_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = Z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = Z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{olarak seçelim.}$$

(bu vektör alanları M 'nin her noktasında lineer bağımsızdırlar) g Riemann metriği de aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$g(e_1, e_3) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

$$\eta(z) = g(z, e_3) , \quad \forall z \in X(M)$$

$$\phi(e_1) = -e_2 , \phi(e_2) = e_1 , \quad \phi(e_3) = 0$$

$$z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 , \quad z = (z_1, z_2, z_3) , w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$$

$$\phi(z) = \phi(z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) = z_1 \phi(e_1) + z_2 \phi(e_2) + z_3 \phi(e_3)$$

$$\phi z = -z_1 e_2 + z_2 e_1 = (z_2, -z_1, 0)$$

$$\phi w = -w_1 e_2 + w_2 e_1 = (w_2, -w_1, 0)$$

$$\phi^2 z = -z_1 \phi(e_2) + z_2 \phi(e_1) = -z_1 e_1 + z_2 e_2 = (-z_1, -z_2, 0)$$

$$\phi^2 z = -z_1 e_1 - z_2 e_2 = -z_1 e_1 - z_2 e_2 - z_3 e_3 + z_3 e_3$$

$$\phi^2 z = -z + \eta(z) e_3$$

$$\eta(e_3) = g(e_3, e_3) = 1$$

$$g(\phi z, \phi w) = g(z_2 e_1 - z_1 e_2, w_2 e_1 - w_1 e_2) = z_2 w_2 + z_1 w_1$$

$$g(z, w) = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$$

$$\eta(z) \eta(w) = g(z, e_3) g(w, e_3) = z_3 w_3$$

$$g(\phi z, \phi w) = g(z, w) - \eta(z) \eta(w)$$

O zaman $e_3 = \xi$ için (ϕ, ξ, η, g) yapısı bir hemen hemen değme metrik yapı olur (M üzerinde).

$$[e_1, e_2] = 0 , [e_1, e_3] = -e_1 , [e_2, e_3] = -e_2 \text{ dir}$$

$$[e_1, e_2](f) = e_1(e_2 f) - e_2(e_1 f) = \left(z \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(z \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(z \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(z \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$[e_1, e_3] = e_1(e_3 f) - e_3(e_1 f) = \left(z \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(z \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(z \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - z \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$[e_1, e_3] = -z \frac{\partial}{\partial x} = -e_1$$

$$[e_2, e_3](f) = e_2(e_3 f) - e_3(e_2 f) = z \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial f}{\partial z}\right) - z \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - z \frac{\partial}{\partial y} (f)$$

$$[e_2, e_3] = -z \frac{\partial}{\partial y} = -e_2$$

Kozsul formülü kullanılarak:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y)$$

$$-g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) = -g(e_1, [e_3, e_1]) - g(e_3, [e_1, e_1]) + g(e_1, [e_1, e_3])$$

$$= -g(e_1, e_1) - g(e_1, e_1) = -2g(e_1, e_1) = 2g(-e_1, e_1)$$

$$= 2g(-e_1, e_1) + 2g(-e_2, e_1) = 2g(-e_1 - e_2, e_1)$$

$$\nabla_{e_1} e_3 = -e_1 - e_2 \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_2} e_3, e_2) = -g(e_2, [e_3, e_2]) - g(e_3, [e_2, e_2]) + g(e_2, [e_2, e_3])$$

$$= -g(e_2, e_2) - g(e_2, e_2)$$

$$= -2g(e_2, e_2) = 2g(-e_2, e_2) + 2g(e_1, e_2)$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = e_1 - e_2 \quad , \quad \nabla_{e_3} e_2 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_3) = -g(e_1, [e_2, e_3]) - g(e_2, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_2]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_2) = -g(e_1, 0) + g(e_2, 0) - g(e_2, [e_1, e_2]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_1) = -g(e_1, [e_2, e_1]) - g(e_2, [e_1, e_1]) + g(e_1, [e_1, e_2]) = 0$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0 \quad , \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_2) = -g(e_1, [e_2, e_2]) - g(e_2, [e_1, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_2]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_3) = -g(e_1, [e_2, e_3]) \quad -g(e_2, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_2])$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_1, e_3) = -g(e_1, [e_1, e_3]) - g(e_1, [e_1, e_3]) + g(e_3, [e_1, e_1])$$

$$= g(e_1, e_1) + g(e_1, e_1) = 2g(e_1, e_1) = 2g(e_3, e_3)$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_3$$

$$\nabla_X \xi = \alpha \{x - \eta(x)\xi\} - \beta \phi x \quad \alpha = -1 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad e_3 = \xi$$

$$\phi x = \phi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = -x_1 e_2 + x_2 e_1$$

$$\nabla_X \xi = -\{x - \eta(x)\xi\} + \phi x = -x + \eta(x)\xi + \phi x$$

$$\nabla_{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3} e_3 = x_1 \nabla_{e_1} e_3 + x_2 \nabla_{e_2} e_3 + x_3 \nabla_{e_3} e_3$$

$$\nabla_x e_3 = x_1(-e_1 + e_2) + x_2(e_1 - e_2) + x_3 \cdot 0 = (x_2 - x_1)e_1 + (x_1 - x_2)e_2$$

$$\begin{aligned} -x + \eta(x)e_3 + \phi x &= -x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 + x_3 e_3 + x_2 e_1 - x_1 e_2 \\ &= (x_2, -x_1)e_1 - (x_1, -x_2)e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_2} e_2, e_3) &= -g(e_2, [e_2, e_3]) - g(e_2, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_2, e_2]) \\ &= g(e_2, e_2) + g(e_2, e_2) = 2g(e_3, e_3) \end{aligned}$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = e_3$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_1, e_1) = -g(e_3, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_1]) = 0$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3} e_1, e_2) &= -g(e_3, [e_1, e_2]) - g(e_1, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_1]) \\ &= -g(e_3, 0) - g(e_1, e_2) + g(e_2, e_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3} e_1, e_3) &= -g(e_3, [e_1, e_3]) - g(e_1, [e_3, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_1]) \\ &= -g(e_3, -e_1) + g(e_3, e_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_2, e_1) = -g(e_3, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_1]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_2, e_2) = -g(e_3, [e_2, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_2]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_2, e_3) = -g(e_3, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_3]) = 0$$

$$\nabla_{e_3} e_2 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_2} e_1, e_1) = -g(e_2, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_2, e_1]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) = -g(e_2, [e_1, e_2]) - g(e_1, [e_2, e_2]) + g(e_2, [e_2, e_1]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_2} e_1, e_3) = -g(e_2, [e_1, e_3]) - g(e_1, [e_2, e_3]) + g(e_3, [e_2, e_1]) = 0$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = 0$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_2, e_1) = -g(e_3, [e_2, e_1]) - g(e_2, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_2]) = 0$$

$$2g(\nabla_{e_3} e_2, e_2) = -g(e_3, [e_2, e_2]) - g(e_2, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_2]) = 0$$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_3} e_2, e_3) &= -g(e_3, [e_2, e_3]) - g(e_2, [e_3, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_2]) \\
&= -g(e_3, -e_2) + g(e_3, e_2) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ eşitliği kullanılarak da

