T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Çağrıhan ÇİMEN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Mayıs, 2024

İSTANBUL

Bu çalışma 08.05.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Sinem GÜLER
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNÇÇİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Danışman hocam Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana olan inancını hiçbir zaman kaybetmemesi ve verdiği emeklerden ötürü sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek lisans süreci boyunca her konuda bana destek veren Dr. Öğr. Üyesi Beran PİRİNÇÇİ'ye teşekkür ederim.

Her daim motivasyon desteğiyle hayatımın her anında yanımda olan Araş. Gör. Seren UÇAR'a teşekkür ederim.

Eğitimim boyunca bana destek olan babam Memet ÇİMEN, annem Ayşe ÇİMEN, kardeşlerim Cem ÇİMEN ve Zeliha ÇİMEN KELEŞ ile yeğenim Zümra KELEŞ'e teşekkür ederim.

Bu çalışma, 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı gereğince TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Mayıs, 2024 Çağrıhan ÇİMEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
N_1	: Diferansiyellenebilir manifold
TN_1	: N_1 manifoldunun teğet demeti
T_pN_1	: p noktasındaki teğet uzay
∇	: Manifold üzerindeki koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	: Weyl koneksiyonu
C^∞	: Sonsuz diferansiyellenebilirlik sınıfı
$\boldsymbol{J}$	: Hemen hemen kompleks yapı
π	: İki manifold arasındaki dönüşüm
π_*	: Bir dönüşümün türev dönüşümü
$\boldsymbol{Çek\pi_*}$	: π Riemann altdaldırmasının dikey dağılımı
$(\boldsymbol{Çek\pi_*})^\perp$	: π Riemann altdaldırmasının yatay dağılımı
$\mathscr{D}^\top$	: Değişmez dağılım
$\mathscr{D}^\theta$	: θ eğik açılı eğik dağılım
$\mathfrak{X}(N_1)$	: Vektör alanları kümesi
R	: Riemann eğrilik tensörü
$\widehat{R}$	: Lifler üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
S	: Ricci eğriliği
τ	: Skaler eğrilik

Kısaltmalar	**Açıklama**
g.k.K.	: Global konformal Kaehler
h.h.H.	: Hemen hemen Hermitiyen
h.h.k.	: Hemen hemen kompleks
y.k.K.	: Yerel konformal Kaehler

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜMEL MANİFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Çağrıhan ÇİMEN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Diferansiyel geometride üzerinde çalışılan en aktif çalışma alanlarından birisi altmanifoldlar teorisidir. Altmanifold kavramı manifoldlar arası dönüşümler aracılığı ile karşımıza iki türlü çıkar. Bunlardan bir tanesi daldırılmış altmanifold diğeri de bir altdaldırmanın lifleridir. Riemanniyen altdaldırma kavramı ise altdaldırılmış manifoldun bir Riemanniyen manifold yapısına sahip olması için altdaldırma kavramının genişletilmesiyle ortaya çıkmıştır. Daha sonra hemen hemen Hermitiyen altdaldırma , ters-değişmez Riemanniyen altdaldırma, eğik altdaldırma, yarı-eğik altdaldırma, yarı-değişmez altdaldırma ve kısmi-eğik altdaldırma gibi yeni altdaldırma tipleri ortaya çıkmıştır. Bir altdaldırmanın tanım kümesine tümel manifold, görüntü kümesine ise baz manifold adı verilir. Bu tezde, tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan yarı-eğik altdaldırmalar çalışılacaktır.

Mayıs 2024, 67 sayfa.

Anahtar kelimeler: yerel konformal Kaehler manifold, yarı-eğik altdaldırma, yatay dağılım, dikey dağılım.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

SEMI-SLANT SUBMERSIONS WHOSE TOTAL MANIFOLDS ARE LOCALLY CONFORMAL KAEHLER MANIFOLDS

Çağrıhan ÇİMEN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Depertmant of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

One of the most active areas of study in differential geometry is the theory of submanifolds. The concept of submanifold appears in two ways through transformations between manifolds. One of them is the immersed submanifold and the other is the fibers of a submersion. The concept of Riemannian submersion arose by extending the concept of submerged so that a submerged manifold has a Riemann manifold structure. Later, new types of submersions appeared, such as almost Hermitian submersion, anti-invariant Riemannian submersion and hemi-slant submersion. The domain of a submersion called total manifold, the range set is called base manifold. In this thesis, we will study semi-slant submersions whose total manifolds are locally conformal Kaehler manifolds.

May 2024, 67 pages.

Keywords: locally conformal Kaehler manifold, semi-slant submersion, horizontal distribution, vertical distribution.

1 GİRİŞ

Altmanifoldlar teorisi diferansiyel geometri alanındaki en zengin alanlardan birisidir. Riemann manifoldlar arasındaki dönüşümler kullanılarak altmanifoldlar elde etmek mümkündür. Riemann altdaldırmalar altmanifoldlar elde etmek için kullanılan en önemli dönüşüm çeşitlerinden birisidir. Altmanifold elde etmek dışında Riemann altdaldırmalar iki manifoldun geometrilerini kıyaslamak için de kullanılan önemli bir araçtır.

Riemann altdaldırmalar ilk olarak O'Neill [14] ve Gray [8] tarafından, birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmış ve çalışılmıştır. Daha sonra Watson [28], hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında Riemann altdaldırmaları ele almıştır ve bu tür altdaldırmalara hemen hemen Hermityen altdaldırmalar adını vermiştir. Bu tip altdaldırmaların en önemli özelliği, yatay ve dikey vektör alanlarını, tümel manifoldun hemen hemen kompleks yapısı altında değişmez bırakmasıdır. Daha sonrasında, bu tip altdaldırmalar kuaterniyon Kaehler manifoldlara [10], yerel konformal Kaehler manifoldlara [13] ve hemen hemen kontakt manifoldlara [5] genişletilmiştir.

Bu çalışmaların ışığında Şahin [20], dikey vektör alanlarını, tümel manifoldun hemen hemen kompleks yapısı altında yatay vektör alanlarına götüren ters değişmez altdaldırmaları incelemiştir. Daha sonra, hemen hemen kompleks yapı altında yatay vektör alanlarını dikey vektör alanlarına ve dikey vektör alanlarını yatay vektör alanlarına götüren Lagrangiyen altdaldırmalar Taştan [24] tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalardan sonra eğik altdaldırma [21], yarı-değişmez altdaldırma [23], yarı-eğik altdaldırma [17] ve kısmi-eğik altdaldırma [26] gibi Riemann altdaldırma türleri çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan yarı-eğik altdaldırmaların geometrisini çalışılmıştır.

2 GENEL KISIMLAR

2.1 RİEMANN MANİFOLDLAR

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanılmış olan diferansiyel geometrinin temel tanımları ve teoremleri verilmiştir.

Tanım 2.1.1 [6] N_1, boyutu n_1 olan bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\mathfrak{X}(N_1)$, N_1 manifoldu üstündeki tüm vektör alanlarının kümesi olmak üzere,

$$\nabla : \mathfrak{X}(N_1) \times \mathfrak{X}(N_1) \to \mathfrak{X}(N_1)$$

tanımlı bilineer dönüşümü keyfi $E, F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları, $h_1, h_2 \in C^\infty(N_1)$ fonksiyonları ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri için eğer

i) $\nabla_{\alpha_1 E + \alpha_2 F} G = \alpha_1 \nabla_E G + \alpha_2 \nabla_F G$,

ii) $\nabla_{h_1 E + h_2 F} G = h_1 \nabla_E G + h_2 \nabla_F G$,

iii) $\nabla_E (h_1 F + h_2 G) = h_1 \nabla_E F + E[h_1] F + h_2 \nabla_E G + E[h_2] G$

koşullarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne bir *afin koneksiyon* ya da *lineer koneksiyon* adı verilir, burada $E[h_1]$, h_1 fonksiyonun E vektör alanı yönündeki yönlü türevidir ve $\nabla_E F$ ifadesi de F vektör alanının E vektör alanına göre *kovaryant türevi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 [6] N_1, boyutu n_1 olan bir diferansiyellenebilir manifold olsun. N_1 üzerindeki herhangi bir (r,s)-tipinden A tensörü için $\eta_1, \dots \eta_r$ 1-formlar ve $F_1, \dots, F_s$, N_1 manifolduna teğet vektör alanları olmak üzere, bu tensörün bir X vektör alanı boyunca kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
(\nabla_X A)(\eta_1, \dots \eta_r, F_1, \dots F_s) = {} & X(A(\eta_1, \dots \eta_r, F_1, \dots F_s) \\
& - \sum_{i=1}^{r} X(A(\eta_1, \dots, \nabla_X \eta_i \dots \eta_r, F_1, \dots F_s) \\
& - \sum_{j=1}^{s} X(A(\eta_1, \dots \eta_r, F_1, \dots, \nabla_X F_j \dots F_s)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

formülü ile tanımlanır ve A tensörünün X vektör alanı yönüne göre *tensör türevi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 [6] N_1 bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları ve $h \in C^\infty(N_1)$ fonksiyonu için

$$[F,G](f) = F[G[h]] - G[F[h]] \tag{2.2}$$

ile tanımlı

$$[\,,\,] : \mathfrak{X}(N_1) \times \mathfrak{X}(N_1) \to \mathfrak{X}(N_1)$$

operatörüne N_1 üzerindeki *Lie parantezi* adı verilir.

Aşağıda Lie parantezini bazı özellikleri verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1.4 [6] N_1 bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $E, F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $[F,G] = -[G,F]$

ii) $[\alpha_1 E + \alpha_2 F, G] = \alpha_1 [E,G] + \alpha_2 [F,G]$

iii) $[E,[F,G]] + [G,[E,F]] + [F,[G,E]] = 0$

eşitlikleri sağlanır. Burada 2.1.4) özdeşliği *Jakobi Özdeşliği* olarak adlandırılır.

İspat. i) (2.2) denklemi gereği kolayca elde edilir.

ii) $h \in C^\infty(N_1)$ keyfi fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
[\alpha_1 E + \alpha_2 F, G](h) &= (\alpha_1 E + \alpha_2 F)[G[h]] - G[(\alpha_1 E + \alpha_2 F)[h]] \\
&= \alpha_1 E[G[h]] + \alpha_2 F[G[h]] - G[\alpha_1 E[h] + \alpha_2 F[h]] \\
&= \alpha_1 E[G[h]] + \alpha_2 F[G[h]] - \alpha_1 G[E[h]] - \alpha_2 G[F[h]] \\
&= \alpha_1 [E,G](h) + \alpha_2 [F,G](h)
\end{aligned}$$

elde edilir. $h \in C^\infty(N_1)$ fonksiyonu keyfi olduğundan, istenen gösterilmiş olur.

iii) $h \in C^\infty(N_1)$ keyfi fonksiyon olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&[E,[F,G]](h)+[G,[E,F]](h)+[F,[G,E]](h)\\
&\qquad =E[[F,G](h)]-[F,G][E(h)]+G[[E,F](h)]\\
&\qquad -[E,F][G[h]]+F[[G,E](h)]-[G,E][F(h)]\\
&\qquad =E[F[G(h)]]-E[G[F(h)]]-F[G[E(h)]]+G[F[E(h)]]\\
&\qquad +G[E[F(h)]]-G[F[E(h)]]-E[F[G(h)]]+F[E[G(h)]]\\
&\qquad +F[G[E(h)]]-F[E[G(h)]]-G[E[F(h)]+E[G[F(h)]]=0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $h \in C^\infty(N_1)$ fonksiyonu keyfi olduğundan, sonuca ulaşılır.

2.1.1 Manifoldlar Arası Dönüşümler

Bu alt bölümde tezin ana konularından biri olan altdaldırmalar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.5 [22] N_1 ve N_2 sırasıyla boyutları n_1 ve n_2 olan iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir fonksiyon olsun. $p \in N_1$ noktasının bir haritası (U_1, ϕ_1) ve $\pi(p)$ noktasının haritası ise (U_2, ϕ_2) olmak üzere,

$$\phi_2 \circ \pi \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \subset \mathbf{R}^m \to \phi_2(U_2) \subset \mathbf{R}^n$$

fonksiyonu Öklidiyen anlamda C^∞-diferansiyellenebilir ise π fonksiyonuna $p \in N_1$ noktasında *C^∞-diferansiyellenebilirdir* denir.

Bu noktadan sonra, iki manifold arasındaki bir fonksiyon C^∞-diferansiyellenebilir ise bu fonksiyona bu iki manifold arasındaki *dönüşüm* adı verilecektir.

Tanım 2.1.6 [6] N_1 ve N_2 sırasıyla iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir birebir ve örten fonksiyon olsun. Eğer hem π bir dönüşüm, hem de π^{-1} ters fonksiyonu dönüşüm ise o halde π fonksiyonuna bir *diffeomorifzm* denir.

Tanım 2.1.7 [15] N_1 ve N_2 iki diferansiyellenebilir manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bu iki manifold arasındaki dönüşüm olsun. Herhangi $p \in N_1$ noktası, $v \in T_pN_1$ teğet vektörü ve $h \in C^\infty(N_1)$

fonksiyonu için, $\pi_{*p}(v)[h] = v[h \circ \pi]$ ile tanımlı

$$\pi_{*p} : T_pN_1 \to T_{\pi(p)}N_2$$

lineer dönüşümüne, π dönüşümünün *türev dönüşümü* denir ve bu dönüşüm $d\pi_p$ ile de gösterilebilir.

Tanım 2.1.8 [6] N_1 ve N_2 sırasıyla boyutları n_1 ve n_2 olan iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $p \in N_1$ noktasında $\pi_{*p}(T_pN_1)$ görüntü kümesinin boyutu r ise bu r sayısına π dönüşümünün *rankı* denir ve *rank*π olarak gösterilir.

Eğer $rank\pi = n = boyN_2$ oluyorsa π dönüşümüne *maksimal ranka sahiptir* denir.

Yardımcı Teorem 2.1.9 [15] N_1 ile N_2, sırasıyla boyutları n_1 ile n_2 olan iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir düzgün dönüşüm olsun. Keyfi $p \in N_1$ noktası için, aşağıdakiler birbirlerine denktir:

i) π_{*p} türev dönüşümü birebirdir.

ii) π dönüşümünün rankı n_1'dir.

iii) Eğer $y^1, \ldots, y^{n_2}$ fonksiyonları $\pi(p) \in N_2$ noktasındaki koordinat sistemi ise $i_1 \leq \cdots \leq i_{n_2}$ tam sayıları vardır, öyle ki $y^{i_1} \circ \pi, \ldots, y^{i_{n_2}} \circ \pi$ fonksiyonları $p \in N_1$ noktasının bir komşuluğu üzerindeki koordinat sistemidir.

Tanım 2.1.10 [15] N_1 ile N_2 iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir düzgün dönüşüm olsun. Eğer keyfi $p \in N_1$ noktaları için, π_{*p} türev dönüşümü birebir ise π dönüşümüne *daldırma* denir.

Tanım 2.1.11 [15] N_1 ile N_2 iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer π_{*p} türev dönüşümü her $p \in \pi^{-1}(q)$ noktası için örten ise $q \in \pi(N_1)$ noktasına π dönüşümünün *regüler değeri* denir.

Yardımcı Teorem 2.1.12 [15] N_1 ile N_2 sırasıyla boyutları n_1 ile n_2 olan iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $p \in N_1$ noktası için, aşağıdakiler birbirine denktir:

i) π_{*p} türev dönüşümü örtendir.

ii) π dönüşümünün rankı n_2'dir.

iii) Eğer $y^1,\ldots,y^{n_2}$ fonksiyonları $\pi(p) \in N_2$ noktasında bir koordinat sistemi ise $(y^1 \circ \pi,\ldots,y^{n_2} \circ \pi, x^{n_2+1},\ldots,x^{n_1})$ biçiminde $p \in N_1$ noktası için bir koordinat sistemi vardır.

Sonuç 2.1.13 [15] N_1 ile N_2 sırasıyla boyutları n_1 ile n_2 olan iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir düzgün dönüşüm olsun. Eğer $q \in \pi(N_1)$ noktası π dönüşümünün bir regüler değeri ise $\pi^{-1}(q)$ kümesi N_1 manifoldunun bir altmanifoldudur ve $n_1 = n_2 + dim(\pi^{-1}(q))$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.14 [15] N_1 ile N_2 iki manifold ve $\pi : N_1 \to N_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer π_{*p} türev dönüşümü her $p \in N_1$ için örten oluyorsa π dönüşümüne bir *altdaldırma* denir.

