

T.C.  
EGE ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN  
VARLIĞI ÜZERİNE

Serap YALÇIN

1.Danışman: Doç. Dr. Erbil ÇETİN  
2.Danışman: Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL

Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Yüksek Lisans Programı

Bornova-İzmir

2024



Serap YALÇIN tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan ‘‘Kesirli Diferansiyel Denklemlerin zmlerinin Varlığı zerine’’ başlıklı bu alışma E Lisansüstü Eğitim ve đretim Yönetmeliđi ile E Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve đretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 01.02.2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri yeleri**

**İmza**

**Jüri Bařkanı** : Prof. Dr. Fadime DAL

**Raportör ye**: Doç. Dr. Erbil ÇETİN

**ye** : Doç. Dr. Derya DOĐAN DURGUN



# EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

01/02/2024

İmzası

Serap YALÇIN



## ÖZET

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN  
VARLIĞI ÜZERİNE

YALÇIN, Serap

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erbil ÇETİN

01.02.2024, 37 sayfa

Bu tez çalışmasında temel olarak üç bölüm yer almaktadır.

İlk bölümde genel olarak tezde ele alınan konu ve bu konu ile ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde kesirli türev ve integral tanımlarına bunlarla ilgili bazı önermelere, örneklerle, teoremlere ve elde edilen sonuçların ispatında kullanılan sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde lineer olmayan  $\beta$ 'inci mertebeden genelleştirilmiş Caputo kesirli türev içeren üç noktalı sınır değer problemi incelenmiştir. Öncelikle incelediğimiz problem integral denklem olarak ifade edilip Green fonksiyonu elde edilmiştir ve Green fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ele alınan sınır değer problemin çözümlerinin varlığı ve tekliğini garantiye koyan koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar ile Banach, Schaefer ve Schauder sabit nokta teoremleri kullanılarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği kanıtlanmıştır. Ayrıca problemin alt ve üst çözümleri tanımlanarak bu çözümler yardımıyla problemin çözümünün varlığını gösteren bir teorem verilmiştir.

Son olarakta sonuçları destekleyen uygun bir örnek verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Genelleştirilmiş Caputo kesirli türev ve kesirli integral, Varlık ve teklik teoremleri, Sabit nokta teoremi, Alt ve üst çözümler, Green fonksiyonu



**ABSTRACT****ON EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR FRACTIONAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

YALÇIN, Serap

MSc. Thesis in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Erbil ÇETİN

February 1st, 2024, 37 pages

In this thesis, there are basically three sections.

In the first section, in general, the subject discussed in the thesis and the studies carried out on this subject are included.

In the second section, definitions of fractional derivatives and integrals, some related propositions, examples, theorems and fixed point theorems used to prove the obtained results are given.

In the third section, the three point boundary value problem involving nonlinear  $\beta$ -order generalized Caputo fractional derivative is examined. First of all, the problem we examined was expressed as an integral equation and the Green function was obtained and the properties of the Green function were examined. Then, the conditions that guarantee the existence and uniqueness of the solutions of the boundary value problem discussed are obtained. Using these conditions and Banach, Schaefer and Schauder fixed point theorems, the existence and uniqueness of the problem has been proven. In addition, the lower and upper solutions of the problem are defined and a theorem showing the existence of a solution to the problem is given by these solutions.

Finally, a suitable example is given to support the results.

**Keywords:** Generalized Caputo fractional derivative and fractional integral, Existence and uniqueness theorems, Fixed point theorem, Upper and lower solutions, Green function.



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = f(t, w(t)), \quad t \in [a, b],$$

$\beta$ 'ncı mertebeden genelleştirilmiş Caputo türeve sahip lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemi

$$w_{\Theta}^{[j]}(a) = w_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad w_{\Theta}^{[m-2]}(b) = \delta w_{\Theta}^{[m-2]}(\eta)$$

üç noktalı sınır koşulları ile birlikte ele alınmıştır. Bu problemin tek pozitif çözümünün ve en az bir pozitif çözümünün varlığı için gerekli kriterler incelenmiştir. Öncelikle kesirli sınır değer problemi bir integral denklem olarak ifade edilmiştir. Bu problemin Green fonksiyonu oluşturulmuştur ve Green fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Ardından problemin varlık teoremleri incelenmiş olup Banach, Schaefer ve Schauder sabit nokta teoremleri yardımıyla bu teoremlerin kanıtı yapılmıştır. Daha sonra problemin alt ve üst çözümleri tanımlanmış olup bu çözümler yardımıyla kesirli sınır değer probleminin çözümünün varlığını gösteren bir teorem verilmiştir. Elde edilen varlık teoremlerini destekleyen bir örnek oluşturulmuştur.

İZMİR

01/02/2024

*Serap YALÇIN*



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

İÇ KAPAK . . . . .	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI . . . . .	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI . . . . .	v
ÖZET . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	ix
ÖNSÖZ . . . . .	xi
İÇİNDEKİLER . . . . .	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	xv
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 TANIM VE TEOREMLER . . . . .	5
2.1 Tanımlar ve Önergeler . . . . .	5
2.2 Teoremler . . . . .	13
3 ÜÇ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIK SONUÇLARI . . . . .	15
3.1 Üç Noktalı Sınır Değer Probleminin Green Fonksiyonu . . . . .	15
3.2 Varlık Teoremleri . . . . .	20
4 SONUÇ . . . . .	31
KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . .	32
TEŞEKKÜR . . . . .	36
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	37

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\Sigma$	Toplam Sembolü
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$n!$	$n$ faktöriyel $n = (1, 2, 3, \dots, n)$
$\infty$	Sonsuz
$D$	Kesirli Türev Operatörü
$I$	Kesirli İntegral Operatörü
$D_a^\alpha$	$\alpha$ 'ncı mertebeden alt limiti $a$ olan kesirli türev
$I_a^\alpha$	$\alpha$ 'ncı mertebeden alt limiti $a$ olan kesirli integral
${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta}$	$\beta$ 'ncı mertebeden geliştirilmiş $\Theta$ -Caputo kesirli türev
$D_{a^+}^{\beta, \Theta}$	$\beta$ 'ncı mertebeden geliştirilmiş $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli türev
$I_{a^+}^{\beta, \Theta}$	$\beta$ 'ncı mertebeden geliştirilmiş $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli integral

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)**

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{C}[a, b]$	$[a, b]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{C}^m[a, b]$	$[a, b]$ aralığında $m$ 'inci mertebeye kadar türevli fonksiyonlar kümesi
$G(t, s)$	Green Fonksiyonu
$\Gamma(\alpha)$	Gamma Fonksiyonu
$\ w\ $	$w$ fonksiyonunun normu
$[\beta]$	$\beta$ 'nin tam değeri



# 1 GİRİŞ

Geleneksel analizde yüksek mertebeden türev  $D^n f = \frac{d^n}{dx^n} f$  ve  $n$  katlı integrallerde  $I^n f = \int \dots \int f dx_1 \dots dx_n$  şeklinde ifade edilir. Ancak tüm bunlar sadece  $n \in \mathbb{N}$  için geçerlidir. Tam bu noktada L'Hopital'in Leibniz'e 1695 yılında yazdığı bir mektupta  $n > 0$  olmak üzere  $n = \frac{1}{2}$  için  $D^n f = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$  türevinin sonucunun ne olacağı sorusu ile kesirli analiz(S.G. Samko et al., 1993) ortaya çıkmıştır. L'Hopital'in bu sorusu ile kesirli mertebeden türevler 300 yılı aşkın bir zamandır Euler, Laplace, Fourier, Riemann, Lagrange, Caputo gibi birçok matematikçi tarafından üzerinde çalışılan bir konu haline gelmiştir.

Fizik, kimya, biyoloji vb. doğa bilimleri, mühendislik, tıp, ekonomi, jeoloji, psikoloji ve matematik anabilim dalında var olan bir problemin özelliklerini açıklamak için matematiksel modelleme yapmak oldukça önem taşımaktadır. Bu modellemeler sonucunda ortaya çıkan problemlerin çözülmesi için problemin yapısına uygun olarak verilen şartlar altında çeşitli çözüm metodları ile karşılaşılmaktadır(I. Karatay et al., 2011)(L. Su et al., 2009).

Doğada meydana gelen fiziksel olayların çoğunluğu, bir veya birden fazla büyüklüğün diğer bazı büyüklüklere göre değişim hızlarını içermektedir. Bu fiziksel değişim hızı olarak adlandırılan ifadeler matematiksel türev işlemi olarak tanımlanmaktadır. Her bir sürecin matematiksel ifadesinde farklı değişim hızları, farklı türevler olarak karşımıza çıkmaktadır. Böylece bir fiziksel süreci ifade eden her bir yasa, türevleri de içeren matematiksel bağıntılar haline gelmektedir. Süreci niteleyen fonksiyonların yanı sıra bu fonksiyonların sonlu mertebeden türevlerini de içeren bu bağıntılara diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemlerin mertebeleri, ifade ettiği fiziksel durumun veya problemin değişim hızını belirlemektedir. Ancak tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler bazı problemlerin veya fiziksel olayların açıklanmasında yeterli değildir. Bu nedenle kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve bunlara uygulanan kesirli mertebeden türev bu problem veya fiziksel olay-

ların açıklanmasında, matematiksel olarak modellenmesinde, ifade edilmesinde büyük rol oynamaktadır. Yapılan çalışmalar ve kanıtlanmış uygulamalar sayesinde de kesirli mertebeden türev son yıllarda oldukça önem kazanmış ve popüler bir hale gelmiştir(C. Celik et al., 2012)(I.I. Gorial, 2011)(H. Jafari et al., 2006).

