



**R⁺’DA MUTLAK CESÁRO VE RIESZ TOPLANABİLİR
İNTEGRALLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET NERGİZ

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
NİSAN - 2024**

**R⁺'DA MUTLAK CESÁRO VE RIESZ TOPLANABİLİR
İNTEGRALLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet NERGİZ
ORCID ID: 0009-0001-5098-9297

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hatice Nedret ÖZGEN
ORCID ID: 0000-0002-0774-6812

MERSİN
NİSAN - 2024

ÖZET

\mathbb{R}^+ 'DA MUTLAK CESÀRO VE RIESZ TOPLANABİLİR İNTEGRALLER

Bu tez kapsamında düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilirliği için yeterli şartları içeren bazı teoremlerin verilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca iki toplanabilme metodunun denkliği için gerek ve yeter şartların bulunması amaçlanmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde Toplanabilme teorisi hakkında bilgi verilip düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilirliği için yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde bu tez konusuyla ilgili geçmişten günümüze kadar yapılan araştırmalara veya çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde gerekli tanım, gösterimler ve sonraki bölümlerde kullanılacak bazı teoremlere ve notlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde toplanabilme çarpanlı düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilir olması için yeterli şartları içeren teoremler verilmiştir. Son bölümde ise önceki bölümde verilen teoremlerden faydalanarak düzensiz integrallerin farklı özel metotlarla toplanabilirliğinin incelenebileceği ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzensiz integraller, Cesàro ortalaması, Riesz ortalaması.

Danışman: Prof. Dr. Hatice Nedret ÖZGEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

ABSOLUTE CESÀRO AND RIESZ SUMMABLE INTEGRALS IN \mathbb{R}^+

Within the scope of this thesis, it is aimed to give some theorems containing sufficient conditions for the Cesàro and Riesz summability of improper integrals. In addition, it is aimed to find necessary and sufficient conditions for the equivalence of two summability methods. The thesis consists of five chapters.

In the first chapter, information about the theory of summability is given and studies on Cesàro and Riesz summability of improper integrals are mentioned. In the second chapter, research on this thesis topic from past to present is included. In the third chapter, the necessary definitions, notations and some theorems and notes that will be used in the following chapters are included.

In the fourth chapter, theorems containing sufficient conditions for improper integrals with summability factors to be Cesàro and Riesz summable are given. In the last section, it is stated that the summability of improper integrals can be examined with different special methods by using the theorems given in the previous section.

Keywords: Improper integrals, Cesàro mean, Riesz mean.

Advisor: Prof. Dr. Hatice Nedret ÖZGEN, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşıp her konuda destekleyen ve akademik hayatımda yüksek enerjisi ile düşüncelerimi dinleyerek motivasyonumu arttıran değerli danışmanım Prof. Dr. Hatice Nedret ÖZGEN'e çok teşekkür ederim.

Tez jüri üyesi olarak davetimizi kabul eden ve sundukları görüşlerle akademik hayatıma katkı sağlayan Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŐ ve Doç. Dr. Fatma Berna BENLİ'ye çok teşekkür ederim.

Bu günlere ulaşmamı sağlayan ve daima desteklerini derinden hissettiğim aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Tanım ve Gösterimler	5
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	13
4.1. İntegrallerin Mutlak Cesàro ve Riesz İntegrallenebilirliği İçin Teoremler	13
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	37

1. GİRİŞ

Matematikte ve özellikle uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan Toplanabilme teorisinin tarihi oldukça eskiye dayanır. 17. Yüzyılda ıraksak serileri sistematik olarak kullanan ilk matematikçiler Newton ve Leibniz olmuştur. Daha sonra Bernoulli ve Euler de bu konuda çalışmalar yapmıştır. Ancak, modern toplanabilme teoremleri ve kavramları genellikle 19. yüzyılda, reel analizin gelişimiyle daha belirgin hale gelmiştir.

İraksak seriler belirli ıraksak seri ve belirsiz ıraksak seri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Verilen bir $\sum a_n$ serisi için, $\sum a_n = \infty$ veya $\sum a_n = -\infty$ şeklinde ifade edilen seriler belirli ıraksak seriler, ifade edilemeyen seriler ise belirsiz ıraksak seriler olarak adlandırılır. Belirsiz ıraksak serilerde, serinin kısmi toplamlar dizisinin birden fazla yığılma noktası olur. Bu noktada, Toplanabilme teorisinin amacı, belirsiz ıraksak serilere en iyi değeri karşılık getirmektir. Şimdi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

şeklindeki Grandi serisini göz önüne alalım. Bu serinin kısmi toplamlar dizisini iki farklı durumda incelediğimizde 1 ve 0 buluruz. Bu durumda, kısmi toplamlar dizisinin iki farklı yığılma noktası olduğundan Grandi serisi, belirsiz ıraksak bir seridir. Fakat serinin kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalamasını alarak oluşturulan Cesàro ortalaması $1/2$ değerine yakınsaktır. Yani Cesàro toplanabilme metodu ıraksak bir diziyi yakınsak bir diziye dönüştürmüştür.

Toplanabilme teorisinin temelleri esasında ıraksak seriler kullanılarak atılmış olsa da benzer metodlar ıraksak integraller ile de tanımlanabilir. Örnek olarak L sonlu bir sayı olmak üzere, herhangi bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için Cesàro toplanabilme metodu,

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \rightarrow L$$

koşulu ile tanımlı iken, $s(x) = \int_0^x f(t)dt$ integrali için Cesàro toplanabilme metodu,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)dt \rightarrow L$$

koşulu ile tanımlıdır. Buradan seriler ile integraller birbirine paralellik gösterir.

Genel olarak bu tezde düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilirliği için yeterli şartlar altında bazı teoremlerin verilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca iki toplanabilme metodunun denkliği için gerek ve yeter şartları bulmak amaçlanmıştır.

Tezde ele alınan düzensiz integrallerin bir toplanabilme metodu ile toplanabilirliği, klasik toplanabilirlikten farklıdır. Fonksiyonlar üzerine ek koşullar konulmuştur. Literatürde bu tarz problemlerin farklı toplanabilirliği için yeter koşulları içeren durumlarının incelenmesi hala devam etmektedir. Bundan dolayı ele alınan problem güncelliğini sürdürmektedir.