2.1.2 Riemann Metrik Ve Riemann Manifoldlar

Bu alt bölümde Riemann manifoldlar tanımı yapıldıktan sonra bu manifoldlar üzerindeki bazı eğrilikler tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.15 [22] N_1, n_1-boyutlu bir düzgün manifold olsun. N_1 üzerindeki $(0,2)$-tipinden bir g tensör alanı, keyfi $F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

i) $g(F,G) = g(G,F)$,

ii) $g(F,F) \geq 0$ ve $g(F,F) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $F = 0$

koşulları sağlanıyorsa g tensör alanına, N_1 manfioldu üzerinde bir *Riemann metrik tensörü* ya da kısaca *Riemann metrik* adı verilir. N_1 manifolduna, g metriği ile birlikte bir *Riemann manifold* adı verilir ve (N_1,g) ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 [22] (N_1,g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold ve ∇, N_1 üzerinde bir afin koneksiyon olsun. Eğer keyfi $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$(\nabla_E g)(F,G) = 0 \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanırsa, ∇ koneksiyonuna *metrik ile uyumlu koneksiyon* denir. g bir $(0,2)$-tipinden tensör alanı olduğundan (2.3) eşitliği, (2.1) formulü kullanılarak açılırsa

$$(\nabla_E g)(F,G) = Eg(F,G) - g(\nabla_E F,G) - g(F,\nabla_E G) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla metrik ile uyumlu koneksiyon tanımı

$$Eg(F,G) = g(\nabla_E F, G) + g(F, \nabla_E G) \tag{2.4}$$

ile de verilebilir.

Tanım 2.1.17 [22] (N_1, g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold ve ∇, N_1 üzerinde bir afin koneksiyon olsun. Eğer

i) ∇ koneksiyonu burulmasız ise, yani keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için $[F,G] = \nabla_F G - \nabla_G F$, ve

ii) ∇ koneksiyonu metrik ile uyumlu ise, yani (2.4) eşitliği

sağlanıyorsa ∇ koneksiyonuna bir *Levi-Civita koneksiyonu* ya da *Riemann koneksiyonu* adı verilir.

Yardımcı Teorem 2.1.18 [15] (N_1, g) bir Riemann manifold ve ∇, N_1 üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonu olsun. Keyfi $E, F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_E F, G) &= Eg(F,G) + Fg(G,E) - Gg(E,F) \\ &\quad + g([E,F],G) - g([F,G],E) + g([G,E],F) \end{aligned} \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır. (2.5)'te verilen formule *Koszul formulü* adı verilir ve ∇ koneksiyonuna da *metriğin ürettiği koneksiyon* olarak adlandırılır.

İspat. (N_1, g) bir Riemann manifold ve ∇, N_1 üzerinde tanımlı bir Levi-Civita koneksiyonu olsun. (2.4) eşitliği kullanılırsa, keyfi $E, F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} Fg(E,G) &= g(\nabla_F G, E) + g(G, \nabla_F E), \\ -Gg(E,F) &= -g(\nabla_G E, F) - g(E, \nabla_G F), \\ Eg(F,G) &= g(\nabla_E F, G) + g(F, \nabla_E G) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu üç denklem taraf tarafa toplanıp daha sonra ∇ koneksiyonunun burulmasız olması kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
Eg(F,G)+Fg(G,E)-G(E,F) &= g(\nabla_E F,G)+g([E,G],F)\\
&\quad +g([F,G],E)+g(G,\nabla_F E)\\
&= g(\nabla_E F,G)+g([E,G],F)\\
&\quad +g([F,G],E)+g(G,\nabla_E F-[E,F])\\
&= 2g(\nabla_E F,G)+g([E,F],G)\\
&\quad +g([F,G],E)-g([G,E],F)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_E F,G) &= Eg(F,G)+Fg(G,E)-Gg(E,F)\\
&\quad +g([E,F],G)-g([F,G],E)+g([G,E],F)
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

formulü elde edilir.

Yukarıda elde ettiğimiz Koszul formulü kullanılarak Riemann geometrisinin temel teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 2.1.19 [15] Her Riemann manifoldunun yalnız bir tek metrik ile uyumlu burulmasız ∇ koneksiyonu vardır.

Tanım 2.1.20 [15] (N_1,g), n_1-boyutlu bir Riemann manifold ve ∇, N_1 manifoldu üzerindeki Riemann koneksiyonu olsun. Keyfi $E,F,G\in\mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$
R(E,F)G=\nabla_E\nabla_F G-\nabla_F\nabla_E G-\nabla_{[E,F]}G \tag{2.7}
$$

ile tanımlanan

$$
R:\mathfrak{X}(N_1)\times\mathfrak{X}(N_1)\times\mathfrak{X}(N_1)\to\mathfrak{X}(N_1)
$$

$(1,3)$-tipindeki tensör alanına, N_1 manifoldunun *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir.

Aşağıda Riemann eğrilik tensörünün temel özellikleri verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1.21 [15] (N_1, g) bir Riemann manifold ve ∇, N_1 manifoldu üzerinde tanımlı Riemann koneksiyonu olsun. R, N_1 manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, herhangi $E, F, G, L \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için,

i) $R(E,F)G + R(F,E)G = 0$

ii) $R(E,F,G,L) = -R(E,F,L,G)$

iii) $R(E,F)G + R(F,G)E + R(G,E)F = 0$

iv) $R(E,F,G,L) = R(G,L,E,F)$

özellikleri sağlanır, burada $R(E,F,G,L) = g\Big(R(E,F)G, L\Big)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.22 [29] (N_1, g), n_1-boyutlu bir Riemann manifold ve R, N_1 üzerindeki Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{E_1, E_2, \ldots E_m\}$, N_1 üzerinde yerel ortonormal çatı alanı olmak üzere, keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için,

$$S(F,G) = \sum_{i=1}^{m} R(E_i, F, G, E_i) \tag{2.8}$$

ile tanımlı $(0,2)$-tipinden tensör alanına, N_1 manifoldunun *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir.

Ricci tensöründen yararlanarak N_1 manifoldunun *skaler eğriliği*

$$\tau = \sum_{j=1}^{m} S(E_j, E_j)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.23 [29] (N_1, g) bir Riemann manifold, R, N_1'nin Riemann eğrilik tensörü ve $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$, N_1 manifoldu üzerinde lineer bağımsız iki vektör alanı olsun. F ile G vektör alanları tarafından gerilen düzlem kesiti için

$$K(F,G) = \frac{R(F,G,F,G)}{g(F,F)g(G,G) - g^2(F,G)}$$

ile tanımlı $(0,2)$-tipinden tensör alanına N_1 manifoldunun *kesitsel eğriliği* adı verilir. Eğer kesitsel eğrilik tüm düzlem kesitleri için c sabit sayısına eşitse N_1 manifolduna *sabit eğrilikli uzay* ya da *reel uzay form* adı verilir.

2.1.3 Riemann Manifoldların Altmanifoldları

Bu alt bölümde Riemann manifoldlar tarafından kapsanan altmanifoldlar ve bazı önemli formüller ile birlikte manifoldlar üzerinde dağılım tanımı verilmiştir.

Tanım 2.1.24 [22] (N_1, g), n_1-boyutlu bir Riemann manifold ve N_2, n_2-boyutlu bir manifold olsun. Eğer $\pi : N_2 \to N_1$ biçiminde tanımlı bir daldırma varsa, bu durumda N_2 manifolduna N_1 Riemann manifoldunun *altmanifoldu* denir. Dahası, N_2 altmanifoldu üzerine indirgenmiş g' Riemann metriği keyfi $p \in N_2$ noktası ve $F_p, G_p \in T_pN_2$ teğet vektörleri için

$$g'(F_p, G_p) = g(d\pi_p(F_p), d\pi_p(G_p))$$

biçiminde tanımlandığından, (N_2, g'), (N_1, g) Riemann manifoldunun bir *Riemann altmanifoldu* olur. Buradaki g' metriği g ile gösterilebilir.

Tanım 2.1.25 [22] (N_1, g) bir Riemann manifold ve N_2, N_1 Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. O halde herhangi bir $p \in N_2$ noktası için N_1 manifoldunun teğet uzayı $T_pN_1 = T_pN_2 \oplus T_p^{\perp}N_2$ biçiminde ayrıştırılabilir, burada

$$T_p^{\perp}N_2 = \{F_p \in T_pN_1 : g_p(F_p, G_p) = 0, G_p \in T_pN_2\}$$

ile tanımlı T_pN_2 uzayının T_pN_1 teğet uzayındaki ortogonal tümleyenidir ve N_2 altmanifoldunun *normal uzayı* denir. Normal vektör uzaylarının kümesini $\mathfrak{X}^{\perp}(N_2)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.26 [22] (N_1, g) bir Riemann manifold ve N_2, N_1 manifoldunun bir altmanifoldu olsun. ∇^{N_1} ve ∇^{N_2} sırasıyla N_1 ve N_2 manifoldlarının Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere, keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_2)$ ve $Z \in \mathfrak{X}^{\perp}(N_2)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} \nabla^{N_1}_F G &= \nabla^{N_2}_F G + h(F, G), \\ \nabla^{N_1}_F Z &= -A_Z F + \nabla^{\perp}_F Z \end{aligned}$$

denklemleri N_2 manifoldunun sırasıyla *Gauss ve Weingarten* formülleridir, burada $A_Z F$, $\nabla^{N_2}_F G \in \mathfrak{X}(N_2)$ ve $\nabla^{\perp}_F Z$, $h(F, G) \in \mathfrak{X}^{\perp}(N_2)$'dir. $A_Z : \mathfrak{X}(N_2) \to \mathfrak{X}(N_2)$ lineer dönüşümü $(1, 1)$-tipinden bir tensör alanıdır ve N_2 altmanifoldunun *şekil operatörü* olarak adlandırılır.

Dahası, A şekil operatörü $g(A_Z F, G) = g(F, A_Z G)$ eşitliğini sağlar. $h : \mathfrak{X}(N_2) \times \mathfrak{X}(N_2) \to \mathfrak{X}^{\perp}(N_2)$ fonksiyonu ise $(0,2)$-tipinden bir simetrik tensör alanıdır ve N_2 manifoldunun *ikinci temel formu* olarak adlandırılır.

Burada verilen h ikinci temel formu ile A şekil operatörü

$$g(A_Z F, G) = g(h(F,G), Z)$$

formülüyle birbirleri ile ilişkilendirilir.

Tanım 2.1.27 [29] (N_1, g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold ve N_2, N_1 manifoldunun n_2-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\{F_1, \ldots, F_n\}$, N_2 altmanifolduna teğet ortonormal çatı alanı ve h, N_2 altmanifoldunun ikinci temel formu olmak üzere *H ortalama vektör alanı*,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(F_i, F_i) \tag{2.9}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.28 [29] (N_1, g) bir Riemann manifold ve N_2, N_1 manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer N_2 altmanifoldunun ikinci temel formu sıfır ise N_2 altmanifolduna *tümel jeodezik* altmanifold denir. Eğer ortalama vektör alanı sıfır ise, N_2 altmanifolduna *minimal altmanifold* denir. Ek olarak, eğer keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_2)$ için $h(F,G) = g(F,G)H$ ise, N_2 altmanifolduna *tümel umbilik altmanifold* adı verilir.

Tanım 2.1.29 [22] (N_1, g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold olsun.

$$\mathscr{D} : N_1 \to \bigcup_{p \in N_1} T_p N_1,$$

$$\forall p \in N_1, \;\; \mathscr{D}_p \subset T_p N_1, \;\; dim(\mathscr{D}_p) = r$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme bir *$r-$ boyutlu dağılım* denir. Herhangi bir $F \in \mathfrak{X}(N_1)$ için $F_p \in \mathscr{D}_p$ oluyorsa, F'ye $\mathscr{D}$ dağılımının bir vektör alanı denir. Eğer, $\forall p \in N_1$ için, $\mathscr{D}_p$ dağılımının r-tane lineer bağımsız, diferansiyellenebilir vektörleri varsa, $\mathscr{D}$ dağılımı *diferansiyellenebilirdir* denir. Herhangi iki $F, G \in \mathscr{D}$ vektör alanları için, eğer $[F,G] \in \mathscr{D}$ sağlanıyorsa, $\mathscr{D}$ dağılımına *involutif* denir.

Tanım 2.1.30 [22] (N_1, g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold ve $\mathscr{D}$, N_1 manifodunun r-boyutlu bir dağılımı olsun. N_2, N_1 Riemann manifodunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer herhangi bir $p \in N_2$ için N_2 altmanifoldunun teğet uzayı ile D_p dağılımı eşit ise, N_2 altmanifolduna $\mathscr{D}$ dağılımın *integral manifoldu* denir. Dahası, N_2 altmanifoldu $\mathscr{D}$ dağılımının tek integral manifoldu ise o halde N_2 altmanifolduna $\mathscr{D}$ dağılımının *maksimal integral manifoldu* denir.

Tanım 2.1.31 [22] (N_1, g) bir n_1-boyutlu Riemann manifold ve N_2, N_1 maninfoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer herhangi bir $p \in N_2$ için $\mathscr{D}$ dağılımının p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathscr{D}$ dağılımına integrallenebilirdir denir.

Aşağıda verilmiş olan teorem bir dağılımın involutif olması ile integrallenebilir olmasını birbiriyle ilişkilendirmektedir.

Teorem 2.1.32 (**Frobenius Teorem**) [4] Bir N_1 manifoldunun üzerindeki $\mathscr{D}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{D}$ dağılımının involutif olmasıdır. Dahası integrallenebilir $\mathscr{D}$ dağılımının herhangi $p \in N_1$ noktasından geçen tek bir maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını içeren diğer tüm integral manifoldlar bu maksimal integral manifoldunun bir açık altmanifoldudur.

2.2 KAEHLER MANİFOLDLAR

Bu bölümde, araştırmacılar tarafından yaygın olarak çalışılan Kaehler manifoldu tanımlanmıştır ve Kaehler manifoldu tanımlanırken kullanılmış olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.2.1 [29] N_1, n_1-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Keyfi $F \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanı için

$$J^2(F) = -F \tag{2.10}$$

koşulunu gerçekleyen $(1,1)-$tipinden

$$J : \mathfrak{X}(N_1) \to \mathfrak{X}(N_1)$$

tensörüne N_1 manifoldu üzerinde bir *hemen hemen kompleks yapı* denir. Bu J tensörüyle birlikte N_1 manifolduna da *hemen hemen kompleks manifold* adı verilir ve (N_1, J) ile gösterilir.

Bu tanım gereğince, N_1 h.h.k. manifoldunun boyutunun çift olduğu açıkça görülebilir. [9]

Örnek 2.2.2 $\mathbb{R}^{2m}$, $2m$-boyutlu Öklid uzayında, $x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^m$ doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere,

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -\frac{\partial}{\partial x^i},\ \forall i \in 1,\ldots,m$$

ile tanımlı J tensörü ile bir h.h.k. manifold olur.

Tanım 2.2.3 [29] (N_1,J) bir h.h.k. manifold olsun. N_1 manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği keyfi $F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$g(JF,JG) = g(F,G) \tag{2.11}$$

eşitliğini gerçekliyorsa, g metriğine bir *Hermityen metrik* adı verilir. O halde, g Riemann metriğiyle J hemen hemen kompleks yapısı *bağdaşırlar* denir.

Tanım 2.2.4 [29] (N_1,J) bir h.h.k. manifold olsun. Eğer N_1 üzerinde bir g Hermityen metriği varsa N_1 manifolduna bir *hemen hemen Hermityen manifold* denir ve (N_1,g,J) ile gösterilir.

Teorem 2.2.5 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. O halde J hemen hemen kompleks yapısı, keyfi $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

i) $(\nabla_E J)F = \nabla_E JF - J\nabla_E F,$

ii) $(\nabla_E J)JF = -J(\nabla_E J)F,$

iii) $g((\nabla_E J)F,G) = -g(F,(\nabla_E J)G)$

özellikleri sağlanır.