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 \\
&= \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{e_2} 0 = -e_2 - e_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_3, e_2)e_2 &= \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_2 - \nabla_{[e_3, e_2]} e_2 \\
&= \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_2} 0 - \nabla_{e_2} e_2 \\
&= 0 - e_3 = -e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(e_2, e_2) &= g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) + g(R(e_3, e_2)e_2, e_3) \\
&= g(-e_2 - e_1, e_1) + g(-e_3, e_3) \\
&= -1 - 1 = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_3)e_3 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_3]} e_3 \\
&= \nabla_{e_1} 0 - \nabla_{e_3} (-e_2 - e_1) - \nabla_{-e_1} e_3 \\
&= \nabla_{e_3} e_2 + \nabla_{e_3} e_1 + \nabla_{e_1} e_3 \\
&= 0 + 0 + (-e_1 - e_2) \\
&= -e_1 - e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_2, e_3)e_3 &= \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{[e_2, e_3]} e_3 \\
&= \nabla_{e_2} 0 - \nabla_{e_3} (e_1 - e_2) - \nabla_{-e_2} e_3 \\
&= -\nabla_{e_3} e_1 + \nabla_{e_3} e_2 + \nabla_{e_2} e_3 \\
&= e_1 - e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(e_3, e_3) &= g(R(e_1, e_3)e_3, e_1) + g(R(e_2, e_3)e_3, e_2) \\
&= g(-e_1, e_1) - g(e_2, e_1) + g(e_1, e_2) - g(e_2, e_2) \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_2, e_1)e_1 &= \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{[e_2, e_1]} e_1 \\
&= \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_1} 0 = e_1 - e_2
\end{aligned}$$

$$g(R(e_2, e_1)e_1, e_2) = g(e_1 - e_2, e_2) = -g(e_2, e_2) = -1$$

$$\begin{aligned} R(e_3, e_1)e_1 &= \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_1 - \nabla_{[e_3, e_1]} e_1 \\ &= \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_1} 0 - \nabla_{e_1} e_1 = -e_3 \end{aligned}$$

$$g(R(e_3, e_1)e_1, e_3) = g(-e_3, e_3) = -1$$

$$\begin{aligned} S(e_1, e_1) &= g(R(e_2, e_1)e_1, e_2) + g(R(e_3, e_1)e_1, e_1) \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

olduğu görülür (De, Yıldız ve Yalınız, 2009).





ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
FİNSLER MANİFOLDLARI

$(2m + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir C^∞ manifold M olsun. M manifoldunun tanjant manifoldu TM olmak üzere sıfırdan farklı tanjant vektör demeti

$\pi: TM \rightarrow M$ ile verilir. TM nin (x, y) noktasındaki $X \in T_{(x,y)}(TM)$ vektörü eğer $\pi^*x = 0$ ise dikey vektör olarak adlandırılır. $T_{(x,y)}(TM)$ 'nin bütün dikey vektörlerinin cümlesi $T_{(x,y)}^v(TM)$ ile gösterilen dikey alt uzayıdır ki bu alt uzay $x \in M$ noktası için $\pi^{-1}(x)$ fibresinin tanjant uzayıdır. M üzerindeki bir N non-lineer konneksiyonu

$$(x, y) \in TM \rightarrow N_{(x,y)} \subset T_{(x,y)}(TM)$$

şeklinde tanımlı bir distribüsyon olup

$$T_{(x,y)}(TM) = N_{(x,y)} \oplus T_{(x,y)}^v(TM)$$

eşitliğini sağlar yani $T_{(x,y)}^v(TM)$ dikey, $N_{(x,y)}$ de yatay distribüsyonları gösterir. (B, B, Sinha, R, K, yadav, 1991).

TM 'nin $\pi(M^\circ) = M$ ve $\theta(M) \cap M^\circ = \phi$ olacak şekildeki boş olmayan bir açık alt manifoldu M° ile gösterilsin, burada θ ile TM nin sıfır kesiti gösterilmiştir.

$M_x^\circ = T_x M \cap M^\circ$ pozitif konik set, yani $\forall k > 0$ için ve $\forall y \in M_x^\circ$ için $ky \in M_x^\circ$ 'dir (A.Bejanu, H. R. Farran, 2013).

$F: M^\circ \rightarrow (0, \infty)$ düzgün fonksiyonu verilsin. M° üzerindeki her $\{(U, \Phi): x^1, y^1\}$ koordinat sistemi için aşağıdaki koşullar sağlanır:

(F_1) F fonksiyonunun (y^1, \dots, y^{2m+1}) 'e göre pozitif homojenlik derecesi 1 'dir, yani

$$F(x^1, \dots, x^{2m+1}, ty^1, \dots, ty^{2m+1}) = t F(x^1, \dots, x^{2m+1}, y^1, \dots, y^{2m+1})$$

$$\forall (x, y) \in \Phi(U) \text{ ve } t > 0 \text{ için} \quad (3.1)$$

$$(F_2) \quad g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, \quad i, j \in \{1, \dots, 2m + 1\}, \quad \forall (x, y) \in \Phi(U) \quad (3.2)$$

g_{ij} 'ler \mathbb{R}^{2n+1} de pozitif tanımlı kuadratik formun bileşenleridir.

$F^{2m+1} = (M, M^\circ, F)$ üçlüsü eğer (F_1) ve (F_2) şartlarını sağlarsa Finsler manifold olarak adlandırılır, burada F fonksiyonun F^{2m+1} Finsler manifoldunun temel fonksiyonudur.

