

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tuğçe KARADAĞ BARIŞ

**GAMMA VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN ELDE
EDİLMİŞ BAZI ÖNEMLİ ÖZDEŞLİKLER**
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Evrim TOKLU

AĞRI – 2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GAMMA VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLMİŞ BAZI
ÖNEMLİ ÖZDEŞLİKLER**

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Evrim TOKLU

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

Bilindiği üzere, gamma ve hipergeometrik fonksiyonları içeren denklemler, matematikçiler ve bilim adamları için büyük ilgi görmekte ve bu fonksiyonlar için yeni kanıtlanmış özdeşlikler, diferansiyel ve integral denklemlere çözüm bulmaya yardımcı olmaktadır.

J.P. Hannah'ın "Identities for the gamma and hypergeometric functions: an overview from Euler to the present" başlıklı çalışmasına dayanan bu çalışmadaki amacımız, gamma ve hipergeometrik fonksiyonların kısa gelişiminin izini sürmek, aralarındaki yakın ilişkiyi göstermek ve en eski çağlardan günümüze kadar en kullanışlı özelliklerini ve özdeşliklerini sunmaktadır.

2024, 128 sayfa

Anahtar Kelimeler: Pochhammer sembolü, Gamma fonksiyonu, Tam olmayan gamma fonksiyonu, Digamma fonksiyonu, Hipergeometrik fonksiyonlar, Gauss hipergeometrik fonksiyonu.

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
THE SOME IMPORTANT IDENTITIES OBTAINED FOR GAMMA AND
HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Advisor Of Thesis: Assoc. Dr. Evrim TOKLU

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

As is known, equations involving gamma and hypergeometric functions are of great interest to mathematicians and scientists, and newly proven identities for these functions help to find solutions to differential and integral equations.

Our aim in this study, based on J.P. Hannah's work entitled "Identities for the gamma and hypergeometric functions: an overview from Euler to the present", is to trace the brief development of gamma and hypergeometric functions, to show the close relationship between them, and to present their most useful properties and identities from the oldest ages to the present day.

2024, 128 pages

Key Words: Pochhammer symbol, Gamma function, Incomplete gamma function, Digamma fonksiyonu, Beta function, Hypergeometric functions, Gauss hypergeometric function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans yapmam için beni teşvik eden ve tez çalışması boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve destek olan tez danışmanım Doç. Dr. Evrim TOKLU'ya danışmanlığı için çok teşekkür ediyorum. Tez izleme komitemde yer alarak değerli görüşleri ile araştırmanın şekillenmesini sağlayan Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR ve Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Yüksek lisans sürecinde ve hayatımın her anında maddi ve manevi katkılarıyla, sabır ve anlayışlarıyla çalışmalarım-daki başarıma büyük katkısı olan başta annem olmak üzere aileme ve değerli desteklerini esirgemeyen sevgili arkadaşlarıma teşekkürlerimi borç bilirim.

Tuğçe KARADAĞ BARIŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1.GİRİŞ	1
2.KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Serilerin Çarpım ve Bazı Temel Özellikleri	3
2.1.1. Artan Çarpınım	5
2.1.2. Bir Fonksiyonun Logaritmik Konveksliği	7
2.2. Kompleks Fonksiyonlar Teorisinden Bazı Sonuçlar	8
2.2.1. Kompleks Fonksiyonların Eğrisel İntegrali.....	8
2.2.2. Çok Değerli Fonsiyonlar ve Dalları	9
2.2.3. Analitik Devamlılık	10
3.MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Gamma Fonksiyonu	13
3.2. Gamma Fonksiyonunun Kısa Bir Tarihçesi	14
3.3. Gamma Fonksiyonunun Gösterimleri	19
3.3.1. Gamma Fonksiyonunun Çarpım ve Limit Temsilleri.....	19
3.3.2. Gamma Fonksiyonunun İntegral Temsilleri	22
3.3.3. Gamma Gösterimleri ve Bohr-Mollerup Teoremi	23
3.4. Gamma Fonksiyonunun Bazı Önemli Özellikleri	24
3.4.1. Gamma Fonksiyonu ve Faktöriyeler	24
3.4.2. Euler'in Yansıma Formülü	25
3.4.3. Çarpım ve İki Kat Formülleri.....	28
3.4.4. Gamma Fonksiyonunun Asimptotik Davranışı.....	29
3.5. Gamma Fonksiyonu ile İlgili Fonksiyonlar	30
3.5.1. Ters Gamma Fonksiyonu	30
3.5.2. Tam Olmayan ve Çoklu Gamma Fonksiyonları	31
3.5.3. Digamma fonksiyonu	31

3.5.4. Beta fonksiyonu.....	34
3.6. Kompleks Gamma Fonksiyonu	36
3.6.1. Gamma Fonksiyonunun Analitik Devamı	37
3.7. Kompleks Analiz ve Gamma Fonksiyonu	38
3.8. Gamma Fonksiyonunun Bazı İlginç Uygulamaları	41
3.8.1. İntegral Hesabı	41
3.8.2. Sonsuz Çarpımlar	42
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	43
4.1. Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu	43
4.2. Gauss Hipergeometrik Fonksiyonunun Tanımlanması.....	44
4.3. Gauss Fonksiyonunun Bazı Temel Özellikleri	48
4.3.1. Analitiklik	48
4.3.2. Bitişik Fonksiyon İlişkileri	48
4.3.3. Gauss Fonksiyonunun Diferansiyel Özellikleri	51
4.3.4. Hipergeometrik Diferansiyel Denklem	51
4.4. Gauss Fonksiyonunun İntegral Gösterimleri	54
4.5. Gauss Fonksiyonunun $z = \pm 1$ için Değerlendirilmesi	59
4.6. Dönüşüm Özdeşlikleri.....	64
4.6.1. Doğrusal Dönüşümler.....	64
4.6.2. Kuadratik dönüşümler	68
4.7. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonlar.....	73
4.7.1. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonun Tanımlanması.....	74
4.7.2. Belirli ${}_{p+1}F_p$ Serileri İçin Klasik Özdeşlikler	77
4.7.3. ${}_3F_2(1)$ için Hesaplamalar ve Dönüşüm Özdeşlikleri.....	77
4.7.4. ${}_{p+1}F_p(\pm 1)$ için hesaplamalar ve dönüşüm özdeşlikleri	84
4.8. Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon	92
4.9. Hipergeometrik Fonksiyonların Bazı Uygulamaları	97
5.TARTIŞMA VE SONUÇ	99
5.1. Hipergeometrik Fonksiyonlarla İlgili Son Sonuçlar	99
5.1.1. Ayrıntılı Olarak Bazı Yeni Sonuçların Takdimi	99
5.1.2. Diğer Sonuçlara Genel Bir Bakış	112
KAYNAKLAR	120

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Pochhammer	5
3.1 Reel düzlemde gamma fonksiyonunun grafiği	14
3.2 Reel düzlemde ters gamma fonksiyonunun grafiği	30
3.3 Kompleks gamma fonksiyonu	37
3.4 -1 basit kutup noktasını çevreleyen çevre	39
4.1 Barnes integrasyon çevresi	58



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Γ	Gamma fonksiyonu
$\beta(x, y)$	Beta fonksiyonu
$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x))$	Digamma fonksiyonu
$\Re(z)$	z kompleks sayısının reel kısmı
$\Im(z)$	z kompleks sayısının imajiner (sanal) kısmı
$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$	Pochhammer Sembolü
$\text{Res}(f, a)$	a kutup noktasında f nin rezidüsü
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$	Gauss hipergeometrik serisi
${}_2F_1[a, b; c; z]$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonlar, matematiksel analiz, fonksiyonel analiz, geometri, kuantum mekaniği, dalga denklemlerin çözümleri veya diğer uygulamalardaki önemlerinden dolayı belirli adları ve standart notasyonları olan seçilmiş bazı matematiksel fonksiyonlardır. Esasen, özel fonksiyonların tanımı hakkında fikir birliği yoktur. Bir başka ifadeyle, hangi fonksiyonun özel fonksiyon olduğu sorusu cevaplama zor bir sorudur. Bilinen bir sınıflandırma, polinomlar ve cebirsel fonksiyonlarla başlayıp logaritmik, üstel, trigonometrik fonksiyonlar gibi elementer fonksiyonlardan Bessel fonksiyonu ve parabolik silindirik fonksiyonlar gibi transandant fonksiyonlara ve bazı diferansiyel denklemlerin çözümü olarak karşımıza çıkan hipergeometrik fonksiyonlara doğru ilerlemektir. Bu sınıflandırma bazı önemli fonksiyonları dışarıda bırakması bakımından yeterli değildir. Örneğin, gamma ve zeta fonksiyonları diferansiyel denklemlerin çözümü değildir ve Mathieu fonksiyonları hipergeometrik fonksiyonların dışında kalmaktadır.

Özel fonksiyonlar teorisinde hipergeometrik fonksiyonlar, tüm klasik özel fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilmesi bakımından, çok önemli bir role sahiptir. Hipergeometrik fonksiyonların seri ve integral temsilleri mevcuttur ve bu nedenle hipergeometrik fonksiyonlar oldukça kullanışlı olan toplam ve dönüşüm formülleri elde etmek için ideal araçlardır. Ayrıca, birçok uygulamalı problem, genellikle, bir fonksiyonun sadece bir değişken açısından değil parametreler açısından çözümlerini gerektirir ve bu türden çözümler hipergeometrik fonksiyonun parametrik doğası tarafından mükemmel bir şekilde karşılanır. Hipergeometrik fonksiyonlar uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarındaki fiziksel problemlerin çözümünde de oldukça kullanışlı araçlardır. Hipergeometrik fonksiyonların ayrıca grup teorisi, cebirsel geometri gibi pek çok alanda uygulamalarının olduğu bilinmektedir.

Binom toplamları ya da kombinasyonel toplamlar, bunların hesaplanması ve bunları ihtiva eden özdeşlikler, kısaca kombinasyonel özdeşlikler matematiğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Hipergeometrik özdeşliklerin çeşitli binom katsayı toplamlarını elde etmede birleştirici bir ilke sağlamaktadır ve böylece hipergeometrik fonksiyonların kombinasyon alanında kullanışlı bir rol oynamaktadır (Graham ve diğerleri [34] ve Koepf [42]). Bir başka ifadeyle, hipergeometrik özdeşlikler, çoğu zaman, kombinasyon olarak yorumlan-

abilir.

Hipergeometrik fonksiyonları içeren denklemler, matematikçiler ve diğer bilim dalından birçok araştırmacı tarafından büyük ilgi görmektedir ve bu fonksiyonlar için elde edilmiş özdeşlikler, birçok diferansiyel ve integral denklemin çözümlerinin bulunmasına yardımcı olurlar. Hipergeometrik fonksiyon için bu tür çok sayıda özdeşlik ve dönüşüm mevcuttur. Örneğin, Prudnikov ve diğerleri [59] tarafından ortaya konulan çalışmada bu fonksiyonlar için 400'den fazla integral ve seri gösterimi mevcuttur.

Hipergeometrik fonksiyon özel fonksiyon teorisinin merkezindeyse gamma fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyonlar teorisinin merkezinde yer alır. Davis "Yüksek matematiksel fonksiyonlar olarak adlandırılanlar arasında şüphesiz en temel olanı gamma fonksiyonudur" diyerek gamma fonksiyonun önemini net bir dille ifade etmiştir([16, s.850]). Pochhammer sembolü, gamma ve hipergeometrik fonksiyonlar arasında doğrudan bir bağlantı sağlar ve çoğu hipergeometrik özdeşlik, gamma fonksiyonu cinsinden Pochhammer sembolü kullanılarak daha zarif bir şekilde ifade edilebilir. Bir başka ifadeyle gamma fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonları anlamada oldukça önemli bir konuma sahiptir. Bu nedenle gamma fonksiyonunun çeşitli temsillerini ve özelliklerini keşfetmek son derece önemlidir.

Bu çalışmada, gama ve hipergeometrik fonksiyonların gelişiminin kısa bir geçmişini incelemeyi, aralarındaki yakın ilişkiyi göstermeyi ve bu fonksiyonlarla ilgili olarak elde edilmiş bazı önemli özellikleri en eski olanlarından son yıllarda geliştirilmiş olanlarına kadar vermeyi amaçlıyoruz. Bu tez derleme bir çalışma olmakla beraber özü itibarıyla Hannah [35] tarafından sunulan yüksek lisans çalışmasından ilham alınarak oluşturulmuş ve bu yönüyle gamma fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar ve özel fonksiyonlarla ilgili çalışmalara meraklı olan ülkemiz araştırmacıları için eşsiz bir kaynak olası hedeflenmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısımda, diğer bölümler için temel teşkil edecek olan seriler, sonsuz çarpımlar, loagirtmik konvekslik, artan çarpınım (Pochhammer sembolü) ve kompleks analizden bazı tanımlar, teoremler ve örneklere yer verilecektir. Bu kısımda ele alınan kavramlar birçok ders kitaplarında bulunabileceğinden verilen teoremlerin ispatları ihmal edilmiştir.

2.1. Serilerin Çarpım ve Bazı Temel Özellikleri

Bu kısımda seriler ve sonsuz çarpım ile ilgili bazı önemli sonuçlara yer verilmiştir. Hipergeometrik serilerle çalışırken, genellikle toplama ve integrasyon sırasını değiştirmek gerekir. Bu tür prosedürleri doğru bir şekilde gerçekleştirmek için aşağıda verilen Fubini-Tonelli Teoremi ([71], Teorem 6.10) oldukça önemlidir.

Teorem 2.1 (Fubini Tonelli Teoremi) *Kabul edelim ki,*

$$E \times F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} : x \in E, y \in F\}$$

ve bu bölge üzerinde $f(x, y) \geq 0$ olsun. O halde

$$\int_E \int_F f(x, y) dy dx = \int_F \int_E f(x, y) dx dy$$

dır.

Mutlak yakınsak seriler, $(0, 1, 2, \dots)$ ölçüm uzayı üzerindeki Lebesgue integrallerinin özel durumları olarak düşünülebilir. Bu nedenle, integral sırasının değişimi Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonlara uygulanabilir. Tonelli teoreminin benzer sonuçları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.1 *$E \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun ve $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : E \rightarrow [0, \infty)$*

Buradan yakınsak integraller ve seriler için,

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$$

sağlar.

Sonuç 2.2 Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} A(k, n)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} A(k, n)$ yakınsak seriler olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A(k, n) \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A(k, n)$$

Böylece bu seriler de yakınsak seriler olup birbirine eşittir.

Aşağıdaki teorem, tekrar eden serileri çözebilmek için kullanılır(bkz .[60, s. 56]).

Teorem 2.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n+2k) \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} A(k, n-k) \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A(k, m, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sup_{n=0}^{k-m} A(k-m-n, m, n) \quad (2.4)$$

Aşağıda sonsuz çarpımların yakınsaklığı ile ilgili bazı teoremler verilmiştir ([60, s.2]).

Teorem 2.3 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ sonsuz çarpımı yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir.

Tanım 2.1 $P_n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ sonsuz çarpımı verilmiş olsun. Bu durumda:

- i) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0$ ise sonsuz çarpım P 'ye yakınsar.
- ii) P_n 'in en az bir çarpanı sıfır ise, yalnızca sonlu sayıda çarpanı sıfırsa ve sıfır çarpanları hariç sonsuz çarpım $P \neq 0$ 'a yakınsarsa sonsuz çarpım sıfıra yakınsar.
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ yakınsak değil ise sonsuz çarpımın ıraksak olduğu söylenir.
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ sıfır ise sonsuz çarpımın sıfıra ıraksadığı söylenir.

Sıfırın yukarıdaki koşullarda oynadığı önemli rol, sonsuz bir seriye kıyasla sonsuz bir çarpımın yakınsaklık tanımındaki farklılığın nedenidir. Aşağıdaki üç teorem bir sonsuz çarpımın düzgün ve mutlak yakınsaklığını belirlemenmesinin kurallarını ortaya koymaktadır ([1, s.159-160] ve [56, s.223]).

Teorem 2.4 (Weierstrass M-testi) Kapalı bir R bölgesindeki tüm x ler için $|a_n(x)| < M_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak olacak biçimde M_n pozitif katsayısı varsa $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ çarpımı da yakınsaktır.

Teorem 2.5 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ sonsuz çarpımın mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak olmasıdır.

Sıfır elemanı içermeyen sonsuz çarpımlar genellikle elemanların logaritma değerleri kullanılarak basitleştirilir. Bu daha uygun bir sonsuz seriye dönüştürmeye izin verir ([60, s.3]).

Teorem 2.6 $a_n \neq -1$ olsun. O halde $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ birbirine yakınsar veya ıraksar.

2.1.1. Artan Çarpınım

Bilindiği üzere çarpınım terimi faktöriyel teriminin dilimizdeki karşılığı olarak kullanılmaktadır. Hatırlanacağı üzere, bir pozitif tam sayının çarpınımı (ya da faktöriyeli) o pozitif tam sayıdan itibaren geriye doğru (azalan) olan ardışık tüm pozitif tam sayıların çarpımı olarak tanımlanır ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ şeklinde gösterilir ($0! = 1$ olarak kabul edilir). Bu tanıma benzer olarak, herhangi bir tam sayının artan çarpınımı (artan faktöriyel) o tam sayıdan itibaren ileriye doğru (artarak) belli bir adıma kadar (örneğin n adım) olan ardışık tüm tam sayıların çarpımı şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.1. Pochhammer

Bir a tam sayısının artan çarpınımını bu çalışma boyunca $(a)_n$ şeklinde gösterilecek ve tanımdan

$$(a)_n = \underbrace{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}_{n \text{ tane terim}}$$

olduğu anlaşılabacaktır. Artan çarpınım kavramı ilk olarak ünlü Alman matematikçi Leo August Pochhammer tarafından kullanıldığından (1841-1920), [4, s.2] $(a)_n$ gösterimi daha çok

Pochhammer sembolü olarak bilinir ve bu çalışma boyunca $(a)_n$ ifadesi Pochhammer sembolü şeklinde ifade edilecektir. Şu halde Pochhammer sembolünün tam tanımını verebiliriz.

Tanım 2.2 (Pochhammer Sembolü) a reel ya da kompleks bir sayı ve $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0, a \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

dır.

Bu tanımın basit bir sonucu olarak $(1)_n = n!$ yazılabileceği açıktır. Bu tanımdan hareketle bir negatif tam sayının Pochhammer sembolünü aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Teorem 2.7 $k, n \in \mathbb{N}$ için,

$$(-n)_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k \geq n+1, \end{cases} \quad (2.6)$$

Yukarıdaki tanımdan ve binom açılımından

$$\binom{n}{r} = \frac{(-1)^k (-n)_k}{k!}$$

sonucuna ulaşmak mümkündür. Ayrıca, Pochhammer sembolü için oldukça kullanışlı olan bazı özdeşlikler aşağıda listelenmiş olup bu özdeşliklerin ispatları [11], [60], [62] ve [66] çalışmalarında bulunabilir.

$$(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = \frac{a!}{(a-n)!} = \binom{a}{n} n!, n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

$$a(a+1)_n = (a)_{n+1} = (a+n)(a)_n \quad (2.8)$$

$$(a)_k(a+k)_n = (a)_{n+k} \quad (2.9)$$

$$(a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n, a \neq 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

$$(a)_{kn} = k^{kn} \left(\frac{a}{k}\right)_n \dots \left(\frac{a+k-1}{k}\right)_n, a \neq 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

$$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k}, 0 \leq k \leq n \quad (2.12)$$

$$(a)_{-n} = (-1)_n / (1-a)_n, n \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

$$(-a)_n = (-1)^n (a-n+1)_n, n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq a \quad (2.14)$$

$$(a+n)_{k-n} \cdot (a+k)_{n-k} = 1 \quad (2.15)$$

$$(2n)! = 2^{2n} n! \left(\frac{1}{2}\right)_n \quad (2.16)$$

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+1\right)_n}{\left(\frac{a}{2}\right)_n} = \frac{a+2n}{a} \quad (2.17)$$

$$(1+y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a)_n y^n}{n!} \quad (2.18)$$

Aşağıdaki teorem Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) tarafından tanıtılmış olup Vandermonde özdeşliği olarak bilinmektedir ([11, s. 12]).

Teorem 2.8 (Vandermonde Özdeşliği) : $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(a + b)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k} \quad (2.19)$$

özdeşliği geçerlidir.

İspat Denklem (2.18) den yararlanarak

$$(1 - x)^{-a-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + b)_n x^n}{n!} \quad (2.20)$$

yazılır. Denklem (2.1) kullanılarak

$$(1 - x)^{-a}(1 - x)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(b)_{n-k} x^n}{(n - k)!} \frac{(a)_k}{k!} \quad (2.21)$$

elde edilir. Son olarak, Denklem (2.20) ve Denklem (2.21) de dereceleri eşit olan terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenilen sonuç elde edilmiş olur.

2.1.2. Bir Fonksiyonun Logaritmik Konveksliği

Bir fonksiyonun logaritmik konveksliği (log-convex) kavramı, gamma fonksiyonunun belirlenmesinde oldukça önemlidir. Bu bölümde sunulan kavramlar ve bazı önemli sonuçların tamamı [4], [5] ve [11] çalışmalarında bulunabilir. Aşağıdaki tanımlar Andrews *et al.* [4, s.34] tarafından verilmiştir.

Tanım 2.3 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall x, y \in (a, b)$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

ise f fonksiyonu (a, b) aralığında konvekstir (dış bükeydir) denir.

$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda < 1\}$ parametrik gösterimi, sezgisel olarak, $(x, f(x))$ ile $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçası f fonksiyonunun grafiğinin üzerinde konumlanıyorsa f fonksiyonunun (x, y) aralığında konvekstir şeklinde yorumlanabilir. Konveks fonksiyon için alternatif bir tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. $\varphi(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \varphi(x_2, x_1)$ monoton olarak artar. Böylece $a < s < t < u < b$,

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \quad (2.22)$$

olur.

Bu tanımın önemli bir sonucu aşağıda verilmiştir ([5, s.4]).

Sonuç 2.3 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $a < x < b$ için $f'' > 0$ ise f fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında konveks olduğu söylenir.

Teorem 2.9 (Hölder Eşitsizliği) p ve q sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan pozitif sayılar ve $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi iki integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. Kompleks Fonksiyonlar Teorisinden Bazı Sonuçlar

Gamma fonksiyonun özelliklerinin belirlenmesinde kompleks fonksiyonlar teorisindeki bazı sonuçlara ihtiyaç duyacağız. Bu kısımda kompleks analizden bildiğimiz ve ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyacağımız bazı kavramlara yer verilecektir.

2.2.1. Kompleks Fonksiyonların Eğrisel İntegrali

Bilindiği üzere, bir $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktası civarında

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$$

şeklinde yakınsak bir Taylor serisi açılımına sahipse $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında analitik olduğu söylenir.

Cauchy İntegral Formülü olarak bilinen aşağıdaki teorem, bir çevre içindeki herhangi bir a noktasında analitik bir fonksiyonun değerini, yalnızca fonksiyonun çevre üzerindeki noktalardaki değerine bağlı olan bir integral cinsinden ifade etmemizi sağlayan oldukça önemli ve kullanışlı bir teoremdir.

Teorem 2.10 (Cauchy İntegral Formülü) Kabul edelim ki $f(z)$ bir C çevresi üzerindeki ve içindeki tüm noktalarda analitik ve a noktası da bu çevre içindeki herhangi bir nokta olsun, o zaman

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - a}$$

dır [74, s. 89].

Böyle bir kompleks fonksiyonun eğrisel integrali, fonksiyonun rezidüsü olarak değerlendirilebilir ([61, s. 308]).

Tanım 2.5 Bir $f(z)$ fonksiyonunun $z = a$ 'da m mertebesinde bir kutbu varsa, o zaman a noktası civarındaki z değerleri için, $\Phi(z)$ fonksiyonu $z = a$ noktasında ve civarında analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \Phi(z)$$

yazılabilir. a_{-1} katsayısı $f(z)$ fonksiyonunun a kutbuna göre rezidüsüdür.

Bir fonksiyonun rezidüsü aşağıdaki teorem ile de verilebilir ([61, s.309]):

Teorem 2.11 Eğer a , $f(z)$ 'nin basit bir kutbu ise, fonksiyonun rezidüsü

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki Cauchy'nin Rezidü teoremi, kompleks fonksiyonların eğrisel integrallerini hesaplamak için rezidülerin nasıl kullanılabileceğini belirtir ([40, s.193] ve [30, s.154]).

Teorem 2.12 $f(z)$ fonksiyonu C çevresi içindeki sonlu sayıda kutup noktaları hariç, C çevresi içinde ve üzerinde analitik ise $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum R$ dir. Burada $\sum R$, C eğrisi içindeki kutuplardaki fonksiyon rezidülerinin toplamını gösterir.

2.2.2. Çok Değerli Fonsiyonlar ve Dalları

Kompleks analizden hatırlanacağı üzere, reel sayılar kümesinde tek değerli olan fonksiyonlar, kompleks sayılar kümesinde çok değerli olabilir. Örneğin, logaritma fonksiyonu reel sayılar kümesinde tek değerli bir fonksiyon iken $\log z = \ln|z| + i \arg z$, $z \neq 0$ şeklinde tanımlanan kompleks logaritma fonksiyonu çok değerli bir fonksiyondur. Bu nedenle, kompleks gamma fonksiyonuyla çalışırken, tanım bölgesinde belirli kısıtlamalar göz önünde bulundurulmalıdır. Gamma ve hipergeometrik fonksiyonlar gibi özel fonksiyonların tanımlarında çok değerli fonksiyonlarla sıklıkla karşılaşacağımızdan bu tür fonksiyonları tek değerli oldukları dallara sınırlamamız gerekmektedir.

Genel olarak, $f(z)$ bir formu $f_1(z)$ olan çok değerli bir fonksiyon ise z kompleks düzlemin yeterince küçük bir bölgesiyle sınırlı olduğunda $f_1(z)$ fonksiyonu tek değerli olacaktır.

z_1 , kısıtlı bölgede bir nokta olsun ve z_1 noktası ile başlayıp geri dönen basit bir kapalı eğri oluşur. Kapalı eğri tamamen kısıtlı bölgenin içinde ise $f_1(z_1)$ fonksiyonunun, devrin başındaki ve sonundaki kompleks değerleri arasındaki fark sıfır olacaktır. Sıfır değilse bir noktada farkın değişmesi için eğri sürekli olarak daralır. Bu daralma eğrisi bir z_0 noktasını geçtiğinde olursa bu $f(z)$ 'nin bir dallanma noktası olarak tanımlanır (Bu nedenle kesirli kuvvetleri ve logaritmaları içeren fonksiyonların $z = 0$ noktasında bir dallanma noktası vardır). Dallanma noktalarının olmaması için, kompleks düzlemde her dallanma noktasından sonsuza kadar herhangi bir yönde bir dal çizilir, böylece bu kesme düzleminde $f(z)$ başlangıçtaki fonksiyonun çok değerli bir dalıdır. Etki alanlarını belirlerken, tek değerli kompleks fonksiyonlar oluşturmak için dal kesimleri kullanılır.

2.2.3. Analitik Devamlılık

Bir analitik fonksiyonun belirli bir aralıktaki davranışının, aralık ne kadar küçük olursa olsun, onun diğer her yerdeki davranışını tamamen belirlemek için yeterlidir [16]. Eğer fonksiyon tanım bölgesinin bir bölümünde bazı fonksiyonel ilişkileri sağlarsa bu ilişki tanım bölgesini genişletmek için kullanılabilir. Bu süreç analitik devam olarak bilinir ki gamma ve hipergeometrik fonksiyonların tanım bölgesini genişletmek için kullanılır.

Bir f fonksiyonu D tanım bölgesi üzerinde analitik bir fonksiyon ve g fonksiyonu da D tanım bölgesinden daha geniş bir alanda analitik bir fonksiyon ise g fonksiyonu f fonksiyonunun analitik devamıdır denir ([61, s.294]).

Tanım 2.6 *f fonksiyonu D_1 tanım bölgesinde, g fonksiyonu ise D_2 tanım bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her bir $z \in D_1 \cap D_2$ için $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ ve $f(z) = g(z)$ ise g fonksiyonu f fonksiyonunun analitik devamıdır.*

Analitik devam sürecinin bir diğer yolu, bir fonksiyonun tanım bölgesi içindeki noktalarda yakınsayan ve bu fonksiyonu temsil eden kuvvet serileri olarak göstermektir. Tanım bölgesi dışındaki bir fonksiyonun değerleri analitik devamlılık yoluyla tanımlanır ([74, s. 97]). $f(z)$, C_1 merkezli bir çemberde z_1 noktasında yakınsak bir Taylor serisi olsun. C_1 merkezli tanım alanı içinden bir z_2 noktası alarak C_2 merkezli yeni bir Taylor serisi elde edilir. C_2 merkezli çemberin içinde kalan z_2 noktasına en yakın ve C_1 merkezli çemberin dışında kalan noktalar için yeni seri, ilk seri tarafından tanımlanmayan fonksiyonun değerlerini tanımlamak için kullanılır. Bu işlemi tekrar ederek çalışma alanının bütün noktalarındaki değerleri

tanımlayan bir kuvvet serisi bulunabilir. Bu kuvvet serilerinin toplanması fonksiyonun analitikliğini oluşturur.

Kompleks fonksiyonlar için, iki farklı analitik ifadenin, analitik devamla birbirlerinden türetilen kuvvet fonksiyonlarını temsil etmeleri durumunda aynı fonksiyonu tanımladıkları söylenir ([74, s.99]).

Aşağıdaki teorem Havil [36] tarafından verilmiştir.

Teorem 2.13 *D kompleks düzlemde bir bölge ve D bölgesinin içinde yer alan C eğrisi üzerinde tanımlı ve eşit iki fonksiyon verilmiş olsun, o zaman bu iki fonksiyon D bölgesinde eşittir.*

Havil yukarıdaki teoreme "söylenenlerin büyüklüğü" hakkında daha fazla yorum yapıyor: Tüm $\mathbb{C}$ de tanımlı iki analitik fonksiyon, bir aralıkta örneğin reel ekseninde $(-1, 1)$ aralığında çakışıyorsa, o zaman bu iki fonksiyon her yerde eşit olacaktır. Örneğin, orijin merkezli birim diskte tanımlanan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ kompleks fonksiyonu göz önüne alındığında, $v(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu $\Re(z) = 1$ hariç kompleks düzlemin her noktasında analitik olup bu fonksiyon $f(z)$ 'nin açılımı olarak kabul edilir.

Aşağıdaki sonucu belirlemek için kompleks sayı teorisi kullanılır ([60, s.26, Lemma 8]). Bu, Gamma fonksiyonunun çarpma teoremini kanıtlamak için Bölüm 4.1'te kullanılacaktır.

Teorem 2.14 $k \geq 2$,

$$\prod_{s=1}^{k-1} \sin \frac{\pi s}{k} = \frac{k}{2^{k-1}}$$

İspat $a = e^{(2\pi i/k)}$ k 'nıncı ilkel bir kökü olsun, o zaman

$$x^k - 1 = (x - 1) \prod_{s=1}^{k-1} (x - a^s)$$

Farklılaşmaya göre bu sonuç $x - 1$ olduğunda $k = \prod_{s=1}^{k-1} (1 - a^s)$ olur ve bunu takip ederek

$$\begin{aligned} 1 - a^s &= 1 - e^{\left(\frac{2\pi i s}{k}\right)} \\ &= -e^{\left(\frac{\pi i s}{k}\right)} \left[e^{\left(\frac{\pi i s}{k}\right)} - e^{\left(\frac{-\pi i s}{k}\right)} \right] \\ &= -2ie^{\left(\frac{\pi i s}{k}\right)} \sin \frac{\pi s}{k}. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} k &= \prod_{s=1}^{k-1} \left(-2ie^{\left(\frac{\pi i s}{k}\right)} \sin \frac{\pi s}{k} \right) \\ &= (-2i)^{k-1} \left[e^{\left(\frac{\pi i}{k} + \frac{2\pi i}{k} + \dots + \frac{(k-1)\pi i}{k}\right)} \right] \prod_{s=1}^{k-1} \left(\sin \frac{\pi s}{k} \right) \\ &= 2^{k-1} \cdot e^{\left(\frac{-\pi i(k-1)}{2}\right)} \left[e^{\left(\pi i \cdot \frac{k-1}{2}\right)} \right] \prod_{s=1}^{k-1} \left(\sin \frac{\pi s}{k} \right) \\ &= 2^{k-1} \left(\sin \frac{\pi s}{k} \right), \end{aligned}$$

ve istenen sonuç elde edilir.

Gamma fonksiyonu özel fonksiyonların birçok uygulamasında ortaya çıkar ve hipergeometrik fonksiyonlar için önemli bir yere sahiptir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda hipergeometrik özdeşlikler için vazgeçilmez bir rol oynayacak olan gamma fonksiyonunu ve onun bazı çok önemli özelliklerini ele alacağız.

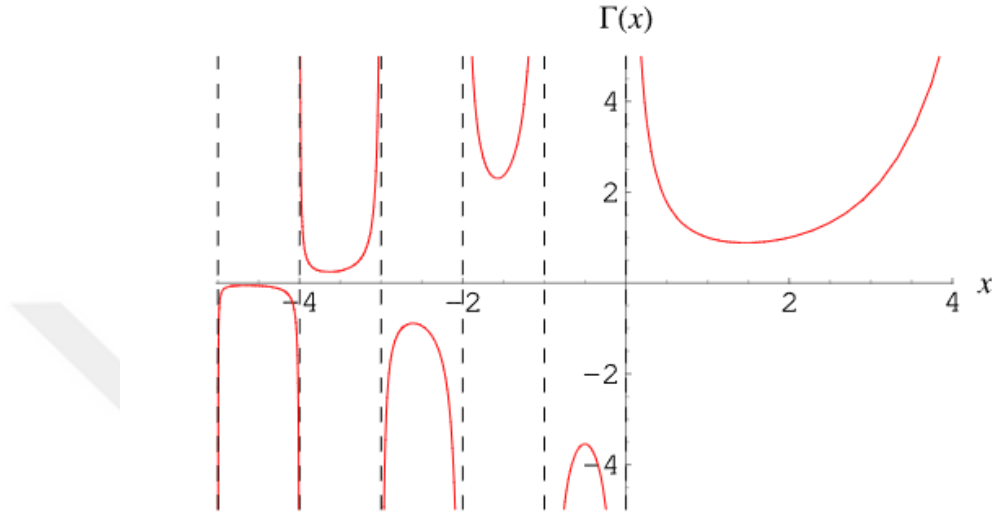
3.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunun kökleri, faktöriyel fonksiyonunu doğal olmayan argümanlara genişletme girişimlerine dayanmaktadır. Bu ilk itici güçten itibaren, çok çeşitli matematikçilerin katkılarıyla gamma ve ilgili fonksiyonların gelişiminin uzun ve büyüleyici bir tarihini izleyebiliriz. Dolayısıyla bu fonksiyon, zengin bir matematiksel kavram dokusunun işbirliği yoluyla nasıl geliştirildiğinin muhteşem bir örneğidir. Bu geniş girdinin bir sonucu olarak gamma fonksiyonu, her biri farklı uygulamalarda kendine özgü avantajlar sunan seri, limit ve integral formları da dahil olmak üzere etkileyici sayıda farklı gösterime sahiptir. Gamma fonksiyonu, saf matematikteki merkezi rolünün yanı sıra, akışkanlar dinamiği, astrofizik, kuantum fiziği ve istatistik gibi çeşitli uygulamalı alanlarda da ortaya çıkmaktadır. Çok çeşitli uygulamaları arasında depremler arasındaki sürenin modellenmesi, $f(t)e^{-gt}$ formundaki ifadelerin (üstel bozunma süreçlerini tanımlayan) sonsuz çarpımlarının ve integrallerinin değerlendirilmesi ve yay uzunluklarının, alanların ve hacimlerin değerlendirilmesi yer almaktadır ([8], [29], [62], [66]). Davis [16, s. 863], bir Coulomb alanındaki enerji durumları için radyal dalga fonksiyonlarını, yüklü parçacıkların saçılması için formülleri, protonlar arasındaki nükleer kuvvetleri ve radyasyon olasılığını içeren problemlerde kompleks gamma fonksiyonunun diğer uygulamalarını listeler.

Bu fonksiyon, kendi başına daha geniş bir yelpazede güçlü uygulamalara sahip olmasının yanı sıra, birçok özel fonksiyon için uygun bir temsil sağlar ve çok sayıda hipergeometrik özdeşliğin ifadesinde ve kanıtlanmasında özellikle merkezi bir rol oynar.

Bir sonraki bölümünde gamma fonksiyonunun gelişimine ilişkin kısa bir tarihsel bakış sunulmaktadır. Kısım 3.3'te daha sonra en bilinen gösterimlerini, denkliklerinin bazı kanıtlarıyla birlikte tartışırken, Kısım 3.4'te hipergeometrik fonksiyonla daha sonraki çalışmalar için merkezi öneme sahip bazı gamma fonksiyonu özdeşlikleri verilecektir. Kısım 3.5'te,

özellikle hipergeometrik özdeşliklerde ve bunların ispatlarında sıkça ortaya çıkan beta fonksiyonuna odaklanarak, gamma fonksiyonuyla yakından ilişkili bazı faydalı fonksiyonlar bulunmaktadır. Kısım 3.6'de gamma fonksiyonunun tanım kümesini kompleks değerleri içerecek şekilde genişletilmekte ve son olarak Bölüm 3.8'de bu ilgi çekici ve her yerde bulunan gamma fonksiyonunun birkaç ilginç uygulamasından kısaca bahsedilmektedir.



Şekil 3.1. Reel düzlemde gamma fonksiyonunun grafiği

3.2. Gamma Fonksiyonunun Kısa Bir Tarihçesi

Davis'in [16] belirttiği gibi: "Bilimsel keşiflerin kesin seyrini kaydetmek zordur". Bununla birlikte, bu bölümde gamma fonksiyonunun çeşitli temsillerinin zaman içinde nasıl geliştiğine dair makul ölçüde doğru bir genel bakış sağlanacaktır.

18'inci yüzyılda interpolasyon problemi popüler bir konu haline gelmişti. Problem genel olarak şu şekilde ifade edilmektedir: Doğal sayılar için tanımlanmış bir P_k dizisi verildiğinde k değerleri için, a 'nın doğal olmayan bir sayı olduğu durumlarda P_a ifadesinin anlamı bulunmaktadır.

Christian Goldbach (1690-1764) özellikle 1, 2, 6, 24, 120, 720, ... faktöriyel sayı dizisinin enterpolasyonu üzerinde düşünmüş ve $2\frac{1}{2}$ faktöriyeli gibi bir ifadeye anlam kazandıracak bir fonksiyon arayışına girmiştir. Daniel Bernoulli (1700 – 1782) ve Leonhard Euler (1707 – 1783) de dahil olmak üzere birçok matematikçinin yardımını aldı. Goldbach'a yazdığı 6

Ekim 1729 tarihli bir mektupta Daniel Bernouli ifadesini önermiştir.

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right)$$

Herhangi bir reel x sayısının faktöriyeli için bir interpolasyon çarpımı olarak, sonucun doğruluğu A 'nın daha büyük pozitif integral değerleri ile artar. Örneğin, $x = 3$, $A = 5$ değerleri 3'ün faktöriyeli için 6, 04 yaklaşımını verir.

Aynı zamanda, Euler bağımsız olarak kendi çarpım temsilini geliştiriyordu ve Bernoulli'nin teşvikiyle Goldbach'a 13 Ekim 1729 tarihli bir mektup yazdı ([31, s. 1-18]) ve burada 1, 2, 6, 24, 120, ... dizisinin m 'ninci teriminin çarpımla temsil etti.

$$\frac{1 \cdot 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} \cdot 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} \cdot 4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m} \cdot 5^m}{4+m} \cdots$$

Euler, çarpımının sonsuza yakın belirlenmesi gerektiğini, böylece n 'nin artan değerlerinin m 'ye daha yakın sonuçlar vereceğini belirtmiştir. $m!$ Euler'in ve Bernoulli'nin çarpımları biçimsel olarak farklı olsa da, Bernoulli'nin formülü daha hızlı yakınsamasına rağmen, her ikisi de limitte aynı değeri verir.

Euler'in faktöriyel interpolasyonu hakkındaki tartışması 1729 tarihli mektubunda kısaydı, ancak aynı yıl daha sonra yazdığı ve 1730'da yayınlanan 'Transandantal ilerlemeler veya genel terimi cebirsel olarak verilmeyenler üzerine' başlıklı makalesinde [24] daha fazla ayrıntı verdi. Bu makalede Euler, çarpımının "indisleri kesirli sayılar olan terimlerin enterpolasyonu için harika bir şekilde uygun" olduğunu, ancak kesin değerler sağlayacak daha uygun yöntemler sunmayı amaçladığını iddia etmiştir.