İspat. i) (2.1) formülü kullanılarak kolayca elde edilir.

ii) E ve F keyfi vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\nabla_E J)JF &= -\nabla_E F - J\nabla_E JF \\ &= J^2\nabla_E F - J\nabla_E JF \\ &= J(J\nabla_E F - \nabla_E JF) \\ &= -J(\nabla_E J)F\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) E,F ve G keyfi vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} g((\nabla_E J)F,G) &= g(\nabla_E JF,G) - g(J\nabla_E F,G) \\ &= g(\nabla_E JF,G) + g(\nabla_E F,JG) \\ &= Eg(JF,G) - g(JF,\nabla_E G) + Eg(F,JG) - g(F,\nabla_E JG) \\ &= g(F,J\nabla_E G) - g(F,\nabla_E JG) \\ &= -g(F,(\nabla_E J)G) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.2.6 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. Keyfi birim $F \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanı için

$$H(F) = R(F,JF,JF,F) \tag{2.12}$$

ile tanımlanan tensöre *holomorfik kesitsel eğrilik* denir. Eğer N_1 manifoldunun sabit holomorfik kesitsel eğriliği varsa manifolda *kompleks uzay formu* denir. Sabit holomorfik kesitsel eğriliği c olan bir manifold $N_1(c)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. Keyfi $F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$\Omega(F,G) = g(F,JG)$$

ile tanımlanan Ω yapısına N_1'nin *Kaehler Formu* adı verilir.

Önerme 2.2.8 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold ve Ω, N_1 manifoldu üzerinde tanımlanmış Kaehler formu olsun. O halde, keyfi $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ için

$$(\nabla_E \Omega)(F,G) = g(F,(\nabla_E J)G) \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Ω bir $(0,2)$-tensör olduğundan dolayı, keyfi $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ için (2.1) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_E\Omega)(F,G) &= E\Omega(F,G)-\Omega(\nabla_E F,G)-\Omega(F,\nabla_E G)\\ &= Eg(F,JG)-g(\nabla_E F,JG)-g(F,J\nabla_E G)\\ &= g(\nabla_E F,JG)+g(E,\nabla_E JG)-g(\nabla_E F,JG)-g(F,J\nabla_E G)\\ &= g(E,\nabla_E JG-J\nabla_E G)\\ &= g(F,(\nabla_E J)G)\end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.2.9 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. Keyfi $F,G\in\mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$N(F,G)=[JF,JG]-J[F,JG]-J[JF,G]-[F,G] \tag{2.14}$$

ifadesine N_1 manifoldunun *Nijenhuis tensörü* adı verilir.

Önerme 2.2.10 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold ve N ise N_1 manifoldu üzerinde tanımlı Nijenhuis tensörü olsun. O halde, keyfi $F,G\in\mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$N(F,G)=(\nabla_{JF}J)G-(\nabla_{JG}J)F+J(\nabla_G J)F-J(\nabla_F J)G \tag{2.15}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.1) formulü, Teorem (2.2.5) ii) özelliği ve ∇ koneksiyonunun burulmasız olması kullanılarak, keyfi $F,G\in\mathfrak{X}(N_1)$ için

$$\begin{aligned}N(F,G) &= [JF,JG]-[F,G]-J[JF,G]-J[F,JG]\\ &= \nabla_{JF}JG-\nabla_{JG}JF-\nabla_F G+\nabla_G F\\ &\quad -J\nabla_{JF}G+J\nabla_G JF-J\nabla_F JG+J\nabla_{JG}F\\ &= (\nabla_{JF}J)G-(\nabla_{JG}J)F-(\nabla_G J)JF+(\nabla_F J)JG\\ &= (\nabla_{JF}J)G-(\nabla_{JG}J)F+J(\nabla_G J)F-J(\nabla_F J)G\end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.11 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. ∇, N_1 manifoldunun

Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, keyfi $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$2g((\nabla_E J)F,G) - g(JE,N(F,G)) = 3d\Omega(E,JF,JG) - 3d\Omega(E,F,G) \tag{2.16}$$

koşulu sağlanır.

Teorem 2.2.12 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. ∇, N_1 manifoldunun g metriğinden türemiş olan Levi-Civita koneksiyonu ve Ω, N_1 manifoldunun Kaehler formu olmak üzere, aşağıdakiler birbirlerine denktir:

i) $\nabla J = 0$

ii) $\nabla\Omega = 0$

iii) $N = 0$ ve $d\Omega = 0$

İspat. $E,F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ olsun.

Kabul edelim ki $\nabla J = 0$ olsun. (2.13) eşitliği kullanılırsa $\nabla\Omega = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $\nabla\Omega = 0$ olsun. $d\Omega(E,F,G) = (\nabla_E\Omega)(F,G) + (\nabla_F\Omega)(G,E) + (\nabla_G\Omega)(E,F)$ olduğundan $d\Omega = 0$ sağlanır. Aynı zamanda $\nabla\Omega = 0$ ve (2.13) eşitliğinden $\nabla J = 0$ olur. $d\Omega = 0$ ve $\nabla J = 0$ eşitliklerini (2.16) denkleminin içinde kullanırsak $N = 0$ olur.

Kabul edelim ki $d\Omega = 0$ ve $N = 0$ olsun. (2.16) denklemini kullanarak kolayca $\nabla J = 0$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.13 [29] (N_1,g,J) bir h.h.H. manifold olsun. Eğer $\forall F,G \in \mathfrak{X}(N_1)$ için

$$(\nabla_F J)G = 0$$

sağlanıyorsa, N_1 manifolduna bir *Kaehler Manifold* denir.

2.2.1 Kaehler Manifoldların Bazı Altmanifoldları

Bu alt bölümde Kaehler manifoldların bazı altmanifoldlarının tanımları verilmiştir.

Tanım 2.2.14 [29] N_2, (N_1,g,J) h.h.H. manifoldunun bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. N_2 altmanifoldunun herhangi bir p noktasındaki T_pN_2 teğet uzayı J tensörü altında değişmezse, yani $J(T_pN_2) \subset T_pN_2$ sağlanıyorsa N_2 manifolduna N_1 manifoldunun *değişmez altmanifoldu* adı verilir.

Tanım 2.2.15 [29] N_2, (N_1, g, J) h.h.H. manifoldunun bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. N_2 altmanifoldunun herhangi bir p noktasındaki T_pN_2 teğet uzayı J tensörü altında ters-değişmezse, yani $J(T_pN_2) \subseteq T_p^{\perp}N_2$ sağlanıyorsa N_2 manifolduna N_1 manifoldunun *ters-değişmez almanifoldu* denir. Özel olarak, $J(T_pN_2) = T_p^{\perp}N_2$ eşitliği sağlanırsa N_2 manifolduna N_1 manifoldunun *Lagrangiyen altmanifoldu* adı verilir.

Tanım 2.2.16 [2] N_2, (N_1, g, J) h.h.H. manifoldunun bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in N_2$ noktasından geçen ve N_2 altmanifolduna teğet olan herhangi bir F vektör alanı için JF ile T_pN_2 uzayı arasındaki açı $\theta(F)$ ile gösterilir ve bu açıya *Wirtinger açısı* denir. Keyfi iki $F, G \in \mathfrak{X}(N_2)$ vektör alanları için, Wirtinger açısı

$$\cos\theta(F) = \frac{g(JF, G)}{||JF||\ ||G||}$$

ile tanımlanır. Sıfır olmayan bir F vektör alanı için $\theta(F)$ Wirtinger açısı sabit ise (seçilen $p \in N_2$ noktasından ve seçilen $F \in T_pN_2$ vektör alanından bağımsız ise) N_2 altmanifolduna N_1 manifoldunun bir *eğik altmanifoldu* adı verilir.

Burada verilen tanımda, eğer $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ Wirtinger açıları olarak seçilirse altmanifold sırasıyla değişmez ve ters-değişmez altmanifoldlar olur. Eğer bir eğik altmanifold ne değişmez ne de ters-değişmez altmanifoldsa o manifolda *has eğik altmanifold* adı verilir.

Tanım 2.2.17 [2] (N_1, g, J) bir h.h.H. manifold ve N_2, N_1 manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\mathscr{D}$, N_2 manifoldu üzerinde bir dağılım olmak üzere, eğer keyfi $F \in \mathscr{D}_q$ için JF vektör alanı ile $\mathscr{D}_q$ dağılımı arasındaki açı $q \in N_2$ noktası ve $F \in \mathscr{D}_q$ vektör alanı seçiminden bağımsız ise $\mathscr{D}$ dağılımına bir *eğik dağılım* adı verilir.

Tanım 2.2.18 [16] N_2, (N_1, g, J) h.h.H. manifoldunun bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. Eğer TN_2 teğet demeti, $\mathscr{D}^{\top}$ değişmez dağılım, yani $J(\mathscr{D}^{\top}) = \mathscr{D}^{\top}$ ve $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılım (burada θ eğik açı) olmak üzere $TN_2 = \mathscr{D}^{\top} \oplus \mathscr{D}^{\theta}$ ayrışımına sahipse N_2 altmanifolduna, N_1 manifoldunun bir *yarı-eğik altmanifoldu* denir.

Tanım 2.2.19 [19] N_2, (N_1, g, J) h.h.H. manifoldunun bir Riemanniyen altmanifoldu olsun. Eğer TN_2 teğet demeti, $\mathscr{D}^{\perp}$ ters değişmez dağılım, yani, $J(\mathscr{D}^{\perp}) \subset T^{\perp}N_2$ ve $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılım olmak üzere $TN_2 = \mathscr{D}^{\perp} \oplus \mathscr{D}^{\theta}$ ayrışımına sahipse N_2 altmanifolduna, N_1 manifoldunun bir *kısmi-eğik altmanifoldu* denir.

2.3 YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLDLAR

Bu alt bölümde tez çalışmamızda ele almış olduğumuz manifold tipi olan yerel konformal Kaehler manifold tanımı yapılmıştır ve bu manifold tipi ile ilgili bazı eşitlikler ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.3.1 [7] (N_1,g,J), $2n_1$-boyutlu bir Hermityen manifold olsun. Eğer N_1 manifoldunun bir $\{O_i\}_{i\in I}$ açık örtülüşü ve $\sigma_i : O_i \to \mathbb{R}$ ile tanımlı $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ diferansiyllenebilir fonksiyonlar ailesi varsa öyle ki

$$g_i = e^{-\sigma_i} g_{|Oi}$$

ile tanımlanan her bir yerel metrik Kaehler metrik ise (N_1,g,J) manifolduna *yerel konformal Kaehler manifold* adı verilir. Eğer $e^{\sigma}g$ metriğini Kaehler metrik yapacak şekilde bir $\sigma : N_1 \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu bulunursa (N_1,g,J) manifolduna *global konformal Kaehler manifold* denir.

Bu tanıma denk bir ifadeyi bir teorem ile verelim.

Teorem 2.3.2 [7] (N_1,g,J) bir Hermityen manifold ve Ω Kaehler formu olsun. (N_1,g,J) manifoldunun bir yerel konformal Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlayan bir ω kapalı 1-formunun var olmasıdır.

(2.17) eşitliğini sağlayan ω 1-formuna *Lee formu* adı verilir [12]. Eğer ω Lee formu tam ise (N_1,g,J) manifoldu global konformal Kaehler manifold olur. Eğer ω Lee formu N_1 manifoldu üzerinde eş değer olarak sıfır olursa (N_1,g,J) manifoldu Kaehler manifold olur.

Uyarı 2.3.3 Bu noktadan sonra, Lee formu ω olan bir yerel konformal Kaehler manifoldu (N_1,g,J,ω) ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.4 [7] (N_1,g,J,ω), bir y.k.K. manifold olsun. Herhangi bir $F \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanı için

$$\omega(F) = g(B,F) \tag{2.18}$$

ile tanımlanan B vektör alanına *Lee vektör alanı* denir.

Teorem 2.3.5 [7] (N_1, g, J, ω) manifoldu bir y.k.K. manifold olsun. $\{g_i\}_{i\in I}$ yerel Kaehler metriklerinin ∇^i Riemann koneksiyonları, keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ için

$$\tilde{\nabla}_F G = \nabla_F G - \frac{1}{2}\Big\{\omega(F)G + \omega(G)F - g(F,G)B\Big\} \tag{2.19}$$

eşitliğiyle verilen global olarak tanımlı $\tilde{\nabla}$ torsiyonsuz koneksiyonuna genelleştirilir, burada ∇, N_1 üzerindeki g metriğinden türeyen Riemann koneksiyonudur. Dahası,

$$\tilde{\nabla} g = \omega \otimes g \tag{2.20}$$

eşitliği sağlanır.

Bu teoremde verilen $\tilde{\nabla}$ koneksiyonuna g metriğinin *Weyl koneksiyonu* denir.

Teorem 2.3.6 [7] (N_1, g, J) Hermityen manifoldunun bir y.k.K. manifold olması için gerek ve yeter koşul N_1 üzerinde (2.19) eşitliğinde verilen $\tilde{\nabla}$ Weyl koneksiyonuna göre J kompleks yapısının paralel olmasını sağlayacak bir ω kapalı 1-formunun olmasıdır. Yani

$$\tilde{\nabla} J = 0 \tag{2.21}$$

olmasıdır.

(2.19) ve (2.21) eşitlikleri kullanılarak, keyfi $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ için

$$(\nabla_F J)G = \frac{1}{2}\Big\{\omega(JG)F - \omega(G)JF - g(F,JG)B + g(F,G)JB\Big\} \tag{2.22}$$

olur.

Tanım 2.3.7 [7] (N_1, g, J, ω) bir y.k.K. manifold olsun. Eğer ω Lee formu paralel ise, yani $\nabla\omega = 0$ ise, N_1 manifolduna *Hopf Manifoldu* adı verilir.

Tanım 2.3.8 [7] (N_1, g, J, ω) bir y.k.K. manifold olsun. Eğer N_1 manifoldu sabit holomorfik kesitsel eğriliğe sahipse, N_1 manifolduna *yerel konformal Kaehler uzay form* adı verilir.

Teorem 2.3.9 [11] (N_1, g, J, ω) holomorfik kesitsel eğriliği bir c sabiti olan y.k.K. uzay formu olsun. O halde N_1 manifoldunun Riemann eğrilik tensörü, keyfi $E, F, G, Z \in \mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları için

$$
\begin{aligned}
4\bar{R}(E,F,G,Z) =& c\Big\{g(E,Z)g(F,G)-g(E,G)g(F,Z)+g(JE,Z)g(JF,G)\\
&-g(JE,G)g(JF,Z)-2g(JE,F)g(JG,Z)\Big\}\\
&+3\Big\{L(E,Z)g(F,G)-L(E,G)g(F,Z)+g(E,Z)L(F,G)\\
&-g(E,G)L(F,Z)\Big\}\\
&-\bar{L}(E,Z)g(JF,G)+\bar{L}(E,G)g(JF,Z)-g(JE,Z)\bar{L}(F,G)\\
&+g(JE,G)\bar{L}(F,Z)\\
&+2\Big\{\bar{L}(E,F)g(JG,Z)+g(JE,F)\bar{L}(G,Z)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

olur, burada

$$L(F,G) = -(\nabla_F \omega)G - \omega(F)\omega(G) + \frac{1}{2}||B||^2 g(F,G) \tag{2.24}$$

ve

$$\bar{L}(F,G) = L(JF,G) \tag{2.25}$$

ile tanımlıdır.

(2.24) ile verilen tensör alanı Hopf manifoldlar için $\nabla\omega = 0$ olduğundan

$$L(F,G) = -\omega(F)\omega(G) + \frac{1}{2}||B||^2 g(F,G) \tag{2.26}$$

biçiminde olur.

2.4 YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLDLARIN YARI-EĞİK ALTMANİFOLDLARI

Yardımcı Teorem 2.4.1 [25] N_2 manifoldu, (N_1, g, J, ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, $U,V \in TN_2$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}\nabla_U PV - A_F VU - \frac{1}{2}\omega(JV)U + \frac{1}{2}g(U,PV)B^T \\ = P\nabla_U V + th(U,V) - \frac{1}{2}\omega(V)PU + \frac{1}{2}g(U,V)(PB^T + tB^N)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_U FV + h(U,PV) + \frac{1}{2}g(U,PV)B^N \\ = F\nabla_U V + fh(U,V) - \frac{1}{2}FU + \frac{1}{2}g(U,V)(FB^T + fB^N)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır, burada P ile F dönüşümleri bir teğet vektör alanının J altındaki görüntüsünün sırasıyla teğet ve normal parçaları, t ile f dönüşümleri bir normal vektör alanının J altındaki görüntülerinin sırasıyla teğet ve normal parçaları ve B^T ile B^N ise Lee vektör alanının sırasıyla teğet ve normal parçalarıdır.