2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Toplanabilme teorisi alanındaki ilk çalışma Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber (1897) tarafından Abel metodu için yapılmıştır ve sonraki çalışmalarda (Hardy, 1910; Littlewood, 1911) yakınsaklığın elde edilmesini sağlayacak daha zayıf koşullar bulmak amaçlanmıştır. Karamata (1930) da bir serideki terimleri polinom yaklaşımları yardımıyla inceleyerek Littlewood'un ortaya koyduğu Tauber tipi teoremler için daha kolay bir çözüm yolu elde etmiştir.

Serilerdeki yakınsaklık teorisi ise, ilk defa 1821 yılında Cauchy tarafından yazılan "Algebra Analysis" isimli kitapta ortaya çıkmıştır. Toplanabilme teorisi özellikle ıraksak serilere uygulanmıştır. Bu serilere karşılık gelen en yakın değeri bulmak için toplanabilme metotlarına ihtiyaç duyulmuş ve çeşitli toplanabilme metotları geliştirilmiştir. Yüzyılı aşkın bir süredir çalışma yapılan Toplanabilme teorisi; Bor (1985; 2020; 2021; 2023), Bor ve Thorpe (1987; 1992) ve Özgen (2023a; 2023b) gibi birçok araştırmacı ile ilerlemiştir.

İntegraller ile ilgili olarak, Schmidt (1924), Hardy (1949) tarafından reel sayı dizileri için verilen yavaş azalanlık kavramının Cesàro toplanabilir integraller için Tauber koşulu olduğunu göstermiştir. Ayrıca reel sayı dizileri için benzer koşullar Landau (1910) tarafından verilmiştir. Sonra Boicun (1967), Lal (1974), Lal ve Ram (1974; 1975), Lal ve Singh (1979; 1980), gibi birçok bilim insanı çalışmalar yapmıştır. Móricz (1994) tarafından reel sayı dizilerinin $(C, 1)$ toplanabilir olması durumunda belli Tauber tipi koşullar verilmiş, daha sonra Móricz ve Stadtmüller (2001) tarafından ağırlıklı ortalamalar metoduyla toplanabilir diziler için Tauber tipi koşullar verilmiştir. Móricz (2004) tarafından R^+ da ağırlıklı ortalamalar metoduyla toplanabilir integraller için gerek ve yeter Tauber tipi koşullar verilmiştir. Son zamanlarda Çanak ve Totur (201; 2012) integrallerin Cesàro toplanabilirliği için klasik Tauber şartlarını içeren birçok çalışma yapmıştır. Daha sonra, Totur ve Okur (2015) ağırlıklı diziye uygulanan belirli koşullar altında integrallerin Riesz toplanabilmesi için Landau-tarzı ve Schmidt-tarzı Tauber tipi teoremlerin alternatif ispatlarını vermişlerdir.

Son yıllarda, integrallerin toplanabilme metodları üzerine bir ilgi vardır. Özgen (2016; 2017; 2018a; 2018b) çalışmasında düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilirliğini tanımlamıştır. Bu tanımlar ışığında Sonker ve Munjal (2019) ve Mishra vd. (2020) Cesàro toplanabilirlik, Padhy vd. (2019) ve Parto vd. (2020) Riesz toplanabilirlik ile ilgili bilinen bazı teoremleri genelleştirmişlerdir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tanım ve Gösterimler

Tanım 3.1.1. f , \mathbb{R}^+ 'da sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$s(x) = \int_0^x f(t) dt$$

şeklinde tanımlı olsun. $s(x)$ fonksiyonunun Cesàro ortalaması,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer sonlu bir L sayısı için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = L$$

ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali L değerine Cesàro toplanabilir veya $(C, 1)$ yakınsaktır denir (Flett, 1957).

Not 3.1.1. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = L \quad (3.2)$$

limiti sağlanıyorsa, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = L$ limiti de sağlanır. Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani Cesàro toplanabilir olup, yakınsak olmayan integraller de vardır. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Örnek 3.1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sin at dt, a > 0$

limiti mevcut değildir. Fakat $\frac{1}{a}$ değerine Cesàro toplanabilir. Gerçekten,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\int_0^t \sin as ds \right) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{a} (1 - \cos at) dt \\
 &= \frac{1}{ax} \left(x - \frac{\sin(ax)}{a} \right) \\
 &= \frac{1}{a} - \left(\frac{\sin(ax)}{a^2 x} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{\sin(ax)}{a^2 x} \right) = \frac{1}{a}$$

olur. Yani;

$$\int_0^{\infty} \sin at dt$$

integralinin $\frac{1}{a}$ 'ya Cesàro toplanabilir olduğu elde edilir.

Ayrıca, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integralinin Cesàro toplanabilirliği, b sabit olmak üzere, herhangi bir $(0, b)$ sonlu aralığında f fonksiyonunun aldığı değere bağlı değildir.

Örnek 3.1.2. $\int_1^{\infty} ((\cos(s-1) + s \sin(s-1))) ds$ integrali Cesàro toplanabilir değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x s(t) dt = \frac{1}{x-1} \int_1^x \left(\int_1^t (\cos(s-1) - s \sin(s-1)) ds \right) dt \\
 &= \frac{1}{x-1} \int_1^x (\cos(s-1) - s \sin(s-1)) ds \int_s^x dt \\
 &= \frac{1}{x-1} \int_1^x (x-s)(\cos(s-1) - s \sin(s-1)) ds \\
 &= \frac{1}{x-1} (1 - \cos(x-1)) + \frac{1}{x-1} (-(x-1) \cos 0) \\
 &\quad - \frac{1}{x-1} \int_1^x (x-2s) \cos(s-1) ds \\
 &= \frac{1}{x-1} (1 - \cos(x-1)) - 1 - \frac{1}{x-1} [-x \sin(x-1) + 2 \int_1^x \sin(s-1) ds]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x-1}(1 - \cos(x-1)) - 1 + \frac{x}{x-1} \sin(x-1) + 2 \frac{\cos(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1} \\
 &= \frac{\cos(x-1)}{x-1} + \frac{x \sin(x-1)}{x-1} - \frac{x}{x-1}
 \end{aligned}$$

limiti var olmadığı için bu integralin Cesàro toplanabilir olmadığı elde edilir (Okur ve Totur, 2019).