Bu alternatif yöntemler, onun belirli bir integral cinsinden verilen ikinci enterpolasyonuna yol açacaktır. Bu yeni yönelimin itici gücü $\frac{1}{2}$ 'nin faktöriyel değeri tarafından sağlanmış gibi görünmektedir. Euler makalesinde, $m = \frac{1}{2}$ çarpımının yerine şunları koymuştur

$$\frac{1 \cdot 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} \cdot 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} \cdot 4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m} \cdot 5^m}{4+m} \cdots \text{ elde etmek için } \sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdots}$$

ve John Wallis'in (1616-1703) daha önceki bir sonucuyla doğrudan ilişkili olan ifadedir. Wallis, 1656 tarihli 'Arithmetica infinitorum' adlı çalışmasında

Birim çaplı daire $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdots$ sonsuz çarpımı olarak ifade edilebilir.

Euler böylece (makalesinin 2. Maddesinde) $\frac{1}{2}$ indeks teriminin aşağıdakilere eşit olduğu sonucuna varmıştır. Bu alanın karekökü, dolayısıyla merkezi bir sonuç oluşturur: $(\frac{1}{2})! = \frac{\pi}{2}$.

Bu, Euler'in düşüncesinde bir dönüm noktasıydı. Madde 3'te şöyle demiştir: "Daha önce 1, 2, 6, 24, vs. serilerinin genel terimlerinin cebirsel olarak olmasa bile en azından üssel olarak verilebileceğini düşünmüştüm. Ancak bazı ara terimlerin dairenin kareselliğine bağlı

olduğunu gördükten sonra, ne cebirsel ne de üssel niceliklerin bunu ifade etmek için uygun olmadığını fark ettim".

Bu içgörü Euler'e sonsuz çarpım temsilinin belki de integral formunda ifade edilebileceğini düşündürdü. Wallis, bir dairenin alanını hesaplamaya çalışırken $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ biçimindeki integrallerle çalışmıştı. Euler böylece ilerlemesinin genel teriminin $\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$ integrali ile temsil edilmesine izin verdi (burada e harfi bugün bu harfle ilişkilendirilen özel sabiti değil, herhangi bir üssü temsil ediyordu). Daha sonra binom açılımı, bazı ustaca dönüşümler ve L'Hospital'in limit kuralının gayri resmi bir uygulamasını kullanarak integrali manipüle etti ve sonunda dönüm noktası olan sonucunu, $n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx$ burada n herhangi bir pozitif reel sayı ve $\log x$, e tabanlı doğal logaritmadır.

Bu aşamada Euler'in integrali kendi başına bir fonksiyon olarak değil, yalnızca doğal olmayan argümanların faktöriyelerini değerlendirmek ve temsil etmek için bir araç olarak görülüyordu. Fonksiyon rolüne geçiş Adrien-Marie Legendre (1752-1833) tarafından başlatıldı. 'Exercices de Calcul Intégral', Cilt 1 (1811) [48] adlı eserinde Legendre, Euler'in integralini

$$\Gamma(a) = (a-1)! = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx, \quad a > 0 \quad (3.1)$$

şeklinde vermiştir.

$t = \log \frac{1}{x}$ dönüşümü kullanılarak, gamma fonksiyonu için bu integral gösterimi

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad a > 0 \quad (3.2)$$

şeklinde gösterilebilir ve bu gösterim genellikle Euler integrali olarak adlandırılır. Legendre ayrıca $\Gamma(1) = 1$ (yani $0! = 1$) olduğunu göstermek ve merkezi ilişkiyi kurmak için integral tanımını kullandı.

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = a!, \quad a > 0 \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) de verilen özdeşlik, fonksiyonel denklem, fark denklemi veya yineleme ilişkisi gibi çeşitli şekillerde adlandırılmaktadır. Bu özdeşlik doğal sayılar için $n! = n(n-1)!$ özdeşliğinin bir genellemesini temsil eder ve gamma fonksiyonu teorisinin gelişimi için temel oluşturur. Denklem (3.3) de verilen yineleme bağıntısının tekrar tekrar uygulanmasıyla tüm doğal sayı değerleri için gamma fonksiyonunun değerlerini elde ederiz. Bu bağıntı doğal olmayan sayılar için de geçerli olduğundan, gamma fonksiyonunun herhangi bir $[a, a+1]$ aralığındaki değerleri tüm reel doğru üzerindeki gamma fonksiyonunu belirler (aşağıda gösterildiği gibi negatif olmayan tam sayılar hariç). Örneğin, Denklem (3.3)'ü $\frac{1}{2}$ 'nin faktöriyeli için Euler'in sonucu ile birlikte kullanırsak, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})! = \frac{\pi}{2}$ elde ederiz. Buradan

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ sonucuna ulaşılır. Benzer bir şekilde $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ elde edilmiş olur.

Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

özdeşlikleri verilebilir. Herhangi bir pozitif reel sayısını gamma karşılığını bulmak amacıyla birçok tablo hazırlanmıştır ([21, s.58] ve [29, s.3]). Tamsayı olmayan negatif değerler için Denklem (3.3)'ü $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$ şeklinde ele almalıyız, örneğin $\Gamma(-1.8) = \frac{\Gamma(0.2)}{(-1.8)(-0.8)} \approx \frac{4.5909}{(1.8)(0.8)} \approx 3.188125$ elde edilir. Bu işlemin $a < 0, a \neq -1, -2, -3, \dots$ için yinelenmesi ile

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}, \quad -n < a < -n+1, n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.1 Denklem (3.3)'ü uygulayarak

$$\Gamma(-2.5) = \frac{\Gamma(-1.5)}{-2.5} = \frac{\Gamma(-0.5)}{-2.5(-1.5)} = \frac{\Gamma(0.5)}{-2.5(-1.5)(-0.5)} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$$

elde edilir. Aynı sonuç, Denklem (3.4) yardımıyla $a = -3 + 0.5, n = 3$, olmak üzere,

$$\Gamma(-2.5) = \frac{\Gamma(-2.5+3)}{-2.5(-1.5)(-0.5)} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15} \text{ şeklinde daha pratik bir şekilde elde edilir.}$$

Pozitif olmayan tamsayı değerleri için Denklem (3.3) uygulandığında $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$ olup, $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty$ ve bu böyle devam eder. Bu nedenle, n pozitif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $\Gamma(n) \rightarrow \pm\infty$ ve sonuç olarak $\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!} = 0$ elde edilir. Bunun önemli bir sonucu, herhangi bir payda değerinin pozitif olmayan bir tamsayı olması durumunda gamma fonksiyonlarının bir bölümünün sıfır olarak yorumlanmasıdır. Ayrıca şu ifade de bunu takip eder $\binom{a}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{a!}{(a-n)!}$ negatif bir tamsayı için sıfır olarak kabul edilir. Denklem (3.4) bağıntısı, $-n < a < -n+1, n \in \mathbb{N}$ aralığında $\Gamma(a)$ 'nın işaretinin -1^n olacağını ve dolayısıyla reel gamma fonksiyonunun grafiğinin negatif argümanlar için dönüşümlü olarak yukarı ve aşağı doğru açılan ve pozitif argümanlar için yukarı doğru açılan sonsuz sayıda bağlantısız kısımdan oluştuğunu imaa eder. Negatif argümanlara sahip kısımlar, pozitif olmayan tamsayılarda pozitif veya negatif sonsuza eğilim gösteren birim genişlikteki şeritler içinde yer alırken, pozitif argümanlara sahip kısım faktöriyelleri içerir ve sonsuz genişliktedir. Şekil 3.1 gamma fonksiyonunun reel düzlemdeki grafiğini göstermektedir.

Gamma fonksiyonu böylece faktöriyel fonksiyonunu doğal sayılardan pozitif olmayan tam sayılar hariç tüm reel sayılara genişletir. Bununla birlikte, n bir doğal sayı için $(n, n!)$ ayrık noktaları boyunca çizilen herhangi bir düzgün eğri, doğal olmayan argümanlar için faktöriyel için değerler sağlayacaktır. Gerçekten de, gamma fonksiyonunun yanı sıra diğer fonksiyonlar da Denklem (3.3) bağıntısını sağlamaktadır. O halde, gamma fonksiyonunun faktöriyel için tek interpolasyon fonksiyonu olduğu ne şekilde düşünülebilir?

Neredeyse 200 yıl süren araştırmalardan sonra, yanıtın dışbükeylik kavramında yattığı bulunmuştur. 1922 yılında Harald Bohr (1887-1951) ve Johannes Møllerup (1872-1937) faktöriyel fonksiyonunu pozitif reel sayılara genişleten tüm olası fonksiyonlar arasında gamma fonksiyonunun yineleme ilişkisini sağlayan ve logaritmik olarak dışbükey olan tek fonksiyon olduğunu kanıtladılar. İlk olarak gamma fonksiyonunun pozitif argümanlar için log-konveks olduğu kanıtlanır ve ardından Bohr- Møllerup teoremi verilmektedir.

Teorem 3.1 $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde verilen gamma fonksiyonu log-konveks dir.

İspat : $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Denklem (3.2) de verilen Euler'in integralinden temsilinden

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^{1/p} (t^{y-1}e^{-t})^{1/q} dt$$

elde edilir. Dolayısıyla, Denklem (2.23) de ifade edilen Holder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t} dt\right)^{1/q} \\ &= [\Gamma(x)]^{1/p} [\Gamma(y)]^{1/q} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $\lambda = \frac{1}{p}$ olsun ki $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ olsun her iki tarafın logaritması alınarak

$$\log \Gamma(\lambda(x) + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \log \Gamma(x) + (1 - \lambda) \log \Gamma(y)$$

elde edilir. Bu sonuç tüm $x, y \in (0, \infty)$ için geçerlidir ve dolayısıyla $\log \Gamma$ fonksiyonu Tanım 2.3'e göre pozitif argümanlar için konvektir ve dolayısıyla Γ fonksiyonu log-konvektir.

Aşağıda verilen Bohr-Møllerup Teoremi, gamma fonksiyonunun tekliğinin log-konvekslik özelliğinde yattığını belirtir ([4, s.35]).

Teorem 3.2 (Bohr-Møllerup Teoremi) Eğer bir $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu

1. $f(1) = 1$,
2. $f(x+1) = xf(x)$,

3. $\log f$ dışbükeydir,

koşullarının her birini saylıyorsa, o zaman $\forall x \in (0, \infty)$ için $f(x) = \Gamma(x)$ dir.

İspat İlk olarak $0 < x < 1$ ve n pozitif bir tamsayı olsun. f log-konveks olduğundan, Tanım 2.4 $[n, n+1]$, $[n+1, n+1+x]$ ve $[n+1, n+2]$ aralıklarına uygulanacak olursa

$$\log \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{\log f(n+1+x) - \log f(n+1)}{x} \leq \log \frac{f(n+2)}{f(n+1)}$$

elde edilir. Koşul 2'den $\log f(n+1) = \log n!$ 'ye eşittir ve dolayısıyla yukarıdaki sonuç aşağıdaki gibi yazılabilir

$$x \log n \leq \log \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x f(x)}{n!} \leq x \log(n+1),$$

$$\implies 0 \leq \log \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!n^x} + \log f(x) \leq x \log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Limitlerin $n \rightarrow \infty$ olarak alınması $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ olduğunu gösterir. Bu, gamma fonksiyonu için Euler'in sonsuz çarpımının eşdeğer bir formudur (Bölüm 3.3'teki denklem (3.6)'ya bakınız) ve bu nedenle f ile gamma fonksiyonu arasındaki eşdeğerlik kurulur. Ayrıca, $x \in (0, 1)$ için f 'nin verilen üç koşul tarafından benzersiz bir şekilde belirlendiği ve Koşul 2'nin sonucu 1'den büyük değerlere genişlettiği gösterilebilir.

3.3. Gamma Fonksiyonunun Gösterimleri

Euler'in enterpolasyonlu faktöriyel üzerine ilk çalışmalarından bu yana, matematikçiler gamma fonksiyonunun her biri uygulamanın bağlamına bağlı olarak kendi avantajını sunan çeşitli gösterimlerini geliştirmişlerdir. Bu bölümde gamma fonksiyonunun en yaygın formlarından bazıları verilmiş ve eşdeğerliklerini gösterilmiştir. Gamma fonksiyonunun gösterimleri ve özellikleri başlangıçta reel sayılar alanında geliştirilmiştir. Bu nedenle, bu çalışma reel argümanlarla sınırlandırılmış ve Bölüm 3.6'da alanı kompleks sayıları içerecek şekilde genişletilmiştir.

3.3.1. Gamma Fonksiyonunun Çarpım ve Limit Temsilleri

Bölüm 3.2'de tartışıldığı gibi Bernoulli ve Euler'in orijinal çarpım gösterimleri, [4, s.3]'te bulunan modern gösterimde aşağıda verilen limitlere eşdeğerdir.

Tanım 3.1 (Euler'in Limit Formülü) $x > 0$ için,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^x \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+x} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (3.5)$$

dır.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) gamma fonksiyonu için Euler'in limit tanımına eşdeğer olan

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n)^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n)^x}{x_{n+1}} \quad (3.6)$$

eşitliğini vermiştir ve bu eşitlik gamma fonksiyonunun temel tanımı olarak kabul edilir ([40, s.41]).

Gamma fonksiyonu aşağıda verilen oldukça kullanışlı çarpım formunda da ifade edilebilir:

Teorem 3.3 (Euler'in Sonsuz Çarpım Temsili) $x \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{1 \leq n < \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} \quad (3.7)$$

İspat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x}{(n+1)^x} = 1$ olduğundan, Denklem (3.6)

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

şekilde yazılabilir. Ayrıca $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = n+1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{2+x} \cdots \frac{n}{n+x} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{n+x}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^x, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur.

Gamma fonksiyonu için eşdeğer limit temsilleri

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n}$$

ve

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n}$$

şeklindedir ([60, s.11], [74, s.237]).

1856 yılında Karl Weierstrass, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ ile tanımlanan Euler-Mascheroni gamma sabiti cinsinden gamma fonksiyonunun karşılığı için başka bir yararlı

arpım formülü sağladı. Weierstrass arpımı sıklıkla gamma fonksiyonunun temel bir tanımı olarak kullanılır. Bu sonucun çeşitli kanıtları mevcuttur ([29, s.27], [36, s.57], [60, s.11]). Burada logaritmaları içeren bir yöntem sunulacaktır, çünkü sonuçlardan bazıları önerme (3.1)'yı kanıtlamak için kullanılacaktır.

Tanım 3.2 (Weierstrass arpımı) $x \neq 0, -1, -2, \dots$ olsun. Bu durumda, $\frac{1}{\Gamma(x)}$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ olmak üzere

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x/n} \right] \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat Denklem (3.7) de verilen Euler sonsuz çarpımının her iki tarafının logaritması alınacak olursa

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x) &= -\log x + x \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \\ &= -\log x + x \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. şimdi Denklem (3.8) de verilen eşitliğin her iki yanının logaritmaları alınarak

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x) &= \gamma x - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-x}{1} + \frac{-x}{2} + \cdots + \frac{-x}{n} + x \log n + \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x}{n} \right] \\ &\quad - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \log n - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Denklem (3.9) ve Denklem (3.10) dan istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Weierstrass çarpımının alternatif bir doğrudan kanıtı, Denklem (3.8)'in sağ tarafının tersindeki gamma sabitini genişleterek şunu göstermeyi içerir

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} e^{(-x[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n])} \prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{x}{k}}}{\frac{k+z}{k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^n e^{(-\frac{x}{k})} e^{(\log n^x)} \prod_{k=1}^n e^{(\frac{x}{k})} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot n^x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdots \frac{n}{x+n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \\ &= \Gamma(x). \end{aligned}$$

[74, s.235] sayfasında bulunan aşağıdaki teorem, Weierstrass çarpımının ve dolayısıyla gamma fonksiyonunun analitikliğini ortaya koymaktadır.

Teorem 3.4 *Weierstrass çarpımı x 'in tüm sonlu değerleri için analitiktir.*

İspat Logaritmik fonksiyon için Taylor açılımı ile,

$$\left| \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right| = \left| \frac{-x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \dots \right|.$$

Dolayısıyla, $|x| \leq N/2$ ve $n > N$ olacak şekilde herhangi bir N tamsayısı için

$$\begin{aligned} \left| \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right| &\leq \left| \frac{x}{n} \right|^2 \left\{ \frac{1}{2} + \left| \frac{x}{3n} \right| + \left| \frac{x^2}{4n^2} \right| + \dots \right\} \\ &\leq \left| \frac{x}{n} \right|^2 \left\{ 1 + \left| \frac{x}{n} \right| + \left| \frac{x^2}{n^2} \right| + \dots \right\} \\ &\leq \frac{N^2}{4n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right\} \leq \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2}. \end{aligned}$$

$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N^2}{2n^2}$ yakınsadığından, $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right\}$ 'nin analitik fonksiyonların mutlak ve düzgün yakınsak bir serisi olduğu ve dolayısıyla analitik bir fonksiyon olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla üstel analitik bir fonksiyondur ve bu da x 'in tüm sonlu değerleri için $xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x/n} \right]$ 'nin analitikliğini sağlar.

Denklem (3.8) de verilen Weierstrass çarpımının sağ tarafı $x = 0$ veya negatif bir tam sayı olduğunda sıfır olduğundan, bu aynı zamanda analitik bir fonksiyonun karşılığı olarak gamma fonksiyonunun, tekilliklere (kompleks düzlemde basit kutuplar) sahip olduğu $x = 0, -1, -2, \dots$ dışında analitik olduğunu doğrular. Weierstrass çarpımı ayrıca $\frac{1}{\Gamma(x)}$ 'in x 'in tüm sonlu değerleri için tanımlı olduğunu gösterir, bu da gamma fonksiyonunun asla sıfır olmadığını doğrular.

3.3.2. Gamma Fonksiyonunun İntegral Temsilleri

Euler integrali olarak bilinen gamma gösterimi Denklem (3.2) de verildi. Bu gösterim, ortaya çıkma sıklığı ve basitliği nedeniyle diğer formlara göre avantajlara sahiptir ve diğer birçok yararlı integral gösterimi bu ilk tanımdan kaynaklanmaktadır. Bu integralin iyi tanımlı olduğunu kanıtlamak için Artin'i [5] takip ederek gamma fonksiyonunu tam olmayan gamma fonksiyonları olarak bilinen ana parçalarının toplamı olarak ifade edilir.

Teorem 3.5 $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ integrali $x > 0$ için yakınsar.

İspat $\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = I_1 + I_2$ olsun. $t > 0$ olarak ilk integral,

$$I_1 = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \right).$$

$x > 0$ için, I_1 yukarıda $1/x$ ile sınırlıdır ve x 'i sabit tutup a 'nın azalmasına izin verirse, integralin değeri monoton olarak artacaktır. Dolayısıyla bu integral $x > 0$ için mevcuttur. I_2 integrali için, e^t 'nin Taylor açılımı ile pozitif ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $e^{-t} > \frac{n!}{t^n}$ olsun ve dolayısıyla $e^{-t} < \frac{n!}{t^n}$ olsun. Bundan şu sonuç çıkar

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b n! t^{x-n-1} dt = \frac{n!}{x-n} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{b} \right)^{n-x} - 1 \right\}.$$

Böylece, x 'i sabit tutar ve $n > x + 1$ seçersek, $n!/(n-x)$ 'i $\int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt$ için bir üst sınır yapılabilir. Bu integral b arttıkça artar ve I_2 integrali var olur. Böylece $x > 0$ için gamma integralinin var olduğu sonucuna varılabilir.

Gamma fonksiyonu için Euler'in integral ve limit gösterimlerinin denkliğine ilişkin ilginç kanıtlar mevcuttur. Örneğin, Norton [56, s.223], şunları kullanır $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ yazılıp $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ $n \leq 1$ için. İstenen limit (3.5), t yerine nt koyarak, parçalara ayırarak ve sonucu yineleyerek elde edilir.

Temel integral (3.2), aşağıda verilenler gibi dönüşümler yoluyla birçok alternatif forma uyarlanabilir.

- $t \rightarrow t^2$ dönüşümünden $\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt$ elde edilir.
- $t \rightarrow at$ dönüşümünden $\Gamma(x) = a^x \int_0^\infty e^{-at} t^{x-1} dt$ elde edilir.
- $y = t^x$ dönüşümünden $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-y^{1/x}} dy$ elde edilir.
- $t = e^z$ dönüşümünden $\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{xz} e^{-e^z} dz$ elde edilir.

Temme [66, s.44], bir başka ilginç integral gösterimi sağlamaktadır. Parçalarla integrasyonu kullanarak $-1 < x < 0$ için elde eder,

$$\int_0^\infty t^{x-1} (e^{-t} - 1) dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \Gamma(x).$$

Sol integral böylece $-1 < x < 0$ şeridindeki gamma fonksiyonunu tanımlar. Genel olarak, gamma fonksiyonu için Cauchy-Saalschütz gösterimi şöyledir

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \left[e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n!} \right] dt, n \geq 0.$$

3.3.3. Gamma Gösterimleri ve Bohr-Mollerup Teoremi

Gamma fonksiyonu için önerilen bir gösterimin geçerliliğini ortaya koymanın bir yolu, Bohr-Mollerup teoreminin koşullarını sağladığını göstermektir. Bu bölümü tamamlamak için, bu yaklaşım Weierstrass çarpımı ile gösterilir.

Önerme 3.1 *Denklem (3.8) de verilen Weierstrass çarpımı Bohr- Mollerup teoreminin koşullarını sağlar.*

İspat Koşul 1

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \frac{e^{-\gamma}}{1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n])} \prod_{k=1}^n e^{1/k} \frac{k}{k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \right] = 1\end{aligned}$$

Koşul 2 (3.8)'den ve $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ buradan şu sonuca varırız

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{x e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right]}{x+1 \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x+1}{n}\right) \right]} \\ e^{-\gamma} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \prod_{k=1}^n e^{-1/k}, \text{ buradan} \\ \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{x}{x+1} \lim_{n \rightarrow \infty} n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} \left(\frac{k+1}{k}\right) \left(\frac{k+x}{k+x+1}\right) \\ &= \frac{x}{x+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdots \frac{x+n}{x+n+1} \right) = x.\end{aligned}$$

Koşul 3 Önceki sonucu (3.10) x 'e göre iki kez türev almak suretiyle, $\frac{d^2}{dx^2} [\log \Gamma(X)] = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$ formül elde edilir. Dolayısıyla logaritmik gamma fonksiyonu dışbükeydir ve kanıt tamamlanmıştır.

3.4. Gamma Fonksiyonunun Bazı Önemli Özellikleri

Gamma fonksiyonu, onu çeşitli kombinatorik ve hipergeometrik özdeşlikleri basitleştirmek için güçlü bir araç haline getiren çok çeşitli yararlı özelliklere sahiptir. Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde yaygın olarak kullanılacak bazı temel özellikler verilecektir.

3.4.1. Gamma Fonksiyonu ve Faktöriyeler

Gamma fonksiyonu, binom katsayılarının ve Bölüm 1’de tanımlanan yükselen faktöriyelin $(a)_n$ çeşitli kombinasyonları olarak ifade edilebilir. Aşağıdaki özdeşlikler [42] ve [66] gibi standart metinlerde bulunabilir ve faktöriyelerin temel manipülasyonu ve gamma yineleme bağıntısının (3.3) kullanımı ile kolayca kurulabilir. Bunlar hipergeometrik fonksiyonları içeren basitleştirmelerde çok değerlidir.

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{a}, a \neq 0, -1, -2, \dots, n \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

$$\binom{a}{n} = (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-a)}{n! \Gamma(-a)}, a \neq 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}, n \leq a \quad (3.12)$$

$$\binom{a}{n} = \frac{\Gamma(a+1)}{n! \Gamma(a+1-n)}, a \neq -1, -2, -3, \dots, n \in \mathbb{N}, n \leq a \quad (3.13)$$

$$(a)_n = (-1)^n \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-n)}, a \neq 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

$$\Gamma(a) = \frac{(n-1)! n^a}{(a)_n}, a \neq 0, -1, -2, \dots, n \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

$\frac{1}{\Gamma(-n)} n = 0, 1, 2, \dots$, için sıfırdır, (3.13)’ün önemli bir sonucu $n, a \in \mathbb{N}_0, \binom{a}{n} = 0, n > a$ olur. Terimlerin bu ‘kaybolması’ bu durumlarda önemli olacaktır. İlerleyen bölümlerde binom katsayılarının toplamları ile çalışılacaktır.

3.4.2. Euler’in Yansıma Formülü

1771’de Euler $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ güçlü sonucunu kanıtladı. Bu yararlı yansıma formülü gamma fonksiyonu ile sinüs fonksiyonu arasında temel ama belki de beklenmedik bir bağlantı kurmaktadır. Davis [16], "kompleks bakış açısından, özdeşliğin kısmi bir nedeninin $[\sin(\pi z)]$ ’nin sıfırları ile gamma fonksiyonunun kutupları arasındaki benzerlikte yattığına" işaret etmektedir. Bununla birlikte, her iki fonksiyon da periyodik olsa da, birbirleri cinsinden ifade edilebilecekleri hemen belli değildir. Davis bu ilişkiyi şiirsel bir şekilde "periyot matematiğini bu kadar büyümlü kılan hassas örüntülerin güzel bir örneği" olarak tanımlar.

Euler’in yansıma formülünü kanıtlamak için çeşitli yaklaşımlar vardır. Bazı metinler ([8, s. 35], [21, s. 65], [36, s. 59]) önce $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ olduğunu kanıtlar ve sonra bu sonucu kullanırken, diğer metinler önce yansıma formülünü doğrudan kanıtlar ve sonra sonuç olarak sonsuz sinüs çarpımını çıkarır ([4, s. 10], [5, s. 27], [60, s.20]). Bu

aşağıda kanıtlandığı gibi, ispatı sinüs fonksiyonu için Euler-Wallis formülüne dayandırarak ilk yaklaşımı izlenebilir ([8]).

Teorem 3.6 (Euler-Wallis Formülü) $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

İspat $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ özdeşliğinin ardışık olarak kullanılmasıyla

$$\sin x = 2^3 \sin \frac{x}{2^2} \sin \frac{\pi+x}{2^2} \sin \frac{2\pi+x}{2^2} \sin \frac{3\pi+x}{2^2}$$

elde edilir. Aynı özdeşliği sağdaki dört çarpanın her birine tekrar uyguladığımızda

$$\begin{aligned} \sin x &= 2^7 \sin \frac{x}{2^3} \sin \left(\frac{\pi+x}{2^3}\right) \sin \left(\frac{2\pi+x}{2^3}\right) \sin \left(\frac{3\pi+x}{2^3}\right) \sin \left(\frac{4\pi+x}{2^3}\right) \\ &\quad \times \sin \left(\frac{5\pi+x}{2^3}\right) \sin \left(\frac{6\pi+x}{2^3}\right) \sin \left(\frac{7\pi+x}{2^3}\right). \end{aligned}$$

Bu işlemi n kez tekrarlayarak suretiyle

$$\sin x = 2^{2^n-1} \sin \frac{x}{2^n} \sin \left(\frac{\pi+x}{2^n}\right) \sin \left(\frac{2\pi+x}{2^n}\right) \cdots \sin \left(\frac{[2^n-1]\pi+x}{2^n}\right)$$

elde edilir. Çarpanları son terimden başlayarak alternatif formlarda yeniden yazmak mümkündür, böylece $\sin \left(\frac{[2^n-1]\pi+x}{2^n}\right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi-x}{2^n}\right) = \sin \left(\frac{\pi-x}{2^n}\right)$, $\sin \left(\frac{[2^n-1]\pi+x}{2^n}\right) = \sin \left(\frac{2\pi-x}{2^n}\right)$, devam eder. Genel olarak, sondan r 'inci çarpan $\sin \left(\frac{r\pi-x}{2^n}\right)$ olarak yazılabilir. Daha sonra gerekli düzenlemelerin ardından

$$\begin{aligned} \sin x &= 2^{2^n-1} \sin \frac{x}{2^n} \left\{ \sin \left(\frac{\pi+x}{2^n}\right) \sin \left(\frac{\pi-x}{2^n}\right) \right\} \left\{ \sin \left(\frac{2\pi+x}{2^n}\right) \sin \left(\frac{2\pi-x}{2^n}\right) \right\} \cdots \\ &\quad \cdots \left\{ \sin \left(\frac{[\frac{1}{2}2^n-1]\pi+x}{2^n}\right) \sin \left(\frac{[\frac{1}{2}2^n-1]\pi-x}{2^n}\right) \right\} \sin \left(\frac{\frac{1}{2}2^n\pi+x}{2^n}\right) \\ &= 2^{2^n-1} \sin \frac{x}{2^n} \left\{ \sin^2 \frac{\pi}{2^n} - \sin^2 \frac{x}{2^n} \right\} \left\{ \sin^2 \frac{2\pi}{2^n} - \sin^2 \frac{x}{2^n} \right\} \cdots \\ &\quad \cdots \left\{ \sin^2 \frac{[\frac{1}{2}2^n-1]\pi}{2^n} - \sin^2 \frac{x}{2^n} \right\} \cos \left(\frac{x}{2^n}\right), \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sin(A+B) \sin(A-B) = \frac{1}{2} (2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B)$$

özdeşliği yardımıyla $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} \cdot 2^n = 2^n$, yukarıdaki sonucun her iki tarafını da $\sin \frac{x}{2^n}$ ile bölüp $x \rightarrow 0$ için limit olarak alınacak olursa

$$2^n = 2^{2^n-1} \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sin^2 \frac{2\pi}{2^n} \cdots \sin^2 \frac{[\frac{1}{2}2^n-1]\pi}{2^n}.$$

elde edilir. Bu sonucun önceki $\sin x$ için elde ettiğimiz açılıma bölünmesiyle

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \left\{ 1 - \frac{\sin^2(x/2^n)}{\sin^2(\pi/2^n)} \right\} \left\{ 1 - \frac{\sin^2(x/2^n)}{\sin^2(2\pi/2^n)} \right\} \dots$$

$$\dots \left\{ 1 - \frac{\sin^2(x/2^n)}{\sin^2\left(\left[\frac{1}{2}2^n - 1\right]\pi/2^n\right)} \right\} \cos \frac{x}{2^n}.$$

yazılır. Nihai sonucu elde etmek için yine her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitleri alınarak

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2} \right) \dots = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right),$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Elde ettiğimiz bu sonucu Euler'in yansıma formülünün ispatında kullanacağız:

Teorem 3.7 (Euler'in Yansıma Formülü) $0 < x < 1$ için,

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (3.16)$$

İspat Denklem (3.3) ve Denklem (3.7) de verilen Euler çarpımı ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= \frac{1}{\Gamma(x)(-x)\Gamma(-x)} \\ &= \frac{1}{-x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x \left(1 + \frac{x}{n}\right) (-x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}} \\ &= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

eşde edilir. Euler-Wallis formülüne göre $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ olduğundan istenen sonuç doğrudan elde edilmiş olur.

Euler'in yansıma formülü, iyi bilinen sonucu doğrulamak için zarif bir yol sağlar $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, (3.16)'da $x = \frac{1}{2}$ olarak ayarlandığında $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$. Ayrıca aşağıda verilenler gibi başka faydalı sonuçlara da yol açmaktadır ([4, s. 11], [8, s. 41], [66, s. 41]).

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}, x - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x-k}$$

$$\pi \tan(\pi x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k + \frac{1}{2} - x}$$

Denklem (3.3) de verilen yineleme bağıntısı kullanılarak yansıma formülü

$$\Gamma(n+z)\Gamma(n-z) = [(n-1)!]^2 \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right), n \in \mathbb{N}$$

şeklinde ifade edilebilir ([66, s. 48]).

3.4.3. Çarpım ve İki Kat Formülleri

Bu formüller gamma ifadelerini basitleştirmek için güçlü araçlar sağlar ve hipergeometrik özdeşliklerle yapılan çalışmalarda yaygın olarak kullanılır. Legendre iki kat formülünün ispatı için aşağıdaki lemma gereklidir.

Lemma 3.1 $n \in \mathbb{Z}, x \neq -1, -2, -3, \dots$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{\Gamma(x+n)} = 1$$

dir.

İspat Denklem (3.6) yardımıyla

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{\Gamma(x+n)} \cdot \Gamma(x)$$

elde edilir.

([60, s. 23])’te bulunan ve bir gamma fonksiyonunun agümanını azaltmak için yararlı olan Legendre’nin iki kat formülünün kanıtı aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.8 (Legendre’nin İki Kat Formülü) $x \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}, \dots$, için,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x) \quad (3.17)$$

İspat Açıkça görülebileceği üzere Denklem (3.11) ve Denklem (2.10) da verilen Pochhammer özdeşliği kullanılarak

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2x+2n)}{2^{2n}\Gamma(x+n)\Gamma\left(x + \frac{1}{2} + n\right)}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitleri alınır ve Lemma 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2x)}{2^{2x}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma(2x+2n)}{(2n-1)!(2n)^{2x}} \right) \left(\frac{(n-1)!n^x}{\Gamma(x+n)} \right) \left(\frac{(n-1)!n^{x+1/2}}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2} + n\right)} \right) \left(\frac{(2n-1)!}{2^{2n}n^{1/2}[(n-1)!]^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1)(1)(1) \left(\frac{(2n-1)!}{2^{2n}n^{1/2}[(n-1)!]^2} \right) = c, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada c , x 'ten bağımsızdır. Son olarak, $x = \frac{1}{2}$ alınarak c değeri

$$\frac{\Gamma(1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\Gamma(1)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = c$$

elde edilmiş olur.

Koepe [42, s.16], $k \in \mathbb{N}$ için Denklem (3.17) için etkileyici ve zarif bir kanıt vermiştir. Eğer

$$a_k = \frac{\Gamma(2k)}{4^k \Gamma(k) \Gamma(k + 1/2)}$$

ise

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $a_k = a_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ olup iki kat formülü direkt olarak elde edilmiş olur.

Ayrıca, Denklem (3.17)'de $x = \frac{1}{2}$ yazılırsa $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sonucunu doğrulamaktadır.

İki kat formülü argümanın daha yüksek katlarına da genişletilebilir. Örneğin, [21, s.65]'de bulunan üçleme formülü şu şekilde verilir

$$\Gamma(3x) = \frac{3^{3x-1/2}}{2\pi} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

İki kat ve üçleme formülleri gibi formüller, Gauss tarafından 1812'de kanıtlandığı gibi, $kx, k \in \mathbb{N}$ argümanı için genel çarpma formülünün özel durumlarıdır. Bu teoremin ispatı [60, s.24-26] çalışmasında bulunabilir.

Teorem 3.9 (Gauss'un Çarpım Formülü) $x \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{k}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{k}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{\frac{1}{2}-kx} \Gamma(kx) \quad (3.18)$$

eşitliği geçerlidir.

3.4.4. Gamma Fonksiyonunun Asimptotik Davranışı

Gamma fonksiyonunun argümanın büyük değerleri için nasıl davrandığını bilmek faydalıdır. Doğal sayılar için $\Gamma(n + 1) = n!$ olduğundan, gamma fonksiyonunun asimptotik davranışının bir ölçüsü olarak faktöriyel için bir yaklaşım kullanabiliriz. James Stirling (1692-1730) tarafından geliştirilen aşağıdaki dikkat çekici asimptotik formül, büyük bir doğal sayının faktöriyeline yaklaşmak için önemli analitik sabitler $\sqrt{2}$, e ve π 'yi birleştirir ([21, s.66]).

Teorem 3.10 (Stirling Formülü) n 'nin büyük doğal sayı değerleri için

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (3.19)$$

dır.

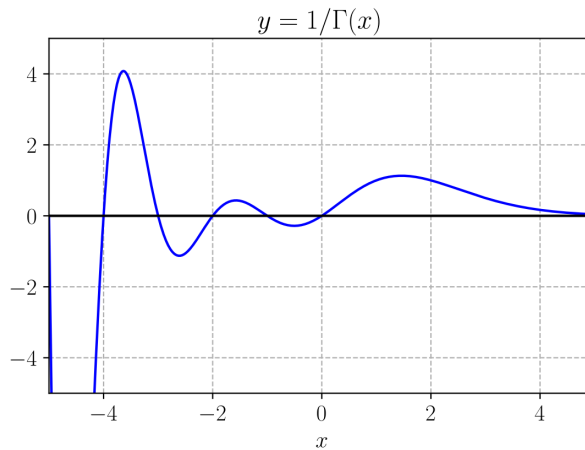
3.5. Gamma Fonksiyonu ile İlgili Fonksiyonlar

Gamma fonksiyonu ile yakından ilintili olan gamma fonksiyonunun tersi, log-türevlerini içeren digamma ve poligamma fonksiyonları, tam olmayan gamma fonksiyonu ve hipergeometrik özdeşliklerin kurulmasında merkezi bir rol oynayan beta fonksiyonu gibi birçok kullanışlı fonksiyon vardır.

Bu başlık altında daha sonraki bölümlerde istifade edeceğimiz gamma fonksiyonu ile ilintili bazı fonksiyonlar verilecektir.

3.5.1. Ters Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu pozitif olmayan tamsayılar için tanımlı olmadığından, tüm sonlu argümanlar için tanımlı olan ve x pozitif olmayan bir tamsayı olduğunda sıfırları olan ters gamma fonksiyonu ile çalışmak genellikle daha pratiktir (Şekil 3.2). Kompleks bölgede, ters gamma fonksiyonu tekiliği olmayan bir tam fonksiyon olduğundan, tam fonksiyonlar için Weierstrass'ın sonsuz çarpım temsili yardımıyla ters gamma fonksiyonu Denklem (3.8) de ifade edildiği gibi sonsuz çarpım gösterimine sahiptir.



Şekil 3.2. Reel düzlemde ters gamma fonksiyonunun grafiği

3.5.2. Tam Olmayan ve Çoklu Gamma Fonksiyonları

Bazı durumlarda [60, s. 127]'de tanımlandığı gibi sırasıyla $\Gamma(a, x)$ ve $\gamma(a, x)$ ile gösterilen üst ve alt tam olmayan gamma fonksiyonlarıyla karşılarız. Bu fonksiyonlar 1811 yılında Legendre tarafından tanıtılmıştır ve mühendislik ve fiziğin birçok alanında ortaya çıkmaktadır ([12, 62]). Örneğin Seaborne [62, s. 9] ideal bir gazdaki hız dağılımını bulmada alt tam olmayan gamma fonksiyonunun kullanımını göstermektedir.

Tanım 3.3 $x > 0$ için, $\Gamma(x) = \Gamma(a, x) + \gamma(a, x)$ olup

$$\gamma(a, x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Çoklu gamma fonksiyonu ($\Gamma_n(z)$) 1900 lü yıllarda Ernest William Barnes tarafından geliştirilmiştir. Bu fonksiyon, Euler gamma fonksiyonunu bir yineleme fonksiyonel denklemi aracılığıyla genelleştirmekte olup bu fonksiyonun seriler, sonsuz çarpımlar ve Riemann hipotezi ile bağlantılı uygulamaları bulunmaktadır.

Tanım 3.4 $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\Gamma_n(z)$ şeklinde gösterilen çoklu gamma fonksiyonu

$$\Gamma_{n+1}(z+1) = \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)}, \quad \Gamma_1(z) = \Gamma(z), \quad \Gamma_n(1) = 1$$

şeklinde tanımlanır.

3.5.3. Digamma fonksiyonu

Stirling'in $n!$ için asimptotik formülünü türetmede ilk olarak $\sum_{n=1}^\infty \log(n!)$ serisini kullanması gibi, matematikçiler de gamma fonksiyonunun logaritmasını gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini türetmek için kullanmışlardır. Bu tür bir araştırma için güçlü bir araç, psi fonksiyonu (ψ) ya da digamma fonksiyonu olarak da adlandırılan gamma fonksiyonunun logaritmik türevidir ([66, s.53]).

Tanım 3.5 (Digamma Fonksiyonu) $x \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere, $\psi(x)$ şeklinde gösterilen digamma fonksiyonu

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem (3.21) ışığında

$$\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1)$$

sonucunu elde etmek mümkündür. Gamma fonksiyonu için yineleme bağıntısına benzer bir bağıntı

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ifadesinin her iki yanının logaritmik türevini almak suretiyle

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}, \quad (3.22)$$

şeklinde digamma fonksiyonu içinde verilebilir. Havil [36, s.58], Denklem (3.22) de verilen yineleme bağıntısı, $\psi(n) = \gamma + H_{n-1}$ ve H_n harmonik serisinin terimleri olmak üzere

$$\psi(x+n) = \psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.23)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Gamma fonksiyonu ile olan ilişkisi sayesinde digamma fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{z} \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x} \right) dz, \quad x > 0 \\ \psi(x) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}} \right) dz, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Dirichlet ve Gauss integralleri gibi bazı ilginç belirli integralleri hesaplamak için kullanışlı bir araçtır ([4, s. 26]).

Digamma fonksiyonunun, aşağıda Weierstrass çarpımının Denklem (3.8) ün logaritmik türevinin alınmasıyla elde edilen oldukça kullanışlı seri gösterimleri de vardır. Bu seri gösteriminde, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ serisinin yakınsaklığı için Weierstrass M-testi kullanılır [60, s.10] .

Tanım 3.6 $x \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = -\gamma + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1} \right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x}{n(n+x)} \right) \quad (3.24)$$

dır.