$\pi: M^\circ \rightarrow M$ submersiyonunun $\pi_*: TM^\circ \rightarrow TM$ tanjant dönüşümünü düşünelim ve $(TM^\circ)^v = \ker \pi_*$ alalım $U \subset M^\circ$ koordinat komşuluğu üzerinde lokal koordinatlar

$\pi^i(x, y) = x^i$ olduğundan

$$\pi_*^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i \text{ ve } \pi_*^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = 0$$

olur. $\Gamma(TM^\circ)^v$ demetinin bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}$ dır ve M° üzerinde rankı $2n + 1$ olan integrallenebilir distribüsyon olan $(TM^\circ)^v$ demeti F^{2n+1} Finsler manifoldunun dikey vektör demeti olarak adlandırılır. TM° üzerinde $(TM^\circ)^v$ dikey vektör demetinin tamamlayıcı distribüsyonu olan $(TM^\circ)^h, M^\circ$ üzerinde yatay distribüsyon (non-linear konneksiyon) olarak adlandırılır. Böylece

$$TM^\circ = (TM^\circ)^h \oplus (TM^\circ)^v$$

yazılır. O zaman $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x^{2n+1}} \right\}$ lokal vektör alanları

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^j}$$

şeklinde olup $\Gamma(TM^\circ)^h$ da bir bazdır $(dx^i, \delta y^j)$ dual bazları da

$$\delta y^j = dy^j + N_i^j(x, y) dx^i$$

şeklindedir. $\forall X \in TM^\circ$ için

$$X = X^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{X}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

O zaman

$$X^H = X^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad X^V = \tilde{X}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \tilde{X}^i = X^i + N_j^i X^j \text{ 'dir.}$$

Açıkçası $(M^\circ)^h \subset M^\circ$ alt demeti için $\tilde{X}^i(x, y) = 0$ ve $(M^\circ)^v \subset M^\circ$ alt demeti için $X^i(x, y) = 0$ 'dir

3.1. HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER MANİFOLDLARI

M° üzerinde ϕ tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-formu için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\phi = \phi^H + \phi^V = \phi_j^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\phi}_j^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^j \quad (3.3)$$

$$\eta = \eta^H + \eta^V = \eta_i(x, y) dx^i + \tilde{\eta}_i(x, y) \delta y^i \quad (3.4)$$

$$\xi = \xi^H + \xi^V = \xi^i(x, y) \frac{\delta}{\delta x^i} + \xi^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.5)$$

(3.3), (3.4) ve (3.5) deki gibi tanımlanmış olan ϕ, ξ, η için

$$(\phi^H)^2 = -I^H + \eta^H \otimes \xi^H, \quad (\phi^V)^2 = -I^V + \eta^V \otimes \xi^V \quad (3.6)$$

$$\eta^H(\xi^H) = \eta^V(\xi^V) = 1 \quad (3.7)$$

Şartları sağlanıyorsa (ϕ^H, ξ^H, η^H) üçlüsü $(M^\circ)^h$ üzerinde (ϕ^V, ξ^V, η^V) üçlüsü de $(M^\circ)^V$ üzerinde hemen hemen değme Finsler yapılarıdır denir. Finsler vektör demeti

$$M^\circ = (M^\circ)^h \oplus (M^\circ)^V \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.1. (ϕ^H, ξ^H, η^H) ve (ϕ^V, ξ^V, η^V) , sırasıyla, $(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ üzerinde hemen hemen değme Finsler yapıları olsunlar. Aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned} \phi^H(\xi^H) &= \phi^V(\xi^V) = 0 \\ \eta^H \circ \phi^H &= \eta^V \circ \phi^V = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{rank } \phi^H = 2m, \quad \text{rank } \phi^V = 2m$$

$(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$, $(2m + 1)$ boyutlu olmak üzere

$$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H) \text{ ve } ((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V)$$

hemen hemen değme Finsler manifoldlarıdır. $F^{2m+1} = (M, M^\circ, F)$ Finsler manifoldu için aşağıdaki metriği tanımlayalım:

$$g^F: \Gamma(TM^\circ)^V \times \Gamma(TM^\circ)^V \rightarrow \mathcal{G}(M^\circ)$$

$$g^F(V^V, W^V)(x, y) = g_{ij}^F(x, y) V_i^V(x, y) W_j^V(x, y) \quad 1 \leq i, j \leq 2n + 1 \quad (3.9)$$

burada V_i^V ve W_j^V ile, sırasıyla, V^V ve W^V vektörlerinin bileşenleri gösterilmiştir g_{ij}^F fonksiyonları da (3.2) deki gibi tanımlıdır. (3.9) dan

$$g_{ij}^F(x, y) = g^F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x, y) \quad (3.10)$$

olur. Benzer şekilde

$$g^F: \Gamma(TM^\circ)^H \times \Gamma(TM^\circ)^H \rightarrow \mathcal{G}(M^\circ)$$

$$g^F(V^H, W^H)(x, y) = g_{ij}^F(x, y) V_i^H(x, y) W_j^H(x, y) \quad (3.11)$$

$$g_{(ij)}^F(x, y) = g^F\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)(x, y) \quad (3.12)$$

F^{2n+1} Finsler manifoldunun Finsler metriğidir. Böylece, g^F Finsler metriği Finsler vektör demeti üzerinde bir Riemann metriği olarak düşünülebilir. M° üzerinde

$$G: \Gamma(TM^\circ) \times \Gamma(TM^\circ) \rightarrow \mathcal{F}(M^\circ) \quad (3.13)$$

$$G(x, y) = G^H(x, y) + G^V(x, y) \quad \forall x, y \in \Gamma(TM^\circ)$$

şeklinde tanımlı G metriği (0.2) tipinde simetrik tensördür ve Sasaki finsler metriği olarak adlandırılır.

$$G = g_{ij}^F dx^i \otimes dx^j + g_{ij}^V \delta y^j \otimes \delta y^j = G^H + G^V \quad (3.14)$$

$(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ üzerinde hemen hemen değme finsler yapılar, sırasıyla, (ϕ^H, ξ^H, η^H) ve (ϕ^V, ξ^V, η^V) olsunlar. Eğer G^H ve G^V metrik tensörleri

$$\begin{aligned} G^H(\phi X^H, \phi Y^H) &= G^H(X^H, Y^H) - \eta^H(X^H)\eta^H(Y^H) \\ G^V(\phi X^V, \phi Y^V) &= G^V(X^V, Y^V) - \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$G^H(x^H, \xi^H) = \eta^H(x^H), G^V(x^V, \xi^V) = \eta^V(x^V)$$

$$\begin{aligned} G^H(\phi X^H, \phi Y^H) &= -G^H(\phi^2 X^H, Y^H) \\ G^V(\phi X^V, \phi Y^V) &= -G^V(\phi^2 X^V, Y^V) \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitliklerini sağlarsa $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$, sırasıyla, $(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ vektör demetleri üzerinde hemen hemen değme metrik Finsler yapılar olarak adlandırılırlar.