Tanım 3.1.2 Eğer

$$\int_0^{\infty} |\sigma'(x)| dx \tag{3.3}$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali $|C, 1|$ toplanabilirdir denir.

Tanım 3.1.3. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\int_0^{\infty} x^{k-1} |\sigma'(x)|^k dx \tag{3.4}$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali $|C, 1|_k$ toplanabilirdir denir (Özgen, 2016).

Özel olarak, (3.4)'de $k = 1$ alırsak, $|C, 1|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

Teorem 3.1.1. $s(x) = \int_0^x f(t) dt$ ve $v(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$ olmak üzere

$$s(x) - \sigma(x) = v(x)$$

eşitliğine $s(x)$ fonksiyonu için Kronocker eşitliği denir (Çanak ve Totur, 2011).

Burada, v, s fonksiyonunun üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır.

İspat: $s(x)$ yerine eşiti olan $\frac{1}{x} (\int_0^x t s(t) dt)'$ ifadesi yazılırsa

$$s(x) - \sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (t s(t))' dt - \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \left(\int_0^x s(t) + t s'(t) dt \right) - \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x t s'(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = v(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. $s(x) = \int_0^x f(t) dt$ olmak üzere

$$x \sigma'(x) = v(x)$$

dir.

İspat: $\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sigma'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x s(t) dt + \frac{1}{x} s(x) \\
&= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt + s(x) \right) \\
&= \frac{1}{x} (s(x) - \sigma(x)) = \frac{1}{x} v(x)
\end{aligned}$$

Yani

$$x \sigma'(x) = v(x)$$

dir.

Not 3.1.2. Teorem 3.1.2 kullanılarak, (3.4) şartı

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} |v(x)|^k dx \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.4. p ,

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt, \quad p(x) \neq 0, p(0) = 0$$

olacak şekilde \mathbb{R}^+ 'da azalmayan, reel değerli bir fonksiyon olsun. s fonksiyonunun Riesz ortalaması

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_p(x) = s$$

ise,

$$\int_0^{\infty} f(t)dt$$

integrali s değerine (\bar{N}, p) toplanabilirdir denir.

Tanım 3.1.5. Eğer

$$\int_0^{\infty} |\sigma_p'(x)| dx$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t)dt$$

integrali s değerine $|\bar{N}, p|$ toplanabilirdir denir.

Tanım 3.1.6. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_p'(x)|^k dx \quad (3.7)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t)dt$$

integrali s değerine $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilirdir denir (Özgen, 2017).

Özel olarak, (3.7)'de $k = 1$ alırsak, $|\bar{N}, p|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

Not 3.1.3. Özel olarak, her x değeri için $p(x) = 1$ alınırsa, düzensiz integrallerin Riesz toplanabilirliği, Cesàro toplanabilmeye indirgenir.

Şimdi, tez boyunca sık kullanılan bir sembolden bahsedelim.

Tanım 3.1.7.

$$f(x) = O(g(x))$$

gösterimi $\frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonunun \mathbb{R}^+ 'da sınırlı olması anlamına gelir.

Tanım 3.1.8.

$$v_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x P(u)f(u)du \quad (3.8)$$

olmak üzere

$$s(x) - \sigma_p(x) = v_p(x) \quad (3.9)$$

ifadesine ağırlıklı Kronecker eşitliği denir (Özgen, 2017).

Burada, v_p , s fonksiyonunun ağırlıklı üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.3.

$$\sigma_p'(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x) \quad (3.10)$$

İspat: $\sigma_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt$ olduğundan,

$$\sigma_p'(x) = -\frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt + \frac{1}{P(x)} p(x)s(x)$$

$$= \frac{p(x)}{P(x)} \left(-\frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt + s(x) \right)$$

$$= \frac{p(x)}{P(x)} (s(x) - \sigma_p(x)) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$$

Yani

$$\sigma_p'(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$$

dir.

Not 3.1.4. (3.10) şartından, (3.9) şartı

$$s(x) = v_p(x) + \int_0^x \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u)du \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Not 3.1.5. (3.10) şartını kullanarak, Tanım 3.1.6 aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} \left(\frac{p(x)}{P(x)} \right)^k |v_p(x)|^k dx \quad (3.12)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali s değerine $[\bar{N}, p]_k$ toplanabilir denir (Özgen, 2017).

Tanım 3.1.9. A ve B iki toplanabilme metodu olsun. A integrallenebilen her fonksiyona aynı değere B integrallenebiliyorsa, A 'ya B 'yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, A metodu B metoduna denktir denir (Petersen, 1966).

Tanım 3.1.10. $\int_0^{\infty} f(t) dt$ integrali verilmiş olsun. Eğer

$$\int_0^{\infty} f(t) \lambda(t) dt$$

integrali bir B toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, λ fonksiyonuna

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integralinin B metodu için bir toplanabilme çarpanı denir (Kishore, 1970).

Tanım 3.1.11. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, f ve g , \mathbb{R}^+ 'da sürekli ve pozitif reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\int_0^x f(t)g(t) dt \leq \left(\int_0^x f^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^x g^q(t) dt \right)^{1/q}$$

dur (Maddox, 1970).

Tanım 3.1.12. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, f ve g , \mathbb{R}^+ da sürekli ve pozitif reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left(\int_0^x (f + g)^p(t) dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^x f^p(t) dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^x g^p(t) dt \right)^{1/p}$$

dir (Maddox, 1970).



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 İntegrallerin Mutlak Cesàro ve Riesz İntegrallenebilirliği İçin Teoremler

Bu bölümde toplanabilme çarpanlı düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz toplanabilir olması için yeterli şartları içeren teoremler verilecektir.