Bu seri açılımı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, rasyonel terimleri olan belirli serilerin hesaplanmasında oldukça kullanışlı olacaktır:

Örnek 3.2 Serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)}$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3(n+\frac{1}{4})} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{4}} - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3}\psi(2) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}\psi\left(\frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

$\psi(\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}$ olduğundan, digamma fonksiyonunun serisi açılımı kullanarak

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma'(1/2) = -\sqrt{\pi} \left\{ \gamma - \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) - 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) \right] \right\}$$

ve dolayısıyla

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi} \left\{ \gamma + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \right\} = -\sqrt{\pi} \{\gamma + \log 2\}$$

değerlerini elde etmek mümkündür.

Denklem (3.24) de verilen seri açılımından $\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$ sonucuna ulaşmak mümkündür. Dolayısıyla, Euler-Mascheroni sabiti, $x = 1$ noktasındaki gamma fonksiyonunun gradyanının negatifidir. Bu sonuç aynı zamanda Denklem (3.2) de verilen Euler'in gamma integralinin türevini alarak $\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt$ nin alternatif tanımını elde etmemizi sağlar. Havil [36, s.108] çalışmasında Euler-Mascheroni sabitinin

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} du \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

integrallerinin değerlerine karşılık geldiği gösterilmektedir. Digamma fonksiyonu, gamma fonksiyonunun belirli davranışlarını doğrulamaktadır. Örneğin, daha fazla türev almak suretiyle

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x-1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots > 0,$$

elde edilir. Bu da Koroller tarafından verilen Sonuç 2.3 ile $\log \Gamma(x)$ 'in ve dolayısıyla $\Gamma(x)$ 'in pozitif reel eksen üzerinde konveks olduğunu kanıtlar. Bu sonuç yardımıyla

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)\Gamma'(x)}{(\Gamma(x))^2} > 0$$

bu ifadenin doğrudan sonucu olarak $\Gamma''(x)\Gamma(x) > (\Gamma'(x))^2 \geq 0$ elde edileceğinden $\Gamma(x)$ ve $\Gamma''(x)$ değerlerinin her ikisi de pozitif ya da her ikisi de negatif olacağı sonucuna ulaşılır. Şekil 3.1'de verilen grafiğin içbükeyliği Artin [5, s.16], digamma fonksiyonunun herhangi

bir mertebeye türevlenebilir olduğunu göstermek için seri yakınsamasını kullanır ve bunun sonucunda

$$\psi_n(x) = \psi^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(p+x-1)^{n+1}}$$

şeklinde poligamma fonksiyonları tanımlanır.

3.5.4. Beta fonksiyonu

Beta ve gamma fonksiyonları arasındaki ilişki, hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili birçok faydalı özdeşlik için bir temel oluşturur. Beta fonksiyonu Euler'in $\int x^e dx (1-x)^n$ biçimindeki integrali olarak ortaya çıkmıştır ve Legendre 'Exercices de Calcul Intégral', Cilt 1'de (1811) "Euler'in ilk integrali" olarak adlandırmıştır.

Tanım 3.7 $x > 0, y > 0$ için $\beta(x, y)$ (ya da $B(x, y)$) şeklinde gösterilen beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.11 $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ integrali $x > 0, y > 0$ için yakınsar.

İspat Gamma integralinde olduğu gibi, integral iki integralin toplamı olarak ifade edilir ve her birinin yakınsaması ayrı ayrı araştırılır.

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = I_1 + I_2.$$

İlk integral için, $0 < t \leq \frac{1}{2}$ olduğunda $(1-t)^{y-1} \leq t^{x-1}$, böylece

$$I_1 \leq \int_0^{1/2} t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^{1/2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2^{-x} - a^x}{x} = \frac{2^{-x}}{x}.$$

İkinci integral için, $\frac{1}{2} \leq t < 1$ olduğunda,

$$I_2 \leq \int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1} dt = \lim_{a \rightarrow 1^-} \left[\frac{(1-t)^y}{-y} \right]_{1/2}^a = \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{2^{-y} - (1-a)^y}{y} = \frac{2^{-y}}{y}.$$

Bu, $x > 0, y > 0$ için beta fonksiyon integralinin yakınsaklığını ortaya koyar.

Gamma fonksiyonunda olduğu gibi, beta fonksiyonunun da [4, 5] ve [60, s.2] gibi çalışmalarda bulunan çok sayıda alternatif gösterimi ve kullanışlı özellikleri vardır. Bu bölüm hipergeometrik fonksiyonlarla çalışırken en çok ilgili olan özelliklerle sınırlandırılmıştır.

Denklem (3.25) de, $x, y > 0$ için, uygun dönüşümler yapılarak

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \quad (3.26)$$

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \quad (3.27)$$

şeklinde yeni bir takım integral gösterimler elde edilebilir. Chaudry [12] beta fonksiyonu için bu türden sekiz farklı integral gösterimi vermiştir.

Denklem (3.25) den açıkça görülebileceği üzere beta fonksiyonu simetri özelliği aşağıdaki tanımda verilmiştir:

Teorem 3.12 $x, y > 0$ için,

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad (3.28)$$

Beta fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyon iken gamma fonksiyonu tek değişkenli bir fonksiyon olmasına rağmen, iki fonksiyon arasında hipergeometrik özdeşliklerin kurulmasında sıklıkla kullanılan ve aşağıda kanıtlanan güçlü bir doğrudan ilişki vardır ([60, s.19]).

Teorem 3.13 $x > 0, y > 0$ için,

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3.29)$$

İspat Denklem (3.2) de verilen Gamma fonksiyonu için integral tanımını, çeşitli dönüşümler ile birlikte kullanarak

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^{\infty} e^{-u} u^{y-1} du \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a^2-b^2} x^{2x-1} y^{2y-1} da db \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2x-1} (r \sin \theta)^{2y-1} r d\theta dr \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr. \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (3.26) ile, bu sonucun ilk integrali $\beta(y, x) = \beta(x, y)$ 'dir. Ayrıca, Bölüm 3.3'te verilen $\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt$ integralinden

$$2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr = \Gamma(x+y)$$

elde edilir ve böylece teorem kanıtlanmış olur.

$x, y, z, w > 0$ için yukarıda verilen sonucun

$$\beta(x, y)\beta(x+y, z)\beta(x+y+z, w) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(x+y+z+w)}$$

şeklinde genelleştirilebileceği aşıkardır.

Not 3.1 Aşağıda maddeler halinde sunulan özdeşlikler Denklem (3.29) dan türetilmiş olup gamma ve beta fonksiyonları arasındaki ilişkiyi göstermesi bakımından oldukça kullanışlıdır. Daha fazla bilgi [8, s. 29], [21, s. 80] ve [29, s. 16] çalışmalarında bulunabilir.

- Denklem (3.15) de ifade edilen Euler'in yansıma formülü aracılığıyla

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \beta(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad 0 < p < 1.$$

yazılabilir.

- Beta fonksiyonu için

$$\frac{\beta(x, y+1)}{y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{y\Gamma(x+y+1)} = \frac{\Gamma(x)y\Gamma(y)}{y(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\beta(x, y)}{x+y},$$

ya da faktöriyel formda

$$\beta(x, y) = \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{x!y!}{(x+y)!}$$

fonksiyonel denklemler elde edilebilir.

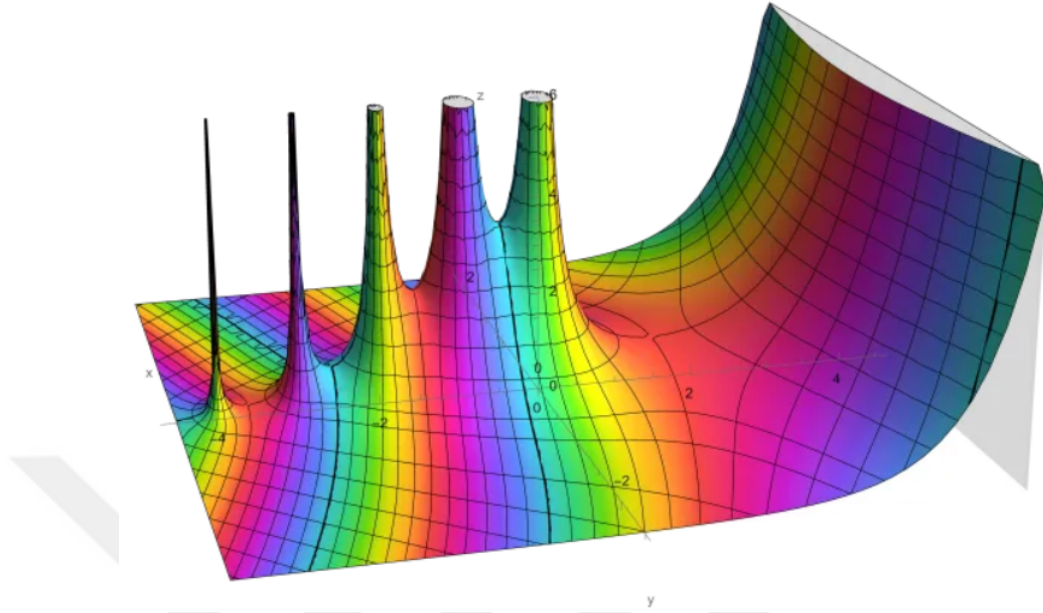
- $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ şeklinde verilen Wallis integrali için zarif bir kanıt sağlar ([29, s. 73]).

3.6. Kompleks Gamma Fonksiyonu

Andrews *et al.* [4] "gamma fonksiyonu, önemli karakteristiklerinin çoğunun bu teori içinde ortaya çıkması anlamında reel değişkenli bir fonksiyondur" görüşüne uygun olarak, gamma fonksiyonuna ilişkin tartışmalar şimdiye kadar reel sayılar alanıyla sınırlandırıldı. Bununla birlikte, reel gamma fonksiyonu üzerine yapılan ilk çalışmalar o zamandan beri kompleks argümanları da içerecek şekilde genişletilmiştir. Bu bölümde, gamma fonksiyonunun tanım alanının kompleks değişkenlere genişletilmesine kısaca değinilmiş ve kompleks analizin bu fonksiyona uygulanmasına ilişkin bazı bilgiler verilmiştir.

Euler kompleks değişkenler teorisinde bir öncü olsa da, kompleks bir sayının faktöriyelini dikkate almış gibi görünmemektedir. Davis'e [16] göre, kompleks düzleme geçiş Gauss tarafından başlatılmıştır, ancak 1930'ların başına kadar gamma fonksiyonunun kompleks değerlerine büyük ölçüde dokunulmamıştır. Kompleks değerlerin tabloları ve kompleks gamma fonksiyonunun elle çizilmiş üç boyutlu grafiği 1909 gibi erken bir tarihte Jahnke ve Emde [38] tarafından sağlanmıştır (Şekil 3.3), ancak 1813'te Gauss ve 1825'te Legendre tarafından üretilen gerçek değerler için tablolar neredeyse bir yüzyıl boyunca ihtiyaç

duyulan tek şeydir. Daha sonra 1930'lerde teorik fizikte gamma fonksiyonunun uygulamaları keşfedildi ve 1950'lerin başında bilgisayarların kullanılmasıyla kompleks düzlemde gamma fonksiyonunun değerleri için kapsamlı tablolar yayınlandı.



Şekil 3.3. Kompleks gamma fonksiyonu

3.6.1. Gamma Fonksiyonunun Analitik Devamı

Davis [16], "gamma fonksiyonunun tanım bölgesini genişletmek için elimizde kavramsal ve operasyonel olarak farklı bir dizi yöntem olduğunu belirtmektedir. Bu farklı yöntemler aynı sonucu verir mi?" Bir önceki bölümde ele alındığı gibi, analitik devamlılık kavramı nedeniyle bizi temin eder. Denklem (3.3) de verilen yineleme bağıntısı ve analitik devamlılığı kullanarak, gamma fonksiyonu pozitif olmayan tamsayılar hariç kompleks düzlemin tüm kısımlarını içerecek şekilde genişletilebilir. Gamma fonksiyonu da kompleks sonsuzlukta temel bir tekilliğe sahiptir, çünkü $\Gamma(\frac{1}{z}), z \rightarrow \infty$ olduğunda tanımlanmamış bir limite sahiptir ve dolayısıyla gamma fonksiyonu sıkıştırılmış kompleks düzlemde iyi tanımlanmamıştır.

Denklem (3.2) de verilen Euler'in integral formülü kompleks düzlemin sağ yarısındaki kompleks sayılar için tanımlanabilir. İntegral daha sonra kompleks değerli fonksiyonu verir.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \Re(z) > 0,$$

Burada çok değerli t^{z-1} fonksiyonu $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ ($\log t$ tamamen reeldir) kullanılarak kesinleştirilir. Bu kompleks fonksiyon, gerçekte değerler için sıradan gamma fonksiyonuyla

çakışır. Benzer bir şekilde, beta fonksiyonu aşağıdakileri içerecek şekilde genişletilebilir. Kompleks argümanlar, $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ tanımını kullanarak, burada yine $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t}$ ve $(1-t)^{y-1} = e^{(y-1)\log(1-t)}$ ([74, s. 253]). Euler'in limit formu (3.5) ve Weierstrass çarpımı (3.8), pozitif olmayan tamsayılar hariç tüm kompleks düzlemde iyi tanımlanmıştır ve dolayısıyla gamma fonksiyonunun analitik devamlarını sağlar. Kompleks gamma fonksiyonunun pozitif olmayan tamsayılarda basit kutuplara sahip olduğunu göstermek için yine tam olmayan gamma fonksiyonlarından yararlanılır.

Teorem 3.14 $z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z)$ 'nin $z = -n, n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

dır.

İspat Üstel fonksiyonun seri açılımı ve toplama ile integralin yer değiştirilmesi yoluyla

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_0^1 \right\} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} \right\} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \end{aligned}$$

elde edilir. Kalan (rezidü) integral z 'nin analitik (tam) bir fonksiyonudur çünkü 0'a yakın t için yakınsama problemi ortadan kalkmıştır, bu nedenle entegrasyon aralığı boyunca tekillik yoktur. Böylece, Tanım 2.5 ile kutupların konumlarına ve rezidülerine sahip olunur.

Bu sonuç, Teorem 2.11'teki rezidü hesaplamasının aşağıdakilere uygulanmasıyla doğrulanır $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}}$ burada n negatif olmayan bir tamsayıdır. O zaman $\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Dolayısıyla, $\Gamma(z)$ pozitif olmayan tam sayılar hariç tüm kompleks sayılar için tanımlanan meromorfik bir fonksiyondur ve Euler'in integralinin kompleks değerlere olan bu analitik uzantısı artık gamma fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

3.7. Kompleks Analiz ve Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunu kompleks argümanları içerecek şekilde genişlettikten sonra, reel sayılar için zaten kanıtlanmış olan birçok temel sonucu oluşturmak için kompleks anal-

izin güçlü yöntemlerinden yararlanılabilir. Bunu göstermek için, [60, s. 20-21] ve [62, s.155-157]'deki çalışmayı izleyerek, Euler'in kompleks sayılar için yansıma formülünü kanıtlamak için çevre integrali ve rezidü teorisi kullanılır.

Teorem 3.15 $z \in \mathbb{C}$ ve $z \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere

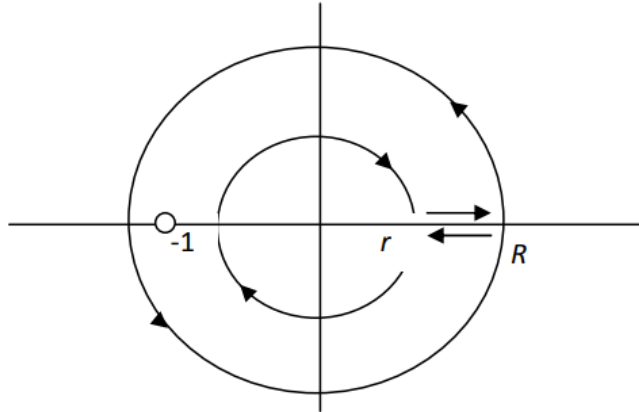
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

dır.

İspat $0 < \Re(z) < 1$ için, Denklem (3.27) ve Denklem (3.29) dikkate alınarak

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \beta(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy$$

yazılabilir. Bu integrali $\alpha = re^{i\theta}$, $\Re(\alpha) = y$ ve C eğrisinin $\int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha} d\alpha$ 'daki integrandın basit kutbunu $\alpha = -1$ çevrelediği bir düzlemde eğrisel integrasyonu kullanarak hesaplanabilir. Orijin, bu çok değerli integral için bir dallanma noktasıdır. İntegralin süreksiz olduğu pozitif reel eksen boyunca bir kesim seçilir ve α -düzlemindeki C eğrisel integrali, Şekil 3.4'te gösterildiği gibi ([60, s.20]), orijin merkezli, yarıçapları r (saat yönünde) ve R (saat yönünün tersine) $r < R$ olan, pozitif reel eksen boyunca R 'den r 'ye birleşen iki çemberden oluşacak şekilde tanımlanır.



Şekil 3.4. -1 basit kutup noktasını çevreleyen çevre

C çevresi $\alpha = \Re^{i\theta}(\theta$ 0 dan 2π ye), $\alpha = ye^{2\pi i}(y : R \rightarrow r)$, $\alpha = re^{i\theta}(\theta : 2\pi \rightarrow 0)$ ve $\alpha = ye^{0i} = y(y : r \rightarrow R)$ olmak üzere dört parçadan oluşur. Dolayısıyla, çevre integrali

$$iR^z \int_0^{2\pi} \frac{e^{iz\theta} d\theta}{1 + \Re^{i\theta}} + e^{2\pi iz} \int_R^r \frac{y^{z-1} dy}{1+y} + \int_{2\pi}^0 \frac{ir^z e^{iz\theta} d\theta}{1 + re^{i\theta}} + e^{0iz} \int_r^R \frac{y^{z-1} dy}{1+y}.$$

şeklinde yazılabilir. $0 < \Re(z) < 1$ için $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iz\theta} d\theta}{1 + \Re(i\theta)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{2\pi}^0 \frac{ir^z e^{iz\theta} d\theta}{1 + re^{i\theta}} = 0$ dır.

Bu çevre integralinden

$$e^{2\pi iz} \int_{\infty}^0 \frac{y^{z-1} dy}{1+y} + \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1} dy}{1+y}$$

elde edilir. Şimdi Teorem 2.11 ve Teorem 2.12 rezidü teoremlerinden $f(z) = \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha}$ için

$$\int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -1) = 2\pi i (-1)^{z-1} = 2\pi i e^{\pi i(z-1)} = -2\pi i e^{\pi iz}$$

elde edilir. Buradan

$$e^{2\pi iz} \int_{\infty}^0 \frac{y^{z-1} dy}{1+y} + \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1} dy}{1+y} = -2\pi i e^{\pi iz}$$

ve dolayısıyla

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{z-1} dy}{1+y} = \frac{2\pi i e^{\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}.$$

$\sin A = \frac{e^{Ai} - e^{-Ai}}{2i}$ tanımından $0 < \Re(z) < 1$ için

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{z-1} dy}{1+y} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

sonucuna varılır ve analitik devamlılık ile sonucu tamsayı olmayan tüm kompleks sayılara uygulanabilir.

Kompleks analiz, [62, s.172]'de tartışıldığı gibi, aşağıda verilen Hankel'in çevre integrali gibi gamma fonksiyonu için çeşitli çevre integral gösterimlerinin geliştirilmesini de kolaylaştırır.

Teorem 3.16 (Hankel Çevre İntegrali) $z \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C t^{z-1} e^t dt \quad (3.30)$$

dır.

İspat $\int_C t^{z-1} e^t dt$ çevre integralini göz önünde bulundurun. $0 < \Re(z) < 1$ için integrali orijinde bir dallanma noktası ile çok değerlidir. Bu nedenle, negatif reel eksen boyunca bir dallanma kesimi yapalım ve dallanma kesiminin altından başlayan, orijini saat yönünün tersine bir kez çevreleyen ve negatif reel eksene paralel olarak geri dönen bir C çevresi seçilir. Bu çevre $\arg t = -\pi$ ile reel eksene, r yarıçaplı orijin merkezli daireye ve yine $\arg t = \pi$ ile reel eksene deforme edilir. $t = ue^{i\theta}$ ile çevrenin üç parçası üzerindeki integraller dikkate alınır:

$$I_1 = \int_{\infty}^r e^{-u} (ue^{-i\pi})^{z-1} e^{-i\pi} du,$$

$$I_2 = ir^z \int_{\text{arc}} e^{re^{i\theta}} (e^{i\theta})^{z-1} e^{i\theta} d\theta,$$

$$I_3 = \int_r^{\infty} e^{-u} (ue^{i\pi})^{z-1} e^{i\pi} du.$$

$\Re(z) > 0$ için, şimdi r sıfıra yaklaştıkça limit alınır, böylece I_2 sıfıra yaklaşır. O zaman

$$\begin{aligned}\int_C t^{z-1} e^t dt &= e^{i\pi z} \int_{\infty}^0 e^{-u} u^{z-1} du + e^{i\pi z} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \\ &= (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du = 2i \sin(\pi z) \Gamma(z),\end{aligned}$$

ve istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Fonksiyon $\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C t^{z-1} e^t dt$, z 'nin integral olmayan tüm değerleri için analitiktir ve dolayısıyla Henkel'in çevre integrali, $\Gamma(z)$ için sol yarı düzlemde analitik bir devam sağlar. Pochhammer integrali gibi daha kompleks bir çift entegrasyon çevresi seçerek alan kısıtlamalarını gevşetmek mümkündür ([70, s.105]).

3.8. Gamma Fonksiyonunun Bazı İlginç Uygulamaları

Çeşitli integral ve seri gösterimleri sayesinde gamma fonksiyonu, çeşitli bağlamlarda güçlü bir hesaplama aracı sağlar. Gamma fonksiyonu, saf ve uygulamalı matematik dünyasında gerçekten her yerde bulunan bir fonksiyondur. Ana odak noktası hipergeometrik özdeşliklerin kurulmasındaki rolü olsa da, bu bölümü bu fonksiyonun diğer birkaç ilginç uygulaması verilerek tamamlanır.

3.8.1. İntegral Hesabı

Hesaplanması zor gibi görünen bazı integraller, gamma ve beta integrallerinin akıllıca uygulanmasıyla daha anlaşılır hale gelir. Bu integrallerle ilgili daha fazla örnek [21] ve [29] çalışmalarında bulunabilir.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx &= \frac{\Gamma(4)}{2^4} = \frac{3!}{16} = \frac{3}{8} \\ \int_0^1 x^m (\log x)^n dx &= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}} &= \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \\ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)^{1/4} \cos x dx &= \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{2\sqrt{\pi}} \\ \int_0^1 x^m \log^n x dx &= (-1)^n \int_0^{\infty} t^{-n} e^{-(m+1)t} dt = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

3.8.2. Sonsuz Çarpımlar

Gamma fonksiyonu, yakınsayan sonsuz çarpımların belirli bir sınıfını değerlendirmek için sonlu bir yöntem sağlar ([74, s.239]).

Teorem 3.17 $P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_k)} = \prod_{m=1}^k \frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}$

İspat Sonsuz çarpımın genel terimi, yeteri kadar büyük n değerleri için

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{a_k}{n}\right) \left(1 - \frac{b_1}{n}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{b_k}{n}\right)^{-1} &= \\ &= 1 - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir . Mutlak yakınsama $a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k = 0$, ve böylece P çarpımını $e^{\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_k-b_1-\dots-b_k}{n}\right)}$ ile değeri değiştirilmeden çarpılabilir. Dolayısıyla, elimizde

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{a_1}{n}\right) e^{\frac{a_1}{n}} \left(1 - \frac{a_2}{n}\right) e^{\frac{a_2}{n}} \dots \left(1 - \frac{a_k}{n}\right) e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1 - \frac{b_1}{n}\right) e^{\frac{b_1}{n}} \left(1 - \frac{b_2}{n}\right) e^{\frac{b_2}{n}} \dots \left(1 - \frac{b_k}{n}\right) e^{\frac{b_k}{n}}}.$$

Denklem (3.8) de verilen Weierstrass çarpımından ,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{\gamma z}}$$

ve dolayısıyla

$$P = \frac{b_1\Gamma(-b_1)b_2\Gamma(-b_2)\dots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)a_2\Gamma(-a_2)\dots a_k\Gamma(-a_k)} = \prod_{m=1}^k \frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}$$

elde edilir ki bu istenen sonuçtur.

Örnek 3.3 Yukarıdaki sonuçtan

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, hipergeometrik fonksiyonlar ve hipergeometrik fonksiyonları içeren önemli özdeşlikler sunulmuştur.

4.1. Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu

Tüm özel fonksiyonlar bu fonksiyonlar cinsinden ifade edilebildiğinden, hipergeometrik fonksiyon özel matematiksel fonksiyonlar alanında merkezi bir rol oynar. Bu nedenle temel matematikte sıkça karşılaşılr ve parametrik yapısı çok çeşitli uygulamalı problemlerin çözümü için güçlü bir araç sağlar.

"Hipergeometrik seri" terimi ilk olarak John Wallis tarafından 'Arithmetica Infinitorum' (1655) adlı eserinde $1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + \dots$ biçimindeki sonsuz serileri tanımlamak için kullanılmıştır. 1836 yılında Ernst Eduard Kummer (1810-1898) tarafından hipergeometrik seri terimi

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

serisi için kullanılmış ve bu da hipergeometrik serinin bugünkü halidir.

'Hipergeometrik' terimi üç nesneye uygulanabilir: hipergeometrik denklem (doğrusal ikinci dereceden bir diferansiyel denklem), hipergeometrik seri (hipergeometrik denklemin belirli bir çözümü) ve hipergeometrik fonksiyon (hipergeometrik serilerin toplamı). Bu tür fonksiyonlar Johann Friedrich Pfaff (1765-1825), Kummer, Euler ve Gauss dahil olmak üzere birçok matematikçi tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Srinivasa Ramanujan (1887-1920) da bu fonksiyonun klasik teoremlerinin çoğunu bağımsız olarak keşfetmiştir.

Hipergeometrik seriler teorisinin büyük bir kısmı, ilk sonuçlarından bazılarını 1812 tarihli 'Disquisitiones generales circa seriem infinitam' [33] adlı çalışmasında sunan Gauss tarafından yapılan çalışmalardan gelmektedir. Bu bölümde özellikle üç parametre içeren Gauss hipergeometrik serisini ve bununla ilişkili hipergeometrik denklemi ve hipergeometrik fonksiyonu verilmektedir. Bir sonraki bölümde bu tanımları herhangi bir sayıda parametre içerebilen genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara genişletilir.

Bölüm 4.2’de Gauss fonksiyonu tanımlandıktan sonra, Bölüm 4.3’te hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olarak rolü de dahil olmak üzere bazı temel özellikleri belirtilecek ve kanıtlanacaktır. Bölüm 4.4’te Gauss fonksiyonu ile gamma ve beta fonksiyonları arasındaki yakın ilişkiyi ortaya koyan yöntemleri kullanarak bazı reel ve kompleks integral gösterimleri ele alınır. Daha sonra, Bölüm 4.5’te Gauss fonksiyonu için bazı temel toplama teoremlerini ve Bölüm 4.6’da bazı iyi bilinen lineer ve kuadratik dönüşümleri kanıtlamak için bu kurulan ilişkilere dayanılır. Bu toplama ve dönüşüm özdeşlikleri, klasik gelişmelerin yanı sıra bu alandaki daha yeni çalışmaların da merkezinde yer almaktadır.

4.2. Gauss Hipergeometrik Fonksiyonunun Tanımlanması

Gauss hipergeometrik serisi üç parametre içerir ve Bölüm 1’de tanımlandığı gibi Pochhammer sembolü $(a)_k$ cinsinden yazılabilir.

Tanım 4.1 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots$ için a, b ve c ’nin reel veya kompleks parametreler olduğu $F(a, b; c; z)$ ile gösterilen Gauss hipergeometrik serisi

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k \quad (4.1)$$

şeklindedir.

$a = c$ ve $b = 1$ olduğunda bu seri, terminolojiyi açıklayan temel geometrik seri haline gelir, ancak payda parametresi pozitif olmayan bir tamsayı olduğunda tanımlanmaz, çünkü bu sifıra bölme ile sonuçlanır (artan çarpınım Denklem (2.6) özelliği). Gauss serisi $F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z)$ olarak yazılabileceğinden payına göre simetriktir ve eğer bir veya daha fazla pay parametresinin sıfır olması durumunda bire indirgenebilir. Pay parametrelerinden biri veya daha fazlası bir negatif tamsayı $-n$, $n \in \mathbb{N}$ ise, seri $(n + 1)$ ’ inci terimde sonlanan bir hipergeometrik polinoma indirgenir. Böyle bir durumda, Denklem (2.6) özelliğine gereğince

$$F(-n, b; c; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (b)_k}{(n-k)! k! (c)_k} z^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(b)_k}{(c)_k} z^k,$$

z değişkenine göre derecesi n olan bir polinomdur, bu nedenle yakınsama bir sorun değildir. [13, s.56]’da, Chaundy $(-n)$ ’ yi serinin ‘kapanış parametresi’ olarak ifade eder. Binom toplamları bu nedenle genellikle hipergeometrik serileri sonlandırmanın bir biçimidir.

Bir hipergeometrik seri, payda parametresinin tek başına sıfır veya negatif bir tamsayı olması durumunda tanımlanmazken, pay parametresinin de sıfır veya negatif bir tamsayı

olması durumunda pozitif olmayan tamsayı tanımlanabilir. Örneğin, $F(a, b; c; z)$ içinde $a = -m$ ve $c = -m - n$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ olsun. Eğer $n = 0$ ise, $a = c$ olur ve seri $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{k!} z^k$, ye indirgenir, bu da tanımlanmıştır. Eğer $n > 0$ ise, $F(-m, b; -m - n; z)$, yine tanımlanan, sonlandırıcı hipergeometrik polinom $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(b)_k (m+n-k)!}{(m+n)!} z^k$, ye indirgenir.

Bir Gauss serisinin sıfır teriminin ötesinde terimlere sahip olabileceğini belirtmek de ilginçtir.

Örneğin, $m, n \in \mathbb{N}, k \leq m$ olmak üzere, $\frac{(-m)_k}{(-m-n)_k}$ yazabiliriz. Bu durumda

$$\frac{m!}{(m+n)!} (m+n-k)(m+n-k-1) \cdots (m-k+1)$$

ve dolayısıyla, $b \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$F(-m, b; -m - n; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{m+n}\right) \left(1 - \frac{k}{m+n-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) \frac{(b)_k z^k}{k!}$$

elde edilir. Sonuç olarak, seri m ' ninci kuvvette sonlanmasına rağmen, $(m+n+1)$ 'inci kuvvette tekrar başlar. Örneğin,

$$F(-2, 1; -5; z) = 1 + \frac{2}{5}z + \frac{1}{10}z^2 - \frac{1}{10}z^6 - \frac{2}{5}z^7 - z^8 + \dots$$

dir.

Gauss serisinin iyi tanımlandığı ve sonlanmadığı parametrelerin değerleri için, birim yakınsama yarıçapını içeren yakınsama koşulları dikkate alınmalıdır. ([60, s.46]). Biçimsel bir sembol olarak z kullanıldığında, çarpma, türev, birleşim ve benzeri işlemlerden türetilen özdeşlikler biçimsel olarak hala doğru olacağından, hipergeometrik serinin yakınsamasının dikkate alınması gerekmez. Ancak, z belirli bir değerle değiştirildiğinde, sonsuz toplamın iyi tanımlanmış olması önemlidir.

Teorem 4.1 $F(a, b; c; z)$ Gauss hipergeometrik serisi $|z| < 1$ olduğunda mutlak yakınsaktır, $|z| > 1$ olduğunda ıraksak ve $|z| = 1$ olduğunda sınırdaki $\Re(c - a - b) > 0$ için yakınsaktır.

İspat $F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{(a)_{k+1}}{(a)_k} = a + k$ olduğundan, Gauss fonksiyonunun tanımı gereği $\left| \frac{t_{k+1}}{t_k} \right| = \frac{|z|(1+|a|/k)(1+|b|/k)}{(1+|c|/k)(1+1/k)}$ yazılır. Böylece oran testi $|z| < 1$ için mutlak yakınsama ve $|z| > 1$ için ıraksama sağlar. $|z| = 1$ olduğu durumu incelemek için, $\delta \frac{1}{2} \Re(c - a - b) > 0$ olmak üzere $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!} \right|$ serisi ile yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ serisini karşılaştıralım. Eğer $|z| = 1$ ise, o zaman yeni çarpanlar ekleyerek Denklem (3.15) yardımıyla

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k^{1+\delta} (a)_k (b)_k}{(c)_k k!} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_k}{(k-1)! k^a} \cdot \frac{(b)_k}{(k-1)! k^b} \cdot \frac{(k-1)! k^c}{(c)_k} \cdot \frac{k-1! k^{1+\delta}}{k! k^{c-a-b}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{\Gamma(b)} \cdot \Gamma(c) \right| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k^{c-a-b-\delta}} \right|, \end{aligned}$$

elde edilir. $\Re(c - a - b - \delta) = 2\delta - \delta > 0$ olduğundan, bu son limit sıfırdır ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ serisinin yakınsaklığı yardımıyla $F(a, b; c; z)\Re(c - a - b) > 0$ hipergeometrik serisinin de $|z| = 1$ sınırında $\Re(c - a - b) > 0$ için yakınsak olduğu sonucuna varılır

Slater [64] yakınsaklık için bazı ilave kriterler vermektedir: $|z| = 1$ ($z \neq 1$) için, Gauss serisi $\Re(c - a - b) < -1$ olduğunda ıraksaktır ve $-1 < \Re(c - a - b) \leq 0$ olduğunda yakınsaktır (ancak mutlak yakınsak değil). Ayrıca, $\Re(c - a - b = -1)$ ise, $\Re(a + b) > \Re(ab)$ ise seri yakınsar, aksi takdirde ıraksar. Örneğin, $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \dots = \frac{1}{2}1 + F(2, 2; 3; -1)$ ıraksaktır.

Denklem (4.1) de verilen yakınsak Gauss serileri hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 4.2 $c \neq 0, -1, -2, \dots$, için Gauss hipergeometrik serilerleri, $|z| = 1$ olmak üzere

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

şeklinde Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ${}_2F_1(z)$ veya ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right)$ gibi alternatif gösterimlerle de ifade edilir. Hipergeometrik fonksiyonun gücü, birçok standart fonksiyonu temsil etme yeteneğinde yatmaktadır. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir ve daha fazlası [4, 47, 64] gibi çalışmalarda bulunabilir.

$$\log(1 - z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = -z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k z^k}{(2)_k k!} = -z F(1, 1; 2; z), |\arg(1 - z)| < \pi$$

$$(1 - z)^{-a} = F(a, b; b; z), |z| < 1$$

$$\begin{aligned} \cos z &= F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 z\right) \\ \arcsin z &= z F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right), |\arg(1 \pm zi)| < \pi \\ \arctan z &= z F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right), |\arg(1 \pm zi)| < \pi \\ \cosh z &= \lim_{a, b \rightarrow \infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right) \end{aligned}$$

Tam eliptik integraller $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ ile tanımlanır ve aracılığıyla binom açılımı ve terim terim integral alınarak $K(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$ ([4, s.132]). Ortogonal polinomların da hipergeometrik fonksiyonun terimleri şeklinde gösterimleri vardır. Bir örnek Legendre polinomu olup, $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$, nin artan kuvvet açılımında z^n katsayısı olarak tanımlanır. doğrudan açılım ile katsayının $P_n(x) = F\left(-n, 1+n; 1; \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)$ ([66, s.17]) ile verildiği gösterilebilir.

Geometrik bir seride $\sum ar^k$ ardışık herhangi iki terimin oranı sabittir, bir hipergeometrik seride $F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k$, ilk terim birliktir ve terim t_{k+1}/t_k oranı, toplama indeksi k 'nın rasyonel bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, t_{k+1}/t_k oranı k 'nın rasyonel bir fonksiyonu olan herhangi bir t_k terimine hipergeometrik terim denir. Hipergeometrik fonksiyon $F(a, b; c; z)$ için terim oranı

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}z(c)_k k!}{(c)_{k+1}(k+1)!(a)_k(b)_k} = \frac{(k+a)(k+b)z}{(k+c)(k+1)}, \quad (4.2)$$

şekilde basitleştirilebilir. Bu durumda

$$t_k = \frac{(k-1+a)(k-1+b)z}{k(k-1+c)} t_{k-1}. \quad (4.3)$$

yineleme ilişkisi sağlanır. Eğer bir terim oranı t_{k+1}/t_k , $P(k)/Q(k)$ şeklinde yazılamıyorsa, burada P ve Q k 'da polinomlar (ve z bir sabittir), o zaman verilen fonksiyon hipergeometrik değildir. Bu, verilen bir serinin ne zaman hipergeometrik terimlerden oluştuğunu belirlenmesini, belirli hipergeometrik fonksiyonun tanımlanmasını ve dolayısıyla bu fonksiyon hakkında bilinen sonuçların kullanmasını sağlar.

Örnek 4.1 Varsayalım ki; z bir sabit olmak üzere $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+2)(k-1)z}{(k+3)(k+1)}$ olsun. Eğer $t_0 = 1$ olacak şekilde normalize edersek, o zaman Denlem (4.2) den t_k , $F(2, -1; 3; z)$ Gauss serisindeki hipergeometrik terimdir.

Örnek 4.2 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k$ serisini göz önünde tutarak, burada $t_k = \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{k} - \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \right\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ olur. Bu durumda t_k oranların bir toplamıdır, ancak önceki yöntem hala geçerlidir. Terim oranı $\frac{t_{k+1}}{t_k} = -\frac{(k-n-1)(k-n/2+1/2)z}{(k-n/2-1/2)(k+1)}$ şeklinde olarak $t_0 = -\frac{1}{2^{n+1}}$ ve $t_k = 0$ için $k = -1, -2, \dots$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k = \frac{-1}{2^{n+1}} F\left(-n-1, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}; -\frac{n}{2} - \frac{1}{2}; -1\right)$ çift doğal sayıdır (alt parametrede negatif tamsayılardan kaçınmak için).

Bir önceki kısımdan, bir serinin k 'inci terimine karşılık gelen hipergeometrik fonksiyonun bir tanımına dönüştürmek için Mathematica ve Maple programlarının nasıl kullanılacağına dair ayrıntılar sunmaktadır. Genel olarak, rasyonel fonksiyonların oranlarını, binom katsayılarını, gamma fonksiyonlarını, faktöriyelleri, kuvvetleri ve benzerlerini içeren bir toplamın hipergeometrik bir terim olma olasılığı çok yüksektir.

4.3. Gauss Fonksiyonunun Bazı Temel Özellikleri

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun çok sayıda özelliği ve ilişkisi üzerine birçok klasik metin yazılmıştır ([6], [59], [64]). Mevcut tüm özelliklerin bir özetini yapmak bu çalışmanın kapsamında olmasa da, bu bölümde bu çalışmanın sonraki bölümleri için merkezi olanlar verilmektedir.

4.3.1. Analitiklik

Aşağıdaki teorem, Gauss fonksiyonunun sayılabilir sayıda kutup dışında analitik olduğunu gösterir, bu da daha sonraki ispatlarda iyi davranan fonksiyonların özelliklerini uygulamamızı sağlar. Aşağıdaki ispat Rainville'i takip etmektedir ([60, s. 56]).

Teorem 4.2 $|z| < 1$ için, $F(a, b; c; z)$ fonksiyonu, $c = 0, -1, -2, \dots$ 'deki basit kutuplar hariç tüm sonlu a, b ve c için a, b ve c değişkenlerine göre analitiktir.

İspat $\frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{\Gamma(c+k) k!}$ tam fonksiyonu göz önüne alalım. Teorem 4.1 nin ispatında olduğu gibi $\Gamma(a) = \frac{(k-1)! k^a}{(a)_k}$ özdeşliği kullanılarak $|z| < 1$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_k (b)_k z^{k/2}}{\Gamma(c+k) k!} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_k}{(k-1)! k^a} \frac{(b)_k}{(k-1)! k^b} \frac{(k-1)! k^c}{\Gamma(c+k)} \frac{z^{k/2}}{k^{1-c-a-b}} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{k/2}}{k^{1-c-a-b}} \right| = 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, birim çemberdeki herhangi bir sabit z için a, b, c 'den bağımsız bir K sabiti vardır öyle ki $\left| \frac{(a)_k (b)_k z^{k/2}}{\Gamma(c+k) k!} \right| < K |z|^{k/2}$ ve böylece karşılaştırma testi ile $\frac{1}{\Gamma(c) F(a, b; c; z)}$ serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

4.3.2. Bitişik Fonksiyon İlişkileri

İki Gauss hipergeometrik fonksiyonunun, karşılık gelen parametre çiftlerinden biri birlik kadar farklıysa bitişik olduğu söylenir ([60, s.50]). Bu bitişik bağıntıların, hipergeometrik ortogonal polinomlar için üç terimli yineleme bağıntıları kurmak da dahil olmak üzere birçok uygulaması vardır.