Literatürü incelediğimizde kesirli türev için birçok tanımla karşılaşmaktadır. Örneğin Caputo, Erdelyi-Kober, Hilfiger, Hadamard, Grünwald-Letkinov, Riesz, Welly, Riemann-Liouville ve genelleştirilmiş Caputo kesirli türevleri bunlardan bazılarıdır. Bu tanımlara bakıldığında kesirli analizde birden fazla türev tanımının bulunması, üzerinde çalışılan problemin yapısına göre en uygun tanımın kullanılmasıyla birlikte problemin en iyi çözümüne ulaşılmasını sağlar(S.K. Panchal et al., 2019)(S. Hussien et al., 2019)(O. P. Agrawal, 2012)(N. Nyamoradi, 2012)(E. Shivanian, 2023)(Y. Su et al., 2021)(Y. Sun et al., 2017)(E. C. Oliveira, 2018)(S. Vong, 2013)(G. Wang et al., 2016).

Yapılan çalışmaları incelediğimizde Caputo kesirli türev tanımının daha çok tercih edildiği gözlemlenmektedir(M.S. Abdo et al., 2019)(R. Almeida et al., 2018)(A. G. Ibrahim et al., 2019)(R. Almeida, 2017)(H.A. Wahash et al., 2020)(S.K. Panchal et al., 2020). Caputo kesirli türev tanımı, matematikçi ve aynı zamanda jeofizikçi olan Michele Caputo tarafından 1967 yılında yayınlamış olduğu bir makalesinde (M. Caputo, 1967) kendi soyismini kullanarak Riemann-Liouville kesirli türev tanımının Laplace dönüşüm uygulamalarında oluşan başlangıç değerlerinin hesaplanması ve büyük bir sorun olan sabit türevinin sıfır olmaması sorununu gidermek için yapılmıştır. Caputo türevin en önemli yararı, diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile Caputo kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Bu sebeple literatürdeki çalışmaları incelediğimizde kesirli diferansiyel denklemler için yapılan analitik ve nümerik çözümlerde Caputo kesirli türevin daha çok tercih edildiği gözlemlenmektedir.

Literatürde yapılan bazı çalışmalarını incelediğimizde Abdo, Panchal ve Saeed (M.S. Abdo et al., 2019) makalelerinde

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) &= f(t, w(t)), \quad t \in [a, b], \\ w_{\Theta}^{[j]}(a) &= w_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad w_{\Theta}^{[m-1]}(b) = w_b, \end{aligned}$$

yeni bir  $\Theta$  fonksiyonuna göre Caputo kesirli türev operatörünü içeren lineer olmayan kesirli sınır değer problemi için Banach ve Schaefer sabit nokta teoremlerini kullanarak pozitif çözümlerinin varlığını kanıtlamışlardır.

Başka bir çalışmada Sun, Zeng ve Song (Y. Sun et al., 2017) makalelerinde

$$\begin{aligned} {}^c D_a^{\beta} w(t) &= f(t, w(t)), \quad t \in [a, b], \\ w^{(j)}(a) &= w_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad w^{(m-1)}(b) = w_b, \end{aligned}$$

lineer olmayan Caputo kesirli sınır değer problemi için Schauder ve Banach sabit nokta teoremlerini kullanarak varlık ve teklik sonuçlarını elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında yukarıdaki çalışmalardan yola çıkarak aşağıdaki genelleştirilmiş Caputo kesirli türev içeren, lineer olmayan  $\beta$ 'ncü mertebeden üç noktalı sınır değer problemi  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyon ve  $\forall t \in [a, b]$  için  $\Theta'(t) \neq 0$  ve  $\Theta$  artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) &= f(t, w(t)), \quad t \in [a, b], \\ w_{\Theta}^{[j]}(a) &= w_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad w_{\Theta}^{[m-2]}(b) = \delta w_{\Theta}^{[m-2]}(\eta) \end{aligned}$$

incelenmiştir (S. Yalçın et al., 2024).

Burada  $w_a^j \in \mathbb{R}$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots, m-2$ ),  $\eta \in (a, b)$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $w \in C^{m-1}[a, b]$ ,  $w_{\Theta}^{[j]}(t) = \frac{(w_{\Theta}^{[j-1]}(t))'}{\Theta'(t)}$  şeklindedir. Bu problemde  $m-1 < \beta \leq m$  ( $m = \lfloor \beta \rfloor + 1$ ) ve  $m \geq 2$  olmak üzere  ${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta}$ ,  $\beta$ 'ncü mertebeden  $\Theta$ -Caputo kesirli türevi ifade eder.  $\lfloor \beta \rfloor$ ,  $\beta$ 'nin tam değerini ifade etmektedir.

Bu tezin amacı yukarıda verilen kesirli sınır değer probleminin Banach, Schaefer ve Schauder sabit nokta teoremleri, alt ve üst çözümler yardımı ile pozitif çözümlerinin varlığını garantileyen kriterleri ortaya koymaktır. Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde kesirli türev ve integral tanımlarına bunlarla ilgili özellik ve örneklere ve elde edilen sonuçların ispatında kullanılan sabit nokta teoremleri yer almaktadır. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Caputo kesirli türev içeren lineer olmayan üç noktalı  $\beta$ 'inci mertebeden kesirli sınır değer probleminin çözümü için varlık teoremleri incelenmiş olup sonuçların geçerliliği uygun bir örnekle desteklenmiştir.



## 2 TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı tanımlar, yardımcı özellikler ve sabit nokta teoremleri ifade edilmiştir.

### 2.1 Tanımlar ve Önermeler

Bu kısımda, bazı kesirli türev ve integral tanımları, bu tanımlara ilişkin örnekler ile bazı temel tanım ve önermeler verilmiştir.

**Tanım 2.1.1. Gamma Fonksiyonu**(A.A Kilbas et al., 1999)

$n \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona Gamma fonksiyonu adı verilir. Gamma fonksiyonuna ait bazı özellikler aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

(i)  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

(ii)  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(iii)  $\Gamma(z) = z!$

**Tanım 2.1.2. Beta Fonksiyonu**(A.A Kilbas et al., 2006)

Genelleştirilmiş integral yardımı ile aşağıdaki şekilde tanımlanan iki değişkenli fonksiyon Beta fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt, \quad Re(m), Re(n) > 0$$

Beta fonksiyonu birinci çeşit Euler integrali olarakta adlandırılır.

#### Beta Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

1.  $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

2.  $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

3.  $\beta(m, n) = \beta(m + 1, n) + \beta(m, n + 1)$

**Tanım 2.1.3.** (A.A Kilbas et al., 1999)  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  bir kapalı aralık olsun.  $\beta \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $\beta$ 'inci mertebeden Riemann-Liouville sağdan ve soldan kesirli türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$(D_{a^+}^\beta w)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{w(t) dt}{(x - t)^{\beta - n + 1}} \quad (x > a)$$

$$(D_{b^-}^\beta w)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \left( \frac{-d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{w(t) dt}{(t - x)^{\beta - n + 1}} \quad (x < b)$$

**Örnek 2.1.1.**  $f(x) = x$  fonksiyonunun  $\beta = \frac{1}{2}$ 'inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplayalım.

Tanım2.1.3 gözüyle bakıldığında  $\beta = \frac{1}{2}$  ve  $n = 1$  olduğundan

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x - t)^{1 - 1 + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x - t)^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir.  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  olduğundan

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x - t)^{\frac{1}{2}}}$$

olur.

$\int_0^x \frac{t dt}{(x - t)^{\frac{1}{2}}}$  integralini hesaplayalım.

$u = x - t$  dönüşümü uygulanırsa  $dt = -du$  olur. Böylelikle yukarıda ele alınan integral

$$\int \frac{x - u}{\sqrt{u}} (-du) = \int \frac{u - x}{\sqrt{u}} du$$

$$= \int \sqrt{u} du - x \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x\sqrt{u}$$

ifadesine dönüşür. Dönüşümdeki eşitliğin tekrar yerine yazılması durumunda

$$\int \frac{x - u}{\sqrt{u}} (-du) = \int \frac{u - x}{\sqrt{u}} du = \left[ \frac{2(x - t)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x\sqrt{x - t} \right]_0^x$$

$$= - \left( \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$D^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left( \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

elde edilmiş olur.

**Tanım 2.1.4.** (A.A Kilbas et al., 1999)  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  bir kapalı aralık olsun.  $\alpha \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $\alpha$ 'ncı mertebeden Riemann-Liouville sağdan ve soldan kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$(I_{a^+}^\alpha w)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{w(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a)$$

$$(I_{b^-}^\alpha w)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{w(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b)$$

**Örnek 2.1.2.**  $x^n$  polinom fonksiyonun  $\alpha$ 'ncı mertebeden Riemann-Liouville integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(x^n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^n dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^n dt \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^n dt \end{aligned}$$

$\frac{t}{x} = u$ ,  $dt = xdu$  dönüşümünde  $t = a$  alalım. O halde dönüşüm yukarıdaki eşitliğe uygulandığında

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a}{x}}^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n du \\ &= \frac{x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n du \quad (a=0) \\ &= \frac{x^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)} \beta(n+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$I_a^\alpha(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} x^{n+\alpha}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle polinom fonksiyonların  $\alpha$ 'ncı mertebeden Riemann-Liouville integrali yukarıdaki eşitlik ile ifade edilir.