Önerme 2.4.2 [25] N_2 manifoldu, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathscr{D}^{\top}$ değişmez dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul keyfi $U,V \in \mathscr{D}^{\top}$ vektör alanları için

$$h(U,JV) - h(JU,V) = g(JV,U)B^N$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Önerme 2.4.2 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.4.3 [25] N_2 manifoldu, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. N_2 altmanifoldunun $\mathscr{D}^T$ integrallenebilir değişmez dağılımının boyutu 4'ten büyük olmak üzere, eğer $\mathscr{D}^{\top}$ dağılımı, N_2 altmanifoldunda tümel jeodezik ise $B \in TN_2$'dir.

Sonuç 2.4.4 [25] N_2, $\mathscr{D}^{\top}$ değişmez dağılımı integrallenebilir olan, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Eğer $\mathscr{D}^T$ dağılımı, N_2 altmanifoldu içinde tümel umbilik ise $H = -\frac{1}{2}B^N$ eşitliği sağlanır, burada H vektör alanı, $\mathscr{D}^{\top}$ dağılımının ortalama eğrilik vektör alanıdır.

Önerme 2.4.5 [25] N_2 manifoldu, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul keyfi $X,Y \in \mathscr{D}^\theta$ vektör alanları için

$$\nabla_X PY - \nabla_Y PX + A_{FX}Y - A_{FY}X + g(X,PY)B^T \in \mathscr{D}^\theta$$

olmasıdır.

Teorem 2.4.6 [25] N_2 manifoldu, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. $\mathscr{D}^\top$ değişmez dağılımının N_2 altmanifoldu içinde tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $U,V \in \mathscr{D}^\top$ ve $X \in \mathscr{D}^\theta$ vektör alanları için

$$g(A_{fFX}V + \frac{1}{2}\omega(fFX)V,U) = -g(A_{FX}PV + \frac{1}{2}\omega(FX)PV,U)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 2.4.7 [25] N_2 manifoldu, (N_1,g,J,ω) yerel konformal Kaehler manifoldunun bir yarı-eğik altmanifoldu olsun. Eğer $\mathscr{D}^\top$ değişmez dağılımı N_2 içinde integrallenebilir ve tümel jeodezik ise, bu durumda

$$g(h(\mathscr{D}^\top,\mathscr{D}^\top),fF\mathscr{D}^\theta) = -g(h(P\mathscr{D}^\top,\mathscr{D}^\top),F\mathscr{D}^\theta)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

2.5 RİEMANN ALTDALDIRMALAR

Bir manifoldun altmanifoldunu oluşturmakta kullanılan yollardan birisi altdaldırmalardır. Bu bölümde özel bir altdaldırma çeşidi olan Riemann altdaldırmaları ele alacağız.

Tanım 2.5.1 [14] (N_1,g) ve (N_2,g') sırasıyla boyutları n_1 ve n_2 olan iki Riemann manifold ve $\pi : (N_1,g) \to (N_2,g')$ ise Tanım 2.1.14'te tanımlanan altdaldırma olsun. Sonuç 2.1.13 sebebiyle, keyfi $x \in N_2$ için $\pi^{-1}(x)$, N_1 manifoldunun $(n_1 - n_2)$-boyutlu bir kapalı altmanifoldudur. Bu biçimindeki altmanifoldlara, altdaldırmanın *lifleri* denir. Liflere teğet olan vektör alanlarına *dikey vektör alanları*, liflere dik olan vektör alanlarına ise *yatay vektör alanları* denir.

Tanım 2.5.2 [14] (N_1,g) ve (N_2,g'), sırasıyla boyutları n_1 ve n_2 olan iki Riemann manifold olsun. $\pi:(N_1,g)\to(N_2,g')$ bir altdaldırma olmak üzere, keyfi $p\in N_1$ noktası için,

$$\pi_{*p}:(\text{Çek}\pi_{*p})^{\perp}\to T_{\pi(p)}N_2$$

dönüşümü bir izometri ise, yani $\forall\xi,\eta\in(\text{Çek}\pi_{*p})^{\perp}$,

$$g_p(\xi,\eta)=g'_{\pi(p)}(\pi_{*p}\xi,\pi_{*p}\eta)$$

sağlanıyorsa π dönüşümüne N_1 manifoldu üzerinde bir *Riemann altdaldırma* denir. π_* türev dönüşümü, yatay dağılım üzerinde bir izometri olduğundan, dikey dağılım π'nin türev dönüşümünün çekirdeğine eşittir. Dolasıyla dikey dağılım Çekπ_* ile gösterirsek, yatay dağılım da $(\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$ ile gösterilir.

Böylece N_1 Riemann manifoldunun teğet demeti

$$TN_1=\text{Çek}\pi_*\oplus(\text{Çek}\pi_*)^{\perp} \tag{2.27}$$

biçiminde ortogonal ayrışıma sahiptir. Bu durumda

$$\nu:TN_1\to\text{Çek}\pi_*$$

ve

$$\hbar:TN_1\to(\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.27) ayrışımından dolayı, keyfi $F\in TN_1$ vektör alanı $F=F^{\nu}+F^{\hbar}$ şeklinde yazılabilir, burada ν ve $\hbar$ fonksiyonlarının tanımları gereği $F^{\nu}\in\text{Çek}\pi_*$ ve $F^{\hbar}\in(\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$ parçalarıdır.

Tanım 2.5.3 [14] $\pi:(N_1,g)\to(N_2,g')$ bir Riemann altdaldırma olsun. Bir $E\in(\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$ vektör alanı N_2 manifoldundaki bir E' vektör alanı ile π-bağımlı ise E vektör alanına *temel vektör alanı* denir.

Yardımcı Teorem 2.5.4 [14] $\pi:(N_1,g)\to(N_2,g')$ bir Riemann altdaldırma ve ∇ ile ∇' sırasıyla g ve g' metriklerinden türeyen Levi-Civita koneksiyonları olsun. $F,G\in\mathfrak{X}(N_1)$ vektör alanları sırasıyla $F',G'\in\mathfrak{X}(N_2)$ ile π-bağımlı olan iki temel vektör alanı olmak üzere

i) $g(F,G) = g'(F',G') \circ \pi$,

ii) $[F,G]^{\hbar}$, $[F',G']$ ile π-bağımlı olan bir temel vektör alanıdır,

iii) $(\nabla_F G)^{\hbar}$, $\nabla'_{F'} G'$ ile π-bağımlı olan bir temel vektör alanıdır,

önermeleri sağlanır.

Burada, Riemann altdaldırmalar teoresinde önemli yer kapsayan iki tensör alanı tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.5 [14] $\pi : (N_1, g) \to (N_2, g')$ bir Riemann altdaldırma olsun. ∇, g'den türeyen N_1'deki Levi-Civita koneksiyonu ve $F, G \in \mathfrak{X}(N_1)$ keyfi vektör alanları olmak üzere

$$\mathscr{T}_F G = (\nabla_{F^v} G^{\hbar})^v + (\nabla_{F^v} G^v)^{\hbar} \tag{2.28}$$

$$\mathscr{A}_F G = (\nabla_{F^{\hbar}} G^{\hbar})^v + (\nabla_{F^{\hbar}} G^v)^{\hbar} \tag{2.29}$$

ile tanımlanan $(1,2)$-tipindeki tensör alanlarına *O'Neill tensörleri* adı verilir.

$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{T}$ tensörlerinin ikiside dikey vektör alanlarını yatay vektör alanları, yatay vektör alanlarını da dikey vektör alanları yapan ters-simetrik tensör alanlarıdır.

Yardımcı Teorem 2.5.6 [14] (N_1, g) ve (N_2, g') Riemann manifoldlar ve $\pi : (N_1, g) \to (N_2, g')$ bir Riemann altdaldırma olsun. O halde, $\forall U, V \in$ Çekπ_* ve $\forall \eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$ için

$$\mathscr{T}_U V = \mathscr{T}_V U \tag{2.30}$$

$$\mathscr{A}_\eta \xi = -\mathscr{A}_\xi \eta = \frac{1}{2}[\eta, \xi]^v \tag{2.31}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat. $U, V \in$ Çekπ_* olsun. O halde

$$\pi_*[U,V] = [\pi_* U, \pi_* V] = 0$$

olduğundan $[U,V] \in$ Çekπ_* sağlanır. ∇, g'den türeyen Levi-Civita koneksiyonu olduğundan burulmasızdır. Dolayısıyla $[U,V] = \nabla_U V - \nabla_V U$ sağlanır. Bu eşitliğin her iki tarafını keyfi

$\eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ ile çarpıp (2.28) eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} 0 = g(\nabla_U V, \nabla_V U, \eta) &= g((\nabla_U V)^\hbar, \eta) - g((\nabla_V U)^\hbar, \eta) \\ &= g(\mathscr{T}_U V, \eta) - g(\mathscr{T}_V U, \eta) = g(\mathscr{T}_U V - \mathscr{T}_V U, \eta) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ keyfi olduğundan, (2.30) eşitliği gösterilmiş olur.

Diğer taraftan, $\eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ keyfi olmak üzere, yeniden ∇'nın burulmasız olmasını kullanarak

$$[\eta, \xi] = \nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta$$

denklemini elde ederiz. Buradan ise (2.29) eşitliği kullanılarak,

$$[\eta, \xi]^v = \mathscr{A}_\eta \xi - \mathscr{A}_\xi \eta \tag{2.32}$$

olduğu elde edilir. Burada $\eta = \xi$ alırsak, (2.2) eşitliğinden

$$\mathscr{A}_\eta \eta = 0$$

çıkar. η keyfi yatay vektör alanı olduğundan $\mathscr{A}_{\eta+\xi}(\eta + \xi) = 0$ olur. $\mathscr{A}$'nın tensör olduğunu kullanırsak $\mathscr{A}_\eta \xi = -\mathscr{A}_\xi \eta$ olduğu kolayca görülür. Burada elde ettiğimiz eşitliği (2.32) denkleminin içerisinde kullanırsak (2.31) eşitliği elde edilir.

$\mathscr{T}$ tensör alanına liflerin ikinci temel formu gözü ile bakılabilir. Dolayısıyla lifler üzerindeki ortalama eğrilik vektör alanı, Çekπ_* dağılımının bir ortonormal bazı $\{E_1, \dots E_n\}$ olmak üzere,

$$H^v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathscr{T}_{E_i} E_i \tag{2.33}$$

ile tanımlanır.

Yardımcı Teorem 2.5.7 [14] (N_1, g) ve (N_2, g') Riemann manifoldlar ve $\pi : (N_1, g) \rightarrow$

(N_2, g') bir Riemann altdaldırma olsun. $U,V \in$ Çekπ_* ve $\eta, \xi \in ($Çek$\pi_*)^\perp$ olmak üzere

$$\nabla_U V = \mathscr{T}_U V + (\nabla_U V)^\nu \tag{2.34}$$

$$\nabla_U \eta = (\nabla_U \eta)^\hbar + \mathscr{T}_U \eta \tag{2.35}$$

$$\nabla_\xi V = \mathscr{A}_\xi V + (\nabla_\xi V)^\nu \tag{2.36}$$

$$\nabla_\xi \eta = (\nabla_\xi \eta)^\hbar + \mathscr{A}_\xi \eta. \tag{2.37}$$

eşitlikleri sağlanır. Dahası eğer η temel vektör alanı ise $(\nabla_U \eta)^\hbar = \mathscr{A}_\eta U$ sağlanır.

İspat. Keyfi $U,V \in$ Çekπ_* ve $\eta, \xi \in ($Çek$\pi_*)^\perp$ olsun. (2.29) ve (2.28) eşitliklerini kullanarak,

$$\nabla_U V = (\nabla_U V)^\hbar + (\nabla_U V)^\nu = \mathscr{T}_U V + (\nabla_U V)^\nu$$

ve

$$\nabla_\eta \xi = (\nabla_\eta \xi)^\hbar + (\nabla_\eta \xi)^\nu = (\nabla_\eta \xi)^\hbar + \mathscr{A}_\eta \xi$$

kolayca bulunur. Diğerleri de benzer biçimde ispatlanır.

Diğer taraftan η temel vektör alanı olsun. η temel vektör alanı olduğundan $[\eta, U] \in$ Çekπ_*'dir ve de ∇ koneksiyonu burulmasız olduğundan

$$(\nabla_U \eta)^\hbar = (\nabla_\eta U - [\eta, U])^\hbar = (\nabla_\eta U)^h = \mathscr{A}_\eta U$$

elde edilir.

Sıradaki verilen teorem, altmanifoldlar teorisinde önemli bir yer tutan Gauss ve Codazzi formüllerinin Riemann altdaldırmalara uyarlaması niteliğindedir.

Teorem 2.5.8 [14] $\pi : (N_1, g) \to (N_2, g')$ tanımlı bir Riemann altdaldırma olsun. $U,V,W,F \in$ Çekπ_* ve $X,Y,Z,H \in ($Çek$\pi_*)^\perp$ olmak üzere

$$R(V,U,F,W) = \widehat{R}(V,U,F,W) + g(\mathscr{T}_V W, \mathscr{T}_U F) - g(\mathscr{T}_U W, \mathscr{T}_V F) \tag{2.38}$$

$$R(Y,X,H,Z) = R^*(Y,X,H,Z) - 2g(\mathscr{A}_Y X, \mathscr{A}_H Z) \qquad (2.39)$$
$$+g(\mathscr{A}_X H, \mathscr{A}_Y Z) - g(\mathscr{A}_Y H, \mathscr{A}_X Z)$$

$$R(X,V,Y,W) = g((\nabla_X \mathscr{T})(V,W),Y) + g((\nabla_V \mathscr{A})(X,Y),W) \qquad (2.40)$$
$$-g(\mathscr{T}_V X, \mathscr{T}_W Y) + g(\mathscr{A}_Y W, \mathscr{A}_X V)$$

eşitlikleri sağlanır, burada $R, \widehat{R}$ ve R^* sırasıyla N_1 manifoldu, Çekπ_* dikey dağılımının ve (Çekπ_*)$^\perp$ dağılımın üzerindeki Riemann eğrilik tensörleridir.

$\rho(p)$, $\mathbb{R}^3$ uzayının altındaki bir dönel yüzeydeki p noktası ile bu yüzeyin dönme ekseni arasındaki uzaklık olsun ve α ise bu yüzeydeki bir jeodezik olsun. Clairaut'un teoremi, $\dot{\alpha}(s)$ hız vektörü ile $\alpha(s)$ boyunca olan meridiyen arasındaki açı $\theta(s)$ olmak üzere, $(\rho \sin\theta)(s)$ fonksiyonunun sabit olduğunu söyler. Bundan hareketle Clairaut altdaldırma ifadesi şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.5.9 [1] $\pi : (N_1, g) \to (N_2, g')$ bir Riemann altdaldırma olsun. Eğer herhangi bir α jeodeziği için $\rho \sin\theta$ fonksiyonunu sabit yapan N_1 üzerinde tanımlı pozitif değerli bir ρ fonksiyonu varsa π altdaldırmasına *Clairaut altdaldırma* adı verilir, burada θ, $\dot{\alpha}$ ile N_1 manifoldunun her noktasındaki yatay dağılımı arasındaki açıdır.

R.L. Bishop [1] makalesinde Clairaut altdaldırmalar için bir karakterizasyon şu teorem ile verilmiştir:

Teorem 2.5.10 $\pi : (N_1, g) \to (N_2, g')$ tanımlı lifleri bağlantılı olan bir Riemann altdaldırma olsun. $\rho = e^f$ olmak üzere, π altdaldırmasının Clairaut olması için gerek ve yeter koşul her lifin tümel umbilik olması ve $H = -grad f$ eşitliğinin sağlanmasıdır, burada H ortalama eğrilik vektör alanıdır.