Tanım 4.3 $F(a, b; c; z)$ 'ye bitişik hipergeometrik fonksiyonlar şunlardır $F(a \pm 1) = F(a \pm 1, b; c; z)$, $F(b \pm 1) = F(a, b \pm 1; c; z)$, $F(c \pm 1) = F(a, b; c \pm 1; z)$.

Gauss, hipergeometrik fonksiyon $F(a, b; c; z)$ 'nin, rasyonel katsayıları aşağıdaki şekilde verilen herhangi iki bitişik fonksiyonunun doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabileceğini göstermiştir a, b, c ve z terimleri. $\binom{6}{2} = 15$ adet bu tür yineleme ilişkisi kurulabilir ve [64, s. 13-14]'te listelenmiştir, ancak sadece dördü bağımsızdır, diğerleri kombinasyonlar ve simetri yoluyla elde edilir. Bu yineleme bağıntıları Gauss fonksiyonunun sayısal tablolarını genişletmek için kullanışlıdır, çünkü z 'nin sabit bir değeri için sadece fonksiyonun değerlerini hesaplamak gerekir. a, b ve c 'de iki birim ve ardından bazı yineleme bağıntılarını uygulayarak belirli bir z -düzlemindeki parametrelerin daha geniş bir aralığı üzerindeki fonksiyon değerleridir. Bitişik yineleme ilişkileri, aşağıdaki kanıtta gösterildiği gibi kuvvet serisi açılımları ve faktöriyel özdeşlikler kullanılarak ilk prensiplerden oluşturulabilir ([7]).

Teorem 4.3 $c \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$cF(b-1) + (a-b)zF(c+1) = cF(a-1)$$

dir.

İspat Tanım gereği, teoremin sol tarafındaki z^n katsayısı

$$\begin{aligned} c \frac{(a)_n (b-1)_n}{(c)_n n!} + (a-b) \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1} (n-1)!} \\ = \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1} (n-1)!} \left[\frac{(b-1)(a+n-1)}{n} + (a-b) \right] \\ = \frac{c(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_n n!} (a-1)(b+n-1) = c \frac{(a-1)_n (b)_n}{(c)_n n!} \end{aligned}$$

şeklinde. Bu aynı zamanda sağ taraftaki z^n katsayısı olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Rainville [60] yineleme bağıntılarını kanıtlamak için alternatif bir yöntem sunmaktadır. Tarafından $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, için standart basitleştirmeleri uygulamak, ilk olarak şunu gösterir $F(a+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n t^n}{(a)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)t_n}{a}$, $F(b+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n)t_n}{b}$ ve $F(c+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ct_n}{c+n}$. Bunu takip eden $F(a-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)t_n}{a-1+n}$, $F(b-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-1)t_n}{b-1+n}$ ve $F(c-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-1+n)t_n}{c-1}$. ϑ diferansiyel operatörünü tanımlayarak

$$\vartheta = z \left(\frac{d}{dz} \right), \quad (4.4)$$

Böylece $\vartheta z^n = n z^n$ olur, o zaman şunu tespit etmek basit bir meseledir

$$(\vartheta + a)F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}. \quad (4.5)$$

Bu sonuçlara göre $F \equiv F(a, b; c; z)$, $(\vartheta + a)F = aF(a+1)$, $(\vartheta + b)F = bF(b+1)$ için ve $(\vartheta + c - 1)F = (c-1)F(c-1)$ olur. Bu bağıntılar şu şekildedir Aşağıda verilen dört bitişik ilişkinin temeli, ilk ikisi doğrudan yukarıdaki sonuçların eklenmesinden ve diğerleri basit manipülasyondan kaynaklanmaktadır.

Teorem 4.4

$$\begin{aligned} F &\equiv F(a, b; c; z), \\ (a-b)F &= aF(a+1) - bF(b+1), \\ (a-c+1)F &= aF(a+1) - (c-1)F(c-1), \\ c[a + (b-c)z]F &= ac(1-z)F(a+1) - (c-a)(c-b)zF(c+1), \\ c(1-z)F &= cF(a-1) - (c-b)zF(c+1). \end{aligned}$$

Genel olarak, $F(a, b; c; z)$ ve $F(a+m, b+n; c+l; z)$, $m, n, l \in \mathbb{Z}$ fonksiyonları ilişkili seriler olarak adlandırılır. Bitişik fonksiyonlar için yineleme bağıntılarının tekrar tekrar uygulanmasıyla, herhangi bir ilişkili seri aşağıdakilerin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. $F(a, b; c; z)$ ve katsayıları rasyonel olan bitişik fonksiyonlarından biri a, b, c, z fonksiyonları (her zaman olduğu gibi $c+l$ 'nin pozitif olmayan bir tamsayı olmadığını varsayarak). Bu tür birçok doğrusal ilişki, [64, s. 14]'te bulunan aşağıdaki yineleme ilişkisini kanıtlamak için kullanılanlar gibi basitleştirme teknikleri yoluyla kurulabilir.

Teorem 4.5 $c \neq 0, -1, -2, \dots$, için,

$$\begin{aligned} (c-a)(c-b)F(a, b; c+1; z) \\ = c(c-a-b)F(a, b; c; z) + ab(1-z)F(a+1, b+1; c+1; z). \end{aligned}$$

İspat Denklem (4.1) ve $\alpha(\alpha+1)_n = (\alpha+n)(\alpha)_n$ özdeşliği ile, teoremin sağ tarafındaki z^n katsayısı

$$\begin{aligned} c(c-a-b) \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} + ab \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!} - ab \frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!} \\ = \frac{(a)_n(b)_n}{(c+1)_n n!} \{ (c-a-b)(c+n) + (a+n)(b+n) - n(c+n) \} \\ = \frac{(a)_n(b)_n}{(c+1)_n n!} (c-a)(c-b) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu aynı zamanda teoremin sol tarafındaki z^n katsayısı olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Benzer şekilde $F(a, b+1; c; z) = F(a, b; c; z) + \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z)$ bunu kullanarak $\frac{(a)_n(b+1)_n}{(c)_nn!} - \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_nn!} = \frac{a(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{c(c+1)_{n-1}(n-1)!}$ ilişkili serileri içeren bu tür birçok faydalı bağıntı elde edilir.

4.3.3. Gauss Fonksiyonunun Diferansiyel Özellikleri

$(a)_{n+1} = a(a+1)_n$ özdeşliğini kullanarak Gauss hipergeometrik fonksiyonu için aşağıdaki kullanışlı sonuç elde edilir.

Teorem 4.6 $c \neq 0, -1, -2, \dots$, için,

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z).$$

Bu sonucun ardışık olarak uygulanmasıyla

$$\frac{d^m}{dz^m} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_m(b)_m}{c_m} F(a+m, b+m; c+m; z), m \in \mathbb{N}$$

genelleştirilmiş formülü elde edilir ([47, s.241], [64, s.16]).

4.3.4. Hipergeometrik Diferansiyel Denklem

Hipergeometrik serinin temel bir özelliği, hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olarak oynadığı roldür.

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0$$

ikinci mertebeden homojen doğrusal diferansiyel denklemini göz önüne alalım. P ve Q 'nun analitik olduğu bir z_0 noktasına diferansiyel denklemin düzgün noktası denir. z_0 düzgün değilse, tekil nokta olarak adlandırılır. Eğer z_0 tekil bir nokta ise ancak hem $(z-z_0)P(z)$ hem de $(z-z_0)^2Q(z)$ analitik ise, o zaman z_0 düzgün tekil nokta olarak adlandırılır ([4, s.639]). Rasyonel fonksiyonlar $P(z)$ ve $Q(z)$ için, Slater [64] İkinci dereceden homojen doğrusal bir diferansiyel denklemin üç düzgün tekil noktasının, bir değişken değişikliği yoluyla 0, 1 ve ∞ noktalarından oluşur ve diferansiyel denklem şu biçimi alır

$$z(1-z)u''(z) + [c - (a+b+1)z]u'(z) - abu = 0, \quad (4.6)$$

Gauss hipergeometrik denklemi olarak bilinir. Bu denklem ilk olarak 1769 yılında Euler tarafından oluşturulmuş, Gauss ve Kummer tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve

Bernhard Riemannın (1826-1866) tarafından daha soyut bir şekilde ele alınmıştır. Bölme (4.6) denklemini $z(1 - z)$ ile ifade edersek, 0 ve 1 'de düzenli tekil noktalar ve ayrıca sonsuz (z 'yi $1/z$ ile değiştirerek) ortaya çıkar. Doğrusal diferansiyel denklemler teorisine göre, hipergeometrik denklemin bir biçimindeki belirli seri çözümü $u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 'da $c \neq 0$, s uygun bir şekilde seçilir ve kuvvet serisi $|z| < 1$ için yakınsar. Doğrudan yer değiştirme kullanılabilir. Denklem (4.1) hipergeometrik serisinin Denklem (4.6) nın sağladığını göstermek için kaba kuvvet kullanabiliriz ([47, s.162]) veya Gauss serisini hipergeometrik denklemin bir çözümü olarak türetmek için seri yöntemleri kullanılabilir ([62, s.26], [65, s.26]). Ancak, bunu yükselen faktöriyel özellikleri ile birlikte kullanarak kanıtlamak daha zariftir. Diferansiyel operatör $\vartheta = z \left(\frac{d}{dz} \right)$ aşağıda gösterildiği gibi ele alınmıştır ([60, s.53], [64, s.6], [66, s.112]).

Teorem 4.7 $|z| < 1$ için $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$, $z(1 - z)u'' + [c - (a + b + 1)z]u' - abu = 0$ bir hipergeometrik denkleminin özel çözümüdür.

İspat $u = F(a, b; c; z)$ ve $\vartheta = z \left(\frac{d}{dz} \right)$ olsun. Özellik (3.5) ile şunları yazabiliriz

$$(\vartheta + c - 1)u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c - 1 + n)(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} (\vartheta + c - 1)u &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(c - 1 + n)(a)_n (b)_n z^{n-1}}{(c)_n n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_{n-1} (n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1} z^{n+1}}{(c)_n n!} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + n)(b + n)(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \\ &= z(\vartheta + a)(\vartheta + b)u. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $u = F(a, b; c; z)$ diferansiyel denklemin bir çözümüdür

$$\vartheta(\vartheta + c - 1)u = z(\vartheta + a)(\vartheta + b)u, \quad (4.7)$$

veya eşdeğer olarak $z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} + c - 1 \right) u = z \left(z \frac{d}{dz} + a \right) \left(z \frac{d}{dz} + b \right) u$ ifadesi yazılabilir. Bu denklem yine $z(1 - z)u'' + [c - (a + b + 1)z]u' - abu = 0$, biçiminde yeniden yazılabilir ve teorem kanıtlanmış olur.

Hipergeometrik denklem (4.6) ikinci dereceden olduğundan, ikinci bir doğrusal bağımsız çözüme ihtiyaç vardır. Temme [66, s.112-113]'ü takiben bir $z^{1-c}G$ şeklinde bir fonksiyon, burada G yine bir hipergeometrik fonksiyon $\vartheta = z \frac{d}{dz}$ ve $u = z^{1-c}G$ denklem (4.7)'de yerine konduğunda ve denklem (4.5) uygulandığında sol tarafta sonuç tarafı

$$\vartheta(\vartheta + c - 1)z^{1-c}G = \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + c - 1)(a)_n(b)_n z^{n+1-c}}{(c)_n n!} = z^{1-c}\vartheta(\vartheta + 1 - c)G$$

sağ taraf ise

$$z(\vartheta + a)(\vartheta + b)z^{1-c}G = z \cdot z^{1-c}(\vartheta + a - c + 1)(\vartheta + b - c + 1)G$$

Buradan şu sonuca ulaşılır

$$\vartheta(\vartheta + 1 - c)G = z(\vartheta + a - c + 1)(\vartheta + b - c + 1)G.$$

Bu sonuç, hipergeometrik diferansiyel denklemin (4.7) $G = F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$ çözümü ile yeniden parametrelendirilmesidir. Dolayısıyla, (4.6)'nın ikinci bir çözümü $z^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$ tarafından sağlanır. İki çözüm doğrusal olarak bağımsız olduğundan, hipergeometrik denklemin bir tam çözümü

$$u(z) = AF(a, b; c; z) + Bz^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$$

, Burada $|z| < 1, |\arg z| < \pi$, A ve B sınır koşulları tarafından belirlenen keyfi sabitlerdir ve c bir tamsayı değildir. $c = 1$ olduğunda denklem (4.6) için yeni bir çözüm elde etmeyiz ve genel olarak c bir tamsayı ise iki çözüm $F(a, b; c; z)$ ve $z^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$ doğrusal olarak bağımsız olmayabilir ve bir çözüm logaritmik hale gelir ([62, s.29]). Slater [64] hipergeometrik denklemin (4.6) Kummer'e ait 24 çözümünü listelemiştir. Bunlar $z^\rho(1 - z)^\sigma F(a', b'; c'; z')$ biçimindedir, burada ρ, σ, a', b', c' doğrusaldır a, b, c ve z ve z' fonksiyonları doğrusal bir kesirli dönüşüm ile bağlanır. $\frac{a+bz}{c+dz}$ biçimindedir. Gauss denklemi sadece iki doğrusal bağımsız denkleme sahip olabileceğinden çözümleri varsa, bu çözümlerden herhangi üçü sabit katsayılı doğrusal bir bağıntı ile birbirine bağlanabilir. Aşağıda, [3, s.563]'te listelendiği gibi, Kummer'in 0, 1 ve sonsuzluk tekil noktaları etrafındaki çözüm-

lerinden altısı verilmiştir.

$$u_1(x) = F(a, b; c; z)$$

$$u_2(x) = F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z)$$

$$u_3(x) = z^{-a} F(a, a + 1 - c; a - b + 1; z^{-1})$$

$$u_4(x) = z^{-b} F(b + 1 - c, b; b + 1 - a; z^{-1})$$

$$u_5(x) = z^{1-c} F(b + 1 - c, a + 1 - c; 2 - c; z)$$

$$u_6(x) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c + 1 - a - b; 1 - z)$$

Bu çözümler arasındaki dönüşüm özdeşlikleri Bölüm 4.6'da tartışılmaktadır.

4.4. Gauss Fonksiyonunun İntegral Gösterimleri

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimleri, dönüşüm ilişkilerini ve diğer hipergeometrik özdeşlikleri geliştirmek için güçlü bir araç sağlar. Bunlar genellikle sadece aşağıdaki durumlar için geçerli olan seri ifadelerden daha kullanışlı bir yaklaşım sağlayabilir $|z| < 1$. Ayrıca, hipergeometrik ve gamma fonksiyonları bu değerler arasında var olan yakın ilişkiyi de göstermektedirler. 1748 yılında Euler, Gauss hipergeometrik fonksiyonu için bazen Pochhammer integrali olarak da anılan ünlü integral gösterimini geliştirmiştir ([66, s.110]). İlginç bir gözlem, hipergeometrik fonksiyonun pay parametrelerine göre açıkça simetrik olmasına rağmen, Euler'in integral gösteriminde bunun hemen belli olmasıdır.

Teorem 4.8 (Euler İntegrali) $|z| < 1$ ve $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için,

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt. \quad (4.8)$$

İspat İlk olarak

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}$$

eşitliğini dikkate alalım. Denklem (3.9) da ifade edilen Beta-gamma bağıntısından, $\Re(c-b) > 0$ için,

$$\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} = \beta(b+n, c-b) = \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt$$

olduğunu biliyoruz. Bu sonuçları Gauss hipergeometrik fonksiyonunun tanımında yerine yazıp ardından toplama ve integral alma sırasını değiştirerek

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} z^n dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (zt)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, $\Re(c) > \Re(b) > 0$ ve $|z| < 1$ için $(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (zt)^n}{n!}$ olduğu dikkate alınacak olursa teorem ispatlanmış olur.

Euler integrali, hipergeometrik fonksiyonun $z = 1$ ve $z = \infty$ da bir dallanma noktasına sahip olduğunu gösterir. $(1-zt)^{-a}$ nin tekilliği olarak (negatif olmayan bir tamsayı) $t = \frac{1}{z}$ ifadesini ele alalım. Eğer $z, z = 1$ noktası etrafında kapalı bir yol boyunca sürekli olarak değişiyorsa, integral yolunun $\frac{1}{z}$ noktasını geçmemesini sağlamak için deforme edilmesi gerekir. Bununla birlikte, z ilk konumuna döndüğünde, integral ilk değerini almak zorunda değildir ve bu nedenle $z = 1, F(a, b; c; z)$ 'nin bir dal noktasıdır. Benzer şekilde, z 'nin sonsuzdaki bir nokta etrafındaki değişimi $\frac{1}{z}$ nin $z = 0$ noktası etrafındaki değişimine eşit olacağından $z = \infty$ da bir dallanma noktasıdır. Böylece, Euler integrali $F(a, b; c; z)$ nin $z = 0$ olduğunda 1 değerini alan tek değerli bir dalıdır. Euler integrali $[1, \infty)$ boyunca kesilen z -düzleminde analitik olduğundan, $\Re(c) > \Re(b) > 0$ olduğunda $F(a, b; c; z)$ 'nin $|\arg(1-z)| < \pi$ bölgesine analitik devamını sağlar. Dolayısıyla, verilen bu koşullar altında, $F(a, b; c; z)$ z -düzleminde $[1, \infty)$ u kesen bir dal için tek değerli analitik bir fonksiyondur ve dolayısıyla analitik devamlılık ilkesine göre, $|z| < 1$ kısıtlama altında hipergeometrik seriler için kanıtlanmış formüller aynı zamanda tüm tanım bölgesi için de uygulanır.

Slater, Denklem (4.8) de verilen Euler'in integraline uygun dönüşümler uygulayarak Gauss fonksiyonu için sekiz integral gösterimi daha vermiştir ([64, s.20]). Örneğin, $\Re(c) > \Re(b) > 0, |\arg z| < \pi, s = \frac{t}{1-t}$ dönüşümü uygulanarak

$$F(a, b; c; 1-z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} s^{b-1} (1+s)^{a-c} (1+sz)^{-a} ds$$

elde edilir. $\Re(c) > \Re(b) > 0$ olmak üzere, t yerine e^{-t} yazılacak olursa

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} e^{bt} (1-e^{-t})^{c-b-1} (1-ze^{-t})^{-a} dt$$

elde edilir. $1 + \Re(a) > \Re(c) > \Re(b), |\arg(z-1)| < \pi$ olmak üzere t yerine $\frac{1}{s}$ yazıldığında

$$F(a, b; c; 1/z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} (s-1)^{c-b-1} (s)^{a-c} (s-1/z)^{-a} ds,$$

ve $\Re(c) > \Re(b) > 0$ olmak üzere, t yerine $\sin^2 t$ yazıldığında

$$F(a, b; c; z) = \frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{2b-1} (\cos t)^{2c-2b-1}}{(1 - z \sin^2 t)^a} dt$$

sonucuna varılır.

H. Bateman (1882-1944), Euler integralinin daha geniş bir alana genişletilmesini sağlamıştır ([4, s.68, Teorem 2.2.4]).

Teorem 4.9 $\Re(c) > \Re(d) > 0, x \neq 1$ ve $|\arg(1-x)| < \pi$ olmak üzere

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{c-d-1} F(a, b; d; tz) dt \quad (4.9)$$

dır.

Erdélyli [22] integral gösteriminin

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{c-d-1} (1-tz)^{c-a-b} \\ \times F\left(\lambda-a, \lambda-b; d; tz\right) F\left(a+b-\lambda, \lambda-d; \frac{(1-t)z}{1-tz}\right) dt, \quad \Re(c) > \Re(d) > 0 \quad (4.10)$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{c-d-1} (1-tz)^{-a'} \\ \times F\left(a-a', b; d; tz\right) F\left(a', b-d; \frac{(1-t)z}{1-tz}\right) dt, \quad \Re(c) > \Re(d) > 0, \quad (4.11)$$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(v)\Gamma(\gamma+d-\lambda-v)} \int_0^1 t^{v-1} (1-t)^{\gamma+d-\lambda-v-1} \\ \times F\left(\frac{d-\lambda}{\gamma+d-\lambda-v}, \frac{y-\lambda}{\gamma+d-\lambda-v}; 1-t\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, d \\ \lambda, v \end{matrix}; tz\right) dt, \quad \Re(\lambda, v, \gamma+d-\lambda-v) > 0, \quad (4.12)$$

şeklinde üç farklı gösterimini vermiştir.

Not 4.1 • Denklem (4.9) da $d = b$ alındığında, Bateman'ın formülü Denklem (4.8) da ifade edilen Euler'in integraline dönüşür.

- Denklem (4.10) ve Denklem (4.11) da verilen birinci ve ikinci Erdélyli integrallerinde, sırasıyla, $\lambda = a + b, a' = 0$ ve $\lambda = d$ dönüşümleri kullanılarak Denklem (4.9) da ifade edilen Bateman'ın formülü elde edilir.
- Erdélyli Denklem (4.10) - (4.12) integral uzantılarını türetmek için kısmi integral kullanılmış, ancak daha yakın zamanda Joshi ve Vyas [39] Bölüm 5.1.1'de tartıştığımız gibi bu sonuçları kanıtlamak ve genelleştirmek için seri manipülasyonları ve klasik toplama teoremlerini kullanmıştır.

Slater [64], Euler integrali için yakınsama koşullarının daha kompleks çevrelere gevşetilebileceğini göstermiştir:

Teorem 4.10 $c - b \neq 1, 2, 3, \dots$, $|\arg(1 - z)| < \pi$ ve $\Re(b) > 0$ olmak üzere

$$F(a, b; c; z) = \frac{i\Gamma(c)e^{i\pi(b-c)}}{2\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin\{\pi(c-b)\}} \int_0^{(1+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

dır.

İspat Orijinden başlayan, $+1$ noktasını saat yönünün tersi yönde bir kez çevreleyip orijine geri dönen bir çevre üzerinden

$$I = \int_0^{(1+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

integralini ele alalım. Bu çevreyi $\arg t = 0$ olmak üzere reel ekseninde $(0, 1 - \varepsilon)$ aralığına, $+1$ merkezli ve ε yarıçaplı C çemberine ve tekrar reel ekseninde $\arg t = 2\pi$ olmak üzere $(1 - \varepsilon, 0)$ aralığına deforme edelim. O halde

$$I = [1 - e^{2\pi i(c-b)}] \int_0^{1-\varepsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt + \int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduğundan

$$\int_{1-\varepsilon}^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \rightarrow 0$$

ve

$$\int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \rightarrow 0$$

sonuç olarak

$$I = [1 - e^{2\pi i(c-b)}] \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

elde edilir. İstenen sonuç, bu ifadenin Denklem (4.8) de verilen Euler'in integralinde yerine konulmasıyla ve $\sin A = \frac{e^{Ai} - e^{-Ai}}{2i}$ bağıntısı kullanılarak elde edilir.

1904-1910 döneminde yayınlanan bir dizi makalede Barnes, Gauss hipergeometrik fonksiyonunu ele almak için kontur integraline ve kalıntılar teorisine dayalı alternatif yöntemler geliştirmiştir. Hipergeometrik serilerin Euler tipi integral gösterimleri sayısal çalışmalarda faydalı olsa da, Barnes (veya Mellin-Barnes) tipi kontur integralleri hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki dönüşüm ilişkilerinin türetilmesinde ve asimptotiklerinin incelenmesinde son derece faydalıdır.

Bir $F(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü $\int_0^\infty x^{s-1} F(x) dx$ integrali ile tanımlanır. Geniş bir fonksiyon sınıfı için, eğer $f(x) = \int_0^\infty x^{s-1} F(x) dx$ ise, o zaman tersi $F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-s} f(s) ds$ verilir ([4, s. 85]). Kompleks bir integral geliştirmek için hipergeometrik fonksiyon için Barnes, $x = 1$ 'deki dallanma noktasından kaçınmak için $-x$ 'de integral olarak Mellin dönüşümünü ve tersini dikkate almıştır. Bu yaklaşımı göstermek için Andrewset *al.* [4] Euler integralini Denklem (4.8) kullanarak

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^{s-1} F(a, b; c; -x) dx \\ &= \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1+tx)^{-a} dt dx \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+tx)^a} dx dt \end{aligned}$$

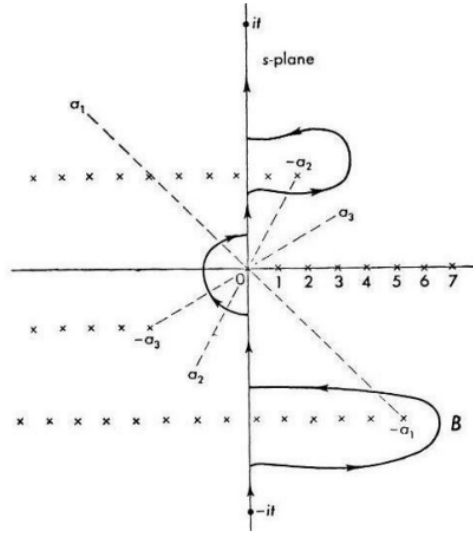
integralini vermişlerdir. Denklem (3.28) ve $\beta(s, a-s) = \int_0^\infty x^{s-1} (1+x)^{-a} dx$ bağıntıları yardımıyla $xt \rightarrow x$ dönüşümü kullanılarak, yukarıda verilen sonuç

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} \int_0^1 t^{b-s-1} (1-t)^{c-b-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Böylece, $\min(\Re(a), \Re(b)) > k > 0$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} (-x)^{-s} ds$$

elde edilir.



Şekil 4.1. Barnes integrasyon çevresi

Bu Barnes'ın çevre integral gösterimidir ([4, s.86]) ve hipergeometrik fonksiyonlar teorisinin alternatif bir gelişimi için temel oluşturmaktadır. Genel olarak, Barnes tipi bir integral, integralde gamma fonksiyonları içerir. Bu tür bir integral, Barnes integrali içindeki

kutup dizilerindeki kalıntıların toplamı kullanılarak değerlendirilir. Barnes entegrasyon konturu, $-i\infty$ 'dan başlar ve s -düzleminde $+i\infty$ 'a kadar uzanır, $m = 1, 2, \dots, p$ için, $\Gamma(a_m + s)$ kutupları yolun solunda ve $\Gamma(-s)$ kutupları yolun sağında yer alır. Bu durum Şekil 4.1'de gösterilmiştir ([60, s.95]). Böyle bir yolun varlığı, hiçbir a_m sıfır veya negatif tamsayı olmasını gerektirir ve $|\arg z| < \pi$ olduğu varsayılır.

1910 yılında Barnes, Gauss teoreminin (Barnes'ın ilk lemması olarak da bilinir) aşağıda belirtilen integral analogunu kanıtlamıştır. Tam bir kanıt [4, s.89], Teorem 3.7'de standart kontur integrasyon teknikleri kullanılarak bulunabilir.

Teorem 4.11 (Barnes'ın Birinci Lemması) *Eğer integrasyon yolu $\Gamma(a + s)\Gamma(b + s)$ kutuplarını $\Gamma(c - s)\Gamma(d - s)$ kutuplarından ayıracak şekilde kavisli ise, $\Re(a + b + c + d) < 1$ ve $a + c, a + d, b + c, b + d$ 'den hiçbirisi sıfıra veya negatif bir tam sayıya eşit olmamak üzere*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a + s)\Gamma(b + s)\Gamma(c - s)\Gamma(d - s)ds \\ &= \frac{\Gamma(a + c)\Gamma(a + d)\Gamma(b + c)\Gamma(b + d)}{\Gamma(a + b + c + d)} \end{aligned}$$

dir.

Andrews *et al.* [4] bu sonucu

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)} F(a, b; a + b - c + 1; 1 - z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c - a - b + 1; 1 - z) \end{aligned}$$

ifadesini kanıtlamak için kullanmışlardır.

4.5. Gauss Fonksiyonunun $z = \pm 1$ için Değerlendirilmesi

Yıllar içinde, z 'nin belirli değerleri için hipergeometrik fonksiyonu hesaplamak için birçok formül geliştirilmiştir. Berndt [10], Ramanujan'ın çalışmasının özetinde bu tür birçok hesaplama sunmaktadır. Wilfred N. Bailey (1893-1961) hipergeometrik özdeşlikler için standart referans çalışması haline gelen [6]'de bu tür toplama formüllerinin kapsamlı bir listesini sunmuş ve daha sonra bu listeyi genişletmek için Slater [64] ile işbirliği yapmıştır. Bu formüllerin çoğu birim argüman içerir ve hipergeometrik serileri gamma fonksiyonlarının oranları olarak ifade eder. Bu bölümde, bu özdeşliklerin en yaygın ve kullanışlı olanlarından bazıları verilmiştir.

1812’de Gauss, $z = 1$ olduğunda hipergeometrik serileri değerlendiren merkezi bir kimlik oluşturdu. Aşağıda Rainville [60, s. 49], Th. 18 tarafından sağlanan ispat takip edilir. Gauss’un toplama teoremi için alternatif kanıtlar mevcuttur. Örneğin, Slater [64, s.27], $z \rightarrow 1^-$ yineleme bağıntısında $(c-a)(c-b)F(a, b; c+1; z) = c(c-a-b)F(a, b; c; z) + ab(1-z)F(a+1, b+1; c+1; z)$. Andrews *et al.* [4, s.66], kanıtlarını $F(a, b; c; 1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} \times F(a, b; c+1; 1)$.

Teorem 4.12 (Gauss’un Toplam Teoremi) $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $\Re(c-a-b) > 0$ ve $\Re(c) > \Re(b) > 0$ olmak üzere

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (4.13)$$

dır.

İspat Denklem (4.8) deki Euler integralinde $z \rightarrow 1^-$ olsun ve gamma ve beta fonksiyonları arasındaki Denklem (3.29) bağıntısını kullanarak, $\Re(c) > \Re(b) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F(a, b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Rainville [60, s.49], Gauss’un toplama teoremini kullanarak aşağıdaki önemli sonucu elde etmiştir:

Teorem 4.13 $n \in \mathbb{N}$ ve $\Re(b) > 0$ için,

$${}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}; b + \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{(b)_n 2^n}{(2b)_n}. \quad (4.14)$$

İspat Gauss’un denklem (4.13) toplamı denklem (4.14)’ün sol tarafına uygulandığında

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}; b + \frac{1}{2}; 1\right) &= \frac{\Gamma(b + \frac{1}{2})\Gamma(b+n)}{\Gamma(b + \frac{n}{2})\Gamma(b + \frac{1}{2} + \frac{n}{2})} \\ &= \frac{(b)_n \Gamma(b)\Gamma(b + \frac{1}{2})}{\Gamma(b + \frac{n}{2})\Gamma(b + \frac{1}{2} + \frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

Şimdi Denklem (3.17) de verilen

$$\Gamma(b)\Gamma(b + \frac{1}{2}) = 2^{1-2b} \sqrt{\pi} \Gamma(2b)$$

Legendre’nin iki kat formülünden ve

$$\Gamma(b + \frac{n}{2})\Gamma(b + \frac{1}{2} + \frac{n}{2}) = 2^{1-2b-n} \sqrt{\pi} \Gamma(2b + n)$$

bağıntısını kullanarak

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \\ b + \frac{1}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{(b)_n 2^n \Gamma(2b)}{\Gamma(2b+n)} = \frac{(b)_n 2^n}{2b+n},$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$z = 1$ argümanı için, Gauss hipergeometrik fonksiyonundaki bir pay parametresi negatif bir tamsayı ise, ortaya çıkan sonlanan seri aşağıda verilen kullanışlı Chu-Vandermonde özdeşliği ile değerlendirilebilir. Bu sonuç doğrudan Gauss'un toplama formülü denklem (4.13) ve $\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a)_n$ özdeşliği.

Teorem 4.14 (Chu-Vandermonde Özdeşliği) $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(-n, b; c; 1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}. \quad (4.15)$$

Eğer c sayısı $m < n$ olacak şekilde negatif bir tamsayı $(-m)$ ise, o zaman $(c)_n = 0$ olduğundan bu sonuç açıkça geçerli olmayacaktır. Örneğin, $F(-3, -4; -2; 1) = \frac{(-2+4)_3}{(-2)_3} = 24/(-2)(-1)(0)$, elde edilir ki bu ifade açıkça anlaşılabileceği üzere tanımlı değildir. Chu-Vandermonde özdeşliği, [42, s.33] çalışmasında bulunan aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, binom katsayılarını içeren özdeşlikler kurmak için güçlü bir araçtır.

Örnek 4.3

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

eşitliğini ispatlamak için $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k-n)^2}{(k+1)^2}$ olacak şekilde $t_k = \binom{n}{k}^2$ tanımlayalım ve dolayısıyla Denklem (4.2) yardımıyla $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = F(-n, -n; 1; 1)$ sonucuna ulaşırız. Bu, Denklem (4.15)'in $b = -n, c = 1$ için özel bir durumudur ve buradan

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(1+n)_n}{(1)_n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$$

elde edilir.

Kummer'in aşağıdaki oldukça önemli teoremi $z = -1$ de Gauss fonksiyonu için bir değerlendirme sağlar ([6, s. 9]).

Teorem 4.15 (Kummer Teoremi) $\Re(b) < 1$ ve $b - a \neq -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$F(a, b; 1+b-a; -1) = \frac{\Gamma(1+b-a)\Gamma(1+b/2)}{\Gamma(1+b)\Gamma(1+b/2-a)} \quad (4.16)$$

dır.

İspat Denklem (4.8) de ifade edilen Euler integralinde, $z = -1$ ve $c = b - a + 1$ alınacak olursa

$$F(a, b; 1 + b - a; -1) = \frac{\Gamma(1 + b - a)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \int_0^1 t^{b-1} (1 - t^2)^{-a} dt$$

elde edilir. $u = t^2$ dönüşümü ile integralin değeri $\frac{1}{2}\beta\left(\frac{b}{2}, 1 - a\right)$ olur. Böylece

$$F(a, b; 1 + b - a; -1) = \frac{\Gamma(1 + b - a)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \frac{1/2\Gamma(b/2)\Gamma(1 - a)}{\Gamma(1 - a + b/2)}$$

elde edilir. $\frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(b)} = \frac{2\Gamma(1+b/2)}{\Gamma(b/2)}$ olduğundan, istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Aşağıda Kummer teoreminin [6, s.10]'da bulunan eşdeğer bir formu yer almaktadır

$$F(a, b; 1 + b - a; -1) = \frac{\Gamma(1 + b - a)\Gamma(1/2)}{2^a\Gamma(1/2 + b/2)\Gamma(1 + b/2 - a)} \quad (4.17)$$

Kummer teoreminin gücünün bir örneği olarak, aşağıdaki Ramunujan toplama özdeşlikleri Denklem (4.17)'den türetilir. $a = b = \frac{1}{2}$ ve $a = 1, b = 1 - x$ yazılarak daha sonra bazı sadeleştirmeler yapılarak

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma^2(3/4)}$$

elde edilir ve $\Re(x) > 0$ için,

$$1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} + \cdots + (-1)^n \frac{(1-x)_n}{(x+1)_n} = \frac{2^{2x-1}\Gamma^2(x+1)}{\Gamma(2x+1)}$$

sonucuna varılır. Petkovšek ve diğerleri [58, s.43], b negatif bir tamsayı için Kummer teoreminin aşağıdaki şeklini vermektedir. Sonuç,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

yansıma formülü kullanılarak ve b negatif bir tamsayıya yaklaşıırken limit alınarak Denklem (4.16)'dan elde edilir.

Teorem 4.16 b negatif bir tamsayı olmak üzere

$$F(a, b; 1 + b - a; -1) = 2 \cos \frac{\pi b}{2} \frac{\Gamma(|b|)\Gamma(b - a + 1)}{\Gamma(\frac{|b|}{2})\Gamma(1 + b/2 - a)} \quad (4.18)$$

dır.

Petkovšek *et al.*, Kummer teoreminin yukarıdaki formunun verilen bir serinin değerini hesaplamak için nasıl kullanılacağına dair aşağıdaki öğretici örneği de sunmaktadır.

Örnek 4.4 Negatif olmayan bir n tamsayısı için $f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2n}{k}^2$ serisini ele alalım.

Bu durumda

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(-1)^{k+1} \binom{2n}{k+1}^2}{(-1)^k \binom{2n}{k}^2} = \frac{(k-2n)^2(-1)}{(k+1)^2}$$

yazılır. Böylece seri $f(n) = F(-2n, -2n; 1; -1)$ olur ve $(-2n)$ negatif tamsayısı için Denklem (4.18) de verilen Kummer'in özdeşliği uygulanarak

$$f(n) = \frac{2(-1)^n \Gamma(2n) \Gamma(1)}{\Gamma(n) \Gamma(1+n)} = \frac{(2n-1)! 2(-1)^n}{(n-1)! n!} = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

elde edilir.

Kummer teoremi ile ilgili olarak Kummer özdeşliği aşağıda kanıtlanmıştır ([4, s.144]):

Teorem 4.17 $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F(-2n, b; 1-2n-b; -1) = \frac{(b)_n (2n)!}{n! (b)_{2n}} \quad (4.19)$$

dır.

İspat $(1-x)^{-b}(1+x)^{-b} = (1-x^2)^{-b}$ özdeşliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_n x^n}{n!} \frac{(b)_k (-x)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n x^{2n}}{n!}$$

sonucuna varılır. Denklem (2.1) özelliği ile aş

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(b)_{n-k} x^n}{(n-k)!} \frac{(b)_k (-1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n x^{2n}}{n!}$$

yazılır. Şimdi her iki taraftaki x^{2n} katsayılarını eşitlemek suretiyle

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(b)_{2n-k}}{(2n-k)!} \frac{(b)_k (-1)^k}{k!} = \frac{(b)_n}{n!}$$

elde edilir. $(\alpha)_{n-k} = \frac{(-1)^k (\alpha)_n}{(1-\alpha-n)_k}$ ve $(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$ özdeşliklerini kullanarak, bu sonuç

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)! (b)_{2n-k}}{(b)_{2n} (2n-k)!} \frac{(b)_k (-1)^k}{k!} = \frac{(b)_n (2n)!}{n! (b)_{2n}} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-2n)! (b)_{2n}}{(b)_{2n} (1-b-2n)_k} \frac{(b)_k (-1)^k}{k!} = \frac{(b)_n (2n)!}{n! (b)_{2n}}, \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve böylece teoremi ispatlanmış olur.

Whipple [73], formülü $z = -1$ argümanlı hipergeometrik seri için aşağıdaki değerlendirmeyi sağlamıştır:

Teorem 4.18 $c \neq 0, -1, -2, \dots$ için,

$$F(a, b; c; -1) = \frac{\Gamma(c)}{2\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(c-a+b-1)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{a+k}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a-k}{2}\right)} \quad (4.20)$$

dir.

İspat Denklem (4.8) de sunulan Euler integralinde $z = -1$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} F(b, a; c; -1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t^2)^{c-a-1} (1+t)^{-c+a-b+1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t^2)^{c-a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c-a+b-1)_k t^k}{k!} dt \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi integral ve toplama sırasını değiştirerek ve $t = \sqrt{s}$ dönüşümü kullanarak, beta integralinin varlığından

$$\begin{aligned} F(b, a; c; -1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c-a+b-1)_k}{k!} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{1}{2} s^{(a+k)/2-1} (1-s)^{c-a-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(c)}{2\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c-a+b-1)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{k}{2}\right) \Gamma(c-a)}{\Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{k}{2} + (c-a)\right)} \end{aligned}$$

elde edilir ve istenen sonuç ispatlanmış olur.

4.6. Dönüşüm Özdeşlikleri

Artık Gauss hipergeometrik fonksiyonu için bu alandaki daha yeni gelişmelerin temelini oluşturan bazı klasik dönüşüm özdeşlikleri ifade edilmekte ve ispatları verilmektedir. Bir Gauss hipergeometrik fonksiyonunu bir veya daha fazla başka fonksiyon cinsinden ifade eden bu özdeşliklerden çok sayıda vardır ve [3], [59] ve [64] gibi çalışmalarda kapsamlı olarak incelenmiştir. Bu bölümde en iyi bilinen lineer ve kuadratik dönüşümler sunulacaktır.

4.6.1. Doğrusal Dönüşümler

Denklem (4.6) da verilen hipergeometrik diferansiyel denkleminin 24 Kummer çözümü, bu denklemin bağımsız değişkenin $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ doğrusal kesirli dönüşümleri altında kendi-

sine dönüştürülmesinden elde edilmiştir ([64, s.11-12]). Bu sınıf, $0, 1, \infty$ kümesini kendisine eşleyen $z' = z, z' = \frac{z}{z-1}, z' = 1 - z, z' = \frac{1}{1-z}, z' = \frac{1}{z}$ ve $z' = \frac{z-1}{z}$ dönüşümlerinden oluşur. Bağımsız değişkeni değiştirerek hipergeometrik diferansiyel denklemde bu formlardan herhangi birine dönüştürüldüğünde, denklem (4.6) farklı parametrelerle aynı türden bir denkleme ve dolayısıyla farklı bir hipergeometrik seri çözümüne dönüşür. Bu şekilde, hipergeometrik denklemin on iki çözümünü (her bağımsız değişken için iki tane, birim çember içinde yakınsak) ve simetri yoluyla on iki çözüm daha üretmek mümkündür. Dolayısıyla Kummer'in 24 seri çözümünden dördü aynı argümana sahiptir, örneğin z , diğeri dört argüman $1/z$ ve bu şekilde devam eder. Doğrusal dönüşümler, z ve z' değişkenlerini içeren hipergeometrik fonksiyonları birbirine bağlar, böylece hipergeometrik fonksiyonlar teorisinin merkezinde yer alan ilişkiler yaratılır. Özellikle, $F(a, b; c; z)$ 'nin kompleks düzlemin herhangi bir parçasına analitik olarak devam etmesini kolaylaştırırlar $[1, \infty]$. Pfaff, z' 'den $z/(z-1)$ 'e aşağıdaki dönüşümü sağlamıştır ([47, s. 247]).