Teorem 4.1.1

γ ,

$$|\lambda(x)|\gamma(x) = O(1), \quad (4.1)$$

$$\int_0^x u |\lambda''(u)|\gamma(u) du = O(1), \quad (4.2)$$

$$\int_0^x \frac{|v(u)|^k}{u} du = O(\gamma(x)) \quad (4.3)$$

şartlarını sağlayan pozitif, azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $k \geq 1$ olmak üzere $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ integrali $[C, 1]_k$ toplanabilirdir (Özgen, 2016).

Teorem 4.1.1 ve aşağıda vereceğimiz veya tezin ilerleyen kısımlarındaki teoremlerin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.1.1. Teorem 4.1.1'in şartları altında

$$\int_0^\infty \gamma(t)|\lambda'(t)|dt \text{ integrali yakınsaktır,} \quad (4.4)$$

$$x \gamma(x)|\lambda'(x)| = O(1), x \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

şartları sağlanır (Özgen, 2016).

İspat: $\lambda'(t) = \int_0^t \lambda''(u)du$ olduğundan, (4.4)'den

$$\begin{aligned} \int_0^x \gamma(t)|\lambda'(t)|dt &= \int_0^x \gamma(t) \left| \int_0^t \lambda''(u)du \right| dt \\ &\leq \int_0^x \gamma(t) \int_0^t |\lambda''(u)| du dt \\ &\leq \int_0^x |\lambda''(u)| du \int_u^x \gamma(t) dt \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^x u \gamma(u) |\lambda''(u)| du = O(1), \quad x \rightarrow \infty$$

bulunur. Diğer taraftan, $x \gamma(x)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} x \gamma(x) |\lambda'(x)| &= x \gamma(x) \left| \int_0^x \lambda''(u) du \right| \\ &\leq x \gamma(x) \int_0^x |\lambda''(u)| du \\ &\leq \int_0^x u \gamma(u) |\lambda''(u)| du = O(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O halde ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.1'in ispatı: $\sigma, \int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ integralinin (C, l) ortalama fonksiyonunu gösterebiliriz. Bu durumda, tanımdan,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \int_0^t f(u)\lambda(u) du dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x f(u)\lambda(u) du \int_u^x dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x (x-u) f(u)\lambda(u) du \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right) f(u)\lambda(u) du \\ &= \int_0^x f(u)\lambda(u) du - \frac{1}{x} \int_0^x u f(u)\lambda(u) du \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Son ifadenin türevini alıp kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\lambda(u) du \\ &= \frac{1}{x^2} \lambda(x) x \int_0^x u f(u) du - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u)\lambda'(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda(x)v(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u)\lambda(u)du \\
&= \sigma_1(x) + \sigma_2(x)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

buluruz. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1,2 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle, λ sınırlı olduğundan, (4.1) şartından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{|\lambda(x)|^k |v(x)|^k}{x^k} dx \\
&= \int_0^m \frac{1}{x} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx \\
&\leq \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} |\lambda(x)| dx
\end{aligned}$$

dir. Kısmi integrasyon metodu uygulanırsa, (4.1), (4.3) ve (4.5) şartlarından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &\leq |\lambda(m)| \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} dx - \int_0^m |\lambda'(x)| dx \int_0^x \frac{|v(u)|^k}{u} du \\
&\leq |\lambda(m)| \gamma(m) - \int_0^m |\lambda'(x)| \gamma(x) dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur. $r=2$ için, $k>1$ için $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ olmak üzere, Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{dx}{x^{2k}} \left| \int_0^x t \lambda'(t) v(t) dt \right|^k \\
&\leq \int_0^m \frac{dx}{x^{k+1}} \left(\int_0^x t |\lambda'(t)| |v(t)| dt \right)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^m \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^x |\lambda'(t)|^k t^k |v(t)|^k dt \right) \left(\frac{1}{x} \int_0^x dt \right)^{k-1} \\
 &= \int_0^m |x \lambda'(x)|^{k-1} |x \lambda'(x)| |v(x)|^k dx \int_x^m \frac{dt}{t^2} \\
 &= O(1) \int_0^m |x \lambda'(x)| |v(x)|^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{m} \right) dx \\
 &= O(1) \int_0^m |x \lambda'(x)| \frac{|v(x)|^k}{x} dx \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx &= O(1) m |\lambda'(m)| \int_0^m \frac{|v(t)|^k}{t} dt - \int_0^m (t |\lambda'(t)|)' \int_0^t \frac{|v(u)|^k}{u} du dt \\
 &= O(1) m \lambda'(m) \gamma(m) - \int_0^x (t |\lambda'(t)|)' \gamma(t) dt \\
 &= O(1) m \lambda'(m) \gamma(m) - \int_0^x |\lambda'(t)| \gamma(t) dt - \int_0^x t \lambda''(t) \gamma(t) dt \\
 &= O(1), \quad m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonker ve Munjal (2019), Teorem 4.1.1 in daha zayıf şartlar altında olabileceğini ispatlamıştır.

Teorem 4.1.2. γ , azalmayan bir fonksiyon ve β ve λ , (4.1), (4.3) ve

$$|\lambda'(x)| \leq \beta(x), \tag{4.9}$$

$$\beta(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \tag{4.10}$$

$$\int_0^\infty u |\beta'(u)| \gamma(u) du < \infty \tag{4.11}$$

şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu durumda $k \geq 1$ olmak üzere $\int_0^\infty f(t) \lambda(t) dt$ integrali $[C, 1]_k$ toplanabilir.

Not 4.1.1.

$$\beta'(x) \ll |\lambda''(x)|$$

olduğundan,

$$\int_0^{\infty} x |\beta'(x)| \gamma(x) dx < \infty$$

şartı

$$\int_0^{\infty} x |\lambda''(x)| \gamma(x) dx < \infty$$

şartından daha zayıf bir şarttır.