$(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ vektör demetleri üzerinde ikinci temel formları

$$\begin{aligned} \Omega(X^H, Y^H) &= G^H(X^H, \phi Y^H) \\ \Omega(X^V, Y^V) &= G^V(X^V, \phi Y^V) \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlayalım. İkinci temel formlar için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned} \Omega(\phi X^H, \phi Y^H) &= \Omega(X^H, Y^H) , \quad \Omega(\phi X^V, \phi Y^V) = \Omega(X^V, Y^V) \\ \Omega(X^H, Y^H) &= -\Omega(Y^H, X^H) , \quad \Omega(X^V, Y^V) = -\Omega(Y^V, X^V) \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2. β –KENMOTSU FİNSLER MANİFOLDLARI

$M^{2m+1} = \mathbb{R} \times_f N^{2m}$ olmak üzere $F^{2m+1} = (M, M^\circ, F)$ finsler manifoldunu alalım. $f(t) = c \cdot e^{\beta \frac{t}{2}}$ ve $(N^\circ)^{2m} = TN^{2m} / \theta$ Kaehler manifoldu olsun. $(M^\circ)^h$ ve

$(M^\circ)^V$ demetleri üzerindeki $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen Kenmotsu Finsler yapıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$d\eta^H = d\eta^V = 0 \quad , \quad d\Omega^H = \beta\eta^H \wedge \Omega^H \quad , \quad d\Omega^V = \beta\eta^V \wedge \Omega^V \quad (3.19)$$

burada β sıfırdan farklı reel bir sabittir. $(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ demetleri üzerindeki $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen değme finsler yapılarının β –kenmotsu finsler yapılar olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (\nabla_X^H \phi)Y^H &= \frac{\beta}{2} \{G^H(\phi X^H, Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)\phi X^H\} \\ (\nabla_X^V \phi)Y^V &= \frac{\beta}{2} \{G^V(\phi X^V, Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)\phi X^V\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitliklerinin ve

$$\begin{aligned} \nabla_X^H \xi^H &= \frac{\beta}{2} \{X^H - \eta^H(X^H)\xi^H\} \\ \nabla_X^V \xi^V &= \frac{\beta}{2} \{X^V - \eta^V(X^V)\xi^V\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. (3.20) ve (3.21) deki eşitliklerden aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

$$\begin{aligned} (\nabla_X^H \eta^H)Y^H &= \frac{\beta}{2} \Omega(\phi X^H, Y^H) = \frac{\beta}{2} G^H(\phi X^H, \phi Y^H) \\ (\nabla_X^V \eta^V)Y^V &= \frac{\beta}{2} \Omega(\phi X^V, Y^V) = \frac{\beta}{2} G^V(\phi X^V, \phi Y^V) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H) \text{ ve } ((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$$

β –Kenmotsu Finsler manifoldları için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned} R^H(X^H, Y^H)\xi^H &= \frac{\beta^2}{4} \{\eta^H(X^H)Y^H - \eta^H(Y^H)X^H\} \\ R^V(X^V, Y^V)\xi^V &= \frac{\beta^2}{4} \{\eta^V(X^V)Y^V - \eta^V(Y^V)X^V\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\eta^H(R^H(X^H, Y^H)Z^H) = \frac{\beta^2}{4} \{G^H(X^H, Z^H)\eta^H(Y^H) - G^H(Y^H, Z^H)\eta^H(X^H)\}$$

$$\eta^V(R^V(X^V, Y^V)Z^V) = \frac{\beta^2}{4} \{G^V(X^V, Z^V)\eta^V(Y^V) - G^V(Y^V, Z^V)\eta^V(X^V)\}$$

$$(3.24)$$

$$(\nabla_Z^H R^H)(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{\beta^2}{8} \{G^H(X^H, Z^H)Y^H - G^H(Y^H, Z^H)X^H\} \frac{1}{2} R^H(X^H, Y^H)Z^H$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z^V R^V)(X^V, Y^V)\xi^V &= \frac{\beta^2}{8} \{G^V(X^V, Z^V)Y^V - G^V(Y^V, Z^V)X^V\} \\
&- \frac{1}{2} R^V(X^V, Y^V)Z^V
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
R^H(X^H, Y^H)Z^H &= -\frac{\beta^2}{4} \{G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H\} \\
R^V(X^V, Y^V)Z^V &= -\frac{\beta^2}{4} \{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
R^H(\xi^H, X^H)Y^H &= \frac{\beta^2}{4} \{-G^H(X^H, Y^H)\xi^H + \eta^H(Y^H) X^H\} \\
R^V(\xi^V, X^V)Y^V &= \frac{\beta^2}{4} \{-G^V(X^V, Y^V)\xi^V + \eta^V(Y^V) X^V\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$S^H(\xi^H, \xi^H) = -\frac{m}{2}\beta^2, \quad S^V(\xi^V, \xi^V) = -\frac{m}{2}\beta^2 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
S^H(\phi X^H, \phi Y^H) &= S^H(X^H, Y^H) + \beta^2 \frac{m}{2} \eta^H(X^H) \eta^H(Y^H) \\
S^V(\phi X^V, \phi Y^V) &= S^V(X^V, Y^V) + \beta^2 \frac{m}{2} \eta^V(X^V) \eta^V(Y^V)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.3. α –SASAKIAN FİNSLER MANİFOLDLARI

$(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^V$ üzerindeki $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen değme metrik finsler yapılarının α –Sasakian Finsler yapılar olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^H \phi^H) Y^H &= \frac{\alpha}{2} \{G^H(X^H, Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)X^H\} \\
(\nabla_X^V \phi^V) Y^V &= \frac{\alpha}{2} \{G^V(X^V, Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)X^V\}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\nabla_X^H \xi^H = -\frac{\alpha}{2} \phi X^H, \quad \nabla_X^V \xi^V = -\frac{\alpha}{2} \phi X^V \tag{3.31}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (3.30) ve (3.31) eşitliklerinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^H \eta^H) Y^H &= \frac{\alpha}{2} \Omega(X^H, Y^H) = \frac{\alpha}{2} G^H(X^H, \phi Y^H) \\
(\nabla_X^V \eta^V) Y^V &= \frac{\alpha}{2} \Omega(X^V, Y^V) = \frac{\alpha}{2} G^V(X^V, \phi Y^V)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ α –Saskian Finsler manifoldları için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$R^H(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{\alpha^2}{4} \{\eta^H(Y^H) X^H - \eta^H(X^H) Y^H\}$$

$$R^V(X^V, Y^V)\xi^V = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\} \quad (3.33)$$

$$\eta^H(R^H(X^H, Y^H)Z^H) = \frac{\alpha^2}{4}\{G^H(Y^H, Z^H)\eta^H(X^H) - G^H(X^H, Z^H)\eta^H(Y^H)\}$$

$$\eta^V(R^V(X^V, Y^V)Z^V) = \frac{\alpha^2}{4}\{G^V(Y^V, Z^V)\eta^V(X^V) - G^V(X^V, Z^V)\eta^V(Y^V)\} \quad (3.34)$$

$$(\nabla_Z^H R^H)(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{\alpha^2}{8}\{G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H\} - \frac{1}{2}R^H(X^H, Y^H)Z^H$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Z^V R^V)(X^V, Y^V)\xi^V &= \frac{\alpha^2}{8}\{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\} \\ &\quad - \frac{1}{2}R^V(X^V, Y^V)Z^V \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$R^H(X^H, Y^H)Z^H = \frac{\alpha^2}{4}\{G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H\}$$

$$R^V(X^V, Y^V)Z^V = \frac{\alpha^2}{4}\{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\} \quad (3.36)$$

