



# POWER GRAFLARIN İNDEKSLERİ

Volkan AŞKIN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2024

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
  - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
  - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
  - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
  - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Volkan AŞKIN

02/02/2024

POWER GRAFLARIN İNDEKSLERİ  
(Doktora Tezi)

Volkan AŞKIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Şubat 2024

ÖZET

Sonlu mertebeden devirli bir  $G$  grubunun yönlendirilmemiş (yönsüz) power grafini  $P(G)$  ile göstereceğiz. Sonlu mertebeden herhangi bir devirli grup  $(Z_n, +)$  devirli grubuna izomorf olduğundan yani,  $G \cong Z_n$  olacağından  $G = (Z_n, +)$  alınmıştır. Bu tez çalışması süresince  $p, q$  farklı asallar,  $k$  ve  $r$  pozitif tamsayı olmak üzere öncelikle,  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  durumlarına göre  $P(Z_n)$  power grafinin Euler  $\phi$  fonksiyon yardımıyla bazı indeks hesaplamaları üzerine yeni teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin, hangi durumlarda eşitlik ya da eşitsizlik olduğunu ortaya koyan, bazı indeks hesaplamaları üzerine yeni teoremler ortaya konulmuştur.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Power graf, sonlu devirli grup, Wiener indeksi, kenar-Wiener indeksi, hiper-Wiener indeksi, Harary indeksi,  $SK$ ,  $SK_1$  ve  $SK_2$  indeksleri, genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi, birinci Zagreb indeksi, ikinci Zagreb indeksi, genelleştirilmiş Randic indeksi, Randic indeksi, F- indeksi ( Furtula indeksi), hiper-Zagreb indeksi

Sayfa Adedi : 231

Danışman : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

## INDICES OF POWER GRAPHS

(Ph.D. Thesis)

Volkan AŞKIN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2024

## ABSTRACT

We will denote the undirected power graph of a finite-order cyclic group  $G$  by  $P(G)$ . Since any cyclic group of finite order  $(Z_n, +)$  is isomorphic to the cyclic group, that is, Since  $G \cong Z_n$  will be, so  $G = (Z_n, +)$  is taken. Throughout this thesis,  $p, q$  are distinct primes,  $k$ , and  $r$  be a positive integer, firstly, new theorems have been obtained on some index calculations of the  $P(Z_n)$  power graph with the help of Euler  $\phi$  function according to the cases  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  and  $n = p^k \cdot q^r$ . Later, new theorems have been put forward on some index calculations that reveal in which cases the  $P(Z_n)$  power graph for a general  $n \in Z^+$  is equal or inequal.

Science Code : 20401

Key Words : Power graph, finite cyclic group, Wiener index, edge-Wiener index, hyper-Wiener index, Harary index,  $SK$ ,  $SK_1$  and  $SK_2$  indices, first general Zagreb index, first Zagreb index, second Zagreb index, general Randic index, Randic index, F-index (Furtula index), hyper-Zagreb index

Page Number : 231

Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve deneyimlerinden yararlanmamı sağlayan, yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Ogün DOĞRU ve Prof. Dr. Naim TUĞLU'ya, ayrıca hayatımın her aőamasında yanımda olan çok değerli aileme teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ .....	3
2.1. Genel Bilgiler .....	3
2.2. Graf Teoride Bazı Temel Tanım ve Kavramlar .....	6
2.3. Bazı Özel Graflar .....	11
2.4. Basit Bağlantılı Grafların İndeksleri .....	15
3. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN POWER GRAFLARI.....	27
3.1. Gruplar ve Gruplar Üzerindeki Power Graflar.....	27
4. POWER GRAFLARIN İNDEKSLERİ .....	37
4.1. Power Grafların Wiener ve Kenar-Wiener İndeksleri .....	37
4.2. Power Grafların Hiper-Wiener İndeksi .....	65
4.3. Power Grafların Harary İndeksi .....	79
4.4. Power Grafların $SK$ , $SK_1$ ve $SK_2$ İndeksleri .....	92
4.5. Power Grafların Genelleştirilmiş Birinci Zagreb İndeksi .....	145
4.6. Power Grafların Birinci Zagreb İndeksi.....	159
4.7. Power Grafların İkinci Zagreb İndeksi .....	169
4.8. Power Grafların Genelleştirilmiş Randić İndeksi .....	176
4.9. Power Grafların Randić İndeksi.....	190

	<b>Sayfa</b>
4.10. Power Grafların $F$ -İndeksi (Furtula İndeksi) .....	199
4.11. Power Grafların Hiper-Zagreb İndeksi .....	207
5. SONUÇ .....	225
KAYNAKLAR .....	227
ÖZGEÇMİŞ .....	231



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $G = (V, E)$ grafi.....	7
Şekil 2.2. $G = (V, E)$ grafi.....	9
Şekil 2.3. $G = (V, E)$ grafi.....	10
Şekil 2.4. $G = (V, E)$ grafi.....	10
Şekil 2.5. Basit graf.....	11
Şekil 2.6. Çoklu graf.....	12
Şekil 2.7. $G$ grafi.....	12
Şekil 2.8. $K_3$ ve $K_4$ tam grafları .....	13
Şekil 2.9. Regüler graf.....	14
Şekil 2.10. Yönlü graf.....	14
Şekil 2.11. $G$ grafi.....	15
Şekil 2.12. $G$ ve $L(G)$ grafları.....	16
Şekil 3.1. $\vec{P}(Z_4)$ yönlü power grafi.....	30
Şekil 3.2. $P(Z_4)$ power grafi.....	32
Şekil 3.3. $G$ grafi.....	33
Şekil 3.4. $G$ grafi.....	33
Şekil 3.5. $P(Z_1)$ , $P(Z_2)$ ve $P(Z_3)$ power grafları.....	34
Şekil 4.1. $P(Z_{p^k})$ power grafi.....	48
Şekil 4.2. $L(P(Z_{p^k}))$ grafi .....	48
Şekil 4.3. $P(Z_2)$ power grafi ve $L(P(Z_2))$ grafi.....	51
Şekil 4.4. $P(Z_3)$ power grafi ve $L(P(Z_3))$ grafi.....	51
Şekil 4.5. $G$ grafi.....	52
Şekil 4.6. $P(Z_6)$ power grafi.....	124
Şekil 4.7. $P(Z_{12})$ power grafi .....	204

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklamalar</b>
$\cong$	İzomorf
$\Delta(G)$	$G$ grafının maksimum derecesi
$d \mid n$	$d$ böler $y$
$d(G)$	$G$ grafının ortalama derecesi
$d(u_i, u_j)$	$u_i$ ve $u_j$ noktaları arasındaki uzaklık
$Diam(G)$	$G$ grafının çapı
$d_{u_i}$ veya $d(u_i)$	$u_i$ noktasının derecesi
$e_i$	$G$ grafının bir kenarı
$E$	$G$ grafının kenarlar kümesi
$ E $	$E$ noktalar kümesinin kardinalitesi
$F(G)$	$G$ grafın $F$ -indeksi (Furtula indeksi)
$G = (V, E)$ veya $G$	Graf
$H(G)$	$G$ grafının Harary indeksi
$HM(G)$	$G$ grafın hiper-Zagreb indeksi
$K_n$	$n$ noktalı tam graf
$L(G)$	$G$ grafının line grafi
$M_1(G)$	$G$ grafının birinci Zagreb indeksi
$M_1^\alpha(G)$	$G$ grafın genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	$G$ grafının ikinci Zagreb indeksi
$N_{u_i}$	$u_i$ noktasının komşuluklar kümesi
$o(G)$	$G$ grubunun eleman sayısı
$P$	Yol
$P(G)$	$G$ grubunun power grafi
$\vec{P}(G)$	$G$ grubunun yönlü power grafi
$R(G)$	$G$ grafının Randic indeksi
$R_\alpha(G)$	$G$ grafın genelleştirilmiş Randic indeksi

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklamalar</b>
$SK(G)$	$G$ grafinın $SK$ indeksi
$SK_1(G)$	$G$ grafinın $SK_1$ indeksi
$SK_2(G)$	$G$ grafinın $SK_2$ indeksi
$u_i$	$G$ grafinın bir noktası
$U_G$	$G$ grubunun üreteçlerinin kümesi
$u_i \sim u_j$	$u_i$ ve $u_j$ noktalarının komşuluğu
$u_i \not\sim u_j$	$u_i$ ve $u_j$ noktalarının komşu olmaması
$uv$	$u$ ve $v$ köşelerini birleştiren kenar
$V$	$G$ grafinın noktalar kümesi
$ V $	$V$ noktalar kümesinin kardinalitesi
$W$	Yürüme
$W(G)$	$G$ grafinın Wiener indeksi
$W_e(G)$	$G$ grafinın kenar-Wiener indeksi
$WW(G)$	$G$ grafinın hiper-Wiener indeksi
$Z_n$	$n$ modülüne göre tamsayılar grubu
$\phi$	Euler fonksiyonu
$\delta(G)$	$G$ grafinın minimum derecesi

## 1. GİRİŞ

Graf teorisi kavramı 1736 yılında Euler tarafından yazılmış olan bir makale ile ortaya çıkmış 1847 yılında G. R. Kirchhoff (1824 – 1887) ve Cayley (1821 – 1895)'in ağaç kavramını keşfetmesi ile gelişme göstermiştir. Bu alandaki çalışmalar son yıllarda artış göstermiştir. Bu artışın en büyük sebeplerinden birisi sosyal hayatta karşılaştığımız birçok probleme graf teori ile çözüm bulunmaya çalışılmasıdır. Sosyal hayatta karşılaştığımız durumlar genelde, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren eğrilerin oluşturduğu şekillerle tanımlanabilir.

Graf Teori, matematik, fizik, coğrafya, bilgisayar ağları, gökbilimi ve sosyal olaylar gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Dolayısıyla matematik alanı dışında farklı bilim dallarında da çalışılan bir teori olmaya başlamıştır. Graf, bir anlamda matematik diliyle ifade edilen bir modelleme ve sosyal yaşantımızda karşımıza çıkan olayların sayısal değerlerle ifade edilip birtakım şekiller yoluyla bu olaylar hakkında bilgi edinme sanatıdır. Kısaca matematiksel modellemeler kullanılarak olaylar hakkında fikir yürütmektir. Graf teorisinin günlük hayatımızdaki işlerimizi kolaylaştırdığı görülmektedir. Bunun en önemli örneklerinden birisi de kimyasal graf teorisidir. Laboratuvar ortamında, moleküllerin sahip olduğu özellikleri deneysel yöntemlerle ortaya çıkarmak hem zordur hem de zaman alır. Kimyasal graf teorisi, moleküle karşılık gelen moleküler grafin matematiksel özelliklerinin çalışılmasının yeterli olduğu düşüncesine dayalı olarak zamanla gelişmiştir. Bu alanda en çok kullanılan yöntemlerden biriside, topolojik indekslerdir. Graf teorisinde kullanılan topolojik indeksler, moleküllerin yapısının matematiksel bir dille ifade edilmesinde kolaylık sağlar. Bu graflarda, atomlar köşelere (noktalara) karşılık gelir. Kenarlar ise bunlar arasındaki kimyasal bağları temsil eden bir modellemedir. Graflar yardımıyla, bu moleküllerin sınıflandırılmasında kullanılan sayısal ifadeler, indeksler yardımıyla kolay bir şekilde hesaplanmaktadır. Dolayısıyla, moleküler tanımlayıcıların arasındaki karmaşıklık seviyelerini kolaylaştırmada kullanılan graflar için çeşitli topolojik indekslerin ortaya çıkması önem arz etmektedir.

Cebirsel graf teori, grup teorisi anlamında incelendiğinde, temelinde bir grup, yarı grup veya monoid üzerindeki elemanları nokta (köşe) kabul ederek graf yapısı oluşturur. Power grafta bu yapılardan birisidir. Diğer taraftan 2000 yılında power graf kavramını, “mertebesi sonlu yarı grupların yönlendirilmiş power grafi” şeklinde literatüre kazandırma konusunda Quinn ve Kelarev öncülük etmişlerdir [1]. Devamında ise grup veya yarı grup üzerinde

yönlendirilmiş (yönlü) power graflar ile ilgili daha detaylı araştırmalar ortaya çıkarılmıştır [32-34]. Yönlendirilmemiş (yönsüz) power grafi ise 2009 yılında Chakrabarty ve ekibi tarafından matematik literatürüne kazandırılmıştır [2]. Bu kavramı ilerleyen süreçte Cameron ve ekibi daha sade hale getirerek power graf şeklinde isimlendirmişlerdir [35-36].

Bu tez 4 bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümü Giriş kısmı oluşturmaktadır. İlk olarak graf teori ve burada işimizi kolaylaştıracak olan soyut cebir ile bağlantılı bir takım temel kavram ve özelliklere ikinci bölümde yer verilmiştir. Daha sonra ise yine tez boyunca kullanacağımız grafların indeksleri ile ilgili bilgilerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk önce grup teori ile bağlantılı olan ve ileriki kısımlarda işimizi kolaylaştıracak olan bir takım tanımlardan bahsedilmiştir. Devamında ise köşelerinin kümesi grup olan yönlendirilmiş ya da yönlendirilmemiş power graflardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde öncelikle sonlu devirli grupların power graflarının,  $p$  ile  $q$  farklı asallar  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar ve  $n$  power grafin köşe (nokta) sayısı olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için Wiener, kenar-Wiener, hiper-Wiener, Harary,  $SK$ ,  $SK_1$ ,  $SK_2$ , birinci Zagreb, genelleştirilmiş birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Randic, genelleştirilmiş Randic, Furtula ve hiper-Zagreb indeksleri ile ilgili teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra ise genel bir  $n$  pozitif tamsayısı için daha önceden bahsedilen power grafların indeksleri ile ilgili hangi durumda eşitlik veya eşitsizlik olduğu ile ilgili teoremler elde edilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Tezin bu bölümünde graf teori ve soyut cebir de kullanılan bir takım temel kavramlar ve özelliklerden bahsedilecektir.

### 2.1. Genel Bilgiler

#### 2.1.1. Tanım

$x$  ve  $y$  birer tamsayı olmak üzere  $x = y \cdot z$  olacak şekilde bir  $z$  tamsayısı bulunabiliyorsa  $y$ ,  $x$ 'i böler denir ve  $y \mid x$  biçiminde gösterilir.

#### 2.1.2. Tanım

$n \geq 1$  bir tamsayı ve  $\phi: Z^+ \rightarrow Z^+$  ye tanımlı bir fonksiyon olsun.  $k$  ile  $n$  aralarında asal ve  $1 \leq k < n$  olma koşulunu sağlayan  $k$  tamsayıların sayısını veren fonsiyona Euler'in fonksiyonu denir ve  $\phi(n)$  ile gösterilir.  $\phi(1) = 1$  olarak tanımlanır. Euler fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1)  $p$  asal sayı ise

$$\phi(p) = p - 1 = p \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dir.

2)  $p$  asal ve  $k$  doğal sayı ise

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dir.

3)  $k$  ve  $l$  iki pozitif tamsayı olsun.  $k$  ile  $l$  aralarında asal ise

$$\phi(k \cdot l) = \phi(k) \cdot \phi(l)$$

dir.

4)  $1 \leq i \leq r$  ve  $p_i$  ler asal sayı  $k_i$  ler doğal sayı olmak üzere  $n \geq 1$  tamsayısı  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$  ise

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(p_1^{k_1}) \cdot \phi(p_2^{k_2}) \cdots \phi(p_r^{k_r}) \\ &= p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\end{aligned}$$

dir [28].

### 2.1.1. Teorem (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

$x_1, x_2, \dots, x_n$  ve  $y_1, y_2, \dots, y_n$  reel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

yani

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n)^2$$

olup, burada ki denklemin birbirine eşit olması için gerek ve yeter koşul  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  sıralı  $n$  lilerin

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$$

koşullarını sağlaması gerekmektedir [15].

### 2.1.2. Teorem (Diaz-Metcalf eşitsizliği)

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$  için  $r \cdot a_i \leq b_i \leq R \cdot a_i$  koşulunu sağlayan pozitif reel sayılardan oluşan  $n$  boyutlu sayılar olsun. O halde

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 + r \cdot R \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq (r + R) \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

dir. Burada eşitlik olması için gerek ve yeter koşul  $1 \leq i \leq n$  için  $b_i = R \cdot a_i$  veya  $b_i = r \cdot a_i$  olmasıdır [16].

### 2.1.3. Teorem (Polya-Szego eşitsizliği)

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$  için pozitif tamsayılardan oluşan  $n$  boyutlu sayılar olsun. Eğer her bir  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  için

$$0 < \gamma \leq a_i \leq A < \infty$$

ve

$$0 < \beta \leq b_i \leq B < \infty$$

ise o halde

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{(\gamma \cdot \beta + A \cdot B)^2}{4 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot A \cdot B} \cdot \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \right)^2$$

dir. Burada eşitlik olması için gerek ve yeter koşul eğer  $p = n \cdot \frac{A}{\gamma} / \left( \frac{A}{\gamma} + \frac{B}{\beta} \right)$  ve  $q = n \cdot \frac{B}{\beta} / \left( \frac{A}{\gamma} + \frac{B}{\beta} \right)$  tamsayılar ise;  $p = \gamma$ ,  $q = A$  ve benzer şekilde  $q = B$ ,  $q = \beta$  olmasıdır [17].

### 2.1.4. Teorem

$x_1, x_2, \dots, x_n$  pozitif reel sayılar olsun.

$$QM = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$AM = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

şeklinde kuadratik, aritmetik, geometrik ve harmonik anlamda eşitlikleri olsun. O halde,

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

eşitsizlikleri vardır. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  olmasıdır [15].

## 2.2. Graf Teoride Bazı Temel Tanım ve Kavramlar

### 2.2.1. Tanım

$V$  sonlu ve boştan farklı bir küme olsun. Elemanları nokta veya köşe olarak isimlendirilen  $V$  kümesi ile bu kümede ki sıralanmamış ikilileri kenar kabul eden sonlu boştan farklı olması gerekmeyen  $E$  kenarlar kümesinden oluşan  $G = (V(G), E(G))$ , ikili yapısına graf denir.

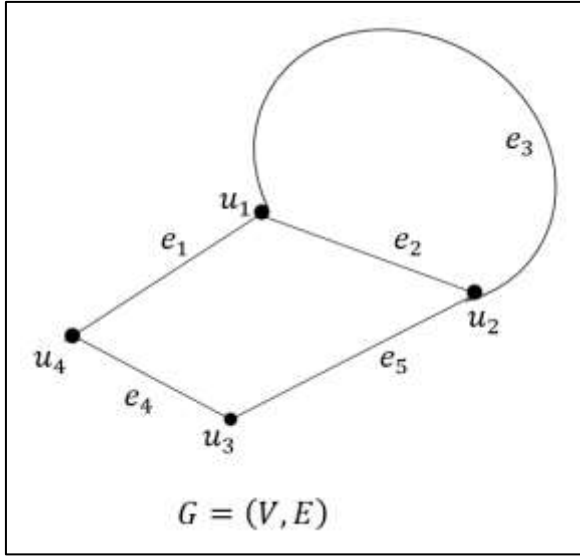
Burada

$$E(G) = \{ \{u_i, u_j\} : u_i, u_j \in V(G) \}$$

şeklinde tanımlı olup  $E(G)$  nin elemanları  $e_k$  ile gösterilir. Bir grafta çizim tek türlü değildir.

Burada kısaca;  $E(G) = E$ ,  $V(G) = V$  ve dolayısıyla  $G = (V, E)$  şeklinde gösterilecektir.

*Örnek*



Şekil 2.1.  $G = (V, E)$  grafi

Şekil 2.1 ile verilen  $G = (V, E)$  grafinin noktalar ve kenarlar kümesi sırasıyla

$V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  ve  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  dir.

### 2.2.2. Tanım

$G = (V, E)$  bir graf olmak üzere,  $G$  nin herhangi  $u_i$  ve  $u_j$  noktaları birbirine en az bir kenar ile bağlanıyor ise bu noktalara komşudur denilmektedir ve  $u_i \sim u_j$  şeklinde ifade edilir. Bir  $u_i$  noktasına komşu olan tüm noktaların kümesine  $u_i$  nin komşuluklar kümesi denir ve  $N_{u_i}$  şeklinde ifade edilir. Ayrıca  $e_i$  ve  $e_j$  kenarlarının komşu olması için ortak bir noktasının olması gerekir. Burada

$$N_{u_i} = \{u_j : u_i \sim u_j, u_i \in V\}$$

dir [18].

### 2.2.3. Tanım

$G = (V, E)$  grafında ki bir  $u_i$  noktasına bağlı kenar sayısına  $u_i$ 'nin derecesi denir ve  $d_{u_i}$  ya da  $d(u_i)$  ile gösterilir [19].

*Örnek*

Şekil 2.1’de verilen  $G$  grafinin nokta (köşe) komşulukları sıra gözetmeksizin

$$u_1 \sim u_2, u_1 \sim u_4, u_2 \sim u_3, u_3 \sim u_4$$

ve her bir noktanın derecesi

$$d_{u_1} = 3, d_{u_2} = 3, d_{u_3} = 2, d_{u_4} = 2$$

bulunur.

## 2.2.4. Tanım

$G = (V, E)$  grafinin, en küçük ve en büyük dereceleri sırasıyla

$$\delta(G) = \min \{d_{u_i} : u_i \in V\},$$

$$\Delta(G) = \max \{d_{u_i} : u_i \in V\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca  $G$  grafinin ortalama derecesi

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $|V|$ ,  $V$  noktalar kümesinin kardinalitesi yani eleman sayısıdır.

Bu bilgiler doğrultusunda,

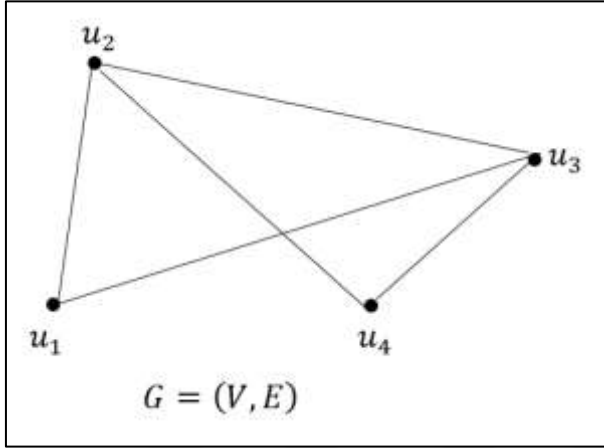
$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

dir. Ayrıca  $E$  nin kardinalitesi yani kenarlar kümesinin sayısı  $|E|$  olmak üzere,

$$|E| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i}$$

dir [19].

Örnek



Şekil 2.2.  $G = (V, E)$  grafi

Şekil 2.2 ile verilen  $G$  grafinde  $d_{u_1} = 2$ ,  $d_{u_2} = 3$ ,  $d_{u_3} = 3$ ,  $d_{u_4} = 2$  olur.  $G$  grafinin sırasıyla minimum, maksimum ve ortalama derecesi;

$$\delta(G) = \min \{d_{u_i} : u_i \in V\} = 2,$$

$$\Delta(G) = \max \{d_{u_i} : u_i \in V\} = 3$$

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i} = \frac{1}{4} \cdot (2 + 3 + 3 + 2) = 2,5$$

şeklindedir.

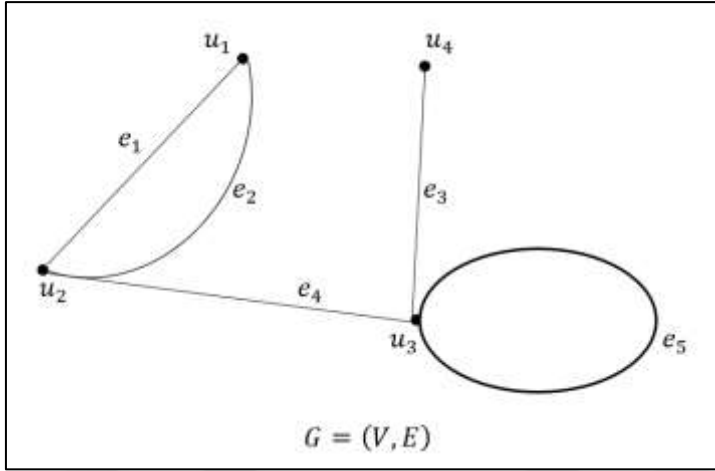
### 2.2.5. Tanım

Bir grafin herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenarlar denir [19].

### 2.2.6. Tanım

Bir kenarın başlangıç ile bitiş noktası çakışıyor ise bu kenara ilmek (loop) denir [19].

## Örnek

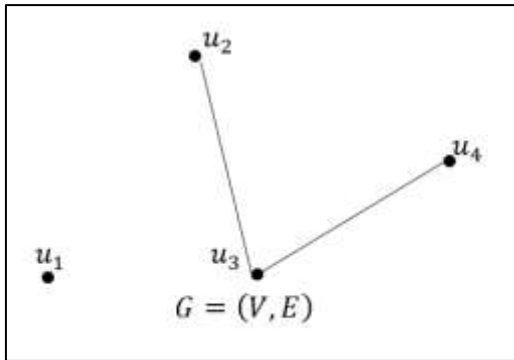
Şekil 2.3.  $G = (V, E)$  grafi

Şekil 2.3'teki  $G = (V, E)$  grafında  $e_1$  ve  $e_2$  birer katlı kenar,  $e_5$  ise ilmektir.

## 2.2.7. Tanım

Bir grfta bir noktanın derecesi sıfır ise bu noktaya izole nokta, derecesi bir ise bu noktaya pendant nokta denir [18].

## Örnek

Şekil 2.4.  $G = (V, E)$  grafi

Şekil 2.4'teki  $G = (V, E)$  grafında  $d_{u_1} = 0$  olduğundan  $u_1$  bir izole nokta,  $d_{u_2} = d_{u_4} = 1$  olduğundan  $u_2$  ve  $u_4$  noktaları birer pendant noktadır.

### 2.2.8. Tanım

$G$  grafında iki köşe arasındaki uzaklık, bu köşeler arasındaki en kısa yolun uzunluğu olarak tanımlanır.  $u_i$  ve  $u_j$ ,  $G$  de iki köşe olmak üzere  $u_i$  ve  $u_j$  noktaları arasındaki uzaklık  $d_G(u_i, u_j) = d(u_i, u_j)$  şeklinde gösterilir [19].

### 2.2.9. Tanım

Bir  $G$  grafının herhangi iki noktası arasındaki uzaklıklarının maksimumuna çap (diameter) denir. Yani,

$$\text{Diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

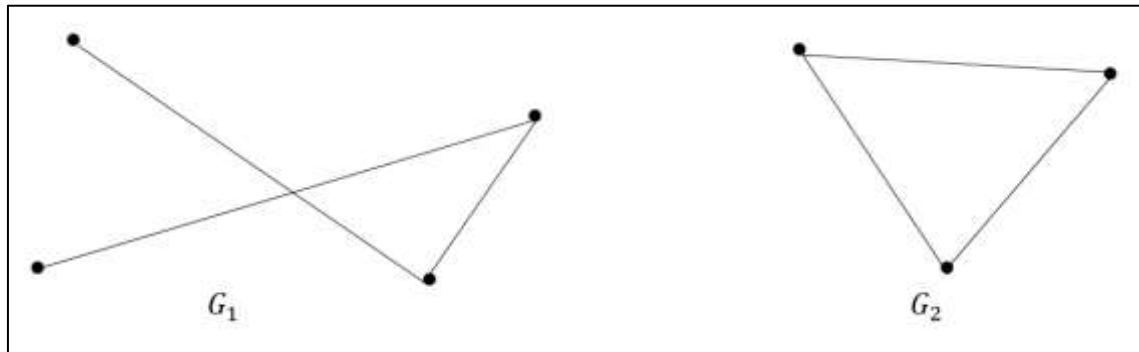
dir [19].

## 2.3. Bazı Özel Graflar

### 2.3.1. Tanım

Bir grafta ilmek (loop) ve katlı kenar yoksa bu grafa basit graf denilmektedir [18].

*Örnek*



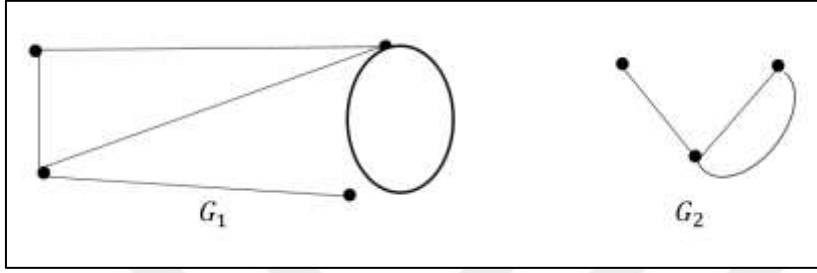
Şekil 2.5. Basit graf

Şekil 2.5'teki  $G_1$  ve  $G_2$  graflarında katlı kenar ve ilmek bulunmadığından basit graflardır.

## 2.3.2. Tanım

Herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunan yani katlı kenar veya ilmek içeren grafa çoklu graf denir [18].

*Örnek*



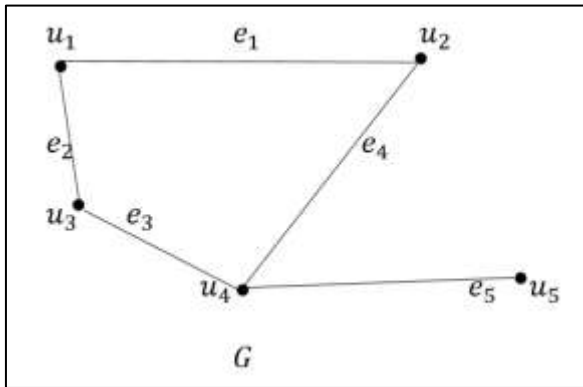
Şekil 2.6. Çoklu graf

Şekil 2.6'daki  $G_1$  grafi ilmek,  $G_2$  grafi katlı kenar içerdiğinden çoklu graftır.

## 2.3.3. Tanım

Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüme denir ve  $W$  ile gösterilir. Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve  $P$  ile gösterilir. Özellikle başlangıç ile bitiş noktası çakışan yola kapalı yol (devir) denilmektedir [18].

*Örnek*



Şekil 2.7.  $G$  grafi

Şekil 2.7 ile verilen  $G$  grafi için  $u_1e_1u_2e_4u_4e_3u_3e_2u_1e_1u_2$  bir yürüme,  $u_1e_1u_2e_4u_4e_3u_3$  bir yol,  $u_1e_1u_2e_4u_4e_3u_3e_2u_1$  bir devirdir.

#### 2.3.4. Tanım

Bir grafın herhangi iki köşesi arasında bir yol bulunuyorsa bu grafa bağlantılı graf denir [19].

Şekil 2.7'deki  $G$  grafi bağlantılıdır.

#### 2.3.5. Tanım

Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti arasında komşuluk varsa bu grafa tam graf denir ve  $n$  noktalı bir tam graf  $K_n$  ile gösterilir [18].

*Örnek*

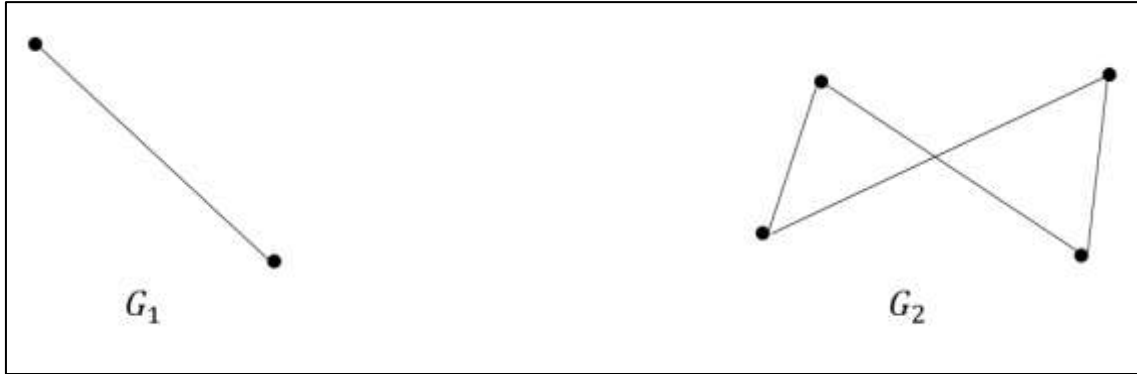


Şekil 2.8.  $K_3$  ve  $K_4$  tam grafları

Şekil 2.8 ile verilen 3 noktalı ve 4 noktalı tam graflar sırasıyla  $K_3$  ve  $K_4$  'tür.

#### 2.3.6. Tanım

Bir grafta ki her bir noktanın derecesi aynı ise bu grafa regüler graf denir. Özellikle grafta ki her bir noktanın derecesi  $r$  ise bu grafa  $r$  – dereceli regüler graf denir [18].

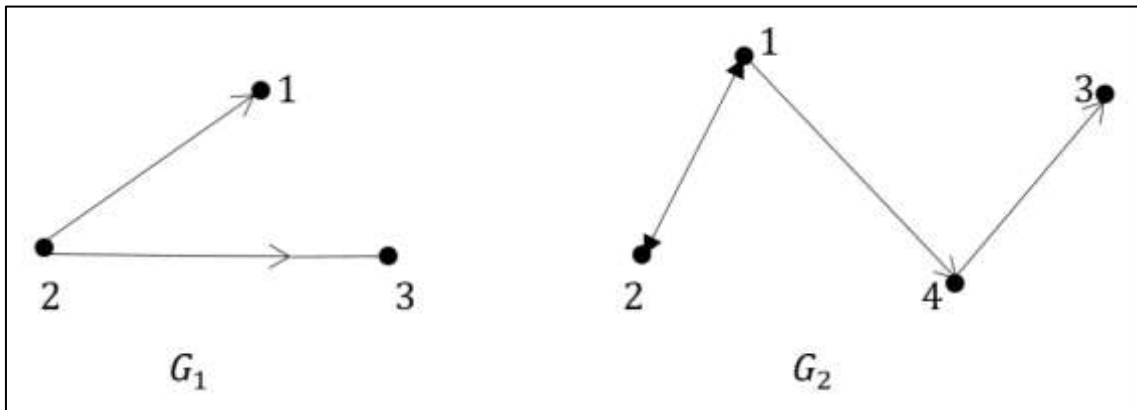
*Örnek*

Şekil 2.9. Regüler graf

Şekil 2.9'daki  $G_1$  grafi 1 – dereceli,  $G_2$  grafi ise 2 – dereceli regüler graftır.

## 2.3.7. Tanım

Bir grafin her bir kenarında yön varsa bu grafa yönlü graf denir. Yönlü grafta yön, kenarın başlangıç noktasından bitim noktasına doğrudur ve özel olarak kenarlarına ise yay adı verilir [18].

*Örnek*

Şekil 2.10. Yönlü graf

Şekil 2.10'daki  $G_1$  ve  $G_2$  grafları yönlü graflardır.

## 2.4. Basit Bağlantılı Grafların İndeksleri

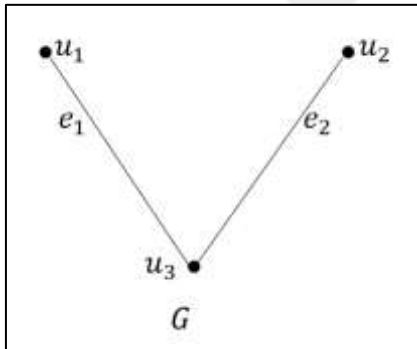
### 2.4.1. Tanım

Basit bağlantılı bir  $G$  grafinin  $n$  tane noktası olsun. Bir  $G$  grafinin Wiener indeksi,  $G$ 'deki nokta çiftleri arasındaki uzaklıklarının toplamı olarak tanımlanır yani  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  noktaları arasındaki en kısa uzaklık olmak üzere;

$$W(G) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u, v)$$

ile gösterilir [31].

*Örnek*



Şekil 2.11.  $G$  grafi

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafinin Wiener indeksi,

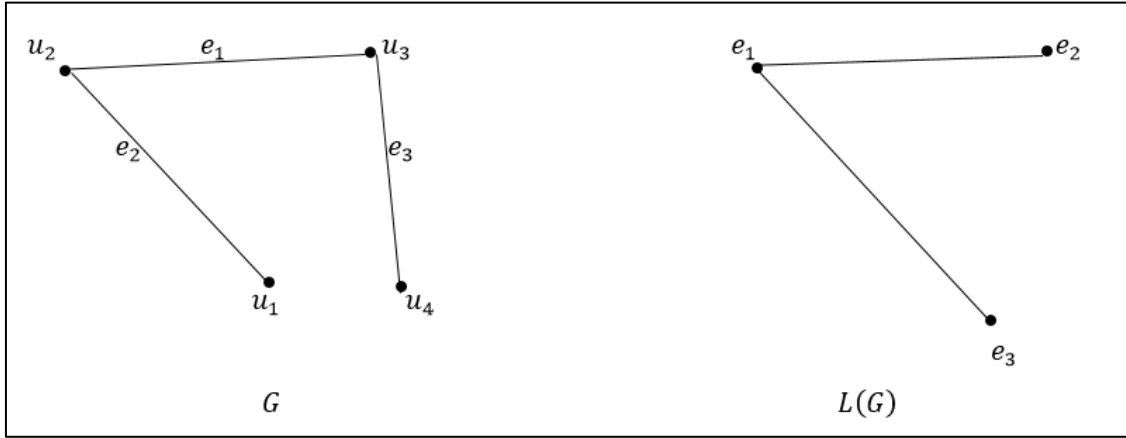
$$\begin{aligned} W(G) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (d(u_1, u_2) + d(u_1, u_3) + d(u_2, u_1) + d(u_2, u_3) + d(u_3, u_1) + d(u_3, u_2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1) = 4 \end{aligned}$$

bulunur.

## 2.4.2. Tanım

Kenarlarının kümesi  $E(G)$  ve köşelerinin kümesi  $V(G)$  olmak üzere  $G$ 'deki kenarları köşe kabul eden ve kenarların komşuluğunu esas alan grafa  $G$  grafinin line grafi denir ve  $L(G)$  ile gösterilir [4, 5, 6]. Line graf kavramının fiziko-kimya alanında çeşitli uygulamaları vardır [7, 8]. Ayrıca  $u, v \in V(G)$  ve  $u$  ile  $v$  yi birbirine bağlayan kenar  $uv = e \in V(L(G))$  olmak üzere  $L(G)$ 'deki bir köşenin derecesi,  $d_e = d_u + d_v - 2$  şeklinde tanımlanır [37,38].

## Örnek

Şekil 2.12.  $G$  ve  $L(G)$  grafları

Şekil 2.12'de verilen  $G$  grafinin kenarlarının komşulukları sıra gözetmeksizin  $e_1 \sim e_2$  ve  $e_1 \sim e_3$  dir.

## 2.4.3. Tanım

Basit bağlantılı  $G$  grafinin  $n$  tane noktası olsun. Bir  $G$  grafinin kenar-Wiener indeksi,  $L(G)$ 'deki nokta çiftleri arasındaki uzaklıklarının toplamı olarak tanımlanır yani  $e_i, e_j \in V(L(G))$  için  $d(e_i, e_j)$ ,  $e_i$  ve  $e_j$  noktaları arasındaki en kısa uzaklık olmak üzere;

$$W(L(G)) = W_e(G) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{e_i, e_j\} \subseteq V(L(G))} d(e_i, e_j)$$

ile gösterilir [24].

*Örnek*

Şekil 2.12’de verilen  $L(G)$ ’nin kenar-Wiener indeksi,

$$\begin{aligned} W(L(G)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{e,f\} \subseteq V(L(G))} d(e,f) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (d(e_1, e_2) + d(e_1, e_3) + d(e_2, e_1) + d(e_2, e_3) + d(e_3, e_1) + d(e_3, e_2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2) = 4 \end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.4. Tanım

$G$ ,  $n$  noktalı ve basit bağlantılı bir graf olsun. Bir  $G$  grafının hiper-Wiener indeksi, yakın zamanda tanıtilen mesafeye dayalı moleküler yapı tanımlayıcılarından olup

$$WW(G) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d^2(u,v)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  arasındaki en kısa uzaklıktır [10].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının hiper-Wiener indeksi,

$$\begin{aligned} WW(G) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d^2(u,v) \\ &= W(G) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d^2(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
WW(G) &= 4 + \frac{1}{2} \cdot \left( d^2(u_1, u_2) + d^2(u_1, u_3) + d^2(u_2, u_1) \right. \\
&\quad \left. + d^2(u_2, u_3) + d^2(u_3, u_1) + d^2(u_3, u_2) \right) \\
&= 4 + \frac{1}{2} \cdot (4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1) = 10
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.5. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu  $G$  grafının Harary indeksi,

$$H(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  arasındaki en kısa uzaklıktır [11-12].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının Harary indeksi,

$$\begin{aligned}
H(G) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \frac{1}{d(u,v)} \\
&= \frac{1}{d(u_1, u_2)} + \frac{1}{d(u_1, u_3)} + \frac{1}{d(u_2, u_1)} + \frac{1}{d(u_2, u_3)} + \frac{1}{d(u_3, u_1)} + \frac{1}{d(u_3, u_2)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 5
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.6. Tanım

$G$  grafi basit ve bağlantılı olsun.  $G$  grafının  $SK$  indeksi,

$$SK(G) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)$$

olarak tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [13].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının  $SK$  indeksi,

$$\begin{aligned} SK(G) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{(d_{u_1} + d_{u_3}) + (d_{u_3} + d_{u_2})\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{(1 + 2) + (2 + 1)\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.7. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun.  $G$  grafının  $SK_1$  indeksi,

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(G)} d_u \cdot d_v$$

olarak tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [13].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının  $SK_1$  indeksi,

$$\begin{aligned}
SK_1(G) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(G)} d_u \cdot d_v \\
&= \frac{1}{2} \cdot \{(d_{u_1} \cdot d_{u_3}) + (d_{u_3} \cdot d_{u_2})\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.8. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun.  $G$  grafının  $SK_2$  indeksi

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^2$$

olarak tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [13].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının  $SK_2$  indeksi,

$$\begin{aligned}
SK_2(G) &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_1} + d_{u_3})^2 + (d_{u_3} + d_{u_2})^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( (1 + 2)^2 + (2 + 1)^2 \right) \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.9. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere bu grafın genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi,

$$M_1^\alpha(G) = \sum_{u \in V(G)} d_u^\alpha = \sum_{uv \in E(G)} (d_u^{\alpha-1} + d_v^{\alpha-1})$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin  $G$ 'deki derecesidir [20,21,43].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} M_1^\alpha(G) &= \sum_{u \in V(G)} d_u^\alpha \\ &= (d_{u_1}^\alpha + d_{u_2}^\alpha + d_{u_3}^\alpha) \\ &= 1 + 1 + 2^\alpha \\ &= 2 + 2^\alpha \end{aligned}$$

bulunur.

#### 2.4.10. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olmak üzere bu grafın birinci ve ikinci Zagreb indeksleri sırasıyla,

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_u^2$$

ve

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_u \cdot d_v$$

şeklindedir [26-27]. Ayrıca bu grafin birinci Zagreb indeksi,

$$M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)$$

şeklinde de tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [39].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafinin birinci Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} M_1(G) &= \sum_{u \in V(G)} d_u^2 \\ &= (d_{u_1}^2 + d_{u_2}^2 + d_{u_3}^2) \\ &= (1^2 + 1^2 + 2^2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafinin ikinci Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} M_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} d_u \cdot d_v \\ &= 2 \cdot SK_1(G) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

olur.

#### 2.4.11. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu grafın Randic indeksi,

$$R(G) = \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [22].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının Randic indeksi,

$$\begin{aligned} R(G) &= \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d_{u_1} \cdot d_{u_3}}} + \frac{1}{\sqrt{d_{u_3} \cdot d_{u_2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

olur.

#### 2.4.12. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu grafın genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$R_\alpha = R_\alpha(G) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [25].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$\begin{aligned} R_\alpha(G) &= \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \\ &= (d_{u_1} \cdot d_{u_3})^\alpha + (d_{u_3} \cdot d_{u_2})^\alpha \\ &= (1 \cdot 2)^\alpha + (2 \cdot 1)^\alpha \\ &= 2^{\alpha+1} \end{aligned}$$

olur.