İspat: $\sigma, \int_0^{\infty} f(t)\lambda(t)dt$ integralinin (C, l) ortalamasını gösterebiliriz. Yani

$$\sigma(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right) f(u)\lambda(u) du$$

dur. Her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\lambda(u) du \\ &= \frac{\lambda(x)v(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u)\lambda(u) du \end{aligned}$$

$$= \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$$

buluruz. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi devam edilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{|\lambda(x)|^k |v(x)|^k}{x^k} dx \\ &= \int_0^m \frac{1}{x} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx \\ &= O(1) \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} |\lambda(x)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= O(1)|\lambda(m)| \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} dx - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| \int_0^x \frac{|v(t)|^k}{t} dt dx \\
 &= O(1)|\lambda(m)|\gamma(m) - O(1) \int_0^m \beta(x)\gamma(x) dx \\
 &= O(1) - O(1) \int_0^\infty |\beta'(x)| dx \int_0^x \gamma(u) du \\
 &= O(1) - \int_0^\infty u \gamma(u) |\beta'(u)| du \\
 &= O(1), \quad m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

bulunur. (4.8) eşitliğindeki gibi işlemlere devam edilirse,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde ederiz. O halde $r = 1, 2$ için

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. p ,

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt, \quad p(x) \neq 0, \quad p(0) = 0, \quad (4.12)$$

$$P(x) = O(x p(x)) \quad (4.13)$$

şartlarını sağlayan reel değerli ve \mathbb{R}^+ da azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer γ da (4.1), (4.2) ve

$$\int_0^x \frac{p(t)}{P(t)} |v(t)|^k dt = O(\gamma(x)), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

şartlarını sağlıyor ise, bu durumda $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ integrali $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilir (Özgen, 2016).

İspat: $\sigma_p, \int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ integralinin (\bar{N}, p) ortalaması olsun. Bu durumda tanımdan,

$$\begin{aligned}\sigma_p(x) &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t) \int_0^t f(u)\lambda(u)du dt \\ &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x f(u)\lambda(u)du \int_u^x p(t)dt \\ &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x (P(x) - P(u)) f(u)\lambda(u)du \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{P(u)}{P(x)}\right) f(u)\lambda(u)du\end{aligned}$$

dur. σ_p fonksiyonunun türevi alınıp kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\sigma_p'(x) &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(u) f(u)\lambda(u)du \\ &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(u)\lambda(u)}{u} u f(u) du \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} \lambda(x)v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{(p(u)\lambda(u) + P(u)\lambda'(u))u - P(u)\lambda(u)}{u^2} u v(u)du \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} \lambda(x)v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x p(u)\lambda(u)v(u)du \\ &\quad - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(u) \lambda'(u) v(u)du + \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(u)\lambda(u)v(u)}{u} du \\ &= \sigma_{p,1}(x) + \sigma_{p,2}(x) + \sigma_{p,3}(x) + \sigma_{p,4}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1,2,3,4 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

λ sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,1}(x)|^k dx &= \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} \left(\frac{p(x)}{P(x)}\right)^k |\lambda(x)|^k |v(x)|^k dx \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |\lambda(x)| |v(x)|^k dx
 \end{aligned}$$

dir. Kısmi integrasyon metodu uygularsak, Lemma 4.1.1'den

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,1}(x)|^k dx &= O(1) |\lambda_m| \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v(x)|^k dx - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| dx \int_0^x \frac{p(t)}{P(t)} |\lambda(t)|^k dt \\
 &= O(1) |\lambda(m)| \gamma(m) - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| \gamma(x) dx \\
 &= O(1), \quad m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

buluruz. $r = 2$ için, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,2}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x) dx}{P^{2k}(x)} \left(\int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \left(\int_0^x p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \right) \left(\frac{1}{P(x)} \int_0^x p(u) du \right)^{k-1} \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \left(\int_0^x p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \right) \\
 &= O(1) \int_0^m p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)}
 \end{aligned}$$

bulunur. $\sigma_{p,1}(x)$ deki gibi işlem devam ettirilirse,

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,2}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir. (4.13) şartından,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x) dx}{P^{2k}(x)} \left(\int_0^x P(u) |\lambda'(u)| |v(u)| du \right)^k \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x u p(u) |\lambda'(u)| |v(u)| du \right)^k \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \left(\int_0^x u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \right) \left(\frac{1}{P(x)} \int_0^x p(u) du \right)^{k-1} \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \left(\int_0^x u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \right) \\
 &= O(1) \int_0^m u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} (u |\lambda'(u)|)^{k-1} (u |\lambda'(u)|) |v(u)|^k du \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} (u |\lambda'(u)|) |v(u)|^k du
 \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar kısmi integrasyon metodu uygularsak, Lemma 4.1.1 den

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx &= O(1) m |\lambda'(m)| \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} |v(u)|^k du \\
 &\quad - O(1) \int_0^m (u |\lambda'(u)|)' \int_0^u \frac{p(t)}{P(t)} |v(t)|^k dt du \\
 &= O(1) m |\lambda'(m)| \gamma(m) - \int_0^m |\lambda'(u)| \gamma(u) du - \int_0^m u |\lambda''(u)| \gamma(u) du \\
 &= O(1), \quad m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak,

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,4}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x) dx}{P^{2k}(x)} \left(\int_0^x \frac{P(u) |\lambda(u)| |v(u)|}{u} du \right)^k$$

$$= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k$$

bulunur. $\sigma_{p,2}(x)$ 'deki gibi işleme devam edilirse,

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,4}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir.

O halde $r = 1,2,3,4$ için

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Not 4.1.2 Teorem 4.1.3 de, özel olarak her x değeri için $p(x) = 1$ alırsak, Teorem 4.1.1 i elde ederiz.

Aşağıdaki teoremden $\int_0^\infty f(t)dt$ düzensiz integralinin Cesàro toplanabilme metodu ile toplanabilirliğinden Riesz toplanabilme metodu ile toplanabilirliğine geçişi için yeterli şartlar incelenecektir.

Teorem 4.1.4. p ; (4.12), (4.13) ve (4.15) şartlarını sağlayan reel değerli ve \mathbb{R}^+ 'da azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $k \geq 1$ olmak üzere $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali $|C, 1|_k$ toplanabiliyor ise, bu durumda aynı zamanda $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilirdir (Özgen, 2018a).