$$R^H(X^H, \xi^H)Y^H = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H - G^H(X^H, Y^H)\xi^H\}$$

$$R^V(X^V, \xi^V)Y^V = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - G^V(X^V, Y^V)\xi^V\} \quad (3.37)$$

$$R^H(\xi^H, X^H)Y^H = \frac{\alpha^2}{4}\{G^H(X^H, Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)X^H\}$$

$$R^V(\xi^V, X^V)Y^V = \frac{\alpha^2}{4}\{G^V(X^V, Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)X^V\} \quad (3.38)$$

$$S^H(\xi^H, \xi^H) = \alpha^2 \frac{m}{2}, \quad S^V(\xi^V, \xi^V) = \alpha^2 \frac{m}{2} \quad (3.39)$$

$$S^H(X^H, \xi^H) = \alpha^2 \frac{m}{2} \eta^H(X^H), \quad S^V(X^V, \xi^V) = \alpha^2 \frac{m}{2} \eta^V(X^V) \quad (3.40)$$

$$Q^H \xi^H = \alpha^2 \frac{m}{2} \xi^H, \quad Q^V \xi^V = \alpha^2 \frac{m}{2} \xi^V \quad (3.41)$$

$$S^H(\phi X^H, \phi Y^H) = S^H(X^H, Y^H) - \alpha^2 \frac{m}{2} \eta^H(X^H) \eta^H(Y^H)$$

$$S^V(\phi X^V, \phi Y^V) = S^V(X^V, Y^V) - \alpha^2 \frac{m}{2} \eta^V(X^V) \eta^V(Y^V) \quad (3.42)$$

3.4. TRANS-SASAKIAN FİNSLER MANİFOLDLARI

$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen değme Finsler manifoldları aşağıdaki şartları sağladığında (α, β) tipinde trans- Sasakian Finsler manifoldudur:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^H \phi^H)(Y^H) &= \frac{\alpha}{2} \{G^H(X^H, Y^H) - \eta^H(Y^H)X^H\} + \frac{\beta}{2} \{G^H(\phi X^H, Y^H) - \\
&\eta^H(Y^H)\phi X^H\} \\
(\nabla_X^V \phi^V)(Y^V) &= \frac{\alpha}{2} \{G^V(X^V, Y^V) - \eta^V(Y^V)X^V\} + \frac{\beta}{2} \{G^V(\phi X^V, Y^V) - \\
&\eta^V(Y^V)\phi X^V\}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

burada α ve β $(M^\circ)^h$ ve $(M^\circ)^v$ üzerinde tanımlı düzgün fonksiyonlardır. Eğer α ve β sabit ise manifoldlar ya α –Sasakian ya β –Kenmotsu ya da Kosimplektiktir. α ve β sabit iken (3.43) eşitliklerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\nabla_X^H \xi^H &= -\frac{\alpha}{2} \phi X^H + \frac{\beta}{2} \{X^H - \eta^H(X^H)\xi^H\} \\
\nabla_X^V \xi^V &= -\frac{\alpha}{2} \phi X^V + \frac{\beta}{2} \{X^V - \eta^V(X^V)\xi^V\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^H \eta^H)(Y^H) &= -\frac{\alpha}{2} G^H(\phi X^H, Y^H) + \frac{\beta}{2} G^H(\phi X^H, \phi Y^H) \\
(\nabla_X^V \eta^V)(Y^V) &= -\frac{\alpha}{2} G^V(\phi X^V, Y^V) + \frac{\beta}{2} G^V(\phi X^V, \phi Y^V)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans- Sasakian Finsler manifoldları için aşağıdaki eşitlikler de bulunabilir:

$$\begin{aligned}
R^H(X^H, Y^H)\xi^H &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \{\eta^H(Y^H)X^H - \eta^H(X^H)Y^H\} + \frac{\alpha\beta}{2} \{\eta^H(Y^H)\phi X^H - \\
&\eta^H(X^H)\phi Y^H\} \\
R^V(X^V, Y^V)\xi^V &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\} + \frac{\alpha\beta}{2} \{\eta^V(Y^V)\phi X^V - \\
&\eta^V(X^V)\phi Y^V\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\eta^H(R^H(X^H, Y^H)Z^H) &= \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}\right) \{G^H(Y^H, Z^H)\eta^H(X^H) - G^H(X^H, Z^H)\eta^H(Y^H)\} \\
&- \frac{\alpha\beta}{2} \{G^H(\phi X^H, Z^H)\eta^H(Y^H) - G^H(\phi Y^H, Z^H)\eta^H(X^H)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta^V(R^V(X^V, Y^V)Z^V) &= \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}\right) \{G^V(Y^V, Z^V)\eta^V(X^V) - G^V(X^V, Z^V)\eta^V(Y^V)\} \\
&- \frac{\alpha\beta}{2} \{G^V(\phi X^V, Z^V)\eta^V(Y^V) - G^V(\phi Y^V, Z^V)\eta^V(X^V)\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$R^H(\xi^H, X^H)\xi^H = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}\right) \{\eta^H(X^H)\xi^H - X^H\}$$

$$R^V(\xi^V, X^V)\xi^V = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}\right) \{\eta^V(X^V)\xi^V - X^V\} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} R^H(X^H, Y^H)Z^H &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \{G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H\} \\ &\quad - \frac{\alpha\beta}{2} \{G^H(\phi X^H, Z^H)Y^H - G^H(\phi Y^H, Z^H)X^H\} \\ R^V(X^V, Y^V)Z^V &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\} \\ &\quad - \frac{\alpha\beta}{2} \{G^V(\phi X^V, Z^V)Y^V - G^V(\phi Y^V, Z^V)X^V\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$S^H(X^H, \xi^H) = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \eta^H(X^H)$$

$$S^V(X^V, \xi^V) = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \eta^V(X^V) \quad (3.50)$$

$$S^H(\xi^H, \xi^H) = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2), \quad S^V(\xi^V, \xi^V) = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \quad (3.51)$$

$$Q\xi^H = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2)\xi^H, \quad Q\xi^V = \frac{m}{2} (\alpha^2 - \beta^2)\xi^V \quad (3.52)$$

$$\forall X^H, Y^H, Z^H \in (M^\circ)^h \text{ ve } \forall X^V, Y^V, Z^V \in (M^\circ)^v$$