#### 2.4.13. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu grafın hiper-Zagreb indeksi,

$$HM(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^2$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [40].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının hiper-Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} HM(G) &= \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^2 \\ &= (d_{u_1} + d_{u_3})^2 + (d_{u_3} + d_{u_2})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 HM(G) &= (1 + 2)^2 + (2 + 1)^2 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

olur.

#### 2.4.14. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu grafın  $F$ -indeksi (Furtula indeksi),

$$F(G) = \sum_{u \in V(G)} d_u^3 = \sum_{uv \in E(G)} (d_u^2 + d_v^2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [41].

*Örnek*

Şekil 2.11 ile verilen  $G$  grafının  $F$ -indeksi,

$$\begin{aligned}
 F(G) &= \sum_{u \in V(G)} d_u^3 \\
 &= d_{u_1}^3 + d_{u_2}^3 + d_{u_3}^3 \\
 &= 1^3 + 1^3 + 2^3 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

olur.

#### 2.4.15. Tanım

$G$  basit bağlantılı bir graf olsun. Bu grafın genelleştirilmiş birinci Zagreb'de  $\alpha = 3$  alınmasıyla oluşan indeks ile  $F$ -indeksi arasındaki ilişki,

$$M_1^3(G) = F(G)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d_u$  ve  $d_v$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  köşelerinin  $G$ 'deki dereceleridir [42].



### 3. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN POWER GRAFLARI

Power graf literatürde ilk kez Kelarev ve Quinn tarafından sonlu yarı grupların yönlü power grafi şeklinde tanıtılmış ve araştırılmıştır [1]. Devamında ki süreçte ise Chakrabarty ve ekibi Yönlendirilmemiş (Yönsüz) power graf konusunu literatüre kazandırmıştır [2]. Bu kısımda, gruplar ve power graflar ile ilgili tez de işimizi kolaylaştıracak bir takım kavramlardan bahsedeceğiz.

#### 3.1. Gruplar ve Gruplar Üzerindeki Power Graflar

##### 3.1.1. Tanım

Boş olmayan bir  $G$  kümesi verilsin. Bu durumda

$$* : G \times G \rightarrow G$$

ifadesi bir fonksiyon belirtirse buna ikili işlem denir.  $*$  işleminde  $(x, y) \in G \times G$ 'nin görüntüsü için en yaygın olarak kullanılan notasyonlar;

i)  $x \cdot y$  (çarpma notasyonu)

ii)  $x + y$  (toplama notasyonu)

şeklindedir [23].

##### 3.1.2. Tanım

Boş olmayan bir  $G$  kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem verilsin. Bu durumda

1.  $\forall x, y, z \in G$  için  $(xy)z = x(yz)$  özelliği varsa  $G$ 'ye bir yarı grup,

2.  $G$  bir yarı grup olmak üzere  $\forall x \in G$  için  $xe = ex = x$  olacak biçimde  $e \in G$  varsa  $G$ 'ye monoid,

3.  $G$  bir monoid olsun. O halde  $\forall x \in G$  için  $xx^{-1} = x^{-1}x = e$  olacak şekilde  $x^{-1} \in G$  bulunuyor ise  $G$ 'ye grup

denir [23].

### 3.1.3. Tanım

$G$  bir grup olsun.  $G$  grubunun eleman sayısına  $G$ 'nin kardinalitesi denir ve  $|G|$  ya da  $o(G)$  şeklinde ifade edilir. Eğer  $G$ 'nin eleman sayısı sonlu ise  $G$ 'ye sonlu grup denir [23].

### 3.1.4. Tanım

$K$  bir grup ve  $\emptyset \neq M \subseteq K$  olsun.  $M$ ,  $K$ 'deki grup işlemine göre bir grup ise  $M$ 'ye  $K$ 'nin alt grubu denir ve  $M \leq K$  şeklinde ifade edilir [23].

### 3.1.5. Tanım

Bir  $G$  grubu ve  $y \in G$  verilsin. Bu durumda

$$G = \{y^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle y \rangle$$

oluyor ise  $G$ 'ye  $y$  elemanı tarafından üretilen devirli bir grup ve  $y \in G$ 'ye ise  $G$ 'nin bir üretici denir [23].

### 3.1.6. Tanım

$G$  bir grup ve  $x \in G$  olsun.  $x$ 'in ürettiği  $\langle x \rangle$  devirli grubunun mertebesine  $x$  elemanının mertebesi denir ve  $o(x)$  veya  $|x|$  ile gösterilir. Burada  $o(x)$ ,  $x^m = e$  koşulunu sağlayan  $m > 0$  tamsayıları arasında en küçük olanıdır [28].

### 3.1.1. Önerme

$G = \langle x \rangle$ ,  $n$ . mertebeden bir devirli grup olsun.  $x^s$ 'nin  $G$ 'nin bir üretici olması için gerek ve yeter koşul  $(s, n) = 1$  olmasıdır [29].

### 3.1.7. Tanım

$G$  bir grup (veya yarı grup) olsun. Noktalarının (köşelerinin) kümesi  $G$ 'nin elemanları olan yönlü power graf  $\vec{P}(G)$  ile gösterilir ve köşelerin komşulukları  $u, v \in G$  ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere

$u \sim v$  ( $u$  dan  $v$  ye bir kenar (yay))  $\Leftrightarrow u \neq v$  ve  $u^n = v$  (çarpımsal gruplar için)

$u \sim v$  ( $u$  dan  $v$  ye bir kenar (yay))  $\Leftrightarrow u \neq v$  ve  $nu = v$  (toplamsal gruplar için)

şeklinde veya bu tanıma denk olarak komşulukları

$u \sim v$  ( $u$  dan  $v$  ye bir kenar (yay))  $\Leftrightarrow u \neq v$  ve  $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle$

şeklinde tanımlanır [33].

*Örnek*

$Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  devirli grubunun  $\vec{P}(Z_4)$  yönlü power grafının köşelerinin kümesi

$$V(\vec{P}(Z_4)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

ve köşeler arası komşulukları;

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$$

olmak üzere

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$$

olduğundan

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{0}$$

olur. Aynı mantık ile

$$\bar{3} \sim \bar{1}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{3} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}$$

komşulukları vardır. Diğer yöntemi kullanarak köşeler arası komşulukları;

$$\bar{0} = 4 \times \bar{1}, \bar{0} = 2 \times \bar{2}, \bar{0} = 4 \times \bar{3}$$

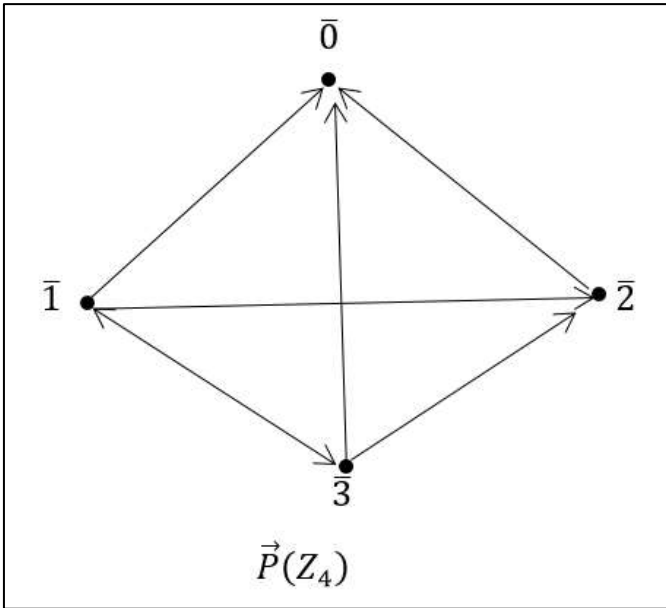
olduğundan

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{0}$$

dir. Benzer düşünce ile

$$\bar{3} \sim \bar{1}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{3} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}$$

komşulukları vardır. Dolayısıyla  $\vec{P}(Z_4)$  yönlü power grafi;



Şekil 3.1.  $\vec{P}(Z_4)$  yönlü power grafi

dir.

### 3.1.8. Tanım

$G$  bir grup (veya yarı grup) olsun. Noktalarının (köşelerinin) kümesi  $G$ 'nin elemanları olan yönsüz power graf ya da kısaca power graf  $P(G)$  şeklinde ifade edilir. Noktalar arasındaki komşulukları  $u, v \in G$  ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere

$$u \sim v \Leftrightarrow u \neq v, u^n = v \text{ veya } v^n = u \text{ (çarpımsal gruplar için)}$$

$$u \sim v \Leftrightarrow u \neq v, nu = v \text{ veya } nv = u \text{ (toplamsal gruplar için)}$$

şeklinde veya bu tanıma denk olarak komşulukları

$$u \sim v \Leftrightarrow u \neq v, \langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \text{ veya } \langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle$$

şeklinde tanımlanır [2].

*Örnek*

$Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  devirli grubunun  $P(Z_4)$  power grafının köşelerinin kümesi

$V(P(Z_4)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  ve köşeler arası komşulukları;

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$$

olmak üzere

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$$

olduğundan

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{0}$$

olur. Aynı mantık ile

$$\bar{3} \sim \bar{1}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{3} \sim \bar{2}$$

komşulukları vardır. Diğer yöntemi kullanarak köşeler arası komşulukları;

$$\bar{0} = 4 \times \bar{1}, \bar{0} = 2 \times \bar{2}, \bar{0} = 4 \times \bar{3}$$

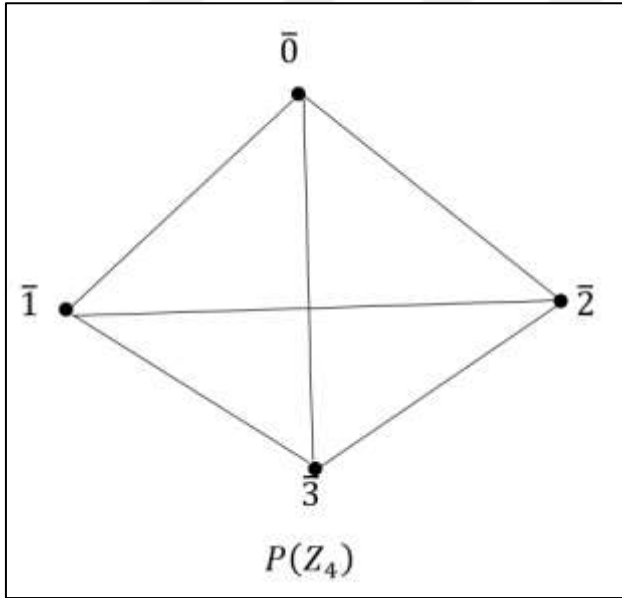
olduğundan

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{0}$$

dir. Benzer düşünce ile

$$\bar{3} \sim \bar{1}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{3} \sim \bar{2}$$

komşulukları vardır. Dolayısıyla  $P(Z_4)$  power grafi;

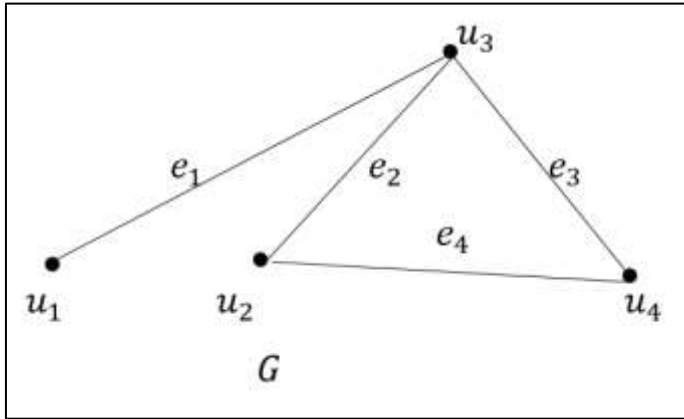


Şekil 3.2.  $P(Z_4)$  power grafi

şeklindedir.

## 3.1.9. Tanım

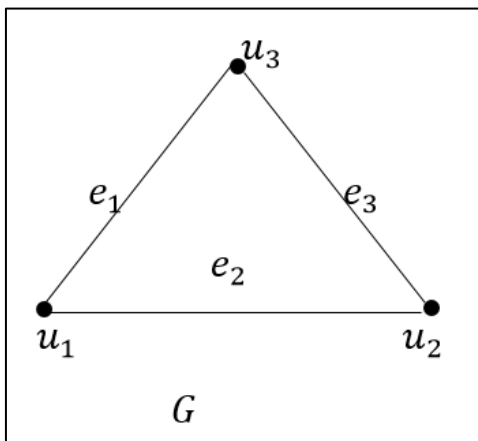
Grafın her bir noktasının tam olarak bir kez kullanıldığı yola Hamilton yolu denir [30].

*Örnek*Şekil 3.3.  $G$  grafi

Şekil 3.3 ile verilen  $G$  grafi için  $u_1e_1u_3e_2u_2e_4u_4$  bir Hamilton yoludur.

## 3.1.10. Tanım

Bir grafın her bir noktasından geçen döngüye Hamilton döngüsü denir. Hamilton döngüsünde başlangıç ve bitiş noktası aynı olup diğer tüm noktalar birbirinden farklıdır [30].

*Örnek*Şekil 3.4.  $G$  grafi

Şekil 3.4 ile verilen  $G$  grafi için  $u_1e_1u_3e_3u_2e_2u_1$  bir Hamilton döngüsüdür.

### 3.1.11. Tanım

Bir graf Hamilton döngüsü içeriyorsa bu grafa Hamilton grafi denir [30].

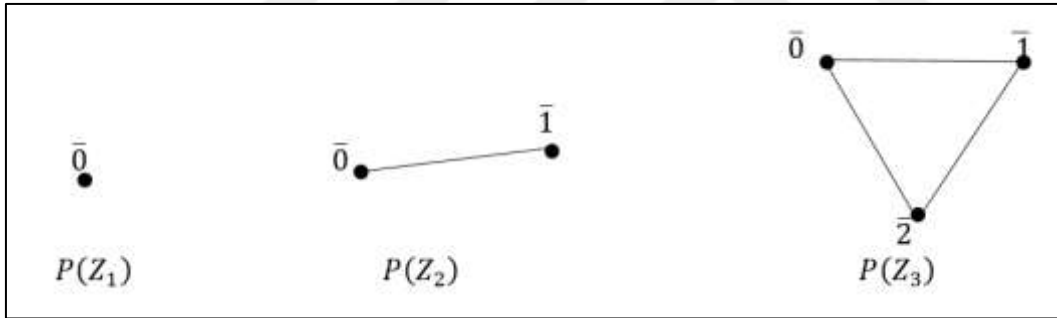
#### Örnek

Şekil 2.8 ile verilen graflar bir Hamilton döngüsü içerdiğinden birer Hamilton grafidir.

### 3.1.1. Teorem

$n \geq 3$  olan bir tamsayı ise o zaman  $P(Z_n)$  power grafi Hamiltondur [2].

#### Örnek



Şekil 3.5.  $P(Z_1)$ ,  $P(Z_2)$  ve  $P(Z_3)$  power grafları

Şekil 3.5 ile verilen şekillere bakıldığında  $n = 1,2$  için  $P(Z_n)$  power grafi Hamilton değildir.

Ama  $n \geq 3$  için Hamilton olduğu görülür.

### 3.1.2. Teorem

$G$ ,  $n$  mertebeli sonlu bir grup olsun.  $P(G)$  power grafinin  $m$  kenarlarının sayısı

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in G} \{2 \cdot o(g) - \phi(o(g)) - 1\}$$

ile verilir. Burada  $o(g)$ ,  $g$ 'nin mertebesi demektir [2].

### 3.1.1. Sonuç

$G$ ,  $n$ . mertebeden sonlu devirli bir grup olsun. O halde  $P(G)$ 'nin  $m$  kenarlarının sayısı,

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} \{2 \cdot d - \phi(d) - 1\} \cdot \phi(d)$$

dir. Burada  $d | n$ ,  $d$ 'nin  $n$ 'yi tam bölmesi demektir [2].

### 3.1.3. Teorem

$G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir graf olsun. Eğer  $diam(G) \leq 2$  ise

$$W(G) = n \cdot (n - 1) - m$$

dir [3].

### 3.1.4. Teorem

$G$ , sonlu mertebeden bir grup ve bu grubun power grafi  $P(G)$  olsun.  $P(G)$  grafının tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $G$ 'nin mertebesi 1 veya  $p^k$  olan bir devirli grup olmasıdır. Burada  $p$  bir asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$ 'dir [2].



## 4. POWER GRAFLARIN İNDEKSLERİ

Bu kısımda, sonlu devirli grupların power graflarının indeksleri üzerine yeni teoremlere yer vereceğiz. Yani, burada  $m$  kenarlı  $P(G)$  power grafına karşılık gelen  $n$  mertebeli (sonlu) ve devirli bir  $G$  grubu üzerine yoğunlaşacağız. Sonlu mertebeden herhangi bir devirli grup  $(Z_n, +)$  devirli grubuna izomorf olduğundan yani,  $G \cong Z_n$  olacağından  $G = (Z_n, +)$  alınmıştır. Bu bölümde öncelikle  $p, q$  farklı asallar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  durumlarına göre  $(Z_n, +)$  grubunun  $P(Z_n)$  power grafi ele alınarak  $n, m$  ve Euler  $\phi$  fonksiyon yardımıyla söz konusu power grafların indeks hesaplamaları üzerine yeni teoremler ispatlayacağız. Daha sonra ise genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının, hangi durumlarda eşitlik ya da eşitsizlik olduğunu ortaya koyan, bazı indeks hesaplamaları üzerine yeni sonuçlar elde edeceğiz.

### 4.1. Power Grafların Wiener ve Kenar-Wiener İndeksleri

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  nun farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$  ve  $n = p \cdot q$  için  $P(Z_n)$  power grafının Wiener ve kenar-Wiener indeksleri üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafının Wiener indeksi için teoremler elde edilmiştir. Son olarak genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının Wiener indeksi için teoremler elde edilmiştir.

Power grafların Wiener ve kenar-Wiener indeksleri ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir. Bölüm 2' de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafının Wiener indeksi,

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  noktaları arasındaki en kısa uzaklıktır. Aynı şekilde bölüm 2' de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafının kenar-Wiener indeksi,

$$W(L(P(Z_n))) = W_e(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{e_i, e_j\} \subseteq V(L(P(Z_n)))} d(e_i, e_j)$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d(e_i, e_j)$ ,  $e_i$  ve  $e_j$  noktaları arasındaki en kısa uzaklıktır.

#### 4.1.1 Teorem

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 2, & u \not\sim v \end{cases}$$

dir. Burada  $\sim$  ve  $\not\sim$  sırasıyla herhangi iki köşenin komşu olmasını ve komşu olmamasını ifade eder [9].

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.

$$\mathbb{R} = \left\{ \{u, v\} \subseteq V(P(Z_n)) \mid u \text{ ile } v \text{ komşudur} \Leftrightarrow u \neq v, \langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle \text{ veya } \langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \text{ dir.} \right\}$$

kümesini tanımlayalım.  $\{u, v\} \subseteq V(P(Z_n))$  için  $P(Z_n)$ 'de iki durum vardır. Eğer  $u$  ile  $v$  komşu değilse yani  $u \not\sim v$  ise  $d(u, v) = 2$ 'dir. Diğer durumda  $u$  ile  $v$  komşudur yani  $u \sim v$  olup  $d(u, v) = 1$ 'dir. Bu durumda aşağıda  $\mathbb{R}$ 'nin tanımını kullanacak olursak,

$$\begin{aligned} W(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} d(u, v) + \sum_{\{u,v\} \notin \mathbb{R}} d(u, v) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} 1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \notin \mathbb{R}} 2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & \{u, v\} \subseteq \mathbb{R} \\ 2, & \{u, v\} \notin \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 2, & u \not\sim v \end{cases}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.1. Sonuç

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2}$$

dir [9].

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Her  $u \in V(Z_{p^k})$  için,  $d_u = p^k - 1$  olduğundan

$$\mathbb{R}^c = \left\{ \{u, v\} \subseteq V(P(Z_n)) \mid u \not\sim v \right\} = \emptyset$$

olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} W(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 2, & u \not\sim v \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} d(u, v) + \sum_{\{u,v\} \notin \mathbb{R}} d(u, v) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} 1 + \sum_{\{u,v\} \subseteq \emptyset} d(u, v) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq R} 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot p^k \cdot (p^k - 1) \\
&= \binom{p^k}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.2. Sonuç

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$m = \binom{p^k}{2}$$

dir [9].

#### *İspat*

$p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere,  $n = p^k$  olduğundan Sonuç 4.1.1'den

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2}$$

olur. Buradan Teorem 3.1.3'ten

$$W(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1) - m$$

yazabiliriz. Dolayısıyla,

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2} = p^k \cdot (p^k - 1) - m$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$m = \binom{p^k}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

#### 4.1.2. Teorem

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} + \sum_{g \in Z_n} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \right)$$

dir [9].

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Bu power grafta  $\text{diam}(P(Z_n)) \leq 2$  dir. Dolayısıyla Teorem 3.1.3'ten

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n - 1) - m$$

eşitliği kullanabiliriz. Teorem 3.1.2'den

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} (2 \cdot o(g) - \phi(o(g)) - 1)$$

olduğundan bu ifadeyi  $m$ 'de yerine yazacak olursak,

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n - 1) - m$$

$$= n \cdot (n - 1) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} (2 \cdot o(g) - \phi(o(g)) - 1)$$

$$\begin{aligned}
W(P(Z_n)) &= n^2 - n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} 1 \\
&= n^2 - n + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \\
&= n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{g \in Z_n} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} + \sum_{g \in Z_n} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

#### 4.1.3. Sonuç

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı olmak üzere,  $n = p$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_p)) = \binom{p}{2}$$

dir [9].

#### İspat

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı olmak üzere,  $n = p$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Burada Teorem 4.1.2'de  $n = p$  alınacak olursa,

$$\begin{aligned}
W(P(Z_p)) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot p}{2} + \sum_{g \in Z_p} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot p \cdot (2 \cdot p - 1)}{2} + \phi(o(\bar{0})) + \phi(o(\bar{1})) \right. \\
&\quad \left. + \phi(o(\bar{2})) + \dots + \phi(o(\overline{p-1})) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot o(\bar{0}) + 2 \cdot o(\bar{1}) + 2 \cdot o(\bar{1}) + \dots + 2 \cdot o(\overline{p-1})) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{c} 2 \cdot p^2 - p - 1 + (\phi(o(\bar{1})) + \dots + \phi(o(\overline{p-1}))) \\ -2 \cdot (o(\bar{1}) + \dots + o(\overline{p-1})) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada Önerme 3.1.1'den  $o(\bar{1}) = \dots = o(\overline{p-1}) = p$  olur. Dolayısıyla bu ifadeler üstteki son eşitlikte kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned}
W(P(Z_p)) &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p^2 - p - 1 + (p-1) \cdot \phi(p) - 2 \cdot (p-1) \cdot p) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p^2 - p - 1 + (p-1)^2 - 2 \cdot p^2 + 2 \cdot p) \\
&= \binom{p}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.3. Teorem

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} + \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \right)$$

dir. Burada  $d, n$ 'nin herhangi bir pozitif bölenidir.  $d \mid n$  ile  $d$ 'nin  $n$ 'yi bölmesini kastediyoruz [9].

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Bu power grafta  $diam(P(Z_n)) \leq 2$ 'dir.

Dolayısıyla Teorem 3.1.3'ten

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n - 1) - m$$

eşitliği kullanabiliriz. Sonuç 3.1.1'den

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d)$$

olduğundan bu ifadeyi  $m$ 'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} W(P(Z_n)) &= n \cdot (n - 1) - m \\ &= n \cdot (n - 1) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d) \\ &= n^2 - n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} \phi(d)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} \phi(d) - \sum_{d|n} d \cdot \phi(d) \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\sum_{d|n} \phi(d) = n$  olduğundan bu ifadeyi son eşitsizlikte yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} W(P(Z_n)) &= n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} + \sum_{d|n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

#### 4.1.4. Sonuç

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asallar) köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = m + 2 \cdot \phi(p \cdot q)$$

veya

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)$$

eşitlikleri sağlanır [9].

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asallar) köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde Teorem 4.1.3'ten  $n = p \cdot q$  yazarsak,

$$\begin{aligned}
 W(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot p \cdot q}{2} + \sum_{d | p \cdot q} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q \cdot (2 \cdot p \cdot q - 1) + \phi(1) \cdot (\phi(1) - 2 \cdot 1)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot (\phi(p) - 2 \cdot p) + \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q) \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (p^2 \cdot q^2 + p \cdot q - 2 \cdot p - 2 \cdot q + 2) \\
 &= \left( \frac{p^2 \cdot q^2 - p \cdot q}{2} + p \cdot q - p - q + 1 \right) \\
 &= \left( \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q) \right) + 2 \cdot \phi(p \cdot q) \tag{4.1} \\
 &= \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan;

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = p \cdot q \cdot (p \cdot q - 1) - m = \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)$$

olup buradan

$$m = \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q) \quad (4.2)$$

elde edilir. Eş. 4.2'yi Eş. 4.1'de yerine yazarsak,

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = m + 2 \phi(p \cdot q) \quad (4.3)$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.4. Teorem

$P(Z_n)$ ,  $p$  ile  $q$  farklı asallar ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$\max\{W(P(Z_n))\} = \binom{n+1}{2}$$

ve

$$\min\{W(P(Z_n))\} = \binom{n}{2}$$

dir [9].

*İspat*

Eğer  $n = p^k$  ise Sonuç 4.1.1'den

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2}$$

dir ve dolayısıyla

$$\min\{W(P(Z_n))\} = \binom{n}{2}$$

dir. Eğer  $n = p \cdot q$  ise Sonuç 4.1.4'ten

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)$$

ve dolayısıyla  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  için

$$W(P(Z_n)) \leq \binom{n}{2} + \phi(n)$$

dir. Diğer taraftan  $\forall n \in Z^+$  için  $\phi(n) \leq n$  olduğundan

$$\begin{aligned} W(P(Z_n)) &\leq \binom{n}{2} + \phi(n) \\ &\leq \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  için

$$\max\{W(P(Z_n))\} = \binom{n+1}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.5. Teorem

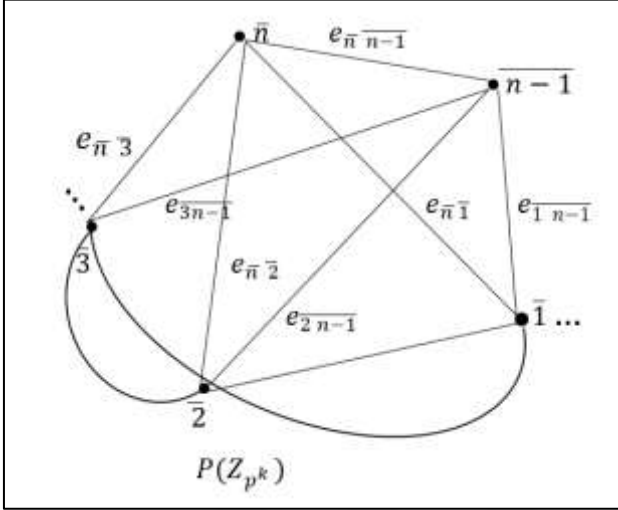
$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W_e(P(Z_n)) = 3 \cdot \left( \binom{n}{3} + \text{diam}(L(P(Z_n))) \cdot \binom{n}{4} \right)$$

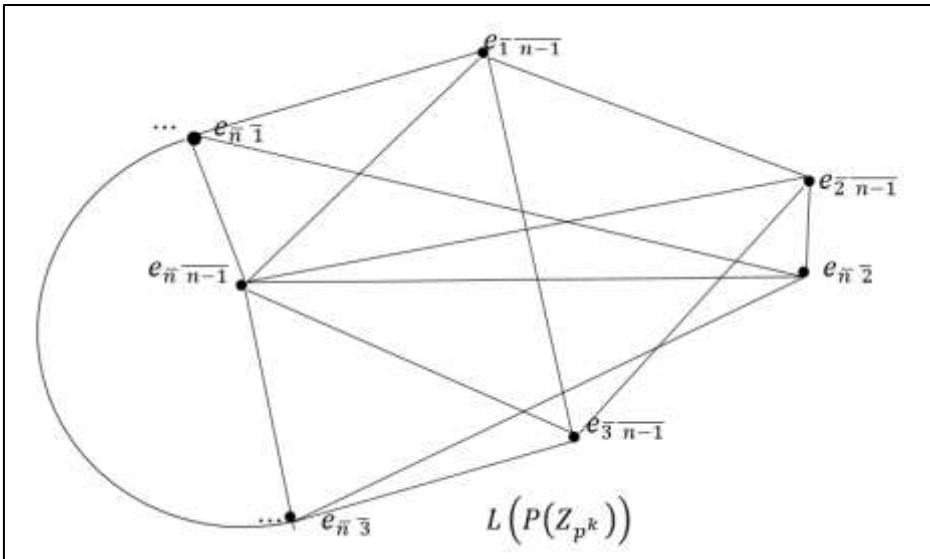
dir [9].

## İspat

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_{p^k})$  power grafi için Sonuç 4.1.2'den  $E(P(Z_{p^k})) = m = \binom{p^k}{2}$  olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan  $\forall u \in V(P(Z_{p^k}))$  için  $d_u = (n - 1)$ 'dir.

Şekil 4.1.  $P(Z_{p^k})$  power grafi

Şekil 4.1 ile verilen  $P(Z_{p^k})$  power grafinin herhangi bir  $e_{\bar{n} \bar{n}-1} \in E(P(Z_{p^k}))$  kenarını inceleyelim.  $P(Z_{p^k})$  power grafinin line grafi aşağıdaki gibidir.

Şekil 4.2.  $L(P(Z_{p^k}))$  grafi

Keyfi bir  $e_{\bar{n} \overline{n-1}} \in E(P(Z_{p^k}))$  köşesini alıp bu köşenin komşuluklarını içeren  $L(P(Z_{p^k}))$  grafi yukarı da verilmiştir. O halde keyfi bir  $e_{\bar{n} \overline{n-1}} \in V(L(P(Z_{p^k})))$  noktası ile komşu olan noktaların sayısı  $2 \cdot (n - 2)$  olduğu açıktır. Diğer taraftan  $e_{\bar{n} \overline{n-1}}$  köşe noktası ile komşu olmayan noktaların sayısı ise  $(m - 1 - 2 \cdot (n - 2))$  olur. Bu durum  $V(L(P(Z_{p^k})))$ 'nin her bir elemanı için yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
W_e(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{e,f\} \subseteq E(P(Z_{p^k}))} d(e, f) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv=e} (d_u + d_v - 2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv=e} \left( \text{diam}(L(P(Z_n))) \cdot ((m - 1) - (d_u + d_v - 2)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{n}{2} \cdot \left( 2 \cdot (n - 2) + \text{diam}(L(P(Z_n))) \cdot \left( \binom{n}{2} - 1 - 2(n - 2) \right) \right) \right) \\
&= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{2} \\
&\quad + \frac{n \cdot (n - 1)}{4} \cdot \text{diam}(L(P(Z_n))) \cdot \left( \frac{n^2 - 5 \cdot n - 6}{2} \right) \\
&= 3 \cdot \binom{n}{3} + \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)}{8} \cdot \text{diam}(L(P(Z_n))) \\
&= 3 \cdot \left( \binom{n}{3} + \text{diam}(L(P(Z_n))) \cdot \binom{n}{4} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

*Örnek*

$P(Z_8)$  power grafının kenar-Wiener indeksi değerini bulalım.  $n = 2^3$  ve  $\text{diam}(L(P(Z_8))) = 2$  olduğundan,

$$\begin{aligned} W_e(P(Z_8)) &= 3 \cdot \left( \binom{8}{3} + \text{diam}(L(P(Z_8))) \cdot \binom{8}{4} \right) \\ &= 3 \cdot \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) \\ &= 588 \end{aligned}$$

bulunur.

## 4.1.5. Sonuç

$P(Z_n)$ ,  $p$  asal sayı ve  $k$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = p^k$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W_e(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k - 1}{2} \cdot W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k - 1}{2} \cdot m$$

dir [9].

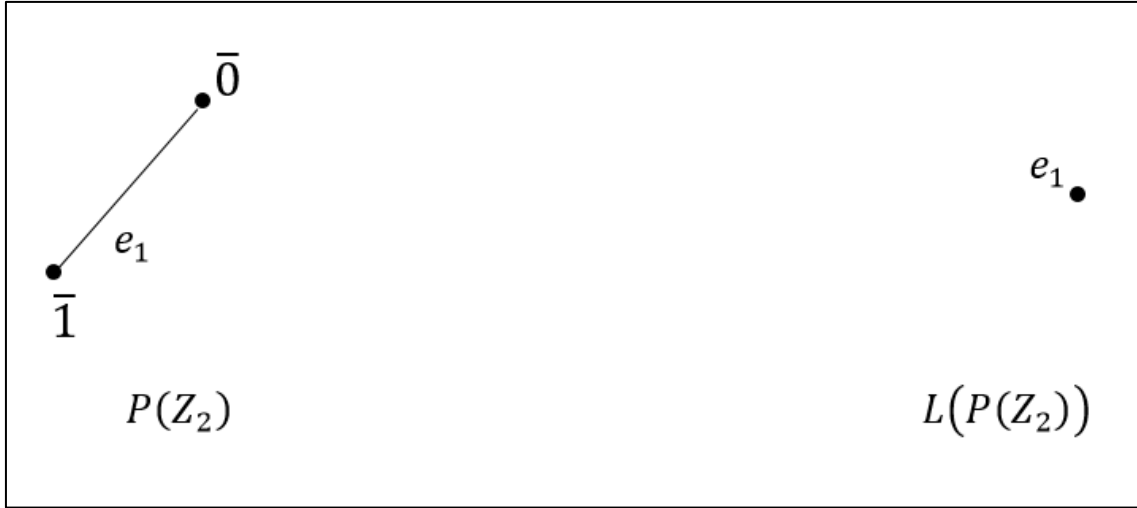
*İspat*

$P(Z_n)$  power grafı  $n = p^k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ) mertebeli olduğundan Sonuç 4.1.2'den

$$W(P(Z_{p^k})) = m = \binom{p^k}{2}$$

dir. Ayrıca,

Durum 1.  $n = 2, 3$  olsun.



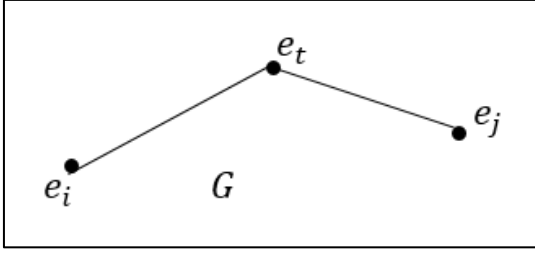
Şekil 4.3.  $P(Z_2)$  power grafi ve  $L(P(Z_2))$  grafi



Şekil 4.4.  $P(Z_3)$  power grafi ve  $L(P(Z_3))$  grafi

$W_e(P(Z_2)) = 0$ ,  $\binom{2-1}{2} = 0$ ,  $W_e(P(Z_3)) = W(P(Z_3))$ ,  $\text{diam}(L(P(Z_3))) = 1$  ve  $\binom{3-1}{2} = 1$  olduğundan eşitliğin sağlandığı basit bir şekilde görülür.

Durum 2.  $n \neq 2,3$  için,  $1 \leq i, j, t \leq n = p^k$  tamsayılar olmak üzere  $\forall e_i \in L(P(Z_{p^k}))$  için bir tek  $e_j \in L(P(Z_{p^k}))$  vardır öyleki  $e_i \sim e_j$  dir. Ayrıca  $e_i \sim e_t$  ve  $e_t \sim e_j$  dir. Bu ise  $e_i$  ile  $e_t$  arasında en kısa bir adet yolun ve aynı şekilde  $e_t$  ile  $e_j$  arasında en kısa birer adet yolun olduğu anlamına gelir. Yani  $d(e_i, e_t) = d(e_t, e_j) = 1$  bulunur.

Şekil 4.5.  $G$  grafi

Şekil 4.5 ile verilen  $G$  grafindan anlaşılacağı üzere  $d(e_i, e_j) = 2$  bulunur. Bu bütün kenarlar için yapılırsa,  $diam(L(P(Z_{p^k}))) = 2$  bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
 W_e(P(Z_{p^k})) &= 3 \cdot \left( \binom{p^k}{3} + diam(L(P(Z_{p^k}))) \cdot \binom{p^k}{4} \right) \\
 &= 3 \cdot \left( \binom{p^k}{3} + 2 \cdot \binom{p^k}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot p^k \cdot (p^k - 1) \cdot \left( (p^k - 2) + \left( \frac{(p^k - 2) \cdot (p^k - 3)}{2} \right) \right) \\
 &= \binom{p^k}{2} \cdot (p^k - 2) \cdot \left( 1 + \frac{(p^k - 3)}{2} \right) \\
 &= W(P(Z_{p^k})) \cdot \left( \frac{(p^k - 1) \cdot (p^k - 2)}{2} \right) \\
 &= \binom{p^k - 1}{2} \cdot W(P(Z_{p^k}))
 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.6. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) + \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} + \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \\ + \frac{(\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q)}{2} \cdot \left( \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{(1 + p)} \right) \cdot \left( \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{(1 + q)} \right)$$

dir [44].

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $Z_{p^k \cdot q^r}$ 'nin Wiener indeksi; burada öncelikle  $n = p^k \cdot q^r$  değerinin bütün pozitif bölenlerini bulalım. O halde  $n = p^k \cdot q^r$ 'nin bütün pozitif bölenleri,

$$\{1, p, p^2, p^3, \dots, p^k\},$$

$$\{q, q^2, q^3, \dots, q^r\},$$

$$\{p \cdot q, p \cdot q^2, p \cdot q^3, \dots, p \cdot q^r\},$$

$$\{p^2 \cdot q, p^2 \cdot q^2, p^2 \cdot q^3, \dots, p^2 \cdot q^r\},$$

$$\{p^3 \cdot q, p^3 \cdot q^2, p^3 \cdot q^3, \dots, p^3 \cdot q^r\},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\{p^k \cdot q, p^k \cdot q^2, p^k \cdot q^3, \dots, p^k \cdot q^r\}$$

bulunur. Bu bilgiler doğrultusunda Teorem 4.1.3'ten

$$W(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} + \sum_{d | p^k \cdot q^r} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \right) \\ = \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \phi(1) \cdot (\phi(1) - 2 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot (\phi(p) - 2 \cdot p)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot (\phi(p^2) - 2 \cdot p^2) + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot (\phi(p^3) - 2 \cdot p^3) + \dots + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot (\phi(p^k) - 2 \cdot p^k) + \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(q^2) \cdot (\phi(q^2) - 2 \cdot q^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(q^3) \cdot (\phi(q^3) - 2 \cdot q^3) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(q^r) \cdot (\phi(q^r) - 2 \cdot q^r) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q) \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q^2) \cdot (\phi(p \cdot q^2) - 2 \cdot p \cdot q^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q^3) \cdot (\phi(p \cdot q^3) - 2 \cdot p \cdot q^3) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q^r) \cdot (\phi(p \cdot q^r) - 2 \cdot p \cdot q^r) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2 \cdot q) \cdot (\phi(p^2 \cdot q) - 2 \cdot p^2 \cdot q) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2 \cdot q^2) \cdot (\phi(p^2 \cdot q^2) - 2 \cdot p^2 \cdot q^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2 \cdot q^3) \cdot (\phi(p^2 \cdot q^3) - 2 \cdot p^2 \cdot q^3) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2 \cdot q^r) \cdot (\phi(p^2 \cdot q^r) - 2 \cdot p^2 \cdot q^r) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3 \cdot q) \cdot (\phi(p^3 \cdot q) - 2 \cdot p^3 \cdot q) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3 \cdot q^2) \cdot (\phi(p^3 \cdot q^2) - 2 \cdot p^3 \cdot q^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3 \cdot q^3) \cdot (\phi(p^3 \cdot q^3) - 2 \cdot p^3 \cdot q^3) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3 \cdot q^r) \cdot (\phi(p^3 \cdot q^r) - 2 \cdot p^3 \cdot q^r) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k \cdot q) \cdot (\phi(p^k \cdot q) - 2 \cdot p^k \cdot q) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k \cdot q^2) \cdot (\phi(p^k \cdot q^2) - 2 \cdot p^k \cdot q^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k \cdot q^3) \cdot (\phi(p^k \cdot q^3) - 2 \cdot p^k \cdot q^3) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k \cdot q^r) \cdot (\phi(p^k \cdot q^r) - 2 \cdot p^k \cdot q^r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(P(Z_{p^k, q^r})) &= \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot (\phi(p) - 2 \cdot p) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot p \cdot \phi(p) \cdot (p \cdot \phi(p) - 2 \cdot p^2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \phi(p) \cdot (p^2 \cdot \phi(p) - 2 \cdot p^3) \\
&+ \dots + \frac{1}{2} \cdot p^{k-1} \cdot \phi(p) \cdot (p^{k-1} \cdot \phi(p) - 2 \cdot p^k) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \phi(q) \cdot (q \cdot \phi(q) - 2 \cdot q^2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot q^2 \cdot \phi(q) \cdot (q^2 \cdot \phi(q) - 2 \cdot q^3) \\
&+ \dots + \frac{1}{2} \cdot q^{r-1} \cdot \phi(q) \cdot (q^{r-1} \cdot \phi(q) - 2 \cdot q^r) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q^2) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q^2) - 2 \cdot p \cdot q^2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q^3) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q^3) - 2 \cdot p \cdot q^3) + \dots + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q^r) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q^r) - 2 \cdot p \cdot q^r) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^2) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^2 \cdot q) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot \phi(q^2) \cdot (\phi(p^2) \cdot \phi(q^2) - 2 \cdot p^2 \cdot q^2) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot \phi(q^3) \cdot (\phi(p^2) \cdot \phi(q^3) - 2 \cdot p^2 \cdot q^3) + \dots + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot \phi(q^r) \cdot (\phi(p^2) \cdot \phi(q^r) - 2 \cdot p^2 \cdot q^r) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^3) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^3 \cdot q) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot \phi(q^2) \cdot (\phi(p^3) \cdot \phi(q^2) - 2 \cdot p^3 \cdot q^2) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot \phi(q^3) \cdot (\phi(p^3) \cdot \phi(q^3) - 2 \cdot p^3 \cdot q^3) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot \phi(q^r) \cdot (\phi(p^3) \cdot \phi(q^r) - 2 \cdot p^3 \cdot q^r) + \dots + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^k) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^k \cdot q) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \phi(q^2) \cdot (\phi(p^k) \cdot \phi(q^2) - 2 \cdot p^k \cdot q^2) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \phi(q^3) \cdot (\phi(p^k) \cdot \phi(q^3) - 2 \cdot p^k \cdot q^3) + \dots + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \phi(q^r) \cdot (\phi(p^k) \cdot \phi(q^r) - 2 \cdot p^k \cdot q^r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(P(Z_{p^k, q^r})) &= \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} - \frac{1}{2} \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot (\phi(p) - 2 \cdot p) \cdot (p^0 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2 \cdot (k-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^2) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^2) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^2 \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^3) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^3) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^3 \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p^k) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p^k \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot (\phi(p) - 2 \cdot p) \\
& \cdot (p^0 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2 \cdot (k-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) \\
& + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \phi(p) \cdot \phi(q) \cdot (\phi(p) \cdot \phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot p^4 \cdot \Phi(p) \cdot \Phi(q) \cdot (\Phi(p) \cdot \Phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)}) + \dots + \\
& \frac{1}{2} \cdot p^{2 \cdot (k-1)} \cdot \Phi(p) \cdot \Phi(q) \cdot (\Phi(p) \cdot \Phi(q) - 2 \cdot p \cdot q) \\
& \cdot (q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2 \cdot (r-1)})
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
W(P(Z_n)) &= \frac{\binom{2 \cdot n}{2} - 1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \Phi(p) \cdot (\Phi(p) - 2 \cdot p) \cdot \left( \sum_{i=0}^{k-1} p^{2 \cdot i} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \Phi(q) \cdot (\Phi(q) - 2 \cdot q) \cdot \left( \sum_{i=0}^{r-1} q^{2 \cdot i} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \Phi(p \cdot q) \cdot (\Phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \sum_{i=0}^{k-1} p^{2 \cdot i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{r-1} q^{2 \cdot i} \right) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \Phi(p) \cdot (\Phi(p) - 2 \cdot p) \cdot \left( \sum_{i=1}^k (p^2)^{i-1} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \Phi(q) \cdot (\Phi(q) - 2 \cdot q) \cdot \left( \sum_{i=1}^r (q^2)^{i-1} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \Phi(p \cdot q) \cdot (\Phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \sum_{i=1}^k (p^2)^{i-1} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^r (q^2)^{i-1} \right)
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\sum_{t=1}^n k^{t-1} = \frac{1 - k^n}{1 - k}, k \neq 1$$

eşitliğini kullanacak olursak,

$$W(P(Z_n)) = \frac{\binom{2 \cdot n}{2} - 1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \Phi(p) \cdot (\Phi(p) - 2 \cdot p) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 - p^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot (\phi(q) - 2 \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 - q^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q) \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 - p^2} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 - q^2} \right) \\
W(P(Z_n)) & = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \phi(p) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 - p} \right) - \frac{1}{2} \cdot \phi(q) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 - q} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p \cdot q) \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 - p^2} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 - q^2} \right) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) + \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} + \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \\
& + \frac{(\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q)}{2} \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.6. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asallar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)$$

dir.