Teorem 4.19 (Pfaff Dönüşümü) $|\arg(1-z)| < \pi, |z| < 1$ ve $|\frac{z}{1-z}| < 1$ için

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (4.21)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (2.9) ve Denklem (2.18) da sunulan özdeşlikler ile teoremin sağ tarafı

$$\begin{aligned} (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (c-b)_r (-1)^r z^r (1-z)^{-1(a+r)}}{(c)_r r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (c-b)_r (-1)^r z^{r+s}}{(c)_r r! s!}. \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $0 \leq r \leq n$ için $(n-r)! = \frac{(-1)^r n!}{(-n)_r}$ olduğundan, bu serideki z^n katsayısı

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_n (c-b)_r (-1)^r}{(c)_r r! (n-r)!} = \frac{(a)_n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r (c-b)_r}{(c)_r r!} = \frac{(a)_n}{n!} F(-n, c-b; c; 1)$$

şeklindedir. Denklem (4.13) verilen Gauss toplam formülü ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(b)} \frac{(a)_n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}$$

yazılır ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Denklem (4.21) de ifade edilen Pfaff'ın dönüşümü, Denklem (4.8) de verilen Euler integralinde $t = 1 - s$ alınarak da zarif bir şekilde oluşturulabilir. Pfaff'ın sonucu bazı sadeleştirmelerin ardından

$$\int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} [(1-z) + sz]^{-a} ds = (1-z)^{-a} \int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} \left(1 - \frac{sz}{z-1}\right) ds$$

olarak yazılır.

$\Re(z) < \frac{1}{2}$ kısıtlaması, $|\frac{z}{1-z}| < 1$ olduğunda karşlanır ve bu nedenle Pfaff'ın dönüşümü Gauss hipergeometrik serisinin birim çemberden $\Re(z) < \frac{1}{2}$ dikey doğrusunun soluna doğru bir devamını sağlar. Bu devamlılık sadece $|z| < 1$ ise, $a, b, c-a$ veya $c-b$ pozitif olmayan bir tamsayı olmadığı sürece geçerlidir ([7, s.64]). Pfaff dönüşümünün çeşitli formları mevcuttur. Aşağıda verilen iki tanesi sırasıyla [6, s.10] ve [47, s.247] çalışmalarında bulunabilir.

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (4.22)$$

$$F(a, c-b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, b; c; -\frac{z}{1-z}\right) \quad (4.23)$$

Denklem (4.21) ve verilen Pfaff dönüşümü çeşitli ilişkileri kanıtlamak için zarif bir yaklaşım sağlar. Örneğin,

$$\arctan z = z F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{1+z^2}\right) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

ifadesinin gösteriminde kullanılır.

Pfaff'ın dönüşümü Kummer Teoremi (4.16) ile birlikte kullanılabilir. Gauss hipergeometrik fonksiyonlarını $z = \frac{1}{2}$ argümanı ile değerlendirir. Bu da Gauss'un ikinci toplama teoremi ve Bailey'nin toplama teoremi aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır. $z = \frac{1}{2}$ 'i Pfaff dönüşümüne denklem (4.21) yazılarak, $F(a, b; c; \frac{1}{2}) = 2^a F(a, c-b; c; -1)$ bulunur. Şimdi Kummer teoremi (4.16) bu sonucun sağ tarafına iki şekilde uygulanır: ya özdeşliği $2^a F(c-b, a; c; -1)$ 'e uygulayarak $c = a - (c-b) + 1$ (yani $c = (a+b+1)/2$) bulunur, ya da $F(a, c-b; c; -1)$ 'e uygulayarak $c = c-b-a+1$ (yani $b = 1-a$). Her iki durum da dikkate alınır.

Durum 1 $c = \frac{a+b+1}{2}$ olduğunda (4.16) da verilen Kummer denkleminde

$$2^a F(c-b, a; c; -1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1+a/2)2^a}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a/2-c+b)}$$

elde edilir. Denklem (3.17) kullanılarak $\frac{\Gamma(1+a/2)2^a}{\Gamma(1+a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+a/2)}$ yazılabileceğinden

$$F(a, b; c; 1/2) = 2^a F(c-b, a; c; -1) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(c)}{\Gamma(1/2+a/2)\Gamma(1+a/2-c+b)},$$

ve dolayısıyla

$$F(a, b, (1+a+b)/2; 1/2) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+a+b}{2})}{\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1+b}{2})} \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu sonuç genellikle Gauss'un ikinci toplama teoremi olarak adlandırılır ([6, s.11]).

Durum 2 $b = 1 - a$ olduğunda, Denklem (4.16) dan

$${}_2F(a, c - b; c; -1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1 + \frac{c-b}{2})2^{c-b}2^{1-c}}{\Gamma(1 + [c - b])\Gamma(1 + \frac{c-b}{2} - a)}$$

elde edilir. Legendre formülü bir kez daha uygulandığında

$${}_2F(a, c - b; c; -1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\frac{1}{2})2^{1-c}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{c-b}{2})\Gamma(1 + \frac{c-b}{2} - a)}$$

elde edilir. Legendre formülü bir kere daha uygulanır ve $b = 1 - a$ denirse

$$F(a, 1 - a; c; 1/2) = \frac{\Gamma(\frac{c}{2})\Gamma(\frac{1+c}{2})}{\Gamma(\frac{c+a}{2})\Gamma(\frac{1+c-a}{2})} \quad (4.25)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç bazen Bailey'in toplama teoremi olarak adlandırılır ve doğrudan Euler'in integralinden de türetilebilir ([64, s.32]). Bu ifade [6, s.11] çalışmasında verilmiştir, ancak daha önce Kummer'in 'Über die hypergeometrische Reihe' adlı makalesinde de bulunabilir. Bateman [7, s.68], Denklem (4.25) deki Bailey'in toplama teoremini ve Denklem (3.17) de verilen Legendre'nin iki kat formülünü kullanarak

$$F\left(2a, 1 - 2a; 2c; \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2c} \frac{\Gamma(2c)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+c)\Gamma(c-a+\frac{1}{2})}. \quad (4.26)$$

eşitliğini elde etmiştir. Pfaff dönüşümünü kendisine uygulayarak, [47, s.248], de sunulan Euler'in lineer dönüşümü elde edilir:

Teorem 4.20 (Euler Dönüşümü) $|z| < 1$ ve $|\arg(1 - z)| < \pi$ için

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z) \quad (4.27)$$

İspat Denklem (4.21) de verilen Pfaff dönüşümü ve Gauss fonksiyonunun simetrisinden

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= (1 - z)^{-a} F\left(a, c - b; c; -\frac{z}{1 - z}\right) \\ &= (1 - z)^{-a} F\left(c - b, a; c; -\frac{z}{1 - z}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $w = \frac{-z}{1-z}$ kullanılarak $1 - w = \frac{1}{1-z}$ ve $-\frac{w}{1-w} = z$ yazılır ve Pfaff dönüşümü yukarıdaki sonucun sağ tarafına tekrar uygulanarak

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= (1 - z)^{-a} (1 - w)^{b-c} F\left(c - b, c - a; c; -\frac{w}{1 - w}\right) \\ &= (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z), \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıda iki lineer dönüşüm daha verilmiştir. Teorem 4.21 tümevarım yoluyla kanıtlanabilir:

Teorem 4.21 $n \in \mathbb{N}$ ve c için $b + 1 - c - n \neq 0, -1, \dots, -n + 1$,

$$F(-n, b; c; 1 - z) = \frac{(c - b)_n}{(c)_n} F(-n, b; -n + b + 1 - c; z). \quad (4.28)$$

Teorem 4.22 $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(-n, b; c; z) = \frac{(b)_n}{(c)_n} (-z)^n F(-n, 1 - c - n; 1 - b - n; 1/z). \quad (4.29)$$

İspat Denklem (3.14) de verilen $(1 - \alpha - n)_k = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + n - k)}$ özdeşliği kullanarak teoremin sağ tarafındaki sonlu hipergeometrik serisinden

$$\begin{aligned} & \frac{(b)_n}{(c)_n} (-z)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (1 - c - n)_k z^{-k}}{(1 - b - n)_k k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b)_n (-1)^n \Gamma(c + n) \Gamma(b + n - k) z^{n-k}}{(c)_n k! \Gamma(c + n - k) \Gamma(b + n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-1)^n}{k!} \frac{\Gamma(c) \Gamma(b + n - k) z^{n-k}}{\Gamma(c + n - k) \Gamma(b)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-1)^n}{k!} \frac{(b)_{n-k} z^{n-k}}{(c)_{n-k}}, \end{aligned}$$

yazılır ve istenen sonuç $n - k$ yerine j konularak ve Denklem (2.6) da verilen özdeşlik uygulanarak elde edilir.

4.6.2. Kuadratik dönüşümler

Eğer $\pm(1 - c)$, $\pm(a - b)$, $\pm(a + b - c)$ değerlerinden herhangi ikisi eşitse veya bunlardan biri $1/2$ ise, $F(a, b; c; z)$ hipergeometrik fonksiyonun argümanların ikinci dereceden bir denklemle ilişkilendirildiği ikinci dereceden bir dönüşümü vardır. Bu tür ilk dönüşümler Kummer tarafından Crelle's Journal'da (Journal für die reine und angewandte Mathematik), Bd 15 (1836) ve kapsamlı listeler [7] ve [66]'te bulunabilir. Bu dönüşüm özdeşliklerini türetmek için çeşitli teknikler mevcuttur. Bir yaklaşım, aşağıdaki kanıtta olduğu gibi Gauss fonksiyonunun tanımını ve yükselen faktöriyel özelliklerini kullanmaktır ([60, s.65], Th. 24).

Teorem 4.23 $2b$ ne sıfır ne de negatif bir tamsayı, $|y| < \frac{1}{2}$ ve $\left| \frac{y}{1-y} \right| < 1$ olsun. O halde

$$F(a, b; 2b; 2z) = (1 - z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; b + \frac{1}{2}; \frac{z^2}{(1-z)^2}\right) \quad (4.30)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Eşitliğin sağ tarafına (EST) Gauss serisinin tanımı uygulanır ve ardından $(a)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k$ denklemini kullanılırsa

$$EST = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k} z^{2k}}{2^{2k} \left(b + \frac{1}{2}\right)_k k! (1-z)^{a+2k}}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $(1-z)^{-(a+2k)}$ için seri açılımını, ardından Denklem (2.9) da ifade edilen $(a)_{2k} (a+2k)_n = (a)_{n+2k}$ özdeşliğini ve tekrarlı seriler için Denklem (2.2) özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} EST &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k} z^{2k+n} (a+2k)_n}{2^{2k} \left(b + \frac{1}{2}\right)_k k! n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+2k} z^{2k+n}}{2^{2k} \left(b + \frac{1}{2}\right)_k k! n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(a)_n z^n}{2^{2k} \left(b + \frac{1}{2}\right)_k k! (n-2k)!} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Denklem (2.10) özdeşliğini uygulayarak $(-n)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{-n}{2}\right)_k \left(\frac{1-n}{2}\right)_k$ şeklinde ve $(n-2k)! = n! / (-n)_{2k}$ özdeşliği ve Denklem (4.14) kullanılarak, bu sonuç

$$EST = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\left(\frac{-n}{2}\right)_k \left(\frac{1-n}{2}\right)_k (a)_n z^n}{\left(b + \frac{1}{2}\right)_k n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_n (2z)^n}{(2b)_n n!}$$

şeklinde daha sade şekilde yazılır ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki ikinci dereceden dönüşüm Kummer [6] tarafından verilmiştir ve başka dönüşümlerin türetilmesi için güçlü bir araç sağlamaktadır:

Teorem 4.24 (Kummer'in kuadratik dönüşümü) $\left| \frac{4z}{(1-z)^2} \right| < 1$ ($|z| < 1$) ve $1 + a - b$ sıfır veya negatif bir tamsayı olmasın. O halde

$$F(a, b; 1 + a - b; z) = (1-z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} - b; 1 + a - b; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right) \quad (4.31)$$

eşitliği geçerlidir.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlardan faydalanmak için bu teoremin ispatı bir sonraki bölümde ispatlanmıştır. Kummer [23] çalışmasında verilen kuadratik dönüşümünün alternatif bir formu

$$F\left(a, a + \frac{1}{2}; b + \frac{1}{2}; z^2\right) = (1+z)^{-2a} F\left(2a, b; 2b; \frac{2z}{1+z}\right), |z| < 1. \quad (4.32)$$

şeklindedir. Denklem (4.32)'de sırasıyla $b \rightarrow 0$, $b = 1$ ve $b = 2$ olarak alındığında üç sonuç daha elde edilir:

$$\begin{aligned} F\left(a, a + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) &= \frac{1}{2}[(1+z)^{-2a} + (1-z)^{-2a}], \\ F\left(a, a + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) &= \frac{1}{2(1-2a)z}[(1+z)^{1-2a} - (1-z)^{1-2a}], \\ F\left(a, a + \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; z^2\right) &= \frac{3}{2(1-2a)(2-2a)(3-2a)z^3} \\ &\quad \times [((2-2a)z-1)(1+z)^{2-2a} + ((2-2a)z+1)(1-z)^{2-2a}]. \end{aligned}$$

Denklem (4.16) deki Kummer'in teoremi kuadratik dönüşümünden de elde edilebilir. Denklem (4.31) dönüşümünde $z \rightarrow -1$ alınır ve sonra Denklem (4.13) deki Gauss'un toplama formülü uygulandığında

$$\begin{aligned} F(a, b; 1+a-b; -1) &= (2)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} - b; 1+a-b; 1\right) \\ &= (2)^{-a} \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2})}. \end{aligned}$$

elde edilir. Legendre'nin çoğaltma formülünün uygulanması $2^{-a} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2})} = \frac{\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+a)}$ bu sonuca göre Kummer teoremi $F(a, b; 1+a-b; -1) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a/2)}{\Gamma(1+a/2-b)\Gamma(1+a)}$. Bu, hipergeometrik bir fonksiyonun $z = -1$ 'de, argümanı $z = 1$ 'e değiştirmek için önce ikinci dereceden bir dönüşüm kullanarak ve ardından sonucu değerlendirmek için Gauss'un toplama teoremini kullanarak değerlendirilebileceği birçok durumdan biridir. [4, s.127] çalışmasında verilen Euler'in Gauss hipergeometrik fonksiyonu için integral gösterimi aşağıdaki gibi daha ileri ikinci dereceden dönüşümler oluşturmak için bir temel sağlar:

Teorem 4.25 Serilerin yakınsadığı tüm z 'ler için,

$$F(a, b; 2a; z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-b} F\left(\frac{b}{2}, \frac{1+b}{2}; a + \frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right) \quad (4.33)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (4.8) deki Euler integrali ile teoremin sol tarafındaki Gauss fonksiyonu

$$\frac{\Gamma(2a)}{4^{a-1}\Gamma(a)\Gamma(a)} \int_0^\infty (1-xt)^{-b} [1 - (1-2t)^2]^{a-1} dt.$$

şeklinde yazılır. $t = \frac{1-s}{2}$ dönüşümü kullanılarak $dt = -\frac{1}{2}ds$ olacağından

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2a)}{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma(a)} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x(1-s)}{2}\right)^{-b} (1-s^2)^{a-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(2a) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{sx}{x-2}\right)^{-b} (1-s^2)^{a-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(2a) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \left(\frac{x}{x-2}\right)^n \int_{-1}^1 s^n (1-s^2)^{a-1} ds. \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Eğer n tek ise son integral sıfırdır, ancak $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ için, bir dönüşüm yapılarak ve Denklem (3.29) da ifade edilen beta-gamma bağıntısı kullanılarak

$$\int_{-1}^1 s^n (1-s^2)^{a-1} ds = \int_0^1 u^{m-1/2} (1-u)^{a-1} du = \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+1/2)}.$$

elde edilir. Böylece

$$F(a, b; 2a; z) = \frac{\Gamma(2a) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_{2m}}{(2m)!} \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+1/2)} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{2m},$$

ve daha sonra $(\alpha)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n$, $\Gamma(\alpha+m) = \Gamma(\alpha)(\alpha)_m$ özdeşlikleri ve Denklem (2.10) daki $\frac{(1)_{2n}}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} = 2^{2n}n!$ özdeşliği yardımıyla

$$F(a, b; 2a; z) = \frac{\Gamma(2a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-b}}{\Gamma(a)2^{2a-1}\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{b}{2}, \frac{1+b}{2}; a + \frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right),$$

elde edilir. Denklem (3.17) da verilen Legendre'nin iki kat formülünün sağ taraftaki gamma oranına uygulanmasıyla teoremin ispatı tamamlanır.

Denklem (4.31) ve Denklem (4.33) temel kuadratik dönüşümler içerir ve bunlardan kesirli doğrusal dönüşümler veya hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümlerini bağlayan üç terimli bağıntılar kullanılarak başka birçok dönüşüm türetilir. Literatür bu tür dönüşümlerle doludur ve aşağıda [4] ve [60]' çalışmalarında bulunabilecek olan bir örnek verilmiştir: Denklem (4.21) de ifade edilen

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

Pfaff'ın dönüşümünü ele alalım. $z' = \frac{-4z}{(1-z)^2}$ argümanı için $1-z' = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ ve $\frac{z'}{z'-1} = \frac{4z}{(1+z)^2}$ olacağından, dolayısıyla Pfaff'ın dönüşümünün Denklem (4.31) Kummer'in karesel denkleminin sağ tarafındaki Gauss serisine uygulayarak

$$\begin{aligned} F(a, b; 1+a-b; z) &= (1-z)^{-a} \left[\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}\right]^{-\frac{a}{2}} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; a-b+1; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) \\ &= (1+z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; a-b+1; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Şimdi $\frac{4z}{(1+z)^2}$ 'i z' ile değiştirdiğimizde $z = \frac{2-z'-2\sqrt{1-z'}}{z'} = \frac{1-\sqrt{1-z'}}{\sqrt{1+z'}}$ elde edilir ve böylece $1+z = \frac{2}{1+\sqrt{1-z'}}$ olacağından, yukarıdaki sonuç

$$F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; a-b+1; z\right) = 2^a (1+\sqrt{1-z})^{-a} F\left(a, b; a-b+1; \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right).$$

şeklinde yazılır. Daha ileri dönüşümler elde etmek için, Denklem (4.34) de verilen dönüşümün ve Teorem 4.25

$$F(a, b; 2b; z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; b + \frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right),$$

şeklinde ele alınır. Bu özdeşliklerin solundaki Gauss fonksiyonları $2b = a - b + 1$ veya $b = (a+1)/3$ olduğunda eşit olur. Böylece aşağıdaki dönüşüm formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; b + \frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right) &= F\left(a, \frac{a+1}{3}; \frac{2(a+1)}{3}; z\right) \\ &= \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; \frac{2(a+1)}{3}; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{6}; \frac{2(a+1)}{3}; \frac{-4z}{(1+z)^2}\right), \end{aligned}$$

Burada son sonuç Pfaff'ın doğrusal dönüşümü denklem (4.21) tarafından verilmektedir. Andrews *et al.* [4], yukarıdaki formülleri manipüle ederek, sırasıyla denklem (4.35) ve (4.36) olarak verilen aşağıdaki diğer sonuçları türetmektedir.

$$F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; \frac{2a+5}{6}; \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^a \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2a+2}{3})}{\Gamma(\frac{a+4}{6})\Gamma(\frac{a+1}{2})}, \quad (4.35)$$

ve

$$F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}; \frac{2(a+1)}{3}; \frac{8}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^a \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2a+2}{3})}{\Gamma(\frac{a+4}{6})\Gamma(\frac{a+1}{2})}. \quad (4.36)$$

Başka dönüşümler türetmek için mevcut dönüşümleri kullanmak uygun olsa da, hipergeometrik diferansiyel denklemde yerine koyma yoluyla bağımsız olarak yeni dönüşümler de oluşturulabilir ([60]).

Teorem 4.26 $|4x(1-x)| < 1$, $(|x| < 1)$ ve $a+b+\frac{1}{2}$ sıfır veya negatif tamsayı olmasın. O halde

$$F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; 4x(1-x)\right) = F\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; x\right) \quad (4.37)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat $F(a, b; a+b+\frac{1}{2}; z)$ fonksiyonu, $c = a+b+\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. $z = 4x(1 - x)$ alınır, $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}(4 - 8x)^{-1}$ ve $\frac{dy^2}{dz^2} = \frac{dy^2}{dx^2}(4 - 8x)^{-2} + 8\frac{dy}{dx}(4 - 8x)^{-3}$ elde edilir. Bu elde edilen ifadeler diferansiyel denklemde yerine yazılacak olursa

$$x(1 - x)\frac{dy^2}{dx^2} + \left[a + b + \frac{1}{2} - (2a + 2b + 1)x \right] \frac{dy}{dx} - 4aby = 0,$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözümü $y = F(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; x)$ olan bir hipergeometrik denklem olup teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Benzer dönüşümler, [66, s.122] ve [47, s.250] çalışmalarında bulunan aşağıdaki dönüşümlerdir:

$$F(2a, 2a + 1 - c; c; z) = (1 + z)^{-2a} F\left(a, a + \frac{1}{2}; c; \frac{4z}{(1 + z)^2}\right), \quad (4.38)$$

ve tersi

$$F\left(a, a + \frac{1}{2}; c; z\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - z}}{2}\right)^{-2a} F\left(2a, 2a - c + 1; c; \frac{1 - \sqrt{1 - z}}{1 + \sqrt{1 - z}}\right) \quad (4.39)$$

ve $|\arg(1 - z)| = \pi, a + b + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots,$

$$F\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; z\right) = F\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; \frac{1 - \sqrt{1 - z}}{2}\right). \quad (4.40)$$

Özetle, aşağıda verilen hipergeometrik fonksiyonların her biri için bir kuadratik dönüşüm mevcuttur ([66, s.124]). Sonuçlar orijinin belirtilmemiş bir komşuluğunda geçerlidir ve geçerlilik alanı analitik devam ile genişletilebilir.

$$F(a, b; 1/2; z), F(a, a + 1/2; c; z), F(a, b; a + b + 1/2; z)$$

$$F(a, b; 3/2; z), F(a, a - 1/2; c; z), F(a, b; a + b - 1/2; z)$$

$$F(a, b; 2a; z), F(a, b; b - a + 1; z), F(a, 1 - a; c; z)$$

$$F(a, b; 2b; z), F(a, b; a - b + 1; z), F(a, b; (a + b + 1)/2; z)$$

$F(a, b; c; z)$ fonksiyonunda $1 - c, a - b$ ve $a + b - c$ sayılarının sadece işaretleri farklıysa veya bu sayılardan ikisi $\pm \frac{1}{3}$ 'e eşit ise, hipergeometrik kübik bir dönüşüm vardır. Bunların tam bir listesi [18]'de verilmiştir. Ayrıca 4. ve 6. dereceden hipergeometrik dönüşümler de mevcuttur. Gauss hipergeometrik fonksiyonunu tanımladıktan ve en kullanışlı özdeşliklerden bazıları elde edildikten sonra, şimdi bu kavram genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyona genişletilecektir.

4.7. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonlar

Gauss hipergeometrik fonksiyonu, herhangi bir sayıda pay ve payda parametresi içerebilen genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu oluşturacak şekilde genişletilebilir. Slater'a göre bu genişletme ilk olarak 1828 yılında Thomas Clausen (1801-1885) tarafından üç pay ve iki payda parametresi kullanılarak yapılmıştır ([2]). Takip eden yüz yıl boyunca, Louis Saalschütz (1835-1913), Alfred tarafından kurulan ünlü özdeşlikler de dahil olmak üzere, bu fonksiyonlar için iyi bilinen bir dizi toplama teoremi geliştirilmiştir. Dixon (1865-1936), Henry Watson (1827-1903), John Dougall (1867-1960) ve Whipple tarafından kurulan ünlü özdeşlikler de dahil olmak üzere bu fonksiyonlar için iyi bilinen bir dizi toplama teoremi geliştirilmiştir. Teori, Bailey tarafından 1920 ve 1950 yılları arasında bir dizi makalede kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon son derece kullanışlıdır, çünkü matematiksel fiziğin tüm özel fonksiyonları bu fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir ve parametre sayısı arttıkça karmaşıklığı da artar. Bölüm 4.7.1'de bu fonksiyon tanımlanmakta, Bölüm 4.7.2'te bazı klasik özdeşlikleri ve dönüşümleri, özellikle de daha yeni ilgili çalışmalarda merkezi bir rol oynayanlar ele alınmaktadır. Bölüm 4.8'te çok kullanışlı konfluent hipergeometrik fonksiyon hakkında kısa bir tartışma sunulmakta ve son olarak Bölüm 4.9'te genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun birkaç ilginç uygulaması ve uzantısından bahsedilmektedir.

4.7.1. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonun Tanımlanması

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon ${}_pF_q$ p pay parametresi ve q payda parametresi içeren bir serinin toplamıdır ([60, s.73]).

Tanım 4.4 $b_j \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon ${}_pF_q$

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) &= {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix}; z\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_k}{\prod_{j=1}^q (b_j)_k} \frac{z^k}{k!} \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu gösterime göre, Gauss hipergeometrik fonksiyonu ${}_2F_1(a, b; c; z)$ veya ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right)$ ile gösterilir, bu noktadan sonra bu gösterimleri kullanılacaktır. Gauss hipergeometrik fonksiyonunda olduğu gibi, hiçbir payda parametresinin sıfır veya negatif tamsayı olmadığı ve her-

hangi bir pay parametresinin sıfır veya negatif tamsayı olması durumunda fonksiyonun sonlanan bir hipergeometrik polinom olduğu varsayılır. Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi payda ya da paydada parametre olmadığını belirtmek için genellikle bir tire kullanılır, ${}_0F_1(-, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(b)_k k!}$. Gauss hipergeometrik serisi için terim oranının k 'da rasyonel bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Yükselen faktöriyel özellikleri aracılığıyla, benzer şekilde

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k$$

için terim oranının $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\dots(k+a_p)z}{(k+b_1)(k+b_2)\dots(k+b_q)(k+1)}$ rasyonel fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Cebirin Temel Teoremine göre, k 'nın herhangi bir rasyonel fonksiyonu kompleks sayılar üzerinde çarpanlara ayrılabilir ve bu formda yazılabilir, burada z bazı sabit faktörler olabilir. Dolayısıyla, Graham ve diğerleri [34, s.208], tarafından sağlanan aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, genelleştirilmiş hipergeometrik seri terim oranından yeniden oluşturulabilir.

Örnek 4.5 $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k^2+7k+10}{4k^2+1}$ terim oranını ele alarak rasyonel fonksiyonu

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+2)(k+5)(k+1)(\frac{1}{4})}{(k+i/2)(k-i/2)(k+1)}$$

terim oranı genelleştirilmiş hipergeometrik seriden hareket ederek ${}_3F_2(2, 5, 1; \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}; \frac{1}{4})$ sonuca ulaşılır.

Gauss fonksiyonunda olduğu gibi, hipergeometrik seri sonlanmadığında, yakınsama koşulları dikkate alınmalıdır ([4, s.62]).

Teorem 4.27 ${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z)$ hipergeometrik serisi $p \leq q$ ise tüm sonlu z için yakınsar, $p = q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsar, $|z| > 1$ için ıraksar ve $p > q + 1$ ise $z \neq 0$ için ıraksar (ve seri sonlanmaz).

İspat Faktöriyel özelliklerine göre $\left| \frac{t_{k+1}}{t_k} \right| = \frac{|x|^{k^{p-q-1}}(1+|a_1|/k)\dots(1+|a_p|/k)}{|(1+|b_1|/k)\dots(1+|b_q|/k)(1+1/k)|}$ Oran testi kullanılarak, belirtilen yakınsama koşulları $|z|$ ve k^{p-q-1} 'de $p - q - 1 = 0$, $p - q - 1 < 0$ ve $p - q - 1 > 0$ ilişkileri dikkate alınarak takip edilir.

Hipergeometrik fonksiyon ${}_{q+1}F_q$ parametrik fazlalığın $\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i$ ([60, s.74]) ile tanımlandığı aşağıdaki koşul altında birim çember üzerinde yakınsar.

Teorem 4.28 $p = q + 1$ için, ${}_pF_q$ hipergeometrik serisi $\Re(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i) > 0$ durumlarda $|z| = 1$ çemberi üzerinde kesinlikle yakınsaktır.

Çoğu standart matematiksel fonksiyon hipergeometrik fonksiyonlarla temsil edilebilir ve bu temsillerin listeleri [42, s.13], [47, s.275], [60, s.74] ve [64, s.46]' da bulunabilir. Bunlara ortogonal polinomlar da dahildir ve bunların bir listesi [62, s.97]'deki Tablo 6.1'de bulunabilir. [58]'te Teorem (4.5) olarak bulunan aşağıdaki örnekte bir açıklama yapılmaktadır.

Örnek 4.6 $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}$ ile tanımlanan Bessel fonksiyonu için terim oranı $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(-1)^{k+1} (\frac{x}{2})^{2k+2+p} k!(k+p)!}{(k+1)!(k+p+1)!(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+p}} = \frac{-\frac{x^2}{4}}{(k+1)(k+p+1)}$ tarafından verilir. $J_p(x) = \frac{(\frac{x}{2})^p}{p!} {}_0F_1 \left(-; p+1; \frac{-x^2}{4} \right)$ fonksiyonu $t_0 = 1$ olacak şekilde normalize edilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

Bazı fonksiyonların ${}_pF_q$ hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden temsilleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} e^z &= {}_0F_0(-; -; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \sin z &= z {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right) \\ \cos z &= {}_0F_1\left(-; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right) \\ (1-z)^{-a} &= {}_1F_0(a; -; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^n z^n}{n!} \end{aligned}$$

${}_pF_q$ fonksiyonu da Gauss hipergeometrik fonksiyonu için Euler'in integraline benzer bir integral gösterimine sahiptir. İlk olarak, Denklem (4.8) de verilen Euler'in integralinin ${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} {}_1F_0(a; -; zt) dt$ şeklinde yazılabileceğini görmek kolaydır. Bu sonuç, integralin yakınsamasını sağlayan koşullarla ve z 'nin integralde ${}_pF_q$ tek değerli olduğu bir alanla sınırlandırıldığı aşağıdaki formüle genelleştirilebilir ([4, s.67]).

Teorem 4.29 $\Re(b_{q+1}) > \Re(a_{p+1}) > 0$ için,

$$\begin{aligned} & {}_{p+1}F_{q+1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p, a_{p+1}; \\ b_1, \dots, b_q, b_{q+1}; \end{matrix} z \right) \\ &= \frac{\Gamma(b_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})} \int_0^1 t^{a_{p+1}-1} (1-t)^{b_{q+1}-a_{p+1}-1} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} zt \right) dt \\ &= \frac{\Gamma(b_{q+1})z^{1-b_{q+1}}}{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})} \int_0^x t^{a_{p+1}-1} (z-t)^{b_{q+1}-a_{p+1}-1} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} t \right) dt. \end{aligned}$$

Yukarıdaki sonuç, hipergeometrik bir fonksiyondaki parametre sayısını azaltmanın yanı sıra, bir pay veya payda parametresinin değerini değiştirmek için de kullanışlıdır. Örneğin, yukarıdaki teoremden $a_{p+1} = b_q$ alınarak, aşağıdaki ifade elde edilir

$$\begin{aligned} & {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_{q-1}, b_{q+1}; \end{matrix} z \right) \\ &= \frac{\Gamma(b_{q+1})}{\Gamma(b_q)\Gamma(b_{q+1} - b_q)} \int_0^1 t^{b_q-1} (1-t)^{b_{q+1}-b_q-1} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} zt \right) dt. \end{aligned}$$

Bu sonucun özel bir durumu, Bölüm 4.1’te verilen Bateman integrali denklem (4.9)’dur.

4.7.2. Belirli ${}_{p+1}F_p$ Serileri İçin Klasik Özdeşlikler

Şimdi genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonla ilgili, çoğu 20. yüzyılın ilk yarısında oluşturulmuş bazı klasik özdeşlikler ve dönüşümler sunulmaktadır. Bir sonraki bölümde ilgili daha yeni sonuçlar verilecektir. Bu türden çok sayıda özdeşlik bulunduğundan, payında paydasından bir fazla parametre bulunan ${}_{p+1}F_p$ biçimindeki serilere ve özellikle de ${}_3F_2$ serilerine değinilecektir. Birçok ilginç sonucun elde edilebileceği iki özel ${}_{p+1}F_p$ hipergeometrik seri sınıfı vardır ([7, s.188]).

Tanım 4.5 $z = 1$ için ${}_{p+1}F_p(z)$ serisi pay parametrelerinden biri negatif bir tamsayı ve alt parametrelerin toplamı üst parametrelerin toplamından bir fazla ise bu seri dengeli (balanced veya Saalschützian) olarak adlandırılır.

Parametrik fazlalık k ise bu tür seriler k -dengeli olarak adlandırılır ([4, s.140]).

Tanım 4.6 ${}_{p+1}F_p\left(\begin{smallmatrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{smallmatrix}; z\right)$ serisi

$$1 + a_1 = a_2 + b_1 = \dots = a_{p+1} + b_p$$

koşulunu sağlıyorsa bu serinin iyi konumlandırılmış (well-poised) olduğu söylenir.

Bir seri, parametre çiftlerinin biri hariç hepsi aynı toplama sahipse neredeyse konumlandırılmış (nearly-poised) olarak adlandırılır ([6, s.11]).

4.7.3. ${}_3F_2(1)$ için Hesaplamalar ve Dönüşüm Özdeşlikleri

${}_3F_2(1)$ fonksiyonu, çok çeşitli saf ve uygulamalı matematik bağlamalarının yanı sıra diğer disiplinlerde de ortaya çıktığı için temel bir özel fonksiyondur. Dixon, Whipple ve Watson’ın iyi bilinen teoremleri de dahil olmak üzere, bu hipergeometrik serileri toplamak için birçok faydalı özdeşlik vardır. Parametrelerin belirli değerleri için ${}_3F_2(1)$ fonksiyonu kapalı formda, yani gamma fonksiyonlarının sonlu çarpımlarının bir oranı olarak ifade edilebilir. Böyle bir seriyi, bazen farklı sayıda parametreye sahip bir veya daha fazla hipergeometrik fonksiyon cinsinden ifade eden dönüşüm özdeşlikleri de mevcuttur. Carl Thomae (1840-1921) [67] ilk olarak 1879 tarihli klasik çalışmasında genel ${}_3F_2(1)$ serilerinin dönüşümlerini

türetmiştir. Bu dönüşümlerin, örneğin S_5 simetrik grubunun ${}_3F_2(1)$ üzerindeki bir eylemi ile bir grup yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıntılar [72], [51] ve [6]'in 3.5-3.7 Bölümlerinde bulunabilir.

İlk olarak, her sonlanan Saalschützyen ${}_3F_2$ yükselen faktöriyellerin (veya gamma fonksiyonlarının) bir oranı olarak ifade eden merkezi Pfaff-Saalschütz teoremi ele alınmaktadır. Bu teorem ilk olarak 1797 yılında J. F. Pfaff tarafından keşfedilmiş ve 1890 yılında Saalschütz tarafından bağımsız olarak yeniden keşfedilmiştir ([64, s.48], [10, s.9]).

Teorem 4.30 (Pfaff-Saalschütz Teoremi) *Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ve a, b, c ifadeleri n 'den bağımsız ise, o zaman*

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1-c+a+b-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n} \quad (4.42)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (4.27) de verilen Euler'in doğrusal dönüşümünden

$$\begin{aligned} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) &= (1-z)^{a+b-c} {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r z^r}{(c)_r r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)_s z^s}{s!}. \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Şimdi $s = n - r$ yazıp ve sonra Denklem (2.6) ve Denklem (2.12) de verilen özdeşlikleri kullanılarak, yukarıdaki çift seride z^n katsayısı bulunur

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r(c-a-b)_{n-r}}{(c)_r r! (n-r)!} &= \frac{(c-a-b)_n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r(-n)_r}{(c)_r r! (1-c+a+b-n)_r} \\ &= \frac{(c-a-b)_n}{n!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1-c+a+b-n \end{matrix}; 1\right), \end{aligned}$$

z^n 'nin ${}_2F_1(c-a, c-b; c; z)$ içindeki katsayısı ise $\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n n!}$ ifadesidir. Bu iki katsayı ifadesinin eşitlenmesi Pfaff-Saalschütz özdeşliğini oluşturur. Yukarıdaki teorem Pfaff-Saalschütz özdeşliğinin en kullanışlı formunu sağlar, ancak parametrelerin uygun şekilde değiştirilmesi yoluyla bu sonuç alternatif formlarda da yazılabilir. Örneğin, Graham *et al.* [34] sadece faktöriyelleri içeren eşdeğer bir form sunmaktadır. Diğer bir alternatif form ise $d + e = a + b + c + 1$ ve pay parametrelerinden birinin negatif tamsayı olması koşuluyla

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+b-e)\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(1-e)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)\Gamma(d-c)} \quad (4.43)$$

denklemdir ([6]). Andrews *et al.* [4], Pfaff-Saalschütz özdeşliğinin aşağıdaki formunu ver-

mişlerdir:

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(d-a-b)\Gamma(e-a-b)}{\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)\Gamma(e-a)\Gamma(e-b)} \\
&+ \frac{1}{a+b-d} \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(d+e-a-b)} \\
&\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} d-a, d-b, 1 \\ d+e-a-b, d+1-a-b \end{matrix}; 1\right) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Denklem (4.42) de verilen Pfaff-Saalschütz özdeşliğini kullanarak, Bölüm 4.6’da ispatsız olarak belirtilen Gauss hipergeometrik fonksiyonu için Denklem (4.31) deki Kummer’in kuadratik dönüşümü şimdi ispatlanabilir. Kummer’in dönüşümünü hatırlayıp, uygun kısıtlamalar verildiğinde, $F(a, b; 1+a-b; z) = (1-z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}-b; 1+a-b; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right)$. Tanım gereği, özdeşliğin sağ tarafı

$$EST = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a/2)_r (a/2 + 1/2 - b)_r}{r! (1+a-b)_r} (-4z)^r (1-z)^{-a-2r} \quad (4.45)$$

şeklinde yazılır. Orijini çevreleyen $|4z| = |(1-z)^2|$ eğrisinin içinde, bu toplam analitiktir ve dolayısıyla $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$ için z ’nin kuvvetleri cinsinden genişletilebilir. Denklem (2.1) deki $(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{n!}$ özdeşliği kullanılarak, Denklem (4.45)

$$\begin{aligned}
EST &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-4)^r (a/2)_r (a/2 + 1/2 - b)_r}{r! (1+a-b)_r} \frac{(a+2r)_n}{n!} z^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \frac{(-4)^r (a/2)_r (a/2 + 1/2 - b)_r}{r! (1+a-b)_r} \frac{(a+2r)_{n-r}}{(n-r)!} z^n
\end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Denklem (2.10) özdeşliğini $(a/2)_r = \frac{(a)_{2r}}{2^{2r} (a/2+1/2)_r}$ biçiminde uygulayarak, yukarıdaki açılımda z^n katsayısı

$$C = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (a)_{2r} (a/2 + 1/2 - b)_r}{r! (1+a-b)_r} \frac{(a+2r)_{n-r}}{(a/2 + 1/2)_r (n-r)!},$$

olarak yazılabilir. $(a)_{n+r} = (a)_n (a+n)_r$, $\frac{(-1)^r}{(n-r)!} = \frac{(-n)_r}{n!}$ ve $(a)_{2r} (a+2k)_k = (a)_{k+2r}$ özdeşliklerinden

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a)_{2r} (a/2 + 1/2 - b)_r}{n! r! (1+a-b)_r} \frac{(a+2r)_{n-r}}{(a/2 + 1/2)_r} \\
&= \frac{(a)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a/2 + 1/2 - b)_r (a+n)_r}{r! (1+a-b)_r (a/2 + 1/2)_r} \\
&= \frac{(a)_n}{n!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a/2 + 1/2 - b, a+n \\ 1+a-b, a/2 + 1/2 \end{matrix}; 1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.42) Pfaff-Saalschütz Teoremi, ortaya çıkan ${}_3F_2(1)$ ’i hesaplar ve dolayısıyla

$$C = \frac{(a)_n}{n!} \frac{(1/2 + a/2)_n (1-b-n)_n}{(1+a-b)_n (1/2 - a/2 - n)_n},$$

elde edilir. Denklem (2.12) özdeşliği ile $(1 - A - n)_n = (-1)^n (A)_n$, $A = b$ ve $A = \frac{1+a}{2}$ ile, son olarak

$$C = \frac{(a)_n}{n!} \frac{(b)_n}{(1 + a - b)_n}.$$

yazılabilir. Bu aynı zamanda ${}_2F_1(a, b; 1 + a - b; z)$ açılımındaki z^n katsayısıdır, dolayısıyla $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$ için

$${}_2F_1(a, b; 1 + a - b; z) = (1 - z)^{-a} {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} - b; 1 + a - b; -\frac{4z}{(1 - z)^2}\right)$$

ve tam sonuç analitik devamdan elde edilir.