İspat: $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin (\bar{N}, p) ortalaması (3.6) olduğundan ve $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali $|C, 1|_k$ toplanabilir olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{|V(x)|^k}{x} dx$$

integrali yakınsaktır. Diğer taraftan $\sigma_q(x) = \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t)s(t)dt$ in türevini alıp kısmi integrasyon metodu uygularsak

$$\begin{aligned} \sigma_p'(x) &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(t) f(t) du \\ &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(t)}{t} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p(x)}{P^2(x)} v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \left(\frac{P(t)}{t} \right)' v(t) dt \\
&= \frac{p(x)}{P^2(x)} v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(t) v(t) dt + \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(t)}{t} f(t) dt \\
&= \sigma_{p,1}(x) + \sigma_{p,2}(x) + \sigma_{p,3}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1,2,3,4 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (4.14) şartından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,1}(x)|^k dx &= \int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} \left(\frac{p(x)}{P^{2k}(x)} \right)^k |v(x)|^k dx \\
&= \int_0^m \frac{p(x)}{P^{k+1}(x)} |v(x)|^k dx \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v(x)|^k dx \\
&= O(1) \int_0^m \frac{1}{x} |v(x)|^k dx \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

$k > 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{p,2}(x)|^k dx &= \left(\frac{P(x)}{p(x)} \right)^{k-1} \left| \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(t) v(t) dt \right|^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x p(t) |v(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \left(\int_0^x p(t) |v(t)| dt \right)^k \left(\frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t) dt \right)^{k-1} \\
&= O(1) \int_0^m p(t) |v(t)|^k dt \int_t^m \frac{p(x)}{P^2(x)} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \int_0^m \frac{p(t)}{P(t)} |v(t)|^k dt \\
&= O(1) \int_0^m \frac{v(t)^k}{t} dx \\
&= O(1) \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Son olarak (4.14) şartından

$$\begin{aligned}
\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx &= \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} \left| \int_0^x \frac{P(t)}{t} v(t) dt \right|^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x \frac{P(t)}{t} |v(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left(\int_0^x p(t) |v(t)| dt \right)^k
\end{aligned}$$

bulunur. $\sigma_{p,2}(x)$ 'de yapılan işlemler tekrar edilirse

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir. Böylece $r = 1,2,3$ için

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilir iken $|C, 1|_k$ toplanabilir olması için yeterli şartları içeren bir teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.1.5. p ; (4.12), (4.13) ve (4.15) şartlarını sağlayan reel değerli ve $[0, \infty)$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $k \geq 1$ olmak üzere $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali $|\bar{N}, p|_k$ toplanabiliyor ise, bu durumda aynı zamanda $|C, 1|_k$ toplanabilirdir.

İspat: $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin (C, I) ve (\bar{N}, p) ortalaması sırasıyla (3.1) ve (3.6) olduğundan $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilirliği

$$\int_0^m \left(\frac{P(x)}{p(x)}\right)^{k-1} |\sigma'_p(x)|^k dx = \int_0^x \frac{p(x)}{P(x)} |v_p(x)| dx$$

yakınsaktır. (3.11)'in türevini alırsak

$$f(x) = v'_p(x) + \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$$

elde edilir.

Burada, $v(x)$, $\int_0^\infty f(t) dt$ integralinin üreticidir. Buradan

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x} \int_0^\infty t f(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^\infty t \left[v'_p(t) + \frac{p(t)}{P(t)} v_p(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^\infty t v'_p(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{p(t)}{P(t)} v_p(t) dt \end{aligned}$$

İlk ifadenin kısmi integrasyonunu alarak

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x} \left[x v_p(x) - \int_0^x v_p(t) dt \right] + \frac{1}{x} \int_0^x t \frac{p(t)}{P(t)} v_p(t) dt \\ &= v_p(x) + \frac{1}{x} \int_0^x v_p(t) \left(\frac{tp(t)}{P(t)} - 1 \right) dt \\ &= v_p(x) + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{tp(t)}{P(t)} v_p(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x v_p(t) dt \\ &= V_1(x) + V_2(x) + V_3(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak $r = 1,2,3$ için

$$\int_0^m \frac{1}{x} |v_r(x)|^k dx = O(1) \quad m \rightarrow \infty$$

göstermek yeterlidir. (4.12) şartından

$$\begin{aligned} \int_0^m \frac{1}{x} |V_1(x)|^k dx &= \int_0^m \frac{1}{x} |v_p(x)|^k dx \\ &= \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v_p(x)|^k dx \\ &= O(1) \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. $k > 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^m \frac{1}{x} |V_2(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m \frac{dx}{x^{k+1}} \left(\int_0^x \frac{tp(t)}{P(t)} |v_p(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{dx}{x^{k+1}} \left(\int_0^x |V_p(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^x |V_p(t)|^k dt \right) \left(\frac{1}{x} \int_0^m 1 dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m |V_p(t)|^k dt \int_t^m \frac{1}{x^2} dx
\end{aligned}$$

(4.13) şartından ve $\int_0^\infty f(t) dt$ integralinin $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilirliğinden

$$\begin{aligned}
&= O(1) \int_0^m \frac{|V_p(t)|^k}{t} dt \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(t)}{P(t)} |V_p(t)|^k dt \\
&= O(1) m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $V_2(x)$ 'deki gibi işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned}
\int_0^m \frac{1}{x} |V_3(x)|^k &= O(1) \int_0^m \frac{dx}{x^{k+1}} \left(\int_0^x |v_p(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $r = 1, 2, 3$ için

$$\int_0^m \frac{1}{x} |V_r(x)|^k = O(1) m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 birlikte düşünüldüğünde Cesàro ve Riesz metodlarının denkliği elde edilmiş olur. Bu durumda $|C, 1|_k \Leftrightarrow |\bar{N}, p|_k$ sağlanır.

Riesz toplanabilme metodu, Cesàro toplanabilme metodundan daha genel bir metoddur. Yukarıda ifade edilen Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5'in daha genel hali olarak aşağıdaki teoremler ifade edilecektir.

Teorem 4.1.6. p ve q ,

$$p(x) Q(x) = O(q(x) P(x)), \quad (4.16)$$

$$q(x) P(x) = O(p(x) Q(x)), \quad (4.17)$$

şartlarını sağlayacak şekilde reel değerli ve \mathbb{R}^+ 'da azalmayan fonksiyonlar olsun. Eğer $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali $|\bar{N}, p|_k$ toplanabiliyor ise, bu durumda aynı zamanda $|\bar{N}, q|_k$ toplanabilirdir (Özgen, 2018b).