Diğer taraftan 3 boyutlu manifold için \tilde{R}^H ve \tilde{R}^V eğrilik tensörleri için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X^H, Y^H, Z^H, W^H) &= G^H(X^H, W^H) S^H(Y^H, Z^H) - G^H(X^H, Z^H) S^H(Y^H, W^H) \\ &\quad + G^H(Y^H, Z^H) S^H(X^H, W^H) - G^H(Y^H, W^H) S^H(X^H, Z^H) - \frac{r}{2} \\ &\quad [G^H(X^H, W^H) G^H(Y^H, Z^H) - G^H(X^H, Z^H) G^H(Y^H, W^H)] \\ \tilde{R}(X^V, Y^V, Z^V, W^V) &= G^V(X^V, W^V) S^V(Y^V, Z^V) - G^V(X^V, Z^V) S^V(Y^V, W^V) \\ &\quad + G^V(Y^V, Z^V) S^V(X^V, W^V) - G^V(Y^V, W^V) S^V(X^V, Z^V) - \frac{r}{2} \\ &\quad [G^V(X^V, W^V) G^V(Y^V, Z^V) - G^V(X^V, Z^V) G^V(Y^V, W^V)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

burada,

$$\tilde{R}(X^H, Y^H, Z^H, W^H) = G^H(R^H(X^H, Y^H)Z^H, W^H)$$

$$\tilde{R}(X^V, Y^V, Z^V, W^V) = G^V(R^V(X^V, Y^V)Z^V, W^V)$$

ve r skalar eğriliktir. (3.49) eşitliğini kullanırsak

$$\tilde{R}(\xi^H, Y^H, Z^H, \xi^H) = G^H(R^H(\xi^H, Y^H)Z^H, \xi^H)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \{ G^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H) \} \\
&\quad + \frac{\alpha\beta}{2} G^H(\phi Y^H, Z^H) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} G^H(\phi Y^H, \phi Z^H) + \\
&\quad \frac{\alpha\beta}{2} G^H(\phi Y^H, Z^H)
\end{aligned}$$

buluruz, benzer şekilde

$$(3.54) \tilde{R}(\xi^V, Y^V, Z^V, \xi^V) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} G^V(\phi Y^V, \phi Z^V) + \frac{\alpha\beta}{2} G^V(\phi Y^V, Z^V)$$

olur (3.50), (3.53) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(\xi^H, Y^H, Z^H, \xi^H) &= G^H(\xi^H, \xi^H) S^H(Y^H, Z^H) - G^H(\xi^H, Z^H) S^H(Y^H, \xi^H) \\
&\quad + G^H(Y^H, Z^H) S^H(\xi^H, \xi^H) - G^H(Y^H, \xi^H) S^H(\xi^H, Z^H) \\
&\quad - \frac{r}{2} [G^H(\xi^H, \xi^H) G^H(Y^H, Z^H) - G^H(\xi^H, Z^H) G^H(Y^H, \xi^H)] \\
&= S^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Z^H) \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \eta^H(Y^H) + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} G^H(Y^H, Z^H) \\
&\quad - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H) - \frac{r}{2} [G^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)]
\end{aligned}$$

bulunur. (3.54) eşitliği kullanılırsa da

$$\begin{aligned}
S^H(Y^H, Z^H) &= \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \right) G^H(\phi Y^H, \phi Z^H) + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H) \\
&\quad + \frac{\alpha\beta}{2} G^H(\phi Y^H, Z^H)
\end{aligned}$$

bulunur. α, β sabit olduğundan

$$S^H(Y^H, Z^H) = \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \right) G^H(\phi Y^H, \phi Z^H) + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H) \quad (3.55)$$

dır. Benzer şekilde

$$S^V(Y^V, Z^V) = \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \right) G^V(\phi Y^V, \phi Z^V) + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)$$

olur

(3.55) eşitliği (3.53) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R^H(X^H, Y^H)Z^H &= \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) (G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H) \\
&\quad + G^H(X^H, Z^H) \left[\left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right) \eta^H(Y^H)\xi^H\right] \\
&\quad - \left[\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right] \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)X^H \\
&\quad - G^H(Y^H, Z^H) \left[\left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right) \eta^H(X^H)\xi^H\right] + \\
&\quad \left[\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right] \eta^H(X^H)\eta^H(Z^H)Y^H
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R^V(X^V, Y^V)Z^V &= \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) [G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V] \\
&\quad + G^V(X^V, Z^V) \left[\left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right) \eta^V(Y^V)\xi^V\right] - \left[\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \right. \\
&\quad \left. \beta^2)\right] \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)X^V - G^V(Y^V, Z^V) \left[\left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right) \eta^V(X^V)\xi^V\right] \\
&\quad + \left[\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right] \eta^V(X^V)\eta^V(Z^V)Y^V
\end{aligned} \tag{3.56}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Önerme 3.4.1. 3-boyutlu normal Finsler manifoldu α, β sabit iken ya α -Sasakiandır yada β -kosimplektiktir.

3.5. 3-BOYUTLU LOKAL ϕ -SİMETRİK NORMAL HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER MANİFOLDLARI

Tanım 3.5.1. Normal hemen hemen değme metrik Finsler manifoldları $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Lokal ϕ -Simetriktir denir eğer ξ^H vektörüne ortogonal olan her X^H, Y^H, Z^H, W^H, Z^H vektör alanları için

$$\phi^2((\nabla_W^H R^H)(X^H, Y^H)Z^H) = 0$$

ve ξ^V vektörüne ortogonal olan her X^V, Y^V, Z^V, W^V, Z^V vektör alanları için

$$\phi^2((\nabla_W^V R^V)(X^V, Y^V)Z^V) = 0$$

eşitlikleri var ise

$((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik Finsler manifoldunu alalım. Önce, (3.56) daki eşitliğin W^H vektörüne göre kovaryant türevini alalım. α, β sabitleri için

$$\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X, Y)Z &= \frac{dr(w)}{2} [G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H] + \\
G^H(X^H, Z^H) &[\frac{dr(w)}{2} \eta^H(Y^H)\xi^H + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) (\nabla_W^H \eta^H)(Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)\nabla_W^H \xi^H] \\
&- G^H(Y^H, Z^H) [\frac{dr(w)}{2} \eta^H(X^H)\xi^H + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) \\
&(\nabla_W^H \eta^H)(X^H)\xi^H - \eta^H(X^H)\nabla_W^H \xi^H] \\
&- [\frac{dr(w^H)}{2} \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)X^H + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) ((\nabla_W^H \eta^H)(Y^H)\eta^H(Z^H)X^H + \\
&\eta^H(Y^H)(\nabla_W^H \eta^H)(Z^H)X^H)] \\
&+ [\frac{dr(w^H)}{2} \eta^H(X^H)\eta^H(Z^H)Y^H + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) ((\nabla_W^H \eta^H)(X^H)\eta^H(Z^H)Y^H + \\
&\eta^H(X^H)(\nabla_W^H \eta^H)(Z^H)Y^H)] \tag{3.57}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de Lokal ϕ -Simetrik için ξ^H vektörüne ortogonal olan X^H, Y^H, Z^H, W^H vektörlerini alalım. O zaman (3.57) den

$$\phi^2((\nabla_W^H R^H)(X^H, Y^H)Z^H) = \frac{dr(w)}{2} [G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H] \tag{3.58}$$