Pfaff-Saalschütz özdeşliği dışında, ${}_3F_2(1)$ serilerini hesaplamak için başka birçok yararlı formül vardır. H. Bateman Saalschützian ${}_3F_2$ için aşağıdaki formülü oluşturmuştur. Standart sadeleştirme tekniklerine dayanan kanıtlar [60, s.87, Th. 30] ve [64, s.50]'de bulunabilir.

Teorem 4.31 n negatif olmayan bir tamsayı ve a ve b n 'den bağımsız olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a + n, \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - b \\ 1 + a - b, \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{(b)_n}{(1 + a - b)_n} \quad (4.46)$$

eşitliği geçerlidir.

1903 yılında Dixon, iyi konumlandırılmış ${}_3F_2$ serilerini birim argümanla toplayan aşağıdaki teoremi vermiştir ([60, s.92, Th. 33]).

Teorem 4.32 (Dixon Teoremi) $\Re(a - 2b - 2c) > -2$ için

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1 + a - b, 1 + a - c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(1 + \frac{a}{2})\Gamma(1 + a - b)\Gamma(1 + a - c)\Gamma(1 + \frac{a}{2} - b - c)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(1 + \frac{a}{2} - b)\Gamma(1 + \frac{a}{2} - c)\Gamma(1 + a - b - c)}. \quad (4.47)$$

İspat $\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha)_n$ özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1 + a - b, 1 + a - c \end{matrix}; 1\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k \Gamma(1 + a - b) \Gamma(1 + a - c)}{k! \Gamma(1 + a - b + k) \Gamma(1 + a - c + k)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + a - b) \Gamma(1 + a - c)}{\Gamma(1 + a - b - c) \Gamma(1 + a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{k! (1 + a)_{2k}} \frac{\Gamma(1 + a + 2k) \Gamma(1 + a - b - c)}{\Gamma(1 + a - b + k) \Gamma(1 + a - c + k)}. \end{aligned}$$

Denklem (4.13) deki Gauss toplamı ile

$$\frac{\Gamma(1 + a + 2k) \Gamma(1 + a - b - c)}{\Gamma(1 + a - b + k) \Gamma(1 + a - c + k)} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} b + k, c + k \\ 1 + a + 2k \end{matrix}; 1\right)$$

yazılır ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) &= \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_{n+k} (c)_{n+k}}{k! n! (1+a)_{n+2k}} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_n (c)_n}{k! (n-k)! (1+a)_{n+k}} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-n)_k (a)_k (b)_n (c)_n}{k! n! (1+a+n)_k (1+a)_n} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, a; \\ 1+a+n; \end{matrix} -1\right) \frac{(b)_n (c)_n}{n! (1+a)_n}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.16) de ifade edilen Kummer teoremini bu sonuca uygulanarak

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) &= \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(1+a+n)\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+\frac{a}{2}+n)\Gamma(1+a)} \frac{(b)_n (c)_n}{(1+a)_n} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(1+a)_n}{(1+\frac{a}{2})_n} \frac{(b)_n (c)_n}{(1+a)_n} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} b, c \\ 1+\frac{a}{2} \end{matrix}; 1\right)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır ve istenen sonuç Denklem (4.13) deki Gauss'un toplama formülünün sağ taraftaki Gauss hipergeometrik fonksiyonuna uygulanmasıyla doğrudan elde edilir.

$c \rightarrow -\infty$ olduğunda, Denklem (4.47), Denklem (4.16) de verilen Kummer Teoremi'ne indirgenir ve eğer $c = -n$ ise

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+a+n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(1+a)_n (1+\frac{a}{2}-b)_n}{(1+\frac{a}{2})_n (1+a-b)_n} \quad (4.48)$$

özel sonucuna ulaşılır. Standart özdeşlikler uygulanarak, Denklem (4.47) deki Dixon Teoremi

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(\frac{a}{2})! (a-b)! (a-c)! (\frac{a}{2}-b-c)!}{(a)! (\frac{a}{2}-b)! (\frac{a}{2}-c)! (a-b-c)!} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir ([58, s.43]).

Aşağıda verilen Dixon teoreminin (Denklem (4.47)) genellemesi, Bailey denklemi olarak bilinir ([6]) ve iki ${}_3F_2(1)$ serisi arasında bir dönüşüm sağlar. Eğer ${}_3F_2(1)$ serilerinden biri iyi konumlanmışsa, diğeri de iyi konumlanmış demektir. Bu sonuç aslen Thomae'ye aittir.

Teorem 4.33 $s = e + - a - b - c$ ve $\Re(s) > 0, \Re(a) > 0$ olsun, o zaman

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a, f-a, s \\ s+b, s+c \end{matrix}; 1\right) \quad (4.50)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Öncelikle

$$F \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(e)\Gamma(f)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right)$$

eşitliğini tanımlayalım. Bu halde

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(e)\Gamma(f)} \frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(e)_n(f)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c+n)}{\Gamma(e+n)\Gamma(f+n)n!}$$

dır. Gauss'un ilk toplam teoremi (Denklem (4.13)) ile

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} e-a, f-a \\ e+f-a+n \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(e+f-a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(f+n)\Gamma(e+n)}$$

denklemini elde edilir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c+n)}{\Gamma(e+f-a+n)n!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} e-a, f-a \\ e+f-a+n \end{matrix}; 1\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c+n)\Gamma(e-a+m)\Gamma(f-a+m)}{\Gamma(e+f-a+n+m)\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)m!n!} \end{aligned}$$

yazılır. m ve n yeterince büyük olduğunda, yukarıdaki faktörlerin hepsi sonuçta aynı işarete sahip olacaktır, böylece çift seri kesinlikle yakınsak olur ve toplama sırası değiştirilerek

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(e-a+m)\Gamma(f-a+m)}{\Gamma(e+f-a+m)\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)m!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} b, c \\ e+f-a+m \end{matrix}; 1\right)$$

elde edilir. Gauss teoremini (Denklem (4.13)), Gauss fonksiyonuna uygulayarak, F

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(e-a+m)\Gamma(f-a+m)}{\Gamma(e+f-a+m)m!} \frac{\Gamma(e+f-a+m)\Gamma(e+f-a+m-b-c)}{\Gamma(e+f-a+m-b)\Gamma(e+f-a+m-c)} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(e+f-a-b-c)}{\Gamma(e+f-a-b)\Gamma(e+f-a-c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a, f-a, e+f-a-b-c \\ e+f-a-b, e+f-a-c \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan F 'nin orijinal tanımına göre

$$\begin{aligned} &{}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right) \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(e+f-a-b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(e+f-a-b)\Gamma(e+f-a-c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a, f-a, e+f-a-b-c \\ e+f-a-b, e+f-a-c \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve teoremin ispatı $s = e + f - a - b - c$ bağıntısından elde edilir.

Yukarıdaki sonuç, [6, Eq. 3.3 (1)] çalışmasında Bailey denklemi olarak verilen Watson'ın toplama teoremini kanıtlamak için kullanılabilir.

Teorem 4.34 (Watson Teoremi) *Serinin tanımlı olduğu değerler için,*

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+c)\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(\frac{1-a-b}{2}+c)}{\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1+b}{2})\Gamma(\frac{1-a}{2}+c)\Gamma(\frac{1-b}{2}+c)} \quad (4.51)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat İlk olarak teoremin sol tarafına

$$s = \frac{a+b+1}{2} + 2c - a - b - c = c - \frac{a+b-1}{2}$$

olmak üzere Denklem (4.50) dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda, Dixon Teoremini (Denklem (4.47)) yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(2c)\Gamma(\frac{1-a-b}{2}+c)}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1-a+b}{2}+c)\Gamma(\frac{1-a-b}{2}+2c)} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2c-a, \frac{1+b-a}{2}, \frac{1-a-b}{2}+c \\ \frac{1-a-b}{2}+2c, \frac{1-a+b}{2}+c \end{matrix}; 1\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(\frac{1-a-b}{2}+c)}{\Gamma(\frac{1+b}{2})\Gamma(\frac{1-b}{2}+c)} \left\{ \frac{\Gamma(2c)\Gamma(1+c-\frac{a}{2})\Gamma(\frac{a}{2})}{\Gamma(c)\Gamma(1+2c-a)\Gamma(a)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte parantez içindeki ifadeyi basitleştirmek için, Denklem (3.17) de verilen

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

Legendre'nin iki kat teoremi, $2x = 2c$, $2x = 1 + 2c - a$ ve $2x = a$ ifadeleri için kullanılacak olursa istenilen sonuç elde edilir.

Whipple, ${}_3F_2(1)$ i gamma fonksiyonu cinsinden hesaplamayı sağlayan aşağıdaki özdeşliği vermiştir:

Teorem 4.35 (Whipple Teoremi) $a + b = 1$ ve $e + f = 2c + 1$ için,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{\pi\Gamma(e)\Gamma(f)}{2^{2c-1}\Gamma(\frac{a+e}{2})\Gamma(\frac{a+f}{2})\Gamma(\frac{b+e}{2})\Gamma(\frac{b+f}{2})} \quad (4.52)$$

İspat Verilen koşullar altında, Denklem (4.50) dönüşümünde $s = c$ alınacak olursa

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+b)\Gamma(2c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a, f-a, c \\ c+b, 2c \end{matrix}; 1\right). \quad (4.53)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin sağındaki ${}_3F_2$ ifadesine odaklanacak olursak

$$\frac{(e-a) + (f-a) + 1}{2} = c + b$$

koşulu gerçekleştiğinden Denklem (4.51) de ifade edilen Watson Teoreminin koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla Watson teoremi yardımıyla, sağda Watson teoremi ile aşağıdaki gibi

toplanabilir. Verilen koşullar olmasını sağlar. Dolayısıyla, Legendre'nin iki kat teoremi (Denklem (3.17)) kullanılarak Denklem (4.53)

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+b)\Gamma(2c)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+c)\Gamma(\frac{e+f-2a+1}{2})\Gamma(\frac{1-e-f+2a}{2}+c)}{\Gamma(\frac{1+e-a}{2})\Gamma(\frac{1+f-a}{2})\Gamma(\frac{1-e+a}{2}+c)\Gamma(\frac{1-f+a}{2}+c)} \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\pi}{\Gamma(a)\Gamma(c+b)2^{2c-1}} \frac{\Gamma(\frac{e+f-2a+1}{2})\Gamma(\frac{1-e-f+2a}{2}+c)}{\Gamma(\frac{1+e-a}{2})\Gamma(\frac{1+f-a}{2})\Gamma(\frac{1-e+a}{2}+c)\Gamma(\frac{1-f+a}{2}+c)}, \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak, hipotezde verilen $a + b = 1$ ve $e + f = 2c + 1$ bağıntıları kullanılarak teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Whipple formülü (Denklem (4.52)) için alternatif bir yöntem [51, s.45]'te verilmiştir:

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, 1-a, c \\ e, 2c+1-e \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(2c+1-e)\Gamma(\frac{1+a+e}{2})\Gamma(\frac{1-a-e}{2}+c)}{\Gamma(a+e)\Gamma(\frac{1+a-e}{2}+c)\Gamma(\frac{1-a+e}{2})\Gamma(1-a+2c-e)}. \quad (4.54)$$

Hipergeometrik özdeşliklerle ilgili birçok yeni sonuç Dixon, Whipple ve Watson'ın ${}_3F_2(1)$ için klasik özdeşlikleriyle ilişkilidir. Bölüm 5'te tartışılan bu yeni sonuçlar, bazı durumlarda bu klasik sonuçları genelleştirmekte ve diğer durumlarda bu yerleşik özdeşliklere bitişik toplama formülleri sunmaktadır.

4.7.4. ${}_{p+1}F_p(\pm 1)$ için hesaplamalar ve dönüşüm özdeşlikleri

${}_{p+1}F_p(\pm 1)$ için özdeşliklerin listesi bu çalışmada ayrıntılı olarak ele alınamayacak kadar kapsamlı olsa da, bu kısımda amacımız bu türden özdeşlikler için bir numune vermek olacaktır. İlk olarak ± 1 argümanlı fonksiyonlar için bazı hesaplama formülleri verilecektir. Berndt [10], Dixon Teoremini (Denklem (4.47)) kanıtlamak için Dougall'ın ${}_5F_4$ serileri için aşağıda ifade edilen formülünde $d = -\frac{a}{2}$ almıştır.

Teorem 4.36 (Dougall Formülü) $\Re(a + b + c + d + 1) > 0$ için,

$$\begin{aligned} {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, -b, -c, -d \\ \frac{a}{2}, a+b+1, a+c+1, a+d+1 \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)\Gamma(a+d+1)\Gamma(a+b+c+d+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b+c+1)\Gamma(a+b+d+1)\Gamma(a+c+d+1)} \end{aligned} \quad (4.55)$$

özdeşliği geçerlidir.

Aşağıdaki özdeşlik ${}_4F_3$ serisini ${}_5F_4$ serisine dönüştürür ([7, s.189]):

$$\begin{aligned} & {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, b, c, d \\ 1-n-b, 1-n-c, w \end{matrix}; 1 \right) = \\ & = \frac{(w-d)_n}{w_n} {}_5F_4 \left(\begin{matrix} d, 1-n-b-c, -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n-w \\ 1-n-b, 1-n-c, \frac{1+d-w-n}{2}, 1+\frac{d-w-n}{2} \end{matrix}; 1 \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Andrews *et al.* [4], Whipple tarafından 1926 yılında oluşturulan aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Teorem 4.37 $a + b + c - n + 1 = d + e + f$ için,

$${}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, a, d-b, d-c \\ d, a+1-n-e, a+1-n-f \end{matrix}; 1 \right) \quad (4.57)$$

özdeşliği geçerlidir.

İspat İlk olarak, Denklem (4.27) deki Euler dönüşümünün

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z \right) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; z \right)$$

ve

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} d, e \\ f \end{matrix}; z \right) = (1-z)^{f-d-e} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f-d, f-e \\ f \end{matrix}; z \right)$$

formlarını yazalım. Daha sonra $c-a-b = f-d-e$ olduğu varsayılır ve iki sonuç eşitlenerek

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f-d, f-e \\ f \end{matrix}; z \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; z \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} d, e \\ f \end{matrix}; z \right) \quad (4.58)$$

elde edilir. Bu denklemin sol tarafı

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k (f-d)_n (f-e)_n}{(c)_k k! (f)_n (n)!} z^n \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k z^k (f-d)_{n-k} (f-e)_{n-k}}{(c)_k k! (f)_{n-k} (n-k)!} z^{n-k}. \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla, Denklem (2.6) ve Denklem (2.12) özdeşlikleri uygulanarak Denklem (4.58)'in sol tarafındaki z^n katsayısı

$$\frac{(f-d)_n (f-e)_n}{n! (f)_n} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b, 1-f-n, -n \\ c, d-f-n+1, e-f-n+1 \end{matrix}; 1 \right) \quad (4.59)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, Denklem (4.58)'in sağ tarafındaki z^n katsayısı

$$\frac{(d)_n (e)_n}{n! (f)_n} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} c-a, c-b, 1-f-n, -n \\ c, 1-d-n, 1-e-n \end{matrix}; 1 \right) \quad (4.60)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.59) ve Denklem (4.60) ifadeleri eşitlenerek

$$\begin{aligned} & {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, 1-f-n, -n \\ c, d-f-n+1, e-f-n+1 \end{matrix}; 1\right) \\ &= \frac{(d)_n(e)_n}{(f-d)_n(f-e)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} c-a, c-b, 1-f-n, -n \\ c, 1-d-n, 1-e-n \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. İstenen sonuç, parametrelerin değiştirilmesi ve Denklem (2.12) de verilen özdeşliğin $(1-\alpha-n)_n = (-1)^n(\alpha)_n$ biçiminde uygulanmasıyla elde edilir.

1912 yılında William F. Sheppard yukarıdaki teoremi kullanarak iki sonlu ${}_3F_2(1)$ serisi arasında bir dönüşüm sağlayan aşağıdaki sonucu elde etmiştir ([4, s.141, Corollary (3.3.4)]):

Sonuç 4.1 *n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere*

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} - \\ n \end{matrix}; , \right) a, bd, e1 = \frac{(d-a)_n(e-a)_n}{(d)_n(e)_n} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, a+b-n-d-e+1 \\ a-n-d+1; a-n-e+1 \end{matrix}; 1\right) \quad (4.61)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (4.57) dönüşümünde $f-c$ sabit tutularak ve $f \rightarrow \infty$ için,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ d, e \end{matrix}; 1\right) = \frac{(e-a)_n}{(e)_n} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, d-b \\ d; a-n-e+1 \end{matrix}; 1\right),$$

elde edilir. ${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, d-b \\ d, a-n-e+1 \end{matrix}; 1\right)$ sonucuna bu dönüşümün tekrar uygulanmasıyla istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Yukarıdaki özdeşlik Pfaff-Saalschütz özdeşliğinin zarif bir şekilde doğrulanmasını sağlar. Eğer ${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ d, e \end{matrix}; 1\right)$ serisi $e = 1-d-n+a+b$ olacak şekilde dengelenirse, o zaman D-denklemin (4.61)

$$\begin{aligned} & {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ d, 1-d-n+a+b \end{matrix}; 1\right) = \\ &= \frac{(d-a)_n(1-d-n+b)_n}{(d)_n(1-d-n+a+b)_n} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, 0 \\ a-n-d+1, d-b \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $(1-\alpha-n)_n = (-1)^n(\alpha)_n$ özdeşliği uygulanarak

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ d, 1-d+a+b-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(d-a)_n(d-b)_n}{(d)_n(d-a-b)_n}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da Denklem (4.42) Pfaff-Saalschütz özdeşliğidir.

Kummer 1836 yılında, Denklem (4.57)'den elde edilen ve [4] çalışmasında verilen aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 4.38 İki serinin yakınsadığı parametre değerleri için,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(e-a)\Gamma(d+e-b-c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, d-b, d-c \\ d, d+e-b-c \end{matrix}; 1\right) \quad (4.62)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat $n \rightarrow \infty$ ve $f+n$ sabit kalsın, Denklem (4.57) denkleminin sol taraftaki seri , ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right)$ olur. Denklem (4.57)'nin sağ tarafını hesaplamak için

$$\frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n} = \frac{\Gamma(e-a+n)\Gamma(f-a+n)}{\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)} \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)}{\Gamma(e+n)\Gamma(f+n)} \quad (4.63)$$

yazılır. Euler'in yansıma formülü (Denklem (3.16)) ile

$$\Gamma(f) = \frac{\pi}{\Gamma(1-f)\sin(\pi f)}, \quad \frac{1}{\Gamma(f+n)} = \frac{\Gamma(-n-f+1)\sin[\pi(f+n)]}{\pi},$$

$$\frac{1}{\Gamma(f-a)} = \frac{\Gamma(a-f+1)\sin[\pi(f-a)]}{\pi}$$

ve

$$\Gamma(f-a+n) = \frac{\pi}{\Gamma(a-f-n+1)\sin[\pi(f-a+n)]}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$n \in \mathbb{N}, \sin[\pi(A+n)] = \begin{cases} \sin \pi A, & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ -\sin \pi A, & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\sin[\pi(f+n)]}{\sin(\pi f)} \frac{\sin[\pi(f-a)]}{\sin[\pi(f-a+n)]} = 1$$

olduğu dikkate alınır bu bağıntılar, Denklem (4.63) de yerine yazılacak olursa, Denklem (4.57)'deki $a+b+c-n+1=d+e+f$ kısıtlamasından

$$\begin{aligned} \frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n} &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(a-f+1)}{\Gamma(e-a)\Gamma(a-f-n+1)} \frac{\Gamma(-n-f+1)\Gamma(e-a+n)}{\Gamma(1-f)\Gamma(e+n)} \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(e-a)\Gamma(d+e-b-c)} \left(\frac{\Gamma(a-f+1)\Gamma(e-a+n)}{\Gamma(1-f)\Gamma(e+n)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $n \rightarrow \infty$ ve $-f \rightarrow \infty$ için yukarıdaki parantez içindeki oran bir olur ve Denklem (4.57)'nin sağındaki ${}_4F_3$ serisi

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, d-b, d-c \\ d, a+1-n-f \end{matrix}; 1\right) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, d-b, d-c \\ d, d+e-b-c \end{matrix}; 1\right)$$

olacağından istenen sonuç elde edilir.

Denklem (4.62) deki Kummer'in sonucunu kendisine uygulayarak, aşağıdaki Thomae dönüşümü elde edilir ([4]).

Teorem 4.39 $s = d + e - a - b - c$ olmak üzere

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d-a, e-a, s \\ s+b, s+c \end{matrix}; 1\right) \quad (4.64)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (4.62) yardımıyla

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} d-b, d-c, a \\ d+e-b-c, d \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e-a)}{\Gamma(b)\Gamma(d+e-b-a)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d-b, e-b, d+e-a-b-c \\ d+e-b-c, d+e-b-a \end{matrix}; 1\right)$$

elde edilir. Bu sonuç, Denklem (4.62) ün sağ tarafında yerine yazılarak

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(d+e-b-c)\Gamma(d+e-b-a)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d-b, e-b, d+e-a-b-c \\ d+e-b-c, d+e-b-a \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Pay parametrelerinin $a \leftrightarrow b$ olarak değiştirilmesiyle

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} b, a, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(d+e-a-c)\Gamma(d+e-a-b)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} d-a, e-a, d+e-a-b-c \\ d+e-a-c, d+e-a-b \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teorem $s = d + e - a - b - c$ için kanıtlanmıştır.

Whipple ayrıca sonlandırıcı iyi konumlanmış ${}_7F_6$ ifadesini dengeli ${}_4F_3$ ifadesine dönüştüren önemli bir formül vermiştir. Öncelikle aşağıdaki lemma ve sonucuna ihtiyaç vardır ([4, s.144, Lemma 3.4.2]):

Lemma 4.1 m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, b, c, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, a-d+1, a+m+1 \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{(a+1)_m(a/2-d+1)_m}{(a/2+1)_m(a-d+1)_m} {}_4F_3\left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, a-b-c+1, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, d-m-\frac{a}{2} \end{matrix}; 1\right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Sonlandırıcı, dengeli bir ${}_3F_2(1)$ için Denklem (4.42) de verilen Pfaff-Saalchütz özdeşliği

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r(a-b-c+1)_r(a+n)_r}{r!(a-b+1)_r(a-c+1)_r} &= \frac{(c)_n(1-b-n)_n}{(a-b+1)_n(c-a-n)_n} \\ &= \frac{(c)_n(b)_n}{(a-b+1)_n(a-c+1)_n}. \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu sonucu ve

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k} = \sum_{k=i}^n \sum_{j=i}^k a_{j,k}$$

bağıntısını kullanarak ([34, s.36]), Denklem (4.65) de verilen eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned} \text{ESolT} &= \sum_{n=0}^m \frac{(-m)_n (a)_n (d)_n}{n! (a-d+1)_n (a+m+1)_n} \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a-b-c+1)_r (a+n)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{n=r}^m \frac{(-1)^r (a)_{n+r} (d)_n (a-b-c+1)_r (-m)_n}{(n-r)! r! (a-d+1)_n (a+m+1)_n (a-b+1)_r (a-c+1)_r} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(-1)^r (a)_{t+2r} (d)_{t+r} (-m)_{t+r} (a-b-c+1)_r}{t! r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r r! (a-d+1)_{t+r} (a+m+1)_{t+r}} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^r (a)_{2r} (d)_r (-m)_r (a-b-c+1)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_r (a+m+1)_r} \\ &\quad \times \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a+2r)_t (d+r)_t (-m+r)_t}{t! (a-d+1+r)_t (a+m+1+r)_t} = S_1 \times S_2. \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Her bir toplam ayrı ayrı ele alındığında

$$S_1 = \sum_{r=0}^m \frac{2^{2r} (-1)^r (a/2)_r (a/2+1/2)_r (d)_r (-m)_r (a-b-c+1)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_r (a+m+1)_r}.$$

Şimdi Denklem (4.47) deki Dixon teoremi $a \rightarrow a+2r, b \rightarrow -(d+r), c \rightarrow m-r$ olmak üzere S_2 'ye uygulanarak

$$\begin{aligned} S_2 &= {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a+2r, d+r, -m+r \\ a-d+1+r, a+m+1+r \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(1+\frac{a}{2}+r) \Gamma(1+a+r-d) \Gamma(1+a+m+r) \Gamma(1+\frac{a}{2}-d+m-r)}{\Gamma(1+a+2r) \Gamma(1+\frac{a}{2}-d) \Gamma(1+\frac{a}{2}+m) \Gamma(1+a-d+m)} \end{aligned}$$

sonucuna varılır ve standart faktöriyel özdeşlikler aracılığıyla bazı sadeleştirme işlemlerinin ardından istenilen sonuç elde edilir.

Yukarıdaki lemmadan önemli bir sonuç elde edilir ([4, s.145, Corollary 3.4.3]):

Sonuç 4.2

$${}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, c, d, -m \\ \frac{a}{2}, a-c+1, a-d+1, a+m+1 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(a+1)_m (a-c-d+1)_m}{(a-c+1)_m (a-d+1)_m} \quad (4.66)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Lemma 4.1 de $b = \frac{a}{2} + 1$ olsun, böylece teoremdeki eşitliğin sol tarafı

$$\text{ESolT} = \frac{(a+1)_m (a/2-d+1)_m}{(a/2+1)_m (a-d+1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a}{2}-c, d, -m; \\ \frac{a}{2}, a-c+1, d-m-\frac{a}{2} \end{matrix}; 1 \right)$$

şeklinde yazılır. Ortaya çıkan ${}_4F_3$ böylece dengeli bir ${}_3F_2$ 'a indirgenir, böylece Denklem (4.42) yarımıyla

$$\begin{aligned} \text{ESolT} &= {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, c, d, -m \\ \frac{a}{2}, a - c + 1, a - d + 1, a + m + 1 \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{(a+1)_m (\frac{a}{2} - d + 1)_m}{(\frac{a}{2} + 1)_m (a - d + 1)_m} \times \frac{(\frac{a}{2} + 1)_m (a - c + 1 - d)_m}{(a - c + 1)_m (\frac{a}{2} - d + 1)_m} \\ &= \frac{(a+1)_m (a - c - d + 1)_m}{(a - c + 1)_m (a - d + 1)_m} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylelikle sonuç ispatlanmış olur.

Şimdi, sonlandırıcı iyi dengelenmiş bir ${}_7F_6$ 'yi dengeli ${}_4F_3$ 'ye dönüştüren Whipple'ın teoremini ifade ve ispat etmeye hazırız ([4, s.145, Th. 3.4.4]):

Teorem 4.40 (Whipple Teoremi) *m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere*

$$\begin{aligned} {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, b, c, d, e, -m \\ \frac{a}{2}, a - b + 1, a - c + 1, a - d + 1, a - e + 1, a + m + 1 \end{matrix}; 1 \right) &= \\ &= \frac{(a+1)_m (a - d - e + 1)_m}{(a - d + 1)_m (a - e + 1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a - b - c + 1, d, e, -m \\ a - b + 1, a - c + 1, d + e - a - m \end{matrix}; 1 \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Lemma 4.1'teki tekniklerin aynısı kullanmak suretiyle

$$\begin{aligned} {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, b, c, d, e, -m \\ \frac{a}{2}, a - b + 1, a - c + 1, a - d + 1, a - e + 1, a + m + 1 \end{matrix}; 1 \right) &= \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{(a)_n (a/2 + 1)_n (d)_n (e)_n (-m)_n}{n! (a/2)_n (a - d + 1)_n (a - e + 1)_n (a + m + 1)_n} \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a - b - c + 1)_r (a + n)_r}{r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} (\frac{a}{2} + 1)_r (d)_r (e)_r (-m)_r}{r! (a - b + 1)_n (a - c + 1)_n (\frac{a}{2})_n (a - d + 1)_r (a - e + 1)_r (a + m + 1)_r} \\ &\times \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a + 2r)_t (\frac{a}{2} + r + 1)_t (d + r)_t (e + r)_t (-m + r)_t}{t! (\frac{a}{2} + r)_t (a - d + r + 1)_t (a + m + r + 1)_t} \end{aligned}$$

elde edilir. İçerdeki toplam Sonuç 4.2 ile hesaplanabilir ve bazı seri işlemlerinin ardından nihai sonuç elde edilir.

Denklem (4.67) de ifade edilen Whipple Teoreminde $1 + 2a = b + c + d + e - m$ olarak alınacak olursa ${}_4F_3$ ifadesi dengeli ${}_3F_2$ e indirgenir ([4, Th. 3.5.1]):

Teorem 4.41 (Dougalls Teoremi) $1 + 2a = b + c + d + e - m \quad m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, b, c, d, e, -m \\ \frac{a}{2}, a - b + 1, a - c + 1, a - d + 1, a - e + 1, a + m + 1 \end{matrix}; 1 \right) &= \\ &= \frac{(a+1)_m (a - b - c + 1)_m (a - b - d + 1)_m (a - c - d + 1)_m}{(a - b + 1)_m (a - c + 1)_m (a - d + 1)_m (a - b - c - d + 1)_m} \end{aligned} \quad (4.68)$$

eşitliği geçerlidir.

Denklem (4.68) de verilmiş olan Dougall teoreminde $b = 2a - c - d - e + m + 1$ yerine $m \rightarrow \infty$ yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3

$$\begin{aligned} {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, c, d, e \\ \frac{a}{2}, a - c + 1, a - d + 1, a - e + 1 \end{matrix}; 1\right) &= \\ &= \frac{\Gamma(a - c + 1)\Gamma(a - d + 1)\Gamma(a - e + 1)\Gamma(a - c - d - e + 1)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(a - d - e + 1)\Gamma(a - c - e + 1)\Gamma(a - c - d + 1)} \end{aligned} \quad (4.69)$$

eşitliği geçerlidir.

Denklem (4.47) deki Dixon formülünde $e = a/2$ alınarak sonuç ispatlanır. Denklem (4.69)'da $b + c = a + 1$ alındığında, $z = -1$ argümanı için iyi dengelenmiş ${}_4F_3$ serisini hesaplayan aşağıdaki Bailey özdeşliği elde edilir ([4, s.148, Corollary 3.5.3]):

Sonuç 4.4

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, \frac{a}{2} + 1, c, d \\ \frac{a}{2}, a - c + 1, a - d + 1 \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(1 + a - c)\Gamma(1 + a - d)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(1 + a - c - d)} \quad (4.70)$$

eşitliği geçerlidir.

Hesaplama özdeşliklerinin dışında, parametrelerin belirli değerleri için ${}_pF_p$ serileri için lineer, ikinci dereceden ve kübik dönüşümler de mevcuttur. Aşağıda verilen ${}_3F_2$ için doğrusal dönüşüm Bailey tarafından verilmiştir ([7, s.190]):

$$\begin{aligned} (1 - z)^{2a-1} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2a - 1, a + \frac{1}{2}, a - b - \frac{1}{2} \\ a - \frac{1}{2}, a + b + \frac{1}{2} \end{matrix}; z\right) &= \\ &= (1 - z)^{2b-1} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2b - 1, b + \frac{1}{2}, b - a - \frac{1}{2} \\ b - \frac{1}{2}, a + b + \frac{1}{2} \end{matrix}; z\right) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Whipple çok sayıda dönüşüm özdeşliği üretmiştir ve bunlardan biri [60, Th 31] çalışmasında sunulmuştur:

Teorem 4.42 (Whipple Teoremi) $n \in \mathbb{N}$ ve b ve c n 'den bağımsız olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, b, c \\ 1 - b - n, 1 - c - n \end{matrix}; z\right) &= \\ &= (1 - z)^n {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, 1 - b - c - n \\ 1 - b - n, 1 - c - n \end{matrix}; \frac{-4z}{(1 - z)^2}\right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile başlayarak

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{matrix} b, c \\ b+c \end{matrix}; t[(1-z) + zt]\right) &= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(b)_n (c)_n (1-z)^{n-k} (t)^{n+k} (z)^k}{k! (n-k)! (b+c)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(b)_{n-k} (c)_{n-k} (1-z)^{n-2k} (t)^n (z)^k}{k! (n-2k)! (b+c)_{n-k}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-n)_{2k} (b)_n (c)_n (1-b-c-n)_k (-1)^k (1-z)^{n-2k} (t)^n (z)^k}{k! n! (1-b-n)_k (1-c-n)_k (b+c)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, 1-b-c-n \\ 1-b-n, 1-c-n \end{matrix}; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right) \frac{(b)_n (c)_n t^n}{n! (b+c)_n} \quad (4.73)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer teknikler kullanılarak, orijinal Gauss fonksiyonu t 'nin farklı kuvvetlerinde genişletilerek

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} b, c \\ b+c \end{matrix}; t[1 - z(1-t)]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, b, c \\ 1-b-n, 1-c-n \end{matrix}; z\right) \frac{(b)_n (c)_n t^n}{n! (b+c)_n} \quad (4.74)$$

sonucuna ulaşılır. Denklem (4.73) ve Denklem (4.74) sonuçları karşılaştırılarak ispat tamamlanır.

Böylece, hipergeometrik fonksiyonlar için en iyi bilinen klasik sonuçlardan bazıları verilmiş oldu. Şimdi ise hipergeometrik özdeşlikler alanındaki en son çalışmalara yer vermeden önce son olarak bu türden bir fonksiyon daha verilmesine ihtiyaç vardır:

4.8. Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon

Şimdiye kadar, seriler bir yakınsaklık yarıçapına sahip olacak şekilde $p \leq q + 1$ olmak üzere ${}_pF_q$ fonksiyonu incelendi. Böylelikle, $q \in 0, 1$ için ${}_0F_0$ üstel fonksiyonu, ${}_1F_0$ Binom fonksiyonu, ${}_0F_1$ Bessel fonksiyonu ve ${}_2F_1$ Gauss fonksiyonu takdim edildi. Şimdi, ${}_1F_1$ önemli fonksiyonu vererek bu kısmı sonlandıracağız.

${}_1F_1$ fonksiyonu, Pochhammer-Barnes fonksiyonu veya Kummer serisi olarak da bilinen konfluent hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılmıştır ve uygun bir parametre seçimi ile bu fonksiyondan birçok özel fonksiyon elde edilebildiğinden analizde çok kullanışlıdır. Üstel integraller, Hata fonksiyonları, Hermite ve Laguerre polinomları, Coulomb dalga fonksiyonları, Parabolik silindir fonksiyonları ve Bessel fonksiyonları bu fonksiyonlardan bazılarıdır ([63], [66, s.171]). Dolayısıyla Konfluent hipergeometrik fonksiyon; dalga

mekaniği, kuantum teorisi, hidrodinamik, akustik, optik, rastgele yürüyüş teorisi (random walk theory) ve istatistik gibi alanlarda geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Konfluent hipergeometrik fonksiyon, iki veya daha fazla tekilliğin çakışma eğiliminde olmasıyla bir diferansiyel denklemin diğerinden türetildiği konfluens olarak bilinen bir sınırlama sürecinin sonucudur. Tekrar, $z = 0$, $z = 1$ ve $z = \infty$ düzgün tekil noktalarına sahip ve bir özel çözümü $u = {}_2F_1(a, b; c; z)$ olan Gauss hipergeometrik denklemini $z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0$ ele alalım. Konfluent hipergeometrik fonksiyon, z yerine z/b yazıldığında ve $b \rightarrow \infty$ alındığında bu düzgün tekil noktalardan ikisi birleşip tek bir noktaya indirildiğinde ortaya çıkar. Açıkça görülebileceği üzere

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{b^n} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^n 1 \cdot (1+1/b)(1+2/b) \dots (1+(n-1)/b)}{b^n} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; \frac{z}{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$$

eld edilir. Dikkat edilecek olursa, elde edilen seri ${}_1F_1$ fonksiyonudur ve genellikle Humbert tarafından tanıtılan $\Phi(a; c; z)$ veya $M(a; c; z)$ sembollerinden biri ile gösterilir ([7, s.248]). Bu fonksiyonun temel özellikleri 1836 yılında Kummer tarafından verilmiştir.

Tanım 4.7 $|z| < \infty, c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere, konfluent hipergeometrik fonksiyon

$$\Phi(a; c; z) = {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(c)_k} z^k. \quad (4.75)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem (4.6) da verilen hipergeometrik denklemde, benzer şekilde z yerine z/b alınarak elde edilen $z/b(1 - \frac{z}{b})u'' + \{c - (1 + \frac{a+1}{b})z\}u' - au = 0$ diferansiyel denklemin bir çözümünün ${}_2F_1(a; b; c; \frac{z}{b})$ hipergeometrik fonksiyonu olduğu görülür. Yine $b \rightarrow \infty$ için, orijinde düzgün tekil noktaya sahip Kummer'in

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0 \quad (4.76)$$

konfluent hipergeometrik denkleminin bir çözümünün $u = \Phi(a; c; z)$ olduğu görülür ([62, s. 42]). Dolayısıyla, konfluent hipergeometrik fonksiyonun Denklem (4.76) de verilen Kummer denkleminin bir çözümüdür ([47, s. 262], [65, s. 33]).

Gauss hipergeometrik denklemiyle yapılan önceki çalışmaya benzer şekilde, Kummer'in Denklem (4.76) daki konfluent hipergeometrik denkleminin ikinci bir lineer bağımsız

çözümü, $|\arg z| < \pi$ varsayarak ve $u = z^{1-c}v$ dönüşümü kullanılarak elde edilebilir. Daha sonra Kummer denkleminin aynı formda, yani, $a' = 1 + a - c$ ve $c' = 2 - c$ parametrelerine sahip $zv'' + (c' - z)v' - a'v = 0$ denkleminde dönüştüğünü göstermek kolaydır. Sonuç olarak, $c \neq 2, 3, \dots$ olmak üzere, $z^{1-c}\Phi(1 + a - c; 2 - c; z)$ fonksiyonu da Kummer denkleminin bir çözümüdür ([47, s.263], [62, s.42]). Böylece, eğer $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ise konfluent hipergeometrik denklemin genel çözümü $|\arg z| < \pi$ için

$$u = A\Phi(a; c; z) + Bz^{1-c}\Phi(1 + a - c; 2 - c; z)$$

şeklinde yazılabilir. Konfluent hipergeometrik fonksiyon, $c = 0, -1, -2, \dots$ noktalarında basit kutuplara sahip olduğundan, konfluent hipergeometrik fonksiyon c 'nin analitik bir fonksiyonu değildir. Bununla birlikte

$$\lim_{c \rightarrow 1-m} \frac{1}{\Gamma(c+n)} = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{1}{(n-m)!}, & n = m, m+1, m+2, \dots \end{cases}$$

olduğundan

$$\lim_{c \rightarrow 1-n} \frac{\Phi(a; c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_n x^n}{n!} \Phi(a+n; 1+n; z),$$

sonucuna varılır. Böylece $\Phi^* = \frac{\Phi(a; c; z)}{\Gamma(c)}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon a ve x 'in yanı sıra c 'nin de analitik bir fonksiyonudur ([63, s.4]).

Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar olarak ifade edilebilen bazı yaygın fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Phi(a; a; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \\ \Phi(1; 2; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \\ \Phi(-2; 1; z) &= 1 - 2z + \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda olduğu gibi, konfluent fonksiyonu için aşağıdaki türev özelliklerini oluşturmak için yükselen faktöriyelin özellikleriyle birlikte terim terim türev alma kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Phi(a; c; z) &= \frac{a}{c} \Phi(a+1; c+1; z) \\ \frac{d^n}{dz^n} \Phi(a; c; z) &= \frac{(a)_n}{(c)_n} \Phi(a+n; c+n; z) \end{aligned}$$

Slater [63, s.15-16], bu tür 23 türev özdeşliğinin bir listesini vermiş ve bunlardan konfluent fonksiyon için üçü aşağıda sunulan yedi toplama teoremi elde etmiştir.

$$\Phi(a; c; x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{(b)_n n!} \Phi(a + n; b + n; x) \quad (4.77)$$

$$= \left(\frac{x}{x + y} \right)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{(x + y)_n n!} \Phi(a + n; b; x) \quad (4.78)$$

$$= e^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b - a)_n (-y)^n}{(b)_n n!} \Phi(a; b + n; x) \quad (4.79)$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bazı özellikleri [7, s.254], [47, s.262], [60, s.124] ve [65, s.35] çalışmalarında ayrıntılı olarak tartışılan bitişik bağıntılar gibi konfluent fonksiyon için analoglara sahiptir. Aşağıda verilen üç bitişik bağıntı kanonik bir küme oluşturmaktadır.

$$(a - c + 1)\Phi(a; c; z) = a\Phi(a + 1; c; z) - (b - 1)\Phi(a; c - 1; z) \quad (4.80)$$

$$c(a + z)\Phi(a; c; z) = ac\Phi(a + 1; c; z) - (a - c)z\Phi(a; c + 1; z) \quad (4.81)$$

$$c\Phi(a; c; z) = c\Phi(a - 1; c; z) + z\Phi(a; c + 1; z) \quad (4.82)$$

Konfluent fonksiyon için aşağıdaki kullanışlı integral gösterimi de mevcuttur ([63, s.34]).