İspat: $\sigma_p(x)$ ve $\sigma_q(x)$, sırasıyla, $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin (\bar{N}, p) ve (\bar{N}, q) ortalamaları olsun.

$\int_0^\infty f(t)dt$, $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilir olduğundan,

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{P(x)} |v_p(x)|^k dx$$

integrali yakınsaktır. Diğer taraftan, (3.1.11) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak,

$$f(x) = v_p'(x) + \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x) \quad (4.18)$$

buluruz. Riesz ortalama tanımından,

$$\begin{aligned} \sigma_q(x) &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) s(t) dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) \left(\int_0^t f(u) du \right) dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x f(u) du \int_u^x q(t) dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x (Q(x) - Q(u)) f(u) du \\ &= \int_0^x f(u) du - \frac{1}{Q(x)} \int_0^x Q(u) f(u) du \end{aligned}$$

elde ederiz. Bulduğumuz son eşitliğin her iki tarafının türevi alınıp (4.18) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sigma_q'(x) &= f(x) + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) f(u) du - \frac{1}{Q(x)} Q(x) f(x) \\ &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) f(u) du \\ &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \left[v_p'(u) + \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) \right] du \end{aligned}$$

$$= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) v_p'(u) du + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du$$

bulunur. Sağdaki ilk ifadeye kısmi integrasyon metodu uygularsak,

$$\begin{aligned} \sigma_q'(x) &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \left[Q(x) v_p(x) - \int_0^x q(u) v_p(u) du \right] + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du \\ &= \frac{q(x)}{Q(x)} v_p(x) - \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x q(u) v_p(u) du + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du \\ &= \sigma_{q,1}(x) + \sigma_{q,2}(x) + \sigma_{q,3}(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Teoremin ispatını tamamlamak için, $k > l$ olmak üzere, Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, $r=1,2,3$ için

$$\int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{q,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak, (4.1.17) şartından,

$$\begin{aligned} \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{q,1}(x)|^k dx &= \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} \left| \frac{q(x)}{Q(x)} v_p(x) \right|^k dx \\ &= \int_0^m \frac{q(x)}{Q(x)} |v_p(x)|^k dx \\ &= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v_p(x)|^k dx \end{aligned}$$

dir. (3.10) şartından $\sigma_p'(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$ olduğundan,

$$\int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{q,1}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_p'(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Diğer taraftan, $k > l$ için $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{q,2}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} \left(\frac{q(x)}{Q^2(x)} \right)^k \left(\int_0^x q(t) |v_p(t)| \right)^k \\ &= O(1) \int_0^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \left(\int_0^x q(t) |v_p(t)|^k dt \right) \left(\frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) dt \right)^{k-1} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{q,2}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m q(t) |v_p(t)|^k dt \left(\int_t^m \frac{q(x)dx}{Q^2(x)} \right) \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{q(t)}{Q(t)} |v_p(t)|^k dt \\
 &= O(1) \int_0^m \frac{p(t)}{P(t)} |v_p(t)|^k dt \\
 &= O(1), \quad m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak, (4.17) şartından,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} \left(\frac{q(x)}{Q(x)}\right)^k \left(\int_0^x \frac{Q(t)p(t)}{P(t)} |v_p(t)| dt \right)^k dx \\
 &= \int_0^m \frac{q(x)dx}{Q^{k+1}(x)} \left(\int_0^x \frac{Q(t)p(t)}{P(t)} |v_p(t)| dt \right)^k
 \end{aligned}$$

dir. Tekrar Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m \frac{q(x)dx}{Q^2(x)} \left(\int_0^x \left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^k q(t) \left(\frac{p(t)}{P(t)}\right)^k |v_p(t)|^k dt \right) \\
 &\quad x \left(\frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t)dt \right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t)dt = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 \int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m \frac{q(x)dx}{Q^2(x)} \left(\int_0^x \left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^k q(t) \left(\frac{p(t)}{P(t)}\right)^k |v_p(t)|^k dt \right) \\
 &= O(1) \int_0^m \left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^k q(t) \left(\frac{p(t)}{P(t)}\right)^k |v_p(t)|^k dt \int_t^m \frac{q(x)dx}{Q^2(x)}
 \end{aligned}$$

buluruz. $\sigma_{q,1}(x)$ deki gibi,

$$\int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)}\right)^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m \left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^k \frac{q(t)}{Q(t)} \left(\frac{p(t)}{P(t)}\right)^k |v_p(t)|^k dt$$

$$= O(1) \int_0^m \left(\frac{Q(t)}{q(t)} \right)^{k-1} \left(\frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt$$

(4.16) ve (4.17) şartlarından,

$$\begin{aligned} &= O(1) \int_0^m \frac{p(t)}{P(t)} |v_p(t)|^k dt \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $r=1,2,3$ için

$$\int_0^m \left(\frac{Q(x)}{q(x)} \right)^{k-1} |\sigma_{q,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.6 da p ve q fonksiyonlarının rolleri değiştirildiğinde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.7. p ve q , (4.16) ve (4.17) şartlarını sağlayacak şekilde reel değerli ve \mathbb{R}^+ 'da azalmayan fonksiyonlar olsun. Eğer $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali $|\bar{N}, q|_k$ toplanabiliyor ise, bu durumda aynı zamanda $|\bar{N}, p|_k$ toplanabilirdir.

Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.7 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2. p ve q , (4.16) ve (4.17) şartlarını sağlayacak şekilde reel değerli ve \mathbb{R}^+ 'da azalmayan fonksiyonlar olsun. $\int_0^\infty f(t)dt$ integrali için $|\bar{N}, p|_k \Leftrightarrow |\bar{N}, q|_k$ önermesi sağlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yukarıda verilen teoremlerden yararlanarak düzensiz integrallerin farklı özel metodlarla toplanabilirliği incelenebilir. Ayrıca çarpanlı düzensiz integrallerin farklı metodlarla olan toplanabilirliklerinin denkliği için gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.