olur $\phi^2(\nabla_W R)(X, Y)Z = 0$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul r skalar eğriliğinin sabit olmasıdır. Benzer şekilde, $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ 3-boyutlu normal hemen hemen değme Finsler manifoldunu alalım. (3.56) daki ikinci eşitliğin W^V vektörüne göre KOVARYANT türevini α, β sabit için alalım. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
(\nabla_W^V R^V)(X^V, Y^V)Z^V &= \frac{dr(w^V)}{2} [G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V] \\
&+ G^V(X^V, Z^V) [\frac{dr(w^V)}{2} \eta^V(Y^V)\xi^V + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) \\
&((\nabla_W^V \eta^V)(Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)\nabla_W^V \xi^V)] \\
&- G^V(Y^V, Z^V) [\frac{dr(w^V)}{2} \eta^V(X^V)\xi^V + (\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)) \\
&((\nabla_W^V \eta^V)(X^V)\xi^V - \eta^V(X^V)\nabla_W^V \xi^V)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{dr(w^V)}{2} \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)X^V + \left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right)\right. \\
& \left.((\nabla_W^V \eta^V)(Y^V)\eta^V(Z^V)X^V + \eta^V(Y^V)(\nabla_W^V \eta^V)(Z^V)X^V)\right] \\
& +\left[\frac{dr(w^V)}{2} \eta^V(X^V)\eta^V(Z^V)Y^V + \left(\frac{r}{2} - \frac{3}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\right)\right. \\
& \left.((\nabla_W^V \eta^V)(X^V)\eta^V(Z^V)Y^V + \eta^V(X^V)(\nabla_W^V \eta^V)(Z^V)Y^V)\right] \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Şimdi de Lokal ϕ –Simetrik için ξ^V vektörüne ortogonal olan X^V, Y^V, Z^V, W^V vektörlerini alalım. (3.59) eşitliğinden

$$\phi^2(\nabla_W^V R^V)(X^V, Y^V)Z^V = \frac{dr(w^V)}{2} [G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V]$$

buluruz. Bu eşitlikte $\phi^2(\nabla_W^V R^V)(X^V, Y^V)Z^V = 0$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul r skalar eğriliğinin sabit olmasıdır.

Teorem 3.5.2. 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik finsler manifoldları $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Lokal ϕ –Simetriktir ancak ve ancak r skalar eğrilikleri α ve β nin sabit olmasına göre sabittirler.

Sonuç 3.5.1. 3-boyutlu α –Sasakian Finsler manifoldları $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Lokal ϕ –simetriktirler ancak ve ancak skalar eğrilikleri sabittir.

Özel olarak $\alpha = 1$ için α –Sasakian Finsler manifoldu Sasakian Finsler manifoldu olur.

Sonuç 3.5.2. 3-boyutlu $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Sasakian Finsler manifoldları Lokal ϕ –Simetriktirler ancak ve ancak skalar eğrilikleri sabittir.

Benzer sonuçler β –Kenmotsu Finsler manifoldları ya da Kosimplektik Finsler manifoldları için de geçerlidir. Özel olarak $\beta = 1$ için Kenmotsu Finsler manifoldu bulunur.

Sonuç 3.5.3. 3-boyutlu $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Kenmotsu Finsler manifoldları Lokal ϕ –Simetriktirler ancak ve ancak skalar eğrilikleri sabittir.

3.6. η –PARALEL RİCCİ TENSÖRÜ

Tanım 3.6.1. $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen değme metrik Finsler manifoldlarının S^H ve S^V Ricci tensörleri aşağıdaki şartları sağarlarsa η –paraleldirler denir.

$$(\nabla_X^H S^H)(\phi Y^H, \phi Z^H) = 0, \quad (\nabla_X^V S^V)(\phi Y^V, \phi Z^V) = 0,$$

$$\forall X^H, Y^H, Z^H \in (TM^\circ)^H \quad \text{ve} \quad \forall X^V, Y^V, Z^V \in (TM^\circ)^V$$

3-boyutlu normal hemen hemen değme Finsler manifoldlu $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ için (3.55) eşitliğinde Y^H yerine ϕY^H ve Z^H yerine ϕZ^H alalım:

$$S^H(\phi Y^H, \phi Z^H) = \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} \right) \right) [G^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)] \quad (3.60)$$

buluruz (3.60) eşitliğinin X^H yönünde kovaryant türevini alırsak

$$\begin{aligned} (\nabla_X^H S^H)(\phi Y^H, \phi Z^H) &= \frac{dr(X^H)}{2} [G^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)] \\ &- \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} \right) \right) [(\nabla_X^H \eta^H)(Y^H)\eta^H(Z^H) + \eta^H(Y^H)(\nabla_X^H \eta^H)(Z^H)] \end{aligned}$$

olur Ricci tensörü η –Paralel olsun. O zaman

$$\begin{aligned} &\frac{dr(X^H)}{2} [G^H(Y^H, Z^H) - \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H)] \\ &- \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} \right) \right) [(\nabla_X^H \eta^H)(Y^H)\eta^H(Z^H) + \eta^H(Y^H)(\nabla_X^H \eta^H)(Z^H)] = 0 \quad (3.61) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte $Y^H = Z^H = E_i^H$ alırsak

$$0 = dr(X^H) - 2 \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} \right) \right) (\nabla_X^H \eta^H)(\xi^H) = 0 \quad (3.62)$$

elde ederiz, burada $\{E_i^H\}$ ortonormal bazı $(TM^\circ)^H$ yatay demetinin bazı olarak alınmıştır.

$$\eta^H(\xi^H) = 1 \quad \text{ve} \quad \nabla_X^H \xi^H = -\frac{\alpha}{2} \phi X^H + \frac{\beta}{2} \{X^H - \eta^H(X^H)\xi^H\}$$

olduğundan $(\nabla_X^H \eta^H)(\xi^H) = 0$ olur. Böylece (3.62) denkleminde $dr(X^H) = 0$ yani r sabittir .