**Tanım 2.1.5.** (R. Almeida et al., 2018)  $\beta > 0$  öyle ki  $m - 1 < \beta < m$  ve  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her  $t \in [a, b]$  için  $\Theta'(t) \neq 0$  olmak üzere  $\Theta \in C^m[a, b]$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında artan, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde  $w$  fonksiyonunun  $\beta$ 'inci mertebeden soldan  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \Theta'(s) (\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} w(s) ds$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\Gamma(\cdot)$  Gamma fonksiyonudur. Eğer  $\Theta(t) = t$  ve  $\Theta(t) = \ln t$  alınırsa o zaman yukarıda verilen  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli integrali sırasıyla Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerine dönüşür.

**Örnek 2.1.3.**  $w : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $w(t) = t^4$  fonksiyonunun  $\frac{1}{2}$ 'inci mertebeden  $\Theta(t) = t^2$  fonksiyonuna göre  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli integralini alalım. Burada Tanım2.1.5 'ten  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $w(t) = t^4$ ,  $\Theta(t) = t^2$ ,  $\Theta'(t) = 2t$  olur ve  $\Theta(t)$ 'nin  $[1, 3]$  aralığında artan ve  $\Theta'(t) \neq 0$  olduğu açıktır. Tanım2.1.5 'ten

$$\begin{aligned} I_{1^+}^{\frac{1}{2}, t^2}(t^4) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_1^t 2s(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}-1} s^4 ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_1^t \frac{2s^5}{(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

elde edilir.  $t^2 - s^2 = u$  değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int \frac{(t^2 - u)^2}{\sqrt{u}} (-du) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int \frac{t^4 + u^2 - 2t^2 u}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left( t^4 \int \frac{1}{\sqrt{u}} du + \int u^{\frac{3}{2}} du - 2t^2 \int u^{\frac{1}{2}} du \right) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left( 2t^4 \sqrt{u} + \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^2 u^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

ulaşılır.  $u$  bu sonuçta yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} I_{1^+}^{\frac{1}{2}, t^2}(t^4) &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left( 2t^4 \sqrt{t^2 - s^2} + \frac{2}{5} (t^2 - s^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^2 (t^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^t \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left( 2t^4 \sqrt{t^2 - 1} + \frac{2}{5} (t^2 - 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^2 (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Ayrıca Örnek2.1.2 'den  $w(t) = t^4$  fonksiyonun  $\beta = \frac{1}{3}$ 'ncü mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali hesaplandığında

$$I_1^{\frac{1}{3}}(t^4) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{11}{2})}t^{\frac{9}{2}}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak görüldüğü üzere  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli integrali ile Riemann-Liouville integrali farklı integrallerdir.

**Tanım 2.1.6.** (R. Almeida et al., 2018)  $m - 1 < \beta < m$  ve  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her  $t \in [a, b]$  için  $\Theta'(t) \neq 0$  olmak üzere  $\Theta \in C^m[a, b]$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında artan, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde  $w$  fonksiyonunun  $\beta$ 'ncü mertebeden soldan  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) &= \left[ \frac{1}{\Theta'(t)} \frac{d}{dt} \right]^m I_{a^+}^{m-\beta, \Theta} w(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left( \frac{1}{\Theta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \Theta'(s) (\Theta(t) - \Theta(s))^{m-\beta-1} w(s) ds \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada  $\beta \notin \mathbb{N}$  için  $m = \lfloor \beta \rfloor + 1$  ve  $\beta \in \mathbb{N}$  için  $m = \beta$  dir.  $\lfloor \beta \rfloor$ ,  $\beta$ 'nin tam değerini ifade etmektedir.

**Örnek 2.1.4.**  $w : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $w(t) = t^3$  fonksiyonunun  $\frac{1}{3}$ 'ncü mertebeden  $\Theta(t) = t^3 + 1$  fonksiyonu için  $\Theta$ -Riemann-Liouville kesirli türevini bulalım. Burada Tanım2.1.6 'dan  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 3$ ,  $w(t) = t^3$ ,  $\Theta(t) = t^3 + 1$ ,  $\Theta'(t) = 3t^2$  olur. Tanım2.1.6 'dan

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\frac{1}{3}, t^3+1}(t^3) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{3})} \left( \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \right)^1 \int_0^t 3s^2(t^3 + 1 - s^3 - 1)^{1-\frac{1}{3}-1} s^3 ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left( \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \right)^1 \int_0^t 3s^5(t^3 - s^3)^{-\frac{1}{3}} ds \end{aligned}$$

olur. Burada  $\sqrt[3]{t^3 - s^3} = u$  değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \int \frac{3(t^3 - u^3)}{u} (-u^2) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \int (-3u)(t^3 - u^3) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \int (3u^4 - 3ut^3) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{3u^5}{5} - \frac{3u^2}{2} t^3 \right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada  $u$  tekrar yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{5}(t^3 - s^3)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(t^3 - s^3)^{\frac{2}{3}}t^3 \Big|_0^t \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \frac{d}{dt} \left( -\frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^5 \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{3t^2} \left( \frac{45t^4}{10} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{3t^2}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Tanım 2.1.7.** (R. Almeida et al., 2018)  $m - 1 < \beta < m$  olsun.  $w \in C^{m-1}[a, b]$  ve  $t \in [a, b]$  iken  $\Theta'(t) \neq 0$  olmak üzere  $\Theta \in C^m[a, b]$  artan, türevlenebilir bir fonksiyon olsun.  $w \in C^{m-1}[a, b]$  olmak üzere bir  $w$  fonksiyonunun  $\beta$ 'nci mertebeden soldan  $\Theta$ -Caputo türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = D_{a^+}^{\beta, \Theta} \left[ w(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{w_{\Theta}^{[j]}(a)}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \right]$$

Burada  $w_{\Theta}^{[j]}(t) = \left[ \frac{1}{\Theta'(t)} \frac{d}{dt} \right]^j w(t)$  dir. Eğer  $\beta \in \mathbb{N}$  ise  $m = \beta$  dir. O halde

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = w_{\Theta}^{[m]}(t)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Eğer  $\beta \notin \mathbb{N}$  ise  $m = \lfloor \beta \rfloor + 1$  dir. O halde

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \int_a^t \Theta'(s) (\Theta(t) - \Theta(s))^{m-\beta-1} w_{\Theta}^{[m]}(s) ds$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada  $\lfloor \beta \rfloor$ ,  $\beta$ 'nin tam değerini ifade etmektedir. Bu tanımda,  $\Theta(t) = t$  olduğunda Caputo kesirli türev operatörü oluşurken  $\Theta(t) = \ln t$  olduğunda da Caputo-Hadamard kesirli türevi oluşmaktadır.

**Örnek 2.1.5.**  $w : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $w(t) = \frac{t^2}{2}$  fonksiyonunun  $\Theta(t) = t^2$  fonksiyonu için  $\beta = \frac{1}{2}$ 'nci mertebeden genelleştirilmiş Caputo türevini hesaplayalım.

Burada Tanım2.1.7 'den  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $w(t) = \frac{t^2}{2}$ ,  $\Theta(t) = t^2$ ,  $\Theta'(t) = 2t$  ve  $m = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1 = 1$  olur.  $\Theta(t)$ 'nin  $[1, 2]$  aralığında artan olduğu açıktır. Ayrıca  $w_{\Theta}^{[1]}(t) = \frac{w'(t)}{\Theta'(t)} = \frac{t}{2t}$  olur. Tanım2.1.7 'den

$$\begin{aligned} {}^c D_{1^+}^{\frac{1}{2}, t^2} \left( \frac{t^2}{2} \right) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \int_1^t 2s(t^2 - s^2)^{1 - \frac{1}{2} - 1} \frac{s}{2s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_1^t \frac{s}{\sqrt{t^2 - s^2}} ds \end{aligned}$$

olur. Burada  $t^2 - s^2 = u^2$  değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int \frac{-udu}{u} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} u \end{aligned}$$

elde edilir.  $u = \sqrt{t^2 - s^2}$  bu sonuçta yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} {}^c D_{1^+}^{\frac{1}{2}, t^2} \left( \frac{t^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{t^2 - s^2} \Big|_1^t \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (-\sqrt{t^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t^2 - 1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

**Önerme 2.1.1.** (*R. Almeida et al., 2018*)  $\beta > 0$  ve  $\Theta \in C[a, b]$  olsun.  $O$  zaman  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

1. Eğer  $w \in C[a, b]$  ise  ${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} I_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = w(t)$  dir.
2.  $c_j = \frac{w^{[j]}(a)}{j!}$  olmak üzere eğer  $w \in C^{m-1}[a, b]$  ise o zaman

$$I_{a^+}^{\beta, \Theta} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = w(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j [\Theta(t) - \Theta(a)]^j$$

dir.

**Önerme 2.1.2.** (M.S. Abdo et al., 2019) Kabul edelim ki  $\beta > 0$  ve  $w, \Theta \in C[a, b]$  olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

1.  $C[a, b]$  kümesinden  $C[a, b]$  kümesine tanımlı  $I_{a^+}^{\beta, \Theta}(\cdot)$  operatörü sınırlı ve lineer bir operatördür.
2.  $I_{a^+}^{\beta, \Theta} w(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} I_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = 0$  dir.