2.5.1 Yarı-Eğik Altdaldırmalar

Tanım 2.5.11 [17] (N_1, g, J) bir hemen hemen Hermityen manifold, (N_2, g') Riemann manifold ve $\pi : (N_1, g, J) \to (N_2, g')$ Riemann altdaldırma olsun. Eğer Çekπ_* dikey dağılımı, $\mathscr{D}^\top$ değişmez dağılım ve $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılım olmak üzere Çek$\pi_* = \mathscr{D}^\top \oplus \mathscr{D}^\theta$ ortogonal ayrışımına sahipse, bu durumda π altdaldırmasına *yarı-eğik altdaldırma* denir.

Bu tez boyunca yarı-eğik altdaldırmalarda kullanılan gösterimler aşağıdaki gibidir.

Herhangi bir $V \in$ Çekπ_* için

$$V = \mathscr{P}V + \mathscr{Q}V \tag{2.41}$$

biçiminde yazabiliriz, burada $\mathscr{P}V \in \mathscr{D}^{\top}$ ve $\mathscr{Q}V \in \mathscr{D}^{\theta}$'dır.

Herhangi bir $V \in$ Çekπ_* için

$$JV = \phi V + \psi V \tag{2.42}$$

olarak ayrıştırılabilir, burada $\phi V \in$ Çekπ_* ve $\psi V \in$ (Çek$\pi_*)^{\perp}$'dir.

Herhangi bir $\eta \in$ (Çek$\pi_*)^{\perp}$ için

$$J\eta = \mathscr{B}\eta + \mathscr{C}\eta \tag{2.43}$$

olarak yazılabilir, burada $\mathscr{B}\eta \in$ Çekπ_* ve $\mathscr{C}\eta \in$ (Çek$\pi_*)^{\perp}$'dir [17].

Öte yandan, keyfi $X, Y \in \mathscr{D}^{\theta}$ vektör alanları için

$$g(\psi X, \psi Y) = sin^2\theta g(X, Y) \tag{2.44}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = cos^2\theta g(X, Y) \tag{2.45}$$

eşitlikleri sağlanır [21].

Böylece, (Çek$\pi_*)^{\perp}$ yatay dağılımını

$$(\text{Çek}\pi_*)^{\perp} = \psi\mathscr{D}^{\theta} \oplus \mu \tag{2.46}$$

biçiminde ortogonal olarak ayrışımı yapılabilir, burada μ dağılımı $\psi\mathscr{D}^{\theta}$ dağılımının ortogonal tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 2.5.12 [17] $\pi : (N_1, g, J) \to (N_2, g')$ bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde aşağıdakiler eşitlikleri geçerlidir:

$$\textbf{i)}\ \phi\mathscr{D}^{\top}=\mathscr{D}^{\top},\ \textbf{ii)}\ \psi\mathscr{D}^{\top}=0, \qquad (2.47)$$
$$\textbf{iii)}\ \phi\mathscr{D}^{\theta}\subset\mathscr{D}^{\theta},\ \textbf{iv)}\ \mathscr{B}((\text{Çek}\pi_*)^{\perp})=\mathscr{D}^{\theta}$$

Yardımcı Teorem 2.5.13 [17] $\pi:(N_1,g,J)\to(N_2,g')$ bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde aşağıdakiler eşitlikleri geçerlidir:

$$\textbf{i)}\ \phi^2+\mathscr{B}\psi=-I,\quad \textbf{ii)}\ \mathscr{C}^2+\psi\mathscr{B}=-I, \qquad (2.48)$$
$$\textbf{iii)}\ \psi\phi+\mathscr{C}\psi=0,\quad \textbf{iv)}\ \mathscr{B}\mathscr{C}+\phi\mathscr{B}=0$$

Bu bilgilere dayanarak, $\eta\in\mu$ ve $X\in\mathscr{D}^{\theta}$ olmak üzere, (2.47) - **iii)** ve (2.48) - **iii)** eşitlikleri kullanılırsa

$$g(J\eta,\psi V)=-g(\eta,J\psi V)=-g(\eta,\mathscr{C}\psi V)=g(\eta,\psi\phi V)=0$$

sağlanır. Buradan, μ dağılımının J yapısı altında değişmez kaldığı görülebilir.

Yardımcı Teorem 2.5.14 [17] $\pi:(N_1,g,J)\to(N_2,g')$ tümel manifoldu Kaehler manifold olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde, keyfi $U,V\in\text{Çek}\pi_*$ ve $\xi,\eta\in(\text{Çek}\pi_*)^{\perp}$ için

$$(\nabla_U\phi V)^{\nu}+\mathscr{T}_U\psi V=\phi(\nabla_U V)^{\nu}+\mathscr{B}\mathscr{T}_U V, \qquad (2.49)$$
$$\mathscr{T}_U\phi V+(\nabla_U\psi V)^{\hbar}=\psi(\nabla_U V)^{\nu}+\mathscr{C}\mathscr{T}_U V, \qquad (2.50)$$
$$(\nabla_\xi\mathscr{B}\eta)^{\nu}+\mathscr{A}_\xi\mathscr{C}\eta=\phi\mathscr{A}_\xi\eta+\mathscr{B}(\nabla_\xi\eta)^{\hbar}, \qquad (2.51)$$
$$\mathscr{A}_\xi\mathscr{B}\eta+(\nabla_\xi\mathscr{C}\eta)^{\hbar}=\psi\mathscr{A}_\xi\eta+\mathscr{C}(\nabla_\xi\eta)^{\hbar}, \qquad (2.52)$$
$$(\nabla_U\mathscr{B}\xi)^{\nu}+\mathscr{T}_U\mathscr{C}\xi=\phi\mathscr{T}_U\xi+\mathscr{B}(\nabla_U\xi)^{\hbar}, \qquad (2.53)$$
$$\mathscr{T}_U\mathscr{B}\xi+(\nabla_U\mathscr{C}\xi)^{\hbar}=\psi\mathscr{T}_U\xi+\mathscr{C}(\nabla_U\xi)^{\hbar} \qquad (2.54)$$

eşitlikleri sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.5.15 [17] $\pi:(N_1,g,J)\to(N_2,g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde $\mathscr{D}^{\top}$ değişmez dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathscr{Q}((\nabla_U \phi V)^{\mathcal{V}} - (\nabla_V \phi U)^{\mathcal{V}}) = 0 \quad \text{ve} \quad \mathscr{T}_U \phi V = \mathscr{T}_V \phi U$$

olmasıdır, burada $U, V \in \mathscr{D}^{\top}$'dır.

Yardımcı Teorem 2.5.16 [17] $\pi : (N_1, g, J) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathscr{P}((\nabla_X \phi Y)^{\mathcal{V}} - (\nabla_Y \phi X)^{\mathcal{V}} + \mathscr{T}_X \psi Y - \mathscr{T}_Y \psi X) = 0$$

olmasıdır, burada $X, Y \in \mathscr{D}^{\theta}$'dır.

Önerme 2.5.17 [17] $\pi : (N_1, gJ) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde $\mathscr{D}^{\top}$ değişmez dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathscr{Q}(\phi(\nabla_U \phi V)^{\mathcal{V}} + \mathscr{B}\mathscr{T}_U \phi V) = 0 \quad \text{ve} \quad \psi(\nabla_U \phi V)^{\mathcal{V}} + \mathscr{C}\mathscr{T}_U \phi V = 0$$

Önerme 2.5.18 [17] $\pi : (N_1, gJ) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde $\mathscr{D}^{\theta}$ eğik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathscr{Q}\Big(\phi((\nabla_X \phi Y)^{\mathcal{V}} + \mathscr{T}_X \psi Y) + \mathscr{B}(\mathscr{T}_X \phi Y + (\nabla_X \omega Y)^{\hbar})\Big) = 0$$

ve

$$\psi((\nabla_X \psi Y)^{\mathcal{V}} + \mathscr{T}_X \psi Y) + \mathscr{C}(\mathscr{T}_X \phi Y + (\nabla_X \omega Y)^{\hbar}) = 0$$

olmasıdır, burada $X, Y \in \mathscr{D}^{\theta}$'dır.

Önerme 2.5.19 [17] $\pi : (N_1, g, J) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde Çekπ_* dikey dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\psi((\nabla_U \phi V)^{\mathcal{V}} + \mathscr{T}_U \psi V) + \mathscr{C}(\mathscr{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^{\hbar}) = 0$$

olmasıdır, burada $U, V \in$ Çekπ_*'dır.

Önerme 2.5.20 [17] $\pi : (N_1, g, J) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Kaehler olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ yatay dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\phi((\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^\nu + \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi) + \mathscr{B}(\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar) = 0$$

olmasıdır, burada $\eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$'dır.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında diferansiyel geometrideki bazı tanım ve teoremler verildikten sonra tezin altyapısı olan yarı-eğik altdaldırmalar ve yerel konformal Kaehler manifoldlar üzerinde durulmuştur. Bu tanım ve teoremler ile ilgili olarak tarihi bilgiler verilip konunun ilerleme sürecinden de bahsedilmiştir.

Bu çalışma sırasında diferansiyel geometri alanındaki makaleler, kitaplar, kütüphane ve internet tarayacıları aracılığıyla taranmıştır. Tezin döküman haline getirilmesi için Latex programı kullanılmıştır.

4 BULGULAR

4.1 TÜMEL MANİOFOLDU YEREL KONFORMAL KAEHLER MANİFOLD OLAN YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Bu bölümde tümel manifoldu global konformal Kaehler olan yarı-eğik altdaldırma örneği verilmiştir. Daha sonrasında ise tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırmalar için temel denklemler ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.1 $(z_1,\ldots,z_6)$, $\mathbf{R}^6$ uzayının doğal koordinatları olmak üzere

$$\overline{\mathbf{R}^6} = \{(z_1,\ldots,z_6) \in \mathbf{R}^6 : z_1, z_2 \neq 0\}$$

kümesi tanımlansın. g_0, $\mathbf{R}^6$ uzayının Öklid metriği olmak üzere, $\overline{\mathbf{R}^6}$, (g_0,J) alışılmış Kaehler yapısı ile birlikte bir Kaehler manifold oluşturur. $e^\sigma = (z_1z_2)^2$ fonksiyonu için $g = e^\sigma g_0$ metriği tanımlansın. Dolayısıyla $(\mathbf{R}^6, g, J)$ uzayı bir global konformal Kaehler manifold olur.

Benzer biçimde, (z_1,z_2), $\mathbf{R}^2$ düzleminin doğal koordinatları olmak üzere

$$\overline{\mathbf{R}^2} = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_1, z_2 \neq 0\}$$

kümesi üzerinde g_0' , $\mathbf{R}^2$ uzayının Öklid metriği olsun. Aynı şekilde, $e^\sigma = (z_1z_2)^2$ fonksiyonu için $g' = e^\sigma g_0'$ metriği tanımlanırsa, $(\mathbf{R}^2, g')$ bir Riemann manifold olur.

Şimdi, $\pi : (\overline{\mathbf{R}^6}, g, J) \to (\overline{\mathbf{R}^2}, g')$, $\pi(x_1,\ldots,x_6) = \left(\dfrac{x_3 - x_6}{\sqrt{2}}, x_5\right)$ ile tanımlı dönüşümü ele alalım. Bu dönüşümün türev dönüşümünün matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Sonuçta $rank\pi_* = 2$ olduğundan π bir altdaldırmadır.

Bu altdaldırmanın yatay ve dikey dağılımları

$$\text{Çek}\pi_* = span\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial}{\partial z_6}\}$$

ile

$$(\text{Çek}\pi_*)^\perp = span\{\frac{\partial}{\partial z_5}, \frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}\}$$

olur.

Şimdi, π_* türev dönüşümünün yatay dağılımı üzerinde bir izometri olduğunu gösterelim:

$$g'(\pi_* \frac{\partial}{\partial z_5}, \pi_* \frac{\partial}{\partial z_5}) = g'(\frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}) = e^\sigma = g(\frac{\partial}{\partial z_5}, \frac{\partial}{\partial z_5}),$$

$$g'(\pi_*\Big(\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}\Big), \pi_*\Big(\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}\Big)) = g'(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}) = e^\sigma = g(\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}, \frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}),$$

$$g'(\pi_*\Big(\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}\Big), \pi_* \frac{\partial}{\partial z_5}) = g'(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}) = 0 = g(\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_6}, \frac{\partial}{\partial z_5})$$

olarak hesaplanır ki bu da yatay vektör alanlarının π_* altında boylarının korunduğu anlamına gelir. Bu da π'nin bir Riemann altdaldırma olduğu anlamına gelir.

Şimdi $\mathscr{D}^T = span\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\}$ ve $\mathscr{D}^\theta = span\{\frac{\partial}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial}{\partial z_6}\}$ olsun. Açıkça görülüyor ki Çek$\pi_* = \mathscr{D}^T \oplus \mathscr{D}^\theta$'dir.

Kolayca görülür ki $J\mathscr{D}^T = \mathscr{D}^T$ olur ki bu da $\mathscr{D}^T$ dağılımının değişmez olduğunu söyler.

Aynı zamanda

$$\cos\theta = \frac{g\Big(J\Big(\frac{\partial}{\partial z_3}+\frac{\partial}{\partial z_6}\Big),\frac{\partial}{\partial z_4}\Big)}{||\frac{\partial}{\partial z_4}||.||\frac{\partial}{\partial z_3}+\frac{\partial}{\partial z_6}||} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

olduğundan, $\mathscr{D}^{\theta}$, eğik açısı $\theta = \frac{\pi}{4}$ olan eğik dağılımdır.

Sonuçta π Riemann altdaldırması, tümel manifoldu g.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırmadır.

Yardımcı Teorem 4.1.2 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde her $U,V \in$ Çekπ_* ve her $\eta, \xi \in ($Çek$\pi_*)^{\perp}$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_V \phi U)^{\nu} + \mathscr{T}_V \psi U = {} & \mathscr{B}\mathscr{T}_V U + \phi(\nabla_V U)^{\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Big\{\omega(JU)V - \omega(U)\phi V \\ & - g(V,\phi U)B^{\nu} + g(U,V)\Big[\phi B^{\nu} + \mathscr{B}B^{\hbar}\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_V \psi U)^{\hbar} + \mathscr{T}_V \phi U = {} & \mathscr{C}\mathscr{T}_V U + \psi(\nabla_V U)^{\nu} \\ & + \frac{1}{2}\Big\{-\omega(U)\psi V - g(V,\phi U)B^{\hbar} \\ & + g(U,V)\Big[\psi B^{\nu} + \mathscr{C}B^{\hbar}\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^{\nu} + \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi = {} & \phi\mathscr{A}_\eta \xi + \mathscr{B}(\nabla_\eta \xi)^{\hbar} \\ & + \frac{1}{2}\Big\{-\omega(\xi)\mathscr{B}\eta - g(\eta,\mathscr{C}\xi)B^{\nu} \\ & + g(\xi,\eta)\Big[\phi B^{\nu} + \mathscr{B}B^{\hbar}\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^{\hbar} + \mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi = {} & \psi\mathscr{A}_\eta \xi + \mathscr{C}(\nabla_\eta \xi)^{\hbar} \\ & + \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\xi)\eta - \omega(\xi)\mathscr{C}\eta \\ & - g(\eta,\mathscr{C}\xi)B^{\hbar} + g(\xi,\eta)[\psi B^{\nu} + \mathscr{C}B^{\hbar}]\Big\},\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$(\nabla_V \mathscr{B}\eta)^{\nu} + \mathscr{T}_V \mathscr{C}\eta = \phi \mathscr{T}_V \eta + \mathscr{B}(\nabla_V \eta)^{\hbar} + \frac{1}{2}\Big\{ \omega(J\eta)V - \omega(\eta)\phi V - g(V, \mathscr{B}\eta)B^{\nu} \Big\}, \tag{4.5}$$

$$(\nabla_V \mathscr{C}\eta)^{\hbar} + \mathscr{T}_V \mathscr{B}\eta = \psi \mathscr{T}_V \eta + \mathscr{C}(\nabla_V \eta)^{\hbar} + \frac{1}{2}\Big\{ -\omega(\eta)\psi V - g(V, \mathscr{B}\eta)B^{\hbar} \Big\}, \tag{4.6}$$

$$(\nabla_\eta \phi V)^{\nu} + \mathscr{A}_\eta \psi V = \mathscr{B}\mathscr{A}_\eta V + \phi(\nabla_\eta V)^{\nu} + \frac{1}{2}\Big\{ -\omega(V)\mathscr{B}\eta - g(\eta, \psi V)B^{\nu} \Big\}, \tag{4.7}$$

$$(\nabla_\eta \psi V)^{\hbar} + \mathscr{A}_\eta \phi V = \mathscr{C}\mathscr{A}_\eta V + \psi(\nabla_\eta V)^{\nu} + \frac{1}{2}\Big\{ \omega(JV)\eta - \omega(V)\mathscr{C}\eta - g(\eta, \psi V)B^{\hbar} \Big\}. \tag{4.8}$$

İspat. Keyfi $U, V \in$ Çekπ_* alalım. (2.22) denklemini bu iki vektör alanı için yazarsak

$$(\nabla_V J)U = \frac{1}{2}\Big\{ \omega(JU)V - \omega(U)JV - g(V, JU)B + g(U,V)JB \Big\}$$

olur. Buradan, denklemin sol tarafı için (2.34), (2.35), (2.42) ve (2.43) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}_V \phi U + (\nabla_V \phi U)^{\nu} + (\nabla_V \psi U)^{\hbar} + \mathscr{T}_V \psi U \\
&- \mathscr{B}\mathscr{T}_V U - \mathscr{C}\mathscr{T}_V U - \phi(\nabla_V U)^{\nu} - \psi(\nabla_V U)^{\nu} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{ \omega(JU)V - \omega(U)\Big[\phi V + \psi V\Big] - g(V, \phi U)\Big[B^{\nu} + B^{\hbar}\Big] \\
&+ g(U,V)\Big[\phi B^{\nu} + \psi B^{\nu} + \mathscr{B}B^{\hbar} + \mathscr{C}B^{\hbar}\Big] \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra bu denklemin yatay ve dikey parçaları ayrı denklemlerde yazılırsa, (4.1) ve (4.2) denklemlerini elde ederiz.