*İspat*

Teorem 4.1.6'daki

$$\begin{aligned}
W(P(Z_n)) & = \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) + \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} + \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \\
& + \frac{(\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q)}{2} \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right)
\end{aligned}$$

denkleminde  $n = p \cdot q$  ve  $k = r = 1$  alınıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned}
W(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot p \cdot q}{2} - 1 \right) + \frac{(1 - p^2)}{2} + \frac{(1 - q^2)}{2} \\
&\quad + \frac{(\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q)}{2} \cdot \left( \frac{1 - p^2}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^2}{1 + q} \right) \\
&= p^2 \cdot q^2 - \frac{p \cdot q}{2} - \frac{1}{2} + \frac{(1 - q^2)}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot (1 - p) \\
&\quad \cdot (1 - q) \\
&= \left( \frac{p^2 \cdot q^2 + p \cdot q}{2} \right) - p - q + 1 \\
&= \left( \frac{p^2 \cdot q^2 - p \cdot q}{2} \right) + p \cdot q - p - q + 1 \\
&= \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.1.1. Not

Sonuç 4.1.6 daha önce bulduğumuz Sonuç 4.1.4 ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{2^1 \cdot 3^2}) = P(Z_{18})$  power grafının Wiener indeksini Teorem 4.1.2'yi kullanarak hesaplayalım. O halde,

$$\begin{aligned}
W(P(Z_{18})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot 18}{2} + \sum_{g \in Z_{18}} (\phi(o(g)) - 2 \cdot o(g)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( 18 \cdot 35 + (\phi(o(\bar{0})) - 2 \cdot o(\bar{0})) + (\phi(o(\bar{1})) - 2 \cdot o(\bar{1})) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \phi(o(\bar{2})) - 2 \cdot o(\bar{2}) + \left( \phi(o(\bar{3})) - 2 \cdot o(\bar{3}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{4})) - 2 \cdot o(\bar{4}) \right) + \left( \phi(o(\bar{5})) - 2 \cdot o(\bar{5}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{6})) - 2 \cdot o(\bar{6}) \right) + \left( \phi(o(\bar{7})) - 2 \cdot o(\bar{7}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{8})) - 2 \cdot o(\bar{8}) \right) + \left( \phi(o(\bar{9})) - 2 \cdot o(\bar{9}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{10})) - 2 \cdot o(\bar{10}) \right) + \left( \phi(o(\bar{11})) - 2 \cdot o(\bar{11}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{12})) - 2 \cdot o(\bar{12}) \right) + \left( \phi(o(\bar{13})) - 2 \cdot o(\bar{13}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{14})) - 2 \cdot o(\bar{14}) \right) + \left( \phi(o(\bar{15})) - 2 \cdot o(\bar{15}) \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \phi(o(\bar{16})) - 2 \cdot o(\bar{16}) \right) + \left( \phi(o(\bar{17})) - 2 \cdot o(\bar{17}) \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $Z_{18}$ 'in elemanlarının mertebelerini bulacak olursak;

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0} = \bar{18}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$\bar{a} \in Z_{18}$  için

$$o(\bar{a}) = \frac{n}{obeb(a, n)}$$

olmak üzere,

$$o(\bar{0} = \bar{18}) = \frac{18}{obeb(18, 18)} = 1, o(\bar{1}) = \frac{18}{obeb(1, 18)} = 18, o(\bar{2}) = \frac{18}{obeb(2, 18)} = 9$$

$$o(\bar{3}) = \frac{18}{obeb(3, 18)} = 6, o(\bar{4}) = \frac{18}{obeb(4, 18)} = 9, o(\bar{5}) = \frac{18}{obeb(5, 18)} = 18$$

$$o(\bar{6}) = \frac{18}{obeb(6, 18)} = 3, o(\bar{7}) = \frac{18}{obeb(7, 18)} = 18, o(\bar{8}) = \frac{18}{obeb(8, 18)} = 9$$

$$o(\bar{9}) = \frac{18}{obeb(9,18)} = 2, o(\bar{10}) = \frac{18}{obeb(10,18)} = 9, o(\bar{11}) = \frac{18}{obeb(11,18)} = 18$$

$$o(\bar{12}) = \frac{18}{obeb(12,18)} = 3, o(\bar{13}) = \frac{18}{obeb(13,18)} = 18, o(\bar{14}) = \frac{18}{obeb(14,18)} = 9$$

$$o(\bar{15}) = \frac{18}{obeb(15,18)} = 6, o(\bar{16}) = \frac{18}{obeb(16,18)} = 9, o(\bar{17}) = \frac{18}{obeb(17,18)} = 18$$

$$o(\bar{0}) = 1, o(\bar{1}) = o(\bar{5}) = o(\bar{7}) = o(\bar{11}) = o(\bar{13}) = o(\bar{17}) = 18, o(\bar{2}) = o(\bar{4}) = 9$$

$$o(\bar{8}) = o(\bar{10}) = o(\bar{14}) = o(\bar{16}) = 9, o(\bar{15}) = o(\bar{3}) = 6, o(\bar{6}) = o(\bar{12}) = 3, o(\bar{9}) = 2$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$W(P(Z_{18})) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{l} 18 \cdot 35 + (\phi(1) - 2 \cdot 1) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(6) - 2 \cdot 6) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) \\ + (\phi(3) - 2 \cdot 3) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(2) - 2 \cdot 2) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) \\ + (\phi(3) - 2 \cdot 3) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(6) - 2 \cdot 6) + (\phi(9) - 2 \cdot 9) + (\phi(18) - 2 \cdot 18) \\ + 18 \cdot 35 + (\phi(1) - 2 \cdot 1) + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) \\ + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) + (\phi(2 \cdot 3) - 2 \cdot 6) + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) + (\phi(3) - 2 \cdot 3) + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) \\ + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) + (\phi(2) - 2 \cdot 2) + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) + (\phi(3) - 2 \cdot 3) + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) \\ + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) + (\phi(2 \cdot 3) - 2 \cdot 6) + (\phi(3^2) - 2 \cdot 9) \\ + (\phi(2 \cdot 3^2) - 2 \cdot 18) \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{l} 630 + (1 - 2) + \left(2 \cdot 3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 36\right) \\ + \left(3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 18\right) + \left(2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 12\right) \\ + \left(3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 18\right) + \left(2 \cdot 3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 36\right) \\ + \left(3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 6\right) + \left(2 \cdot 3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 36\right) \\ + \left(3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 18\right) + \left(2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 4\right) \\ + \left(3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 18\right) + \left(2 \cdot 3^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 36\right) \end{array} \right)$$

$$W(P(Z_{18})) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{c} 630 - 1 + (6 - 36) + (6 - 18) + (2 - 12) \\ + (6 - 18) + (6 - 36) + (2 - 6) + (6 - 36) \\ (6 - 18) + (1 - 4) + (6 - 18) + (6 - 36) \\ + (2 - 6) + (6 - 36) + (6 - 18) + (2 - 12) \\ (6 - 18) + (6 - 36) \end{array} \right) = \frac{346}{2} = 173$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafının Wiener indeksini Teorem 4.1.6'yı kullanarak hesaplayalım. Yani;

$p = 2, q = 3, k = 1, r = 2$  ve  $n = 2 \cdot 3^2$  olmak üzere

$$\begin{aligned} W(P(Z_{18})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot 18}{2} - 1 \right) + \frac{(1 - 2^2)}{2} + \frac{(1 - 3^4)}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (\phi(2 \cdot 3) - 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot \left( \frac{1 - 2^2}{1 + 2} \right) \cdot \left( \frac{1 - 3^4}{1 + 3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (18 \cdot 35 - 1) - \frac{3}{2} - 40 + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot 20 \\ &= \frac{629}{2} - \frac{3}{2} - 40 - 100 \\ &= \frac{346}{2} \\ &= 173 \end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.1.7. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$n \cdot \left( \delta - \frac{n-1}{2} \right) \leq W(P(Z_n)) \leq n \cdot \left( n - \frac{\delta}{2} - 1 \right)$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Burada ‘‘Diaz-Metcalf’’ eşitsizliğini kullanacak olursak;

$a_i = 1$ ,  $b_i = d_i$ ,  $r = \delta(P(Z_n))$ ,  $R = (n - 1)$  olmak üzere  $1 \leq i \leq n$  için

$$\delta(P(Z_n)) \cdot 1 \leq d_i \leq (n - 1) \cdot 1$$

olduğundan o halde,

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 + \delta(P(Z_n)) \cdot (n - 1) \cdot \sum_{i=1}^n 1 \leq (\delta(P(Z_n)) + (n - 1)) \cdot \sum_{i=1}^n d_i$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sum_{i=1}^n \delta(P(Z_n))^2 \leq \sum_{i=1}^n d_i^2$$

ifadesi son eşitsizlikte kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 + \delta(P(Z_n)) \cdot (n - 1) \cdot n \leq (\delta(P(Z_n)) + (n - 1)) \cdot \sum_{i=1}^n d_i$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta(P(Z_n))^2 + \delta(P(Z_n)) \cdot (n - 1) \cdot n &= n \cdot \delta(P(Z_n))^2 + \delta(P(Z_n)) \cdot (n - 1) \cdot n \\ &= n \cdot \delta(P(Z_n)) \cdot (\delta(P(Z_n)) + n - 1) \end{aligned}$$

$$\leq (\delta(P(Z_n)) + (n-1)) \cdot \sum_{i=1}^n d_i$$

olacağından,

$$-\frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta(P(Z_n)) \geq -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i$$

elde edilir ve bu eşitsizlik Teorem 3.1.3'te kullanılıp “ $\delta(P(Z_n)) = \delta$ ” alınırsa ;

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n-1) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \leq n \cdot (n-1) - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta(P(Z_n))$$

$$W(P(Z_n)) \leq n \cdot \left( n - \frac{\delta}{2} - 1 \right)$$

elde edilir. Diğer taraftan Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i$$

olduğundan bu  $m$  değeri Teorem 3.1.3'te yerine yazılacak olursa,

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n-1) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i$$

elde edilir. Ayrıca  $\delta \leq d_i \leq (n-1)$  ifadesini aşağıdaki eşitsizlikte kullanacak olursak,  $\forall 1 \leq i \leq n$  için

$$\begin{aligned} W(P(Z_n)) &= n \cdot (n-1) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \\ &\geq n \cdot (n-1) - \frac{n}{2} \cdot (n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot d_1 - \frac{n}{2} \cdot (n - 1) \\
&\geq n \cdot \delta - \frac{n}{2} \cdot (n - 1) \\
&= n \cdot \left( \delta - \frac{n - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$n \cdot \left( \delta - \frac{n - 1}{2} \right) = n \cdot \left( n - \frac{\delta}{2} - 1 \right)$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2 \cdot \delta - n + 1 = 2 \cdot n - \delta - 2$$

$$3 \cdot \delta = 3 \cdot n - 3$$

$$n = \delta + 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.2. Power Grafların Hiper-Wiener İndeksi

Bu bölümde, amacımız  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  ve  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının hiper-Wiener indeksi üzerinde teoremler vermektir. Bu bölümdeki çalışmamızda, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı

asal sayılar olmak üzere  $n = p^k$  ve  $n = p \cdot q$  değerlerine karşılık gelen yönlendirilmemiş  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Wiener indeksini bulup belirli koşullar altında bu power grafinin Hamilton olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra da  $n = p^k \cdot q^r$  için yönlendirilmemiş  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Wiener indeksi bulunmuştur. Son olarakta genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Wiener indeks üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların hiper-Wiener indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Wiener indeksi,

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $d(u,v)$ ,  $u$  ve  $v$  noktaları arasındaki en kısa uzaklıktır.

#### 4.2.1. Teorem

$n \in Z^+$  ve  $P(Z_n)$  power graf olsun. O halde

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases}$$

dir. Burada  $\sim$  ve  $\not\sim$  sırasıyla herhangi iki köşenin komşu olmasını ve komşu olmadığını ifade eder [14].

#### İspat

$n \in Z^+$  ve  $P(Z_n)$  power graf olmak üzere,

$$\mathcal{R} = \left\{ \{u,v\} \subseteq V(P(Z_n)) \mid u \text{ ile } v \text{ komşudur} \Leftrightarrow u \neq v, \langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle \text{ veya } \langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \text{ dir.} \right\}$$

şeklinde bir küme tanımlayalım. O halde,

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

olmak üzere herhangi bir  $\{u, v\} \subseteq V(P(Z_n))$  köşeleri ya komşudur yada komşu değildir. Dolayısıyla

$$V(P(Z_n)) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^c$$

şeklinden yazabiliriz. Bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^c} d(u,v) \cdot (1 + d(u,v)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} d(u,v) \cdot (1 + d(u,v)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}^c} d(u,v) \cdot (1 + d(u,v)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} 2 + \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}^c} 6 \right) \\ &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & \{u,v\} \subseteq \mathbb{R} \\ 3, & \{u,v\} \not\subseteq \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\mathbb{R}$ 'nin tanımını gereğince,

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases}$$

bulunur ve dolayısıyla ispat tamamlanır.

#### 4.2.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asallar ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olsun.  $n$ . mertebeden  $m$  kenarlı  $P(Z_n)$  power grafi için,

eğer  $n = p^k$  ise

$$WW(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot W(P(Z_{p^k}))$$

ve eğer  $n = p \cdot q$  ise

$$WW(P(Z_{p \cdot q})) = 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} + 4 \cdot \phi(p \cdot q)$$

dir [14].

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asallar ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olsun. O halde hiper-Wiener indeks tanımı kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v) \\ &= W(P(Z_n)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{d(u,v)=1} 1 + \sum_{d(u,v)=2} 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{d^2(u,v)=1} 1 + \sum_{d^2(u,v)=4} 4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (d_i + 2 \cdot (n-1-d_i)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (d_i + 4 \cdot (n-1-d_i)) \\ &= \frac{6 \cdot n \cdot (n-1)}{2} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n d_i \\ &= 6 \cdot \binom{n}{2} - 4 \cdot m \end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. Sonuç 4.1.2'den  $n = p^k$  için  $m = \binom{n}{2}$  ve Sonuç 4.1.4'ten  $n = p \cdot q$  için

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = \binom{n}{2} + \phi(n) = 2 \cdot \phi(n) + m$$

olduğunu biliyoruz. Burada  $n = p^k$  için kenar sayısı yerine yazılacak olursa,

$$WW(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot \binom{p^k}{2} = 2 \cdot W(P(Z_{p^k}))$$

ve  $n = p \cdot q$  için kenar sayısı yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_{p \cdot q})) &= 6 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - 4 \cdot m \\ &= 6 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - 4 \cdot \left( \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q) \right) \\ &= 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} + 4 \cdot \phi(p \cdot q) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.2.3. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_n)) &= 2 \cdot (1 - p^{2 \cdot k}) + 2 \cdot (1 - q^{2 \cdot r}) + 2 \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \\ &\quad \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right) + (3 \cdot n + 2) \cdot (n - 1) \end{aligned}$$

dir [44].

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ve  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $Z_{p^k \cdot q^r}$ 'nin hiper-Wiener indeksi; Teorem 4.2.2'deki Eş. 4.4'ü kullanacak olursak,

$$WW(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} - 4 \cdot m$$

bulunur. Diğer taraftan Sonuç 3.1.1'den

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d)$$

olduğundan bu ifadeyi  $m$ 'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} - 2 \cdot \sum_{d|p^k \cdot q^r} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d) \\ &= 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} - 2 \cdot \sum_{d|p^k \cdot q^r} (2 \cdot d - \phi(d)) \cdot \phi(d) + 2 \cdot \sum_{d|p^k \cdot q^r} \phi(d) \\ &= 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} + 2 \cdot p^k \cdot q^r + 2 \cdot \sum_{d|p^k \cdot q^r} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \quad (4.5) \end{aligned}$$

bulunur ve Teorem 4.1.3'ten

$$\begin{aligned} W(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} + \sum_{d|p^k \cdot q^r} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|p^k \cdot q^r} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \end{aligned}$$

olacağından bu denklemi düzenleyecek olursak,

$$2 \cdot \sum_{d | p^k \cdot q^r} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) = 4 \cdot W(P(Z_{p^k \cdot q^r})) - 2 \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} \quad (4.6)$$

elde edilir. Eş. 4.6'yı Eş. 4.5'te yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} + 2 \cdot p^k \cdot q^r + 4 \cdot W(P(Z_{p^k \cdot q^r})) - 2 \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} \\ &= 4 \cdot W(P(Z_{p^k \cdot q^r})) + 6 \cdot \binom{p^k \cdot q^r}{2} - 2 \cdot \binom{2 \cdot p^k \cdot q^r}{2} \\ &\quad + 2 \cdot p^k \cdot q^r \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Teorem 4.1.6'daki denklemi Eş. 4.7'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= 2 \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) + 2 \cdot (1 - p^{2 \cdot k}) + 2 \cdot (1 - q^{2 \cdot r}) + 6 \cdot \binom{n}{2} \\ &\quad - 2 \cdot \binom{2 \cdot n}{2} + 2 \cdot n + 2 \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right) \\ &= 2 \cdot (1 - p^{2 \cdot k}) + 2 \cdot (1 - q^{2 \cdot r}) + (3 \cdot n + 2) \cdot (n - 1) \\ &\quad + 2 \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.2.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asallar,  $P(Z_n)$   $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$WW(P(Z_{p \cdot q})) = 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} + 4 \cdot \phi(p \cdot q)$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asallar) mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Teorem 4.2.3'te  $k = r = 1$  alınacak olursa;

$$\begin{aligned}
WW\left(P(Z_{p \cdot q})\right) &= 2 \cdot (1 - p^2) + 2 \cdot (1 - q^2) + (3 \cdot p \cdot q + 2) \cdot (p \cdot q - 1) \\
&\quad + 2 \cdot (\Phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left(\frac{1 - p^2}{1 + p}\right) \cdot \left(\frac{1 - q^2}{1 + q}\right) \\
&= 2 \cdot (1 - p^2) + 2 \cdot (1 - q^2) + (3 \cdot p \cdot q + 2) \cdot (p \cdot q - 1) \\
&\quad + 2 \cdot ((p - 1) \cdot (q - 1) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \\
&= 2 - 2 \cdot p^2 + 2 - 2 \cdot q^2 - 2 \cdot p^2 \cdot q^2 + 4 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p^2 \\
&\quad + 2 \cdot q^2 - 4 \cdot p - 4 \cdot q + 2 + 3 \cdot p^2 \cdot q^2 - 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p \cdot q - 2 \\
&= p^2 \cdot q^2 + 3 \cdot p \cdot q - 4 \cdot p - 4 \cdot q + 4 \\
&= \frac{2 \cdot p \cdot q \cdot (p \cdot q - 1)}{2} + 4 \cdot (p - 1) \cdot (q - 1) \\
&= 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} + 4 \cdot \Phi(p \cdot q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

## 4.2.1. Not

Sonuç 4.2.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.2.2'deki  $n = p \cdot q$ 'ya karşılık gelen eşitlik ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

*Örnek*

$P(Z_{18})$  power grafının hiper-Wiener indeksini Teorem 4.2.1'i kullanarak hesaplayalım. Dolayısıyla Teorem 4.2.1'den

$$WW(P(Z_{18})) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_{18}))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi  $P(Z_{18})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$\bar{0}\sim\bar{1}, \bar{0}\sim\bar{2}, \bar{0}\sim\bar{3}, \bar{0}\sim\bar{4}, \bar{0}\sim\bar{5}, \bar{0}\sim\bar{6}, \bar{0}\sim\bar{7}, \bar{0}\sim\bar{8}, \bar{0}\sim\bar{9}, \bar{0}\sim\bar{10}, \bar{0}\sim\bar{11}, \bar{0}\sim\bar{12}, \bar{0}\sim\bar{13}, \bar{0}\sim\bar{14}, \bar{0}\sim\bar{15},$   
 $\bar{0}\sim\bar{16}, \bar{0}\sim\bar{17}$

$\bar{1}\sim\bar{0}, \bar{1}\sim\bar{2}, \bar{1}\sim\bar{3}, \bar{1}\sim\bar{4}, \bar{1}\sim\bar{5}, \bar{1}\sim\bar{6}, \bar{1}\sim\bar{7}, \bar{1}\sim\bar{8}, \bar{1}\sim\bar{9}, \bar{1}\sim\bar{10}, \bar{1}\sim\bar{11}, \bar{1}\sim\bar{12}, \bar{1}\sim\bar{13}, \bar{1}\sim\bar{14}, \bar{1}\sim\bar{15},$   
 $\bar{1}\sim\bar{16}, \bar{1}\sim\bar{17}$

$\bar{5}\sim\bar{0}, \bar{5}\sim\bar{1}, \bar{5}\sim\bar{2}, \bar{5}\sim\bar{3}, \bar{5}\sim\bar{4}, \bar{5}\sim\bar{6}, \bar{5}\sim\bar{7}, \bar{5}\sim\bar{8}, \bar{5}\sim\bar{9}, \bar{5}\sim\bar{10}, \bar{5}\sim\bar{11}, \bar{5}\sim\bar{12}, \bar{5}\sim\bar{13}, \bar{5}\sim\bar{14}, \bar{5}\sim\bar{15},$   
 $\bar{5}\sim\bar{16}, \bar{5}\sim\bar{17}$

$\bar{7}\sim\bar{0}, \bar{7}\sim\bar{1}, \bar{7}\sim\bar{2}, \bar{7}\sim\bar{3}, \bar{7}\sim\bar{4}, \bar{7}\sim\bar{5}, \bar{7}\sim\bar{6}, \bar{7}\sim\bar{8}, \bar{7}\sim\bar{9}, \bar{7}\sim\bar{10}, \bar{7}\sim\bar{11}, \bar{7}\sim\bar{12}, \bar{7}\sim\bar{13}, \bar{7}\sim\bar{14}, \bar{7}\sim\bar{15},$   
 $\bar{7}\sim\bar{16}, \bar{7}\sim\bar{17}$

$\bar{11}\sim\bar{0}, \bar{11}\sim\bar{1}, \bar{11}\sim\bar{2}, \bar{11}\sim\bar{3}, \bar{11}\sim\bar{4}, \bar{11}\sim\bar{5}, \bar{11}\sim\bar{6}, \bar{11}\sim\bar{7}, \bar{11}\sim\bar{8}, \bar{11}\sim\bar{9}, \bar{11}\sim\bar{10}, \bar{11}\sim\bar{12},$   
 $\bar{11}\sim\bar{13}, \bar{11}\sim\bar{14}, \bar{11}\sim\bar{15}, \bar{11}\sim\bar{16}, \bar{11}\sim\bar{17},$

$\bar{13}\sim\bar{0}, \bar{13}\sim\bar{1}, \bar{13}\sim\bar{2}, \bar{13}\sim\bar{3}, \bar{13}\sim\bar{4}, \bar{13}\sim\bar{5}, \bar{13}\sim\bar{6}, \bar{13}\sim\bar{7}, \bar{13}\sim\bar{8}, \bar{13}\sim\bar{9}, \bar{13}\sim\bar{10}, \bar{13}\sim\bar{11},$   
 $\bar{13}\sim\bar{12}, \bar{13}\sim\bar{14}, \bar{13}\sim\bar{15}, \bar{13}\sim\bar{16}, \bar{13}\sim\bar{17},$

$\bar{17}\sim\bar{0}, \bar{17}\sim\bar{1}, \bar{17}\sim\bar{2}, \bar{17}\sim\bar{3}, \bar{17}\sim\bar{4}, \bar{17}\sim\bar{5}, \bar{17}\sim\bar{6}, \bar{17}\sim\bar{7}, \bar{17}\sim\bar{8}, \bar{17}\sim\bar{9}, \bar{17}\sim\bar{10}, \bar{17}\sim\bar{11},$   
 $\bar{17}\sim\bar{12}, \bar{17}\sim\bar{13}, \bar{17}\sim\bar{14}, \bar{17}\sim\bar{15}, \bar{17}\sim\bar{16},$

$\bar{2}\sim\bar{0}, \bar{2}\sim\bar{1}, \bar{2}\sim\bar{4}, \bar{2}\sim\bar{5}, \bar{2}\sim\bar{6}, \bar{2}\sim\bar{7}, \bar{2}\sim\bar{8}, \bar{2}\sim\bar{10}, \bar{2}\sim\bar{11}, \bar{2}\sim\bar{12}, \bar{2}\sim\bar{13}, \bar{2}\sim\bar{14}, \bar{2}\sim\bar{16}, \bar{2}\sim\bar{17},$   
 $\bar{4}\sim\bar{0}, \bar{4}\sim\bar{1}, \bar{4}\sim\bar{2}, \bar{4}\sim\bar{5}, \bar{4}\sim\bar{6}, \bar{4}\sim\bar{7}, \bar{4}\sim\bar{8}, \bar{4}\sim\bar{10}, \bar{4}\sim\bar{11}, \bar{4}\sim\bar{12}, \bar{4}\sim\bar{13}, \bar{4}\sim\bar{14}, \bar{4}\sim\bar{16}, \bar{4}\sim\bar{17},$

$\bar{8}\sim\bar{0}, \bar{8}\sim\bar{1}, \bar{8}\sim\bar{2}, \bar{8}\sim\bar{4}, \bar{8}\sim\bar{5}, \bar{8}\sim\bar{6}, \bar{8}\sim\bar{7}, \bar{8}\sim\bar{10}, \bar{8}\sim\bar{11}, \bar{8}\sim\bar{12}, \bar{8}\sim\bar{13}, \bar{8}\sim\bar{14}, \bar{8}\sim\bar{16}, \bar{8}\sim\bar{17},$

$\bar{10}\sim\bar{0}, \bar{10}\sim\bar{1}, \bar{10}\sim\bar{2}, \bar{10}\sim\bar{4}, \bar{10}\sim\bar{5}, \bar{10}\sim\bar{6}, \bar{10}\sim\bar{7}, \bar{10}\sim\bar{8}, \bar{10}\sim\bar{11}, \bar{10}\sim\bar{12}, \bar{10}\sim\bar{13}, \bar{10}\sim\bar{14},$   
 $\bar{10}\sim\bar{16}, \bar{10}\sim\bar{17}$

$\bar{14}\sim\bar{0}, \bar{14}\sim\bar{1}, \bar{14}\sim\bar{2}, \bar{14}\sim\bar{4}, \bar{14}\sim\bar{5}, \bar{14}\sim\bar{6}, \bar{14}\sim\bar{7}, \bar{14}\sim\bar{8}, \bar{14}\sim\bar{10}, \bar{14}\sim\bar{11}, \bar{14}\sim\bar{12}, \bar{14}\sim\bar{13},$   
 $\bar{14}\sim\bar{16}, \bar{14}\sim\bar{17}$

$\overline{16} \sim \overline{0}, \overline{16} \sim \overline{1}, \overline{16} \sim \overline{2}, \overline{16} \sim \overline{4}, \overline{16} \sim \overline{5}, \overline{16} \sim \overline{6}, \overline{16} \sim \overline{7}, \overline{16} \sim \overline{8}, \overline{16} \sim \overline{10}, \overline{16} \sim \overline{11}, \overline{16} \sim \overline{12}, \overline{16} \sim \overline{13},$   
 $\overline{16} \sim \overline{14}, \overline{16} \sim \overline{17}$

$\overline{3} \sim \overline{0}, \overline{3} \sim \overline{1}, \overline{3} \sim \overline{5}, \overline{3} \sim \overline{6}, \overline{3} \sim \overline{7}, \overline{3} \sim \overline{9}, \overline{3} \sim \overline{11}, \overline{3} \sim \overline{12}, \overline{3} \sim \overline{13}, \overline{3} \sim \overline{15}, \overline{3} \sim \overline{17},$

$\overline{15} \sim \overline{0}, \overline{15} \sim \overline{1}, \overline{15} \sim \overline{3}, \overline{15} \sim \overline{5}, \overline{15} \sim \overline{6}, \overline{15} \sim \overline{7}, \overline{15} \sim \overline{9}, \overline{15} \sim \overline{11}, \overline{15} \sim \overline{12}, \overline{15} \sim \overline{13}, \overline{15} \sim \overline{17},$

$\overline{6} \sim \overline{0}, \overline{6} \sim \overline{1}, \overline{6} \sim \overline{2}, \overline{6} \sim \overline{3}, \overline{6} \sim \overline{4}, \overline{6} \sim \overline{5}, \overline{6} \sim \overline{7}, \overline{6} \sim \overline{8}, \overline{6} \sim \overline{10}, \overline{6} \sim \overline{11}, \overline{6} \sim \overline{12}, \overline{6} \sim \overline{13}, \overline{6} \sim \overline{14}, \overline{6} \sim \overline{15},$   
 $\overline{6} \sim \overline{16}, \overline{6} \sim \overline{17}$

$\overline{12} \sim \overline{0}, \overline{12} \sim \overline{1}, \overline{12} \sim \overline{2}, \overline{12} \sim \overline{3}, \overline{12} \sim \overline{4}, \overline{12} \sim \overline{5}, \overline{12} \sim \overline{6}, \overline{12} \sim \overline{7}, \overline{12} \sim \overline{8}, \overline{12} \sim \overline{10}, \overline{12} \sim \overline{11}, \overline{12} \sim \overline{13},$   
 $\overline{12} \sim \overline{14}, \overline{12} \sim \overline{15}, \overline{12} \sim \overline{16}, \overline{12} \sim \overline{17},$

$\overline{9} \sim \overline{0}, \overline{9} \sim \overline{1}, \overline{9} \sim \overline{3}, \overline{9} \sim \overline{5}, \overline{9} \sim \overline{7}, \overline{9} \sim \overline{11}, \overline{9} \sim \overline{13}, \overline{9} \sim \overline{15}, \overline{9} \sim \overline{17}$

bulunur. Burada ki bilgiler doğrultusunda  $V(P(Z_{18})) = Z_{18}$ 'deki her elemanın sırasıyla, komşu olduğu noktalarının sayısı ile "1" i ve komşu olmadığı noktalarının sayısı ile "3"ü çarparak toplayacak olursak yani,

$$\begin{aligned} WW(P(Z_{18})) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_{18}))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases} \\ &= 7 \cdot (17 \cdot 1 + 0 \cdot 3) + 6 \cdot (14 \cdot 1 + 3 \cdot 3) + 2 \cdot (11 \cdot 1 + 6 \cdot 3) \\ &\quad + 2 \cdot (16 \cdot 1 + 1 \cdot 3) + (9 \cdot 1 + 8 \cdot 3) \\ &= 119 + 138 + 58 + 38 + 33 \\ &= 386 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafinin hiper-Wiener indeksini Teorem 4.2.3'ü kullanarak hesaplayalım. Dolayısıyla Teorem 4.2.3'ten  $n = 2 \cdot 3^2$  olmak üzere  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olacağından bu bilgiler doğrultusunda,

$$WW(P(Z_{18})) = 2 \cdot (1 - 2^2) + 2 \cdot (1 - 3^4) + (3 \cdot 18 + 2) \cdot (18 - 1)$$

$$+2 \cdot (\phi(2 \cdot 3) - 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1-2^2}{1+2}\right) \cdot \left(\frac{1-3^4}{1+3}\right)$$

$$WW(P(Z_{18})) = -2 \cdot 3 - 2 \cdot 80 + 2 \cdot (2 - 12) \cdot (-1) \cdot (-20) + 56 \cdot 17$$

$$= -6 - 160 - 400 + 952$$

$$= 386$$

elde edilir.

#### 4.2.4. Teorem

$G$  devirli bir grup olsun.  $e \in G$  birim eleman olmak üzere herhangi bir  $e \neq a \in G$  alalım. Eğer  $a \sim b$  olacak şekilde  $e \neq b \in G$  varsa  $\delta(P(G)) \geq 2$  dir [14].

*İspat*

$G$  devirli bir grup ve  $e \in G$  birim eleman olsun.  $P(G)$  power grafının tanımı gereği  $\forall u \in G$  için  $u \sim e$  olduğundan  $d(u, e) = 1$  olur. Ayrıca hipotezden dolayı kabul edelim ki herhangi bir  $u \in G$  için  $u \sim b$  olacak şekilde  $e \neq b \in G$  olsun. Bu bize  $u \in G$ 'nin hem  $e \in G$  ile hem de  $b \in G$  ile arasında farklı bir yollar olduğunu gösterir. Bu da

$$\min\{u \in V(P(G)) \mid d_u\} \geq 2$$

olduğunu gösterir. O halde  $\delta(P(G))$ 'nin tanımı gereği

$$\delta(P(G)) = \min\{u \in V(P(G)) \mid d_u\} \geq 2$$

olacağından istenen elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

#### 4.2.2. Sonuç

$(Z_n, +)$  devirli grup olmak üzere, eğer  $\delta(P(Z_n)) \geq 2$  ise  $P(Z_n)$  power grafi Hamiltonundur [14].

*İspat*

Kabul edelim ki  $\delta(P(Z_n)) \geq 2$  olsun. O halde bu bize  $n \geq 3$  olduğunu gösterir. Diğer taraftan Teorem 3.1.1 kullanılacak olursa  $P(Z_n)$  power grafın Hamilton olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.2.5. Teorem

$n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$4 \cdot n \cdot \delta - 6 \cdot \binom{n}{2} \leq WW(P(Z_n)) \leq 6 \cdot \binom{n}{2} - 2 \cdot n \cdot \delta$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$P(Z_n)$  power grafı  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power grafı olsun. O halde Teorem 3.1.3'ten dolayı  $m$  kenar sayısı,

$$m = n \cdot (n - 1) - W(P(Z_n))$$

olacağından bu  $m$  kenar sayısı Teorem 4.2.2'deki Eş. 4.4'te yerine yazılacak olursa;

$$\begin{aligned} WW(P(Z_n)) &= 6 \cdot \binom{n}{2} - 4 \cdot m \\ &= 6 \cdot \binom{n}{2} - 4 \cdot (n \cdot (n - 1) - W(P(Z_n))) \\ &= 6 \cdot \binom{n}{2} - 8 \cdot \binom{n}{2} + 4 \cdot W(P(Z_n)) \\ &= 4 \cdot W(P(Z_n)) - 2 \cdot \binom{n}{2} \end{aligned}$$

bulunur ve buradan,

$$W(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot \left( WW(P(Z_n)) + 2 \cdot \binom{n}{2} \right)$$

elde edilir. Son eşitlik Teorem 4.1.7’de yerine yazılırsa,

$$n \cdot \left( \delta - \frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{1}{4} \cdot \left( WW(P(Z_n)) + 2 \cdot \binom{n}{2} \right) \leq n \cdot \left( n - \frac{\delta}{2} - 1 \right)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$4 \cdot n \cdot \delta - 6 \cdot \binom{n}{2} \leq WW(P(Z_n)) \leq 6 \cdot \binom{n}{2} - 2 \cdot n \cdot \delta$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$4 \cdot n \cdot \delta - 6 \cdot \binom{n}{2} = 6 \cdot \binom{n}{2} - 2 \cdot n \cdot \delta$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$6 \cdot n \cdot \delta = 12 \cdot \binom{n}{2}$$

$$n \cdot \delta = n \cdot (n - 1)$$

$$\delta = n - 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak “ $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ ” olmasıyla yani “ $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden” olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

### 4.3. Power Grafların Harary İndeksi

Bu bölümde amacımız,  $p$  ile  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  ve genel bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin Harary indeksi üzerinde ana sonuçlarımızı vermektir. Bu çalışmalarda öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar olmak üzere  $p^k$ ,  $p \cdot q$  ve  $p^k \cdot q^r$  değerlerine karşılık gelen yönlendirilmemiş  $P(Z_n)$  power grafinin Harary indeksi ile ilgili teoremler elde edilmiştir. Son olarakta genel bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin Harary indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların Harary indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin Harary indeksi,

$$H(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)}$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  noktaları arasındaki en kısa uzaklıktır.

#### 4.3.1. Teorem

$P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$H(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ \frac{1}{2}, & u \not\sim v \end{cases}$$

dir. Burada  $\sim$  ve  $\not\sim$  sırasıyla herhangi iki köşenin komşu olmasını ve komşu olmamasını ifade eder.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.

$$\mathbb{R} = \left\{ \{u, v\} \subseteq V(P(Z_n)) \mid u \text{ ile } v \text{ komşudur} \Leftrightarrow u \neq v, \langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle \text{ veya } \langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle \text{ dir.} \right\}$$

kümesini tanımlayalım.  $\{u, v\} \subseteq V(P(Z_n))$  için  $P(Z_n)$ 'de iki durum vardır. Eğer  $u$  ile  $v$  komşu değilse yani  $u \not\sim v$  ise  $d(u, v) = 2$ 'dir. Diğer durumda  $u$  ile  $v$  komşudur yani  $u \sim v$  olup  $d(u, v) = 1$ 'dir. Bu durumda aşağıda  $\mathbb{R}$ 'nin tanımını kullanacak olursak,

$$\begin{aligned}
 H(P(Z_n)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)} \\
 &= \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} \frac{1}{d(u,v)} + \sum_{\{u,v\} \notin \mathbb{R}} \frac{1}{d(u,v)} \\
 &= \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} 1 + \sum_{\{u,v\} \notin \mathbb{R}} \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 2, & \{u,v\} \subseteq \mathbb{R} \\ 1, & \{u,v\} \notin \mathbb{R} \end{cases}
 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$H(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ \frac{1}{2}, & u \not\sim v \end{cases}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.3.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  pozitif bir tamsayı olsun. O halde  $n$  mertebeden ve  $m$  kenarlı  $P(Z_n)$  power grafi için, eğer  $n = p^k$  ise

$$H(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot \binom{p^k}{2}$$

ve eğer  $n = p \cdot q$  ise

$$H(P(Z_{p \cdot q})) = 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q)$$

dir [14].

*İspat*

$p, q$  farklı asal sayılar ve  $k$  pozitif bir tamsayı olsun.  $n$  mertebeden ve  $m$  kenarlı  $P(Z_n)$  power grafi için, Harary indeks tanımı ve gerekli bilgiler kullanılacak olursa;

$$\begin{aligned}
 H(P(Z_n)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)} \\
 &= \left( \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=1} 1 + \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( d_i + \frac{1}{2} \cdot (n-1-d_i) \right) \\
 &= \binom{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \\
 &= \binom{n}{2} + m
 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer  $n = p^k$  ise Sonuç 4.1.1'den

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan Teorem 3.1.3'ten

$$W(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1) - m$$

dir. Dolayısıyla

$$m = \binom{p^k}{2}$$

olur. O halde bu bilgiler doğrultusunda  $n = p^k$  için düzenleme yapılacak olursa,

$$H(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2} + m = 2 \cdot \binom{p^k}{2}$$

elde edilmiş olur. Sonuç 4.1.4'ten  $n = p \cdot q$  için

$$W(P(Z_{p \cdot q})) = \binom{p \cdot q}{2} + \phi(p \cdot q) = 2 \cdot \phi(p \cdot q) + m$$

olduğundan

$$m = \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q)$$

bulunur. O halde,

$$H(P(Z_{p \cdot q})) = 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.3.3. Teorem

$p, q$  farklı asal sayılar  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar ve  $P(Z_n), n = p^k \cdot q^r$  mertebeden ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$H(P(Z_n)) = \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(1-p^{2 \cdot k})}{2} - \frac{(1-q^{2 \cdot r})}{2} \\ - \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1-p^{2 \cdot k}}{1+p} \right) \cdot \left( \frac{1-q^{2 \cdot r}}{1+q} \right)$$

dir [44].

*İspat*

$p, q$  farklı asal sayılar  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeden ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafinin Harary indeksi;

$$\begin{aligned}
 H(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} \frac{1}{d(u,v)} \\
 &= \left( \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=1} 1 + \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{p^k \cdot q^r} \left( d_i + \frac{1}{2} \cdot (n - 1 - d_i) \right) \\
 &= \binom{p^k \cdot q^r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{p^k \cdot q^r} d_i \\
 &= \binom{p^k \cdot q^r}{2} + m
 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Sonuç 3.1.1'den

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d)$$

olduğundan bu ifadeyi  $m$ 'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned}
 H(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \binom{p^k \cdot q^r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} (2 \cdot d - \phi(d) - 1) \cdot \phi(d) \\
 &= \binom{p^k \cdot q^r}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d|n} \phi(d) \cdot (-2 \cdot d + \phi(d) + 1)
 \end{aligned}$$

$$H(P(Z_{p^k, q^r})) = \binom{p^k \cdot q^r}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d \mid n} \phi(d)$$

elde edilir. Burada  $\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$  olduğundan bu ifadeyi son eşitsizlikte yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} H(P(Z_n)) &= \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n - 2)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 4.2.3'teki Eş. 4.6'dan

$$-\frac{1}{2} \cdot \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot (\phi(d) - 2 \cdot d) = -W(P(Z_n)) + \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot n}{2}$$

olacağından bu denklem Eş. 4.8'de yerine yazılırsa,

$$H(P(Z_n)) = \frac{n \cdot (n - 2)}{2} - W(P(Z_n)) + \frac{1}{2} \cdot \binom{2 \cdot n}{2} = 3 \cdot \binom{n}{2} - W(P(Z_n))$$

olup bu eşitlikte Teorem 4.1.6'yı kullanacak olursak,

$$\begin{aligned} H(P(Z_n)) &= 3 \cdot \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \binom{2 \cdot n}{2} - 1 \right) - \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} - \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right) \\ &= \frac{(3 \cdot n^2 - 3 \cdot n)}{2} - \frac{2 \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2} - \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} - \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2 \cdot k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2 \cdot r}}{1 + q} \right) \\ &= \frac{(3 \cdot n^2 - 3 \cdot n - 2 \cdot n^2 + n + 1)}{2} - \frac{(1 - p^{2 \cdot k})}{2} - \frac{(1 - q^{2 \cdot r})}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2r}}{1 + q} \right)$$

$$\begin{aligned} H(P(Z_n)) &= \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(1-p^{2k})}{2} - \frac{(1-q^{2r})}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^{2k}}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^{2r}}{1 + q} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.3.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $P(Z_n)$   $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$H(P(Z_{p \cdot q})) = 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q)$$

dir.