**Önerme 2.1.3.** (M.S. Abdo et al., 2019)  $\gamma, \beta > 0$  ve  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1.  $I_{a^+}^{\gamma, \Theta} [\Theta(t) - \Theta(a)]^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)} [\Theta(t) - \Theta(a)]^{\gamma+\beta-1}$
2.  ${}^c D_{a^+}^{\gamma, \Theta} [\Theta(t) - \Theta(a)]^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} [\Theta(t) - \Theta(a)]^{\beta-\gamma-1}$
3.  ${}^c D_{a^+}^{\gamma, \Theta} [\Theta(t) - \Theta(a)]^j = 0, \forall j \in 0, 1, \dots, m-1, m \in \mathbb{N}$
4.  $I_{a^+}^{\gamma, \Theta} I_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = I_{a^+}^{\gamma+\beta, \Theta} w(t)$

**Tanım 2.1.8.**  $\mathbb{M}$  ve  $\mathbb{N}$  iki normlu uzay ve  $T : D(T) \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  operatörü için eğer,

$v_0 \in D(T)$  için  $\epsilon > 0$  olduğunda,

$$\forall v \in D(T), \|v - v_0\| < \delta \text{ iken } \|Tv - Tv_0\| < \epsilon$$

olacak şekilde öyle bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $T$  operatörüne  $v = v_0$  noktasında sürekli operatör denir.

Eğer  $T$  operatörü  $\forall v \in D(T)$  olacak şekilde sürekli ise bu operatör sürekli bir operatördür.

**Tanım 2.1.9.** (E. Kreyszing, 1978)  $K, \mathbb{U}$  normlu vektör uzayının bir alt kümesi olmak üzere, eğer  $K$ 'daki tüm yakınsak dizilerin yakınsadığı limitler de  $K$  içinde kalıyorsa o halde  $K$ 'ya  $\mathbb{U}$  uzayının kapalı alt kümesi denir.

**Tanım 2.1.10.** (J.B. Conway, 1990)  $K, \mathbb{U}$  normlu vektör uzayının bir alt kümesi olmak üzere, eğer  $\forall u \in K$  için  $\|u\| \leq S$  olacak şekilde öyle bir  $S > 0$  sayısı var ise o zaman  $K$ 'ya sınırlı alt küme denir.

**Tanım 2.1.11.** (E. Kreyszing, 1978)  $K, \mathbb{U}$  normlu vektör uzayının bir alt kümesi olmak üzere, eğer  $K$  kümesinin elemanlarından oluşan her diziden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa ve yakınsadığı değer yine  $K$  kümesi içerisinde ise  $K$ 'ya kompakt alt küme denir.

**Tanım 2.1.12.** (J.B. Conway, 1990)  $\mathbb{A}$  ve  $\mathbb{B}$  normlu uzaylar olsun. Eğer her  $K \subset \mathbb{A}$  sınırlı kümesinin  $M : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  operatörü altındaki görüntüsünün kapanışı  $\overline{M(K)}$  kompakt ise  $M$  operatörüne kompakt operatör denir.

**Tanım 2.1.13.** (J.B. Conway, 1990)  $(U, \|\cdot\|)$  bir Banach uzay ve  $S : U \rightarrow U$  bir dönüşüm olsun.  $\forall p, r \in U$  için  $\|Sp - Sr\| \leq c\|p - r\|$  olacak şekilde öyle bir  $c \in (0, 1)$  var ise  $S$  dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

**Tanım 2.1.14.** (J.B. Conway, 1990) Eğer bir dönüşüm kompakt ve sürekli ise o zaman bu dönüşüm tamamen sürekli bir dönüşüm denir.

**Tanım 2.1.15.** Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi bir prekompakt kümeye dönüştürüyorsa bu dönüşüme kompakt bir dönüşümdür denir.

**Tanım 2.1.16.** Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa bu küme prekompakt küme denir. Eğer yakınsadığı değer yine aynı küme içerisinde bulunuyorsa o zaman bu küme kompakt küme denir.

**Tanım 2.1.17.**  $N, C[a, b]$  içinde bir küme olsun.

i.  $\forall y \in N, \forall x \in [a, b]$  için  $|y(x)| \leq l$  olacak şekilde bir  $l$  sayısı varsa  $N$  kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.

ii.  $\epsilon > 0$  verilsin.  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  ve  $\forall y \in N$  için  $|x_1 - x_2| < \delta$  eşitsizliği var iken  $|y(x_1) - y(x_2)| < \epsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $N$  kümesine ait olan fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir.

## 2.2 Teoremler

Bu kısımda tezde sunulan ana sonuçlar ağırlıklı olarak aşağıda verilen Arzela-Ascoli teoremi ve temel ve önemli sabit nokta teoremlerine dayanmaktadır.

**Teorem 2.2.1. (Arzela-Ascoli Teoremi)** (J.B. Conway, 1990)

Bir  $N \subset C[a, b]$  kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin bir prekompakt alt

kümesi olması için gerek ve yeter koşul  $N$  kümesine ait olan fonksiyonların aynı dereceden sürekli ve aynı dereceden sınırlı olmasıdır.

**Teorem 2.2.2. (*Banach Sabit Nokta Teoremi*)**(S. Banach, 1922)

$U$  bir Banach uzayı ve  $K$ ,  $U$  Banach uzayının kapalı alt kümesi olsun. Eğer  $A : K \rightarrow K$  bir daralma dönüşümü ise o zaman  $K$  üzerinde  $A(u) = u$  olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır.

**Teorem 2.2.3. (*Schaefer Sabit Nokta Teoremi*)**(H. Schaefer, 1955)

$U$  bir Banach uzayı ve  $A : U \rightarrow U$  sürekli ve kompakt bir operatör olsun. Ayrıca  $\{u \in U : u = \lambda Au, \exists \lambda \in (0, 1)\}$  kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. O halde  $A$  operatörünün  $U$  Banach uzayı üzerinde bir sabit noktası vardır.

**Teorem 2.2.4. (*Schauder-Tychonov Sabit Nokta Teoremi*)**(D. R. Smart, 1980)

$U$  bir Banach uzayı ve  $K$ ,  $U$  uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi olsun. Eğer  $A : K \rightarrow K$  tamamen sürekli bir operatör ise o zaman  $A$  operatörünün  $K$  içinde en az bir sabit noktası vardır.

### 3 ÜÇ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIK SONUÇLARI

Bu bölümde, genelleştirilmiş Caputo türev içeren, üç noktalı lineer olmayan sınır değer probleminin

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = f(t, w(t)), \quad t \in [a, b], \quad (3.1)$$

$$w_{\Theta}^{[j]}(a) = w_a^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-2, \quad w_{\Theta}^{[m-2]}(b) = \delta w_{\Theta}^{[m-2]}(\eta) \quad (3.2)$$

çözümlerinin varlığı ele alınacaktır.

Burada  $w_a^j \in \mathbb{R}$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots, m-2$ ),  $\eta \in (a, b)$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $w \in C^{m-1}[a, b]$ ,  $w_{\Theta}^{[j]}(t) = \frac{(w_{\Theta}^{[j-1]}(t))'}{\Theta'(t)}$  şeklindedir. Her  $t \in [a, b]$  için  $\Theta'(t) \neq 0$  olmak üzere  $\Theta$  artan ve türevlenebilir bir fonksiyon ve  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyondur. Bu problemde  ${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta}$ ,  $m-1 < \beta \leq m$  ( $m = \lfloor \beta \rfloor + 1$ ) ve  $m \geq 2$  olmak üzere  $\beta$ 'ncü mertebeden  $\Theta$ -Caputo kesirli türevi ifade eder.  $\lfloor \beta \rfloor$ ,  $\beta$ 'nin tam değerini ifade etmektedir.

#### 3.1 Üç Noktalı Sınır Değer Probleminin Green Fonksiyonu

**Önerme 3.1.1.** *Kabul edelim ki  $m-1 < \beta \leq m$  ve  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun.*

$${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w(t) = g(t), \quad t \in [a, b] \quad (3.3)$$

*üç noktalı kesirli diferansiyel denklemi (3.2) sınır koşulları ile ele alınsın.*

*Green fonksiyonları*

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & s \leq \eta \\ G_2(t, s), & s \geq \eta \end{cases}$$

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{(m-1)! \Delta \Gamma(\beta - m + 2)} [(\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m+1} - (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1}] \\ + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} & s \leq t \\ \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{(m-1)! \Delta \Gamma(\beta - m + 2)} [(\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m+1} - (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1}] & s \geq t \end{cases}$$

ve

$$G_2(t, s) = - \begin{cases} \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{(m-1)! \Delta \Gamma(\beta - m + 2)} (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1} - \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} & s \leq t \\ \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{(m-1)! \Delta \Gamma(\beta - m + 2)} (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1} & s \geq t \end{cases}$$

ve

$$\Delta := \Theta(b) - \Theta(a) - \delta(\Theta(\eta) - \Theta(a))$$

olmak üzere

$w \in C^{m-1}[a, b]$  fonksiyonu (3.3)-(3.2) ile verilen üç nokta kesirli sınır değer probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \\ &+ \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)! \Delta} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ &+ \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) g(s) ds \end{aligned}$$

$w(t)$  fonksiyonu kesirli integral denkleminin bir çözümüdür.