Benzer şekilde, 3-boyutlu normal hemen hemen değme Finsler manifoldu $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ için (3.55) eşitliğinde Y^V yerine ϕY^V ve Z^V yerine ϕZ^V alalım.

$$S^V(\phi Y^V, \phi Z^V) = \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) [G^V(Y^V, Z^V) - \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)] \quad (3.63)$$

bulunur. Bu eşitliğin X^V yönünde kovaryant türevini alırsak

$$\begin{aligned} (\nabla_X^V \eta^V)(\phi Y^V, \phi Z^V) &= \frac{dr(X^V)}{2} [G^V(Y^V, Z^V) - \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)] \\ &- \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) [(\nabla_X^V \eta^V)(Y^V)\eta^V(Z^V) + \eta^V(Y^V)(\nabla_X^V \eta^V)(Z^V)] \end{aligned}$$

dır. Ricci tensörü S^V η -Paralel olsun. O zaman yukardaki eşitlikte sol taraf sıfır olup

$$\begin{aligned} \frac{dr(X^V)}{2} [G^V(Y^V, Z^V) - \eta^V(Y^V)\eta^V(Z^V)] &= \\ \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) [(\nabla_X^V \eta^V)Y^V\eta^V(Z^V) + \eta^V(Y^V)(\nabla_X^V \eta^V)(Z^V)] & \quad (3.64) \end{aligned}$$

dır (3.64) eşitliğinde $Y^V = Z^V = E_i^V$ alalım, burada $\{E_i^V\}$, $(M^\circ)^V$ dikey demetinin ortonormal bazıdır, böylece

$$dr(X^V) = 2 \left(\frac{r}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4}\right) (\nabla_X^V \eta^V)(\xi^V) \quad (3.65)$$

olur $\eta^V(\xi^V) = 1$ ve $\nabla_X^V \xi^V = -\frac{\alpha}{2} \phi X^V + \frac{\beta}{2} \{X^V - \eta^V(X^V)\xi^V\}$

olduğundan $(\nabla_X^V \eta^V)(\xi^V) = 0$ 'dır. Böylece (3.65) denkleminde $dr(X^V) = 0$ bulunur, yani r skaler eğriliği sabittir.

Teorem 3.6.1. η -Paralel Ricci tensörlü $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ 3-boyutlu hemen hemen değme metrik Finsler manifoldları α ve β sabit olmak üzere skaler eğriliklidirler.

Sonuç 3.6.1. α ve β sabit olmak üzere η -Paralel Ricci tensörlü $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^V, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ 3-boyutlu hemen hemen değme metrik Finsler manifoldları Lokal ϕ -Simetriklerdir.

SONUÇ

Ricci tensörü η –paralel olan lokal \emptyset – simetrik üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları konulu çalışmayı Finsler manifoldlarına taşıyarak bir genelleme yapmış olduk. 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik Finsler manifoldunun da lokal \emptyset – simetrik olması için gerek ve yeter şartın Riemann manifoldları için bulunan sonuçlarla uyumlu olduğunu gördük. η –Paralel Ricci tensörlü $((M^\circ)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^\circ)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ 3-boyutlu hemen hemen değme metrik Finsler manifoldları α ve β sabit olmak üzere skaler eğriliklidirler. Sonuç olarak $\alpha, \beta =$ sabit iken Ricci tensörü η –paralel ise bu manifoldlar da lokal \emptyset –simetrikler.



KAYNAKÇA

- Atanasiv, G. H., Sinha, B. B., & Singh, S. K. (1984). On finsler spaces 3. *Proc. Nat. Semi*, 1, 29–36.
- Bejancu, A. U. (1996). Null hypersurfaces of finsler spaces. *Houston Journal of Mathematics*, 22(3), 547-558.
- Bejancu, A. U., & Deshmukh, S. H. (1997). The transversal vector bundle of a lightlike Finsler submanifold. *Arab. J. Math. Sci*, 3, 37-51.
- Bejancu, A., & Farran, H. R. (2013). *Geometry of pseudo-Finsler submanifolds* (1st ed). London: Springer Science & Business Medi.
- Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in riemannian geometry* (1st ed). New York: Lecture Notes in Math.
- Blair, D. E. (1966). *The theory of quasi-sasakian structures* (Unpublished Ph.D. Thesis). University of Illinois, Champaign, IL, USA,
- Blair, D. E., & Blair, D. E. (2010). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds* (1st ed). Boston MA: Birkhäuser Boston.
- Boeckx, E., Bueken, P., & Vanhecke, L. (1999). ϕ -symmetric contact metric spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 41(3), 409-416.
- Calabi, E., & Eckmann, B. (1953). A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. *Annals of Mathematics*, 58(3), 494–500.
- Cantrijn, F., de León, M., & Lacomba, E. A. (1992). Gradient vector fields on cosymplectic manifolds. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(1), 175-188.
- De, U. C., & Pathak, G. (2004). On 3-dimensional kenmotsu manifolds. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35(2), 159-166.
- De, U. C., Yildiz, A., & Yalınız, A. F. (2009). Locally ϕ -symmetric normal almost contact metric manifolds of dimension 3. *Applied Mathematics Letters*, 22(5), 723-727.
- Gray, J. W. (1959). Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, 69(2), 421–450.

- Hopf, H. Z. (1948). Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. *Interscience*, 11(18), 167-185.
- Janssens, D., & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4(1), 1-27.
- Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 24(1), 93-103.
- Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry* (1st ed). New York: Interscience Publishers.
- Kon, M. (1976). Invariant submanifolds in Sasakian manifolds. *Mathematische Annalen*, 219, 277-290.
- Matsushima, Y. (1972). *Differentiable manifolds* (1st ed). New York: Marcel Dekker.
- Miron, R. (1982). On Finsler spaces, *Proc. Nat. Semi*, 2, 147-188.
- Newlander, A., & Nirenberg, L. (1957). Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of Mathematics*, 65(3), 391-404.
- Olszak, Z. (1986). Normal almost contact metric manifolds of dimension three. *Annales Polonici Mathematici* 1(47), 41-50.
- Oubiña, J. A. (1985). New class of almost contact metric structure. *Publication Math. Debrecen*, 32, 187-193.
- Sinha, B. B., & Yadav, R. K. (1988). On almost contact Finsler structures on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, 19(1), 27-35.
- Sinha, B. B., & Yadav, R. K. (1991). Almost contact semi symmetric metric Finsler connections on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, 22(1), 29-39.
- Takahashi, T. (1977). Sasakian ϕ -symmetric spaces. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 29(1), 91-113.
- Watanabe, Y. (1980). Geodesic symmetries in Sasakian locally ϕ -symmetric spaces. *Kodai Mathematical Journal*, 3(1), 48-55.
- Yaliniz, A. F., & Çalışkan, N. (2013). Sasakian Finsler manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(2), 319-339.

Yano, K., & Kon, M. (1985). *Structures on manifolds* (1st ed) London: World Scientific Publishing Company.



DİZİN**-D-**

Değme Manifoldları, viii, 30

-F-

Finsler Manifoldları, iv
Finsler Manifoldları, i, ii, iii, v, viii, 65,
67, 76

-H-

Hermit Manifoldları, viii, 21

-K-

Kaehler Manifoldları, viii, 28
Kenmotsu Finsler Manifoldları, viii, 69
Kompleks Manifold, viii, 4, 16

-M-

Manifold, v, vi, 1

-P-

Paralel Ricci Tensörü, viii, ix, 58, 79

-R-

Ricci Tensörü, v

-S-

Sasakian Finsler Manifoldları, viii, 71
Simetrik Normal Hemen Hemen Değme
Metrik Manifoldlar, viii, 52

-T-

Trans-Sasakian Finsler Manifoldları, viii,
73