Teorem 4.43 $\Re(c) > \Re(a) > 0$ için

$$\Phi(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c - a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1 - t)^{c-a-1} dt \quad (4.83)$$

dir.

İspat Teoremin sağ tarafındaki integralde üstel fonksiyonun seri açılımından beta integrali elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1 - t)^{c-a-1} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{a+n-1} (1 - t)^{c-a-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(c - a)}{\Gamma(c + n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a)(a)_n \Gamma(c - a)}{\Gamma(c)(c)_n}. \end{aligned}$$

$\Phi(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$ olduğundan, teorem ispatlanmış olur.

Konfluent fonksiyonun kompleks bir kontur integral gösterimi de vardır ([60, s.124]):

Teorem 4.44 Eğer $\Re(z) < 0$ ve a ve b pozitif olmayan bir tamsayı ise, o zaman Barnes integrasyon yolunu kullanarak

$$\Phi(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)} \int_B \frac{\Gamma(a + s)\Gamma(-s)(-z)^s ds}{\Gamma(c + s)} \quad (4.84)$$

eşitliği geçerlidir.

Bekleneceği üzere, konfluent fonksiyon için birçok dönüşüm özdeşliği mevcuttur. Aşağıda Kummer'in iki önemli dönüşümü sunulmaktadır ([4]):

Teorem 4.45 (Kummer'in İlk Formülü) $c \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$\Phi(a; c; z) = e^z \Phi(c - a; c; -z). \quad (4.85)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Denklem (4.77)'deki integral formunda, $t \rightarrow 1 - t$ yerine yazarak aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\Phi(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} e^z \int_0^1 e^{-zt} t^{c-a-1} (1-t)^{a-1} dt,$$

ve sonuç $\Phi(c - a; c; -z)$ 'nin integral tanımı ile takip edilir.

Yukarıdaki sonuç, Pfaff'ın ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b; c; z/(z-1))$ kuadratik dönüşümüne $b \rightarrow \infty$ sınırlama işlemi uygulanarak da elde edilebilir ([66, s.173]). Kummer'in aşağıdaki ikinci formülü de aynı sınırlama işleminin dönüşüme uygulanmasıyla benzer şekilde oluşturulabilir ${}_2F_1(a, b; 2a; 4z/(1+z)^2) = (1+z)^{2a} {}_2F_1(a, a + \frac{1}{2} - b; b + \frac{1}{2}; z^2)$.

Teorem 4.46 (Kummer'in İkinci Formülü) $2a$ negatif tek tamsayı olmasın, bu durumda

$$\Phi(a; 2a; 4z) = e^{2z} {}_0F_1\left(-; a + \frac{1}{2}; z^2\right) \quad (4.86)$$

eşitliği geçerlidir.

Bölüm 5.1.1'te Miller'ın [54] yakın tarihli bir makalesi yer almaktadır, burada yazar konfluent fonksiyon için bir yineleme bağıntısı kullanmaktadır. Bu çalışmanın anlaşılmasına hazırlık olması bakımından gerekli olan bağıntının kanıtı aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.47 $c + 1 \neq 0, -1, -2, \dots$ için,

$$\Phi(a; c; z) + \frac{z}{c} \Phi(a+1; c+1; z) = \Phi(a+1; c; z) \quad (4.87)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Sol taraftaki Konfluent fonksiyonların seri temsillerinden

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(c)_k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k}{k!(c)_{k+1}} z^{k+1} \\ &= \left\{ 1 + \frac{a}{c} z + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{c} z + \frac{(a+1)}{c(c+1)} z^2 + \frac{(a+1)(a+2)}{2!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \right\} \\ &= 1 + \frac{a+1}{c} z + \frac{a(a+1)(a+2)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise teoremdaki ifadenin sağ tarafının açılımı olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Konfluent ve diğer genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların diğer birçok özdeşliği [6], [7], [23], [59] ve [63] gibi klasik metinlerde bulunabilir. Bu bölümü tamamlamak için, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun ilginç uygulamalarından bir örnek verilmiştir.

4.9. Hipergeometrik Fonksiyonların Bazı Uygulamaları

Hipergeometrik fonksiyonların çok çeşitli saf ve uygulamalı matematik bağlamlarında güçlü bir rol oynadığından bahsedilmiştir. Bu bölümde, hipergeometrik fonksiyonun temel tanımının genişletildiği bazı yolların yanı sıra bu tür birkaç uygulama yer almaktadır.

Weierstrass $\wp$ fonksiyonu(eliptik fonksiyon) şu şekilde tanımlanır

$$\wp(z, \tau) = z^{-2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{ (z + \omega)^{-2} - \omega^{-2} \right\},$$

$z \in \mathbb{C}$ ve τ için üst yarı düzlemde, ω 'nin $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ kafesi üzerinde çalıştığı yerde. Duke [20] bu fonksiyonun sıfırlarının $\mp z_0$ ile verildiğini göstermektedir, burada $x = 1 - 1728/j$ ve

$$z_0 = \frac{1 + \tau}{2} - \frac{i\sqrt{6}x^{\frac{1}{4}} {}_3F_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; x\right)}{3\pi {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; 1 - x\right)}.$$

Fibonacci sayıları Binet'in formülü aracılığıyla şu şekilde tanımlanabilir

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Özdeşliği kullanarak ${}_2F_1\left(a, \frac{1}{2} + a; \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{1}{2z(1-2a)}[(1+z)^{1-2a} - (1-z)^{1-2a}]$, Dilcher [17] $F_n = \frac{n}{2^{n-1}} {}_2F_1\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}, 5\right)$ ifadesini elde eder.

Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonlar integral operatörlerine karşılık gelen grup elemanlarının Whittaker fonksiyonları cinsinden ifade edilebilen çekirdeklere sahip olması nedeniyle üçüncü dereceden üst üçgen matrisler grubunun temsilleriyle bağlantılıdır ([69]). İndirgenmiş dalga denklemi $\nabla^2 \omega = k^2 \omega$ de Whittaker fonksiyonlarını içeren çözümlere sahiptir ([37], Bölüm 7).

$(t, t + \nabla t)$ zaman aralığında doğum ve ölüm olasılıkları sırasıyla $\lambda_n = na + b$ ve $\mu_n = nc + d$ olduğunda, bir sistemde n kişinin bulunmasına ilişkin **kararlı durum olasılığı** şöyledir

$$p_n = \frac{(b/c)_n}{(d/c + 1)_n} \left\{ {}_2F_1\left(1, \frac{b}{c}; \frac{d}{c} + 1, \frac{a}{c}\right) \right\}^{-1}.$$

Genelleştirilmiş durumda, i veya j 'nin bir değeri için b_i yerine $b_i \mp a_i$ veya d_j yerine $d_j \mp c_j$ yazılırsa doğum ve ölüm süreçlerinin bitişik olduğu söylenir. Bitişik hipergeometrik fonksiyonlar ilişkili olduğundan, bitişik doğum ve ölüm süreçleri de özellikle yok olma olasılıkları açısından ilişkilidir ([41]). **Helikopter Rotor Kanadı Teorisinde**, indüklenen hızın hesaplanması $S_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{L(\rho, \theta)} d\theta$ integralini içerir. Bu integral, belirli sınır koşulları ile Gauss diferansiyel denklemi $z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0$ 'ı karşılar. Eğer $z = \rho^2, a = -m, b = m+1, c = 1$ ise, $S_{2m+1} = -2_2F_1(-m, m+1; 1; \rho^2)$ olduğu gösterilebilir ([9]). Hipergeometrik fonksiyonların uzantıları da mevcuttur. Bu tür uzantılardan biri, yükselen faktöriyelin aşağıdaki ile değiştirildiği temel veya q -hipergeometrik fonksiyondur $(q^a)_{q,n} = (1-q^a)(1-q^{a+1}) \dots (1-q^{a+n-1})$ ve $\frac{(a)_{n+1}}{(a)_n}$ terim oranı rasyoneldir. q^n fonksiyonun ([4], [32]). Bu q -hipergeometrik seriler eliptik ve teta fonksiyonlarıyla ilişkilidir ve bu nedenle bölüm teorisinde, fark denklemlerinde ve Lie cebirlerinde kullanışlıdır. Hipergeometrik fonksiyonlar matris argümanlarına da sahip olabilir ve bu nedenle çok değişkenli analizde ortaya çıkan belirli dağılımları ifade etmek için kullanılır ([55]).

Bir başka uzantı ise Kampé de Fériet çift hipergeometrik fonksiyonudur ve şu şekilde tanımlanır

$$F_{C:D;D'}^{A:B;B'} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_A : b_1, \dots, b_B; b'_1, \dots, b'_B; \\ c_1, \dots, c_C : d_1, \dots, d_D; d'_1, \dots, d'_D; \end{matrix} xy \right] \\ = \sum [(a_1, m+n) \dots (a_A, m+n) (b_1, m) \dots (b_B, m) (b'_1, n) \dots (b'_B, n) x^m y^n] / \\ [(c_1, m+n) \dots (c_C, m+n) (d_1, m) \dots (d_D, m) (d'_1, n) \dots (d'_D, n) m! n!],$$

$(a, n) = (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ ([26]) Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon için bazı klasik özdeşlikler ve dönüşümler verildi, şimdi bu alandaki daha yeni araştırmaların literatür taramasından elde edilen bulgular yer almaktadır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1. Hipergeometrik Fonksiyonlarla İlgili Son Sonuçlar

Bu çalışma şimdiye kadar hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili, genellikle 20.yüzyılın ilk yarısında ortaya konmuş klasik sonuçlarla ilgilenmiştir. Bu bölümde, bu fonksiyonlar için 20. ve 21. yüzyılın sonlarında geliştirilen daha yeni özdeşliklere ilişkin bir literatür taramasının sonuçları yer almaktadır. 5.1.1 bölümde altı ilginç sonuç ve bunların ispatları ayrıntılı olarak tartışılmakta, ardından 5.1.2 bölümde diğer ilgili sonuçların ve bunların türetilme yöntemlerinin kısa bir özeti sunulmaktadır.

Bu incelemenin bulguları, açık uçlu hipergeometrik özdeşlikler sınıfının olası permutasyonlarının neredeyse sonu olmadığı görüşünü desteklemektedir, böylece görünüşte yeni olan bazı sonuçların genellikle mevcut özdeşliklerin varyasyonları olduğu gösterilebilir. Ayrıca, önerilen bazı yeni sonuçların sayısal olarak kontrol edildiğinde geçersiz olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, çeşitli hipergeometrik özdeşliklerin test edilmesi ve karşılaştırılmasının yanı sıra yenilerinin üretilmesi için bilgisayar algoritmik teknikleri geliştirilmiştir.

Hipergeometrik özdeşlikler alanı çok geniş olduğundan, bu inceleme bölümü esas olarak ${}_{p+1}F_p$ fonksiyonlarına ve özellikle de Milgram [52] tarafından yapılan faydalı ve kapsamlı bir bilgisayar tabanlı analiz ışığında ${}_3F_2(1)$ fonksiyonuna odaklanacaktır.

5.1.1. Ayrıntılı Olarak Bazı Yeni Sonuçların Takdimi

Bu bölümde, yöntemleri veya sonuçları açısından ilginç olan altı yeni makale kronolojik sırayla verilmektedir. Referans kolaylığı için, bu bölümde denklemleri ve özdeşlikleri her bir makaledeki orijinal numaralandırmalarına göre vermekte ve ayrıca yararlı olduğu yerlerde ispatlar ek ayrıntılar ile yer almaktadır.

Makale 1: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon için Kummer tipi bir dönüşüm üzerine ${}_2F_2$, Miller [54] 1997 yılında H. Exton [26], Kampé de Fériet fonksiyonlarını kulla-

narak şu bağıntıyı kanıtlamıştır

$${}_2F_2\left(a, 1 + \frac{a}{2}; b, \frac{a}{2}, y\right) = e^y {}_2F_2(b - a - 1, 2 + a - b; b, 1 + a - b; -y) \quad (2)$$

Burada ${}_2F_2(y)$ hipergeometrik fonksiyonu bir ${}_2F_2(-y)$ fonksiyonu cinsinden ifade edilir. Miller 2003 tarihli makalesinde aynı sonucu elde etmek için daha uygun bir yaklaşım olarak toplama yöntemlerini kullanmaktadır. Seri tekniklerini kullanarak şunu gösterir

$$\begin{aligned} e^{-y} {}_2F_2(a, c; b, d; y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k y^k}{(b)_k (d)_k k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (c)_k (-1)^k}{(b)_k (d)_k k!} \frac{(-y)^n n!}{(n-k)! n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (c)_k (-n)_k}{(b)_k (d)_k k!} \frac{(-y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_3F_2(-n, a, c; b, d; 1) \frac{(-y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Miller daha sonra $c = 1 + \frac{a}{2}$ ve $d = \frac{a}{2}$ yazarak yukarıdaki sonuçta Slater'in formülünü kullanır. 2.4.2.3'te [64, s.65] elde etmek için

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3F_2(-n, a, c; b, d; 1) \frac{(-y)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a-1-n)(b-a)_{n-1}}{(b)_n} \frac{(-y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a-1)_n (2+a-b)_n}{(b)_n (1+a-b)_n} \frac{(-y)^n}{n!} \end{aligned}$$

Yükselen faktöriyelerin genişletilmesiyle ve özdeşlik (2) doğrudan takip eder.

Yazar aynı makalede (2)'nin Kummer'in ilk dönüşümünün doğrudan bir sonucu olduğunu da göstermektedir: ${}_1F_1(a; b; y) = e^y {}_1F_1(b-a; b; -y)$ (Miller'ın ispatında bazı ek adımlar aşağıda verilmiştir.)

İspat $\frac{(1+\alpha)_n}{(a)_n} = 1 + \frac{n}{\alpha}$ biçimindeki denklem (1.8) özdeşliğinden şu sonuç çıkar: (2)'nin sol tarafı şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} {}_2F_2(a; 1 + \frac{a}{2}; b, \frac{a}{2}, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{(b)_n n!} \left[1 + \frac{2n}{a} \right] \\ &= {}_1F_1(a; b; y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(a)_{n+1} y^{n+1}}{a(b)_{n+1} n!} \\ &= {}_1F_1(a; b; y) + \frac{2y}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; y) \end{aligned} \quad (6)$$

Denklem (1.8) özdeşliğindeki $\alpha = 1 + a - b$ ile benzer basitleştirmeler kullanılarak, (2)'nin

sağ tarafı şu hale gelir

$$\begin{aligned}
& e^y {}_2F_2(b-a-1; 2+a-b; b, 1+a-b; -y) \\
& = e^y {}_1F_1(b-a-1; b; -y) + \frac{y}{b} e^y {}_1F_1(b-a; b+1; -y). \\
& = {}_1F_1(a+1; b; y) + \frac{y}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; y)
\end{aligned} \tag{8}$$

Kummer'in Bölüm 4.7'teki formülü (4.78) ile elde edilir. İstenen sonucu elde etmek için geriye (6) ve (8) özdeşliklerinin sağ taraflarının eşit olduğunu göstermek kalmaktadır. Bu, Bölüm 4.7'teki (4.87) yineleme bağıntısından yararlanılarak ${}_1F_1(a; b; y) + \frac{y}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; y) = {}_1F_1(a+1; b; y)$ biçiminde yapılır ve (2) özdeşliği doğrudan takip eder.

Makale 2: Gauss hipergeometrik fonksiyonları için Erdélyi'nin bazı klasik integral- lerinin uzantıları, Joshi ve Vyas [39]

Bölüm 4.1'te Erdélyi'nin [22], 1939 yılında kesirli kalkülüs kullanarak ispatladığı Gauss hipergeometrik fonksiyonu için Erdélyi'nin integral gösterimlerini denklem (4.10)-(4.12) verilmişti. Bu makalede yazarlar aynı sonuçları (denklem (5.1.1)-1.5) seri manipülasyonu ve bazı klasik toplama teoremlerini kullanarak daha uygun bir şekilde ortaya koymaktadırlar. Bu yaklaşım sayesinde sonucu genelleştirebilmekte ve dolayısıyla Erdélyi tipi yeni integraller üretebilmektedirler. (Yararlı olduğu yerlerde ek ayrıntılar verilmiştir.)

Denklem 1.3 $\Re(c) > \Re(d) > 0$ için,

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{c-d-1} (1-tz)^{\lambda-a-b} \\
&\times {}_2F_1(\lambda-a, \lambda-b; d; tz) {}_2F_1(a+b-\lambda, \lambda-d; c-d; \frac{(1-t)z}{1-tz}) dt.
\end{aligned}$$

İspat Gauss hipergeometrik fonksiyonlarını seri formunda ifade ederek ve toplama ve integral alma sıralarını değiştirerek ($|z| < 1$ için geçerli), teoremin sağ tarafı şu hale gelir

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-a)_m (\lambda-b)_m (\lambda-d)_n (a+b-\lambda)_n}{(d)_m (c-d)_n} \frac{z^{m+n}}{m!n!} \\
& \times \int_0^1 t^{d+m-1} (1-t)^{c-d+n-1} (1-tz)^{\lambda-a-b-n} dt.
\end{aligned}$$

Şimdi Bölüm 4.1'teki Euler integralini Denklem(4.8) uygulayarak

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+m)\Gamma(c-d+n)}{\Gamma(c+m+n)} \frac{(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n(a+b-\lambda)_n}{(d)_m(c-d)_n} \\
& \quad \times \frac{z^{m+n}}{m!n!} {}_2F_1(a+b-\lambda+n, d+m; c+m+n; z) \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(d)_m(c-d)_n}{(c)_{m+n}} \frac{(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n(a+b-\lambda)_n}{(d)_m(c-d)_n} \frac{z^{m+n}}{m!n!} \\
& \quad \times {}_2F_1(a+b-\lambda+n, d+m; c+m+n; z) \\
&= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \frac{(d)_m(c-d)_n}{(c)_{m+n}} \frac{(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n(a+b-\lambda)_n}{(d)_m(c-d)_n} \frac{z^{m+n}}{m!n!} \\
& \quad \times \frac{(a+b-\lambda+n)_k(d+m)_k}{(c+m+n)_k} \frac{z^{m+n+k}}{m!n!k!} \\
&= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \frac{(a+b-\lambda)_{k+n}(d)_{k+m}}{(c)_{k+m+n}} \frac{(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n}{(d)_m} \frac{z^{m+n+k}}{m!n!k!},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

sonucuna varılır. Bölüm 1'deki Denklem (2.9) özdeşliğini uygulayarak elde edilir. Bu aşamada yazarlar $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A(k, m, n)$ formunu yazmak için $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^{k-m} A(k-m-n, m, n)$ yinelenen serilerin manipölasyon tekniklerini kullanırlar. Yukarıdaki üçlü seri böylece şu şekilde yazılabilir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(a+b-\lambda)_{k-m}(d)_{k-n}(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n}{(c)_k(d)_m} \frac{z^k}{m!n!(k-m-n)!}.$$

$(n-k)!$ özdeşliğinin iki kez uygulanması $([k-m]-n)! = \frac{(-1)^n(k-m)!}{(m-k)_n} = \frac{(-1)^{m+n}k!}{(m-k)_n(-k)_m}$ sonucunu verir. $(d)_{k-n}$ (2.12) özdeşliği ile birlikte aşağıdaki hale gelir

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^{k-m} \frac{(a+b-\lambda)_{k-m}(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m(\lambda-d)_n}{(c)_k(d)_m} \frac{(d)_k(m-k)_n(-k)_m}{(1-d-k)_n} \frac{z^k}{m!n!k!(-1)^m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(a+b-\lambda)_{k-m}(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m}{(c)_k(d)_m} \frac{(d)_k(-k)_m(-1)^m z^k}{m!k!} \\
& \quad \times {}_2F_1(\lambda-d, m-k; 1-d-k; 1)
\end{aligned}$$

Chu-Vandermonde özdeşliğini (4.15) için ${}_2F_1(-n = m-k)$ ile uygulayarak, yazarlar yukarıdaki sonucu şu şekilde yeniden yazarlar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(a+b-\lambda)_{k-m}(\lambda-a)_m(\lambda-b)_m}{(c)_k(d)_m} \frac{(d)_k(-k)_m(-1)^m z^k}{m!k!} \frac{(1-\lambda-k)_{k-m}}{(1-d-k)_{k-m}},$$

$(\alpha)_{k-m} = \frac{(-1)^m (\alpha)_k}{(1-\alpha-k)_m}$ ve $(1-\alpha-k)_k = (-1)^k (\alpha)_k$ özdeşlikleri ile şu hale gelir

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(\lambda)_k (a+b-\lambda)_k z^k}{(c)_k k!} \cdot \frac{(\lambda-a)_m (\lambda-b)_m (-k)_m}{(1+\lambda-a-b-k)_m (\lambda)_m m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_k (a+b-\lambda)_k z^k}{(c)_k k!} \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \lambda-a, \lambda-b, -k; \\ 1+\lambda-a-b-k, \lambda; \end{matrix} 1 \right) \\ &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b; \\ c; \end{matrix} z \right), \end{aligned}$$

Burada son sonuç Pfaff-Saalschütz teoreminden denklem (4.42) kaynaklanmaktadır ve ispat tamamlanmıştır.

Yazarlar daha sonra diğer Erdélyi integrallerini denklem (1.4) ve (1.5) kanıtlamak için benzer teknikleri nasıl kullandıklarını özetlemekte ve belirli ${}_{q+1}F_q$ ve ${}_2F_1$ serilerini birbirine bağlayarak 'Erdélyi tipi integraller' olarak adlandırdıkları yedi benzer integral oluşturmaya devam etmektedirler. Yazarlar ayrıca bu tür seri yöntemlerinin, daha önceki integralleri özel durumlar olarak veren genelleştirilmiş integral formüllerini kanıtlamak için kullanılabileceğini belirtmektedir. Dokuz genellemeden ikisi aşağıda verilmiştir.

$$|\arg(1-z)| < \pi, \Re(\gamma) > \Re(d) \text{ ve } z \neq 1,$$

$$\begin{aligned} {}_3F_2(\nu, \xi, \lambda; \gamma, \delta; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(d)\Gamma(\gamma-d)} \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{\gamma-d-1} (1-tz)^{\delta-\nu-\xi} \\ &\times {}_3F_2(\delta-\xi, \delta-\nu, \lambda; d, \delta; tz) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda-d, \nu+\xi-\delta; \\ \gamma-d; \end{matrix} \frac{(1-t)z}{1-tz} \right) dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\Re(\gamma, \nu, \gamma+d-\lambda-\nu) > 0$ ve $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ için c_n kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olan yakınsak bir seridir,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\lambda)_n (\nu)_n}{(\gamma)_n (d)_n} z^n &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(d)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma+d-\lambda-\nu)} \int_0^1 t^{v-1} (1-t)^{\gamma+d-\lambda-\nu-1} \\ &\times {}_2F_1(d-\lambda, \gamma-\lambda; \gamma+d-\lambda-\nu; 1-t) \phi(zt) dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

Makale 3: ${}_2F_2$ hipergeometrik fonksiyonu için Kummer tipi bir dönüşüm, Paris [57]

$${}_2F_2 \left(a, 1 + \frac{a}{2}; b, \frac{a}{2}; x \right) = e^y {}_2F_2(b-a-1, 2+a-b; b, 1+a-b; -x). \quad (1)$$

Bu makalede Paris ilk olarak Miller dönüşümünün sadece iki serbest parametre a ve b içerdiğine işaret etmekte ve daha sonra genel bir sonuç elde etmeye devam etmektedir. ${}_2F_2(a, d; b, c; x)$ dört ilişkisiz parametre a, b, c, d ile ${}_2F_2(-x)$ cinsinden fonksiyonlarıdır. Bu ${}_2F_2(a, c+1; b, c; x)$ için Kummer tipi bir dönüşüm sağlar ve Miller'ın sonucu (1) bunun özel

bir durumudur. Paris kanıtını Euler'in integral gösterimine dayandırmaktadır

$$\begin{aligned} {}_2F_2(a, d; b, c; x) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1} {}_1F_1(d; c; xt) dt \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{b-a-1}(1-t)^{a-1} {}_1F_1(d; c; x(1-t)) dt \end{aligned} \quad (2)$$

için $\Re(b) > \Re(a) > 0$.

$\Phi(a; b; x + y) = e^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)_n (-y)^n}{(b)_n n!} \Phi(a; b + n; x)$ fonksiyonu Slater [63] konfluent hipergeometrik için ek teorem 3.5 sağlar (Bölüm 4.7 Denklem (4.79)). Yazarlar bu teoremi ${}_1F_1(d; c; x(1-t)) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-d)_n}{(c)_n n!} (-x)^n {}_1F_1(d; c + n; -xt)$ bu şekilde kullanmaktadır. Böylece, toplama ve integral alma işlemlerinin yer değiştirmesi ile Euler integralini tekrar uygulayarak denklem (2) aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned} {}_2F_2(a, d; b, c; x) &= e^x \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-d)_n}{(c)_n n!} (-x)^n \int_0^1 t^{b-a-1}(1-t)^{a-1} {}_1F_1(d; c + n; -xt) dt \\ &= e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-d)_n}{(c)_n n!} (-x)^n {}_2F_2(b-a, d; b, c + n; -x), \end{aligned} \quad (3)$$

Bu istenen genel sonuçtur, çünkü ${}_2F_2(a, d; b, c; x)$ için dört ilişkisiz parametrelili bir ${}_2F_2(-x)$ fonksiyonu cinsinden bir formül sağlar. Son sonucun her iki tarafı da a ve b 'nin analitik fonksiyonları olduğundan, orijinal parametre kısıtlamaları analitik devam ile kaldırılabilir.

Yazar daha sonra bu genel sonucun nasıl daha özel sonuçlar verdiğini göstermektedir. $c = d$ olduğunda, genel özdeşliğin (3) sağ tarafı yalnızca $n = 0$ olan terimi içerir ve dolayısıyla özdeşlik Kummer'in konfluent hipergeometrik fonksiyon için ilk dönüşümüne indirgenir: ${}_1F_1(a; b; x) = e^x {}_1F_1(b-1; b; -x)$. Eğer $d = c + 1$ ise, (3)'ün sağ tarafı sadece $n = 0, 1$ 'den kaynaklanan terimleri içerir ve sonuç

$${}_2F_2(a, c + 1; b, c; x) = e^x \left\{ {}_2F_2(b-a, c + 1; b, c; -x) + \frac{x}{c} {}_1F_1(b-a; b; -x) \right\}. \quad (6)$$

Bunu daha da basitleştirmek için Paris, Pochhammer özdeşliklerinden ve standart basitleştirmelerden yararlanarak toplama ilişkisini kurar

$${}_2F_2(\alpha - 1, \delta + 1; \beta, \delta; x) + \frac{x}{c} {}_1F_1(\alpha; \beta; x) = {}_2F_2(\alpha, \gamma + 1; \beta, \gamma; x),$$

$\beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ için $\delta = \frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha-\beta+\gamma}$. Böylece istenen sonucu elde eder

$${}_2F_2(a, c + 1; b, c; x) = e^x {}_2F_2(b-a-1, f + 1; b, f; -x) \quad (4)$$

$f = \frac{c(1+a-b)}{a-c}$ ifadesi yazılır.

Miller'ın (1) özdeşliğinde, $c = \frac{a}{2}$ yazılmasıyla denklem (4) elde edilir. Paris ayrıca, $d = c + m, m \in \mathbb{N}$ olduğunda, (3)'ün sağ tarafının ${}_2F_2$ fonksiyonlarının sonlu bir toplamına indirgendığını belirtir (s.381).

$${}_2F_2(a, c + m; b, c; x) = e^x \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{x^n}{(c)_n} {}_2F_2(b - a, c + m; b, c + n; -x).$$

Makale 4: Euler'in hipergeometrik dönüşümünün bir genellemesi, Maier [51]

Bu makalede yazar, Gauss hipergeometrik fonksiyonu için Euler'in lineer dönüşümünü ${}_{r+1}F_r(x)$ formundaki daha genel serilere genişletmektedir. Bu formülден ${}_3F_2(-1)$ ve ${}_3F_2(1)$ 'in yeni tek terimli değerlendirmeleri türetilmiştir.

Euler'in dönüşümünü hatırlayın: $|z| < 1, |\arg(1 - z)| < \pi$,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b; c; z).$$

Maier, ${}_2F_1$ adresinin kübik ve kuadratik dönüşümlerinin ${}_3F_2$ adresi için benzerleri olduğunu gösterilmiş olmasına rağmen, Euler dönüşümünün daha genelleştirilmiş biçiminin daha önce fark edilmediğini ileri sürmektedir. Bu gözden kaçırmanın nedeni olarak, bu durumda hipergeometrik fonksiyon parametrelerinin, listelenen hipergeometrik özdeşliklerin aksine, doğrusal olarak kısıtlanmamış olmasını göstermektedir. Maier, Teorem 2.1'de $r = 1$ olduğunda Euler'in dönüşümüne indirgenen Euler'in dönüşümünün genelleştirilmiş biçimini sunmaktadır. Teorem aşağıdaki tanımlı gerektirmektedir.

Tanım H *er $r \geq 1$ için, $U_r \subset \mathbb{C}^{r+1} \times \mathbb{C}^r$ cebirsel çeşitliliği aşağıdaki gibidir $(r+1)$ -boyutlu, r denklemlerinin geçerli olduğu tüm (a, b) 'leri içerir*

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq r+1} a_i &= \sum_{1 \leq i \leq r} b_i \\ \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} a_i a_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} b_i b_j \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq r+1} a_i a_j a_k &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} b_i b_j b_k \\ &\vdots \end{cases}$$

k 'inci denklemde, sol ve sağ taraflar sırasıyla $a_1 \dots a_{r+1}$ ve $b_1 \dots b_r$ 'deki k 'inci temel simetrik polinomlardır.

Teorem 2.1 *$r \geq 1$ ve $(a, b) \in U_r$ için hiçbir $b_i + 1$ pozitif olmayan bir tamsayı değildir,*

$${}_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{r+1}; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1; \end{matrix} x \right) = (1 - x) {}_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_{r+1} + 1; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1; \end{matrix} x \right).$$

İspat Yukarıdaki sonuç, tüm $k \geq 1$ için gösterilebilirse geçerli olacaktır,

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1)_k \dots (a_{r+1})_k}{(b_1 + 1)_k \dots (b_r + 1)_k k!} \\ &= \frac{(a_1 + 1)_k \dots (a_{r+1} + 1)_k}{(b_1 + 1)_k \dots (b_r + 1)_k k!} - \frac{(a_1 + 1)_{k-1} \dots (a_{r+1} + 1)_{k-1}}{(b_1 + 1)_{k-1} \dots (b_r + 1)_{k-1} (k-1)!}, \\ & a_1 \dots a_{r+1} = (a_1 + k) \dots (a_{r+1} + k) - (b_1 + k) \dots (b_r + k)k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'nin sol tarafı k 'dan bağımsızdır ve sağ tarafı k 'da r dereceli bir polinomdur. $n = 1, \dots, r$ için k^n katsayısı $a_{i_1} \dots a_{i_{r+1-n}}$ monomiyallerinin toplamı eksi tüm $b_{j_1} \dots b_{j_{r+1-n}}$ monomiyallerinin toplamı ile orantılıdır. $(a, b) \in U_r$ olduğundan, her katsayı sıfırdır, buradan denklem (2.2)'nin sağ tarafı sol tarafa indirgenir ve teorem kanıtlanır.

Maier'e göre Teorem 2.1, genel r ile bitişik hipergeometrik fonksiyonlar için ilk iki terimli ilişkiyi sağladığından şaşırtıcıdır. Bu teorem iki sonuca daha yol açmaktadır. Teoremin her iki tarafını $(1-x)^{-1}$ ile çarparak ve x 'in katsayılarını eşitleyerek x^n , $n \in \mathbb{N}$ için gösterilebilir,

$$\sum_{j=0}^n \frac{(a_1)_j \dots (a_{r+1})_j}{(b_1 + 1)_j \dots (b_r + 1)_j j!} = \frac{(a_1 + 1)_n \dots (a_{r+1} + 1)_n}{(b_1 + 1)_n \dots (b_r + 1)_n (n)!}, \quad (2.3)$$

Buradan, $a_1 = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$ için şu sonuç çıkar,

$${}_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} -n, a_2, \dots, a_{r+1}; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1; \end{matrix} 1 \right) = \frac{(a_1 + 1)_n \dots (a_{r+1} + 1)_n}{(b_1 + 1)_n \dots (b_r + 1)_n (n)!}. \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'teki sonuç Teorem 2.3 sonlanmayan serilere ve Teorem 2.5'te $(B - A + r)$ dengeli ve $(B - A)$ dengeli iki seriye genişletilmiştir.

Teorem 2.3 $r \geq 1$ ve $(a, b) \in U_R$ için hiçbir $b_i + 1$ pozitif olmayan bir tamsayı değildir,

$${}_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{r+1}; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(b_1 + 1) \dots \Gamma(b_r + 1)}{\Gamma(a_1 + 1) \dots \Gamma(a_{r+1} + 1)}.$$

Teorem 2.5 $r \geq 1$ ve $(a, b) \in U_R$ için hiçbir $b_i + 1$ pozitif olmayan bir tamsayı değilse ve $\Re(B - A) > 0$ ve B pozitif olmayan bir tamsayı değilse,

$${}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{r+1}, A; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1, B; \end{matrix} 1 \right) = \frac{B - A}{B} {}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_{r+1} + 1, A; \\ b_1 + 1, \dots, b_r + 1, B + 1; \end{matrix} 1 \right).$$

Maier, makalesinin 3.4 numaralı teoreminde grup teorisi yaklaşımını kullanarak parametrelerin doğrusal olarak değil de kuadratik olarak kısıtlandığı üç tane ${}_3F_2(1)$ özdeşliği elde etmiştir.

Teorem 3.4 (i) $ab + bc + ca = (d - 1)(c - 1)$ ve $d + e - a - b - c = 2$ için,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ d, e; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)}.$$

(ii) $(a-1)(b-1) = [(a-1) + (b-1) - (e-1)]c$ için,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ c+2, e; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(e-a-b+2)\Gamma(c+2)}{\Gamma(e-a+1)\Gamma(e-b+1)\Gamma(c+1)},$$

$\Re(e-a-b+2) > 0$ olması koşuluyla.

(iii) $(a-1)(b-1) = (d-2)(e-2)$ için,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, 2; \\ d, e; \end{matrix} 1 \right) = \frac{(d-1)(e-1)}{d+e-a-b-2}$$

$\Re(d+e-a-b-2) > 0$ olması koşuluyla.

Sayısal inceleme, (ii) ve (iii) özdeşliklerinin, parametrik fazlalık pozitif olmayan bir reel kısma sahip olsa bile, seri her sonlandığında geçerli olduğunu, dolayısıyla Dixon, Watson ve Whipple'ın ilgili formüllerinden farklı olduğunu göstermektedir. Yazar, ilgili sonucun aşağıdaki gibi olduğuna dikkat çekmektedir

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 2, b, c; \\ \frac{3+b}{2}, 2c; \end{matrix} 1 \right) = \frac{(1+b)(1-2c)}{1+b-2c}$$

Teorem 3.4 (iii)'ün ve Watson formülünün (Bölüm 4.7'teki denklem (4.51) bir özelleştirmesi iken, ilgili sonuç

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, 1-a, c; \\ 2+a, 2c-a-1; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(2c-a-1)\Gamma(c)\Gamma(2+a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(2c-1)\Gamma(1+a)}$$

Teorem 3.4 (ii)'nin ve Bölüm 4.7'teki Whipple formülünün denklem (4.52) özelleştirilmesidir. Maier, çalışmasının son bölümündeki 4.1 ve 4.2 teoremlerinde ${}_3F_2(-1)$ için altı benzer gamma fonksiyonu özdeşliği çıkarmıştır.

Makale 5: Bazı hipergeometrik fonksiyonların integral gösterimi, Driver ve Johnston [19]

Bu makalede yazarlar, $q \leq 2$ olan ${}_{q+1}F_q$ fonksiyonlarının özel bir sınıfı için Euler integral gösteriminin zarif bir kanıtını sunmaktadır. Bu sonuçtan, birim argümanlı belirli ${}_3F_2$ ve ${}_4F_3$ fonksiyonları için özdeşlikler elde etmektedirler.

Teorem 2.1 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için,

$${}_3F_2 \left(\left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; x \right) \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt^2)^{-a} dt.$$

İspat $(\alpha)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{\alpha}{2} \right)_k \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)_k$ ve $\frac{(b)_{2k}}{(c)_{2k}} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \beta(b+2k, c-b)$, $\Re(c) > \Re(b) > 0$, özdeşliklerini kullanarak teoreminin sol tarafı şu şekilde yazılabilir

$$LHS = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_{2k}}{(c)_{2k} k!} x^k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{b+2k-1} (1-t)^{c-b-1} dt.$$

İstenen sonuç, toplama ve integral alma sırasını değiştirerek ve $(1 - xt^2)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} (xt^2)^k$ özdeşliğini uygulayarak $|x| < 1$ için elde edilir. İntegrali kesim düzleminde analitik olduğundan (1'den sonsuza kadar reel eksen boyunca kesilir), sonuç bu bölgedeki tüm x 'ler için de geçerlidir.

Yazarlar daha sonra Teorem 2.1'deki sonucu kullanarak, Teorem 2.3'te kanıtlanan $x = -1$ argümanlı Gauss hipergeometrik serisi cinsinden belirli formdaki bir ${}_3F_2(1)$ serisini ifade etmektedirler. Bu, Whipple'ın [73] eşdeğer formülü (3.7) için sunduğundan daha özlü bir kanıttır.

Teorem 2.3 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ ve $\Re(c - a - b) > 0$,

$${}_3F_2\left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, b; c-a; -1).$$

İspat Yazarlar Teorem 2.1'de $x = 1$ olsun, $(1 - t^2)$ çarpanlarına ayırsın ve sonra (1.18) özdeşliği $(1 + t)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k t^k}{k!}$ biçiminde uygulanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\begin{aligned} & {}_3F_2\left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1\right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b+k-1} (1-t)^{c-b-a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} dt. \end{aligned}$$

Toplama ve integral alma sırasının değiştirilmesi bir beta integrali verir, böylece yukarıdaki sonucun sağ tarafı şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a+k)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} \frac{(b)_k}{(c-a)_k}, \end{aligned}$$

ve sonuç kanıtlanmıştır.

Yazarlar daha sonra $\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha)_k$ özdeşliğini kullanarak sonlanan bir ${}_3F_2(1)$ serisi için aşağıdaki sonucu elde etmektedirler.

Sonuç 2.4 ${}_3F_2\left(-n, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} {}_2F_1(-n, b; c-a; -1)$

$(\alpha)_{qk} = 2^{qk} \left(\frac{\alpha}{q}\right)_k \left(\frac{\alpha+1}{q}\right)_k \cdots \left(\frac{\alpha+q-1}{q}\right)_k$, özdeşliği kullanılarak Teorem 2.1'deki integral özdeşliği aşağıda verildiği gibi ${}_{q+1}F_q(x)$ için geçerli olacak şekilde genelleştirilebilir.

Teorem 2.5 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için,

$$\begin{aligned} & {}_{q+1}F_q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{b+1}{q}, \dots, \frac{b+q-1}{q}; \frac{c}{q}, \frac{c+1}{q}, \dots, \frac{c+q-1}{q}; x\right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1 - xt^q)^{-a} dt. \end{aligned}$$

Yazarlar, bu sonucu yerine koyarak ${}_4F_3(1)$ fonksiyonlarının belirli bir sınıfı için aşağıdaki özdeşliği elde etmişlerdir.