*Kanıt.* İlk olarak kabul edelim ki  $w \in C^{m-1}[a, b]$ , (3.3)-(3.2) probleminin bir çözümü olsun. O halde Önerme (2.1.1)'den hareketle

$$\begin{aligned} w(t) &= c_0 + c_1(\Theta(t) - \Theta(a)) + c_2(\Theta(t) - \Theta(a))^2 + \dots + c_{m-1}(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \Theta'(s) (\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} g(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \Theta'(s) (\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} g(s) ds \quad (3.4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (3.2) deki sınır koşulu  $w(a) = w_a$  yı kullanarak  $c_0 = w_a$  elde edilir.  $j = 1$  için

$$\begin{aligned} w_{\Theta}^{[1]}(t) &= \frac{w'(t)}{\Theta'(t)} = c_1 + 2c_2(\Theta(t) - \Theta(a)) + \dots + (m-1)c_{m-1}(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-2} g(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} j c_j (\Theta(t) - \Theta(a))^{j-1} + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-2} g(s) ds \end{aligned}$$

sınır koşulu  $w_{\Theta}^{[1]}(a) = w_a^1$  olduğundan  $c_1 = w_a^1$  elde edilir.  $j = 2$  için

$$\begin{aligned} w_{\Theta}^{[2]}(t) &= \frac{(w_{\Theta}^{[1]}(t))'}{\Theta'(t)} = 2c_2 + 6c_3(\Theta(t) - \Theta(a)) + \dots + (m-2)(m-1)(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-3} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-2)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-3} g(s) ds \\ &= \sum_{j=2}^{m-1} j(j-1)c_j (\Theta(t) - \Theta(a))^{j-2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-2)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-3} g(s) ds \end{aligned}$$

ve dolayısıyla sınır koşulundan  $w_{\Theta}^{[2]}(a) = w_a^2$  olduğundan  $c_2 = \frac{w_a^2}{2!}$  elde edilir.

Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned} w_{\Theta}^{[m-2]}(t) &= \frac{(w_{\Theta}^{[m-3]}(t))'}{\Theta'(t)} = \sum_{j=m-2}^{m-1} j(j-1)(j-2)\dots(j-(m-2))c_j (\Theta(t) - \Theta(a))^{j-m+2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-m+2)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-m+1} \\ &= (m-2)!c_{m-2} + (m-1)!c_{m-1}(\Theta(t) - \Theta(a)) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-m+2)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-m+1} g(s) ds \end{aligned}$$

ulaşılır ve  $w_{\Theta}^{[j]}(a) = w_a^j$  sınır koşulundan

$$c_j = \frac{w_a^j}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, m-2$$

elde edilir.

$w_{\Theta}^{[m-2]}(b) = \delta w_{\Theta}^{[m-2]}(\eta)$  son sınır koşulundan

$$c_{m-1} = \frac{1}{\Delta(m-1)!} \left\{ (\delta-1)w_a^{m-2} - \frac{1}{\Gamma(\beta-m+2)} \left[ \int_a^b \Theta'(s)(\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1} g(s) ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_a^{\eta} \Theta'(s)(\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m+1} g(s) ds \right] \right\}$$

$c_{m-1}$  katsayısı elde edilir. Öyleyse  $c_j$  ler (3.4) denkleminde yerine konulduğunda,

$$w(t) = \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta-1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ - \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{\Gamma(\beta-m+2)\Delta(m-1)!} \left\{ \int_a^b \Theta'(s)((\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1} g(s) ds \right. \\ \left. - \int_a^{\eta} \Theta'(s)(\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m+1} g(s) ds \right\} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \Theta'(s)(\Theta(t) - \Theta(s))^{\beta-1} g(s) ds$$

integral denklemi elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında  $G_1(t, s)$ ,

$G_2(t, s)$  ve  $G(t, s)$  Green fonksiyonları bulunur ve böylece (3.3)-(3.2) problemi

$$w(t) = \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta-1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ + \int_a^b \Theta'(s)G(t, s)g(s) ds$$

integral denklemi olarak ifade edilir.  $\square$

**Önerme 3.1.2.** *Green fonksiyonu  $G(t, s)$ , her  $t, s \in [a, b]$ 'de sürekli bir fonksiyondur ve Önerme 3.1.1 'de verilen  $G_i(t, s)$  ( $i = 1, 2$ ) fonksiyonları aşağıda verilen eşitsizlikleri sağlar.*

(i) Her  $t, s \in [a, b]$  için

$$|G_1(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^{m-1}}{\Gamma(\beta-m+2)\Delta(m-1)!} (\Theta(b) - \Theta(\eta))^{\beta-m+1} \\ + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

(ii) Her  $t, s \in [a, b]$  için

$$|G_2(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta}}{\Gamma(\beta-m+2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

*Kanıt.* Green fonksiyonu  $G(t, s)$  nin  $[a, b] \times [a, b]$  üzerinde sürekli olduğu açıktır.

Şimdi ilk olarak (i) koşulunun doğruluğu gösterilecektir.

Eğer  $s \leq \eta \leq t$ ,  $0 < \beta - m + 1 \leq 1$ ,  $0 < \delta < 1$  ve  $\Gamma(\cdot)$  pozitif fonksiyon olduğundan

$$|G_1(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^{m-1}}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} [(\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m+1} - (\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m+1}] \\ + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

şeklindedir.  $f(t) = (\Theta(b) - t)^{\beta-m+1} - (\Theta(\eta) - t)^{\beta-m+1}$  fonksiyonu artan olduğundan  $s \leq \eta$  için  $\Theta(s) \leq \Theta(\eta)$  dir ve dolayısıyla  $f(\Theta(s)) \leq f(\Theta(\eta))$  olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir.  $s \geq t$  iken eşitsizliğin sağlandığı da kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi de (ii) koşulunun doğruluğu gösterilecektir.

$\beta - 1 \leq m - 1$  ve  $m \geq 2$  iken eğer  $s \leq t$  ise o zaman

$$|G_2(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^\beta}{\Gamma(\beta - m + 1)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

şeklindedir. Böylece eşitsizliğin doğruluğunu göstermiş olduk. Benzer şekilde  $s \geq t$  için eşitsizliğin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.  $\square$

**Sonuç 3.1.1.** *Green fonksiyonu  $G(t, s)$  (3.1)-(3.2) problemi için aşağıdaki eşitsizliği sağlar.*

$$|G(t, s)| \leq (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1} \left[ \frac{\Theta(b) - \Theta(a)}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right]$$

*Kanıt.* Önerme 3.1.2 den

$$|G_1(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^{m-1}}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} (\Theta(b) - \Theta(\eta))^{\beta-m+1} \\ + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1} \\ \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^\beta}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

dir. Benzer şekilde

$$|G_2(t, s)| \leq \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))^\beta}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1}$$

dir. O halde Green fonksiyonu

$$|G(t, s)| \leq (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1} \left[ \frac{\Theta(b) - \Theta(a)}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right]$$

dir. Ayrıca  $G(t, s)$  Green fonksiyonunun sağladığı eşitsizliğin sağ tarafındaki sayıyı  $M$  ile gösterelim yani

$$|G(t, s)| \leq (\Theta(b) - \Theta(a))^{\beta-1} \left[ \frac{\Theta(b) - \Theta(a)}{\Gamma(\beta - m + 2)\Delta(m-1)!} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right] := M$$

□

## 3.2 Varlık Teoremleri

**Teorem 3.2.1.** *Kabul edelim ki*

(U1)  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve öyle bir  $k_0 \in (0, 1)$  sayısı vardır ki  $f$  fonksiyonu

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq k_0 |w_1 - w_2|, \quad t \in [a, b], \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlasın. Eğer

$$Mk_0(\Theta(b) - \Theta(a)) < 1$$

ise o zaman üç noktalı sınır değer problemi (3.1)-(3.2) tek bir çözüme sahiptir.

Burada  $M$ ,  $G(t, s)$  Green fonksiyonunun Sonuç 3.1.1 de verilen üst sınırüdür.

*Kanıt.* Önerme 3.1.1'e göre eğer  $w \in C^{m-1}[a, b]$  fonksiyonu aşağıdaki eşitliği sağlıyorsa o halde (3.1)-(3.2) probleminin bir çözümüdür.

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \\ &+ \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta-1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ &+ \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \end{aligned}$$

Burada  $C[a, b]$  aşağıdaki supremum normu ile normlanmış sürekli fonksiyonlar uzayı olmak üzere

$$\|u\| = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|$$

$C[a, b]$  uzayı bu normla birlikte bir Banach uzayıdır.

$$P = \{ w \in C^{m-1}[a, b] : {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} w \in C[a, b] \} \quad (3.5)$$

kümesini ele alalım ve  $T : P \rightarrow P$  operatörünü

$$\begin{aligned} (Tw)(t) &= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \\ &+ \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta - 1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\ &+ \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Öncelikle (3.6) de verilen  $T$  operatörünün iyi tanımlanmış bir operatör olduğu yani  $T(P) \subseteq P$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle  $w \in C^{m-1}[a, b]$  fonksiyonu için  $Tw \in C^{m-1}[a, b]$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} (Tw(t)) &= {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} \left[ \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta - 1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \right. \\ &+ \left. \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \right] \\ &= {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} I_a^{\beta, \Theta} f(t, w(t)) \\ &+ {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} \left[ \frac{1}{(m-2)!} w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \right] \\ &+ {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} \left[ \frac{\delta - 1}{\Delta(m-1)!} w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1} \right] \\ &+ \left\{ \int_a^\eta \Theta'(s) [(\Theta(\eta) - \Theta(s))^{\beta-m} - (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m}] f(s, w(s)) ds \right. \\ &\left. - \int_\eta^b \Theta'(s) (\Theta(b) - \Theta(s))^{\beta-m} f(s, w(s)) ds \right\} \frac{{}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-1}}{\Gamma(\beta - m - 1) \Delta(m-1)!} \\ &= f(t, w(t)) \end{aligned}$$

elde edilir.  $f(t, w(t))$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli olduğundan  ${}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} (Tw(t)) \in C[a, b]$  dir.