*İspat*

$n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Teorem 4.3.3'te

$k = r = 1$  alınacak olursa;

$$\begin{aligned} H(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{(p \cdot q - 1)^2}{2} - \frac{(1 - p^2)}{2} - \frac{(1 - q^2)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (\phi(p \cdot q) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot \left( \frac{1 - p^2}{1 + p} \right) \cdot \left( \frac{1 - q^2}{1 + q} \right) \\ &= \frac{(p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p \cdot q + p^2 + q^2 - 1)}{2} \\ &\quad - \frac{((p-1) \cdot (q-1) - 2 \cdot p \cdot q) \cdot (1-p) \cdot (1-q)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{2} \cdot (p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p \cdot q + p^2 + q^2 - 1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot p \cdot q - p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p - 2 \cdot q + p^2 + q^2 + 1) \\
&= \frac{(2 \cdot p^2 \cdot q^2 - 4 \cdot p \cdot q - 1 + 2 \cdot p + 2 \cdot q - 1)}{2} \\
&= p^2 \cdot q^2 - 2 \cdot p \cdot q + p + q - 1 \\
&= 2 \cdot \binom{p \cdot q}{2} - \phi(p \cdot q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.3.1. Not

Sonuç 4.3.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.3.2'deki  $n = p \cdot q$ 'ya karşılık gelen eşitlik ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{18})$  power grafının Harary indeksini öncelikle Teorem 4.3.1'i kullanarak hesaplayalım. Dolayısıyla Teorem 4.3.1'den

$$H(P(Z_{18})) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_{18}))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ \frac{1}{2}, & u \not\sim v \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi  $P(Z_{18})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11}, \bar{5} \sim \bar{12}, \bar{5} \sim \bar{13}, \bar{5} \sim \bar{14}, \bar{5} \sim \bar{15}, \\ \bar{5} \sim \bar{16}, \bar{5} \sim \bar{17}$$

$\overline{7\sim 0}, \overline{7\sim 1}, \overline{7\sim 2}, \overline{7\sim 3}, \overline{7\sim 4}, \overline{7\sim 5}, \overline{7\sim 6}, \overline{7\sim 8}, \overline{7\sim 9}, \overline{7\sim 10}, \overline{7\sim 11}, \overline{7\sim 12}, \overline{7\sim 13}, \overline{7\sim 14}, \overline{7\sim 15},$   
 $\overline{7\sim 16}, \overline{7\sim 17}$

$\overline{11\sim 0}, \overline{11\sim 1}, \overline{11\sim 2}, \overline{11\sim 3}, \overline{11\sim 4}, \overline{11\sim 5}, \overline{11\sim 6}, \overline{11\sim 7}, \overline{11\sim 8}, \overline{11\sim 9}, \overline{11\sim 10}, \overline{11\sim 12},$   
 $\overline{11\sim 13}, \overline{11\sim 14}, \overline{11\sim 15}, \overline{11\sim 16}, \overline{11\sim 17},$

$\overline{13\sim 0}, \overline{13\sim 1}, \overline{13\sim 2}, \overline{13\sim 3}, \overline{13\sim 4}, \overline{13\sim 5}, \overline{13\sim 6}, \overline{13\sim 7}, \overline{13\sim 8}, \overline{13\sim 9}, \overline{13\sim 10}, \overline{13\sim 11},$   
 $\overline{13\sim 12}, \overline{13\sim 14}, \overline{13\sim 15}, \overline{13\sim 16}, \overline{13\sim 17},$

$\overline{17\sim 0}, \overline{17\sim 1}, \overline{17\sim 2}, \overline{17\sim 3}, \overline{17\sim 4}, \overline{17\sim 5}, \overline{17\sim 6}, \overline{17\sim 7}, \overline{17\sim 8}, \overline{17\sim 9}, \overline{17\sim 10}, \overline{17\sim 11},$   
 $\overline{17\sim 12}, \overline{17\sim 13}, \overline{17\sim 15}, \overline{17\sim 16},$

$\overline{2\sim 0}, \overline{2\sim 1}, \overline{2\sim 4}, \overline{2\sim 5}, \overline{2\sim 6}, \overline{2\sim 7}, \overline{2\sim 8}, \overline{2\sim 10}, \overline{2\sim 11}, \overline{2\sim 12}, \overline{2\sim 13}, \overline{2\sim 14}, \overline{2\sim 16}, \overline{2\sim 17},$

$\overline{4\sim 0}, \overline{4\sim 1}, \overline{4\sim 2}, \overline{4\sim 5}, \overline{4\sim 6}, \overline{4\sim 7}, \overline{4\sim 8}, \overline{4\sim 10}, \overline{4\sim 11}, \overline{4\sim 12}, \overline{4\sim 13}, \overline{4\sim 14}, \overline{4\sim 16}, \overline{4\sim 17},$

$\overline{8\sim 0}, \overline{8\sim 1}, \overline{8\sim 2}, \overline{8\sim 4}, \overline{8\sim 5}, \overline{8\sim 6}, \overline{8\sim 7}, \overline{8\sim 10}, \overline{8\sim 11}, \overline{8\sim 12}, \overline{8\sim 13}, \overline{8\sim 14}, \overline{8\sim 16}, \overline{8\sim 17},$

$\overline{10\sim 0}, \overline{10\sim 1}, \overline{10\sim 2}, \overline{10\sim 4}, \overline{10\sim 5}, \overline{10\sim 6}, \overline{10\sim 7}, \overline{10\sim 8}, \overline{10\sim 11}, \overline{10\sim 12}, \overline{10\sim 13}, \overline{10\sim 14},$   
 $\overline{10\sim 16}, \overline{10\sim 17}$

$\overline{14\sim 0}, \overline{14\sim 1}, \overline{14\sim 2}, \overline{14\sim 4}, \overline{14\sim 5}, \overline{14\sim 6}, \overline{14\sim 7}, \overline{14\sim 8}, \overline{14\sim 10}, \overline{14\sim 11}, \overline{14\sim 12}, \overline{14\sim 13},$   
 $\overline{14\sim 16}, \overline{14\sim 17}$

$\overline{16\sim 0}, \overline{16\sim 1}, \overline{16\sim 2}, \overline{16\sim 4}, \overline{16\sim 5}, \overline{16\sim 6}, \overline{16\sim 7}, \overline{16\sim 8}, \overline{16\sim 10}, \overline{16\sim 11}, \overline{16\sim 12}, \overline{16\sim 13},$   
 $\overline{16\sim 14}, \overline{16\sim 17}$

$\overline{3\sim 0}, \overline{3\sim 1}, \overline{3\sim 5}, \overline{3\sim 6}, \overline{3\sim 7}, \overline{3\sim 9}, \overline{3\sim 11}, \overline{3\sim 12}, \overline{3\sim 13}, \overline{3\sim 15}, \overline{3\sim 17},$

$\overline{15\sim 0}, \overline{15\sim 1}, \overline{15\sim 3}, \overline{15\sim 5}, \overline{15\sim 6}, \overline{15\sim 7}, \overline{15\sim 9}, \overline{15\sim 11}, \overline{15\sim 12}, \overline{15\sim 13}, \overline{15\sim 17},$

$\overline{6\sim 0}, \overline{6\sim 1}, \overline{6\sim 2}, \overline{6\sim 3}, \overline{6\sim 4}, \overline{6\sim 5}, \overline{6\sim 7}, \overline{6\sim 8}, \overline{6\sim 10}, \overline{6\sim 11}, \overline{6\sim 12}, \overline{6\sim 13}, \overline{6\sim 14}, \overline{6\sim 15},$   
 $\overline{6\sim 16}, \overline{6\sim 17}$

$$\overline{12} \sim \overline{0}, \overline{12} \sim \overline{1}, \overline{12} \sim \overline{2}, \overline{12} \sim \overline{3}, \overline{12} \sim \overline{4}, \overline{12} \sim \overline{5}, \overline{12} \sim \overline{6}, \overline{12} \sim \overline{7}, \overline{12} \sim \overline{8}, \overline{12} \sim \overline{10}, \overline{12} \sim \overline{11}, \overline{12} \sim \overline{13}, \\ \overline{12} \sim \overline{14}, \overline{12} \sim \overline{15}, \overline{12} \sim \overline{16}, \overline{12} \sim \overline{17},$$

$$\overline{9} \sim \overline{0}, \overline{9} \sim \overline{1}, \overline{9} \sim \overline{3}, \overline{9} \sim \overline{5}, \overline{9} \sim \overline{7}, \overline{9} \sim \overline{11}, \overline{9} \sim \overline{13}, \overline{9} \sim \overline{15}, \overline{9} \sim \overline{17}$$

bulunur. Burada ki bilgiler doğrultusunda  $V(P(Z_{18})) = Z_{18}$ 'deki her elemanın sırasıyla, komşu olduğu noktalarının sayısı ile "1" i ve komşu olmadığı noktalarının sayısı ile "1/2" yi çarparak toplayacak olursak yani,

$$H(P(Z_{18})) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_{18}))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ \frac{1}{2}, & u \not\sim v \end{cases} \\ = 7 \cdot \left(17 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \left(14 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(11 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ + 2 \cdot \left(16 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(9 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ = 119 + 93 + 28 + 33 + 13 = 286$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafinin hiper-Wiener indeksini Teorem 4.3.3'ü kullanarak hesaplayalım. Dolayısıyla Teorem 4.3.3'ten  $n = 2 \cdot 3^2$  olmak üzere  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olacağından bu bilgiler doğrultusunda,

$$H(P(Z_{18})) = \frac{(18-1)^2}{2} - \frac{(1-2^2)}{2} - \frac{(1-3^4)}{2} \\ - \frac{1}{2} \cdot (\phi(2 \cdot 3) - 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1-2^2}{1+2}\right) \cdot \left(\frac{1-3^4}{1+3}\right) \\ = \frac{289}{2} + \frac{3}{2} + \frac{80}{2} - \frac{1}{2} \cdot (2-12) \cdot (-1) \cdot (-20) \\ = \frac{372+200}{2} \\ = \frac{572}{2}$$

$$H(P(Z_{18})) = 286$$

elde edilir.

#### 4.3.4. Teorem

$n \in Z^+$ ,  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\frac{n \cdot \delta}{2} + \binom{n}{2} \leq H(P(Z_n)) \leq 4 \cdot \binom{n}{2} - n \cdot \delta$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in Z^+$ ,  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_n)$  power grafının Harary indeksi,

$$\begin{aligned} H(P(Z_n)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)} \\ &= \left( \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=1} 1 + \sum_{\frac{1}{d(u,v)}=\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( d_i + \frac{1}{2} \cdot (n-1-d_i) \right) \\ &= \binom{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \\ &= \binom{n}{2} + m \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$m = H(P(Z_n)) - \binom{n}{2}$$

bulunur. Bu  $m$  değeri Teorem 3.1.3'te yerine yazılacak olursa yani,

$$W(P(Z_n)) = n \cdot (n - 1) - m = n \cdot (n - 1) - \left( H(P(Z_n)) - \binom{n}{2} \right)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$\begin{aligned} H(P(Z_n)) &= \binom{n}{2} + n \cdot (n - 1) - W(P(Z_n)) \\ &= \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{2} - W(P(Z_n)) \\ &= 3 \cdot \binom{n}{2} - W(P(Z_n)) \end{aligned}$$

olacağından,

$$W(P(Z_n)) = 3 \cdot \binom{n}{2} - H(P(Z_n))$$

elde edilir. Son eşitlikte Teorem 4.1.7'yi kullanacak olursak

$$n \cdot \left( \delta - \frac{n-1}{2} \right) \leq 3 \cdot \binom{n}{2} - H(P(Z_n)) \leq n \cdot \left( n - \frac{\delta}{2} - 1 \right)$$

olup,

$$n \cdot \delta - \binom{n}{2} \leq 3 \cdot \binom{n}{2} - H(P(Z_n)) \leq 2 \cdot \binom{n}{2} - \frac{n \cdot \delta}{2}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{n \cdot \delta}{2} + \binom{n}{2} \leq H(P(Z_n)) \leq 4 \cdot \binom{n}{2} - n \cdot \delta$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere yani,

$$\frac{n \cdot \delta}{2} + \binom{n}{2} = 4 \cdot \binom{n}{2} - n \cdot \delta$$

olması gerekir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{3 \cdot n \cdot \delta}{2} = 3 \cdot \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

bulunur ve buradan,

$$\delta = n - 1$$

elde edilir. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.4. Power Grafların $SK$ , $SK_1$ ve $SK_2$ İndeksleri

Bu bölümde ki amacımız,  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  için  $P(Z_n)$  power grafinin öncelikle  $p, q$  veya  $\phi(n)$  ile bağlantılı  $SK$  ve  $SK_1$  indeksleri ile ilgili teoremler elde etmektir. Devamında  $p, q, n, SK_1$  veya  $\phi(n)$  ile bağlantılı  $SK_2$  indeksi elde edilmiştir. Daha sonra  $n = p^k \cdot q^r$  için  $SK$ ,  $SK_1$  ve  $SK_2$  indeksleri ile ilgili teoremler elde edilmiştir. Son olarakta genel bir  $n \in Z^+$  için  $SK$ ,  $SK_1$  ve  $SK_2$  indeksleri ile ilgili teoremler elde edilmiştir. Power grafların  $SK$ ,

$SK_1$  ve  $SK_2$  indeksleri ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafının sırayla  $SK(P(Z_n)), SK_1(P(Z_n)),$  ve  $SK_2(P(Z_n))$  indeksleri,

$$SK(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v),$$

$$SK_1(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} d_u \cdot d_v,$$

ve

$$SK_2(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  noktasının derecesini ve  $d(u, v)$ ,  $u$  ve  $v$  noktaları arasındaki en kısa uzaklığını göstermektedir.

#### 4.4.1. Teorem

$p$  asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olsun. Eğer  $P(Z_n)$  power grafi  $n = p^k$  mertebeli ise

$$SK(P(Z_{p^k})) = \frac{1}{2} \cdot p^k \cdot (p^k - 1)^2$$

dir [14].

*İspat*

$n = p^k$  ( $p$  asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$ ) için  $P(Z_{p^k})$  power grafının  $SK$  indeksi;

$$\begin{aligned}
SK(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u + d_v) \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((d_{\bar{0}} + d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} + d_{\bar{2}}) + (d_{\bar{0}} + d_{\bar{3}}) + \dots +) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} + d_{\overline{(p^k-1)}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\bar{2}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\bar{3}}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{1}} + d_{\bar{4}}) + \dots + (d_{\bar{1}} + d_{\overline{(p^k-1)}}) + (d_{\bar{2}} + d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{2}} + d_{\bar{4}}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{2}} + d_{\bar{5}}) + \dots + (d_{\bar{2}} + d_{\overline{(p^k-1)}}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\overline{(p^{k-2})}} + d_{\overline{(p^k-1)}}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( d_{\bar{0}} \cdot (p^k - 1) + d_{\bar{1}} \cdot (p^k - 1) + \dots + d_{\overline{(p^k-1)}} \cdot (p^k - 1) \right) \\
&= \frac{(p^k - 1)}{2} \cdot (d_{\bar{0}} + d_{\bar{1}} + \dots + d_{\overline{(p^k-1)}}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot p^k \cdot (p^k - 1)^2
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left( ((n-1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + q^2 \cdot \phi(p)^3 + p^2 \cdot \phi(q)^3 \right)$$

dir [14].

### İspat

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Tamsayılar iyi sıralı olduğundan  $p < q$  olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,  $a \in Z^+$  olmak üzere  $(a, p \cdot q) = 1$  ise  $Z_{p \cdot q} = \langle \bar{a} \rangle$ 'dir. Bu ise  $\bar{a} \in Z_{p \cdot q}$ 'nin  $(Z_{p \cdot q}, +)$  sonlu devirli grubun bir üretici olduğu anlamına gelir.  $Z_{p \cdot q}$ 'nin bütün üreteçlerinin kümesi  $U_{Z_{p \cdot q}}$  ile gösterilir. O halde

$$U_{Z_{p \cdot q}} = \{ \bar{a} \in Z_{p \cdot q} \mid (a, p \cdot q) = 1 \text{ ve } a \in Z^+ \}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

olmak üzere, bütün bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} V(P(Z_{p \cdot q})) &= \{u_1 = \bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}, 1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}, 1 \cdot \bar{q}, \\ &\quad 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}, \overline{p \cdot q} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\} \cup \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}\} \cup \\ &\quad \{1 \cdot \bar{q}, 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, gerçekten

$$\begin{aligned} |V(P(Z_{p \cdot q}))| &= 1 + \phi(p \cdot q) + (q - 1) + (p - 1) \\ &= (p - 1) \cdot (q - 1) + q + p - 1 \\ &= p \cdot q - p - q + 1 + q + p - 1 \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $i, j \in Z^+$  olmak üzere  $1 \leq i < p$  ve  $1 \leq j < q$  için  $(i \cdot q, n) \neq 1$  ve  $(j \cdot p, n) \neq 1$  bulunur. Dolayısıyla  $\{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p - 1) \cdot q}\}$  ve  $\{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q - 1) \cdot p}\}$  kümelerinden bir üreteç çıkamaz. Tüm bu bilgiler doğrultusunda,

$$V_0 = \{\bar{0}\},$$

$$V_1 = U_{Z_{p \cdot q}} = \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\},$$

$$V_2 = \{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\},$$

$$V_3 = \{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$$

ve

$$V(P(Z_{p \cdot q})) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

alabiliriz.  $P(Z_{p \cdot q})$  power grafinin SK indeksi;

$$\begin{aligned} SK(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p \cdot q}))} (d_u + d_v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} + d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} + d_{u_2}) + (d_{\bar{0}} + d_{u_3}) + \dots + (d_{\bar{0}} + d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} + d_{\bar{p}}) + (d_{\bar{0}} + d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{\bar{0}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{\bar{0}} + d_{\bar{q}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} + d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{\bar{0}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_{\bar{1}} + d_{u_2}) + (d_{\bar{1}} + d_{u_3}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\bar{1}} + d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\bar{p}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{1}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\bar{q}}) + (d_{\bar{1}} + d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{1}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_{u_2} + d_{u_3}) + \dots + (d_{u_2} + d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) + (d_{u_2} + d_{\bar{p}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_2} + d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{u_2} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{u_2} + d_{\bar{q}}) + (d_{u_2} + d_{\overline{2 \cdot q}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{u_2} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_{u_3} + d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) + (d_{u_3} + d_{\bar{p}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_3} + d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{u_3} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{u_3} + d_{\bar{q}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_3} + d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{u_3} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + \dots + (d_{u_{\phi(p \cdot q)}} + d_{\bar{p}}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}} + d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{u_{\phi(p,q)}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{u_{\phi(p,q)}} + d_{\overline{q}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}} + d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{u_{\phi(p,q)}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_p + d_{\overline{2 \cdot p}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\overline{p}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + \dots + (d_{\overline{2 \cdot p}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\overline{(q-2) \cdot p}} + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{\overline{q}} + d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{\overline{q}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\overline{2 \cdot q}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + \dots + (d_{\overline{(p-2) \cdot q}} + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( (p \cdot q - 1) \cdot d_{\overline{0}} + (p \cdot q - 1) \cdot d_{\overline{1}} + (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_2} + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_{\phi(p,q)}} + (\phi(p,q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\overline{q}} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\overline{2 \cdot q}} + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}} + (\phi(p,q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{p}} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{2 \cdot p}} + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}} \right)
\end{aligned}$$

olup burada,

$$d_{\overline{0}} = d_{\overline{1}} = d_{u_2} = \dots = d_{u_{\phi(p,q)}} = (p \cdot q - 1),$$

$$d_{\overline{q}} = d_{\overline{2 \cdot q}} = \dots = d_{\overline{(p-1) \cdot q}} = (p - 1) \cdot q$$

ve

$$d_{\overline{p}} = d_{\overline{2 \cdot p}} = \dots = d_{\overline{(q-1) \cdot p}} = (q - 1) \cdot p$$

değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$SK(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left( (n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1) + (\phi(n) + p - 1)^2 \cdot (p - 1) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot ((\phi(n) + q - 1)^2 \cdot (q - 1)) \\
SK(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \left( ((n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + (\phi(n) + \phi(p))^2 \cdot \phi(p) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(n) + \phi(q))^2 \cdot \phi(q) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( ((n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + (\phi(p) \cdot \phi(q) + \phi(p))^2 \cdot \phi(p) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(p) \cdot \phi(q) + \phi(q))^2 \cdot \phi(q) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( ((n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + (\phi(p) \cdot (\phi(q) + 1))^2 \cdot \phi(p) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (\phi(q) \cdot (\phi(p) + 1))^2 \cdot \phi(q) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( ((n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + q^2 \cdot \phi(p)^3 + p^2 \cdot \phi(q)^3 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.3. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^2)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^2)}{2}$$

dir [44].

#### *İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $n = p^k \cdot q^r$ 'nin bütün pozitif bölenleri,

$$\{1, p, p^2, p^3, \dots, p^k\},$$

$$\{q, q^2, q^3, \dots, q^r\},$$

$$\{p \cdot q, p \cdot q^2, p \cdot q^3, \dots, p \cdot q^r\},$$

$$\{p^2 \cdot q, p^2 \cdot q^2, p^2 \cdot q^3, \dots, p^2 \cdot q^r\},$$

$$\{p^3 \cdot q, p^3 \cdot q^2, p^3 \cdot q^3, \dots, p^3 \cdot q^r\},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\{p^k \cdot q, p^k \cdot q^2, p^k \cdot q^3, \dots, p^k \cdot q^r\}$$

dir. Ayrıca,

$$U_{Z_{p^k \cdot q^r}} = \{\bar{u} \in Z_{p^k \cdot q^r} \mid u \in Z, 1 \leq u < p^k \cdot q^r, (u, p^k \cdot q^r) = 1\} = \{\bar{1}, u_1, \dots, u_{\phi(p^k \cdot q^r)}\}$$

dir.  $Z_{p^k \cdot q^r} = \langle \bar{1} \rangle$  ve  $Z_{p^k \cdot q^r}$  grubunun mertebesi  $n = p^k \cdot q^r$  olduğundan burada ki herhangi bir devirli alt grubunun mertebesinin

$$\bar{a} = a \cdot \bar{1} \in Z_{p^k \cdot q^r} \text{ için}$$

$$o(\langle a \cdot \bar{1} \rangle) = \frac{n}{\text{obeb}(n, a)} = \frac{n}{(n, a)}$$

ve  $\langle a \cdot \bar{1} \rangle$  devirli grubun üreteçlerinin sayısının

$$\Phi\left(\frac{n}{(n, a)}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Burada  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının SK indeksinin

$$SK\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right)} (d_u + d_v)$$

olduğunu biliyoruz. Burada Tanım 2.4.10'dan

$$M_1\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right) = \sum_{u \in V\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right)} d_u^2 = \sum_{uv \in E\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right)} (d_u + d_v)$$

olacağından,

$$SK\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \in V\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right)} d_u^2$$

alabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned} SK\left(P(Z_{p^k \cdot q^r})\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(1, n)}\right) \cdot d_1^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p, n)}\right) \cdot d_p^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2, n)}\right) \cdot d_{p^2}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^3, n)}\right) \cdot d_{p^3}^2 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k, n)}\right) \cdot d_{p^k}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(q, n)}\right) \cdot d_q^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(q^2, n)}\right) \cdot d_{q^2}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(q^3, n)}\right) \cdot d_{q^3}^2 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(q^r, n)}\right) \cdot d_{q^r}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q, n)}\right) \cdot d_{p \cdot q}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{p \cdot q^2}^2 + \dots + \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{p \cdot q^r}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{p^2 \cdot q}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{p^2 \cdot q^2}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{p^2 \cdot q^3}^2 + \dots + \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{p^2 \cdot q^r}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^2}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^3}^2 + \dots + \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^r}^2 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q, n)}\right) \cdot d_{p^k \cdot q}^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^2}^2 + \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^3}^2 + \dots + \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{(n, n)} \right) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^2 \right) \\
SK(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(n) \cdot d_{\bar{1}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p} \right) \cdot d_{\bar{p}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^2} \right) \cdot d_{\bar{p}^2}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^3} \right) \cdot d_{\bar{p}^3}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^k} \right) \cdot d_{\bar{p}^k}^2 + \Phi \left( \frac{n}{q} \right) \cdot d_{\bar{q}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{q^2} \right) \cdot d_{\bar{q}^2}^2 + \Phi \left( \frac{n}{q^3} \right) \cdot d_{\bar{q}^3}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + \Phi \left( \frac{n}{q^r} \right) \cdot d_{\bar{q}^r}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p \cdot q} \right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p \cdot q^2} \right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p \cdot q^3} \right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^3}^2 + \dots + \Phi \left( \frac{n}{p \cdot q^r} \right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^r}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^2 \cdot q} \right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^2 \cdot q^2} \right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^2}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^2 \cdot q^3} \right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^3}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^2 \cdot q^r} \right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^r}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^3 \cdot q} \right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^3 \cdot q^2} \right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^3 \cdot q^3} \right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^3}^2 + \dots + \Phi \left( \frac{n}{p^3 \cdot q^r} \right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^r}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^k \cdot q} \right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^2 + \Phi \left( \frac{n}{p^k \cdot q^2} \right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi \left( \frac{n}{p^k \cdot q^3} \right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^3}^2 + \dots + \Phi \left( \frac{n}{n} = 1 \right) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^2 \right) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^k \cdot q^r) \cdot d_{\bar{1}}^2 + \Phi(p^{k-1} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}}^2 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-3} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^3}^2 + \dots + \Phi(q^r) \cdot d_{\bar{p}^k}^2 + \Phi(p^k \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^k \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^2 + \Phi(p^k \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^2 + \dots + \Phi(p^k) \cdot d_{\bar{q}^r}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-1} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^2 + \Phi(p^{k-1} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^r}^2 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^2}^2 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^3}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^r}^2 + \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^2}^2 + \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^3}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \Phi(p^{k-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^r}^2 + \dots + \Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^2 + \Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^2}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \left( \phi(q^{r-3}) \cdot d_{p^k \cdot q^3}^2 + \dots + \phi(1) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^2 \right) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \phi(q^r) \cdot \left( \phi(p^k) \cdot d_{\bar{1}}^2 + \phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p}}^2 + \phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p}^2}^2 + \dots + d_{\bar{p}^k}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \left( \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^2 + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^2 + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot d_{\bar{q}^r}^2 + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-1}) \cdot \left( \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}}^2 + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-1}) \cdot \left( \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^3}^2 + \dots + d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^r}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-2}) \cdot \left( \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}}^2 + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^2}^2 + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^3}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-2}) \cdot \left( + \dots + d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^r}^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-3}) \cdot \left( \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-3}) \cdot \left( \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^2}^2 + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^3}^2 + \dots + d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^r}^2 \right) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left( \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}}^2 + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^2}^2 + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^3}^2 \right) \\
& + \dots + \frac{1}{2} \cdot d_{\bar{0}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK(P(Z_{p^k \cdot q^r})) & = \frac{1}{2} \cdot \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{\bar{p}^i}^2 \cdot \phi(p^{k-i}) \right) + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^k) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{q}^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-1}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-2}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \phi(p^{k-3}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
& = \frac{1}{2} \cdot \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{\bar{p}^i}^2 \cdot \phi(p^{k-i}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^k \phi(p^{k-j}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{p^j \cdot q^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
SK(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^k (\phi(q^r) \cdot d_{p^i}^2 \cdot \phi(p^{k-i})) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^2 \cdot \phi(q^{r-i})) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^2) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^2)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot ((\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + p^2 \cdot \phi(q)^3 + q^2 \cdot \phi(p)^3)$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Teorem 4.4.3'te  $k = r = 1$  alınacak olursa;

$$\begin{aligned}
SK(P(Z_{p \cdot q})) &= \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(p^{1-i} \cdot q) \cdot d_{p^i}^2)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{(\phi(p^{1-j} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{p^j \cdot q}^2)}{2} \\
&= \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(q) \cdot d_{p^i}^2 \cdot \phi(p^{1-i}))}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{(\phi(p^{1-j}) \cdot d_{p^j \cdot q}^2)}{2}
\end{aligned}$$

$$SK(P(Z_{p,q})) = \frac{1}{2} \cdot (\phi(q) \cdot d_{\bar{1}}^2 \cdot \phi(p) + \phi(q) \cdot d_{\bar{p}}^2 \cdot \phi(1) + \phi(p) \cdot d_{\bar{q}}^2 + d_{\bar{p \cdot q}}^2)$$

olup burada,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = (n - 1),$$

$$d_{\bar{q}} = (p - 1) \cdot q = (n - q)$$

ve

$$d_{\bar{p}} = (n - p)$$

değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} SK(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{2} \cdot (\phi(n) \cdot (n - 1)^2 + \phi(q) \cdot (n - p)^2 + \phi(p) \cdot (n - q)^2 + (n - 1)^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\phi(n) \cdot (n - 1)^2 + \phi(q) \cdot (p \cdot q - p)^2 + \phi(p) \cdot (p \cdot q - q)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (n - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + p^2 \cdot \phi(q)^3 + q^2 \cdot \phi(p)^3) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.1. Not

Sonuç 4.4.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.4.2 ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{18})$  power grafının  $SK$  indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_{18})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$\bar{5}\sim\bar{0}, \bar{5}\sim\bar{1}, \bar{5}\sim\bar{2}, \bar{5}\sim\bar{3}, \bar{5}\sim\bar{4}, \bar{5}\sim\bar{6}, \bar{5}\sim\bar{7}, \bar{5}\sim\bar{8}, \bar{5}\sim\bar{9}, \bar{5}\sim\bar{10}, \bar{5}\sim\bar{11}, \bar{5}\sim\bar{12}, \bar{5}\sim\bar{13}, \bar{5}\sim\bar{14}, \bar{5}\sim\bar{15},$   
 $\bar{5}\sim\bar{16}, \bar{5}\sim\bar{17}$

$\bar{7}\sim\bar{0}, \bar{7}\sim\bar{1}, \bar{7}\sim\bar{2}, \bar{7}\sim\bar{3}, \bar{7}\sim\bar{4}, \bar{7}\sim\bar{5}, \bar{7}\sim\bar{6}, \bar{7}\sim\bar{8}, \bar{7}\sim\bar{9}, \bar{7}\sim\bar{10}, \bar{7}\sim\bar{11}, \bar{7}\sim\bar{12}, \bar{7}\sim\bar{13}, \bar{7}\sim\bar{14}, \bar{7}\sim\bar{15},$   
 $\bar{7}\sim\bar{16}, \bar{7}\sim\bar{17}$

$\bar{11}\sim\bar{0}, \bar{11}\sim\bar{1}, \bar{11}\sim\bar{2}, \bar{11}\sim\bar{3}, \bar{11}\sim\bar{4}, \bar{11}\sim\bar{5}, \bar{11}\sim\bar{6}, \bar{11}\sim\bar{7}, \bar{11}\sim\bar{8}, \bar{11}\sim\bar{9}, \bar{11}\sim\bar{10}, \bar{11}\sim\bar{12},$   
 $\bar{11}\sim\bar{13}, \bar{11}\sim\bar{14}, \bar{11}\sim\bar{15}, \bar{11}\sim\bar{16}, \bar{11}\sim\bar{17},$

$\bar{13}\sim\bar{0}, \bar{13}\sim\bar{1}, \bar{13}\sim\bar{2}, \bar{13}\sim\bar{3}, \bar{13}\sim\bar{4}, \bar{13}\sim\bar{5}, \bar{13}\sim\bar{6}, \bar{13}\sim\bar{7}, \bar{13}\sim\bar{8}, \bar{13}\sim\bar{9}, \bar{13}\sim\bar{10}, \bar{13}\sim\bar{11},$   
 $\bar{13}\sim\bar{12}, \bar{13}\sim\bar{14}, \bar{13}\sim\bar{15}, \bar{13}\sim\bar{16}, \bar{13}\sim\bar{17},$

$\bar{17}\sim\bar{0}, \bar{17}\sim\bar{1}, \bar{17}\sim\bar{2}, \bar{17}\sim\bar{3}, \bar{17}\sim\bar{4}, \bar{17}\sim\bar{5}, \bar{17}\sim\bar{6}, \bar{17}\sim\bar{7}, \bar{17}\sim\bar{8}, \bar{17}\sim\bar{9}, \bar{17}\sim\bar{10}, \bar{17}\sim\bar{11},$   
 $\bar{17}\sim\bar{12}, \bar{17}\sim\bar{13}, \bar{17}\sim\bar{14}, \bar{17}\sim\bar{15}, \bar{17}\sim\bar{16},$

$\bar{2}\sim\bar{0}, \bar{2}\sim\bar{1}, \bar{2}\sim\bar{4}, \bar{2}\sim\bar{5}, \bar{2}\sim\bar{6}, \bar{2}\sim\bar{7}, \bar{2}\sim\bar{8}, \bar{2}\sim\bar{10}, \bar{2}\sim\bar{11}, \bar{2}\sim\bar{12}, \bar{2}\sim\bar{13}, \bar{2}\sim\bar{14}, \bar{2}\sim\bar{16}, \bar{2}\sim\bar{17},$

$\bar{4}\sim\bar{0}, \bar{4}\sim\bar{1}, \bar{4}\sim\bar{2}, \bar{4}\sim\bar{5}, \bar{4}\sim\bar{6}, \bar{4}\sim\bar{7}, \bar{4}\sim\bar{8}, \bar{4}\sim\bar{10}, \bar{4}\sim\bar{11}, \bar{4}\sim\bar{12}, \bar{4}\sim\bar{13}, \bar{4}\sim\bar{14}, \bar{4}\sim\bar{16}, \bar{4}\sim\bar{17},$

$\bar{8}\sim\bar{0}, \bar{8}\sim\bar{1}, \bar{8}\sim\bar{2}, \bar{8}\sim\bar{4}, \bar{8}\sim\bar{5}, \bar{8}\sim\bar{6}, \bar{8}\sim\bar{7}, \bar{8}\sim\bar{10}, \bar{8}\sim\bar{11}, \bar{8}\sim\bar{12}, \bar{8}\sim\bar{13}, \bar{8}\sim\bar{14}, \bar{8}\sim\bar{16}, \bar{8}\sim\bar{17}$

$\bar{10}\sim\bar{0}, \bar{10}\sim\bar{1}, \bar{10}\sim\bar{2}, \bar{10}\sim\bar{4}, \bar{10}\sim\bar{5}, \bar{10}\sim\bar{6}, \bar{10}\sim\bar{7}, \bar{10}\sim\bar{8}, \bar{10}\sim\bar{11}, \bar{10}\sim\bar{12}, \bar{10}\sim\bar{13}, \bar{10}\sim\bar{14},$   
 $\bar{10}\sim\bar{16}, \bar{10}\sim\bar{17}$

$\bar{14}\sim\bar{0}, \bar{14}\sim\bar{1}, \bar{14}\sim\bar{2}, \bar{14}\sim\bar{4}, \bar{14}\sim\bar{5}, \bar{14}\sim\bar{6}, \bar{14}\sim\bar{7}, \bar{14}\sim\bar{8}, \bar{14}\sim\bar{10}, \bar{14}\sim\bar{11}, \bar{14}\sim\bar{12}, \bar{14}\sim\bar{13},$   
 $\bar{14}\sim\bar{16}, \bar{14}\sim\bar{17}$

$\bar{16}\sim\bar{0}, \bar{16}\sim\bar{1}, \bar{16}\sim\bar{2}, \bar{16}\sim\bar{4}, \bar{16}\sim\bar{5}, \bar{16}\sim\bar{6}, \bar{16}\sim\bar{7}, \bar{16}\sim\bar{8}, \bar{16}\sim\bar{10}, \bar{16}\sim\bar{11}, \bar{16}\sim\bar{12}, \bar{16}\sim\bar{13},$   
 $\bar{16}\sim\bar{14}, \bar{16}\sim\bar{17}$

$\bar{3}\sim\bar{0}, \bar{3}\sim\bar{1}, \bar{3}\sim\bar{5}, \bar{3}\sim\bar{6}, \bar{3}\sim\bar{7}, \bar{3}\sim\bar{9}, \bar{3}\sim\bar{11}, \bar{3}\sim\bar{12}, \bar{3}\sim\bar{13}, \bar{3}\sim\bar{15}, \bar{3}\sim\bar{17},$

$\bar{15}\sim\bar{0}, \bar{15}\sim\bar{1}, \bar{15}\sim\bar{3}, \bar{15}\sim\bar{5}, \bar{15}\sim\bar{6}, \bar{15}\sim\bar{7}, \bar{15}\sim\bar{9}, \bar{15}\sim\bar{11}, \bar{15}\sim\bar{12}, \bar{15}\sim\bar{13}, \bar{15}\sim\bar{17},$

$$\bar{6}\sim\bar{0}, \bar{6}\sim\bar{1}, \bar{6}\sim\bar{2}, \bar{6}\sim\bar{3}, \bar{6}\sim\bar{4}, \bar{6}\sim\bar{5}, \bar{6}\sim\bar{7}, \bar{6}\sim\bar{8}, \bar{6}\sim\bar{10}, \bar{6}\sim\bar{11}, \bar{6}\sim\bar{12}, \bar{6}\sim\bar{13}, \bar{6}\sim\bar{14}, \bar{6}\sim\bar{15}, \\ \bar{6}\sim\bar{16}, \bar{6}\sim\bar{17}$$

$$\bar{12}\sim\bar{0}, \bar{12}\sim\bar{1}, \bar{12}\sim\bar{2}, \bar{12}\sim\bar{3}, \bar{12}\sim\bar{4}, \bar{12}\sim\bar{5}, \bar{12}\sim\bar{6}, \bar{12}\sim\bar{7}, \bar{12}\sim\bar{8}, \bar{12}\sim\bar{10}, \bar{12}\sim\bar{11}, \bar{12}\sim\bar{13}, \\ \bar{12}\sim\bar{14}, \bar{12}\sim\bar{15}, \bar{12}\sim\bar{16}, \bar{12}\sim\bar{17},$$

$$\bar{9}\sim\bar{0}, \bar{9}\sim\bar{1}, \bar{9}\sim\bar{3}, \bar{9}\sim\bar{5}, \bar{9}\sim\bar{7}, \bar{9}\sim\bar{11}, \bar{9}\sim\bar{13}, \bar{9}\sim\bar{15}, \bar{9}\sim\bar{17}$$

olup buradan,

$$d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = d_{\bar{7}} = d_{\bar{11}} = d_{\bar{13}} = d_{\bar{17}} = d_{\bar{0}} = 17, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = d_{\bar{8}} = d_{\bar{10}} = d_{\bar{14}} = d_{\bar{16}} = 14,$$

$$d_{\bar{3}} = d_{\bar{15}} = 11, d_{\bar{6}} = d_{\bar{12}} = 16, d_{\bar{9}} = 9$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} SK(P(Z_{18})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{18}))} d_u^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (d_{\bar{0}}^2 + d_{\bar{1}}^2 + d_{\bar{2}}^2 + d_{\bar{3}}^2 + d_{\bar{4}}^2 + d_{\bar{5}}^2 + d_{\bar{6}}^2 + d_{\bar{7}}^2 + d_{\bar{8}}^2 + d_{\bar{9}}^2 + d_{\bar{10}}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (d_{\bar{11}}^2 + d_{\bar{12}}^2 + d_{\bar{13}}^2 + d_{\bar{14}}^2 + d_{\bar{15}}^2 + d_{\bar{16}}^2 + d_{\bar{17}}^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 16^2 + 9^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2023 + 1176 + 242 + 512 + 81) \\ &= 2017 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafinin  $SK$  indeksini Teorem 4.4.3'ü kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
SK(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &= \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(3^2) \cdot d_{2^i}^2 \cdot \phi(2^{1-i}))}{2} + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \frac{(\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^2 \cdot \phi(3^{2-i}))}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\phi(9) \cdot d_1^2 \cdot \phi(2) + \phi(9) \cdot d_2^2 \cdot \phi(1)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^2 (\phi(2) \cdot d_{3^i}^2 \cdot \phi(3^{2-i})) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^2 (\phi(1) \cdot d_{2 \cdot 3^i}^2 \cdot \phi(3^{2-i})) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot d_1^2 \cdot \phi(2) + 6 \cdot d_2^2 + d_3^2 \cdot \phi(3) + d_9^2 + 2 \cdot d_6^2 + d_0^2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot d_1^2 + 6 \cdot d_2^2 + 2 \cdot d_3^2 + d_9^2 + 2 \cdot d_6^2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 16^2 + 9^2) \\
&= 2017
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.4.4. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$m \cdot \delta \leq SK(P(Z_n)) \leq m \cdot (n - 1)$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Buradan, Teorem 2.1.4'ten

$\forall u, v \in V(P(Z_n))$  için

$$\sqrt{d_u \cdot d_v} \geq \frac{2}{\frac{1}{d_u} + \frac{1}{d_v}} = \frac{2 \cdot d_u \cdot d_v}{d_u + d_v}$$

olup buradan,

$$\frac{d_u + d_v}{2} \geq \frac{d_u \cdot d_v}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

$$\sum_{uv \in E(P(Z_n))} \frac{d_u \cdot d_v}{\sqrt{d_u \cdot d_v}} = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u \cdot d_v)^{1/2} \leq \sum_{uv \in E(P(Z_n))} \frac{d_u + d_v}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u \cdot d_v)^{1/2} \leq SK(P(Z_n))$$

elde edilir burada,

$$m \cdot \delta \leq \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u \cdot d_v)^{1/2} \leq SK(P(Z_n))$$

elde edilir. Diğer taraftan  $\forall u, v \in V(P(Z_n))$  için  $d_u \leq (n - 1)$ ,  $d_v \leq (n - 1)$  ve Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i$$

olduğunu biliyoruz. Bu bilgileri kullanacak olursak,

$$SK(P(Z_n)) \leq \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (n-1) = m \cdot (n-1)$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$m \cdot \delta = m \cdot (n-1)$$

olacağından bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta = n-1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n-1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n-1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.4.5. Teorem

$p$  asal sayı,  $k \in Z^+$  ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  mertebeden bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4}$$

dir [14].

*İspat*

$p$  asal sayı,  $k \in Z^+$  ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  mertebeden bir power graf olmak üzere ;

$$\begin{aligned}
SK_1(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u \cdot d_v) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{2}}) + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{p^k-1}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{2}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{3}}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{p^k-1}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{4}}) + \dots + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\overline{p^k-1}}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( + \dots + (d_{\overline{p^k-1}} \cdot d_{\overline{p^k-2}}) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
SK_1(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{2} \cdot ((p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 + \dots + (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot (+ \dots + (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2) + \dots + (p^k - 1)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot (+ \dots + (p^k - 1)^2) \\
&= \frac{m}{2} \cdot (p^k - 1)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \binom{p^k}{2} \cdot (p^k - 1)^2 \\
&= \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.6. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
SK_1(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - \frac{1}{4} \cdot n \cdot (14 \cdot q - 19) - \frac{1}{4} \cdot p^2 \cdot (p - 9)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{4} \cdot q \cdot (q - 1) - \frac{11}{4} \cdot p + \frac{1}{2}$$

dir [14].