Teorem 2.6 $\Re(c - a - b) > 0$ için,

$$\begin{aligned} & {}_4F_3 \left(a, \frac{b}{3}, \frac{b+1}{3}, \frac{b+2}{3}; \frac{c}{3}, \frac{c+1}{3}, \frac{c+2}{3}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k (b)_k}{k! (c-a)_k} {}_2F_1(-k, b+k; c-a+k; -1). \end{aligned}$$

İspat Teorem 2.5'te $q = 3$ ve $x = 1$ alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$\begin{aligned} & {}_4F_3 \left(a, \frac{b}{3}, \frac{b+1}{3}, \frac{b+2}{3}; \frac{c}{3}, \frac{c+1}{3}, \frac{c+2}{3}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-t^3)^{-a} dt. \end{aligned}$$

$(1-t^3)$ çarpanlarına ayırarak ve $(1+[t+t^2])^{-a}$ şeklinde genişleterek bu sonuç şu hale gelir

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} (1+t)^k t^k dt$$

Yazarlar daha sonra $(1+t)^k$ kuvvetini genişletmekte ve standart özdeşlikleri uygulayarak aşağıdaki ifadeleri elde etmektedir

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} \binom{k}{r} \frac{\Gamma(b+r+k)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a+k+r)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^k (a)_k}{k!} \binom{k}{r} \frac{(b)_{r+k}}{(c-a)_{r+k}} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k (b)_k}{k! (c-a)_k} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{(b+k)_r}{(c-a+k)_r}. \end{aligned}$$

$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} = \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^r (-k)_r}{k!}$, olduğundan istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Yazarlar benzer teknikleri kullanarak Teorem 2.7'de şu sonuca da varmışlardır

$${}_3F_2 \left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; \frac{1}{2} \right) = 2^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} \frac{(c-b)_k}{(c)_k} {}_2F_1(-k, b; c+k; -1),$$

Bu da 2.4 numaralı sonuçla birlikte dönüşüm denklemini verir

$${}_3F_2 \left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; \frac{1}{2} \right) = 2^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} {}_3F_2 \left(-k, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1 \right).$$

Yazarlar, bu nihai sonucun Chaundy tarafından verilen bir dönüşümün özel bir durumu olduğunu belirtmektedir.

Makale 6: Hipergeometrik fonksiyonlarının seri gösterimlerini içeren bazı sonuçlar

Coffey ve Johnston [15]

Bu makale, yukarıda Makale 5 olarak tartışılan [19]'deki daha önceki çalışmayı takiben daha fazla genelleme içermektedir.

Teorem 2.1 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ ve $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ için,

$${}_3F_2 \left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; \frac{1}{r+1} \right) = \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} {}_3F_2 \left(-k, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1 \right).$$

İspat Yazarlar ilk olarak $x = \frac{1}{r+1}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ Teorem 2.1 [19] için, $(1 - \frac{1}{r+1}t^2)$ daha sonra $\left(\frac{r+1}{r}\right)^a \left(1 + \frac{1-t^2}{r}\right)^{-a}$ biçiminde yazarak ve binom teoremini kullanarak şu sonucu elde ederler

$$\begin{aligned} & {}_3F_2 \left(a, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; \frac{1}{r+1} \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left(1 - \frac{1}{r+1}t^2 \right)^{-a} dt \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1+k} (1+t)^k dt \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \int_0^1 t^{b+m-1} (1-t)^{c-b-1+k} dt \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \binom{-a}{k} \binom{k}{m} t^m r^{-k} \beta(b+m, c-b+k) \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} \frac{(c-b)_k}{(c)_k} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (b)_m (-k)_m}{m! (c+k)_m} \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} \frac{(c-b)_k}{(c)_k} {}_2F_1(-k, b; c+k; -1) \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} r^{-k} {}_3F_2 \left(-k, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1 \right), \end{aligned}$$

Teorem 2.3 [19] kullanılarak sonuç kanıtlanmıştır.

Bu sonuç Chaundy'nin bir dönüşümünün özel bir durumudur ([13], Denklem (25)):

$$\begin{aligned} & (1-z)^{-a} {}_{q+1}F_q \left(a, b_1, \dots, b_q; c_1, \dots, c_q; \frac{xz}{z-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{k!} {}_{q+1}F_q(-k, b_1, \dots, b_q; c_1, \dots, c_q; x), \end{aligned}$$

$x = 1, z = -1/r$ ve $q = 2$ ile. Yazarlar ayrıca Chaundy'nin dönüşümünü uygulayarak ${}_{q+1}F_q$ ve zeta fonksiyonunu içeren ilginç bir özdeşlik oluşturmuşlardır (Sonuç 2.3).

Teorem 2.4 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için,

$${}_2F_1\left(\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c+1}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c/2-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c/2)} 2^{-b}.$$

İspat Yazarlar, sağ tarafın pay ve paydasına aynı ek parametreyi koyarak ve [19]'deki Teorem 2.3'ü uygulayarak aşağıdaki sonucu elde ederler

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c+1}{2}; 1\right) &= {}_3F_2\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}; 1\right) \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c/2-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c/2)} {}_2F_1(c/2, b; c/2; -1) \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c/2-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c/2)} {}_1F_0(b; -; -1), \end{aligned}$$

Bu da teoremin sağ tarafıdır.

Yazarlar, $b = 1$ ve $c = 3$ olacak şekilde ${}_2F_1(1/2, 1; 2; 1) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)\Gamma(3/2)} 2^{-1} = \frac{2\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(2)\Gamma(1/2)1/2} = 2$ bu sonucun iyi bilinen bir özel durumunu sunmaktadırlar.

Yazarlar ayrıca, yine [19]'deki bir teoremi kullanarak, belirli ${}_{q+1}F_q$ serilerini Gauss hipergeometrik serileri cinsinden yazmak için aşağıdaki faydalı sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.5 Eğer $\Re(c) > \Re(b) > 0$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} {}_{q+1}F_q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{b+1}{q}, \dots, \frac{b+q-1}{q}; \frac{c}{q}, \frac{c+1}{q}, \dots, \frac{c+q-1}{q}; x\right) \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-b-1}{k} \frac{(-1)^k}{b+k} {}_2F_1\left(a, \frac{b+k}{q}, \frac{b+k}{q} + 1; x\right). \end{aligned}$$

İspat $(1-t)^{c-b-1}$ için kuvvet serisi açılımı ve $v = t^q$ dönüşümü ile [19] Teorem 2.5 şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} {}_{q+1}F_q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{b+1}{q}, \dots, \frac{b+q-1}{q}; \frac{c}{q}, \frac{c+1}{q}, \dots, \frac{c+q-1}{q}; x\right) \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt^q)^{-a} dt \\ = \frac{1}{q} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-b-1}{k} (-1)^k \int_0^1 v^{(b+k)/q-1} (1-xv)^{-a} dv. \end{aligned}$$

Yazarlar bu sonuca Euler'in Bölüm 4.1'teki integral formülünü (4.8) ve $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ yineleme bağıntısını uygulayarak şu sonucu elde etmişlerdir

$$\begin{aligned} {}_{q+1}F_q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{b+1}{q}, \dots, \frac{b+q-1}{q}; \frac{c}{q}, \frac{c+1}{q}, \dots, \frac{c+q-1}{q}; x\right) \\ = \frac{1}{q} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-b-1}{k} (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{b+k}{q})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{b+k}{q}+1)} \times {}_2F_1\left(a, \frac{b+k}{q}, \frac{b+k}{q} + 1; x\right) \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-b-1}{k} (-1)^k \frac{1}{b+k} {}_2F_1\left(a, \frac{b+k}{q}, \frac{b+k}{q} + 1; x\right), \end{aligned}$$

ve istenen sonuç aşağıdaki gibidir.

Yukarıdaki formda $q = 4$ ve $x = 1$ olan bir ${}_5F_4$ serisi için aşağıdaki özel sonuç da [19]'deki Teorem 2.5'in biraz farklı bir şekilde kullanılmasıyla elde edilmiştir.

Teorem 2.6 $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için,

$$\begin{aligned} & {}_5F_4 \left(a, \frac{b}{4}, \frac{b+1}{4}, \frac{b+2}{4}; \frac{b+3}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c+1}{4}, \frac{c+2}{4}, \frac{c+3}{4}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-a}{r} \frac{\Gamma(b+2r)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a+2r)} {}_2F_1(a, b+2r; c-a+2r; -1). \end{aligned}$$

İspat [19]'deki Teorem 2.5'te $q = 4$ ve $x = 1$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} & {}_5F_4 \left(a, \frac{b}{4}, \frac{b+1}{4}, \frac{b+2}{4}; \frac{b+3}{4}, \frac{c}{4}, \frac{c+1}{4}, \frac{c+2}{4}, \frac{c+3}{4}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-t^4)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-a}{r} \int_0^1 t^{2r+b-1} (1-t)^{c-b-1-a} (1+t)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-a}{r} \frac{\Gamma(b+2r)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a+2r)} {}_2F_1(a, b+2r; c-a+2r; -1), \end{aligned}$$

Euler'in integralinin denklem (4.8) uygulanmasıyla elde edilmiştir.

5.1.2. Diğer Sonuçlara Genel Bir Bakış

Bölüm 5.1.1'de tartışılanlar gibi, 20. ve 21. yüzyılın sonlarına ait geniş literatür hipergeometrik özdeşliklerle ilgili sonuçlarla doludur. Bu tür bulguların tümünü sunmak mümkün olmasa da, bu bölümde bazı ilginç sonuçları özetleyerek, kullanılan yöntemler ve sonuçların önemi hakkında kısa yorumlarla birlikte ana bulgular sunulmaktadır. Bu genel bakış aynı zamanda bu alandaki araştırmacılar arasındaki fikir alışverişi ve örtüşme hakkında da fikir vermektedir.

1987 ${}_3F_2(1)$ serisi için Bazı Toplama Formülleri, Lavoie [44] Bu makalede yazarlar, Bölüm 4.7'te Watson teoremine (4.51) bitişik (1) ve (2) toplama formüllerini ve Whipple teoremine (4.52) bitişik (3) ve (4) toplama formüllerini elde etmişlerdir.

(1) $\Re(2c - a - b) > 1$ için,

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c-1; \end{matrix} 1 \right) &= \frac{2^{a+b}\Gamma(c-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(\frac{-1-a-b}{2}+c)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} \\ &\times \left(\frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)\Gamma(\frac{b}{2}+1)}{\Gamma(\frac{-1-a}{2}+c)\Gamma(\frac{-1-b}{2}+c)} + \frac{ab\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}{4\Gamma(c-\frac{a}{2})\Gamma(c-\frac{b}{2})} \right). \end{aligned}$$

(2) $\Re(2c - a - b) > -3$ için,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c+1; \end{matrix} 1 \right) = \frac{2^{a+b}\Gamma(c + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(\frac{1-a-b}{2} + c)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} \\ \times \left(\frac{\Gamma(\frac{a}{2} + 1)\Gamma(\frac{b}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1-a}{2} + c)\Gamma(\frac{1-b}{2} + c)} - \frac{ab\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}{4\Gamma(c - \frac{a}{2} + 1)\Gamma(c - \frac{b}{2} + 1)} \right).$$

(3) $\Re(c) > -1$ için, $a + b = 0$ ve $e + f = 1 + 2c$,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ e, f; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)}{2^{2a+1}\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)} \\ \times \left(\frac{\Gamma(\frac{e-a}{2})\Gamma(\frac{f-a}{2})}{\Gamma(\frac{e-b}{2})\Gamma(\frac{f-b}{2})} + \frac{\Gamma(\frac{e-a+1}{2})\Gamma(\frac{f-a+1}{2})}{\Gamma(\frac{e-b+1}{2})\Gamma(\frac{f-b+1}{2})} \right).$$

(4) $\Re(c) > 1$ için, $a + b = 2$ ve $e + f = 1 + 2c$,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ e, f; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)}{2^{2a-1}(a-1)(c-1)\Gamma(e-a)\Gamma(f-a)} \\ \times \left(\frac{\Gamma(\frac{e-a}{2})\Gamma(\frac{f-a}{2})}{\Gamma(\frac{e-b}{2})\Gamma(\frac{f-b}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{e-a+1}{2})\Gamma(\frac{f-a+1}{2})}{\Gamma(\frac{e-b+1}{2})\Gamma(\frac{f-b+1}{2})} \right).$$

Yorum: Kanıtlar, [60, s.80]'de bulunan ${}_3F_2(1)$ için gamma özdeşlikleri ve üç terimli bitişik bağıntılar dahil olmak üzere klasik sonuçları kullanmaktadır. Yazar bulgularını 'muhtemelen yeni' olarak sunmaktadır, ancak Milgram [53] sadece (2) numaralı denklemin yeni olduğunu bulmuştur.

1992 Watson Teoreminin ${}_3F_2$ Toplamı Üzerine Genelleştirilmesi, Lavoie ve diğerleri [45]

Bu çalışma Lavoie'nin 1987 yılında yayınladığı ${}_3F_2(1)$ serisi için toplama formülleri üzerine olan çalışmasının devamı niteliğindedir [44]. Yazarlar, ilişkili ${}_3F_2(1)$ serileri için 25 toplam elde etmek amacıyla Watson Teoremi denklem (4.51)'e bitişik hipergeometrik fonksiyon ilişkilerini tekrar tekrar uygulamaktadır. Bunlardan yola çıkarak bir Watson teoreminin (4.51) bir uzantısı olarak ${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ \frac{a+b+i+1}{2}, 2c+j; \end{matrix} 1 \right)$ formundaki seriler için genel formül, katsayılar $i, j = -2, -1, 0, 1, 2$ için bir tabloda verilmiştir.

Dixon Teoreminin ${}_3F_2$ Toplamı Üzerine Genelleştirilmesi, Lavoie ve diğerleri [46]

Yazarlar, 1992'deki çalışmalarının [45] devamı olarak, bu makalede hipergeometrik fonksiyonlar için bitişik bağıntıları sistematik olarak kullanarak Dixon'ın Bölüm 4.7 (4.47)'deki toplama teoremine bitişik 38 farklı formül oluşturmuşlardır. Bu ayrı sonuçlar daha sonra yapay olarak oluşturulmuş tek bir formülde birleştirilir ve bu formül Dixon teoreminin genelleştir-

ilmiş halini verir

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ 1+i+a-b, 1+i+j+a-c; 1 \end{matrix} \right) \\
&= \frac{2^{-2c+i+j} \Gamma(1+i+a-b) \Gamma(1+i+j+a-c) \Gamma(b-\frac{i}{2}-\frac{|j|}{2}) \Gamma(c-\frac{1}{2}[i+j+|i+j|])}{\Gamma(a-2c+i+j+1) \Gamma(a-b-c+i+j+1) \Gamma(b) \Gamma(c)} \\
&\times \left\{ A_{i,j} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}-c+\frac{1}{2}+\lfloor \frac{i+j+1}{2} \rfloor) \Gamma(\frac{a}{2}-b-c+1+i+\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor)}{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{a}{2}-b+1+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor)} \right\} \\
&+ \left\{ B_{i,j} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}-c+1+\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor) \Gamma(\frac{a}{2}-b-c+\frac{3}{2}+i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor)}{\Gamma(\frac{a}{2}) \Gamma(\frac{a}{2}-b+\frac{1}{2}+\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor)} \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

$\Re(a-2b-2c) > -2-2i-j$ için, $i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, 3$,

Burada $\lfloor x \rfloor$, x 'ten küçük veya x 'e eşit en büyük tamsayıyı gösterir ve $A_{i,j}$ ve $B_{i,j}$ için a, b, c parametrelerindeki polinom ifadeleri bir tabloda verilmiştir.

Yorum: Birçok klasik toplama formülünün bu genel formun özel durumları olduğu bulunmuştur; örneğin, Dixon'ın sonucu denklem (4.47) $i = j = 0$ olduğunda elde edilir. Yazarlar, ana sonuçlarından belirli bir genelleştirilmiş hipergeometrik seri sınıfının birçok yeni toplamını değerlendirmiş ve digamma fonksiyonunu içeren bazı sınırlayıcı durumlar sağlamışlardır. Sonuçların bilgisayarda elde edilmesi ve kontrol edilmesinde Mathematica'nın kullanıldığını belirtmektedirler.

1996 Whipple teoreminin bir ${}_3F_2$ toplamı üzerindeki genellemeleri, Lavoie ve diğerleri [43]

Bu makalenin yazarları, 1994 yılındaki çalışmalarına [46] benzer prosedürler kullanarak, Bölüm 4.7'teki Whipple teoremi denklem (4.52) için aşağıdaki genelleştirilmiş formülü elde etmişlerdir.

$a+b=1+i+j$, $e+=2c+1+i$ için,

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ e, f; 1 \end{matrix} \right) \\
&= \frac{\Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(c-\frac{j}{2}-\frac{|j|}{2}) \Gamma(e-c-\frac{i}{2}-\frac{|i|}{2}) \Gamma(a-\frac{1}{2}[i+j+|i+j|])}{2^{2a-i-j} \Gamma(e-a) \Gamma(f-a) \Gamma(e-c) \Gamma(a) \Gamma(c)} \\
&\times \left\{ A_{i,j} \frac{\Gamma(\frac{e}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}(1-(-1)^i)) \Gamma(\frac{f}{2}-\frac{a}{2})}{\Gamma(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}-\frac{i}{2}+\lfloor \frac{-j}{2} \rfloor) \Gamma(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}-\frac{i}{2}+((-1)^j/4)((-1)^i-1)+\lfloor \frac{-j}{2} \rfloor)} \right. \\
&+ B_{i,j} \frac{\Gamma(\frac{e}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}(1+(-1)^i)) \Gamma(\frac{f}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{e}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\lfloor \frac{-j+1}{2} \rfloor) \Gamma(\frac{f}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+((-1)^j/4)(1-(-1)^i)+\lfloor \frac{-j+1}{2} \rfloor)} \Big\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

Burada $\lfloor x \rfloor$ x 'ten küçük veya x 'e eşit en büyük tamsayıyı $i, j = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0$ ve $A_{i,j}$ ve $B_{i,j}$ katsayıları bir tabloda verilen a, b, c parametrelerindeki çeşitli polinom ifadeleridir.

Yorum: Yazarlar önce [6]'deki Bailey denklemini (3.2.1) kendisine uyguluyor ve ardından değişkenleri değiştirerek ${}_3F_2(1)$ serisi için iki terimli bir özdeşlik elde ediyor.

Daha sonra Bölüm 4.7’teki Dixon teoremini (4.47) ve Legendre’nin gamma fonksiyonu için çoğaltma formülünü (3.17) uygulayarak Whipple teoreminin bir formunu elde ederler. Daha sonra [46]’de türetilen Dixon teoreminin diğer 38 formunu benzer bir şekilde kullanıyorlar ve Whipple teoremini genelleştirmek için bunları tek bir yapay formülde birleştiriyorlar. Sınırlayıcı bir durum ${}_2F_1(a, 1 + i + j - a; e; 1/2)$ için benzer özdeşlikler sağlar.

1997 ${}_3F_2(1)$ için genelleştirilmiş Watson toplama formülü, Lewanowicz [49]

Lavoie ve diğerlerinin [44, 43] önceki çalışmalarını takiben, yazar Teorem 2.4’te sabit j ve keyfi bir $i \in \mathbb{Z}$ ile ${}_3F_2(a, b, c; d + \frac{i}{2}, 2c + j; 1)$ için analitik bir formül sunmaktadır. Yazar ayrıca Teorem 3.1 ve 4.1’de Lavoie ve diğerleri tarafından gerçekleştirilen ${}_3F_2(a, 1 + i + j - a, c; e, 1 + i + 2c - e; 1)$ ve ${}_3F_2(a, b, c; 1 + i + a - b, 1 + i + j + a - c; 1)$ değerlendirilmesinin ${}_3F_2(a, b, c; d + \frac{i}{2}, 2c + j; 1)$ indirgenmesidir.

Yorum: Lavoie ve diğerlerinin yaklaşımının aksine, yazar kendi sonucunun çok sayıda katsayının saklanması gerektirmeyen doğal bir formül olduğunu düşünmektedir. Kullanılan yöntem Maple veya Mathematica gibi bir bilgisayar cebiri dilinde de uygulanabilir.

1997 Kampé de Fériet fonksiyonunun indirgenebilirliği üzerine, Exton [26] Bu makalede yazar, Kampé de Fériet çift hipergeometrik fonksiyonlarının yeni indirgenebilir durumlarını türetmek için temel seri manipülasyonu tekniklerini ve neredeyse dengeli hipergeometrik seriler için toplama formüllerini uygulamaktadır. Ayrıca özel durumlar olarak tek hipergeometrik fonksiyonlar için aşağıdaki yeni bağıntıları elde etmektedir.

$$e^y {}_2F_2\left(a, 1 + \frac{a}{2}; \frac{a}{2}, b; -y\right) = {}_2F_2(2 + a - b, b - a - 1; b, 1 + a - b; y) \quad (12)$$

$$(1 - y)^{-h} {}_3F_2\left(h, a, 1 + \frac{a}{2}; \frac{a}{2}, b; \frac{y}{1 - y}\right) = {}_3F_2(h, 2 + a - b, b - a - 1; b, 1 + a - b; y) \quad (13)$$

$${}_2F_1\left(a, -\frac{e}{2}; 1 + a + \frac{e}{2}; x\right) = (1 - x)^e {}_3F_2\left(a + e, 1 + \frac{a}{2} + \frac{e}{2}, \frac{e}{2}; 1 + a + \frac{e}{2}, \frac{a}{2} + \frac{e}{2}; x\right) \quad (14)$$

$${}_2F_1(a + d - 1, -2a; d; y) = (1 - y)^{-a} {}_4F_3\left(a + d - 1, -a, 2 - d - 2a, d + 2a - 1; d, d + a, 1 - d - 2a; y\right) \quad (15)$$

Yorum: Özdeşlik (12), Bölüm 5.1.1’de tartışıldığı gibi Miller tarafından 2003 tarihli makalesinde [54] kullanılan sonuçtur.

Gauss’un ikinci toplama teoreminden doğan yeni hipergeometrik özdeşlikler, Exton [25]

Bu makalede Exton, genel hipergeometrik dönüşümü elde etmek için bir çift serinin

temel manipölasyonunu ve Gauss'un toplama teoremi gibi ilişkileri kullanır

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_C)_n \left(\frac{a}{2}\right)_n (-2x)^n}{(d_D)_n n!} {}_{C+1}F_D \left(\begin{matrix} c_1 + n, \dots, c_C + n, a + 2n; \\ d_1 + n, \dots, d_D + n; \end{matrix} x \right) = {}_{2C+1}F_{2D} \left(\begin{matrix} \frac{c_C}{2}, \frac{1}{2} + \frac{c_C}{2}, \frac{a}{2}; \\ \frac{d_D}{2}, \frac{1}{2} + \frac{d_D}{2}; \end{matrix} -4^{C-D} x^2 \right) \quad (1.8)$$

Slater [64]'de bulunan ve burada (1.9)-(1.19) olarak numaralandırılan çeşitli bilinen toplama teoremlerini (1.8)'e uygulayarak, daha sonra (2.1)-(2.9) ve (3.1)-(3.9) olarak numaralandırılan ve $-1, 1/2$ ve $27/8$ argümanlarına sahip çeşitli ${}_{C+1}F_D$ fonksiyonlarını içeren bir dizi önerilen yeni özdeşlik çıkarır. Bunlardan ikisi aşağıda verilmiştir.

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\frac{(1+a)_n}{1+\frac{a}{2}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, -n; \\ \frac{1+a}{2}; \end{matrix} -\frac{1}{2} \right) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{-n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{a}{2}; \\ \frac{1+a+n}{2}, 1+\frac{a+n}{2}; \end{matrix} -1 \right), \quad (3.1)$$

ve

$$\frac{(1+a)_n}{(1+\frac{a}{2})_n} {}_1F_0 \left(\begin{matrix} -n; \\ -; \end{matrix} 2^{-n} \right) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} 1+\frac{a}{4}, \frac{1-n}{2}, \frac{-n}{2}, \frac{a}{2}; \\ \frac{a}{4}, \frac{1+a+n}{2}, 1+\frac{a+n}{2}; \end{matrix} -1 \right). \quad (3.3)$$

1999 ${}_3F_2$ birim argümanlı hipergeometrik fonksiyon için yeni bir iki terimli bağıntı, Exton [28]

Yazar yeni bir iki terimli bağıntı ve gamma fonksiyonları cinsinden neredeyse kutuplaşmış ${}_3F_2(1)$ serisi için yeni bir toplama formülü elde etmiştir. Onun iki terimli ilişkisi şöyledir

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ d, e; \end{matrix} 1 \right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(d+e-a-b)\Gamma(e-c)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} d-a, d-b, c; \\ d, d+e-a-b; \end{matrix} 1 \right). \quad (11)$$

Bu, Thomae'nin [67]'teki teoremine (4.2.8) benzer, ancak ${}_3F_2(1)$ fonksiyonlarından biri iyi konumlandırılmışsa, bunun diğeri için geçerli olması gerekmediğinden farklıdır $d = 1+a-b$ ve $e = 1+a-c$ ile, bu sonuç toplama formülünü verir

$$\begin{aligned} & {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c; \\ 1+a-b, a+2b-c-1; \end{matrix} 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(1+2a-b-c)\Gamma(2-b-2c)\Gamma(\frac{3-b}{2})\Gamma(1+a-b)\Gamma(a-c+\frac{1-b}{2})}{\Gamma(2-b)\Gamma(a+\frac{1-b}{2})\Gamma(\frac{3+b}{2}-c)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+2a-b-2c)} \end{aligned} \quad (13)$$

Yorum: Özdeşlik (11), Gauss toplama formülü denklem (4.13), Pfaff-Saalschütz teoremi denklem (4.42) ve Dixon teoremi denklem (4.47) ile birlikte serilerin manipölasyonu ile kurulmuştur.

1999 Yeni bir hipergeometrik fonksiyon üreten ilişki, Exton [27] ${}_2F_1(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2) = \frac{1}{2}[(1+x)^{-2\lambda} + (1-x)^{-2\lambda}]$ (Giriş 7.3.1.105 [59, s.46]). Bu makalede Exton, denklem (8),

s.55 olarak verilen $|t| < 1$ için aşağıdaki hipergeometrik üreten ilişkiyi türetmek için bu indirgeme formülünü kullanır.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\lambda + 1/2)_n}{(1/2)_n} {}_{p+2}F_q \left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} - n, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} x \right) \frac{t^{2n}}{n!} \\ &= \frac{1}{2} (1+t)^{-2\lambda} {}_{p+2}F_q \left(\begin{matrix} \lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} \frac{xt^2}{(1+t)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (1-t)^{-2\lambda} {}_{p+2}F_q \left(\begin{matrix} \lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} \frac{xt^2}{(1-t)^2} \right) \end{aligned}$$

2002 Bazı Hipergeometrik Dönüşüm Aileleri ve İlişkilerin Oluşturulması, Lin ve diğerleri [50]

Yazarlar Exton'un hipergeometrik üreteç bağıntısına, [27]'deki denklem (8)'e atıfta bulunmaktadır. Yazarlar bu sonucu, Laguerre polinomları ile ilişkili genel bir polinom sistemi için üretme bağıntıları da dahil olmak üzere bir üretme bağıntıları ailesi türetmek için genişletmektedir. İlk olarak polinomları tanımlarlar

$S_n^{l,m}(z; \mu)$ için,

$$S_n^{l,m}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{(-n)_{mk}}{k!} \left(\frac{1}{2} - \mu - n \right)_{l,k} A_k z^k, \quad (3.2)$$

Burada $l, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, [v], v$ 'den küçük veya v 'ye eşit en büyük tamsayıyı ve $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlı bir reel veya kompleks parametre dizisidir. Yazarlar daha sonra standart seri tekniklerini kullanarak $|t| < 1; l, m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde verilen bir üreten bağıntı ailesi türetmektedir

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\lambda + 1/2)_n}{(\mu + 1/2)_n} S_n^{l,m}(z; \mu) \frac{t^{2n}}{n!} = (1+t)^{-2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{mk} (\lambda + 1/2)_{mk}}{k! (\mu + 1/2)_{(m-l)/k}} \\ & \times \left[(-1)^{l+m} z \left(\frac{t}{1+t} \right)^{2m} \right]^k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2\lambda + 2mk, \mu + (m-l)k; \\ 2\mu + 2(m-l)k; \end{matrix} \frac{2t}{1+t} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bu üretme bağıntısı daha sonra (4.5), (4.6) ve (4.9) denklemlerindeki polinomlar için yeni üretme bağıntısı aileleri türetmek ve genellemelerden çıkan özel sonuçları elde etmek için kullanılır. $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$ bu ifade Laguerre polinomlarını içeren özel durumları içerir. Aynı zamanda $\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(n)}(x) \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$ denklem (5.20)'de denklem 152'nin özel bir durumu olan zarif sonuçlara da yol açmaktadır. (4) Rainville'de [60] ve $\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(n)}(x) \frac{x^n}{(n+1)!} = e^x$ denkleminde (5.21) bulunmuştur.

2002 Kummer özdeşliğinin bir genellemesi,

Vidunas [68] Kummer özdeşliği ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b; \\ c; \end{matrix} -1 \right) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)} c - a + b = 1$ için geçerlidir.

Bu makalede yazar, $c - a + b$ herhangi bir tamsayı olduğunda ${}_2F_1(-1)$ için daha genel bir değerlendirme sunmaktadır. Genelleme, Kummer formülü için bir seriye bitişik olan ${}_2F_1(-1)$ serileri için geçerlidir ve şu şekilde verilir

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b; \\ a-b; \end{matrix} -1 \right) = P(n) \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{a+1}{2}-b)} + Q(n) \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(\frac{a}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{a}{2}-b)}, \quad (2)$$

Burada n bir tamsayıdır ve $P(n), Q(n)$ her n tamsayısı için a, b 'de rasyonel fonksiyonlardır. n negatif olmayan bir tamsayı veya -1 için Teorem 1 aşağıdaki fonksiyonları sağlar

$$P(n) = \frac{1}{2} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, b; \\ -n, \frac{a}{2}; \end{matrix} 1 \right), Q(n) = \frac{1}{2} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, b; \\ -n, \frac{a+1}{2}; \end{matrix} 1 \right),$$

Burada $(a)_n \neq 0$ ve $a - b$ sıfır veya negatif bir tamsayı değildir. $P(n), Q(n)$ için diğer olası ifadeler (5) - (7) ve (16) - (19) denklemlerinde verilmiştir.

Yorum: : Genelleştirici formül (2), a 'ya bitişik serileri içerir. Kummer formülü için seri, iki gamma terimi sırasıyla ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-1, b; \\ a-b; \end{matrix} -1 \right)$ ve $\frac{a-b}{a-2b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b; \\ 1+a-b; \end{matrix} -1 \right)$ 'a eşit olduğundan, rasyonel fonksiyonlar $P(n), Q(n)$ için çeşitli ifadeler türetmek için, yazarlar [73]'deki Whipple formülü (8.41) gibi standart dönüşümleri kullanırlar (Bölüm 4.1'teki Teorem 4.18. Özel durumlarda, $P(n)$ veya $Q(n)$ kaybolur ve ${}_2F_1(-1)$ 'in tek bir gamma terimi ile değerlendirilmesini sağlar.

2004 Digamma ve Poligamma Fonksiyonlarının Bazı Toplamları Üzerine, Milgram [52]

Bu faydalı çalışmada yazar, digamma ve poligamma fonksiyonlarını içeren ve birçoğunun yeni yayınlanmış sonuçlar olduğunu iddia ettiği bir dizi toplama formülünü bir araya getirmektedir. Bu sonuçlar harmonik sayılar ve Riemann'ın zeta fonksiyonu ile ilişkileri de içermektedir. ${}_3F_2(1)$ için (9), (11) ve (12) özdeşlikleri daha genel sonuçların özel durumlarıdır ancak standart tablolarda listelenmemiştir. Daha sonra digamma ve poligamma fonksiyonlarını içeren çok sayıda özdeşlik elde etmeye devam eder.

2010 Dixon teoreminin bir ${}_3F_2$ toplamı üzerindeki bitişik uzantıları, Choi [14]

1994 tarihli makalelerinde [46], Lavoie ve arkadaşları klasik Dixon teoremi ile yakından ilişkili bir formül oluşturmuşlar ve 5 durumu hariç tutan sonuçlar elde etmişlerdir. Bu makalede yazar $(i, j) = (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3)$ durumları için toplama formülleri vermiştir.

Bu kısa genel bakışta, hipergeometrik özdeşliklerle ilgili yakın zamanda yayınlanan sonuçlardan bir özet verildi. Bu kapsamlı bir inceleme olarak tasarlanmamış olsa da, literatür genel olarak bu tür çok sayıda özdeşliğin üretilmeye devam ettiği izlenimini vermektedir; bunlardan bazıları muhtemelen mevcut özdeşliklerin uyarlamalarıdır. Özdeşliklerin bu

şekilde çoğalmasına karşılık olarak, birçok araştırmacı mevcut ve önerilen sonuçları analiz etmek ve sistematik olarak yenilerini üretmek için bilgisayar tabanlı tekniklere yönelmiştir. Dolayısıyla, bu noktada klasik yöntemlerden bilgisayar teknolojisinin hipergeometrik özdeşlikler alanında oynadığı rolü değerlendirir.



KAYNAKLAR

- [1] M. J Ablowitz and A.S. Fokas. *Complex variables: Introduction and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [2] S. A. Abramov and H.Q. Le. A criterion for the applicability of Zeilberger’s algorithm for rational functions. *Discrete Mathematics*, 259:1–17, 2002.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [4] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [5] E. Artin. *The Gamma Function (translated by Michael Butler)*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [6] W. N. Bailey. *Generalized Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1935, Reprinted: Stechert-Hafner, New York, 1964.
- [7] H. Bateman. The solution of linear differential equations by means of definite integrals. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, (21):171–196, 1909.
- [8] W. W. Bell. *Special Functions for Scientists and Engineers*. D, Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York, 1968.
- [9] D. Berić and et al. Effectivity of hypergeometric function application in the numerical simulation of the helicopter blades theory. *J. Mech. Eng.*, 56(1):18–22, 2010.
- [10] B. C. Berndt. *Ramanujan’s Notebooks, Part II*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [11] B. Carlson. *Special Functions of Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1977.
- [12] M. A. Chaudry and S. M. Zubair. *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2002.

- [13] T. W. Chaundy. An extension of hypergeometric functions (1). *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, 14:55–78, 1943.
- [14] J. Choi. Contiguous extensions of Dixon’s theorem on the sum of a ${}_3F_2$. *J. of Inequalities and Applications*, pages 1–18, 2010.
- [15] M. W. Coffey and S. J. Johnston. Some results involving series representations of hypergeometric functions. *J. Comp. Appl. Math.*, 233:674–679, 2009.
- [16] P. J. Davis. Leonhard Euler’s integral: A historical profile of the gamma function. *The American Mathematical Monthly*, 66(10):849–869, 1959.
- [17] K. Dilcher. Hypergeometric functions and fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 38(4):342–363, 2000.
- [18] K. Driver and M. Möller. Quadratic and cubic transformations and zeros of hypergeometric polynomials. *J. Comp. Appl. Math.*, 142(2):411–417, 2002.
- [19] K. A. Driver and S. J. Johnston. An integral representation of some hypergeometric functions. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 25:115–120, 2006.
- [20] W. Duke and Ö. İmamoğlu. The zeros of the weierstrass $\wp$ -function and hypergeometric series. *Math. Ann.*, 340(4):897–905, 2008.
- [21] R. El Attar. *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Lulu Press, USA, 2006.
- [22] A. Erdélyie. Transformation of hypergeometric integrals by means of fractional integration by parts. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (9):176–189, 1939.
- [23] A. Erdélyie, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [24] L. Euler. De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, 5:36–57, 1730.
- [25] H. Exton. New hypergeometric identities arising from gauss’s second summation theorem.

- J. Comp. Applied Math.*, 88:269–274, 1997.
- [26] H. Exton. On the reducibility of the kampé de fériet function. *J. Comp. Applied Math.*, 83:119–121, 1997.
- [27] H. Exton. A new hypergeometric generating relation. *J. Indian Acad. Math*, 21:53–57, 1999.
- [28] H. Exton. A new two-term relation for the ${}_3F_2$ hypergeometric function of unit argument. *J. Comp. Applied Math.*, 106:395–397, 1999.
- [29] O. J. Farrell and B. Ross. *Solved problems in Analysis, as applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel functions*. Dover Publications, 1971.
- [30] S. D. Fisher. *Complex Variables*. Dover Publications, New York, 1990.
- [31] N. Fuss. *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géométries du XVIIIème siècle*, volume 1. Saint-Pétersbourg, 1843.
- [32] G. Gasper and M. Rahman. *Basic hypergeometric series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [33] C. F. Gauss. Disquisitiones generales circa seriem infinitam. *Commen. Soc. Reg. Sci. Götting. Rec.*, 2, 1812.
- [34] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [35] J. P. Hannah. Identities for the gamma and hypergeometric functions: an overview from euler to the present. *Master of Science Thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*. A. Hernández-Galeana, 2013.
- [36] J. Havil. *Gamma: Exploring Euler’s constant*. Princeton University Press, 2003.
- [37] H. Hochstadt. *The Functions of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1971.

- [38] E. Jahnke and F. Emde. *Tables of higher functions*,. 6th Ed, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [39] C. Joshi and Y. Vyas. Extensions of certain classical integrals of Erdélyi for gauss hypergeometric functions. *J. Comp. Appl. Math.*, 160:125–138, 2003.
- [40] S. Kanemitsu and H. Tsukada. *Vistas of Special Functions*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007.
- [41] J. N. Kapur. Application of generalized hypergeometric functions to generalized birth and death processes. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 9:1059–1069, 1978.
- [42] W. Koepf. *Hypergeometric summation: An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [43] J. L. Lavoie, F. Grondin, and A. K. Rathie. Generalizations of Whipple’s theorem on the sum of a ${}_3F_2$. *J. Comp. Appl. Math.*, 72:293–300, 1996.
- [44] J. L. Lavoie. Some summation formulas for the series ${}_3F_2(1)$. *Math. of Comp.*, 49(179):269–274, 1987.
- [45] J. L. Lavoie, F. Grondin, and A. K. Rathie. Generalizations of Watson’s theorem on the sum of a ${}_3F_2$. *Indian J. of Math*, 34:23–32, 1992.
- [46] J. L. Lavoie, F. Grondin, A. K. Rathie, and K. Arora. Generalizations of Dixon’s theorem on the sum of a ${}_3F_2$. *Math. of Comp.*, 62(205):267–276, 1994.
- [47] N. N. Lebedev. *Special functions and their Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- [48] A. M. Legendre. *Exercices De Calcul intégral Sur Divers Ordres de Transcendentes Et Sur Les Quadratures*. Vol 1, Nabu Press, 2010.
- [49] S. Lewanowicz. Generalized Watson’s summation formula for ${}_3F_2(1)$. *J. Comp. Appl. Math.*, 86(2):375–386, 1997.
- [50] S. Lin, H. Srivastava, and P. Wang. Some families of hypergeometric transformations and

- generating relations. *Mathematical and computer modelling*, 36:445–459, 2002.
- [51] R. Maier. A generalization of Euler’s hypergeometric transformation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(1):39–57, 2006.
- [52] M. S. Milgram. On some sums of digamma and polygamma functions. *arXiv preprint math/0406338*, 2004.
- [53] M. S. Milgram. On hypergeometric ${}_3F_2(1)$. *arXiv preprint math/0603096*, 2006.
- [54] A. R. Miller. On a Kummer-type transformation for the generalized hypergeometric function ${}_2F_2$. *J. Comp. Appl. Math.*, 157:507–509, 2003.
- [55] R. J. Muirhead. Expressions for some hypergeometric functions of matrix argument with applications. *J. Multivariate. Anal.*, 5:283–293, 1975.
- [56] R. E. Norton. *Complex Variables for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2010.
- [57] R. B. Paris. A Kummer-type transformation for a ${}_2F_2$ hypergeometric function. *J. Comp. Appl. Math.*, 173:379–382, 2005.
- [58] M. Petkovšek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger. *A = B*, A. K. Peters. Wellesley, Massachusetts, 1996.
- [59] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev. *Integrals and Series*. Vol 3, Gordon and Breach, New York, 1990.
- [60] E. D. Rainville. *Special Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [61] E. B. Saff and A. D. Snider. *Complex Analysis*. Prentice Hall, Pearson Education Inc, 2003.
- [62] J. B. Seaborne. *Hypergeometric Functions and their Applications*. Springer Verlag, New York, 1991.

- [63] L. J. Slater. *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [64] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [65] I. N. Sneddon. *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.
- [66] N. M. Temme. *Special functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [67] J. Thomae. Ueber die functionen, welche durch reihen von der form dargestellt werden. 87:26–73, 1879.
- [68] R. Vidunas. A generalization of Kummer’s identity. *Rocky Mt. J. of Math.*, 32(2):919–935, 2002.
- [69] N. J. Vilenkin. Special functions and the theory of group representation. *Translations of Math. Monographs 22, Amer. Math. Soc.*, 1968.
- [70] Z. X. Wang and D. R. Guo. *Special Functions*. World Scientific, Singapore, 2010.
- [71] R. L. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and Integral: An Introduction to Analysis*. Chapman and Hall, 1977.
- [72] F. J. Whipple. A group of generalized hypergeometric series: relations between 120 allied series of the type $F(a, b, c; e, f)$. *Proc. London Math. Soc.*, 23:104–114, 1924.
- [73] F. J. Whipple. On series allied to the hypergeometric series with argument- 1. *Proc. London Math. Soc.*, 30:81–94, 1930.
- [74] E.T Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, London, 1927.
- [75] D. Zeilberger. Theorems for a price: Tomorrow’s semi-rigorous mathematical culture.

Notices Amer. Math. Soc., 40:978–981.

- [76] D. Zeilberger. A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. *Discrete mathematics*, 80:207–211, 1990.
- [77] D. Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symb. Comput.*, 11:195–204, 1991.
- [78] P. Zhou. *Applications of computer algebra to the theory of hypergeometric series*. A Dissertation presented to The Faculty of the Graduate School of Arts and Sciences, Brandeis University, 2003.