$w_1, w_2 \in P$  olsun. Her  $t \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned}
|Tw_1(t) - Tw_2(t)| &= \left| \int_a^b \Theta'(s)G(t, s)f(s, w_1(s))ds - \int_a^b \Theta'(s)G(t, s)f(s, w_2(s))ds \right| \\
&= \left| \int_a^b \Theta'(s)G(t, s)(f(s, w_1(s)) - f(s, w_2(s)))ds \right| \\
&\leq \int_a^b |\Theta'(s)| |G(t, s)| |f(s, w_1(s)) - f(s, w_2(s))| ds \\
&\leq M \int_a^b \Theta'(s)ds k_0 \|w_1 - w_2\|
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|Tw_1 - Tw_2\| \leq Mk_0(\Theta(b) - \Theta(a))\|w_1 - w_2\|$$

elde edilir. Böylece

$Mk_0(\Theta(b) - \Theta(a)) < 1$  koşulundan  $T$  operatörü  $P$  den  $P$  ye bir daralma dönüşümüdür. Banach sabit nokta teoremine göre bir tek  $w \in P$  vardır öyle ki  $Tw(t) = w(t)$  dir. O halde  $w$ , (3.1)-(3.2) probleminin tek çözümüdür.  $\square$

Bir sonraki sonuç Schaefer sabit nokta teoremine dayandırılacaktır.

**Teorem 3.2.2.** *Varsayalım ki*

(U2)  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli ve her  $(t, w) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  için öyle bir  $k_1$  sayısı vardır ki  $f$  fonksiyonu

$$|f(t, w(t))| \leq k_1|w|$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer

$$Mk_1(\Theta(b) - \Theta(a)) < 1 \tag{3.7}$$

ise o zaman (3.1)-(3.2) ile verilen üç nokta sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır. Burada  $M, G(t, s)$  Green fonksiyonunun Sonuç 3.1.1 de verilen üst sınırıdır.

*Kanıt.* Kanıt Schaefer sabit nokta teoremi kullanılarak yapılacaktır.

Öncelikle sırasıyla (3.5)-(3.6) ile tanımlanan  $P$  kümesini ve  $T : P \rightarrow P$  operatörünü ele alalım. Kanıt dört adımda yapılacaktır.

Adım 1.  $T$  operatörünün sürekli bir operatör olduğu gösterelim.

$\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $P$  de bir dizi olsun öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $P$  de  $w_n \rightarrow w \in P$  dir. O halde (3.6) denkleminde her  $t \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned} |Tw_n(t) - Tw(t)| &= \left| \int_a^b \Theta'(s)G(t, s) (f(s, w_n(s)) - f(s, w(s))) ds \right| \\ &\leq \int_a^b \Theta'(s)|G(t, s)||f(s, w_n(s)) - f(s, w(s))|ds \\ &\leq M\|f(s, w_n(s)) - f(s, w(s))\|(\Theta(b) - \Theta(a)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|Tw_n - Tw\| \leq M(\Theta(b) - \Theta(a))\|f(s, w_n(s)) - f(s, w(s))\|$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$f$  fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı  $n \rightarrow \infty$  iken  $\|Tw_n - Tw\| \rightarrow 0$  olur.

O halde  $T$  operatörü de sürekli bir operatördür.

Adım 2.  $T$  operatörünün sınırlı kümeleri  $P$  de düzgün sınırlı kümelere

dönüştürdüğünü gösterelim. Şöyle ki her  $r_1 > 0$  için öyle bir  $r_2 > 0$

vardır ki her  $w \in B_{r_1} := \{w \in P : \|w\| \leq r_1\}$  için  $\|Tw\| \leq r_2$  sağlanır.

Gerçekten,  $w \in B_{r_1}$  olsun. Her  $t \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned}
|Tw(t)| &= \left| \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \right. \\
&\quad + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta - 1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad \left. + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j \\
&\quad + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] |w_a^{m-2}| (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad + \int_a^b \Theta'(s) |G(t, s)| |f(s, w(s))| ds \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j \\
&\quad + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] |w_a^{m-2}| (\Theta(b) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad + k_1 r_1 M \int_a^b \Theta'(s) ds \\
&= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j \\
&\quad + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] |w_a^{m-2}| (\Theta(b) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad + k_1 r_1 M (\Theta(b) - \Theta(a))
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
r_2 &:= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] \\
&\quad \times (\Theta(b) - \Theta(a))^{m-2} |w_a^{m-2}| + k_1 r_1 M (\Theta(b) - \Theta(a))
\end{aligned}$$

sayısı vardır ki  $\|Tw\| \leq r_2$  dir. Böylece  $Tw$  düzgün sınırlı bir kümedir.

Adım 3. Bu adımda  $T$  operatörünün sınırlı kümeleri  $P$  deki aynı dereceden sürekli kümelere dönüştürdüğünü göstereyim.  $B_{r_1}$  Adım 2. deki gibi  $P$  nin sınırlı bir kümesi olsun ve  $w \in B_{r_1}$  olsun.

O halde  $t_1 < t_2$  olacak şekilde  $t_1, t_2 \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned}
|Tw(t_2) - Tw(t_1)| &= \left| \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t_2) - \Theta(a))^j \right. \\
&\quad + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t_2) - \Theta(a))(\delta-1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t_2) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad + \int_a^b \Theta'(s) G(t_2, s) f(s, w(s)) ds - \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t_1) - \Theta(a))^j \\
&\quad - \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t_1) - \Theta(a))(\delta-1)}{\Delta(m-1)!} \right] w_a^{m-2} (\Theta(t_1) - \Theta(a))^{m-2} \\
&\quad \left. - \int_a^b \Theta'(s) G(t_1, s) f(s, w(s)) ds \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^j - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^j| \\
&\quad + \frac{|w_a^{m-2}|}{(m-2)!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^{m-2} - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^{m-2}| \\
&\quad + \frac{(1-\delta)|w_a^{m-2}|}{\Delta(m-1)!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^{m-1} - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^{m-1}| \\
&\quad + \int_a^b \Theta'(s) |G(t_2, s) - G(t_1, s)| |f(s, w(s))| ds \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^j - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^j| \\
&\quad + \frac{|w_a^{m-2}|}{(m-2)!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^{m-2} - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^{m-2}| \\
&\quad + \frac{(1-\delta)|w_a^{m-2}|}{\Delta(m-1)!} |(\Theta(t_2) - \Theta(a))^{m-1} - (\Theta(t_1) - \Theta(a))^{m-1}| \\
&\quad + k_1 r_1 \int_a^b \Theta'(s) |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$t_1 \rightarrow t_2$  iken  $G(t, s)$  Green fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sifira yaklaşır. Dolayısıyla Arzela-Ascoli teoremine göre  $T : P \rightarrow P$  operatörü kompakt bir operatördür. Sonuç olarak  $T : P \rightarrow P$  operatörü kompakt ve sürekli olduğundan tamamen sürekli dir.

Adım 4.

$$S = \{w \in P : w = \lambda Tw, \exists \lambda \in (0, 1)\}$$

kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$w \in S$  ve  $\lambda \in (0, 1)$  olsun öyle ki  $w = \lambda Tw$  dir. Adım 2. den her  $t \in [a, b]$  için

$$|Tw(t)| \leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1-\delta)}{\Delta(m-1)! (\Theta(b) - \Theta(a))^{2-m}} \right] |w_a^{m-2}| \\ + k_1 \|w\| M (\Theta(b) - \Theta(a))$$

eşitsizliği vardır.

$\lambda \in (0, 1)$  iken  $w \leq Tw$  olduğundan ve dolayısıyla (3.6) eşitsizliğinden

$$\|w\| \leq \|Tw\| \leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1-\delta)}{\Delta(m-1)! (\Theta(b) - \Theta(a))^{2-m}} \right] |w_a^{m-2}| \\ + k_1 M \|w\| (\Theta(b) - \Theta(a))$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece

$$\|w\| \leq \frac{\sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1-\delta)}{\Delta(m-1)! (\Theta(b) - \Theta(a))^{2-m}} \right] |w_a^{m-2}|}{1 - k_1 M (\Theta(b) - \Theta(a))}$$

olur.

Dolayısıyla  $S$  nin sınırlılığı doğrulanmış olur. O halde Schaefer sabit nokta teoreminden hareketle  $P$  kümesi içinde  $T$  operatörünün en az bir  $w$  sabit noktası vardır ve bu özel  $w$  sabit noktası (3.1)-(3.2) probleminin çözümüdür.

Böylece kanıt tamamlanmış olur.  $\square$

**Teorem 3.2.3.** *Kabul edelim ki her  $t \in [a, b]$ ,  $w \in \mathbb{R}$  için*

$$|f(t, w(t))| \leq e(t) + h(t)w(t)$$

*eşitsizliğini sağlayacak şekilde negatif olmayan  $e, h \in C[a, b]$  fonksiyonları var*

*olsun. O halde  $l > 0$  sayısı için*

$$l \geq \frac{\sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1-\delta)}{\Delta(m-1)! (\Theta(b) - \Theta(a))^{2-m}} |w_a^{m-2}|}{1 - M \|h\| (\Theta(b) - \Theta(a))} \\ + \frac{M \|e\| (\Theta(b) - \Theta(a))}{1 - M \|h\| (\Theta(b) - \Theta(a))}$$

*eşitsizliğinin sağlanması halinde (3.1)-(3.2) üç nokta kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.*

*Kanıt.* Kanıt Schauder sabit nokta teoremine dayanmaktadır.