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Tamsayılar iyi sıralı olduğundan  $p < q$  olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,  $a \in Z^+$  olmak üzere  $(a, p \cdot q) = 1$  ise  $Z_{p \cdot q} = \langle \bar{a} \rangle$ 'dir. Bu ise  $\bar{a} \in Z_{p \cdot q}$ 'nin  $(Z_{p \cdot q}, +)$  sonlu devirli grubun bir üreteci olduğu anlamına gelir.  $Z_{p \cdot q}$ 'nin bütün üreteçlerinin kümesi  $U_{Z_{p \cdot q}}$  ile gösterilir. O halde

$$U_{Z_{p \cdot q}} = \{ \bar{a} \in Z_{p \cdot q} \mid (a, p \cdot q) = 1 \text{ ve } a \in Z^+ \}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

olmak üzere, bütün bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} V(P(Z_{p \cdot q})) &= \{u_1 = \bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}, 1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}, 1 \cdot \bar{q}, \\ &\quad 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}, \overline{p \cdot q} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\} \cup \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}\} \cup \\ &\quad \{1 \cdot \bar{q}, 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, gerçekten

$$\begin{aligned} |V(P(Z_{p \cdot q}))| &= 1 + \phi(p \cdot q) + (q - 1) + (p - 1) \\ &= (p - 1) \cdot (q - 1) + q + p - 1 \\ &= p \cdot q - p - q + 1 + q + p - 1 \end{aligned}$$

$$= p \cdot q$$

dir. Ayrıca  $i, j \in Z^+$  olmak üzere  $1 \leq i < p$  ve  $1 \leq j < q$  için  $(i \cdot q, n) \neq 1$  ve  $(j \cdot p, n) \neq 1$  bulunur. Dolayısıyla  $\{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\}$  ve  $\{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$  kümelerinden bir üreteç çıkamaz. Tüm bu bilgiler doğrultusunda,

$$V_0 = \{\bar{0}\},$$

$$V_1 = U_{Z_{p \cdot q}} = \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\},$$

$$V_2 = \{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\},$$

$$V_3 = \{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$$

ve

$$V(P(Z_{p \cdot q})) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

alabiliriz.  $P(Z_{p \cdot q})$  power grafının  $SK_1$  indeksi;

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p \cdot q}))} (d_u \cdot d_v) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_2}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_3}) + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{p}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{q}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{u_2}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{u_3}) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{1}} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{p}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{q}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \dots + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + (d_{u_2} \cdot d_{u_3}) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_2} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}}) + (d_{u_2} \cdot d_{\bar{p}}) + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \dots + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_2} \cdot d_{\bar{q}}) + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \cdots + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + \cdots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_3} \cdot d_{u_{\phi(p,q)}}) + (d_{u_3} \cdot d_{\bar{p}}) + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \cdots + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_3} \cdot d_{\bar{q}}) + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \cdots + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + \cdots + \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\bar{p}}) + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \cdots + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\bar{q}}) + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \cdots + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( (d_{\bar{p}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}) + \cdots + (d_{\bar{p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + \cdots + (d_{\overline{2 \cdot p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \cdots + (d_{\overline{(q-2) \cdot p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}) + (d_{\bar{q}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}) + \cdots + (d_{\bar{q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left( + \cdots + (d_{\overline{2 \cdot q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) + \cdots + (d_{\overline{(p-2) \cdot q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}) \right) \\
SK_1(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{0}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{\bar{0}\}} d_{\bar{i}} + \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{1}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{\bar{1}\}} d_{\bar{i}} \\
& + \frac{1}{4} \cdot d_{u_2} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_2\}} d_{\bar{i}} + \frac{1}{4} \cdot d_{u_3} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_3\}} d_{\bar{i}} \\
& + \cdots + \frac{1}{4} \cdot d_{u_{u_{\phi(p,q)}}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_{u_{\phi(p,q)}}\}} d_{\bar{i}} + \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \bar{q}}} d_{\bar{i}} \\
& + \frac{1}{4} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{2 \cdot q}}} d_{\bar{i}} + \cdots + \frac{1}{4} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{(p-1) \cdot q}}} d_{\bar{i}} \\
& + \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \bar{p}}} d_{\bar{i}} + \frac{1}{4} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{2 \cdot p}}} d_{\bar{i}} \\
& + \cdots + \frac{1}{4} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{(q-1) \cdot p}}} d_{\bar{i}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p,q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in \{\bar{0}\}$  veya  $u, v \in V_1$  ise

$$d_u \cdot \sum_{\substack{u' \in V - \{u\}}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{v' \in V - \{v\}} d_{v'}$$

olur. Aynı şekilde  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p \cdot q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in V_2$  ise

$$d_u \cdot \sum_{\substack{u' \in V - V_3 \\ u' \neq u}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{\substack{v' \in V - V_3 \\ v \neq v'}} d_{v'}$$

ve  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p \cdot q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in V_3$  ise

$$d_u \cdot \sum_{\substack{u' \in V - V_2 \\ u' \neq u}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{\substack{v' \in V - V_2 \\ v \neq v'}} d_{v'}$$

olacağından yukarıda ki son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{4} \cdot (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot d_{\bar{1}} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p \cdot q})) - \{\bar{1}\}} d_u + \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{q}} \cdot \phi(p) \cdot \sum_{\substack{u \in V - V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d_u \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot d_{\bar{p}} \cdot \phi(q) \cdot \sum_{\substack{u \in V - V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d_u \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sum_{u \in V(P(Z_{p \cdot q})) - \{\bar{1}\}} d_u = \phi(p \cdot q) \cdot (p \cdot q - 1) + (p \cdot q - q) \cdot (p - 1) + (p \cdot q - p) \cdot (q - 1)$$

$$\sum_{\substack{u \in V - V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d_u = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1) + (p - 2) \cdot (p \cdot q - q)$$

$$\sum_{\substack{u \in V - V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d_u = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1) + (q - 2) \cdot (p \cdot q - p)$$

$$d_{\bar{1}} = (p \cdot q - 1),$$

$$d_{\bar{q}} = (p \cdot q - q),$$

$$d_{\bar{p}} = (p \cdot q - p)$$

ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - \frac{1}{4} \cdot n \cdot (14 \cdot q - 19) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot p^2 \cdot (p - 9) + \frac{3}{4} \cdot q \cdot (q - 1) - \frac{11}{4} \cdot p + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.7. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{(\Phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{\bar{p}^j \cdot q^i}^3)}{4}$$

ve

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^k \frac{\Phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{4} \right) \leq SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

dir.

*İspat*

$n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k$  ve  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının  $SK_1$  indeksinin

$$SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u \cdot d_v$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan Tanım 2.4.14'ten

$$F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 = \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2)$$

olacağından bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \\ &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2) \\ &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} ((d_u + d_v)^2 - 2 \cdot d_u \cdot d_v) \\ &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u + d_v)^2 - 2 \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u \cdot d_v \\ &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u + d_v)^2 - 4 \cdot SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \end{aligned}$$

bulunur. Burada düzenleme yapılırsa;

$$SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u + d_v)^2 - \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3$$

elde edilir. Burada Teorem 4.1.2'deki ‘‘ $QM \geq AM$ ’’ eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2) - \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 - \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \end{aligned}$$

olacağından,

$$SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \quad (4.9)$$

elde edilir.  $Z_{p^k \cdot q^r} = \langle \bar{1} \rangle$  ve  $Z_{p^k \cdot q^r}$  grubunun mertebesi  $n = p^k \cdot q^r$  olduğundan burada ki herhangi bir devirli alt grubunun mertebesinin

$$\bar{a} = a \cdot \bar{1} \in Z_{p^k \cdot q^r} \text{ için}$$

$$o(\langle a \cdot \bar{1} \rangle) = \frac{n}{\text{obeb}(n, a)} = \frac{n}{(n, a)}$$

ve  $\langle a \cdot \bar{1} \rangle$  devirli grubun üreteçlerinin sayısının

$$\Phi\left(\frac{n}{(n, a)}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V\left(P(Z_{p^k, q^r})\right)} d_u^3 &= \Phi\left(\frac{n}{(1, n)}\right) \cdot d_1^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3}^3 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^k}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(q, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}}^2 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^3}^3 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^r}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^3 + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^r}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q^3}^3 + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q^r}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot q}^3 + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot q^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot q^3}^3 + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot q^r}^3 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot q}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot q^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot q^3}^3 + \dots + \\ &+ \left(\Phi\left(\frac{n}{(n, n)}\right) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^3\right) \\ &= \Phi(n) \cdot d_1^3 + \Phi\left(\frac{n}{p}\right) \cdot d_{\bar{p}}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^2}\right) \cdot d_{\bar{p}^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^3}\right) \cdot d_{\bar{p}^3}^3 + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{p^k}\right) \cdot d_{\bar{p}^k}^3 + \Phi\left(\frac{n}{q}\right) \cdot d_{\bar{q}}^3 + \Phi\left(\frac{n}{q^2}\right) \cdot d_{\bar{q}^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{q^3}\right) \cdot d_{\bar{q}^3}^3 \\ &+ \dots + \Phi\left(\frac{n}{q^r}\right) \cdot d_{\bar{q}^r}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{p \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^3}^3 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{p \cdot q^r}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^r}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q}^3 \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q^2}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot q^3}^3 + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^r}\right) \cdot d_{p^2 \cdot q^r}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q}^3 + \Phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^2}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^2}^3 \\
& +\Phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^3}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^3}^3 + \dots + \Phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^r}\right) \cdot d_{p^3 \cdot q^r}^3 + \dots + \\
& +\Phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q}\right) \cdot d_{p^k \cdot q}^3 + \left(+\Phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q^2}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^2}^3\right) + \Phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q^3}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^3}^3 \\
& + \dots + \Phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot d_{\bar{n}=0}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in V\left(P\left(Z_{p^k, q^r}\right)\right)} d_u^3 & = \Phi(p^k \cdot q^r) \cdot d_{\bar{1}}^3 + \Phi(p^{k-1} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}}^3 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^2}^3 \\
& + \Phi(p^{k-3} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^3}^3 + \dots + \Phi(q^r) \cdot d_{\bar{p}^k}^3 + \Phi(p^k \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^3 \\
& + \Phi(p^k \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^3 + \Phi(p^k \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^3 + \dots + \Phi(p^k) \cdot d_{\bar{q}^r}^3 \\
& + \Phi(p^{k-1} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^3 + \Phi(p^{k-1} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^3 + \dots + \\
& + \Phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^r}^3 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^3 \\
& + \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^2}^3 + \Phi(p^{k-2} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^3}^3 + \dots + \\
& + \Phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^r}^3 + \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^3 + \\
& + \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^2}^3 + \Phi(p^{k-3} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^3}^3 \\
& + \dots + \Phi(p^{k-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^r}^3 + \dots + \Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^3 + \Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^2}^3 \\
& + \Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^3}^3 + \dots + \Phi(1) \cdot d_{\bar{n}=0}^3 \\
& = \Phi(q^r) \cdot \left(\Phi(p^k) \cdot d_{\bar{1}}^3 + \Phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p}}^3 + \Phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p}^2}^3 + \dots +\right) \\
& + \Phi(q^r) \cdot d_{\bar{p}^k}^3 + \Phi(p^k) \cdot \left(\Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^3 + \Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^3\right) \\
& + \Phi(p^k) \cdot \left(\Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^3 + \dots + d_{\bar{q}^r}^3\right) + \Phi(p^{k-1}) \cdot \left(\Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^3\right) \\
& + \Phi(p^{k-1}) \cdot \left(\Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^2}^3 + \Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}^3}^3 + \dots + d_{\bar{p \cdot q}^r}^3\right) \\
& + \Phi(p^{k-2}) \cdot \left(\Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^3 + \Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^2}^3 + \Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}^3}^3\right) \\
& + \Phi(p^{k-2}) \cdot \left(+ \dots + d_{\bar{p^2 \cdot q}^r}^3\right) + \Phi(p^{k-3}) \cdot \left(\Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^3\right) \\
& + \Phi(p^{k-3}) \cdot \left(\Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^2}^3 + \Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}^3}^3 + \dots + d_{\bar{p^3 \cdot q}^r}^3\right) \\
& + \dots + \left(\Phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^3 + \Phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^2}^3 + \Phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}^3}^3\right) \\
& + \dots + d_{\bar{0}}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in V(P(Z_{p^k, q^r}))} d_u^3 &= \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{p^i}^3 \cdot \phi(p^{k-i}) \right) + \phi(p^k) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
&+ \phi(p^{k-1}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{p \cdot q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \phi(p^{k-2}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{p^2 \cdot q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
&+ \phi(p^{k-3}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{p^3 \cdot q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \dots + \left( \sum_{i=1}^r d_{p^k \cdot q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
&= \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{p^i}^3 \cdot \phi(p^{k-i}) \right) \\
&+ \sum_{j=0}^k \phi(p^{k-j}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{p^j \cdot q^i}^3 \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^k \left( \phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3 \right) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \left( \phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3 \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

bulunacağından Eş. 4.10'u Eş. 4.9'da yerine yazacak olursak,

$$SK_1(P(Z_{p^k, q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{\left( \phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3 \right)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\left( \phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3 \right)}{4}$$

elde edilir ve eşitsizliğin bir tarafının ispatı tamamlanır. Diğer taraftan “ $\delta = \delta(P(Z_{p^k, q^r}))$ ” özelliğini kullanacak olursak,

$$SK_1(P(Z_{p^k, q^r})) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k, q^r}))} d_u \cdot d_v$$

$$SK_1(P(Z_{p^k, q^r})) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k, q^r}))} \delta^2 = \frac{\delta^2 \cdot m}{2}$$

bulunur. Diğer taraftan Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \in Z_{p^k, q^r}} d_u$$

olduğundan bu  $m$  değeri eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$SK_1 \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right) \geq \frac{\delta^2}{4} \cdot \sum_{u \in V \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right)} d_u \quad (4.11)$$

bulunur. Burada,

$$\sum_{u \in V \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right)} d_u$$

ifadesinin eşitliğini bulmak için

$$\sum_{u \in V \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right)} d_u^3$$

ifadesinin eşitliğinin ispatına benzer şekilde yapılırsa yani,

$$\sum_{u \in V \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right)} d_u = \sum_{i=0}^k (\Phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}) \quad (4.12)$$

bulunur ve Eş. 4.12'yi Eş.4.11'de yerine yazıp daha sonra “ $\delta$ ” özelliğini bir kez daha kullanacak olursak dolayısıyla,

$$SK_1 \left( P(Z_{p^k, q^r}) \right) \geq \delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^k \frac{\Phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{4} \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

*Örnek*

$P(Z_{2 \cdot 3})$  power grafinin  $SK_1$  indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_6)$  power grafinda ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_6)) = Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = Z_6,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5},$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5},$$

$$\bar{3} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{1}, \bar{3} \sim \bar{5},$$

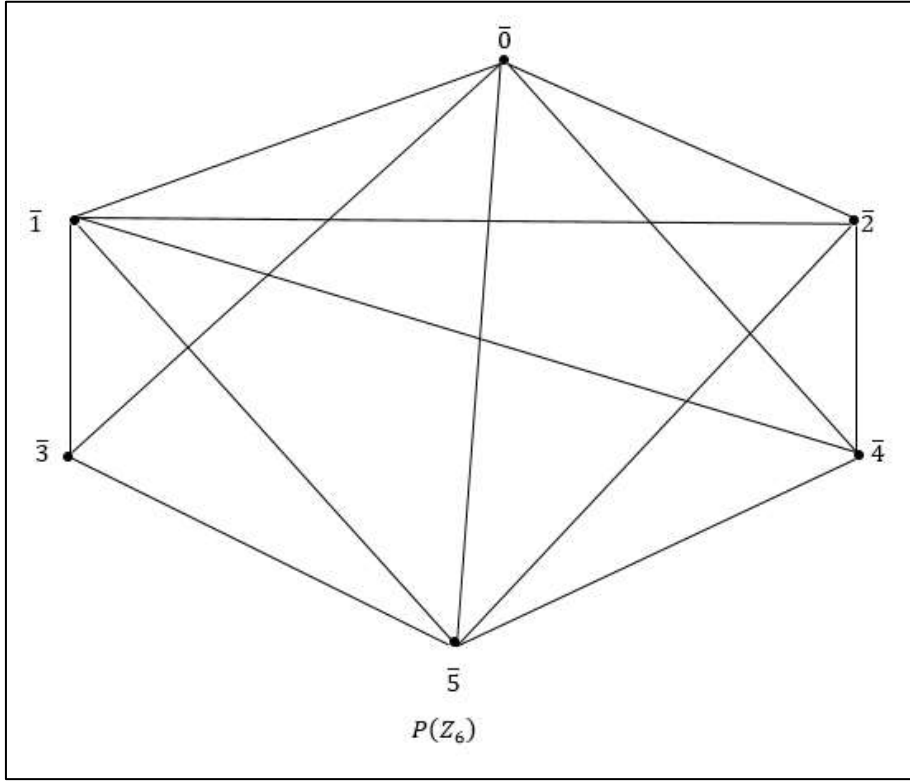
$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4},$$

olup buradan,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = 5, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = 4, d_{\bar{3}} = 3$$

bulunur. Bu bilgiler doğrultusunda,  $P(Z_6)$  power grafinin grafiği;



Şekil 4.6.  $P(Z_6)$  power grafi

olur.

$$\begin{aligned}
 SK_1(P(Z_6)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k, q^r}))} d_u \cdot d_v \\
 &= \frac{1}{2} \cdot ((d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{2}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{2}})) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{3}} \cdot d_{\bar{5}})) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (d_{\bar{4}} \cdot d_{\bar{5}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK_1(P(Z_6)) &= \frac{1}{2} \cdot ((5 \cdot 5) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 3) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 5) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 3)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot ((5 \cdot 4) + (5 \cdot 5) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 5)) \\
&= \frac{256}{2} = 128
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\delta(P(Z_6)) = \min\{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = \min\{5, 5, 4, 3, 4, 5\} = 3$$

bulunur. Diğer taraftan  $P(Z_6)$  power grafinin  $SK_1$  indeksini Teorem 4.4.7'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$  olmak üzere;

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{4} \right) \leq SK_1(P(Z_6))$$

ve

$$SK_1(P(Z_6)) \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^3}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^3}{4}$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{4} \right) &= 3^3 \cdot \left( \frac{\phi(6)}{4} + \frac{\phi(3)}{4} + \frac{\phi(2)}{4} + \frac{\phi(1)}{4} \right) \\
&= 27 \cdot \left( \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= 40,5
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^3}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^3}{4} &= \frac{\phi(6) \cdot d_1^3}{4} + \frac{\phi(3) \cdot d_2^3}{4} \\
&+ \frac{\phi(2) \cdot d_3^3}{4} + \frac{\phi(1) \cdot d_6^3}{4} \\
&= \frac{2 \cdot 5^3}{4} + \frac{2 \cdot 4^3}{4} + \frac{1 \cdot 3^3}{4} + \frac{1 \cdot 5^3}{4} \\
&= \frac{250}{4} + \frac{128}{4} + \frac{27}{4} + \frac{125}{4} \\
&= \frac{530}{4} \\
&= 132,5
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{4} \right) \leq SK_1(P(Z_6))$$

ve

$$SK_1(P(Z_6)) \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^3}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^3}{4}$$

eşitsizliğinin

$$40,5 \leq SK_1(P(Z_6)) = 128 \leq \frac{265}{2} = 132,5$$

olduğu görülür.

## 4.4.8. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$\frac{m \cdot \delta^2}{2} \leq SK_1(P(Z_n)) \leq \frac{m \cdot (\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{8 \cdot \delta}$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Buradan ‘‘Polya-Szego eşitsizliği’’ gereğince;  $\forall e \in E(P(Z_n))$  için,

$$0 < \gamma = \delta \leq a_e = (d_u \cdot d_v)^{1/2} \leq A = (n-1) < \infty,$$

$$0 < \beta = 1 \leq b_e = 1 \leq B = 1 < \infty$$

ve

$$\left( \sum_{uv \in E(P(Z_n))} d_u \cdot d_v \right) \cdot \left( \sum_{uv \in E(P(Z_n))} 1 \right) \leq \frac{(\delta + (n-1))^2}{4 \cdot \delta \cdot (n-1)} \cdot \left( \sum_{uv=e} (d_u \cdot d_v)^{1/2} \right)^2$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned} 2 \cdot SK_1(P(Z_n)) \cdot m &\leq \frac{(\delta + (n-1))^2}{4 \cdot \delta \cdot (n-1)} \cdot \left( \sum_{uv=e} (d_u \cdot d_v)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \frac{(\delta + (n-1))^2}{4 \cdot \delta \cdot (n-1)} \cdot \left( \sum_{uv=e} (n-1) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\delta + (n - 1))^2 \cdot m^2 \cdot (n - 1)^2}{4 \cdot \delta \cdot (n - 1)}$$

olacağından,

$$SK_1(P(Z_n)) \leq \frac{m \cdot (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)}{8 \cdot \delta}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} d_u \cdot d_v \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} \delta^2 \\ &= \frac{m \cdot \delta^2}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$\frac{m \cdot \delta^2}{2} = \frac{m \cdot (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)}{8 \cdot \delta}$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$4 \cdot \delta^3 = (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)$$

olup burada  $t = n - 1$  alınıp denklem düzenlenecek olursa,

$$4 \cdot \delta^3 - t \cdot \delta^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \delta - t^3 = 0$$

denklemini elde edilir. Şimdi bu denklemin reel köklerini bulalım. Bu denklemin reel kökünden birisi

$$\delta = t$$

dir. Buradan,

$$4 \cdot \delta^3 - t \cdot \delta^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \delta - t^3 = (\delta - t) \cdot (4 \cdot \delta^2 + 3 \cdot t \cdot \delta + t^2) = 0$$

olmak üzere,

$$\delta_1 = t$$

$$\delta_{2,3} = \frac{-3 \cdot t \pm \sqrt{9 \cdot t^2 - 16 \cdot t^2}}{8} = \frac{-3 \cdot t \pm \sqrt{-7 \cdot t^2}}{8}$$

olduğundan tek reel kök

$$\delta = t = n - 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak “ $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ ” olmasıyla yani “ $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden” olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.4.9. Teorem

$p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olsun. Eğer  $P(Z_n)$  power grafi  $n = p^k$  mertebeli ise

$$SK_2(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot SK_1(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{2}$$

dir [14].

*İspat*

$n = p^k$  ( $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$ ) ve  $P(Z_n)$  power grafi  $n = p^k$  mertebeli olsun.

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_{p^k})) &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u + d_v)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u^2 + d_v^2) + SK_1(P(Z_{p^k})) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( (p^k - 1) \cdot d_0^2 + (p^k - 1) \cdot d_1^2 + \dots + (p^k - 1) \cdot d_{\frac{p^k-1}{2}}^2 \right) \\
&\quad + SK_1(P(Z_{p^k})) \\
&= \frac{(p^k - 1) \cdot (d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{\frac{p^k-1}{2}}^2)}{4} + SK_1(P(Z_{p^k})) \\
&= \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4} + SK_1(P(Z_{p^k})) \\
&= 2 \cdot SK_1(P(Z_{p^k})) \\
&= \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.10. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_n)) &= SK_1(P(Z_n)) + \frac{1}{4} \cdot ((n - 1)^3 \cdot (\phi(n) + 1) + (n - q)^3 \cdot \phi(p)) \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot (n - p)^3 \cdot \phi(q)
\end{aligned}$$

dir [14].

### İspat

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Tamsayılar iyi sıralı olduğundan  $p < q$  olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,  $a \in Z^+$  olmak üzere  $(a, p \cdot q) = 1$  ise  $Z_{p \cdot q} = \langle \bar{a} \rangle$ 'dir. Bu ise  $\bar{a} \in Z_{p \cdot q}$ 'nin  $(Z_{p \cdot q}, +)$  sonlu devirli grubun bir üretici olduğu anlamına gelir.  $Z_{p \cdot q}$ 'nin bütün üreteçlerinin kümesi  $U_{Z_{p \cdot q}}$  ile gösterilir. O halde

$$U_{Z_{p \cdot q}} = \{ \bar{a} \in Z_{p \cdot q} \mid (a, p \cdot q) = 1 \text{ ve } a \in Z^+ \}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

olmak üzere, bütün bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} V(P(Z_{p \cdot q})) &= \{u_1 = \bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}, 1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}, 1 \cdot \bar{q}, \\ &\quad 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}, \bar{p \cdot q} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\} \cup \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}\} \cup \\ &\quad \{1 \cdot \bar{q}, 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, gerçekten

$$\begin{aligned} |V(P(Z_{p \cdot q}))| &= 1 + \phi(p \cdot q) + (q - 1) + (p - 1) \\ &= (p - 1) \cdot (q - 1) + q + p - 1 \\ &= p \cdot q - p - q + 1 + q + p - 1 = p \cdot q \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $i, j \in Z^+$  olmak üzere  $1 \leq i < p$  ve  $1 \leq j < q$  için  $(i \cdot q, n) \neq 1$  ve  $(j \cdot p, n) \neq 1$  bulunur. Dolayısıyla  $\{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p - 1) \cdot q}\}$  ve  $\{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q - 1) \cdot p}\}$  kümelerinden bir üreteç çıkamaz. Tüm bu bilgiler doğrultusunda,

$$V_0 = \{\bar{0}\},$$

$$V_1 = U_{Z_{p,q}} = \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p,q)}\},$$

$$V_2 = \{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\},$$

$$V_3 = \{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$$

ve

$$V(P(Z_{p,q})) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

alabiliriz.  $P(Z_{p,q})$  power grafinin  $SK_2$  indeksi;

$$\begin{aligned} SK_2(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p,q}))} (d_u + d_v)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p,q}))} (d_u^2 + d_v^2) + SK_1(P(Z_{p,q})) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_1^2) + (d_0^2 + d_{u_2}^2) + (d_0^2 + d_{u_3}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_{u_{\phi(p,q)}}^2) + (d_0^2 + d_{\bar{p}}^2) + (d_0^2 + d_{\overline{2 \cdot p}}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) + (d_0^2 + d_{\bar{q}}^2) + (d_0^2 + d_{\overline{2 \cdot q}}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + (d_1^2 + d_{u_2}^2) + (d_1^2 + d_{u_3}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_{u_{\phi(p,q)}}^2) + (d_1^2 + d_{\bar{p}}^2) + (d_1^2 + d_{\overline{2 \cdot p}}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) + (d_1^2 + d_{\bar{q}}^2) + (d_1^2 + d_{\overline{2 \cdot q}}^2) + \dots + \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + (d_{u_2}^2 + d_{u_3}^2) + \dots + (d_{u_2}^2 + d_{u_{\phi(p,q)}}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_2}^2 + d_{\bar{p}}^2) + (d_{u_2}^2 + d_{\overline{2 \cdot p}}^2) + \dots + (d_{u_2}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_2}^2 + d_{\bar{q}}^2) + (d_{u_2}^2 + d_{\overline{2 \cdot q}}^2) + \dots + (d_{u_2}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_3}^2 + d_{u_{\phi(p,q)}}^2) + (d_{u_3}^2 + d_{\bar{p}}^2) + (d_{u_3}^2 + d_{\bar{2p}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( + \dots + (d_{u_3}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) + (d_{u_3}^2 + d_{\bar{q}}^2) + (d_{u_3}^2 + d_{\bar{2q}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( + \dots + (d_{u_3}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + \dots + (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\bar{p}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\bar{2p}}^2) + \dots + (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\bar{q}}^2) + (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\bar{2q}}^2) + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + (d_{\bar{p}}^2 + d_{\bar{2p}}^2) + \dots + (d_{\bar{p}}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( + \dots + (d_{\bar{2p}}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) + \dots + (d_{\overline{(q-2) \cdot p}}^2 + d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{\bar{q}}^2 + d_{\bar{2q}}^2) + \dots + (d_{\bar{q}}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{\bar{2q}}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) + \dots + (d_{\overline{(p-2) \cdot q}}^2 + d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2) \right) \\
& + SK_1(P(Z_{p,q}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_{p,q})) &= \frac{1}{4} \cdot \left( (p \cdot q - 1) \cdot d_{\bar{0}}^2 + (p \cdot q - 1) \cdot d_{\bar{1}}^2 + (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( + \dots + (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_{\phi(p,q)}}^2 + (\phi(p,q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\bar{q}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\bar{2q}}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (\phi(p,q) + (p - 1)) \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^2 + (\phi(p,q) + (q - 1)) \cdot d_{\bar{p}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\bar{2p}}^2 + \dots + \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (\phi(p,q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^2 + SK_1(P(Z_{p,q})) \right)
\end{aligned}$$

olup burada,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{u_2} = \dots = d_{u_{\phi(p,q)}} = (p \cdot q - 1),$$

$$d_{\bar{q}} = d_{\bar{2q}} = \dots = d_{\overline{(p-1) \cdot q}} = (p - 1) \cdot q$$

ve

$$d_p = d_{2 \cdot p} = \dots = d_{(q-1) \cdot p} = (q-1) \cdot p$$

değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_n)) &= \frac{1}{4} \cdot ((n-1) \cdot (n-1)^2 + (n-1) \cdot (n-1)^2 + (n-1) \cdot (n-1)^2) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot (+ \dots + (n-1) \cdot (n-1)^2 + (\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot (((\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1))) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot (+ \dots + (\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + q - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + q - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + q - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + q - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot (+ \dots + (\Phi(n) + q - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + q - 1)) + SK_1(P(Z_n)) \\
&= SK_1(P(Z_n)) + \frac{1}{4} \cdot ((n-1)^3 \cdot (\Phi(n) + 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + p - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + p - 1) \cdot (p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + q - 1)^2 \cdot (\Phi(n) + q - 1) \cdot (q - 1)) \\
&= SK_1(P(Z_n)) + \frac{1}{4} \cdot ((n-1)^3 \cdot (\Phi(n) + 1) + (\Phi(n) + p - 1)^3 \cdot (p - 1)) \\
&+ \frac{1}{4} \cdot ((\Phi(n) + q - 1)^3 \cdot (q - 1))
\end{aligned}$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$SK_2(P(Z_n)) = SK_1(P(Z_n)) + \frac{1}{4} \cdot ((n-1)^3 \cdot (\phi(n) + 1)) \\ + \frac{1}{4} \cdot ((n-q)^3 \cdot \phi(p) + (n-p)^3 \cdot \phi(q))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.11. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^r \sum_{i=1}^k \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4} \\ + SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının  $SK_2$  indeksi;

$$SK_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u + d_v)^2 \\ = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2) + SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

bulunur. Diğer taraftan Tanım 2.4.14'ten

$$F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 = \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2)$$

olacağından bu bilgiler doğrultusunda,

$$SK_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 + SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

olup Teorem 4.4.7'deki Eş. 4.10'u burada yerine yazacak olursak,

$$SK_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4} + SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.2. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$SK_2(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot ((n-1)^3 \cdot (\phi(n) + 1) + (n-q)^3 \cdot \phi(p) + (n-p)^3 \cdot \phi(q)) + SK_1(P(Z_n))$$

dir.

#### İspat

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.

Teorem 4.4.11'de  $k = r = 1$  alınacak olursa;

$$\begin{aligned} SK_2(P(Z_{p \cdot q})) &= SK_1(P(Z_{p \cdot q})) + \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(p^{1-i} \cdot q) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^1 \frac{(\phi(p^{1-j}) \cdot d_{p^j \cdot q}^3)}{4} \\ &= SK_1(P(Z_{p \cdot q})) + \frac{1}{4} \cdot (\phi(n) \cdot d_1^3 + \phi(q) \cdot d_p^3 + \phi(p) \cdot d_q^3 + d_{p \cdot q}^3) \end{aligned}$$

olup burada,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = (n - 1),$$

$$d_{\bar{q}} = (n - q),$$

$$d_{\bar{p}} = (n - p)$$

değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$SK_2(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot ((n - 1)^3 \cdot (\phi(n) + 1) + (n - q)^3 \cdot \phi(p) + (n - p)^3 \cdot \phi(q)) \\ + SK_1(P(Z_n))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.4.2. Not

Sonuç 4.4.2 daha önce bulduğumuz Teorem 4.4.10 ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{18})$  power grafinin  $SK_2$  indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_{18})$  power grafinde ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{6}, \bar{12} \}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{9} \}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11}, \bar{5} \sim \bar{12}, \bar{5} \sim \bar{13}, \bar{5} \sim \bar{14}, \bar{5} \sim \bar{15}, \\ \bar{5} \sim \bar{16}, \bar{5} \sim \bar{17}$$

$$\bar{7} \sim \bar{0}, \bar{7} \sim \bar{1}, \bar{7} \sim \bar{2}, \bar{7} \sim \bar{3}, \bar{7} \sim \bar{4}, \bar{7} \sim \bar{5}, \bar{7} \sim \bar{6}, \bar{7} \sim \bar{8}, \bar{7} \sim \bar{9}, \bar{7} \sim \bar{10}, \bar{7} \sim \bar{11}, \bar{7} \sim \bar{12}, \bar{7} \sim \bar{13}, \bar{7} \sim \bar{14}, \bar{7} \sim \bar{15}, \\ \bar{7} \sim \bar{16}, \bar{7} \sim \bar{17}$$

$$\bar{11} \sim \bar{0}, \bar{11} \sim \bar{1}, \bar{11} \sim \bar{2}, \bar{11} \sim \bar{3}, \bar{11} \sim \bar{4}, \bar{11} \sim \bar{5}, \bar{11} \sim \bar{6}, \bar{11} \sim \bar{7}, \bar{11} \sim \bar{8}, \bar{11} \sim \bar{9}, \bar{11} \sim \bar{10}, \bar{11} \sim \bar{12}, \\ \bar{11} \sim \bar{13}, \bar{11} \sim \bar{14}, \bar{11} \sim \bar{15}, \bar{11} \sim \bar{16}, \bar{11} \sim \bar{17},$$

$\overline{13\sim 0}, \overline{13\sim 1}, \overline{13\sim 2}, \overline{13\sim 3}, \overline{13\sim 4}, \overline{13\sim 5}, \overline{13\sim 6}, \overline{13\sim 7}, \overline{13\sim 8}, \overline{13\sim 9}, \overline{13\sim 10}, \overline{13\sim 11},$   
 $\overline{13\sim 12}, \overline{13\sim 14}, \overline{13\sim 15}, \overline{13\sim 16}, \overline{13\sim 17},$

$\overline{17\sim 0}, \overline{17\sim 1}, \overline{17\sim 2}, \overline{17\sim 3}, \overline{17\sim 4}, \overline{17\sim 5}, \overline{17\sim 6}, \overline{17\sim 7}, \overline{17\sim 8}, \overline{17\sim 9}, \overline{17\sim 10}, \overline{17\sim 11},$   
 $\overline{17\sim 12}, \overline{17\sim 13}, \overline{17\sim 14}, \overline{17\sim 15}, \overline{17\sim 16},$

$\overline{2\sim 0}, \overline{2\sim 1}, \overline{2\sim 4}, \overline{2\sim 5}, \overline{2\sim 6}, \overline{2\sim 7}, \overline{2\sim 8}, \overline{2\sim 10}, \overline{2\sim 11}, \overline{2\sim 12}, \overline{2\sim 13}, \overline{2\sim 14}, \overline{2\sim 16}, \overline{2\sim 17},$

$\overline{4\sim 0}, \overline{4\sim 1}, \overline{4\sim 2}, \overline{4\sim 5}, \overline{4\sim 6}, \overline{4\sim 7}, \overline{4\sim 8}, \overline{4\sim 10}, \overline{4\sim 11}, \overline{4\sim 12}, \overline{4\sim 13}, \overline{4\sim 14}, \overline{4\sim 16}, \overline{4\sim 17},$

$\overline{8\sim 0}, \overline{8\sim 1}, \overline{8\sim 2}, \overline{8\sim 4}, \overline{8\sim 5}, \overline{8\sim 6}, \overline{8\sim 7}, \overline{8\sim 10}, \overline{8\sim 11}, \overline{8\sim 12}, \overline{8\sim 13}, \overline{8\sim 14}, \overline{8\sim 16}, \overline{8\sim 17}$

$\overline{10\sim 0}, \overline{10\sim 1}, \overline{10\sim 2}, \overline{10\sim 4}, \overline{10\sim 5}, \overline{10\sim 6}, \overline{10\sim 7}, \overline{10\sim 8}, \overline{10\sim 11}, \overline{10\sim 12}, \overline{10\sim 13}, \overline{10\sim 14},$   
 $\overline{10\sim 16}, \overline{10\sim 17}$

$\overline{14\sim 0}, \overline{14\sim 1}, \overline{14\sim 2}, \overline{14\sim 4}, \overline{14\sim 5}, \overline{14\sim 6}, \overline{14\sim 7}, \overline{14\sim 8}, \overline{14\sim 10}, \overline{14\sim 11}, \overline{14\sim 12}, \overline{14\sim 13},$   
 $\overline{14\sim 16}, \overline{14\sim 17}$

$\overline{16\sim 0}, \overline{16\sim 1}, \overline{16\sim 2}, \overline{16\sim 4}, \overline{16\sim 5}, \overline{16\sim 6}, \overline{16\sim 7}, \overline{16\sim 8}, \overline{16\sim 10}, \overline{16\sim 11}, \overline{16\sim 12}, \overline{16\sim 13},$   
 $\overline{16\sim 14}, \overline{16\sim 17}$

$\overline{3\sim 0}, \overline{3\sim 1}, \overline{3\sim 5}, \overline{3\sim 6}, \overline{3\sim 7}, \overline{3\sim 9}, \overline{3\sim 11}, \overline{3\sim 12}, \overline{3\sim 13}, \overline{3\sim 15}, \overline{3\sim 17},$

$\overline{15\sim 0}, \overline{15\sim 1}, \overline{15\sim 3}, \overline{15\sim 5}, \overline{15\sim 6}, \overline{15\sim 7}, \overline{15\sim 9}, \overline{15\sim 11}, \overline{15\sim 12}, \overline{15\sim 13}, \overline{15\sim 17},$

$\overline{6\sim 0}, \overline{6\sim 1}, \overline{6\sim 2}, \overline{6\sim 3}, \overline{6\sim 4}, \overline{6\sim 5}, \overline{6\sim 7}, \overline{6\sim 8}, \overline{6\sim 10}, \overline{6\sim 11}, \overline{6\sim 12}, \overline{6\sim 13}, \overline{6\sim 14}, \overline{6\sim 15},$   
 $\overline{6\sim 16}, \overline{6\sim 17}$

$\overline{12\sim 0}, \overline{12\sim 1}, \overline{12\sim 2}, \overline{12\sim 3}, \overline{12\sim 4}, \overline{12\sim 5}, \overline{12\sim 6}, \overline{12\sim 7}, \overline{12\sim 8}, \overline{12\sim 10}, \overline{12\sim 11}, \overline{12\sim 13},$   
 $\overline{12\sim 14}, \overline{12\sim 15}, \overline{12\sim 16}, \overline{12\sim 17},$

$\overline{9\sim 0}, \overline{9\sim 1}, \overline{9\sim 3}, \overline{9\sim 5}, \overline{9\sim 7}, \overline{9\sim 11}, \overline{9\sim 13}, \overline{9\sim 15}, \overline{9\sim 17}$

olup buradan,

$$d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = d_{\bar{7}} = d_{\bar{11}} = d_{\bar{13}} = d_{\bar{17}} = d_{\bar{0}} = 17, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = d_{\bar{8}} = d_{\bar{10}} = d_{\bar{14}} = d_{\bar{16}} = 14,$$

$$d_{\bar{3}} = d_{\bar{15}} = 11, d_{\bar{6}} = d_{\bar{12}} = 16, d_{\bar{9}} = 9$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} SK_2(P(Z_{2^{1..3^2}})) &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{2^{1..3^2}}))} (d_u + d_v)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{2^{1..3^2}}))} (d_u^2 + d_v^2) + SK_1(P(Z_{2^{1..3^2}})) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_1^2) + (d_0^2 + d_2^2) + (d_0^2 + d_3^2) + (d_0^2 + d_4^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_5^2) + (d_0^2 + d_6^2) + (d_0^2 + d_7^2) + (d_0^2 + d_8^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_9^2) + (d_0^2 + d_{10}^2) + (d_0^2 + d_{11}^2) + (d_0^2 + d_{12}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_{13}^2) + (d_0^2 + d_{14}^2) + (d_0^2 + d_{15}^2) + (d_0^2 + d_{16}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_0^2 + d_{17}^2) + (d_1^2 + d_2^2) + (d_1^2 + d_3^2) + (d_1^2 + d_4^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_5^2) + (d_1^2 + d_6^2) + (d_1^2 + d_7^2) + (d_1^2 + d_8^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_9^2) + (d_1^2 + d_{10}^2) + (d_1^2 + d_{11}^2) + (d_1^2 + d_{12}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_{13}^2) + (d_1^2 + d_{14}^2) + (d_1^2 + d_{15}^2) + (d_1^2 + d_{16}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_1^2 + d_{17}^2) + (d_2^2 + d_4^2) + (d_2^2 + d_5^2) + (d_2^2 + d_6^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_2^2 + d_7^2) + (d_2^2 + d_8^2) + (d_2^2 + d_{10}^2) + (d_2^2 + d_{11}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_2^2 + d_{12}^2) + (d_2^2 + d_{13}^2) + (d_2^2 + d_{14}^2) + (d_2^2 + d_{16}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_2^2 + d_{17}^2) + (d_3^2 + d_5^2) + (d_3^2 + d_6^2) + (d_3^2 + d_7^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_3^2 + d_9^2) + (d_3^2 + d_{11}^2) + (d_3^2 + d_{12}^2) + (d_3^2 + d_{13}^2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_3^2 + d_{15}^2) + (d_3^2 + d_{17}^2) + (d_4^2 + d_5^2) + (d_4^2 + d_6^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_4^2 + d_7^2) + (d_4^2 + d_8^2) + (d_4^2 + d_{10}^2) + (d_4^2 + d_{11}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_4^2 + d_{12}^2) + (d_4^2 + d_{13}^2) + (d_4^2 + d_{14}^2) + (d_4^2 + d_{16}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_4^2 + d_{17}^2) + (d_5^2 + d_6^2) + (d_5^2 + d_7^2) + (d_5^2 + d_8^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_5^2 + d_9^2) + (d_5^2 + d_{10}^2) + (d_5^2 + d_{11}^2) + (d_5^2 + d_{12}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_5^2 + d_{13}^2) + (d_5^2 + d_{14}^2) + (d_5^2 + d_{15}^2) + (d_5^2 + d_{16}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_5^2 + d_{17}^2) + (d_6^2 + d_7^2) + (d_6^2 + d_8^2) + (d_6^2 + d_{10}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_6^2 + d_{11}^2) + (d_6^2 + d_{12}^2) + (d_6^2 + d_{13}^2) + (d_6^2 + d_{14}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_6^2 + d_{15}^2)(d_6^2 + d_{16}^2) + (d_6^2 + d_{17}^2) + (d_7^2 + d_8^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_7^2 + d_9^2) + (d_7^2 + d_{10}^2) + (d_7^2 + d_{11}^2) + (d_7^2 + d_{12}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_7^2 + d_{13}^2) + (d_7^2 + d_{14}^2) + (d_7^2 + d_{15}^2) + (d_7^2 + d_{16}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_7^2 + d_{17}^2) + (d_7^2 + d_{16}^2) + (d_7^2 + d_{17}^2) + (d_8^2 + d_{10}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_8^2 + d_{11}^2) + (d_8^2 + d_{12}^2) + (d_8^2 + d_{13}^2) + (d_8^2 + d_{14}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_8^2 + d_{16}^2) + (d_8^2 + d_{17}^2) + (d_9^2 + d_{11}^2) + (d_9^2 + d_{13}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_9^2 + d_{15}^2) + (d_9^2 + d_{17}^2) + (d_{10}^2 + d_{11}^2) + (d_{10}^2 + d_{12}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{10}^2 + d_{13}^2) + (d_{10}^2 + d_{14}^2) + (d_{10}^2 + d_{16}^2) + (d_{10}^2 + d_{17}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{11}^2 + d_{12}^2) + (d_{11}^2 + d_{13}^2) + (d_{11}^2 + d_{14}^2) + (d_{11}^2 + d_{15}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{11}^2 + d_{16}^2) + (d_{11}^2 + d_{17}^2) + (d_{12}^2 + d_{13}^2) + (d_{12}^2 + d_{14}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{12}^2 + d_{15}^2) + (d_{12}^2 + d_{16}^2) + (d_{12}^2 + d_{17}^2) + (d_{13}^2 + d_{14}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{13}^2 + d_{15}^2) + (d_{13}^2 + d_{16}^2) + (d_{13}^2 + d_{17}^2) + (d_{14}^2 + d_{16}^2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \left( (d_{14}^2 + d_{17}^2) + (d_{15}^2 + d_{17}^2) + (d_{16}^2 + d_{17}^2) \right) \\
& + SK_1(P(Z_{18}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_{18})) &= \frac{1}{4} \cdot (17 \cdot d_0^2 + 17 \cdot d_1^2 + 14 \cdot d_2^2 + 11 \cdot d_3^2 + 14 \cdot d_4^2 + 17 \cdot d_5^2) \\
& + \frac{1}{4} \cdot (16 \cdot d_6^2 + 17 \cdot d_7^2 + 14 \cdot d_8^2 + 9 \cdot d_9^2 + 14 \cdot d_{10}^2 + 17 \cdot d_{11}^2) \\
& + \frac{1}{4} \cdot (16 \cdot d_{12}^2 + 17 \cdot d_{13}^2 + 14 \cdot d_{14}^2 + 11 \cdot d_{15}^2 + 14 \cdot d_{16}^2 + 17 \cdot d_{17}^2) \\
& + SK_1(P(Z_{18}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot (17 \cdot 17^2 + 17 \cdot 17^2 + 14 \cdot 14^2 + 11 \cdot 11^2 + 14 \cdot 14^2 + 17 \cdot 17^2) \\
& + \frac{1}{4} \cdot (16 \cdot 16^2 + 17 \cdot 17^2 + 14 \cdot 14^2 + 9 \cdot 9^2 + 14 \cdot 14^2 + 17 \cdot 17^2) \\
& + \frac{1}{4} \cdot (16 \cdot 16^2 + 17 \cdot 17^2 + 14 \cdot 14^2 + 11 \cdot 11^2 + 14 \cdot 14^2 + 17 \cdot 17^2) \\
& + SK_1(P(Z_{18}))
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (7 \cdot 17^3 + 6 \cdot 14^3 + 2 \cdot 11^3 + 2 \cdot 16^3 + 9^3) + SK_1(P(Z_{18}))$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (34391 + 16464 + 2662 + 8192 + 729) + SK_1(P(Z_{18}))$$

$$= \frac{62438}{4} + SK_1(P(Z_{18}))$$

$$= 15609,5 + SK_1(P(Z_{18}))$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafının  $SK_2$  indeksini Teorem 4.4.11'i kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_{2^1 \cdot 3^2})) &= \sum_{i=0}^1 \frac{\left( \phi(2^{1-i} \cdot 3^2) \cdot d_{2^i}^3 \right)}{4} + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \frac{\left( \phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^3 \right)}{4} \\
& + SK_1(P(Z_{2^1 \cdot 3^2}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SK_2(P(Z_{18})) &= \frac{\phi(18) \cdot d_1^3}{4} + \frac{\phi(9) \cdot d_2^3}{4} + \frac{\phi(6) \cdot d_3^3}{4} + \frac{\phi(2) \cdot d_9^3}{4} + \frac{\phi(3) \cdot d_6^3}{4} \\
&\quad + \frac{\phi(1) \cdot d_{18}^3}{4} + SK_1(P(Z_{18})) \\
&= \frac{6 \cdot 17^3}{4} + \frac{6 \cdot 14^3}{4} + \frac{2 \cdot 11^3}{4} + \frac{9^3}{4} + \frac{2 \cdot 16^3}{4} + \frac{17^3}{4} + SK_1(P(Z_{18})) \\
&= \frac{29478}{4} + \frac{16464}{4} + \frac{2662}{4} + \frac{729}{4} + \frac{8192}{4} + \frac{4913}{4} + SK_1(P(Z_{18})) \\
&= \frac{62438}{4} + SK_1(P(Z_{18})) = 15609,5 + SK_1(P(Z_{18}))
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.4.12. Teorem