Benzer biçimde $(\nabla_\eta J)\xi, (\nabla_\eta J)V$ ve $(\nabla_V J)\eta$ hesaplanarak diğer denklemler de elde edilir.

4.2 DAĞILIMLARIN TÜMEL JEODEZİKLİĞİ VE İNTEGRALLENEBİLİRLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, yarı-eğik altdaldırma tanımındaki değişmez ve eğik dağılımlarının integrallenebilirlikleri ile alakalı koşullar verilmiştir. Buna ek olarak değişmez, eğik, dikey ve yatay dağılımlarının tümel jeodezik olabilmeleri için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

Teorem 4.2.1 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırma olsun. $\mathscr{D}^T$ değişmez dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathscr{T}_V JU - \mathscr{T}_U JV = g(U, JV)B^{\hbar} \tag{4.9}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır, burada $U, V \in \mathscr{D}^{\top}$ keyfi vektör alanlarıdır.

İspat. $U, V \in \mathscr{D}^T$ olsun. (2.47)-**ii)** nedeniyle $\psi U = 0 = \psi V$ olur. Bunu dikkate alarak (4.2) denklemi kullanılırsa

$$\mathscr{T}_V JU = \mathscr{C}\mathscr{T}_V U + \psi(\nabla_V U)^{\nu} + \frac{1}{2}\Big\{ - g(V, JU)B^{\hbar} + g(U, V)\Big[\psi B^{\nu} + \mathscr{C} B^{\hbar}\Big]\Big\}$$

elde edilir. U ile V'yi yer değiştirirsek

$$\mathscr{T}_U JV = \mathscr{C}\mathscr{T}_U V + \psi(\nabla_U V)^{\nu} + \frac{1}{2}\Big\{ - g(U, JV)B^{\hbar} + g(U, V)\Big[\psi B^{\nu} + \mathscr{C} B^{\hbar}\Big]\Big\}$$

olur. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkartırsak

$$\mathscr{T}_V JU - \mathscr{T}_U JV = \psi[V, U] + g(U, JV)\mathscr{B}^{\hbar}$$

elde edilir.

Eğer $\mathscr{D}^T$ integrallenebilir ise $\psi[V, U] = 0$ olur ve yukarıdaki denklemden ifade edlilen denklem elde edilir.

Tersine (4.9) denklemi sağlansın. Dolayısıyla $\psi[V, U] = 0$ olur. Buradan ise $\mathscr{D}^T$ integrallenebilir olduğu elde edilir.

Sonuç 4.2.2 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırma olsun. Eğer $\mathscr{D}^T$ integrallenebilir değişmez dağılımının boyutu 4'ten büyük ve tümel jeodezik ise, o halde B Lee vektör alanı dikeydir.

İspat. (4.9) denklemi ve tümel jeodeziklik tanımından direkt olarak elde edilir.

Sonuç 4.2.3 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırma olsun. Eğer $\mathscr{D}^T$ integrallenebilir değişmez dağılımı tümel umbilik ise $H^T = -\frac{1}{2}B^{\hbar}$ olur, burada H^T, $\mathscr{D}^T$ nin ortalama vektör alanıdır.

İspat. (4.9) denklemi ve tümel umbilik tanımı kullanılarak gösterilir.

Teorem 4.2.4 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul keyfi $X, Y \in \mathscr{D}^\theta$ için

$$(\nabla_X \phi Y)^\nu - (\nabla_Y \phi X)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y - \mathscr{T}_Y \psi X + g(X, \phi Y)B^\nu \in \mathscr{D}^\theta$$

olmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul keyfi $X, Y \in \mathscr{D}^\theta$ için $[X, Y] \in \mathscr{D}^\theta$ olmasıdır. Öte yandan (2.47)-**iii)** özelliğinden, $[X, Y] \in \mathscr{D}^\theta$ olması için gerek ve yeter koşul $\phi[X, Y] \in \mathscr{D}^\theta$ olmasıdır. Dolayısıyla (4.1) denkleminden

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi Y)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y &= \phi(\nabla_X Y)^\nu + \mathscr{B}\mathscr{T}_X Y + \frac{1}{2}\omega(JY)X \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega(Y)\phi X - \frac{1}{2}g(X, \phi Y)B^\nu + \frac{1}{2}g(X, Y)[\phi B^\nu + \mathscr{B}B^{\hbar}]\end{aligned}$$

elde edilir. X ile Y yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}(\nabla_Y \phi X)^\nu + \mathscr{T}_Y \psi X &= \phi(\nabla_Y X)^\nu + \mathscr{B}\mathscr{T}_Y X + \frac{1}{2}\omega(JX)Y \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega(X)\phi Y - \frac{1}{2}g(Y, \phi X)B^\nu + \frac{1}{2}g(Y, X)[\phi B^\nu + \mathscr{B}B^{\hbar}]\end{aligned}$$

olur. Daha sonra bu iki denklem birbiri ile taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned}&(\nabla_X \phi Y)^\nu - (\nabla_Y \phi X)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y - \mathscr{T}_Y \psi X \\ &= \phi[X, Y] + \frac{1}{2}\omega(JY)X - \frac{1}{2}\omega(JX)Y - \frac{1}{2}\omega(Y)\phi X + \frac{1}{2}\omega(X)\phi Y + g(Y, \phi X)B^\nu\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu denklemden, $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi Y)^{\nu} - (\nabla_Y \phi X)^{\nu} + \mathscr{T}_X \psi Y - \mathscr{T}_Y \psi X + g(X, \phi Y)B^{\nu} \in \mathscr{D}^{\theta}$$

olmasıdır.

Teorem 4.2.5 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. Çekπ_* uzayının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $U, V \in$ Çekπ_* için

$$\begin{aligned} &\psi\Big((\nabla_U \phi V)^{\nu} + \mathscr{T}_U \psi V\Big) + \mathscr{C}\Big(\mathscr{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^{\hbar}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\{\omega(JV)\psi U - g(U,V)B^{\hbar} - g(U,JV)[\mathscr{C}B^{\hbar} + \psi B^{\nu}]\} \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat. Çekπ_* dağılımının tümel jeodezik olabilmesi için gerek ve yeter koşul keyfi $U, V \in$ Çekπ_* için $\nabla_U V \in$ Çekπ_* olmasıdır. $\nabla_U V = -J^2(\nabla_U V) = -J(J\nabla_U V)$ olmasından hareketle, (2.22), (2.34), (2.35), (2.42) ve (2.43) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \nabla_U V &= -J\Big(\nabla_U JV - \frac{1}{2}\{\omega(JV)U - \omega(V)JU - g(U,JV)B + g(U,V)JB\}\Big) \\ &= -J\Big(\mathscr{T}_U \phi V + (\nabla_U \phi V)^{\nu} + (\nabla_U \psi V)^{\hbar} + \mathscr{T}_U \psi V\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\omega(JV)JU + \omega(V)U - g(UJV)JB - g(U,V)B\} \\ &= -\Big(\mathscr{B}\mathscr{T}_U \phi V + \mathscr{C}\mathscr{T}_U \phi V + \phi(\nabla_U \phi V)^{\nu} + \psi(\nabla_U \phi V)^{\nu} \\ &\quad + \mathscr{B}(\nabla_U \psi V)^{\hbar} + \mathscr{C}(\nabla_U \psi V)^{\hbar} + \phi \mathscr{T}_U \psi V + \psi \mathscr{T}_U \psi V\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\omega(JV)JU + \omega(V)U - g(U,JV)JB - g(U,V)B\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla burada $\nabla_U V$'nin yatay parçaları sıfırlanırsa

$$\begin{aligned} &-\psi\Big((\nabla_U \phi V)^{\nu} + \mathscr{T}_U \psi V\Big) - \mathscr{C}\Big(\mathscr{T}_U \phi V + (\nabla_U \psi V)^{\hbar}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\{\omega(JV)\psi U - g(U,V)B^{\hbar} - g(U,JV)[\mathscr{C}B^{\hbar} + \psi B^{\nu}]\} = 0 \end{aligned}$$

olur ki istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.6 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. (Çek$\pi_*)^{\perp}$ uzayının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi

$\eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ için

$$\begin{aligned} &\phi\Big((\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^v + \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi\Big) + \mathscr{B}\Big(\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar\Big) \\ =& \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\xi)\mathscr{B}\eta - g(\eta,\xi)B^v - g(\eta, J\xi)[\mathscr{B}B^\hbar + \phi B^v]\Big\} \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat. $(\text{Çek}\pi_*)^\perp$ dağılımının tümel jeodezik olabilmesi için gerek ve yeter koşul keyfi $\eta, \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ için $\nabla_\eta \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ olmasıdır. Dolayısıyla, (2.22), (2.36), (2.37), (2.42) ve (2.43) özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \xi &= -J\Big(\nabla_\eta J\xi - \frac{1}{2}\{\omega(J\xi)\eta - \omega(\xi)J\eta - g(\eta, J\xi)B + g(\eta,\xi)JB\}\Big) \\ &= -J\Big(\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^v + \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\xi)J\eta + \omega(\xi)\eta - g(\eta, J\xi)JB - g(\eta,\xi)B\Big\} \\ &= -\Big(\mathscr{B}\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + \mathscr{C}\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + \phi(\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^v + \psi(\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^v \\ &+ \phi \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi + \psi \mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi + \mathscr{B}(\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar + \mathscr{C}(\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\xi)J\eta + \omega(\xi)\eta - g(\eta, J\xi)JB - g(\eta,\xi)B\Big\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\nabla_\eta \xi \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ olması için gerek ve yeter koşul yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki dikey parçaların sıfır olmasıdır. Yani

$$\begin{aligned} &-\phi\Big(\mathscr{A}_\eta \mathscr{C}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{B}\xi)^v\Big) - \mathscr{B}\Big(\mathscr{A}_\eta \mathscr{B}\xi + (\nabla_\eta \mathscr{C}\xi)^\hbar\Big) \\ +& \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\xi)\mathscr{B}\eta - g(\eta,\xi)B^v - (\eta, J\xi)[\phi B^v + \mathscr{B}B^\hbar]\Big\} = 0 \end{aligned}$$

olur ki istenen elde edilir.

Vilms [27], bir Riemann altdaldırmanın tümel jeodezik olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{A}$ O'Neill tensörlerinin sıfır olması gerektiğini ispatlamıştır. Buna ek olarak, bir lifin tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{T}$ O'Neill tensörünün sıfır olmasıdır. Buradan hareketle aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.7 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. π dönüşümünün tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul Teorem (4.2.5) ve Teorem (4.2.6)'ün sağlanmasıdır.

Teorem 4.2.8 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. $\mathscr{D}^T$ değişmez dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $U, V \in \mathscr{D}^T$ için

$$\mathscr{C}\mathscr{T}_U JV + \psi(\nabla_U JV)^\nu + \frac{1}{2}\{g(U,V)B^\hbar + g(U,JV)[\psi B^\nu + \mathscr{C}B^\hbar]\} = 0 \tag{4.10}$$

$$\mathscr{Q}\Big(\mathscr{B}\mathscr{T}_U JV + \phi(\nabla_U JV)^\nu + \frac{1}{2}\{g(U,V)B^\nu + g(U,JV)[\mathscr{B}B^\hbar + \phi B^\nu]\}\Big) = 0 \tag{4.11}$$

olmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^\top$ dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $U, V \in \mathscr{D}^\top$ için $\nabla_U V \in \mathscr{D}^\top$ olmasıdır. Dolayısıyla, (2.22), (2.34) (2.42) ve (2.43) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_U V &= -J\Big(\nabla_U JV - \frac{1}{2}\Big\{\omega(JV)U - \omega(V)JU - g(U,JV)B + g(U,V)JB\Big\}\Big) \\
&\quad - J\Big(\mathscr{T}_U JV + (\nabla_U JV)^\nu\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{\omega(JV)JU + \omega(V)U - g(U,JV)JB - g(U,V)B\Big\} \\
&= -\Big(\mathscr{B}\mathscr{T}_U JV + \mathscr{C}\mathscr{T}_U JV + \phi(\nabla_U JV)^\nu + \psi(\nabla_U JV)^\nu\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{\omega(JV)JU + \omega(V)U - g(U,JV)JB - g(U,V)B\Big\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\nabla_U V \in \mathscr{D}^\top$ olması için gerek ve yeter koşul yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki yatay ve eğik dağılımların terimlerinin sıfır olmasıdır ki bu şekilde (4.10) ve (4.11) denklemleri elde edilir.

Teorem 4.2.9 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. $\mathscr{D}^\theta$ eğik dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $X, Y \in \mathscr{D}^\theta$ için

$$\begin{aligned}
&\psi((\nabla_X \phi Y)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y) + \mathscr{C}(\mathscr{T}_X \phi Y + (\nabla_X \psi Y)^\hbar) \\
&- \frac{1}{2}\{\omega(JY)\psi X - g(X,Y)B^\hbar - g(x,JY)[\psi B^\nu + \mathscr{C}B^\hbar]\} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}\Big(\mathscr{B}(\mathscr{T}_X \phi Y + (\nabla_X \psi Y)^\hbar) + \phi((\nabla_X \phi Y)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y \\
&- \frac{1}{2}\{\omega(JY)\phi X - g(X,Y)B^\nu - g(X,JY)[\phi B^\nu + \mathscr{B}B^\hbar]\}\Big) = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olmasıdır.

İspat. $\mathscr{D}^\theta$ dağılımının tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul keyfi $X,Y \in \mathscr{D}^\theta$ için $\nabla_X Y \in \mathscr{D}^\theta$ olmasıdır. Dolayısıyla, (2.22), (2.34), (2.35), (2.42) ve (2.43) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= -J\Big(\nabla_X JY - \frac{1}{2}\Big\{\omega(JY)X - \omega(Y)JX - g(X,JY)B + g(X,Y)JB\Big\}\Big) \\
&= -J\Big(\mathscr{T}_X\phi Y + (\nabla_X \phi Y)^\nu + \mathscr{T}_X \psi Y + (\nabla_X \psi Y)^\hbar\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\Big\{\omega(JY)JX + \omega(Y)X - g(X,JY)JB - g(X,Y)B\Big\} \\
&= -\Big(\mathscr{B}\mathscr{T}_X\phi Y + \mathscr{C}\mathscr{T}_X\phi Y + \phi(\nabla_X\phi Y)^\nu + \psi(\nabla_X\phi Y)^\nu \\
&+ \phi\mathscr{T}_X\psi Y + \psi\mathscr{T}_X\psi Y + \mathscr{B}(\nabla_X\psi Y)^\hbar + \mathscr{C}(\nabla_X\psi Y)^\hbar\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\Big\{\omega(JY)JX + \omega(Y)X - g(X,JY)JB - g(X,Y)B\Big\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\nabla_X Y \in \mathscr{D}^\theta$ olması için gerek ve yeter koşul yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki yatay ve değişmez dağılımların terimlerinin sıfır olmasıdır ki bu şekilde (4.12) ve (4.13) denklemleri elde edilir.