$B_l = \{w \in P : \|w\| \leq l\}$  şeklinde  $P$  nin kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesini tanımlayalım.  $B_l \subset P$  ve  $T : P \rightarrow P$  tamamen sürekli olduğundan  $T : B_l \rightarrow B_l$  operatörü kompakttır. Şimdi,  $w \in B_l$  için  $Tw \in B_l$  olduğunu gösterelim.

Her  $w \in B_l$  için  $\|w\| \leq l$  dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|Tw(t)| &= \left| \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(\delta - 1)}{\Delta(m-1)!} \right] \right. \\
&\quad \times w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \left. \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(t) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] \\
&\quad \times |w_a^{m-2}| (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) |G(t, s)| (e(s) + h(s)w(s)) ds \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\Theta(b) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)!} \right] \\
&\quad \times |w_a^{m-2}| (\Theta(b) - \Theta(a))^{m-2} + M(\|e\| + \|h\| \|w\|) (\Theta(b) - \Theta(a)) \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{|w_a^j|}{j!} (\Theta(b) - \Theta(a))^j + \frac{\Delta(m-1) + (\Theta(b) - \Theta(a))(1 - \delta)}{\Delta(m-1)! (\Theta(b) - \Theta(a))^{2-m}} |w_a^{m-2}| \\
&\quad + M(\|e\| + \|h\|) (\Theta(b) - \Theta(a)) \\
&\leq l
\end{aligned}$$

Böylelikle Schauder sabit nokta teoremine göre  $T$  operatörünün  $w \in B_l$  sabit noktası vardır. Bu nedenle bu sabit nokta (3.1)-(3.2) probleminin  $\|w\| \leq l$  olacak şekilde en az bir çözümüdür.  $\square$

Şimdi üç noktalı kesirli sınır değer probleminin farklı bir varlık sonucunu vermek için alt ve üst kontrol fonksiyonları tanımlayalım.

**Tanım 3.2.1.**  $q > p$  olacak şekilde  $p, q \in \mathbb{R}^+$  olsun. O halde  $w \in [p, q] \subset \mathbb{R}^+$  için üst kontrol fonksiyonu  $\bar{f}(t, w) = \sup_{p \leq \zeta \leq w} f(t, \zeta)$  ve alt kontrol fonksiyonu  $\underline{f}(t, w) = \inf_{w \leq \zeta \leq q} f(t, \zeta)$  şeklinde tanımlanır.  $\bar{f}(t, w)$  ve  $\underline{f}(t, w)$  fonksiyonlarının  $[p, q]$  üzerinde azalmayan ve aşağıdaki eşitsizliği

$$\underline{f}(t, w) \leq f(t, w) \leq \bar{f}(t, w)$$

sağladığı açıktır.

Şimdi (3.1)-(3.2) problemi için alt ve üst çözümleri tanımlayalım.

**Tanım 3.2.2.**  $p \leq u \leq v \leq q$  olacak şekilde  $u, v \in P$  olsun. Eğer  $v$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} v(t) &\geq \bar{f}(t, v(t)), \quad t \in [a, b] \\ v_{\Theta}^{[j]}(a) &\geq v_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad v_{\Theta}^{[m-2]}(b) \geq \delta v_{\Theta}^{[m-2]}(\eta) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini ya da

$$\begin{aligned} v(t) &\geq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{v_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)! \Delta} \right] \\ &\quad \times v_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, v(s)) ds, \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $v \in P$  fonksiyonuna (3.1)-(3.2) probleminin üst çözümü denir. Eğer  $u$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^{\beta, \Theta} u(t) &\leq \underline{f}(t, u(t)), \quad t \in [a, b] \\ u_{\Theta}^{[j]}(a) &\leq u_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad u_{\Theta}^{[m-2]}(b) \leq \delta u_{\Theta}^{[m-2]}(\eta) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini ya da

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{u_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)! \Delta} \right] \\ &\quad \times u_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $u \in P$  fonksiyonuna (3.1)-(3.2) probleminin alt çözümü denir.

**Teorem 3.2.4.** Varsayalım ki  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ve  $u, v$  sırasıyla (3.1)-(3.2) probleminin alt ve üst çözüm çifti olsun.

O halde (3.1)-(3.2) probleminin

$$u(t) \leq w(t) \leq v(t), \quad t \in [a, b]$$

şeklinde en az bir çözümü vardır.

*Kanıt.* Öyle bir  $K$  kümesini

$$K = \{z \in P : u(t) \leq w(t) \leq v(t), \quad t \in [a, b]\}$$

şeklinde tanımlayalım. Açık ki  $K$  kümesi  $\|u\| = \max_{t \in [a, b]} |u(t)|$  maksimum normu ile normlanmış  $P$  Banach uzayının konveks, sınırlı, kapalı bir alt kümesidir.  $K \subset P$  ve  $T : P \rightarrow P$  tamamen sürekli bir operatör olduğundan  $T : K \rightarrow K$  kompakttır. Şimdi  $w \in K$  için  $Tw \in K$  olduğunu gösterelim. Her  $w \in K$  için  $u \leq w \leq v$  eşitsizliği vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} (Tw)(t) &= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{w_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)!\Delta} \right] \\ &\quad \times w_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, w(s)) ds \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{v_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)!\Delta} \right] \\ &\quad \times v_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) \bar{f}(s, v(s)) ds \\ &\leq v(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Tw)(t) &= \sum_{j=0}^{m-3} \frac{u_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)!\Delta} \right] \\ &\quad \times u_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) f(s, u(s)) ds \\ &\geq \sum_{j=0}^{m-3} \frac{u_a^j}{j!} (\Theta(t) - \Theta(a))^j + \left[ \frac{1}{(m-2)!} + \frac{(\delta-1)(\Theta(t) - \Theta(a))}{(m-1)!\Delta} \right] \\ &\quad \times u_a^{m-2} (\Theta(t) - \Theta(a))^{m-2} + \int_a^b \Theta'(s) G(t, s) \underline{f}(s, u(s)) ds \\ &\geq u(t) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur.

Buradan  $Tw \in K$  ve her  $t \in [a, b]$  için

$$u(t) \leq Tw(t) \leq v(t)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde  $T : K \rightarrow K$  kompakt bir operatördür. Schauder'in sabit nokta teoremine göre  $T$  nin  $K$  kümesinde sabit bir noktası vardır.

Dolayısıyla bu sabit nokta (3.1)-(3.2) probleminin  $C[a, b]$  içinde en az bir  $w(t)$  çözümünün var olduğunu gösterir.  $\square$

Elde ettiğimiz sonuçları destekleyen aşağıdaki örneği verelim.

**Örnek 3.2.1.**  $\Theta(t) = \ln(1+t)^2$  olacak şekilde aşağıda verilen kesirli sınır değer problemini ele alalım.

$$D_{0+}^{\frac{7}{2}, \Theta} w(t) = \frac{w(t)}{10^2(1+w^2(t))}, \quad t \in [0, 2] \quad (3.8)$$

$$w_{\Theta}^{[0]}(0) = w_0^0, \quad w_{\Theta}^{[1]}(0) = w_0^1, \quad w_{\Theta}^{[2]}(0) = w_0^2, \quad w_{\Theta}^{[2]}(2) = \frac{1}{4} w_{\Theta}^{[2]} \left( \frac{1}{2} \right) \quad (3.9)$$

Burada  $\beta = \frac{7}{2}$  ve  $f(t, w(t)) = \frac{w(t)}{10^2(1+w^2(t))}$  olacak şekilde  $[0, 2] \times \mathbb{R}$  aralığında sürekli bir fonksiyon,  $\delta = \frac{1}{4}$  ve  $\eta = \frac{1}{2}$  dir.  $\beta = \frac{7}{2}$  olduğundan,  $m = 4$  elde edilir. Ayrıca her  $t \in [0, 2]$  için  $\Theta(t) = \ln(1+t)^2$  fonksiyonunun artan ve  $\Theta'(t) = \frac{2(1+t)}{(1+t)^2} \neq 0$  olduğu açıktır. Kolaylıkla gösterilebilir ki

$$\Delta = \ln 9 - \ln 1 - \frac{1}{4} \left( \ln \frac{9}{4} - \ln 1 \right) = \ln 9 - \frac{1}{4} \ln \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \ln(9^3 4)$$

dir.

$$\begin{aligned} |G(t, s)| &\leq (\ln 9 - \ln 1)^{\frac{7}{2}-1} \left[ \frac{\ln 9}{3!^{\frac{1}{4}} \ln(9^3 4) \Gamma(\frac{7}{2} - 2)} + \frac{1}{\Gamma(\frac{7}{2})} \right] \\ &= (2, 19)^{\frac{5}{2}} \left( \frac{2, 19}{(1, 5)(7, 97)(0, 88)} + \frac{1}{0, 88} \right) \\ &\cong 4, 24, (0, 2 + 1, 1) = 5, 6 = M \end{aligned}$$

ve

$$|f(t, w)| = \left| \frac{w(t)}{10^2(1+w^2(t))} \right| \leq \frac{1}{10^2} |w(t)|$$

dolayısıyla  $k_1 = \frac{1}{10^2}$  dir.  $M \frac{1}{10^2} \ln 9 < 1$  olduğundan Teorem 3.2.2 e göre (3.8)-(3.9) probleminin en az bir çözümü vardır.