$n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta^3 \leq SK_2(P(Z_n)) \leq \frac{(n-1)^3 \cdot n}{2}$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$SK_2(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} 4 \cdot (n-1)^2 = m \cdot (n-1)^2$$

olacağından burada; Tanım 2.2.4'ten herhangi bir grafın kenarlarının sayısı,

$$m = |E| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i}$$

olmak üzere bu denklemde ki  $m$  değeri yerine yazıldıktan sonra  $\forall u \in V(P(Z_n)) = V$  için  $d_u \leq n - 1$  ifadesini kullanacak olursak,

$$m \cdot (n - 1)^2 = (n - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i} \leq (n - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} (n - 1) = \frac{1}{2} \cdot (n - 1)^3 \cdot n$$

elde edilir ve eşitsizliğinin bir tarafı ispatlanmış olur. Diğer taraftan,

$$SK_2(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2$$

olmak üzere burada Tanım 2.2.4'teki " $\delta = \delta(P(Z_n))$ " tanımını kullanacak olursak,

$$SK_2(P(Z_n)) \geq \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_n))} 4 \cdot \delta^2 = m \cdot \delta^2$$

bulunur. Burada  $m$  yerine Tanım 2.2.4'teki  $|E|$  değeri yazılacak olursa,

$$m \cdot \delta^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i} \cdot \delta^2$$

bulunur. Burada Tanım 2.2.4'te bulunan " $\delta = \delta(P(Z_n))$ " tanımını kullanacak olursak,

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{u_i \in V} d_{u_i} \cdot \delta^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \delta^2 \cdot n \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta^3$$

olur ve dolayısıyla,

$$SK_2(P(Z_n)) \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta^3$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta^3 = \frac{(n-1)^3 \cdot n}{2}$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta^3 = (n-1)^3$$

$$\delta = n - 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.5. Power Grafların Genelleştirilmiş Birinci Zagreb İndeksi

Bu bölümde öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2'de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi,

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) = \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^\alpha = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u^{\alpha-1} + d_v^{\alpha-1})$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

## 4.5.1. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $k$  pozitif tamsayı  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  mertebeden bir power graf olsun. O halde

$$M_1^\alpha(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1)^\alpha \quad (4.13)$$

ve

$$M_1^\alpha(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^\alpha + \phi(p)^{\alpha+1} \cdot q^\alpha + \phi(q)^{\alpha+1} \cdot p^\alpha \quad (4.14)$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  ( $k$  pozitif tamsayı,  $p$  asal sayı) mertebeden bir power graf olsun. O halde,

$$\begin{aligned} M_1^\alpha(P(Z_{p^k})) &= \sum_{u \in V(G)} d_u^\alpha = \sum_{i=1}^{p^k} d_i^\alpha \\ &= (p^k - 1)^\alpha + (p^k - 1)^\alpha + \dots + (p^k - 1)^\alpha = p^k \cdot (p^k - 1)^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir.  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Tamsayılar iyi sıralı olduğundan  $p < q$  olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,  $a \in Z^+$  olmak üzere  $(a, p \cdot q) = 1$  ise  $Z_{p \cdot q} = \langle \bar{a} \rangle$ 'dir. Bu ise  $\bar{a} \in Z_{p \cdot q}$ 'nin  $(Z_{p \cdot q}, +)$  sonlu devirli grubun bir üretici olduğu anlamına gelir.  $Z_{p \cdot q}$ 'nin bütün üreteçlerinin kümesi  $U_{Z_{p \cdot q}}$  ile gösterilir. O halde

$$U_{Z_{p \cdot q}} = \{ \bar{a} \in Z_{p \cdot q} \mid (a, p \cdot q) = 1 \text{ ve } a \in Z^+ \}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

olmak üzere, bütün bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} V(P(Z_{p,q})) &= \{u_1 = \bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}, 1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q-1) \cdot \bar{p}, 1 \cdot \bar{q}, \\ &\quad 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p-1) \cdot \bar{q}, \overline{p \cdot q} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\} \cup \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q-1) \cdot \bar{p}\} \cup \\ &\quad \{1 \cdot \bar{q}, 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p-1) \cdot \bar{q}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, gerçekten

$$\begin{aligned} |V(P(Z_{p,q}))| &= 1 + \phi(p \cdot q) + (q-1) + (p-1) \\ &= (p-1) \cdot (q-1) + q + p - 1 \\ &= p \cdot q - p - q + 1 + q + p - 1 \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $i, j \in Z^+$  olmak üzere  $1 \leq i < p$  ve  $1 \leq j < q$  için  $(i \cdot q, n) \neq 1$  ve  $(j \cdot p, n) \neq 1$  bulunur. Dolayısıyla  $\{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\}$  ve  $\{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$  kümelerinden bir üreteç çıkamaz. Tüm bu bilgiler doğrultusunda,

$$V_0 = \{\bar{0}\},$$

$$V_1 = U_{Z_{p,q}} = \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\},$$

$$V_2 = \{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\},$$

$$V_3 = \{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$$

ve

$$V(P(Z_{p,q})) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

alabiliriz.  $P(Z_{p,q})$  power grafının genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi;

$$\begin{aligned} M_1^\alpha(P(Z_{p,q})) &= \sum_{i=1}^{p \cdot q} d_i^\alpha \\ &= d_0^\alpha + (d_1^\alpha + d_{u_2}^\alpha + d_{u_3}^\alpha + \dots + d_{u_{\phi(p,q)}}^\alpha) \\ &\quad + (d_{\bar{q}}^\alpha + d_{2\bar{q}}^\alpha + d_{3\bar{q}}^\alpha + \dots + d_{(p-1)\bar{q}}^\alpha) \\ &\quad + (d_{\bar{p}}^\alpha + d_{2\bar{p}}^\alpha + d_{3\bar{p}}^\alpha + \dots + d_{(q-1)\bar{p}}^\alpha) \end{aligned}$$

olup burada,

$$d_0 = d_1 = d_{u_2} = \dots = d_{u_{\phi(p,q)}} = (p \cdot q - 1),$$

$$d_{\bar{q}} = d_{2\bar{q}} = \dots = d_{(p-1)\bar{q}} = (p - 1) \cdot q$$

ve

$$d_{\bar{p}} = d_{2\bar{p}} = \dots = d_{(q-1)\bar{p}} = (q - 1) \cdot p$$

değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} M_1^\alpha(P(Z_{p,q})) &= (p \cdot q - 1)^\alpha + (p \cdot q - 1)^\alpha + (p \cdot q - 1)^\alpha + (p \cdot q - 1)^\alpha \\ &\quad + \dots + (p \cdot q - 1)^\alpha + (\phi(p \cdot q) + p - 1)^\alpha + (\phi(p \cdot q) + p - 1)^\alpha \\ &\quad + \dots + (\phi(p \cdot q) + p - 1)^\alpha + (\phi(p \cdot q) + q - 1)^\alpha \\ &\quad + (\phi(p \cdot q) + q - 1)^\alpha + \dots + (\phi(p \cdot q) + p - 1)^\alpha \\ &= (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^\alpha + q^\alpha \cdot (p - 1)^{\alpha+1} + p^\alpha \cdot (q - 1)^{\alpha+1} \\ &= (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^\alpha + q^\alpha \cdot \phi(p)^{\alpha+1} + p^\alpha \cdot \phi(q)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

## 4.5.2. Teoem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^\alpha) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^\alpha)$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli bir power graf olsun.  $n = p^k \cdot q^r$ 'nin bütün pozitif bölenleri,

$$\{1, p, p^2, p^3, \dots, p^k\},$$

$$\{q, q^2, q^3, \dots, q^r\},$$

$$\{p \cdot q, p \cdot q^2, p \cdot q^3, \dots, p \cdot q^r\},$$

$$\{p^2 \cdot q, p^2 \cdot q^2, p^2 \cdot q^3, \dots, p^2 \cdot q^r\},$$

$$\{p^3 \cdot q, p^3 \cdot q^2, p^3 \cdot q^3, \dots, p^3 \cdot q^r\},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\{p^k \cdot q, p^k \cdot q^2, p^k \cdot q^3, \dots, p^k \cdot q^r\}$$

dir. Ayrıca,

$$U_{Z_{p^k \cdot q^r}} = \{\bar{u} \in Z_{p^k \cdot q^r} \mid u \in Z, 1 \leq u < p^k \cdot q^r, (u, p^k \cdot q^r) = 1\} = \{\bar{1}, u_1, \dots, u_{\phi(p^k \cdot q^r)}\}$$

dir.  $Z_{p^k \cdot q^r} = \langle \bar{1} \rangle$  ve  $Z_{p^k \cdot q^r}$  grubunun mertebesi  $n = p^k \cdot q^r$  olduğundan burada ki herhangi bir devirli alt grubunun mertebesinin

$$\bar{a} = a \cdot \bar{1} \in Z_{p^k \cdot q^r} \text{ için}$$

$$o(\langle a \cdot \bar{1} \rangle) = \frac{n}{\text{obeb}(n, a)} = \frac{n}{(n, a)}$$

ve  $\langle a \cdot \bar{1} \rangle$  devirli grubun üreteçlerinin sayısının

$$\Phi\left(\frac{n}{(n, a)}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Burada  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi;

$$\begin{aligned} M_1^\alpha(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \sum_{i=1}^{p^k \cdot q^r} d_i^\alpha \\ &= \Phi\left(\frac{n}{(1, n)}\right) \cdot d_1^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^2}^\alpha \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^3}^\alpha + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k, n)}\right) \cdot d_{\bar{p}^k}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(q, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}}^\alpha \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^2}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^3}^\alpha + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{q}^r}^\alpha \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q^2}}^\alpha + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q^r}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^\alpha + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^2}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^3}}^\alpha \\ &+ \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^2 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^r}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^\alpha \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^2}}^\alpha + \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \\ &+ \Phi\left(\frac{n}{(p^3 \cdot q^r, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^r}}^\alpha + \dots + \Phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q, n)}\right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^2, n)}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^2}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{(p^k \cdot q^3, n)}\right) \cdot d_{p^k \cdot q^3}^\alpha \\
& + \dots + \phi\left(\frac{n}{(n, n)}\right) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \phi(n) \cdot d_{\bar{1}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p}\right) \cdot d_{\bar{p}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^2}\right) \cdot d_{\bar{p}^2}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^3}\right) \cdot d_{\bar{p}^3}^\alpha + \dots + \\
& + \phi\left(\frac{n}{p^k}\right) \cdot d_{\bar{p}^k}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{q}\right) \cdot d_{\bar{q}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{q^2}\right) \cdot d_{\bar{q}^2}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{q^3}\right) \cdot d_{\bar{q}^3}^\alpha + \dots + \\
& + \phi\left(\frac{n}{q^r}\right) \cdot d_{\bar{q}^r}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q^2}}^\alpha \\
& + \phi\left(\frac{n}{p \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \phi\left(\frac{n}{p \cdot q^r}\right) \cdot d_{\bar{p \cdot q^r}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^\alpha \\
& + \phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^2}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \\
& + \phi\left(\frac{n}{p^2 \cdot q^r}\right) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^r}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^\alpha + \dots + \phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^2}}^\alpha \\
& + \phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \phi\left(\frac{n}{p^3 \cdot q^r}\right) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^r}}^\alpha + \dots + \\
& \phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q}\right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q^2}\right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q^2}}^\alpha + \phi\left(\frac{n}{p^k \cdot q^3}\right) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q^3}}^\alpha \\
& + \dots + \phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot d_{\bar{n}}^\alpha \\
& = \phi(p^k \cdot q^r) \cdot d_{\bar{1}}^\alpha + \phi(p^{k-1} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}}^\alpha + \phi(p^{k-2} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^2}^\alpha \\
& + \phi(p^{k-3} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^3}^\alpha + \dots + \phi(q^r) \cdot d_{\bar{p}^k}^\alpha + \phi(p^k \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^\alpha \\
& + \phi(p^k \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^\alpha + \phi(p^k \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^\alpha + \dots + \phi(p^k) \cdot d_{\bar{q}^r}^\alpha \\
& + \phi(p^{k-1} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q}}^\alpha + \phi(p^{k-1} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p \cdot q^2}}^\alpha + \dots + \\
& + \phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p \cdot q^r}}^\alpha + \phi(p^{k-2} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q}}^\alpha + \phi(p^{k-2} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^2}}^\alpha \\
& + \phi(p^{k-2} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p^2 \cdot q^r}}^\alpha \\
& + \phi(p^{k-3} \cdot q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q}}^\alpha + \phi(p^{k-3} \cdot q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^2}}^\alpha \\
& + \phi(p^{k-3} \cdot q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^3}}^\alpha + \dots + \phi(p^{k-3}) \cdot d_{\bar{p^3 \cdot q^r}}^\alpha \\
& + \dots + \phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q}}^\alpha + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q^2}}^\alpha + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p^k \cdot q^3}}^\alpha \\
& + \dots + \phi(1) \cdot d_{\bar{n}=\bar{0}}^\alpha \\
& = \phi(q^r) \cdot \left( \phi(p^k) \cdot d_{\bar{1}}^\alpha + \phi(p^{k-1}) \cdot d_{\bar{p}}^\alpha + \phi(p^{k-2}) \cdot d_{\bar{p}^2}^\alpha + \dots + d_{\bar{p}^k}^\alpha \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\phi(p^k) \cdot (\phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{q}}^\alpha + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{q}^2}^\alpha + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{q}^3}^\alpha + \dots +) \\
& +\phi(p^k) \cdot d_{\bar{q}^r}^\alpha + \phi(p^{k-1}) \cdot (\phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}}^\alpha + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^2}^\alpha) \\
& +\phi(p^{k-1}) \cdot (\phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^3}^\alpha + \dots + d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^r}^\alpha) + \\
& +\phi(p^{k-2}) \cdot (\phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}}^\alpha + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^2}^\alpha + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^3}^\alpha) \\
& +\phi(p^{k-2}) \cdot (+ \dots + d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^r}^\alpha) + \phi(p^{k-3}) \cdot (\phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}}^\alpha) \\
& +\phi(p^{k-3}) \cdot (\phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^2}^\alpha + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^3}^\alpha + \dots + d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^r}^\alpha) \\
& + \dots + (\phi(q^{r-1}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}}^\alpha + \phi(q^{r-2}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^2}^\alpha + \phi(q^{r-3}) \cdot d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^3}^\alpha) \\
& + \dots + d_0^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha (P(Z_{p^k, q^r})) &= \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{\bar{p}^i}^\alpha \cdot \phi(p^{k-i}) \right) + \phi(p^k) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \\
& \phi(p^{k-1}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p} \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \phi(p^{k-2}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^2 \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
& + \phi(p^{k-3}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^3 \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) + \dots + \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^k \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
& = \phi(q^r) \cdot \left( \sum_{i=0}^k d_{\bar{p}^i}^\alpha \cdot \phi(p^{k-i}) \right) \\
& + \sum_{j=0}^k \phi(p^{k-j}) \cdot \left( \sum_{i=1}^r d_{\bar{p}^j \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}) \right) \\
& = \sum_{i=0}^k (\phi(q^r) \cdot d_{\bar{p}^i}^\alpha \cdot \phi(p^{k-i})) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j}) \cdot d_{\bar{p}^j \cdot \bar{q}^i}^\alpha \cdot \phi(q^{r-i}))
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$M_1^\alpha (P(Z_n)) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{\bar{p}^i}^\alpha) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{\bar{p}^j \cdot \bar{q}^i}^\alpha)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.5.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$M_1^\alpha \left( P(Z_{p \cdot q}) \right) = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^\alpha + \phi(p)^{\alpha+1} \cdot q^\alpha + \phi(q)^{\alpha+1} \cdot p^\alpha$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar) mertebeli bir power graf olsun. Teorem 4.5.2’de  $k = r = 1$  alınacak olursa;

$$\begin{aligned} M_1^\alpha \left( P(Z_{p^1 \cdot q^1}) \right) &= \sum_{i=0}^1 (\phi(p^{1-i} \cdot q^1) \cdot d_{p^i}^\alpha) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^1 (\phi(p^{1-j} \cdot q^{1-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^\alpha) \\ &= \phi(p \cdot q) \cdot d_1^\alpha + \phi(q) \cdot d_p^\alpha + \sum_{j=0}^1 (\phi(p^{1-j}) \cdot d_{p^j \cdot q}^\alpha) \\ &= \phi(p \cdot q) \cdot d_1^\alpha + \phi(q) \cdot d_p^\alpha + \phi(p) \cdot d_q^\alpha + \phi(1) \cdot d_{p \cdot q=0}^\alpha \end{aligned}$$

olup burada,

$d_0 = d_1 = (p \cdot q - 1)$ ,  $d_q = (p \cdot q - q)$  ve  $d_p = (p \cdot q - p)$  değerleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} M_1^\alpha \left( P(Z_{p \cdot q}) \right) &= (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^\alpha + \phi(q) \cdot (p \cdot q - p)^\alpha \\ &\quad + \phi(p) \cdot (p \cdot q - q)^\alpha \end{aligned}$$

$$M_1^\alpha \left( P(Z_{p \cdot q}) \right) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^\alpha + \phi(p)^{\alpha+1} \cdot q^\alpha + \phi(q)^{\alpha+1} \cdot p^\alpha$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.5.1. Not

Sonuç 4.5.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.5.1'deki Eş. 4.14 ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{18})$  power grafının genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_{18})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11}, \bar{5} \sim \bar{12}, \bar{5} \sim \bar{13}, \bar{5} \sim \bar{14}, \bar{5} \sim \bar{15}, \\ \bar{5} \sim \bar{16}, \bar{5} \sim \bar{17}$$

$$\bar{7} \sim \bar{0}, \bar{7} \sim \bar{1}, \bar{7} \sim \bar{2}, \bar{7} \sim \bar{3}, \bar{7} \sim \bar{4}, \bar{7} \sim \bar{5}, \bar{7} \sim \bar{6}, \bar{7} \sim \bar{8}, \bar{7} \sim \bar{9}, \bar{7} \sim \bar{10}, \bar{7} \sim \bar{11}, \bar{7} \sim \bar{12}, \bar{7} \sim \bar{13}, \bar{7} \sim \bar{14}, \bar{7} \sim \bar{15}, \\ \bar{7} \sim \bar{16}, \bar{7} \sim \bar{17}$$

$$\bar{11} \sim \bar{0}, \bar{11} \sim \bar{1}, \bar{11} \sim \bar{2}, \bar{11} \sim \bar{3}, \bar{11} \sim \bar{4}, \bar{11} \sim \bar{5}, \bar{11} \sim \bar{6}, \bar{11} \sim \bar{7}, \bar{11} \sim \bar{8}, \bar{11} \sim \bar{9}, \bar{11} \sim \bar{10}, \bar{11} \sim \bar{12}, \\ \bar{11} \sim \bar{13}, \bar{11} \sim \bar{14}, \bar{11} \sim \bar{15}, \bar{11} \sim \bar{16}, \bar{11} \sim \bar{17},$$

$$\bar{13} \sim \bar{0}, \bar{13} \sim \bar{1}, \bar{13} \sim \bar{2}, \bar{13} \sim \bar{3}, \bar{13} \sim \bar{4}, \bar{13} \sim \bar{5}, \bar{13} \sim \bar{6}, \bar{13} \sim \bar{7}, \bar{13} \sim \bar{8}, \bar{13} \sim \bar{9}, \bar{13} \sim \bar{10}, \bar{13} \sim \bar{11}, \\ \bar{13} \sim \bar{12}, \bar{13} \sim \bar{14}, \bar{13} \sim \bar{15}, \bar{13} \sim \bar{16}, \bar{13} \sim \bar{17},$$

$$\bar{17} \sim \bar{0}, \bar{17} \sim \bar{1}, \bar{17} \sim \bar{2}, \bar{17} \sim \bar{3}, \bar{17} \sim \bar{4}, \bar{17} \sim \bar{5}, \bar{17} \sim \bar{6}, \bar{17} \sim \bar{7}, \bar{17} \sim \bar{8}, \bar{17} \sim \bar{9}, \bar{17} \sim \bar{10}, \bar{17} \sim \bar{11}, \\ \bar{17} \sim \bar{12}, \bar{17} \sim \bar{13}, \bar{17} \sim \bar{14}, \bar{17} \sim \bar{15}, \bar{17} \sim \bar{16},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5}, \bar{2} \sim \bar{6}, \bar{2} \sim \bar{7}, \bar{2} \sim \bar{8}, \bar{2} \sim \bar{10}, \bar{2} \sim \bar{11}, \bar{2} \sim \bar{12}, \bar{2} \sim \bar{13}, \bar{2} \sim \bar{14}, \bar{2} \sim \bar{16}, \bar{2} \sim \bar{17}, \\ \bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}, \bar{4} \sim \bar{6}, \bar{4} \sim \bar{7}, \bar{4} \sim \bar{8}, \bar{4} \sim \bar{10}, \bar{4} \sim \bar{11}, \bar{4} \sim \bar{12}, \bar{4} \sim \bar{13}, \bar{4} \sim \bar{14}, \bar{4} \sim \bar{16}, \bar{4} \sim \bar{17},$$

$$\bar{8} \sim \bar{0}, \bar{8} \sim \bar{1}, \bar{8} \sim \bar{2}, \bar{8} \sim \bar{4}, \bar{8} \sim \bar{5}, \bar{8} \sim \bar{6}, \bar{8} \sim \bar{7}, \bar{8} \sim \bar{10}, \bar{8} \sim \bar{11}, \bar{8} \sim \bar{12}, \bar{8} \sim \bar{13}, \bar{8} \sim \bar{14}, \bar{8} \sim \bar{16}, \bar{8} \sim \bar{17}$$

$$\bar{10} \sim \bar{0}, \bar{10} \sim \bar{1}, \bar{10} \sim \bar{2}, \bar{10} \sim \bar{4}, \bar{10} \sim \bar{5}, \bar{10} \sim \bar{6}, \bar{10} \sim \bar{7}, \bar{10} \sim \bar{8}, \bar{10} \sim \bar{11}, \bar{10} \sim \bar{12}, \bar{10} \sim \bar{13}, \bar{10} \sim \bar{14},$$

$\overline{10} \sim \overline{16}, \overline{10} \sim \overline{17}$

$\overline{14} \sim \overline{0}, \overline{14} \sim \overline{1}, \overline{14} \sim \overline{2}, \overline{14} \sim \overline{4}, \overline{14} \sim \overline{5}, \overline{14} \sim \overline{6}, \overline{14} \sim \overline{7}, \overline{14} \sim \overline{8}, \overline{14} \sim \overline{10}, \overline{14} \sim \overline{11}, \overline{14} \sim \overline{12}, \overline{14} \sim \overline{13},$   
 $\overline{14} \sim \overline{16}, \overline{14} \sim \overline{17}$

$\overline{16} \sim \overline{0}, \overline{16} \sim \overline{1}, \overline{16} \sim \overline{2}, \overline{16} \sim \overline{4}, \overline{16} \sim \overline{5}, \overline{16} \sim \overline{6}, \overline{16} \sim \overline{7}, \overline{16} \sim \overline{8}, \overline{16} \sim \overline{10}, \overline{16} \sim \overline{11}, \overline{16} \sim \overline{12}, \overline{16} \sim \overline{13},$

$\overline{16} \sim \overline{14}, \overline{16} \sim \overline{17}$

$\overline{3} \sim \overline{0}, \overline{3} \sim \overline{1}, \overline{3} \sim \overline{5}, \overline{3} \sim \overline{6}, \overline{3} \sim \overline{7}, \overline{3} \sim \overline{9}, \overline{3} \sim \overline{11}, \overline{3} \sim \overline{12}, \overline{3} \sim \overline{13}, \overline{3} \sim \overline{15}, \overline{3} \sim \overline{17},$

$\overline{15} \sim \overline{0}, \overline{15} \sim \overline{1}, \overline{15} \sim \overline{3}, \overline{15} \sim \overline{5}, \overline{15} \sim \overline{6}, \overline{15} \sim \overline{7}, \overline{15} \sim \overline{9}, \overline{15} \sim \overline{11}, \overline{15} \sim \overline{12}, \overline{15} \sim \overline{13}, \overline{15} \sim \overline{17},$

$\overline{6} \sim \overline{0}, \overline{6} \sim \overline{1}, \overline{6} \sim \overline{2}, \overline{6} \sim \overline{3}, \overline{6} \sim \overline{4}, \overline{6} \sim \overline{5}, \overline{6} \sim \overline{7}, \overline{6} \sim \overline{8}, \overline{6} \sim \overline{10}, \overline{6} \sim \overline{11}, \overline{6} \sim \overline{12}, \overline{6} \sim \overline{13}, \overline{6} \sim \overline{14}, \overline{6} \sim \overline{15},$   
 $\overline{6} \sim \overline{16}, \overline{6} \sim \overline{17}$

$\overline{12} \sim \overline{0}, \overline{12} \sim \overline{1}, \overline{12} \sim \overline{2}, \overline{12} \sim \overline{3}, \overline{12} \sim \overline{4}, \overline{12} \sim \overline{5}, \overline{12} \sim \overline{6}, \overline{12} \sim \overline{7}, \overline{12} \sim \overline{8}, \overline{12} \sim \overline{10}, \overline{12} \sim \overline{11}, \overline{12} \sim \overline{13},$   
 $\overline{12} \sim \overline{14}, \overline{12} \sim \overline{15}, \overline{12} \sim \overline{16}, \overline{12} \sim \overline{17},$

$\overline{9} \sim \overline{0}, \overline{9} \sim \overline{1}, \overline{9} \sim \overline{3}, \overline{9} \sim \overline{5}, \overline{9} \sim \overline{7}, \overline{9} \sim \overline{11}, \overline{9} \sim \overline{13}, \overline{9} \sim \overline{15}, \overline{9} \sim \overline{17}$

olup buradan,

$$d_{\overline{1}} = d_{\overline{5}} = d_{\overline{7}} = d_{\overline{11}} = d_{\overline{13}} = d_{\overline{17}} = d_{\overline{0}} = 17, d_{\overline{2}} = d_{\overline{4}} = d_{\overline{8}} = d_{\overline{10}} = d_{\overline{14}} = d_{\overline{16}} = 14,$$

$$d_{\overline{3}} = d_{\overline{15}} = 11, d_{\overline{6}} = d_{\overline{12}} = 16, d_{\overline{9}} = 9$$

bu bilgiler doğrultusunda  $P(Z_{18})$  power grafinin genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksi;

$$M_1^\alpha(P(Z_{18})) = \sum_{i=1}^{18} d_i^\alpha$$

$$= d_{\overline{1}}^\alpha + d_{\overline{2}}^\alpha + d_{\overline{3}}^\alpha + d_{\overline{4}}^\alpha + d_{\overline{5}}^\alpha + d_{\overline{6}}^\alpha + d_{\overline{7}}^\alpha + d_{\overline{8}}^\alpha + d_{\overline{9}}^\alpha + d_{\overline{10}}^\alpha$$

$$+ d_{\overline{11}}^\alpha + d_{\overline{12}}^\alpha + d_{\overline{13}}^\alpha + d_{\overline{14}}^\alpha + d_{\overline{15}}^\alpha + d_{\overline{16}}^\alpha + d_{\overline{17}}^\alpha + d_{\overline{18=0}}^\alpha$$

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha(P(Z_{18})) &= 17^\alpha + 14^\alpha + 11^\alpha + 14^\alpha + 17^\alpha + 16^\alpha + 17^\alpha + 14^\alpha + 9^\alpha + 14^\alpha \\
&\quad + 17^\alpha + 16^\alpha + 17^\alpha + 14^\alpha + 11^\alpha + 14^\alpha + 17^\alpha + 17^\alpha \\
&= 7 \cdot 17^\alpha + 6 \cdot 14^\alpha + 2 \cdot 11^\alpha + 2 \cdot 16^\alpha + 9^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafinin genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksini Teorem 4.5.2'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha(P(Z_{2^1 \cdot 3^2})) &= \sum_{i=0}^1 (\phi(2^{1-i} \cdot 3^2) \cdot d_{2^i}^\alpha) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 (\phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^\alpha) \\
&= \phi(18) \cdot d_1^\alpha + \phi(9) \cdot d_2^\alpha + \sum_{j=0}^1 (\phi(2^{1-j} \cdot 3) \cdot d_{2^j \cdot 3}^\alpha + \phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 9}^\alpha) \\
&= 6 \cdot 17^\alpha + 6 \cdot 14^\alpha + \phi(6) \cdot d_3^\alpha + \phi(2) \cdot d_9^\alpha + \phi(3) \cdot d_6^\alpha \\
&\quad + \phi(1) \cdot d_{18}^\alpha \\
&= 6 \cdot 17^\alpha + 6 \cdot 14^\alpha + (2 \cdot 11^\alpha + 9^\alpha + 2 \cdot 16^\alpha + 17^\alpha) \\
&= 7 \cdot 17^\alpha + 6 \cdot 14^\alpha + 2 \cdot 11^\alpha + 2 \cdot 16^\alpha + 9^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.5.3. Teorem

$n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

(i) Eğer  $\alpha \geq 0$  ise

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) \leq n \cdot (n - 1)^\alpha \quad (4.15)$$

(ii) Eğer  $\alpha < 0$  ise

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) \leq n \cdot \delta^\alpha \quad (4.16)$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

(i)  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\alpha \geq 0$  olsun.

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) = \sum_{i=1}^n d_i^\alpha$$

olduğunu biliyoruz. “Cauchy – Schwarz” eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n n \cdot d_i^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ayrıca  $\alpha \geq 0$  ve  $P(Z_n)$  basit bağlantılı bir graf olduğundan  $\forall i \in \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$  için  $(n-1)^{2\alpha} \geq d_i^{2\alpha}$  bulunur. Diğer taraftan  $n > 0$  olduğundan  $n \cdot d_i^{2\alpha} \leq n \cdot (n-1)^{2\alpha}$  elde edilir. Bu bilgiler kullanılacak olursa,

$$\left( \sum_{i=1}^n n \cdot d_i^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n n \cdot (n-1)^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = n \cdot (n-1)^\alpha$$

elde edilir.

(ii)  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\alpha < 0$  olsun. Aşağıda ki eşitsizlikte “Cauchy–Schwarz” eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$M_1^\alpha(P(Z_n)) \leq n \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^{2\alpha}}{n}} = \sqrt{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği bulunur.  $\forall \bar{i} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$  için  $\delta \leq d_{\bar{i}}$  ve  $\alpha < 0$  olduğundan,  $d_{\bar{i}}^{2\alpha} \leq \delta^{2\alpha}$  bulunur. Bu bilgiler son eşitsizlikte uygulanacak olursa,

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \delta^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n} \cdot (n \cdot \delta^{2\alpha})^{\frac{1}{2}} \\ &= n \cdot \delta^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$n \cdot (n-1)^\alpha = n \cdot \delta^\alpha$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(n-1)^\alpha = \delta^\alpha$$

$$\delta = n-1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n-1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n-1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.6. Power Grafların Birinci Zagreb İndeksi

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafının birinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının

birinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların birinci Zagreb indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin birinci Zagreb indeksi,

$$M_1(P(Z_n)) = \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^2 = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)$$

ve

genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksinde  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$\begin{aligned} M_1^2(P(Z_n)) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 \\ &= \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^2 \\ &= M_1(P(Z_n)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

#### 4.6.1. Teorem

$k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

a)  $p$  asal sayı olmak üzere  $n = p^k$  ise

$$M_1(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot p^k \cdot (p^k - 1)^2$$

dir.

b)  $p$  ve  $q$  farklı asallar olmak üzere  $n = p \cdot q$  ise

$$M_1(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + \phi(p)^3 \cdot q^2 + \phi(q)^3 \cdot p^2$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asallar  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olmak üzere;

a)  $P(Z_n)$  power grafi  $n = p^k$  mertebeli bir power graf olsun. O halde genelleştirilmiş birinci Zagreb indeksinde  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$\begin{aligned} M_1^2(P(Z_n)) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 \\ &= \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^2 \\ &= M_1(P(Z_n)) \end{aligned}$$

olacağından Teorem 4.5.1'deki Eş. 4.13'te  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$M_1^2(P(Z_{p^k})) = M_1(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1)^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

b)  $P(Z_n)$  power grafi  $n = p \cdot q$  mertebeli bir power graf olsun. O halde Teorem 4.5.1'deki Eş. 4.14'te  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$M_1^2(P(Z_n)) = M_1(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + \phi(p)^3 \cdot q^2 + \phi(q)^3 \cdot p^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

## 4.6.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$M_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^2) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^2)$$

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. Teorem 4.5.2'de  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$\begin{aligned} M_1(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= M_1^2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \\ &= \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^2) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^2) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

## 4.6.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$M_1(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + \phi(p)^3 \cdot q^2 + \phi(q)^3 \cdot p^2$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Sonuç 4.5.1'de  $\alpha = 2$  alınacak olursa,

$$M_1(P(Z_{p \cdot q})) = M_1^2(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^2 + \phi(p)^3 \cdot q^2 + \phi(q)^3 \cdot p^2$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

#### 4.6.1. Not

Sonuç 4.6.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.6.1'in b) maddesinde ki ifadeyle çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{18})$  power grafinin birinci Zagreb indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_{18})$  power grafinde ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11}, \bar{5} \sim \bar{12}, \bar{5} \sim \bar{13}, \bar{5} \sim \bar{14}, \bar{5} \sim \bar{15}, \\ \bar{5} \sim \bar{16}, \bar{5} \sim \bar{17}$$

$$\bar{7} \sim \bar{0}, \bar{7} \sim \bar{1}, \bar{7} \sim \bar{2}, \bar{7} \sim \bar{3}, \bar{7} \sim \bar{4}, \bar{7} \sim \bar{5}, \bar{7} \sim \bar{6}, \bar{7} \sim \bar{8}, \bar{7} \sim \bar{9}, \bar{7} \sim \bar{10}, \bar{7} \sim \bar{11}, \bar{7} \sim \bar{12}, \bar{7} \sim \bar{13}, \bar{7} \sim \bar{14}, \bar{7} \sim \bar{15}, \\ \bar{7} \sim \bar{16}, \bar{7} \sim \bar{17}$$

$$\bar{11} \sim \bar{0}, \bar{11} \sim \bar{1}, \bar{11} \sim \bar{2}, \bar{11} \sim \bar{3}, \bar{11} \sim \bar{4}, \bar{11} \sim \bar{5}, \bar{11} \sim \bar{6}, \bar{11} \sim \bar{7}, \bar{11} \sim \bar{8}, \bar{11} \sim \bar{9}, \bar{11} \sim \bar{10}, \bar{11} \sim \bar{12}, \\ \bar{11} \sim \bar{13}, \bar{11} \sim \bar{14}, \bar{11} \sim \bar{15}, \bar{11} \sim \bar{16}, \bar{11} \sim \bar{17},$$

$$\bar{13} \sim \bar{0}, \bar{13} \sim \bar{1}, \bar{13} \sim \bar{2}, \bar{13} \sim \bar{3}, \bar{13} \sim \bar{4}, \bar{13} \sim \bar{5}, \bar{13} \sim \bar{6}, \bar{13} \sim \bar{7}, \bar{13} \sim \bar{8}, \bar{13} \sim \bar{9}, \bar{13} \sim \bar{10}, \bar{13} \sim \bar{11}, \\ \bar{13} \sim \bar{12}, \bar{13} \sim \bar{14}, \bar{13} \sim \bar{15}, \bar{13} \sim \bar{16}, \bar{13} \sim \bar{17},$$

$$\bar{17} \sim \bar{0}, \bar{17} \sim \bar{1}, \bar{17} \sim \bar{2}, \bar{17} \sim \bar{3}, \bar{17} \sim \bar{4}, \bar{17} \sim \bar{5}, \bar{17} \sim \bar{6}, \bar{17} \sim \bar{7}, \bar{17} \sim \bar{8}, \bar{17} \sim \bar{9}, \bar{17} \sim \bar{10}, \bar{17} \sim \bar{11}, \\ \bar{17} \sim \bar{12}, \bar{17} \sim \bar{13}, \bar{17} \sim \bar{14}, \bar{17} \sim \bar{15}, \bar{17} \sim \bar{16},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5}, \bar{2} \sim \bar{6}, \bar{2} \sim \bar{7}, \bar{2} \sim \bar{8}, \bar{2} \sim \bar{10}, \bar{2} \sim \bar{11}, \bar{2} \sim \bar{12}, \bar{2} \sim \bar{13}, \bar{2} \sim \bar{14}, \bar{2} \sim \bar{16}, \bar{2} \sim \bar{17},$$

$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}, \bar{4} \sim \bar{6}, \bar{4} \sim \bar{7}, \bar{4} \sim \bar{8}, \bar{4} \sim \bar{10}, \bar{4} \sim \bar{11}, \bar{4} \sim \bar{12}, \bar{4} \sim \bar{13}, \bar{4} \sim \bar{14}, \bar{4} \sim \bar{16}, \bar{4} \sim \bar{17},$$

$\bar{8}\sim\bar{0}, \bar{8}\sim\bar{1}, \bar{8}\sim\bar{2}, \bar{8}\sim\bar{4}, \bar{8}\sim\bar{5}, \bar{8}\sim\bar{6}, \bar{8}\sim\bar{7}, \bar{8}\sim\bar{10}, \bar{8}\sim\bar{11}, \bar{8}\sim\bar{12}, \bar{8}\sim\bar{13}, \bar{8}\sim\bar{14}, \bar{8}\sim\bar{16}, \bar{8}\sim\bar{17}$

$\bar{10}\sim\bar{0}, \bar{10}\sim\bar{1}, \bar{10}\sim\bar{2}, \bar{10}\sim\bar{4}, \bar{10}\sim\bar{5}, \bar{10}\sim\bar{6}, \bar{10}\sim\bar{7}, \bar{10}\sim\bar{8}, \bar{10}\sim\bar{11}, \bar{10}\sim\bar{12}, \bar{10}\sim\bar{13}, \bar{10}\sim\bar{14},$   
 $\bar{10}\sim\bar{16}, \bar{10}\sim\bar{17}$

$\bar{14}\sim\bar{0}, \bar{14}\sim\bar{1}, \bar{14}\sim\bar{2}, \bar{14}\sim\bar{4}, \bar{14}\sim\bar{5}, \bar{14}\sim\bar{6}, \bar{14}\sim\bar{7}, \bar{14}\sim\bar{8}, \bar{14}\sim\bar{10}, \bar{14}\sim\bar{11}, \bar{14}\sim\bar{12}, \bar{14}\sim\bar{13},$   
 $\bar{14}\sim\bar{16}, \bar{14}\sim\bar{17}$

$\bar{16}\sim\bar{0}, \bar{16}\sim\bar{1}, \bar{16}\sim\bar{2}, \bar{16}\sim\bar{4}, \bar{16}\sim\bar{5}, \bar{16}\sim\bar{6}, \bar{16}\sim\bar{7}, \bar{16}\sim\bar{8}, \bar{16}\sim\bar{10}, \bar{16}\sim\bar{11}, \bar{16}\sim\bar{12}, \bar{16}\sim\bar{13},$   
 $\bar{16}\sim\bar{14}, \bar{16}\sim\bar{17}$

$\bar{3}\sim\bar{0}, \bar{3}\sim\bar{1}, \bar{3}\sim\bar{5}, \bar{3}\sim\bar{6}, \bar{3}\sim\bar{7}, \bar{3}\sim\bar{9}, \bar{3}\sim\bar{11}, \bar{3}\sim\bar{12}, \bar{3}\sim\bar{13}, \bar{3}\sim\bar{15}, \bar{3}\sim\bar{17},$

$\bar{15}\sim\bar{0}, \bar{15}\sim\bar{1}, \bar{15}\sim\bar{3}, \bar{15}\sim\bar{5}, \bar{15}\sim\bar{6}, \bar{15}\sim\bar{7}, \bar{15}\sim\bar{9}, \bar{15}\sim\bar{11}, \bar{15}\sim\bar{12}, \bar{15}\sim\bar{13}, \bar{15}\sim\bar{17},$

$\bar{6}\sim\bar{0}, \bar{6}\sim\bar{1}, \bar{6}\sim\bar{2}, \bar{6}\sim\bar{3}, \bar{6}\sim\bar{4}, \bar{6}\sim\bar{5}, \bar{6}\sim\bar{7}, \bar{6}\sim\bar{8}, \bar{6}\sim\bar{10}, \bar{6}\sim\bar{11}, \bar{6}\sim\bar{12}, \bar{6}\sim\bar{13}, \bar{6}\sim\bar{14}, \bar{6}\sim\bar{15},$   
 $\bar{6}\sim\bar{16}, \bar{6}\sim\bar{17}$

$\bar{12}\sim\bar{0}, \bar{12}\sim\bar{1}, \bar{12}\sim\bar{2}, \bar{12}\sim\bar{3}, \bar{12}\sim\bar{4}, \bar{12}\sim\bar{5}, \bar{12}\sim\bar{6}, \bar{12}\sim\bar{7}, \bar{12}\sim\bar{8}, \bar{12}\sim\bar{10}, \bar{12}\sim\bar{11}, \bar{12}\sim\bar{13},$   
 $\bar{12}\sim\bar{14}, \bar{12}\sim\bar{15}, \bar{12}\sim\bar{16}, \bar{12}\sim\bar{17},$

$\bar{9}\sim\bar{0}, \bar{9}\sim\bar{1}, \bar{9}\sim\bar{3}, \bar{9}\sim\bar{5}, \bar{9}\sim\bar{7}, \bar{9}\sim\bar{11}, \bar{9}\sim\bar{13}, \bar{9}\sim\bar{15}, \bar{9}\sim\bar{17}$

olup buradan,

$$d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = d_{\bar{7}} = d_{\bar{11}} = d_{\bar{13}} = d_{\bar{17}} = d_{\bar{0}} = 17, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = d_{\bar{8}} = d_{\bar{10}} = d_{\bar{14}} = d_{\bar{16}} = 14,$$

$$d_{\bar{3}} = d_{\bar{15}} = 11, d_{\bar{6}} = d_{\bar{12}} = 16, d_{\bar{9}} = 9$$

bu bilgiler doğrultusunda  $P(Z_{18})$  power grafinin birinci Zagreb indeksi;

$$M_1(P(Z_{18})) = \sum_{i=1}^{18} d_i^2$$

$$\begin{aligned}
M_1(P(Z_{18})) &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 + d_9^2 + d_{10}^2 \\
&\quad + d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2 + d_{14}^2 + d_{15}^2 + d_{16}^2 + d_{17}^2 + d_{18=0}^2 \\
&= 17^2 + 14^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 16^2 + 17^2 + 14^2 + 9^2 + 14^2 \\
&\quad + 17^2 + 16^2 + 17^2 + 14^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 17^2 \\
&= 7 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 16^2 + 9^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $P(Z_{18})$  power grafinin birinci Zagreb indeksini Teorem 4.6.2'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 2$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
M_1(P(Z_{2^1 \cdot 3^2})) &= \sum_{i=0}^1 \left( \phi(2^{1-i} \cdot 3^2) \cdot d_{2^i}^2 \right) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \left( \phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^2 \right) \\
&= \phi(18) \cdot d_1^2 + \phi(9) \cdot d_2^2 + \sum_{j=0}^1 \left( \phi(2^{1-j} \cdot 3) \cdot d_{2^j \cdot 3}^2 + \phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 9}^2 \right) \\
&= 6 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + \phi(6) \cdot d_3^2 + \phi(2) \cdot d_9^2 + \phi(3) \cdot d_6^2 \\
&\quad + \phi(1) \cdot d_{18=0}^2 \\
&= 6 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + (2 \cdot 11^2 + 9^2 + 2 \cdot 16^2 + 17^2) \\
&= 7 \cdot 17^2 + 6 \cdot 14^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 16^2 + 9^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.6.3. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\frac{2 \cdot \delta^3 \cdot n \cdot (n-1)}{\delta^2 + (n-1)^2} \leq M_1(P(Z_n)) \leq n \cdot (n-1)^2$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere  $n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Teorem 4.5.3'teki Eş. 4.15'te  $\alpha = 2$  alınırsa,

$$M_1(P(Z_n)) \leq n \cdot (n - 1)^2$$

elde edilir ve eşitsizliğin bir tarafının ispatı tamamlanır. Diğer taraftan,

$$M_1(P(Z_n)) = \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^2$$

olmak üzere ‘‘Polya-Szego’’ eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$1 \leq i \leq n, 0 < \gamma = \delta^2 \leq a_i = d_i^2 \leq A = (n - 1)^2 < \infty$$

ve

$$0 < \beta = 1 \leq b_i = 1 \leq B = 1 < \infty$$

ise o halde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i^4 \cdot \sum_{i=1}^n 1 &\leq \frac{(\delta^2 \cdot 1 + (n - 1)^2 \cdot 1)^2}{4 \cdot \delta^2 \cdot 1 \cdot (n - 1)^2 \cdot 1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \cdot 1 \right)^2 \\ &= \frac{(\delta^2 + (n - 1)^2)^2}{4 \cdot \delta^2 \cdot (n - 1)^2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)^2 \end{aligned}$$

bulunur ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)^2 \geq \frac{4 \cdot \delta^2 \cdot (n-1)^2 \cdot n}{(\delta^2 + (n-1)^2)^2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i^4 \geq \frac{4 \cdot \delta^6 \cdot (n-1)^2 \cdot n^2}{(\delta^2 + (n-1)^2)^2}$$

olur ve dolayısıyla,

$$M_1(P(Z_n)) = \sum_{i=1}^n d_i^2 \geq \frac{2 \cdot \delta^3 \cdot n \cdot (n-1)}{\delta^2 + (n-1)^2}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$n \cdot (n-1)^2 = \frac{2 \cdot \delta^3 \cdot n \cdot (n-1)}{\delta^2 + (n-1)^2}$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2 \cdot \delta^3 - (n-1) \cdot \delta^2 - (n-1)^3 = 0$$

bulunur. Burada  $t = n - 1$  dersek,

$$2 \cdot \delta^3 - t \cdot \delta^2 - t^3 = 0$$

olacağından  $\delta = t$ 'nin bu denklemin bir kökü olduğu yani bu denklemi sağladığı görülür.