Birbirine ortogonal olan herhangi iki $\mathscr{D}^1$ ve $\mathscr{D}^2$ dağılımlarının integral manifoldları sırasıyla M^1 ve M^2 olsun. Ponge ve Reckziegel [18], $N_1^1 \times N_1^2$ manifoldunun bir direkt çarpım olması için gerek ve yeter koşulun $\mathscr{D}^1$ ve $\mathscr{D}^2$ dağılımlarının tümel jeodezik olması gerektiğini ispatlamıştır. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.10 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma ve $N_1^\top$ ile N_1^θ sırasıyla $\mathscr{D}^\top$ ile $\mathscr{D}^\theta$ dağılımlarının integral manifoldları olsun. $N_1^\top \times N_1^\theta$ manifoldunun bir direkt çarpım olması için gerek ve yeter koşul (4.10) $\sim$ (4.13) eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.2.11 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$, tümel manifoldu y.k.K olan ve lifleri tümel umbilik olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde

$$H + \frac{1}{2}B^\hbar \in \psi\mathscr{D}^\theta$$

olur.

İspat. $U,V \in D^T$ olsun. Dolayısıyla (2.47) b), (2.22) (2.34) (2.42) ve (2.43) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_U JV + (\nabla_U JV)^{\nu} &= \nabla_U JV \\
&= J\nabla_U V + \frac{1}{2}\Big\{\omega(JV)U - \omega(V)JU \\
&- g(U,JV)B + g(U,V)JB\Big\} \\
&= \mathscr{B}\mathscr{T}_U V + \mathscr{C}\mathscr{T}_U V + \phi(\nabla_U V)^{\nu} + \psi(\nabla_U V)^{\nu} \\
&+ \frac{1}{2}\Big\{\omega(JV)U - \omega(V)JU - g(U,JV)B + g(U,V)JB\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafını keyfi $\eta \in \mu$ ile çarpılırsa

$$g(\mathscr{T}_U JV,\eta) = g(\mathscr{C}\mathscr{T}_U V,\eta) - \frac{1}{2}g(U,JV)\omega(\eta) - \frac{1}{2}g(U,V)\omega(J\eta)$$

bulunur. π altdaldırmasının lifleri tümel umbilik olduğundan,

$$g(U,JV)g(H,\eta) = -g(U,V)g(H,J\eta) - \frac{1}{2}g(U,JV)\omega(\eta) - \frac{1}{2}g(U,V)\omega(J\eta)$$

elde edilir. Bu denklemde U ve V vektörlerinin rolleri değiştirilip, taraf tarafa çıkarma işlemi yapıldıktan sonra (2.18) eşitliği kullanılırsa,

$$g(U,JV)g(H + \frac{1}{2}B^{\hbar},\eta) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada U ile V keyfi vektör alanları olduğu için

$$g(H + \frac{1}{2}B^{\hbar},\eta) = 0$$

olur ki bu da $H + \frac{1}{2}B^{\hbar} \in \psi\mathscr{D}^{\theta}$ olmasını gerektirir.

4.3 PARALEL STANDART YAPILI YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Kabul edelim ki, $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ dönüşümü, tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırma olsun. Dolayısıyla

$$(\nabla_U \phi)V = (\nabla_U \phi V)^v - \phi(\nabla_U V)^v, \tag{4.14}$$

$$(\nabla_U \psi)V = (\nabla_U \psi V)^h - \psi(\mathfrak{D}_U V)^v, \tag{4.15}$$

$$(\nabla_U \mathscr{B})\xi = (\nabla_U \mathscr{B}\xi)^v - \mathscr{B}(\nabla_U \xi)^h, \tag{4.16}$$

$$(\nabla_U \mathscr{C})\xi = (\nabla_U \mathscr{C}\xi)^h - \mathscr{C}(\nabla_U \xi)^h. \tag{4.17}$$

eşitliklerini tanımlayabiliriz. Eğer $\nabla\phi = 0$ ise ϕ kanonik yapısına *paraleldir* denir. Benzer biçimde diğer kanonik yapılar için de aynı tanım verilebilir.

Teorem 4.3.1 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. Eğer Lee vektör alanı B yatay ve $\mathscr{B}$ kanonik yapısı paralel ise o zaman D^T değişmez dağılımı integrallenebilirdir.

İspat. $V \in \mathscr{D}^T$ ve $\eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ olsun. $\nabla\mathscr{B} = 0$ olduğu için (4.5) denkleminden

$$\mathscr{T}_V \mathscr{C}\eta = \phi \mathscr{T}_V \eta + \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\eta)V - \omega(\eta)\phi V - g(V, \mathscr{B}\eta)B^v\Big\}$$

olur. Aynı zamanda $B = B^\hbar$ olduğundan

$$\mathscr{T}_V \mathscr{C}\eta = \phi \mathscr{T}_V \eta + \frac{1}{2}\Big\{\omega(J\eta)V - \omega(\eta)\phi V\Big\}$$

elde edilir. Bu denklemi $U \in \mathscr{D}^T$ ile çarparsak

$$g(\mathscr{T}_V \mathscr{C}\eta, U) = g(\phi \mathscr{T}_V \eta, U) + \frac{1}{2}\omega(J\eta)g(U, V) - \frac{1}{2}\omega(\eta)g(JU, V)$$

olur. Burada $\mathscr{T}$'nin ters-simetriklik özelliğini kullanırsak

$$-g(\mathscr{T}_V U, \mathscr{C}\eta) = g(\mathscr{T}_V JU, \eta) + \frac{1}{2}\omega(J\eta)g(U, V) - \frac{1}{2}\omega(\eta)g(JU, V)$$

olur. Burada U ile V'nin yerlerini değiştirip daha sonra taraf tarafa çıkarma işlemi yaparsak,

$$0 = g(\mathscr{T}_V JU - \mathscr{T}_U JV - g(U, JV)B^\hbar, \eta)$$

elde edilir. η keyfi olduğu için $\mathscr{T}_V JU - \mathscr{T}_U JV = g(U,JV)B^{\hbar}$ olur ki bu da Teorem 4.2.1 sebebiyle $\mathscr{D}^T$'nin integrallenebilir olmasına denktir.

Teorem 4.3.2 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırma olsun. Eğer ψ kanonik yapısı paralel ise o halde $\mathscr{D}^T$ değişmez dağılımı integrallenebilirdir.

İspat. Keyfi $U, V \in \mathscr{D}^T$ alalım. (4.2) denkleminde ψ yapısının paralelliği kullanırsa

$$\mathscr{T}_V JU - \mathscr{C}\mathscr{T}_V U = -\frac{1}{2}g(V,JU)B^{\hbar} + \frac{1}{2}g(U,V)[\psi B^{\nu} + \mathscr{C}B^{\hbar}]$$

olur. V ile U'nun rolleri değiştirilirse

$$\mathscr{T}_U JV - \mathscr{C}\mathscr{T}_U V = -\frac{1}{2}g(U,JV)B^{\hbar} + \frac{1}{2}g(U,V)[\psi B^{\nu} + \mathscr{C}B^{\hbar}]$$

elde edilir. Taraf tarafa çıkartma işlemi yapılırsa

$$\mathscr{T}_V JU - \mathscr{T}_{JV} U = g(U,JV)B^{\hbar}$$

elde edilir ki bu da Teorem 4.2.1 sebebiyle $\mathscr{D}^T$ değişmez dağılımının integrallenebilir olmasına denktir.

4.4 CLAİRAUT YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR

Şimdi, tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırmanın Clairaut koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşulu verelim. Bundan önce teoremin ispatında kullanılacak olan önemli bir yardımcı teoremi ispatlayalım.

Yardımcı Teorem 4.4.1 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. α, N_1 üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olmak üzere, α eğrisinin jeodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_{\dot\alpha}\phi V)^{\nu} + (\nabla_{\dot\alpha}\mathscr{B}\eta)^{\nu} + \mathscr{T}_V(\psi V + \mathscr{C}\eta) + \mathscr{A}_\eta(\psi V + \mathscr{C}\eta) \tag{4.18}$$
$$-\frac{1}{2}\Big\{\omega(J\dot\alpha)V + \omega(\dot\alpha)(\phi V + \mathscr{B}\eta) + \beta(\phi\mathscr{B}^{\nu} + \mathscr{B}B^{\hbar})\Big\} = 0$$

$$(\nabla_{\dot\alpha}\psi V)^{\hbar} + (\nabla_{\dot\alpha}\mathscr{C}\eta)^{\hbar} + \mathscr{T}_V(\phi V + \mathscr{B}\eta) + \mathscr{A}_\eta(\phi V + \mathscr{B}\eta) \tag{4.19}$$
$$-\frac{1}{2}\Big\{\omega(J\dot\alpha)\eta + \omega(\dot\alpha)(\psi V + \mathscr{C}\eta) + \beta(\psi B^{\nu} + \mathscr{C}B^{\hbar})\Big\} = 0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır, burada $\dot{\alpha} = V + \eta$, $V \in$ Çekπ_* ve $\eta \in (\text{Çek}\pi_*)^\perp$ terimleridir ve β, $\dot{\alpha}$ vektör alanının boyudur.

İspat. $(\nabla_{\dot{\alpha}} J)\dot{\alpha}$ ifadesi (2.1) yardımıyla açılırsa

$$(\nabla_{\dot{\alpha}} J)\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}} J\dot{\alpha} - J\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$$

elde edilir. α eğrisi jeodezik olduğu için $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$(\nabla_{\dot{\alpha}} J)\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}} J\dot{\alpha}$$

olur. Burada eşitliğin sol tarafı için (2.22) denklemi yardımıyla ve eşitliğin sağ tarafı için ise (2.34)~(2.37), (2.42) ve (2.43) eşitlikleri yardımıyla açılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{\omega(\dot{\alpha})J\dot{\alpha} - \omega(J\dot{\alpha})\dot{\alpha} - g(\dot{\alpha}, J\dot{\alpha})B + g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})JB\Big\} \\
&\quad = \mathscr{T}_V\phi V + (\nabla_V \phi V)^\nu + (\nabla_V \psi V)^\hbar + \mathscr{T}_V\psi V \\
&\quad + \mathscr{T}_V\mathscr{B}\eta + (\nabla_V\mathscr{B}\eta)^\nu + (\nabla_V\mathscr{C}\eta)^\nu + \mathscr{T}_V\mathscr{C}\eta \\
&\quad + \mathscr{A}_\eta\phi V + (\nabla_\eta\phi V)^\nu + (\nabla_\eta\psi V)^\hbar + \mathscr{A}_\eta\psi V \\
&\quad + \mathscr{A}_\eta\mathscr{B}\eta + (\nabla_\eta\mathscr{B}\eta)^\nu + (\nabla_\eta\mathscr{C}\eta)^\hbar + \mathscr{A}_\eta\mathscr{C}\eta
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem yatay ve dikey vektör alanları için ayrı ayrı yazılırsa (4.18) ve (4.19) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.4.2 $\pi : (N_1, g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu y.k.K. olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. $f : N_1 \to \mathbb{R}$ olmak üzere π altdaldırmasının $\rho = e^f$ eşitliğine göre Clairaut altdaldırma olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
&g(\dot{\alpha}, gradf)g(V,V) + \frac{1}{2}\omega(J\dot{\alpha})g(\eta, \psi V) \\
&+\frac{1}{2}\omega(\dot{\alpha})\Big[g(\phi V + \mathscr{B}\eta, \phi V) + g(\psi V + \mathscr{C}\eta, \psi V)\Big] \\
&+\frac{1}{2}\Big[g(\phi B^\nu + \mathscr{B}B^\hbar, \phi V) + g(\psi B^\nu + \mathscr{C}B^\hbar, \psi V)\Big] \\
&-g(\nabla_{\dot{\alpha}}\mathscr{B}V + \mathscr{T}_V\psi V + \mathscr{A}_\eta\psi V + \mathscr{T}_V\mathscr{C}\eta + \mathscr{A}_\eta\mathscr{C}\eta, \phi V) \\
&-g(\nabla_{\dot{\alpha}}\mathscr{C}\eta + \mathscr{T}_V\phi V + \mathscr{A}_\eta\phi V + \mathscr{T}_V\mathscr{B}\eta + \mathscr{A}_\eta\mathscr{B}\eta, \psi V) = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olmasıdır, burada α eğrisi, ∇ koneksiyonuna göre jeodeziktir ve V ile η, sırasıyla $\dot{\alpha}$ teğet vektör alanının dikey ve yatay terimleridir.

İspat. Genelliği bozmadan $||\dot{\alpha}|| = 1$ kabul edelim. Dolayısıyla

$$g(\eta,\eta) = \cos^2\theta,\ g(V,V) = \sin^2\theta$$

olarak yazılabilir. (2.19) ve (2.20) eşitliklerini kullanıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\nabla_{\dot{\alpha}} g(V,V) = 2g(\nabla_{\dot{\alpha}} JV, JV)$$

eşitliği elde edilir. Dahası,

$$\nabla_{\dot{\alpha}} g(V,V) = \frac{d}{ds}\sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds}$$

olur.

Dolayısıyla, π altdaldırmasının Clairaut olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\frac{d}{ds}(e^f\sin\theta) = 0$ olmasıdır. Buradan hareketle, fonksiyonun türevini alırsak,

$$g(\dot{\alpha}, grad f)g(V,V) + g(\nabla_{\dot{\alpha}} JV, JV) = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada $g(\nabla_{\dot{\alpha}} JV, JV)$ terimi (2.42), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri kullanılarak açılırsa (4.20) denklemi elde edilir.

4.5 TÜMEL MANİFOLDU HOPF UZAY FORMU OLAN YARI-EĞİK ALTDALDIRMALAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bir altmanifoldun Ricci eğriliği ile ikinci temel formunun karesi arasındaki ilişkiyi veren ve literatürde Chen-Ricci eşitsizliği olarak bilenen eşitsizlik ilk olarak Chen [3] tarafından verilmiştir. Bu bölümde, tümel manifoldu Hopf uzay formu olan yarı-eğik altdaldırmaların lifleri için bu eşitsizliğin benzeri eşitsizlikleri elde edeceğiz.

Kabul edelim ki

$$\mathscr{D}^{\top} = ger\{U_1, U_2, \ldots U_{2k_1}\}\ ,\ JU_{2i-1} = U_{2i}\ ,\forall i \in \{1,\ldots,2k_1\}$$

ve

$$\mathscr{D}^{\theta} = ger\{U_{2k_1+1}, U_{2k_1+2} = \sec\theta\phi U_{2k_1+1}, \ldots, U_{2k_1+2k_2-1}, U_{2k_1+2k_2} = \sec\theta\phi U_{2k_1+2k_2-1}\}$$

olsun. Bundan sonraki teoremlerde bu baz kullanılarak ispatlar yapılacaktır.

Teorem 4.5.1 $\pi : (N_1(c), g, J, \omega) \to (N_2, g')$ tümel manifoldu Hopf uzay formu olan yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde, keyfi $X \in \mathscr{D}^{\theta}$ birim vektör alanı için

$$\begin{aligned} \widehat{Ric}(X) \geq \frac{c}{4}\Big(2k_1 + 2k_2 + 3\cos^2\theta - 1\Big) + \frac{3}{4}\Big((2 - 2k_1 - 2k_2)(\omega(X))^2 \\ + \omega(JX)\omega(\phi X) - \omega(J\phi X)\omega(X) + (2k_1 + 2k_2 - \cos^2\theta - 1)||B||^2 \\ - ||B^{\nu}||^2\Big) - (2k_1 + 2k_2)g(\mathscr{T}_X X, H^{\nu}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$\widehat{Ric}(X) = \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} \widehat{R}(X, U_i, U_i, X) \tag{4.22}$$

olarak tanımlanır.