## 4 SONUÇ

Bu tez çalışmasında (3.1)  $\Theta$ -Caputo kesirli türevini içeren diferansiyel denklem ilk olarak

$$z_{\Theta}^{[j]}(a) = z_a^j, \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad z_{\Theta}^{[m-1]}(b) = z_b$$

sınır koşulları ile ele alınmıştır. Fakat Green fonksiyonu  $t = \eta$  olduğunda süreksiz olduğunda Green fonksiyonu için herhangi bir eşitsizlik elde edilememiştir. Bu nedenle sabit nokta teoremleri bu probleme uygulanamamıştır. Daha sonra bu sınır koşulu (3.2)'deki gibi tekrar düzenlenerek ele alınmıştır. Green fonksiyonu elde edilmiş ve Green fonksiyonunun sürekli olduğu görülmüştür. Böylece önerme (3.1.1) ifade edilmiştir. Daha sonra problemin tek bir çözümünün varlığını garantileyen kriterler elde edilerek Banach sabit nokta teoremi ile kanıtlanmıştır. Ardından da en az bir çözümü için hipotezler ifade edilerek Schaefer ve Schauder sabit nokta teoremleri ile kanıtlar yapılmıştır. Daha sonra problemin alt ve üst çözümleri tanımlanarak bir varlık teoremi kanıtlanmıştır. Son olarak sonuçları destekleyen uygun bir örnek verilmiştir.

Bu tezde çalışılan (3.1)-(3.2) sınır değer problemi, giriş kısmında verilen Abdo, Panchal ve Saeed'in (M.S. Abdo et al., 2019) ve Sun, Zeng ve Song' un (Y. Sun et al., 2017) makalelerinde yaptıkları çalışmalarla karşılaştırıldığında üç noktalı sınır koşuluna sahip bir problemdir. Çalışılan bu problem henüz araştırılmamış yeni bir problemdir. İleriye dönük olarak,  $\Theta$ -Caputo türevin uygulamalarına, daha karmaşık problemlere genişletilebilir. Bunlara ek olarak türetilmiş denklemlerin çözümü için sayısal yöntem ve kararlılık analizinin araştırılmasında hem teorik hem de pratik uygulamalar için önemli bilgiler sağlayabilir.

## Kaynaklar

- Abdo, M.S., Panchal, S.K., Saeed, A.M., 2019, Fractional Boundary Value Problem With  $\psi$ -Caputo Fractional Derivative, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 129(65):64-78p.
- Abdo, M.S., Panchal, S.K., 2019, Fractional Integro-Differential Equations Involving  $\psi$ -Hilfger Fractional Derivative, Adv. Appl. Math. Mech., 11(2):338-359p.
- Abdo, M.S., Ibrahim, A.G., Panchal, S.K., 2019, Nonlinear Implicit Fractional Differential Equation Involving  $\psi$ -Caputo Fractional Derivative, Proc. Jangjeon Math. Soc.(PJMS), 22(3):387-400p.
- Agrawal, O.P., 2012, Some Generalized Fractional Calculus Operators and Their Applications in Integral Equations, Frac. Calc. Appl. Anal., 15:700-711p.
- Almeida, R., Malinowska, A.B., Monteiro, M.T., 2018, Fractional Differential Equations With a Caputo Derivative according to a Kernel Function and Their Applications, Math. Method Appl. Sci., 41(1):336-352p.
- Almeida, R., 2017, A Caputo Fractional Derivative of a Function According To Another Function, Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul., 44:460-481p.
- Banach, S., 1922, Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraites et Leur Application Aux Equations Integrales, Fund. Math., 3:133-181p.
- Celik, C., Duman, M., 2012 Crank-Nicholson Method for The Fractional Equation with The Riezs Fractional Derivative, Journal of Computational Physics, 231:1743-1750p.
- Conway, J.B., 1990, A course in functional analysis, 2<sup>nd</sup> edition, Springer.
- Gorial, I.I. (2011). Numerical Methods for Fractional Reaction-Dispersion Equation with Riesz Space Fractional Derivative. Engineering and Techology Journal, 29:709-715p.

- Hussien, S., Abdo, M.S., Panchal, S.K., 2019, Fractional Integro-Differential Equations with Nonlocal Conditions and  $\psi$ -Hilfer Fractional Derivative, *Mathematical Modelling and Analysis*, 24:564-584p.
- Jafari, H., Gejii, V.D., Jafari, H., 2006, Solving linear and nonlinear fractional diffusion and wave equations by adomian decomposition. *Applied Mathematics and Computation*, 180:488-497p.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J, 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematical studies 204. Ed van Mill. Amsterdam.
- Kilbas, A.A., Srivastara, H.M., Trujillo, J.J, 1999, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North- Holland Mathematics Studies, 204:69-79p.
- Karatay, I., Bayramoglu, S.R., Sahin, A., 2011, Implicit Difference Approximation for the Time Fractional Heat Equation with The Nonlocal Condition. *Applied Numerical Mathematics*, 61:1281-1288p.
- Kreyszing, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Jonh Wiley and Sons, New York.
- Caputo, M., 1967, Linear Models of Dissipation whose  $Q$  is almost Frequency Independent-II, *Geophysy. J. R. astr. Soc.*, 13:529-539p.
- Nyamoradi, N., 2012, Multiple Positive Solutions For Fractional Differential Systems, *Ann. Univ.Ferrara*, 58(2):359-369p.
- Panchal, S.K., Wahash, H.A., Abdo, M.S., 2020, Existence and Stability of a Nonlinear Fractional Differential Equation Involving a  $\psi$ -Caputo Operator, *Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl.*, 4(4):266-278p.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach, Yverdon

- Schaefer, H., 1955, Uber Die Methode Der A Priori-Schranken, Math. Ann., 129:415–41p.
- Shivanian, E., 2023, On The Existence and Uniqueness of the Solution of a Nonlinear Fractional Differential Equation with Integral Boundary Condition, Journal of Nonlinear Mathematical Physics.
- Smart, D.R., 1980, Fixed Point Theorems, Vol. 66, Cup Archive.
- Su, L., Wang, W., Yang, Z., 2009, Finite Difference Approximations for The Fractional Advection-Diffusion Equation, Physics Letters A, 373:4405-4408p.
- Sun, Y., Zeng, Z., Song, J., 2017, Existence and Uniqueness for the Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equation, Applied Mathematics, 8(3):312-323p.
- Sun, A., Su, Y., Yuan, Q., Li, T., 2021, Existence of Solutions to Fractional Differential Equations with Fractional-Order Derivative Terms, J. Appl. Math. Comput. Mech., 11(1): 486-520p.
- Vanterler, J., Oliveira, E.C., 2018, On the  $\psi$ -Hilfer Fractional Derivative, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 60(2):72-91p.
- Vong, S., 2013, Positive Solutions of Singular Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions, Math. Comput. Model., 57(5-6):1053-1059p.
- Wahash, H.A., Abdo, M.S., Panchal, S.K., 2020, Existence and Ulam-Hyers Stability of The Implicit Fractional Boundary Value Problem With  $\psi$ -Caputo Fractional Derivative, J. Appl. Math. Comput. Mech., 19(1):89-101p.
- Wang, G., Wang, T., 2016, On Nonlinear Hadamard Type Fractional Differential Equation with P-Laplacian Operator and Strip Condition. J. Nonlinear Sci. Appl., 9:5073–5081p.

Yalçın, S., Çetin, E., Topal, F.S., 2024, Existence Results for a Nonlinear Generalized Caputo Fractional Boundary Value Problem, *Journal of Applied Analysis and Computations*, Excepted.

Yu, Q., Liu, F., Turner, I., Burrage, K. and Vegh, V., 2012, The Use of a Riesz Fractional Differential–Based Approach for Texture Enhancement in Image Processing, *ANZIAM J.*, 54:590-607p.



## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bu tezi meydana getirebilmek için sabırla, anlayışla, özveriyle benimle ilgilenen, vaktini, engin bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, yardımları ile her daim destek olan kıymetli hocam Doç. Dr. Erbil ÇETİN'e ve çalışmamda emeği geçen, engin bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan değerli hocam Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL'a,

Maddi manevi her daim koşulsuz yanımda bulunan, desteklerini, ilgilerini üzerimden eksik etmeyen babam Harun YALÇIN, annem Hatice YALÇIN, kardeşlerim Rabia YALÇIN ve Yakup YALÇIN'a,

Her daim yanımda olan, bana inanan, motive eden, desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen kıymetli Mesut ŞAŞMAZ'a,

Bu süreç boyunca her zaman motivasyon ve güler yüzüyle destek olan sevgili Meltem YILDIRIM'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

01/02/2024

İmzası

Serap YALÇIN

## ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini Tire Atatürk Ortaokulunda tamamladı. Lise öğrenimini Tire Kutsan Anadolu Lisesinde tamamladı.

2020 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Bilgisayar Bilimleri Ağırlıklı Lisans öğretim programından mezun oldu. 2020 yılında Ege Üniversitesi Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı.

2020 yılından itibaren Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans yapmaktadır.

2023 yılında yapmış olduğu Doğrusal Olmayan Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Sınır Değer Probleminin Varlık Sonuçları adlı çalışmayı Turk Cose 2023 5. Uluslararası Türk Dünyası Fen Bilimleri ve Mühendislik kongresinde sunmuştur. 2024 yılında Doç. Dr. Erbil Çetin ve Prof. Dr. Fatma Serap Topal ile birlikte Doğrusal Olmayan Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Sınır Değer Probleminin Varlık Sonuçları isimli makale çalışması yapmıştır.