Diğer taraftan başka reel köklerin olup olmadığına bakalım.

$$2 \cdot \delta^3 - t \cdot \delta^2 - t^3 = (\delta - t) \cdot (2 \cdot \delta^2 + \delta \cdot t + t^2) = 0$$

olacağından bu denklemin tek reel kökünün

$$\delta_1 = t = n - 1$$

olduğu görülür. Gerçekten,

$$\delta_{2,3} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4 \cdot 2 \cdot t^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-t \pm \sqrt{-7 \cdot t^2}}{4}$$

olduğundan burada reel kök yoktur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak “ $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ ” olmasıyla yani “ $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden” olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.7. Power Grafların İkinci Zagreb İndeksi

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin ikinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin ikinci Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların ikinci Zagreb indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin ikinci Zagreb indeksi,

$$M_2(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v) = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u \cdot d_v)$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

##### 4.7.1. Teorem

$k \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

a)  $p$  asal sayı olmak üzere  $n = p^k$  ise

$$M_2(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{2}$$

dir.

b)  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar olmak üzere  $n = p \cdot q$  ise

$$\begin{aligned} M_2(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - \frac{1}{2} \cdot n \cdot (14 \cdot q - 19) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot (p - 9) + \frac{3}{2} \cdot q \cdot (q - 1) - \frac{11}{2} \cdot p + 1 \end{aligned}$$

dir.

*İspat*

$k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Burada,

$$M_2(P(Z_n)) = 2 \cdot SK_1(P(Z_n))$$

dir.

a)  $p$  asal sayı olmak üzere  $n = p^k$  ise Teorem 4.4.5'ten

$$M_2(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot SK_1(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

b)  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar olmak üzere  $n = p \cdot q$  ise Teorem 4.4.6'dan

$$\begin{aligned} M_2(P(Z_{p \cdot q})) &= 2 \cdot SK_1(P(Z_{p \cdot q})) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - \frac{1}{2} \cdot n \cdot (14 \cdot q - 19) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot (p - 9) + \frac{3}{2} \cdot q \cdot (q - 1) - \frac{11}{2} \cdot p + 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.7.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$M_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{2} \quad (4.17)$$

ve

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^k \frac{\phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{2} \right) \leq M_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \quad (4.18)$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun.

$$M_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = 2 \cdot SK_1(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

olduğundan, bu denklem Teorem 4.4.7'de yerine yazılırsa,

$$M_2(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{2}$$

ve

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^k \frac{\phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{2} \right) \leq M_2(P(Z_{p^k \cdot q^r}))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

*Örnek*

$P(Z_{2 \cdot 3})$  power grafının ikinci Zagreb indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_6)$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_6)) = Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = Z_6,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5},$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5},$$

$$\bar{3} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{1}, \bar{3} \sim \bar{5},$$

$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4},$$

olup buradan,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = 5, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = 4, d_{\bar{3}} = 3$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} M_2(P(Z_6)) &= \sum_{uv \in E(P(Z_6))} d_u \cdot d_v \\ &= (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{2}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{2}}) \\ &\quad + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{3}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{4}}) + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{5}}) + (d_{\bar{3}} \cdot d_{\bar{5}}) \\ &\quad + (d_{\bar{4}} \cdot d_{\bar{5}}) \\ &= (5 \cdot 5) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 3) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 5) + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 3) \\ &\quad + (5 \cdot 4) + (5 \cdot 5) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 5) \\ &= 25 + 20 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 20 + 25 + 16 + 20 + 15 + 20 \\ &= 256 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\delta(P(Z_6)) = \min\{d_{\bar{0}}, d_{\bar{1}}, d_{\bar{2}}, d_{\bar{3}}, d_{\bar{4}}, d_{\bar{5}}\} = \min\{5, 5, 4, 3, 4, 5\} = 3$$

bulunur. Bu bilgiler doğrultusunda Teorem 4.7.2'yi kullanacak olursak. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$  olmak üzere;

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\Phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\Phi(2^{1-j})}{2} \right) \leq M_2(P(Z_6))$$

ve

$$M_2(P(Z_6)) \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\Phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} \cdot d_{2^i}^3 + \sum_{j=0}^1 \frac{\Phi(2^{1-j})}{2} \cdot d_{2^j \cdot 3}^3$$

bulunur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} \right) &= 3^3 \cdot \frac{(\phi(6) + \phi(3) + \phi(2) + \phi(1))}{2} \\ &= 27 \cdot \frac{(2 + 2 + 1 + 1)}{2} \\ &= 81 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} \cdot d_{2^i}^3 + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} \cdot d_{2^j \cdot 3}^3 &= \frac{\phi(6)}{2} \cdot d_1^3 + \frac{\phi(3)}{2} \cdot d_2^3 \\ &\quad + \frac{\phi(2)}{2} \cdot d_3^3 + \frac{\phi(1)}{2} \cdot d_{6=0}^3 \\ &= 5^3 + 4^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 5^3 \\ &= 125 + 64 + \frac{(27 + 125)}{2} = 265 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} \right) \leq M_2(P(Z_6))$$

ve

$$M_2(P(Z_6)) \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} \cdot d_{2^i}^3 + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} \cdot d_{2^j \cdot 3}^3$$

eşitsizliğinin

$$81 \leq M_2(P(Z_6)) = 256 \leq 265$$

olduğu görülür.

#### 4.7.3. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$m \cdot \delta^2 \leq M_2(P(Z_n)) \leq \frac{m \cdot (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)}{4 \cdot \delta}$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$M_2(P(Z_n)) = 2 \cdot SK_1(P(Z_n))$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 4.4.8'den

$$m \cdot \delta^2 \leq M_2(P(Z_n)) \leq \frac{m \cdot (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)}{4 \cdot \delta}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$m \cdot \delta^2 = \frac{m \cdot (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)}{4 \cdot \delta}$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$4 \cdot \delta^3 = (\delta + (n - 1))^2 \cdot (n - 1)$$

olup burada  $t = (n - 1)$  dersek,

$$4 \cdot \delta^3 - t \cdot \delta^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \delta - t^3 = (n - 1) \cdot (4 \cdot \delta^2 + 3 \cdot t \cdot \delta + t^2) = 0$$

olup burada ki reel kökler,

$$\delta_1 = n - 1$$

$$\delta_{2,3} = \frac{-3 \cdot t \pm \sqrt{9 \cdot t^2 - 16 \cdot t^2}}{8}$$

$$= \frac{-3 \cdot t \pm \sqrt{-7 \cdot t^2}}{8}$$

olmak üzere tek reel kökün

$$\delta_1 = n - 1$$

olduğu görülür. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak “ $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ ” olmasıyla yani “ $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden” olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.8. Power Grafların Genelleştirilmiş Randic İndeksi

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş Randic indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş Randic indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların genelleştirilmiş Randic indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

#### 4.8.1. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $P(Z_n)$   $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Eğer  $n = p^k$  ise

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^{2 \cdot \alpha + 1}}{2} \quad (4.19)$$

eğer  $n = p \cdot q$  ise

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{1}{2} \cdot (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^\alpha \cdot (\phi(n) \cdot (n - 1)^\alpha + 2 \cdot q^\alpha \cdot \phi(p)^{\alpha+1} + 2 \cdot p^\alpha \cdot \phi(q)^{\alpha+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (q^{2 \cdot \alpha} \cdot \phi(p)^{2 \cdot \alpha + 1} \cdot (p - 2) + p^{2 \cdot \alpha} \cdot \phi(q)^{2 \cdot \alpha + 1} \cdot (q - 2)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

dir.

*İspat*

$k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\begin{aligned} R_\alpha &= R_\alpha(P(Z_{p^k})) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \\ &= (d_0 \cdot d_1)^\alpha + (d_0 \cdot d_2)^\alpha + \dots + (d_0 \cdot d_{n-1})^\alpha + (d_1 \cdot d_2)^\alpha \\ &\quad + (d_1 \cdot d_3)^\alpha + \dots + (d_1 \cdot d_{n-1})^\alpha + (d_2 \cdot d_3)^\alpha + (d_2 \cdot d_4)^\alpha \\ &\quad + \dots + (d_2 \cdot d_{n-1})^\alpha + \dots + \dots + (d_{n-1} \cdot d_n)^\alpha \\ &= m \cdot (p^k - 1)^{2 \cdot \alpha} \end{aligned}$$

bulunur ve Sonuç 4.1.2'den

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2} \cdot (p^k - 1)^{2\alpha} = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^{2\alpha+1}}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $n = p^k$  için ispat tamamlanır. Diğer taraftan  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. Tamsayılar iyi sıralı olduğundan  $p < q$  olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,  $a \in Z^+$  olmak üzere  $(a, p \cdot q) = 1$  ise  $Z_{p \cdot q} = \langle \bar{a} \rangle$ 'dir. Bu ise  $\bar{a} \in Z_{p \cdot q}$ 'nin  $(Z_{p \cdot q}, +)$  sonlu devirli grubun bir üretici olduğu anlamına gelir.  $Z_{p \cdot q}$ 'nin bütün üreteçlerinin kümesi  $U_{Z_{p \cdot q}}$  ile gösterilir. O halde

$$U_{Z_{p \cdot q}} = \{ \bar{a} \in Z_{p \cdot q} \mid (a, p \cdot q) = 1 \text{ ve } a \in Z^+ \}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

olmak üzere, bütün bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} V(P(Z_{p \cdot q})) &= \{u_1 = \bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}, 1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}, 1 \cdot \bar{q}, \\ &\quad 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}, \bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\} \cup \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{1 \cdot \bar{p}, 2 \cdot \bar{p}, \dots, (q - 1) \cdot \bar{p}\} \cup \\ &\quad \{1 \cdot \bar{q}, 2 \cdot \bar{q}, \dots, (p - 1) \cdot \bar{q}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, gerçekten

$$\begin{aligned} |V(P(Z_{p \cdot q}))| &= 1 + \phi(p \cdot q) + (q - 1) + (p - 1) \\ &= (p - 1) \cdot (q - 1) + q + p - 1 \\ &= p \cdot q - p - q + 1 + q + p - 1 \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $i, j \in Z^+$  olmak üzere  $1 \leq i < p$  ve  $1 \leq j < q$  için  $(i \cdot q, n) \neq 1$  ve  $(j \cdot p, n) \neq 1$  bulunur. Dolayısıyla  $\{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\}$  ve  $\{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$  kümelerinden bir üreteç çıkamaz. Tüm bu bilgiler doğrultusunda,

$$V_0 = \{\bar{0}\},$$

$$V_1 = U_{Z_{p \cdot q}} = \{\bar{1}, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\},$$

$$V_2 = \{\bar{q}, \overline{2 \cdot q}, \dots, \overline{(p-1) \cdot q}\},$$

$$V_3 = \{\bar{p}, \overline{2 \cdot p}, \dots, \overline{(q-1) \cdot p}\}$$

ve

$$V(P(Z_{p \cdot q})) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

alabiliriz.  $P(Z_{p \cdot q})$  power grafının genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$\begin{aligned} R_\alpha &= R_\alpha(P(Z_{p \cdot q})) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \\ &= (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_2})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_3})^\alpha + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}})^\alpha \\ &\quad + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{p}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{q}})^\alpha \\ &\quad + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha + \dots + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{u_3})^\alpha + \dots + \\ &\quad + (d_{\bar{1}} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{p}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha + \dots + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha \\ &\quad + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{q}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha + \dots + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + (d_{u_2} \cdot d_{u_3})^\alpha \\ &\quad + \dots + (d_{u_2} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}})^\alpha + (d_{u_2} \cdot d_{\bar{p}})^\alpha + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha + \dots + \\ &\quad + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + (d_{u_2} \cdot d_{\bar{q}})^\alpha + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha + \dots + \\ &\quad + (d_{u_2} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + \dots + (d_{u_3} \cdot d_{u_{\phi(p \cdot q)}})^\alpha + (d_{u_3} \cdot d_{\bar{p}})^\alpha + \\ &\quad + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha + \dots + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + (d_{u_3} \cdot d_{\bar{q}})^\alpha + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (d_{u_3} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + \cdots + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{p}})^\alpha + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha \\
& + \cdots + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{q}})^\alpha + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha \\
& + \cdots + (d_{u_{\phi(p,q)}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + (d_{\overline{p}} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}})^\alpha + \cdots + (d_{\overline{p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha \\
& + \cdots + (d_{\overline{p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + \cdots + (d_{\overline{2 \cdot p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + \cdots + \\
& + (d_{\overline{(q-2) \cdot p}} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}})^\alpha + (d_{\overline{q}} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}})^\alpha + \cdots + (d_{\overline{q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha \\
& + \cdots + (d_{\overline{2 \cdot q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha + \cdots + (d_{\overline{(p-2) \cdot q}} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}})^\alpha
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{0}}^\alpha \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{\overline{0}\}} d_{\bar{i}}^\alpha + \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{1}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{\overline{1}\}} d_{\bar{i}}^\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \cdot d_{u_2} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_2\}} d_{\bar{i}}^\alpha + \frac{1}{2} \cdot d_{u_3} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_3\}} d_{\bar{i}}^\alpha \\
&+ \cdots + \frac{1}{2} \cdot d_{u_{u_{\phi(p,q)}}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - \{u_{u_{\phi(p,q)}}\}} d_{\bar{i}}^\alpha + \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{q}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{q}}} d_{\bar{i}}^\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{2 \cdot q}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{2 \cdot q}}} d_{\bar{i}}^\alpha + \cdots + \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{(p-1) \cdot q}}} d_{\bar{i}}^\alpha \\
&+ \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{p}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{p}}} d_{\bar{i}}^\alpha + \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{2 \cdot p}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{2 \cdot p}}} d_{\bar{i}}^\alpha \\
&+ \cdots + \frac{1}{2} \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}}^\alpha \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(Z_{p,q})) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{(q-1) \cdot p}}} d_{\bar{i}}^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p,q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in \{\overline{0}\}$  veya  $u, v \in V_1$  ise

$$d_u \cdot \sum_{u' \in V - \{u\}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{v' \in V - \{v\}} d_{v'}$$

olur. Aynı şekilde  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p,q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in V_2$  ise

$$d_u \cdot \sum_{\substack{u' \in V-V_3 \\ u' \neq u}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{\substack{v' \in V-V_3 \\ v \neq v'}} d_{v'}$$

ve  $u, v, u', v' \in V(P(Z_{p,q}))$  olmak üzere  $u \neq v, u, v \in V_3$  ise

$$d_u \cdot \sum_{\substack{u' \in V-V_2 \\ u' \neq u}} d_{u'} = d_v \cdot \sum_{\substack{v' \in V-V_2 \\ v \neq v'}} d_{v'}$$

olacağından yukarıda ki son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$R_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot d_{\bar{1}}^\alpha \cdot \sum_{u \in V(P(Z_{p,q})) - \{\bar{1}\}} d_u^\alpha + \frac{1}{2} \cdot d_{\bar{q}}^\alpha \cdot \Phi(p) \cdot \sum_{\substack{u \in V-V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d_u^\alpha \\ + \frac{1}{2} \cdot d_{\bar{p}}^\alpha \cdot \Phi(q) \cdot \sum_{\substack{u \in V-V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d_u^\alpha$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sum_{u \in V(P(Z_{p,q})) - \{\bar{1}\}} d_u^\alpha = \Phi(n) \cdot (n-1)^\alpha + (p \cdot q - q)^\alpha \cdot (p-1) + (p \cdot q - p)^\alpha \cdot (q-1)$$

$$\sum_{\substack{u \in V-V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d_u^\alpha = (\Phi(n) + 1) \cdot (n-1)^\alpha + (p-2) \cdot (p \cdot q - q)^\alpha$$

$$\sum_{\substack{u \in V-V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d_u^\alpha = (\Phi(n) + 1) \cdot (n-1)^\alpha + (q-2) \cdot (p \cdot q - p)^\alpha$$

ve

$$d_{\bar{1}}^\alpha = (p \cdot q - 1)^\alpha,$$

$$d_{\bar{q}}^{\alpha} = (p \cdot q - q)^{\alpha},$$

$$d_{\bar{p}}^{\alpha} = (p \cdot q - p)^{\alpha}$$

ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
R_{\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot \Phi(p \cdot q) \cdot (n - 1)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot (p \cdot q - q)^{\alpha} \cdot (p - 1) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot (p \cdot q - p)^{\alpha} \cdot (q - 1) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q - q)^{\alpha} \cdot \Phi(p) \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q - q)^{\alpha} \cdot \Phi(p) \cdot (p - 2) \cdot (p \cdot q - q)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q - p)^{\alpha} \cdot \Phi(q) \cdot (\Phi(p \cdot q) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q - p)^{\alpha} \cdot \Phi(q) \cdot (q - 2) \cdot (p \cdot q - p)^{\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot \Phi(n) \cdot (n - 1)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot q^{\alpha} \cdot \Phi(p)^{\alpha+1} + \frac{1}{2} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot p^{\alpha} \cdot \Phi(q)^{\alpha+1} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot q^{\alpha} \cdot \Phi(p)^{\alpha+1} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot q^{2 \cdot \alpha} \cdot \Phi(p)^{2 \cdot \alpha+1} \cdot (p - 2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot p^{\alpha} \cdot \Phi(q)^{\alpha+1} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot p^{2 \cdot \alpha} \cdot \Phi(q)^{2 \cdot \alpha+1} \cdot (q - 2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot \Phi(n) \cdot (n - 1)^{\alpha} + (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot q^{\alpha} \cdot \Phi(p)^{\alpha+1} \\
&+ (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot p^{\alpha} \cdot \Phi(q)^{\alpha+1} + \frac{1}{2} \cdot q^{2 \cdot \alpha} \cdot \Phi(p)^{2 \cdot \alpha+1} \cdot (p - 2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot p^{2 \cdot \alpha} \cdot \Phi(q)^{2 \cdot \alpha+1} \cdot (q - 2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\Phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{\alpha} \cdot (\Phi(n) \cdot (n - 1)^{\alpha} + 2 \cdot q^{\alpha} \cdot \Phi(p)^{\alpha+1} + 2 \cdot p^{\alpha} \cdot \Phi(q)^{\alpha+1})
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \cdot (q^{2\cdot\alpha} \cdot \phi(p)^{2\cdot\alpha+1} \cdot (p-2) + p^{2\cdot\alpha} \cdot \phi(q)^{2\cdot\alpha+1} \cdot (q-2))$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

#### 4.8.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,  $\alpha \in R$  olmak üzere,

$$R_\alpha \leq \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^{2\cdot\alpha+1})}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^{2\cdot\alpha+1})}{2}$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olmak üzere  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının genelleştirilmiş Randic indeksi;

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

olduğunu biliyoruz.  $\alpha \in R$  olmak üzere burada, Teorem 2.1.4'deki

$$AM \geq GM$$

eşitsizliğini kullanacak olursak yani  $\alpha \in R$  olmak üzere,

$$\sqrt{d_u^{2\cdot\alpha} \cdot d_u^{2\cdot\alpha}} \leq \frac{d_u^{2\cdot\alpha} + d_u^{2\cdot\alpha}}{2}$$

olacağından burada düzenleme yapılırsa,

$$d_u^\alpha \cdot d_u^\alpha \leq \frac{d_u^{2\cdot\alpha} + d_u^{2\cdot\alpha}}{2}$$

bulunur. Buradan,

$$R_\alpha = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \sim v} (d_u^{2 \cdot \alpha} + d_v^{2 \cdot \alpha})$$

diyebiliriz. Diğer taraftan en son bulduğumuz eşitsizlikte Tanım 2.4.9'daki  $M_1^\alpha(G)$  tanımını kullanacak olursak,

$$R_\alpha = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \sim v} (d_u^{2 \cdot \alpha} + d_v^{2 \cdot \alpha}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \sim v} d_u^{2 \cdot \alpha + 1}$$

olup,

$$R_\alpha \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{u \sim v} d_u^{2 \cdot \alpha + 1} = \frac{1}{2} \cdot M_1^{2 \cdot \alpha + 1} (P(Z_{p^k \cdot q^r})) \quad (4.21)$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 4.5.2'de  $\alpha$  yerine  $2 \cdot \alpha + 1$  yazacak olursak,

$$\begin{aligned} M_1^{2 \cdot \alpha + 1} (P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^{2 \cdot \alpha + 1}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^{2 \cdot \alpha + 1}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olacağından, Eş. 4.22'yi Eş. 4.21'de yerine yazacak olursak,

$$R_\alpha \leq \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^{2 \cdot \alpha + 1})}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^{2 \cdot \alpha + 1})}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

*Örnek*

$P(Z_{2 \cdot 3})$  power grafının genelleştirilmiş Randic indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_6)$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_6)) = Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = Z_6,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5},$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5},$$

$$\bar{3} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{1}, \bar{3} \sim \bar{5},$$

$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4},$$

olup buradan,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = 5, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = 4, d_{\bar{3}} = 3$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha \\
&= \sum_{uv \in E(P(Z_6))} (d_u \cdot d_v)^\alpha \\
&= (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{1}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{2}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{3}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{4}})^\alpha + (d_{\bar{0}} \cdot d_{\bar{5}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{2}})^\alpha \\
&\quad + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{3}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{4}})^\alpha + (d_{\bar{1}} \cdot d_{\bar{5}})^\alpha + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{4}})^\alpha + (d_{\bar{2}} \cdot d_{\bar{5}})^\alpha + (d_{\bar{3}} \cdot d_{\bar{5}})^\alpha \\
&\quad + (d_{\bar{4}} \cdot d_{\bar{5}})^\alpha \\
&= (5 \cdot 5)^\alpha + (5 \cdot 4)^\alpha + (5 \cdot 3)^\alpha + (5 \cdot 4)^\alpha + (5 \cdot 5)^\alpha + (5 \cdot 4)^\alpha + (5 \cdot 3)^\alpha + (5 \cdot 4)^\alpha \\
&\quad + (5 \cdot 5)^\alpha + (4 \cdot 4)^\alpha + (4 \cdot 5)^\alpha + (3 \cdot 5)^\alpha + (4 \cdot 5)^\alpha \\
&= 25^\alpha + 20^\alpha + 15^\alpha + 20^\alpha + 25^\alpha + 20^\alpha + 15^\alpha + 20^\alpha + 25^\alpha + 16^\alpha + 20^\alpha + 15^\alpha \\
&\quad + 20^\alpha \\
&= 3 \cdot 25^\alpha + 6 \cdot 20^\alpha + 16^\alpha + 3 \cdot 15^\alpha \\
&= 3 \cdot 5^{2\alpha} + 6 \cdot 4^\alpha \cdot 5^\alpha + 4^{2\alpha} + 3 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan  $P(Z_6)$  power grafinin genelleştirilmiş Randic indeksini Teorem 4.8.2'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$  olmak üzere;

$$R_\alpha \leq \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(2^{k-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^{2\alpha+1})}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^{2\alpha+1})}{2}$$

dir. Burada;

$$\sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^{2\alpha+1})}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^{2\alpha+1})}{2} = \left( \begin{array}{l} \frac{\phi(6)}{2} \cdot d_{\bar{1}}^{2\alpha+1} \\ + \frac{\phi(3)}{2} \cdot d_{\bar{2}}^{2\alpha+1} \\ + \frac{\phi(2)}{2} \cdot d_{\bar{3}}^{2\alpha+1} \\ + \frac{\phi(1)}{2} \cdot d_{\bar{6}=\bar{0}}^{2\alpha+1} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 5^{2\cdot\alpha+1} \\ +4^{2\cdot\alpha+1} \\ +\frac{1}{2}\cdot 3^{2\cdot\alpha+1} \\ +\frac{1}{2}\cdot 5^{2\cdot\alpha+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{15}{2}\cdot 5^{2\cdot\alpha} + 4\cdot 4^{2\cdot\alpha} + \frac{3}{2}\cdot 3^{2\cdot\alpha}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$R_\alpha = 3\cdot 5^{2\cdot\alpha} + 6\cdot 4^\alpha \cdot 5^\alpha + 4^{2\cdot\alpha} + 3\cdot 3^\alpha \cdot 5^\alpha \leq \frac{15}{2}\cdot 5^{2\cdot\alpha} + 4\cdot 4^{2\cdot\alpha} + \frac{3}{2}\cdot 3^{2\cdot\alpha}$$

elde edilir.

#### 4.8.3. Teorem

$n \in \mathbb{Z}^+$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

(i) Eğer  $\alpha \geq 0$  ise

$$R_\alpha \leq \binom{n}{2} \cdot (n-1)^{2\cdot\alpha} \quad (4.23)$$

(ii) Eğer  $\alpha < 0$  ise

$$R_\alpha \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n-1)^{2\cdot\alpha} \quad (4.24)$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere

$n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in \mathbb{Z}^+$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Burada,

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

olduğunu biliyoruz. O halde eşitsizliğin bir tarafını ispatlamaya başlayalım.

(i) Kabul edelim ki  $\alpha \geq 0$  olsun.

$$R_\alpha \leq \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (n-1)^{2\alpha} = m \cdot (n-1)^{2\alpha}$$

bulunur. Burada Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i$$

olduğundan bu  $m$  değeri en son ki eşitsizlikte yerine yazılacak olursa ve ayrıca burada  $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u \leq n-1$  özelliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} R_\alpha &\leq m \cdot (n-1)^{2\alpha} \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i \right) \cdot (n-1)^{2\alpha} \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} (n-1) \right) \cdot (n-1)^{2\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1)^{2\alpha} \\ &= \binom{n}{2} \cdot (n-1)^{2\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) Kabul edelim ki  $\alpha < 0$  olsun. Burada  $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u \leq n - 1$  ve dolayısıyla  $d_u^\alpha \geq (n - 1)^\alpha$  özelliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} R_\alpha &\geq \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (n - 1)^{2\alpha} \\ &= m \cdot (n - 1)^{2\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\bar{i} \in Z_n} d_{\bar{i}}$$

olduğundan bu  $m$  değeri en son ki eşitsizlikte yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} R_\alpha &\geq m \cdot (n - 1)^{2\alpha} \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot \sum_{\bar{i} \in Z_n} d_{\bar{i}} \right) \cdot (n - 1)^{2\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan burada " $\delta(P(Z_n))$ " özelliğini kullanacak olursak;

$$R_\alpha \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\bar{i} \in Z_n} d_{\bar{i}} \cdot (n - 1)^{2\alpha} \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n - 1)^{2\alpha}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$\binom{n}{2} \cdot (n - 1)^{2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n - 1)^{2\alpha}$$

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot (n - 1)^{2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n - 1)^{2\alpha}$$

$$(n - 1) \cdot (n - 1)^{2\alpha} = \delta \cdot (n - 1)^{2\alpha}$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta = n - 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.9. Power Grafların Randic İndeksi

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin Randic indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin Randic indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların Randic indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2'de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin Randic indeksi,

$$R(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

##### 4.9.1. Teorem

$P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeden bir power graf ve  $p$  ile  $q$  farklı asal sayılar  $k \in Z^+$  olsun. O halde

eğer  $n = p^k$  ise

$$R = R(P(Z_n)) = \frac{n}{2}$$

eğer  $n = p \cdot q$  ise

$$R = \frac{1}{2} \cdot (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} \phi(n) \cdot (n - 1)^{-1/2} \\ + 2 \cdot q^{-1/2} \cdot \phi(p)^{1/2} \\ + 2 \cdot p^{-1/2} \cdot \phi(q)^{1/2} \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} \cdot (q^{-1} \cdot (p - 2) + p^{-1} \cdot (q - 2))$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeden bir power graf ve  $p$  ile  $q$  farklı asal sayılar  $k \in Z^+$  olsun. Bu power grafın sırasıyla Randic ve genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$R(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

ve

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

olmak üzere burada  $\alpha = -\frac{1}{2}$  alınırsa,

$$R_{-1/2} = R(P(Z_n))$$

elde edilir. O halde sırasıyla Teorem 4.8.1'deki Eş. 4.19 ve Eş. 4.20'de  $\alpha = -\frac{1}{2}$  alınırsa;

$n = p^k$  için,

$$R(P(Z_n)) = \frac{n}{2}$$

ve  $n = p \cdot q$  için,

$$R(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} \phi(n) \cdot (n - 1)^{-1/2} \\ + 2 \cdot q^{-1/2} \cdot \phi(p)^{1/2} \\ + 2 \cdot p^{-1/2} \cdot \phi(q)^{1/2} \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} \cdot (q^{-1} \cdot (p - 2) + p^{-1} \cdot (q - 2))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.9.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$R(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{\phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{2}$$

dir.

#### İspat

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. Teorem 4.8.2'de  $\alpha = -\frac{1}{2}$  alınırsa,

$$R(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = R_{-1/2}(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq \sum_{i=0}^k \frac{\phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{2} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### Örnek

$P(Z_{2 \cdot 3})$  power grafının Randic indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_6)$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_6)) = Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = Z_6,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5},$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5},$$

$$\bar{3} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{1}, \bar{3} \sim \bar{5},$$

$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4},$$

olup buradan,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = 5, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = 4, d_{\bar{3}} = 3$$

bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned}
R(P(Z_{2,3})) &= \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^{-1/2} \\
&= \sum_{uv \in E(P(Z_6))} (d_u \cdot d_v)^{-1/2} \\
&= (d_0 \cdot d_1)^{-1/2} + (d_0 \cdot d_2)^{-1/2} + (d_0 \cdot d_3)^{-1/2} + (d_0 \cdot d_4)^{-1/2} \\
&\quad + (d_0 \cdot d_5)^{-1/2} + (d_1 \cdot d_2)^{-1/2} + (d_1 \cdot d_3)^{-1/2} + (d_1 \cdot d_4)^{-1/2} \\
&\quad + (d_1 \cdot d_5)^{-1/2} + (d_2 \cdot d_4)^{-1/2} + (d_2 \cdot d_5)^{-1/2} + (d_3 \cdot d_5)^{-1/2} \\
&\quad + (d_4 \cdot d_5)^{-1/2} \\
&= (5 \cdot 5)^{-1/2} + (5 \cdot 4)^{-1/2} + (5 \cdot 3)^{-1/2} + (5 \cdot 4)^{-1/2} + (5 \cdot 5)^{-1/2} \\
&\quad + (5 \cdot 4)^{-1/2} + (5 \cdot 3)^{-1/2} + (5 \cdot 4)^{-1/2} + (5 \cdot 5)^{-1/2} + (4 \cdot 4)^{-1/2} \\
&\quad + (4 \cdot 5)^{-1/2} + (3 \cdot 5)^{-1/2} + (4 \cdot 5)^{-1/2} \\
&= 25^{-1/2} + 20^{-1/2} + 15^{-1/2} + 20^{-1/2} + 25^{-1/2} + 20^{-1/2} + 15^{-1/2} \\
&\quad + 20^{-1/2} + 25^{-1/2} + 16^{-1/2} + 20^\alpha + 15^\alpha + 20^\alpha \\
&= 3 \cdot 25^{-1/2} + 6 \cdot 20^{-1/2} + 16^{-1/2} + 3 \cdot 15^{-1/2} \\
&= 3 \cdot 25^{-1/2} + 6 \cdot 20^{-1/2} + 16^{-1/2} + 3 \cdot 15^{-1/2} \\
&= \frac{3}{5} + \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{5} \\
&= \frac{12 + 12 \cdot \sqrt{5} + 5 + 4 \cdot \sqrt{15}}{20} \\
&= \frac{17 + 12 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{15}}{20} \\
&\approx \frac{17 + 12 \cdot 2,24 + 4 \cdot 3,87}{20} \\
&= \frac{59,36}{20}
\end{aligned}$$

$$R(P(Z_{2,3})) \approx 2,968$$

bulunur. Diğer taraftan  $P(Z_6)$  power grafının Randic indeksini Teorem 4.9.2'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$  olmak üzere;

$$R(P(Z_{2,3})) \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2}$$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} = \frac{\phi(6)}{2} + \frac{\phi(3)}{2} + \frac{\phi(2)}{2} + \frac{\phi(1)}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

olacağından dolayısıyla,

$$R(P(Z_{2,3})) \approx 2,968 \leq \sum_{i=0}^1 \frac{\phi(2^{1-i} \cdot 3^1)}{2} + \sum_{j=0}^1 \frac{\phi(2^{1-j})}{2} = 3$$

elde edilir.

#### 4.9.3. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n-1)^{-1} \leq R \leq \binom{n}{2} \cdot \delta^{-1}$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere  $n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. Bu power grafin sırasıyla Randic ve genelleştirilmiş Randic indeksi,

$$R(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

ve

$$R_\alpha = R_\alpha(P(Z_n)) = \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^\alpha$$

olmak üzere burada  $\alpha = -\frac{1}{2}$  alınırsa,

$$R_{-1/2} = R(P(Z_n)) = R$$

elde edilir. Teorem 4.8.3'teki Eş. 4.23'te  $\alpha = -1/2$  alınırsa;

$$R \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n-1)^{-1}$$

elde edilir ve eşitsizliğin bir tarafının ispatı tamamlanır. Diğer taraftan eşitsizliğin diğer tarafının ispatı için, ‘‘Diaz-Metcalf’’ eşitsizliğini kullanacak olursak;  $\forall uv = e \in E(P(Z_n))$  için,

$$b_e = (d_u \cdot d_v)^{-1/4}$$

$$a_e = 1$$

$$r = \min_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\}$$

$$R = \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^{-1/2} + \min_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \cdot \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \cdot \sum_{u \sim v} 1 \\ & \leq \left( \min_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} + \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \right) \cdot \sum_{u \sim v} (d_u \cdot d_v)^{-1/4} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} & R + m \cdot \min_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \cdot \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \\ & \leq \left( \min_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} + \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \right) \cdot m \cdot \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$R \leq m \cdot \left( \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \right)^2 \leq m \cdot \left( \max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} \right)^2 \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada  $\forall u, v \in V(P(Z_n))$  için  $\delta^2 \leq d_u \cdot d_v \leq (n-1)^2$  olacağından bu bilgiler doğrultusunda,

$$\delta^{-1/2} \geq (d_u \cdot d_v)^{-1/4} \geq (n-1)^{-1/2}$$

olup buradan,

$$\max_{uv=e} \{(d_u \cdot d_v)^{-1/4}\} = \delta^{-1/2} \quad (4.26)$$

olacağından Eş.4.26'yı Eş. 4.25'te kullanacak olursak

$$R \leq m \cdot \delta^{-1}$$

bulunur. Diğer taraftan,

Tanım 2.2.4'ten

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i$$

olduğundan bu  $m$  değeri en son ki eşitsizlikte yerine yazılacak olursa,

$$R \leq m \cdot \delta^{-1} = \left( \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in Z_n} d_i \right) \cdot \delta^{-1} \leq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \delta^{-1} = \binom{n}{2} \cdot \delta^{-1}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için;  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$\binom{n}{2} \cdot \delta^{-1} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n-1)^{-1}$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \delta^{-1} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \delta \cdot (n-1)^{-1}$$

$$(n-1) \cdot \delta^{-1} = \delta \cdot (n-1)^{-1}$$

$$\delta^2 = (n-1)^2$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta = n - 1$$

bulunur. O halde

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafının  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.10. Power Grafların $F$ -İndeksi (Furtula İndeksi)

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $F$ -indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $F$ -indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların  $F$ -indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafinin  $F$ -indeksi,

$$F(P(Z_n)) = \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^3 = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u^2 + d_v^2)$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

##### 4.10.1. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $k \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  mertebeden bir power graf olsun. O halde

$$F(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1)^3 \quad (4.27)$$

ve

$$F(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3 \quad (4.28)$$

dir.

*İspat*

$k \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar) mertebeden bir power graf olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafinin  $F$ -indeksi;

$$\begin{aligned}
F(P(Z_n)) &= \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u^2 + d_v^2) \\
&= \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^3 \\
&= M_1^3(P(Z_n))
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.5.1'deki Eş. 4.13 ve Eş. 4.14'te  $\alpha = 3$  alınacak olursa,

$$F(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1)^3$$

ve

$$F(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3$$

elde edilir ve ispat biter.

#### 4.10.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olmak üzere  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının  $F$ -indeksi;

$$\begin{aligned}
F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} (d_u^2 + d_v^2) \\
&= \sum_{u \in V(P(Z_{p^k \cdot q^r}))} d_u^3 \\
&= M_1^3(P(Z_{p^k \cdot q^r}))
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.5.2'de  $\alpha = 3$  alınacak olursa,

$$F(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3) + \sum_{j=0}^r \sum_{i=1}^k (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.10.1. Sonuç

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar  $P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$F(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3$$

dir.

*İspat*

$P(Z_n)$ ,  $n = p \cdot q$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olmak üzere  $P(Z_{p \cdot q})$  power grafının  $F$ -indeksi;

$$F(P(Z_{p \cdot q})) = \sum_{uv \in E(P(Z_{p \cdot q}))} (d_u^2 + d_v^2)$$

$$\begin{aligned}
 F(P(Z_{p,q})) &= \sum_{u \in V(P(Z_{p,q}))} d_u^3 \\
 &= M_1^3(P(Z_{p,q}))
 \end{aligned}$$

olduğundan Sonuç 4.5.1’de  $\alpha = 3$  alınacak olursa,

$$F(P(Z_{p,q})) = (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

#### 4.10.1. Not

Sonuç 4.10.1 daha önce bulduğumuz Teorem 4.10.1’deki Eş. 4.28 ile çakıştı. Fakat bu sonuç farklı bir yolla elde edilmiştir.