İspat. $X \in \mathscr{D}^{\theta}$ keyfi birim vektör alanı olsun. (2.23) denkleminde $E = Z = X$ ve $F = G = U_i$ $(1 \leq i \leq 2k_1 + 2k_2)$ alınıp i üzerinden toplama işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} 4R(X, U_i, U_i, X) = \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} \Big\{ c\Big\{ g(X,X)g(U_i,U_i) - g(X,U_i)g(U_i,X) \\ + g(JX,X)g(JU_i,U_i) + 3g^2(X,JU_i)\Big\} \\ + 3\Big\{L(X,X)g(U_i,U_i) - L(X,U_i)g(U_i,X) \\ + g(X,X)L(U_i,U_i) - g(X,U_i)L(U_i,X)\Big\} \\ - \bar{L}(X,X)g(JU_i,U_i) + \bar{L}(X,U_i)g(JU_i,X) \\ - g(JX,X)\bar{L}(U_i,U_i) + g(JX,U_i)\bar{L}(U_i,X) \\ + 2\Big\{\bar{L}(X,U_i)g(JU_i,X) + g(JX,U_i)\bar{L}(U_i,X)\Big\}\Big\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. Burada

$$\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} g^2(X,JU_i) = \sum_{i=2k_1+1}^{2k_1+2k_2} g^2(X,JU_i) = cos^2\theta$$

ve (2.26) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} 4R(X,U_i,U_i,X) =& c\Big(2k_1+2k_2+3\cos^2\theta-1\Big)\\ &+3\Big((2-2k_1-2k_2)(\omega(X))^2+\omega(JX)\omega(\phi X)\\ &-\omega(J\phi X)\omega(X)+(2k_1+2k_2-\cos^2\theta-1)||B||^2\\ &-||B^\nu||^2\Big)\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. Şimdi (2.38) eşitliğinde $U=F=X$ ve $V=W=U_i$ alınıp i üzerinden toplama işlemi alınırsa

$$\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} R(X,U_i,U_i,X) = \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2}\left(\widehat{R}(X,U_i,U_i,X)+g(\mathscr{T}_X X,\mathscr{T}_{U_i}U_i)-||T_U U_i||^2\right) \tag{4.25}$$

elde edilir. Bu denklemde (2.33), (4.22) ve (4.24) eşitliklerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}\widehat{Ric}(X) =& \frac{c}{4}\Big(2k_1+2k_2+3\cos^2\theta-1\Big)+\frac{3}{4}\Big((2-2k_1-2k_2)(\omega(X))^2\\ &+\omega(JX)\omega(\phi X)-\omega(J\phi X)\omega(X)+(2k_1+2k_2-\cos^2\theta-1)||B||^2\\ &-||B^\nu||^2\Big)-(2k_1+2k_2)g(\mathscr{T}_X X,H^\nu)+||T_U U_i||^2\end{aligned}$$

elde edilir ki bu denklemden istenilen eşitsizlik elde edilebilir.

Teorem 4.5.2 $\pi : (N_1(c),g,J,\omega) \to (N_2,g')$ tümel manifoldu Hopf Uzay formu olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde, keyfi $U \in \mathscr{D}^\top$ için

$$\begin{aligned}\widehat{Ric}(U) \geq& \frac{c}{4}\Big(2k_1+2k_2+2\Big)+\frac{3}{4}\Big((3-2k_1-2k_2)(\omega(U))^2\\ &+(2k_1+2k_2-2)||B||^2+(\omega(JU))^2-||B^\nu||^2\Big)\\ &-(2k_1+2k_2)g(\mathscr{T}_X U,H^\nu)\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur.

İspat. $U \in \mathscr{D}^\top$ keyfi birim vektör alanı olsun. (2.23) denkleminde $E=Z=U$ ve $F=G=U_i$

alınıp i üzerinden toplam işlemi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} 4R(U,U_i,U_i,U) = \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} \Big\{ & c\Big\{ g(U,U)g(U_i,U_i) - g(U,U_i)g(U_i,U) \\
& + g(JU,U)g(JU_i,U_i) + 3g^2(U,JU_i)\Big\} \\
& + 3\Big\{ L(U,U)g(U_i,U_i) - L(U,U_i)g(U_i,U) \\
& + g(U,U)L(U_i,U_i) - g(U,U_i)L(U_i,U)\Big\} \\
& - \bar{L}(U,U)g(JU_i,U_i) + \bar{L}(U,U_i)g(JU_i,U) \\
& - g(JU,U)\bar{L}(U_i,U_i) + g(JU,U_i)\bar{L}(U_i,U) \\
& + 2\Big\{ \bar{L}(U,U_i)g(JU_i,U) + g(JU,U_i)\bar{L}(U_i,U)\Big\}\Big\}
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

elde edilir. Burada $U \in \mathscr{D}^\top$ olduğu için

$$
\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} g^2(U,JU_i) = \sum_{i=1}^{2k_1} g^2(U,JU_i) = 1
$$

ve (2.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2k_1+2k_2} R(U,U_i,U_i,U) = & \frac{c}{4}\Big(2k_1+2k_2+2\Big) + \frac{3}{4}\Big((3-2k_1-2k_2)(\omega(U))^2 \\
& + (\omega(JU))^2 + (2k_1+2k_2-2)||B||^2 - ||B^\nu||^2\Big)
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

olur. Şimdi (4.25) eşitliğinde X vektör alanı yerine U alınıp, daha sonra (2.33), (4.22) ve (4.28) eşitliklerini bu denklemde yerlerine yazarak

$$
\begin{aligned}
\widehat{Ric}(U) = & \frac{c}{4}\Big(2k_1+2k_2+2\Big) + \frac{3}{4}\Big((3-2k_1-2k_2)(\omega(U))^2 \\
& + (\omega(JU))^2 + (2k_1+2k_2-2)||B||^2 - ||B^\nu||^2\Big) \\
& - (2k_1+2k_2)g(\mathscr{T}_U U, H^\nu) + ||T_U U_i||^2
\end{aligned}
$$

olur ki buradan da eşitsizlik kolayca elde edilir.

Teorem 4.5.3 $(N_1(c),g,J,\omega) \to (N_2,g')$ tümel manifoldu Hopf uzay formu olan bir yarı-eğik altdaldırma olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau} \geq & \frac{c}{4}\Big\{(2k_1+2k_2)^2 - 2(k_1+k_2) - 6(k_1+k_2\cos^2\theta)\Big\} \\
& + \frac{3}{4}\Big\{-2(k_1+k_2\cos^2\theta)||B||^2 \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2}\Big[\omega(JU_i)\omega(\phi U_i) - \omega(J\phi U_i)\omega(U_i)\Big]\Big\} \\
& - (2k_1+2k_2)^2||H^{\nu}||^2
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $\widehat{\tau}$ lifler üzerindeki skaler eğriliktir.

İspat. (2.23) eşitliğinde $E = Z = U_j$ ve $F = G = U_i$ alınıp i ve j üzerinden toplam alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2k_1+2k_2} 4R(U_j,U_i,U_i,U_j) = \sum_{i,j=1}^{2k_1+2k_2} \Bigg\{ & c\Big\{g(U_j,U_j)g(U_i,U_i) - g(U_j,U_i)g(U_i,U_j) \\
& + g(JU_j,U_j)g(JU_i,U_i) + 3g^2(U_j,JU_i)\Big\} \\
& + 3\Big\{L(U_j,U_j)g(U_i,U_i) - L(U_j,U_i)g(U_i,U_j) \\
& + g(U_j,U_j)L(U_i,U_i) - g(U_j,U_i)L(U_i,U_j)\Big\} \\
& - \bar{L}(U_j,U_j)g(JU_i,U_i) + \bar{L}(U_j,U_i)g(JU_i,U_j) \\
& - g(JU_j,U_j)\bar{L}(U_i,U_i) + g(JU_j,U_i)\bar{L}(U_i,U_j) \\
& + 2\Big\{\bar{L}(U_j,U_i)g(JU_i,U_j) + g(JU_j,U_i)\bar{L}(U_i,U_j)\Big\}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

elde edilir. Burada

$$
g^2(U_i,U_j) = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}
$$

ve

$$
\sum_{i,j=1}^{2k_1+2k_2} g^2(JU_j,U_i) = 2k_1 + 2\cos^2\theta k_2
$$

olduğunu dikkate alarak hesap yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau} = & \frac{c}{4}\Big\{(2k_1+2k_2)^2 - 2(k_1+k_2) - 6(k_1+k_2\cos^2\theta)\Big\} \\
& + \frac{3}{4}\Big\{-2(k_1+k_2\cos^2\theta)||B||^2 \sum_{i=1}^{2k_1+2k_2}\Big[\omega(JU_i)\omega(\phi U_i) - \omega(J\phi U_i)\omega(U_i)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

elde edilir. Şimdi (2.38) eşitliğinde $U = F = U_j$ ve $V = W = U_i$ aldıktan sonra (2.33), (4.22) ve (4.31) eşitliklerini yerlerine yazarsak eşitsizliği elde ederiz.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Riemann manifoldlar, Kaehler manifoldlar, yerel konformal Kaehler manifoldlar, yerel konformal Kaehler manifoldların yarı-eğik altmanifoldları, Riemann altdaldırmalar ve yarı-eğik altdaldırmalar tanıtıldı. Daha sonra bulgular kısmında tümel manifoldu yerel konformal Kaehler manifold olan yarı-eğik altdaldırmalar ile alakalı sonuçlar elde edilmiştir. Bulgular kısmının ilk alt bölümünde, tümel manifoldu y.k.K. manifold olan yarı-eğik altdaldırmaların özel hali olan tümel manifoldu g.k.K. manifold olan yarı-eğik altdaldırmalar için örnek verilmiştir. Yardımcı Teorem 4.1.2 de bulunan sekiz tane denklem, tümel manifoldu y.k.K. olan yarı-eğik altdaldırmalar için temel denklemlerdir. İkinci alt bölümde, değişmez dağılımın integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul Teorem 4.2.1 de verilmiştir. Burada elde edilen koşulun Taştan ve Triphati [25] de verilen denklem ile paralel olduğu görülmektedir. Devamında bu teoremden direkt olarak elde edilen iki sonuç bulunmaktadır. Teorem 4.2.4'te eğik dağılımın integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Teorem 4.2.5 ile Teorem 4.2.11 arasında dikey, yatay, değişmez ve eğik dağılımların tümel jeodezikliği irdelenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar Park ve Prasad [17] makalesinde elde edilmiş olan sonuçların bir genelleştirilmesidir. Üçüncü alt bölümde, paralel kanonik yapılar kullanılarak, değişmez dağılımın integrallenebilirliği ile alakalı teoremler verilmiştir. Dördüncü alt bölümde, tümel manifold üzerindeki bir eğrinin jeodezik olması için gerek ve yeter koşullar Yardımcı Teorem 4.4.1 te verilmiştir. Bu denklemler kullanılarak, ele alınan altdaldırmanın Clairaut altdaldırma olması için gerek ve yeter koşul Teorem 4.4.2 elde edilmiştir. Son alt bölümde, Teorem 4.5.1, Teorem 4.5.2 ve Teorem 4.5.3 de tümel manifoldu Hopf uzay form olan yarı-eğik altdaldırmaların lifleri için Ricci eğrilikleri ile alakalı bazı eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Bu tezde bulunan sonuçlar aslında tümel manifoldu Kaehler manifold olan yarı-eğik altdaldırmaların bir genelleştirilmesi olarak görülebilir. Bu tezde elde edilen sonuçlar tümel manifoldu yerel konformal Kaehler olan yarı-eğik altdaldırmaları kapsayan altdaldırma tipleri için bir başvuru kaynağı olabilir. Ayrıca bu tez tümel manifoldu konformal manifold tipinde (tanınmış bir manifold tipine konformal) olan altdaldırmaların çalışılmasına ışık tutmaktadır.

KAYNAKLAR

[1]. Bishop, R.L., 1972, Clairaut submersions, *differential geometry (in Honor of Kentaro Yano)*, Tokyo, Kinokuniya, 21-31.

[2]. Chen, B.Y., 1981, Slant immersions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 41, 135,137.

[3]. Chen, B.Y., 1999, Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions, *Glasgow Math. J.*, 41, 33-41.

[4]. Chern, S.S., Chen, W.H. and Lam, K.S., 1998, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, London, ISBN: 9810234945.

[5]. Chinea, D., 1985, Almost contact metric submersions, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 34(1), 89-104.

[6]. De, U.C. and Shaikh A.A, 2007, *Differential Geometry of Manifolds*, Alpha Science International Limited, Oxford.

[7]. Dragomir, S. and Ornea, L., 1998, *Locally conformal Kähler geometry*, Springer Science +Business Media, New York, ISBN: 978-1-4612-7387-5.

[8]. Gray, A., 1967, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech 16*, 715-737.

[9]. Hsiung, C.C., 1995, *Almost complex and complex structures*, World Scientific, London, ISBN: 981-02-1712-9.

[10]. Ianus, S., Mazzocco, R. and Vilcu, G. E., 2008, Riemannian submersions from quaternionic manifolds, *Acta Appl. Math.*, 104(1), 83-89.

[11]. Kashiwada, T., 1979 , Some properties of locally conformal Kaehler manifolds, *Hokkaido Math. J.*, 8(2), 191-198.

[12]. Lee, H.C., 1943, A kind of even dimensional differential geometry and its application to exterior calculus, *American Journal of Mathematics*, 65, 433-438.

[13]. Marrero, J. C. and Rocha, J., 1994, Locally conformal Kaehler submersions, *Geom. Dedicata*, 52(3), 231-241.

[14]. O'Neill, B., 1966, The fundamental equations of a submersion., *The Michigan Mathematical Journal*, 13(4), 459–469.

[15]. O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, ISBN: 0-12-526740-1.

[16]. Papaghiuc, N., 1994, Semi-Slant submanifolds of a Kaehlerian manifold, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, 19, 127-141.

[17]. Park, K.S., Prasad R., 2013, Semi-Slant Submersions, *Bull. Korean Math. Soc.*, 50(3), 951-962.

[18]. Ponge, R. and Reckziegel, H., 1993, Twisted Products in Pseudo-Riemannian Geometry, *Geometriae Dedicata*, 48(1), 15-25.

[19]. Şahin, B., 2009, Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor, *Annales Polonici Mathematici*, 95, 3, 207-226.

[20]. Şahin, B., 2010, Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Cent. Eur. J. Math.* 8(3), 437-447.

[21]. Şahin, B., 2011, Slant submersions from almost Hermitian manifolds, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 93-105.

[22]. Şahin, B., (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel, Ankara.

[23]. Şahin, B., 2013, Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds, *Canadian Mathematical Bulletin*, 56(1), 173-183.

[24]. Taştan, H.M., 2014, On Lagrangian submersions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statics*, 43(6), 993-1000.

[25]. Taştan, H.M. and Triphati, M.M., 2016, Semi-slant submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold, *Analele Stiinifice Ale Universitatii Al I Cuza Din Iasi-Serie Noua-Matematica*, 1-13.

[26]. Taştan, H.M., Şahin, B. and Yanan, Ş., (2016), Hemi-slant submersions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(4), 2171-2184.

[27]. Wilms, J., 1970, Totally geodesic maps, *J. Differential Geometry*, 4(1), 73-79.

[28]. Watson, B., 1976, Almost Hermitian submersions, *J. Differantial Geom.*, 11, no. 1, 147-165.

[29]. Yano, K. and Kon, M., 1984, *Structures on manifolds*, World Scientific, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Çağrıhan ÇİMEN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	X T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2021

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2024

Makale ve Bildiriler

Makaleler

Pirinççi, B., Çimen, Ç., Ulusoy, D. (2023). Clairaut and Einstein conditions for locally conformal Kaehler submersions. Istanbul Journal of Mathematics, 1(1), 28-39. https://doi.org/10.26650/ijmath.2023.00003

Bildiriler

The Geometry Of Semi-Slant Submersions Whose Total Manifolds Are Locally Conformal Kaehler Manifolds - The International Conference Riemannian Geometry and Applications – RIGA 2023