#### Örnek

$P(Z_{12})$  power grafının  $F$ -indeksini hesaplamak için öncelikle  $P(Z_{12})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım. O halde,

$$V(P(Z_{12})) = Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = Z_{12},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\},$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\},$$

ve

$$\langle \bar{6} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{6} \}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{10} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{10} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle,$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11},$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11},$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11},$$

$$\bar{7} \sim \bar{0}, \bar{7} \sim \bar{1}, \bar{7} \sim \bar{2}, \bar{7} \sim \bar{3}, \bar{7} \sim \bar{4}, \bar{7} \sim \bar{5}, \bar{7} \sim \bar{6}, \bar{7} \sim \bar{8}, \bar{7} \sim \bar{9}, \bar{7} \sim \bar{10}, \bar{7} \sim \bar{11},$$

$$\bar{11} \sim \bar{0}, \bar{11} \sim \bar{1}, \bar{11} \sim \bar{2}, \bar{11} \sim \bar{3}, \bar{11} \sim \bar{4}, \bar{11} \sim \bar{5}, \bar{11} \sim \bar{6}, \bar{11} \sim \bar{7}, \bar{11} \sim \bar{8}, \bar{11} \sim \bar{9}, \bar{11} \sim \bar{10},$$

$$\bar{2} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{1}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{2} \sim \bar{5}, \bar{2} \sim \bar{6}, \bar{2} \sim \bar{7}, \bar{2} \sim \bar{8}, \bar{2} \sim \bar{10}, \bar{2} \sim \bar{11},$$

$$\bar{10} \sim \bar{0}, \bar{10} \sim \bar{1}, \bar{10} \sim \bar{2}, \bar{10} \sim \bar{4}, \bar{10} \sim \bar{5}, \bar{10} \sim \bar{6}, \bar{10} \sim \bar{7}, \bar{10} \sim \bar{8}, \bar{10} \sim \bar{11},$$

$$\bar{3} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{1}, \bar{3} \sim \bar{5}, \bar{3} \sim \bar{6}, \bar{3} \sim \bar{7}, \bar{3} \sim \bar{9}, \bar{3} \sim \bar{11},$$

$$\bar{9} \sim \bar{0}, \bar{9} \sim \bar{1}, \bar{9} \sim \bar{3}, \bar{9} \sim \bar{5}, \bar{9} \sim \bar{6}, \bar{9} \sim \bar{7}, \bar{9} \sim \bar{11},$$

$$\bar{4} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{1}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{4} \sim \bar{5}, \bar{4} \sim \bar{7}, \bar{4} \sim \bar{8}, \bar{4} \sim \bar{10}, \bar{4} \sim \bar{11},$$

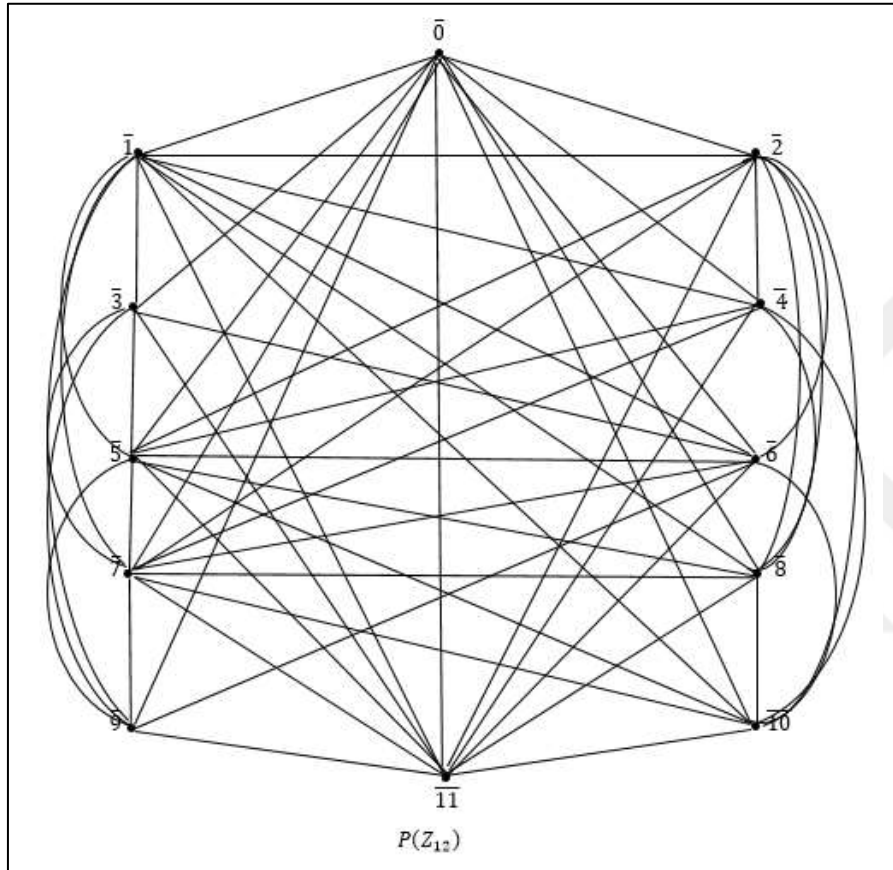
$$\bar{8} \sim \bar{0}, \bar{8} \sim \bar{1}, \bar{8} \sim \bar{2}, \bar{8} \sim \bar{4}, \bar{8} \sim \bar{5}, \bar{8} \sim \bar{7}, \bar{8} \sim \bar{10}, \bar{8} \sim \bar{11},$$

$$\bar{6} \sim \bar{0}, \bar{6} \sim \bar{1}, \bar{6} \sim \bar{2}, \bar{6} \sim \bar{3}, \bar{6} \sim \bar{5}, \bar{6} \sim \bar{7}, \bar{6} \sim \bar{9}, \bar{6} \sim \bar{10}, \bar{6} \sim \bar{11}$$

olup buradan,

$$d_{\bar{0}} = d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = d_{\bar{7}} = d_{\bar{11}} = 11, d_{\bar{2}} = d_{\bar{10}} = 9, d_{\bar{4}} = d_{\bar{8}} = 8, d_{\bar{3}} = d_{\bar{9}} = 7, d_{\bar{6}} = 9$$

bu bilgiler doğrultusunda  $P(Z_{12})$  power grafının grafiği,



Şekil 4.7.  $P(Z_{12})$  power grafi

şeklindedir.  $P(Z_{12})$  power grafının  $F$ -indeksi;

$$\begin{aligned} F(P(Z_{12})) &= \sum_{uv \in E(P(Z_{12}))} (d_u^2 + d_v^2) \\ &= \sum_{u \in V(P(Z_{12}))} d_u^3 \\ &= \sum_{i=0}^{11} d_i^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(P(Z_{12})) &= d_0^3 + d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 + d_8^3 + d_9^3 + d_{10}^3 \\
&\quad + d_{11}^3 \\
&= 11^3 + 11^3 + 9^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 9^3 + 11^3 + 8^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 \\
&= 5 \cdot 11^3 + 3 \cdot 9^3 + 2 \cdot 8^3 + 2 \cdot 7^3
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan  $P(Z_{12})$  power grafının  $F$ -indeksini Teorem 4.10.2'yi kullanarak hesaplayalım. Burada  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $k = 2$ ,  $r = 1$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
F(P(Z_{2^2 \cdot 3})) &= \sum_{i=0}^2 (\phi(2^{2-i} \cdot 3^1) \cdot d_{2^i}^3) + \sum_{j=0}^2 (\phi(2^{2-j}) \cdot d_{2^j \cdot 3}^3) \\
&= \phi(12) \cdot d_1^3 + \phi(6) \cdot d_2^3 + \phi(3) \cdot d_4^3 + \phi(4) \cdot d_3^3 + \phi(2) \cdot d_6^3 \\
&\quad + \phi(1) \cdot d_{12}^3 \\
&= 4 \cdot 11^3 + 2 \cdot 9^3 + 2 \cdot 8^3 + 2 \cdot 7^3 + 9^3 + 11^3 \\
&= 5 \cdot 11^3 + 3 \cdot 9^3 + 2 \cdot 8^3 + 2 \cdot 7^3
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.10.3. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\delta^3 \cdot n \leq F(P(Z_n)) \leq n \cdot (n-1)^3$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere  $n = p^k$  olmasıdır.

#### İspat

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.

$$\begin{aligned}
F(P(Z_n)) &= \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u^2 + d_v^2) \\
&= \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^3 \\
&= M_1^3(P(Z_n))
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.5.3'teki Eş. 4.15'te  $\alpha = 3$  alınırsa,

$$F(P(Z_n)) \leq n \cdot (n-1)^3$$

elde edilir ve eşitsizliğin bir tarafının ispatı tamamlanır. Diğer taraftan,

$$F(P(Z_n)) = \sum_{u \in V(P(Z_n))} d_u^3$$

olmak üzere ‘‘Polya-Szego’’ eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$1 \leq i \leq n, \quad 0 < \gamma = \delta^3 \leq a_i = d_i^3 \leq A = (n-1)^3 < \infty$$

ve

$$0 < \beta = 1 \leq b_i = 1 \leq B = 1 < \infty$$

ise o halde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n d_i^6 \cdot \sum_{i=1}^n 1 &\leq \frac{(\delta^3 \cdot 1 + (n-1)^3 \cdot 1)^2}{4 \cdot \delta^3 \cdot 1 \cdot (n-1)^3 \cdot 1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^3 \cdot 1 \right)^2 \\
&= \frac{(\delta^3 + (n-1)^3)^2}{4 \cdot \delta^3 \cdot (n-1)^3} \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_i^3 \right)^2
\end{aligned}$$

bulunur ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n d_i^3 \right)^2 &\geq \frac{4 \cdot \delta^3 \cdot (n-1)^3 \cdot n}{(\delta^3 + (n-1)^3)^2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i^6 \geq \frac{4 \cdot \delta^9 \cdot (n-1)^3 \cdot n^2}{(\delta^3 + (n-1)^3)^2} \geq \frac{4 \cdot \delta^9 \cdot \delta^3 \cdot n^2}{(\delta^3 + \delta^3)^2} \\ &= \frac{4 \cdot \delta^{12} \cdot n^2}{4 \cdot \delta^6} = \delta^6 \cdot n^2 \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla,

$$F(P(Z_n)) = \sum_{i=1}^n d_i^3 \geq \delta^3 \cdot n$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$n \cdot (n-1)^3 = \delta^3 \cdot n$$

olacağından burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta^3 = (n-1)^3$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olacağından bu ancak " $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ " olmasıyla yani " $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden" olması ile mümkündür. Dolayısıyla, burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.

#### 4.11. Power Grafların Hiper-Zagreb İndeksi

Bu bölümde, öncelikle  $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar ve  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Daha sonra genel bir  $n \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin hiper-Zagreb indeksi üzerinde teoremler elde edilmiştir. Power grafların hiper-Zagreb

indeksi ile gösterimi literatürde daha önce yapılmış bir gösterim olmadığından özgün bir yöntem olarak da ayrıca önemlidir.

Bölüm 2’de verildiği üzere  $P(Z_n)$  power grafının hiper-Zagreb indeksi,

$$HM(P(Z_n)) = \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2$$

şeklinde tanımlı olup burada  $d_u$ ,  $u$  köşesinin derecesidir.

#### 4.11.1. Teorem

$k \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar) mertebeden bir power graf olsun. O halde,

$$HM(P(Z_{p^k})) = 2 \cdot p^k \cdot (p^k - 1)^3$$

ve

$$\begin{aligned} HM(P(Z_{p \cdot q})) &= (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3 \\ &\quad + n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - 11 \cdot p - p^2 \cdot (p - 9) + 3 \cdot q \cdot \phi(q) \\ &\quad 2n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) - n \cdot (14 \cdot q - 19) \end{aligned}$$

dir.

#### İspat

$k \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k$  veya  $n = p \cdot q$  ( $p$  ve  $q$  farklı asal sayılar) mertebeden bir power graf olsun.

Eğer  $n = p^k$  ise Teorem 4.10.1’deki Eş. 4.27’den

$$F(P(Z_{p^k})) = p^k \cdot (p^k - 1)^3$$

olduğunu ve Teorem 4.4.5'ten

$$SK_1(P(Z_{p^k})) = \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4}$$

olduğunu biliyoruz. Bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} HM(P(Z_{p^k})) &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u + d_v)^2 \\ &= \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} (d_u^2 + d_v^2) + 2 \cdot \sum_{uv \in E(P(Z_{p^k}))} d_u \cdot d_v \\ &= F(P(Z_{p^k})) + 4 \cdot SK_1(P(Z_{p^k})) \\ &= p^k \cdot (p^k - 1)^3 + 4 \cdot \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4} \\ &= 2 \cdot p^k \cdot (p^k - 1)^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer  $n = p \cdot q$  ise, Teorem 4.10.1'deki Eş. 4.28'den

$$F(P(Z_{p \cdot q})) = (\phi(p \cdot q) + 1) \cdot (p \cdot q - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3$$

olduğunu ve Teorem 4.4.6'dan

$$\begin{aligned} SK_1(P(Z_{p \cdot q})) &= \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - \frac{1}{4} \cdot n \cdot (14 \cdot q - 19) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot p^2 \cdot (p - 9) + \frac{3}{4} \cdot q \cdot (q - 1) - \frac{11}{4} \cdot p + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu bilgi doğrultusunda,

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{p \cdot q})) &= F(P(Z_{p \cdot q})) + 4 \cdot SK_1(P(Z_{p \cdot q})) \\
&= (\phi(n) + 1) \cdot (n - 1)^3 + \phi(p)^4 \cdot q^3 + \phi(q)^4 \cdot p^3 \\
&\quad + n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) - 11 \cdot p + 2 \\
&\quad n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) - n \cdot (14 \cdot q - 19) - \\
&\quad p^2 \cdot (p - 9) + 3 \cdot q \cdot \phi(q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispatlar tamamlanır.

#### 4.11.2. Teorem

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan iki tamsayı ve  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  köşeli bir power graf olsun. O halde,

$$HM(P(Z_{p^k \cdot q^r})) \leq 5 \cdot \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + 5 \cdot \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4}$$

ve

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{p^k \cdot q^r})) &\geq \sum_{i=0}^k \left( \phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot \left( d_{p^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \left( \phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot \left( d_{p^j \cdot q^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right)
\end{aligned}$$

dir.

*İspat*

$p$  ve  $q$  farklı asal sayılar,  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n = p^k \cdot q^r$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power grafının hiper-Zagreb indeksi;

$$HM(P(Z_{p^k \cdot q^r})) = \sum_{uv \in E(Z_{p^k \cdot q^r})} (d_u + d_v)^2$$

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{p^k, q^r})) &= \sum_{uv \in E(Z_{p^k, q^r})} (d_u^2 + d_v^2) + 2 \cdot \sum_{uv \in E(Z_{p^k, q^r})} d_u \cdot d_v \\
&= F(Z_{p^k, q^r}) + 4 \cdot SK_1(Z_{p^k, q^r})
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 4.10.2'den

$$F(P(Z_{p^k, q^r})) = \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)$$

ve Teorem 4.4.7'den

$$\begin{aligned}
SK_1(P(Z_{p^k, q^r})) &\leq \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4}, \\
\delta^3 \cdot \left( \sum_{i=0}^k \frac{\phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{4} \right) &\leq SK_1(P(Z_{p^k, q^r}))
\end{aligned}$$

olmak üzere bu denklemler

$$HM(P(Z_{p^k, q^r})) = F(Z_{p^k, q^r}) + 4 \cdot SK_1(Z_{p^k, q^r})$$

denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{p^k, q^r})) &\leq \sum_{i=0}^k (\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3) \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{(\phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4}
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizlik düzenlenecek olursa,

$$HM(P(Z_{p^k, q^r})) \leq 5 \cdot \sum_{i=0}^k \frac{(\Phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3)}{4} + 5 \cdot \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \frac{(\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3)}{4}$$

bulunur. Şimdi de diğer eşitsizliği ispatlayalım. Yani,

$$\begin{aligned} HM(P(Z_{p^k, q^r})) &\geq \sum_{i=0}^k (\Phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot d_{p^i}^3) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r (\Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot d_{p^j \cdot q^i}^3) \\ &+ \sum_{i=0}^k \left( \frac{\delta^3 \cdot \Phi(p^{k-i} \cdot q^r)}{4} \right) + \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \left( \frac{\delta^3 \cdot \Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i})}{4} \right) \end{aligned}$$

olup bu eşitsizlik düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned} HM(P(Z_{p^k, q^r})) &\geq \sum_{i=0}^k \left( \Phi(p^{k-i} \cdot q^r) \cdot \left( d_{p^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right) \\ &+ \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^r \left( \Phi(p^{k-j} \cdot q^{r-i}) \cdot \left( d_{p^j \cdot q^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

*Örnek*

$P(Z_{2,3^2})$  power grafının hiper-Zagreb indeksi;

$$HM(P(Z_{2,3^2})) = \sum_{uv \in E(Z_{2,3^2})} (d_u + d_v)^2$$

olduğundan Öncelikle  $P(Z_{18})$  power grafında ki bütün noktaların komşuluklarını bulalım.

O halde,

$$V(P(Z_{18})) = Z_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}\},$$

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = Z_{18},$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}\},$$

$$\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$$

ve

$$\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{12} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{9} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle,$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{15} \rangle \subseteq \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{17} \rangle$$

olacağından,

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}, \bar{0} \sim \bar{6}, \bar{0} \sim \bar{7}, \bar{0} \sim \bar{8}, \bar{0} \sim \bar{9}, \bar{0} \sim \bar{10}, \bar{0} \sim \bar{11}, \bar{0} \sim \bar{12}, \bar{0} \sim \bar{13}, \bar{0} \sim \bar{14}, \bar{0} \sim \bar{15}, \\ \bar{0} \sim \bar{16}, \bar{0} \sim \bar{17}$$

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{1} \sim \bar{6}, \bar{1} \sim \bar{7}, \bar{1} \sim \bar{8}, \bar{1} \sim \bar{9}, \bar{1} \sim \bar{10}, \bar{1} \sim \bar{11}, \bar{1} \sim \bar{12}, \bar{1} \sim \bar{13}, \bar{1} \sim \bar{14}, \bar{1} \sim \bar{15}, \\ \bar{1} \sim \bar{16}, \bar{1} \sim \bar{17}$$

$$\bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}, \bar{5} \sim \bar{6}, \bar{5} \sim \bar{7}, \bar{5} \sim \bar{8}, \bar{5} \sim \bar{9}, \bar{5} \sim \bar{10}, \bar{5} \sim \bar{11}, \bar{5} \sim \bar{12}, \bar{5} \sim \bar{13}, \bar{5} \sim \bar{14}, \bar{5} \sim \bar{15}, \\ \bar{5} \sim \bar{16}, \bar{5} \sim \bar{17}$$

$\overline{7\sim 0}, \overline{7\sim 1}, \overline{7\sim 2}, \overline{7\sim 3}, \overline{7\sim 4}, \overline{7\sim 5}, \overline{7\sim 6}, \overline{7\sim 8}, \overline{7\sim 9}, \overline{7\sim 10}, \overline{7\sim 11}, \overline{7\sim 12}, \overline{7\sim 13}, \overline{7\sim 14}, \overline{7\sim 15},$   
 $\overline{7\sim 16}, \overline{7\sim 17}$

$\overline{11\sim 0}, \overline{11\sim 1}, \overline{11\sim 2}, \overline{11\sim 3}, \overline{11\sim 4}, \overline{11\sim 5}, \overline{11\sim 6}, \overline{11\sim 7}, \overline{11\sim 8}, \overline{11\sim 9}, \overline{11\sim 10}, \overline{11\sim 12},$   
 $\overline{11\sim 13}, \overline{11\sim 14}, \overline{11\sim 15}, \overline{11\sim 16}, \overline{11\sim 17},$

$\overline{13\sim 0}, \overline{13\sim 1}, \overline{13\sim 2}, \overline{13\sim 3}, \overline{13\sim 4}, \overline{13\sim 5}, \overline{13\sim 6}, \overline{13\sim 7}, \overline{13\sim 8}, \overline{13\sim 9}, \overline{13\sim 10}, \overline{13\sim 11},$   
 $\overline{13\sim 12}, \overline{13\sim 14}, \overline{13\sim 15}, \overline{13\sim 16}, \overline{13\sim 17},$

$\overline{17\sim 0}, \overline{17\sim 1}, \overline{17\sim 2}, \overline{17\sim 3}, \overline{17\sim 4}, \overline{17\sim 5}, \overline{17\sim 6}, \overline{17\sim 7}, \overline{17\sim 8}, \overline{17\sim 9}, \overline{17\sim 10}, \overline{17\sim 11},$   
 $\overline{17\sim 12}, \overline{17\sim 13}, \overline{17\sim 14}, \overline{17\sim 15}, \overline{17\sim 16},$

$\overline{2\sim 0}, \overline{2\sim 1}, \overline{2\sim 4}, \overline{2\sim 5}, \overline{2\sim 6}, \overline{2\sim 7}, \overline{2\sim 8}, \overline{2\sim 10}, \overline{2\sim 11}, \overline{2\sim 12}, \overline{2\sim 13}, \overline{2\sim 14}, \overline{2\sim 16}, \overline{2\sim 17},$

$\overline{4\sim 0}, \overline{4\sim 1}, \overline{4\sim 2}, \overline{4\sim 5}, \overline{4\sim 6}, \overline{4\sim 7}, \overline{4\sim 8}, \overline{4\sim 10}, \overline{4\sim 11}, \overline{4\sim 12}, \overline{4\sim 13}, \overline{4\sim 14}, \overline{4\sim 16}, \overline{4\sim 17},$   
 $\overline{8\sim 0}, \overline{8\sim 1}, \overline{8\sim 2}, \overline{8\sim 4}, \overline{8\sim 5}, \overline{8\sim 6}, \overline{8\sim 7}, \overline{8\sim 10}, \overline{8\sim 11}, \overline{8\sim 12}, \overline{8\sim 13}, \overline{8\sim 14}, \overline{8\sim 16}, \overline{8\sim 17}$

$\overline{10\sim 0}, \overline{10\sim 1}, \overline{10\sim 2}, \overline{10\sim 4}, \overline{10\sim 5}, \overline{10\sim 6}, \overline{10\sim 7}, \overline{10\sim 8}, \overline{10\sim 11}, \overline{10\sim 12}, \overline{10\sim 13}, \overline{10\sim 14},$   
 $\overline{10\sim 16}, \overline{10\sim 17}$

$\overline{14\sim 0}, \overline{14\sim 1}, \overline{14\sim 2}, \overline{14\sim 4}, \overline{14\sim 5}, \overline{14\sim 6}, \overline{14\sim 7}, \overline{14\sim 8}, \overline{14\sim 10}, \overline{14\sim 11}, \overline{14\sim 12}, \overline{14\sim 13},$   
 $\overline{14\sim 16}, \overline{14\sim 17}$

$\overline{16\sim 0}, \overline{16\sim 1}, \overline{16\sim 2}, \overline{16\sim 4}, \overline{16\sim 5}, \overline{16\sim 6}, \overline{16\sim 7}, \overline{16\sim 8}, \overline{16\sim 10}, \overline{16\sim 11}, \overline{16\sim 12}, \overline{16\sim 13},$   
 $\overline{16\sim 14}, \overline{16\sim 17}$

$\overline{3\sim 0}, \overline{3\sim 1}, \overline{3\sim 5}, \overline{3\sim 6}, \overline{3\sim 7}, \overline{3\sim 9}, \overline{3\sim 11}, \overline{3\sim 12}, \overline{3\sim 13}, \overline{3\sim 15}, \overline{3\sim 17},$

$\overline{15\sim 0}, \overline{15\sim 1}, \overline{15\sim 3}, \overline{15\sim 5}, \overline{15\sim 6}, \overline{15\sim 7}, \overline{15\sim 9}, \overline{15\sim 11}, \overline{15\sim 12}, \overline{15\sim 13}, \overline{15\sim 17},$

$\overline{6\sim 0}, \overline{6\sim 1}, \overline{6\sim 2}, \overline{6\sim 3}, \overline{6\sim 4}, \overline{6\sim 5}, \overline{6\sim 7}, \overline{6\sim 8}, \overline{6\sim 10}, \overline{6\sim 11}, \overline{6\sim 12}, \overline{6\sim 13}, \overline{6\sim 14}, \overline{6\sim 15},$   
 $\overline{6\sim 16}, \overline{6\sim 17}$

$\overline{12} \sim \overline{0}, \overline{12} \sim \overline{1}, \overline{12} \sim \overline{2}, \overline{12} \sim \overline{3}, \overline{12} \sim \overline{4}, \overline{12} \sim \overline{5}, \overline{12} \sim \overline{6}, \overline{12} \sim \overline{7}, \overline{12} \sim \overline{8}, \overline{12} \sim \overline{10}, \overline{12} \sim \overline{11}, \overline{12} \sim \overline{13},$   
 $\overline{12} \sim \overline{14}, \overline{12} \sim \overline{15}, \overline{12} \sim \overline{16}, \overline{12} \sim \overline{17},$

$\overline{9} \sim \overline{0}, \overline{9} \sim \overline{1}, \overline{9} \sim \overline{3}, \overline{9} \sim \overline{5}, \overline{9} \sim \overline{7}, \overline{9} \sim \overline{11}, \overline{9} \sim \overline{13}, \overline{9} \sim \overline{15}, \overline{9} \sim \overline{17}$

olup buradan,

$$d_{\overline{1}} = d_{\overline{5}} = d_{\overline{7}} = d_{\overline{11}} = d_{\overline{13}} = d_{\overline{17}} = d_{\overline{0}} = 17, d_{\overline{2}} = d_{\overline{4}} = d_{\overline{8}} = d_{\overline{10}} = d_{\overline{14}} = d_{\overline{16}} = 14,$$

$$d_{\overline{3}} = d_{\overline{15}} = 11, d_{\overline{6}} = d_{\overline{12}} = 16, d_{\overline{9}} = 9$$

bulunur. Bu bilgiler doğrultusunda  $P(Z_{18})$  power grafinin hiper-Zagreb indeksi;

$$\begin{aligned} HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &= \sum_{uv \in E(Z_{2 \cdot 3^2})} (d_u + d_v)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((d_0 + d_1)^2 + (d_0 + d_2)^2 + (d_0 + d_3)^2 + (d_0 + d_4)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_0 + d_5)^2 + (d_0 + d_6)^2 + (d_0 + d_7)^2 + (d_0 + d_8)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_0 + d_9)^2 + (d_0 + d_{10})^2 + (d_0 + d_{11})^2 + (d_0 + d_{12})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_0 + d_{13})^2 + (d_0 + d_{14})^2 + (d_0 + d_{15})^2 + (d_0 + d_{16})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_0 + d_{17})^2 + (d_1 + d_2)^2 + (d_1 + d_3)^2 + (d_1 + d_4)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_1 + d_5)^2 + (d_1 + d_6)^2 + (d_1 + d_7)^2 + (d_1 + d_8)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_1 + d_9)^2 + (d_1 + d_{10})^2 + (d_1 + d_{11})^2 + (d_1 + d_{12})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_1 + d_{13})^2 + (d_1 + d_{14})^2 + (d_1 + d_{15})^2 + (d_1 + d_{16})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_1 + d_{17})^2 + (d_2 + d_4)^2 + (d_2 + d_5)^2 + (d_2 + d_6)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_2 + d_7)^2 + (d_2 + d_8)^2 + (d_2 + d_{10})^2 + (d_2 + d_{11})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot ((d_2 + d_{12})^2 + (d_2 + d_{13})^2 + (d_2 + d_{14})^2 + (d_2 + d_{16})^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_2 + d_{17})^2 + (d_3 + d_5)^2 + (d_3 + d_6)^2 + (d_3 + d_7)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_3 + d_9)^2 + (d_3 + d_{11})^2 + (d_3 + d_{12})^2 + (d_3 + d_{13})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_3 + d_{15})^2 + (d_3 + d_{17})^2 + (d_4 + d_5)^2 + (d_4 + d_6)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_4 + d_7)^2 + (d_4 + d_8)^2 + (d_4 + d_{10})^2 + (d_4 + d_{11})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_4 + d_{12})^2 + (d_4 + d_{13})^2 + (d_4 + d_{14})^2 + (d_4 + d_{16})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_4 + d_{17})^2 + (d_5 + d_6)^2 + (d_5 + d_7)^2 + (d_5 + d_8)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_5 + d_9)^2 + (d_5 + d_{10})^2 + (d_5 + d_{11})^2 + (d_5 + d_{12})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_5 + d_{13})^2 + (d_5 + d_{14})^2 + (d_5 + d_{15})^2 + (d_5 + d_{16})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_5 + d_{17})^2 + (d_6 + d_7)^2 + (d_6 + d_8)^2 + (d_6 + d_{10})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_6 + d_{11})^2 + (d_6 + d_{12})^2 + (d_6 + d_{13})^2 + (d_6 + d_{14})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_6 + d_{15})^2 + (d_6 + d_{16})^2 + (d_6 + d_{17})^2 + (d_7 + d_8)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_7 + d_9)^2 + (d_7 + d_{10})^2 + (d_7 + d_{11})^2 + (d_7 + d_{12})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_7 + d_{13})^2 + (d_7 + d_{14})^2 + (d_7 + d_{15})^2 + (d_7 + d_{16})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_7 + d_{17})^2 + (d_8 + d_{10})^2 + (d_8 + d_{11})^2 + (d_8 + d_{12})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_8 + d_{13})^2 + (d_8 + d_{14})^2 + (d_8 + d_{16})^2 + (d_8 + d_{17})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_9 + d_{13})^2 + (d_9 + d_{15})^2 + (d_9 + d_{17})^2 + (d_{10} + d_{11})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{10} + d_{12})^2 + (d_{10} + d_{13})^2 + (d_{10} + d_{14})^2 + (d_{10} + d_{16})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{10} + d_{17})^2 + (d_{11} + d_{12})^2 + (d_{11} + d_{13})^2 + (d_{11} + d_{14})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{11} + d_{15})^2 + (d_{11} + d_{16})^2 + (d_{11} \cdot d_{17})^2 + (d_{12} \cdot d_{13})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{12} \cdot d_{14})^2 + (d_{12} \cdot d_{15})^2 + (d_{12} \cdot d_{16})^2 + (d_{12} \cdot d_{17})^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{13} \cdot d_{14})^2 + (d_{13} \cdot d_{15})^2 + (d_{13} \cdot d_{16})^2 + (d_{13} \cdot d_{17})^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((d_{14} \cdot d_{16})^2 + (d_{14} \cdot d_{17})^2 + (d_{15} \cdot d_{17})^2 + (d_{16} \cdot d_{17})^2)
\end{aligned}$$

burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &= \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 16)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 9)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 16)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 9)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 16)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 17)^2 + (11 + 17)^2 + (11 + 14)^2 + (11 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((11 + 9)^2 + (11 + 17)^2 + (11 + 16)^2 + (11 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((11 + 11)^2 + (11 + 17)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 16)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 17)^2 + (17 + 16)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 14)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 9)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (16 + 17)^2 + (16 + 14)^2 + (16 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((16 + 17)^2 + (16 + 16)^2 + (16 + 17)^2 + (16 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((16 + 11)^2 + (16 + 14)^2 + (16 + 17)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 9)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 17)^2 + (17 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 16)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((9 + 17)^2 + (9 + 11)^2 + (9 + 17)^2 + (14 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 16)^2 + (14 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((14 + 14)^2 + (14 + 17)^2 + (17 + 16)^2 + (17 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((16 + 17)^2 + (16 + 14)^2 + (16 + 11)^2 + (16 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((16 + 17)^2 + (17 + 14)^2 + (17 + 11)^2 + (17 + 14)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot ((17 + 17)^2 + (14 + 14)^2 + (14 + 17)^2 + (11 + 17)^2) \\
& + \frac{1}{2} \cdot (14 + 17)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &= \frac{1}{2} \cdot (21 \cdot 34^2 + 42 \cdot 31^2 + 14 \cdot 28^2 + 14 \cdot 33^2 + 6 \cdot 26^2 + 15 \cdot 28^2) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 30^2 + 25^2 + 2 \cdot 20^2 + 3 \cdot 27^2 + 22^2 + 32^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &= \frac{1}{2} \cdot (24276 + 40362 + 10976 + 15246 + 4056 + 11760 + 10800) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot (625 + 800 + 2187 + 484 + 1024) \\
&= \frac{122596}{2} = 61298
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 4.11.2'de  $p = 2, q = 3, k = 1, r = 2$  alınırsa;

$$HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) \leq 5 \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-i} \cdot 3^r) \cdot d_{2^i}^3)}{4} + 5 \cdot \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \frac{(\phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^3)}{4}$$

ve

$$\begin{aligned}
HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) &\geq \sum_{i=0}^1 \left( \phi(2^{1-i} \cdot 2^2) \cdot \left( d_{2^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \left( \phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot \left( d_{2^j \cdot 3^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Gerçekten,

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-i} \cdot 3^2) \cdot d_{2^i}^3)}{4} \\ + 5 \cdot \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \frac{(\phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^3)}{4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{(\phi(18) \cdot d_1^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(\phi(9) \cdot d_2^3)}{4} \\ + 5 \cdot \frac{(\phi(6) \cdot d_3^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(\phi(2) \cdot d_9^3)}{4} \\ + 5 \cdot \frac{(\phi(3) \cdot d_6^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(\phi(1) \cdot d_{18=0}^3)}{4} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{(6 \cdot 17^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(6 \cdot 14^3)}{4} \\ + 5 \cdot \frac{(2 \cdot 11^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(1 \cdot 9^3)}{4} \\ + 5 \cdot \frac{(2 \cdot 16^3)}{4} + 5 \cdot \frac{(1 \cdot 17^3)}{4} \end{array} \right\}$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{(\phi(2^{1-i} \cdot 3^2) \cdot d_{2^i}^3)}{4} \\ + 5 \cdot \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \frac{(\phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot d_{2^j \cdot 3^i}^3)}{4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{29478}{4} + 5 \cdot \frac{16464}{4} + 5 \cdot \frac{2662}{4} \\ + 5 \cdot \frac{729}{4} + 5 \cdot \frac{8192}{4} + 5 \cdot \frac{4913}{4} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{29478}{4} + 5 \cdot \frac{16464}{4} + 5 \cdot \frac{2662}{4} \\ + 5 \cdot \frac{729}{4} + 5 \cdot \frac{8192}{4} + 5 \cdot \frac{4913}{4} \end{array} \right\}$$

$$= 78047,5$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$d_{\bar{1}} = d_{\bar{5}} = d_{\bar{7}} = d_{\bar{11}} = d_{\bar{13}} = d_{\bar{17}} = d_{\bar{0}} = 17, d_{\bar{2}} = d_{\bar{4}} = d_{\bar{8}} = d_{\bar{10}} = d_{\bar{14}} = d_{\bar{16}} = 14,$$

$$d_{\bar{3}} = d_{\bar{15}} = 11, d_{\bar{6}} = d_{\bar{12}} = 16, d_{\bar{9}} = 9$$

$$\delta(P(Z_{18})) = \min\{d_{\bar{0}}, d_{\bar{1}}, d_{\bar{2}}, d_{\bar{3}}, d_{\bar{4}}, d_{\bar{5}}, d_{\bar{6}}, d_{\bar{7}}, d_{\bar{8}}, d_{\bar{9}}, d_{\bar{10}}, d_{\bar{11}}, d_{\bar{12}}, d_{\bar{13}}, d_{\bar{14}}, d_{\bar{15}}, d_{\bar{16}}, d_{\bar{17}}\}$$

$$= \min\{17, 17, 14, 11, 14, 17, 16, 17, 14, 9, 14, 17, 16, 17, 14, 11, 14, 17\} = 9$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^1 \left( \phi(2^{1-i} \cdot 2^2) \cdot \left( d_{2^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^2 \left( \phi(2^{1-j} \cdot 3^{2-i}) \cdot \left( d_{2^j \cdot 3^i}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) \right)$$

$$= \phi(8) \cdot \left( d_{\bar{1}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) + \phi(4) \cdot \left( d_{\bar{2}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) + \phi(6) \cdot \left( d_{\bar{3}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right)$$

$$+ \phi(2) \cdot \left( d_{\bar{9}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) + \phi(3) \cdot \left( d_{\bar{6}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right) + \phi(1) \cdot \left( d_{\bar{18}}^3 + \frac{\delta^3}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot \left(17^3 + \frac{9^3}{4}\right) + 2 \cdot \left(14^3 + \frac{9^3}{4}\right) + 2 \cdot \left(11^3 + \frac{9^3}{4}\right) + \left(9^3 + \frac{9^3}{4}\right) \\
&+ 2 \cdot \left(16^3 + \frac{9^3}{4}\right) + \left(17^3 + \frac{9^3}{4}\right) \\
&= 19652 + 729 + 5488 + 729 + 2662 + 729 + \frac{729}{4} + 8192 + \frac{1458}{4} + 4913 + \frac{729}{4} \\
&= 43852
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$43852 \leq HM(P(Z_{2 \cdot 3^2})) = 61298 \leq 78047,5$$

dir.

#### 4.11.3. Teorem

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$ ,  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun. O halde,

$$\delta^3 \cdot n + 2 \cdot m \cdot \delta^2 \leq HM(P(Z_n)) \leq n \cdot (n-1)^3 + \frac{m \cdot (\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot \delta}$$

dir. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere  $n = p^k$  olmasıdır.

*İspat*

$n \in Z^+$  olmak üzere  $P(Z_n)$  power grafi  $n$  mertebeli ve  $m$  kenarlı bir power graf olsun.

Teorem 4.10.3'ten

$$\delta^3 \cdot n \leq F(P(Z_n)) \leq n \cdot (n-1)^3$$

ve Teorem 4.4.8'den

$$\frac{m \cdot \delta^2}{2} \leq SK_1(P(Z_n)) \leq \frac{m \cdot (\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{8 \cdot \delta}$$

olduklarını biliyoruz. Bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} \delta^3 \cdot n + 2 \cdot m \cdot \delta^2 &\leq HM(P(Z_n)) = F(Z_n) + 4 \cdot SK_1(Z_n) \\ &\leq n \cdot (n-1)^3 + \frac{m \cdot (\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot \delta} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin olması için  $p$  asal sayı ve  $k \in Z^+$  olmak üzere

$$n \cdot \delta^3 + m \cdot 2 \cdot \delta^2 = n \cdot (n-1)^3 + m \cdot \frac{(\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot \delta}$$

olacağından burada eşitliğin sağlanması için,

$$\delta^3 = (n-1)^3$$

ve

$$2 \cdot \delta^2 = \frac{(\delta + (n-1))^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot \delta}$$

olmalıdır. Burada düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} 4 \cdot \delta^3 - (n-1) \cdot \delta^2 - 2 \cdot (n-1)^2 \cdot \delta - (n-1)^3 &= (\delta - (n-1)) \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot \delta^2 \\ +3 \cdot \delta \cdot (n-1) \\ +(n-1)^2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu denklemin tek bir reel kökü vardır ve bu reel kök,

$$\delta = n - 1$$

dir. Dolayısıyla

$$\delta = \Delta = n - 1$$

olduğunda yukarıda ki denklemde eşitlik durumu söz konusu olur. O halde bu ancak “ $\forall u \in V(P(Z_n))$  için  $d_u = n - 1$ ” olmasıyla yani “ $k \in Z^+$  için  $P(Z_n)$  power grafinin  $n = p^k$  mertebeden” olması ile mümkündür. Sonuç olarak burada  $P(Z_{p^k})$  power grafi kullanıldığında eşitlik durumu söz konusu olur ve böylece ispat tamamlanır.





## 5. SONUÇ

Bu çalışmamızda  $P(Z_n)$  power graflarının,  $p$  ile  $q$  farklı asallar  $k$  ile  $r$  negatif olmayan tamsayılar ve  $n$  power grafın köşe (nokta) sayısı olmak üzere  $n = p^k$ ,  $n = p \cdot q$  ve  $n = p^k \cdot q^r$  için Wiener, kenar-Wiener, hiper-Wiener, Harary,  $SK$ ,  $SK_1$ ,  $SK_2$ , birinci Zagreb, ikinci Zagreb, genelleştirilmiş birinci Zagreb, Randic, genelleştirilmiş Randic, Furtula ve hiper-Zagreb indeksleri ile ilgili özgün teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Genel bir  $n$  pozitif tamsayısı için daha önceden bahsedilen power grafların bazı indeksleri ile ilgili bulduğumuz eşitsizliklerin eşit olabilmesi için  $P(Z_n)$  power graflarının tam graf olması ile yani  $n = p^k$  ile mümkün olacağını gösteren teoremler elde edilmiştir.





## KAYNAKLAR

1. Kelarev, A. V., Quinn, S. J. (2000). A combinatorial property and power graphs of groups. *Contributions to General Algebra*, 12(58), 229-235.
2. Chakrabarty, I., Shamik, G., Sen, M. K. (2009, June). Undirected power graph of semigroup. *Semigroup Forum*, 78, 410-426.
3. Walikar, H.B., Shigehalli, V. S., Ramane, H. S. (2004). Bounds on the Wiener index of a graph. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50, 117-132.
4. Dobrynin, A.A., Entringer, R., Gutman, I. (2001). Wiener index of trees: Theory and applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, 66, 211-249.
5. Gutman, I., Yeh, Y. N., Lee, S. L., Luo, Y. L. (1993). Some recent results in the theory of the Wiener number. *Indian Journal of Chemistry*, 32A, 651-661.
6. Wu, B. (2010). Wiener index of line graphs. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64(3), 699-706.
7. Gutman, I., Estrada, E. (1996). Topological indices based on the line graph of the molecular graph. *Journal of Chemical Information & Computer Sciences*, 36(3), 541-543.
8. Gutman, I., Popović, L., Mishra, B. K., Kuanar, M., Estrada, E., Guevara, N. (1997). Application of linegraphs in physicalchemistry. Predicting the surface tensions of alkanes. *Journal of the Serbian Chemical Society*, 62(3), 1025-1029.
9. Aşkin, V., Büyükköse, Ş. (2021). The wiener index of an undirected power graphs. *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, 11(1), 21-29.
10. Gutman, I. (1997). A property of the Wiener number and its modifications. *Indian Journal of Chemistry*, 36A, 128-132.
11. Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z. (1993). On the Harary index for the characterization of chemical graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 235-250.
12. Ivanciuc, O., Balaban, T. S., Balaban, A. T. (1993). Reciprocal distance matrix, related local vertex invariant and topological indices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 309-318.
13. Shegahalli, V. S., Kanabur, R. (2016). Computation of new degree-based topological indices of graphene. *Journal of Mathematics*, 2016(1), 1-6.
14. Aşkin, V. (2022). Yönlendirilmemiş power graflarda hyper-Wiener, Harary,  $SK$ ,  $SK_1$  ve  $SK_2$  indeksleri. *Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 3(2), 146-155.
15. Cvetkovski, Z. (2012). *Inequality theorems, techniques and selected problems* (First edition). Berlin: Springer - Verlag, 29-30, 49-51.

16. Diaz, J. B., Metcalf, F.T. (1963). Stronger forms of a class of inequalities of G. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69(3), 415-418.
17. Polya, G., Szego, G. (1945). Inequalities for the capacity of a condenser. *American Journal of Mathematics*, 67(1), 1-32.
18. Vasudev, C. (2006). *Graph theory with applications*.(First edition). New Delhi: Age International Publishers, 4-5, 21, 56-57.
19. Diestel, R. (2000). *Graph theory*. (Electronic edition). New York: Springer -Verlag, 2-5, 9, 14, 25.
20. Li, X., Zhao, H. (2004). Trees with the first smallest and largest generalized topological indices. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50, 57-62.
21. Li, X., Zheng, J. (2005). A unified approach to the extremal trees for different indices. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 54, 195-208.
22. Randić, M. (1975). On characterization of molecular branching. *Journal of the American Chemical Society*, 97, 6609–6615.
23. Hungerford, T. W. (2003). *Algebra (graduate texts in mathematics)* (Twelfth edition). New York: Springer-Verlag, 24, 31, 35, 50-51.
24. Dankelmann, P., Gutman, I., Mukwambia, S., Swart, H. C. (2009). The edge-Wiener index of a graph. *Discrete Mathematics*, 309, 3452-3457.
25. Bollobas, B., Erdős, P. (1998). Graphs of extremal weights. *Ars Combinatoria*, 50, 225-233.
26. Ghorbani, M., Hosseinzadeh, M. A. (2012). A new version of zagreb indices. *Filomat*, 26(1), 93-100.
27. Idrees, N., Saif, M. J., Rauf, A., Mustafa, S. (2017). First and second Zagreb eccentricity indices of thorny graphs. *Symmetry*, 9(1), 1–9.
28. Fraleigh, J. (1973). *A first course in abstract algebra*. London: Addison-Wesley, 59, 185-187.
29. Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag, 35-36.
30. Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan, 53-56.
31. Graovac, A., Pisanski, T. (1991). The Wiener index of a graph. *Journal of Mathematical Chemistry*, 8(1), 53-62.
32. Kelarev, A. V., Quinn, S. J., Smolikova, R. (2001). Power graphs and semigroups of matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 63(2), 341-344.

33. Kelarev, A. V., Quinn, S. J. (2002). Directed graph and combinatorial properties of Semigroups. *Journal of Algebra*, 251(1), 16-26.
34. Kelarev, A. V., Quinn, S. J. (2004). A combinatorial property and power graphs of semigroups. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 45(1), 1-7.
35. Cameron, P. J. (2010). The power graph of a finite group, II. *Journal of Group Theory*, 13, 779-783.
36. Cameron, P. J., Ghosh, S. (2011). The power graph of a finite group. *Discrete Mathematics*, 311(3), 1220-1222.
37. Harary, F. (1969). *Graph theory*. Massachusetts: Addison Wesley, 43-46.
38. Kulli, V. R. (2012). *College graph theory*. (First edition). Gulbarga: Vishwa International Publications, 45.
39. Gutman, I., Trinajstić, N. (1972). Graph Theory and molecular orbitals, Total  $\pi$ -electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*, 17(4), 535-538.
40. Shirdel, G. H., Rezapour, H., Sayadi, A. M. (2013). The hyper-Zagreb index of graph operations. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 4(2), 213-220.
41. Furtula, B., Gutman, I. (2015). A forgotten topological index. *Journal of Mathematical Chemistry*, 53(4), 1184-1190.
42. Chaluvvaraju, B., Boregowda, H. S., Cangul, I. N. (2021, January-March). Some Inequalities for the First General Zagreb Index of Graphs and Line Graphs. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 91(1), 79-88.
43. Xavier, B. A. G., Suresh, E., Gutman, I. (2014). Counting relations for general Zagreb indices. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 38(1), 95-103.
44. Aşkin, V. (2023). The Wiener, hyper- Wiener, Harary and SK indices of the  $P(Z_{p^k \cdot q^r})$  power graph. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 29(4), 794-803.





*Gazili olmak ayrıcalıktır*