KAYNAKLAR

Boicun, L. G. (1967). “Absolute summability of conjugate Fourier integrals by the method of G. F. Voronoi.” *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika.*, Vol. 61, No. 6, pp. 11–21.

Bor, H. (1985). “On two summability methods.” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 97, No. 1, pp. 147–149.

Bor, H., Thorpe, B. (1987). “On some absolute summability methods.” *Analysis*, Vol. 7, No. 2, pp. 145-152.

Bor, H., Thorpe, B. (1992). “A note on two absolute summability methods.” *Analysis*, Vol. 12, No. 1-2, pp. 1-3.

Bor, H. (2020). “A new study on absolute Cesaro summability factors.” *Facta Univ. Ser. Math. and Inform.*, Vol. 35, No. 4, pp. 1199-1204.

Bor, H., (2021). “A new note on factored infinite series and trigonometric Fourier series.”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 359, pp. 323-328.

Bor, H. (2023). “A new application of almost increasing sequences to infinite series and Fourier series.” *Anal. Math. Phy.*, Vol. 13, No. 6, pp 89.

Çanak, İ., Totur, Ü., (2011). “A Tauberian theorem for Cesàro summability factors of integrals.” *Appl. Math. Lett.*, Vol. 24, No. 3, pp. 234-245.

Çanak, İ., Totur, Ü., (2012), “Alternative proofs of some classical type Tauberian theorems for Cesàro summability of integrals.” *Math. Comput. Model.*, Vol. 55, No.3, pp. 1558-1561.

Flett, T. M., (1957). “On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley.” *Proc. London Math. Soc.*, Vol.7, pp. 113–141.

Hardy G. H., (1910). “Theorems Relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series.” *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 8, No. 2, pp. 301-320.

Hardy G. H., (1949). *Divergent Series*, Oxford University Press.

Karamata J., (1930), “Über Die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des “Abelschen Stetigkeitssatzes” Mathematische Zeitschrift, Vol. 32, pp. 319-320.

Kishore, N. , Hotta, G.C., (1970). “On $[N, p_n]$ summability factors.” Acta Scientiarum Mathematicarum(Szeged), Vol.31, pp. 9–12.

Lal, S. N. (1974). “On the absolute summability of the allied integral by a functional Nörlund method.” Proc. Amer. Math., Soc. Vol. 42, No. 1, pp. 113–120.

Lal, S. N., Ram, S. (1974). “On the absolute summability of a trigonometric integral by a functional Nörlund method.” Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 5, No. 10, pp. 875–883.

Lal, S. N., Ram, S. (1975). “The absolute summability of infinite integrals by functional Nörlund methods.” Indian J. Math., Vol. 17, No. 2, pp. 101–105.

Lal, S. N., Singh, A. K. (1979). “Absolute Nörlund summability of Fourier integrals.” Indian J. Math., Vol. 21, No. 2, pp.121–127.

Lal, S. N., Singh, K. N. (1980). “Allied integral and absolute functional Nörlund method of summability.” Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 11, No. 12, pp. 1617-1625.

Landau, E. (1910). “Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer.” Prace Mat.-Fiz., Vol. 21, pp. 97-177.

Littlewood J. E., (1911). “The Converse of Abel’s Theorem on Power Series.”, Proc. London Math. Soc., Vol. 9, No. 2, pp. 434-448.

Maddox, I. J., (1970). “Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.”

Mishra, L. N., Acharya D., Sahu, S. K., Nayak, P. C., Misra, U. K., Pandey, S. (2020). “Indexed Absolute Summability Factor of Improper Integrals.” Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 15, No. 1, pp. 38.

Móricz, F., (1994). “Necessary and sufficient Tauberian conditions, under which convergence follows from summability.” Bull. London Math. Soc., Vol. 26, pp. 288-294.

Móricz, F., Stadtmüller, U., (2001). “Necessary and sufficient conditions under which convergence follows from summability by weighted means.” Intern. J. Math. Sci., No. 27, pp. 399-406.

Móricz, F. (2004). “Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over \mathbb{R}^+ .” Math. Ineq. & Appl., Zagreb, No. 7, pp. 87-93.

Okur, M. A., Totur, Ü., (2019), “Tauberian theorems for the logarithmic summability methods.” Positivity, No.23, pp. 55-73.

Özgen, H. N. (2016). “On $|C, 1|_k$ integrability of Improper integrals.” Int. J. Anal. Appl., Vol.11, No. 1, pp. 19–22.

Özgen, H. N. (2017). “On equivalence of two integrability methods.” Miskolc. Math. Notes., Vol. 18, No. 1, pp. 391-396.

Özgen, H. N. (2018a). “On two integrability methods of improper integrals.” Int. J. Math. Comput. Sci., Vol. 13, No. 1, pp. 45-50.

Özgen, H. N. (2018b). “On two integrability methods.” Acta Comment. Unive. Tartu. Math., Vol. 22, No. 2, pp. 257-260.

Özgen, H.N. (2023a). “On Absolute Matrix Summability of Factored Infinite Series and Fourier Series.” Num. Funct. Anal. and Optim., Vol. 44, No. 12, pp. 1300-1308.

Özgen, H.N. (2023b). “Equivalence Theorem for Absolute Matrix Summability Methods.” Math. Notes., Vol. 114, No. 5, pp. 1322-1327.

Petersen, G. M., (1966). “Regular matrix transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited.” London-New York-Toronto.

Padhy, R. C., Misra, M., Samanta, P., Misra, U. (2019). “Indexed Nörlund Summability Factor of Improper Integrals.” IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 1344.

Patro, M., Paikray, S. K., Jena B. B., (2020). “Absolute index Nörlund summability of improper integrals.” TWMS J. App. and Eng. Math., Vol. 10, pp. 2-8.

Schmidt R., (1925). “Über Divergente Folgen Und Mittelbildungen.” Mathematische Zeitschrift, No. 22, pp. 89-152.

Sonker, S., Munjal, A. (2019). “Absolute $|C, 1|_k$ summability factors of improper integrals.” Publ. de L’Inst. Math., Vol. 105 No. 119, pp. 179-184.

Totur, Ü., Okur, M. A., (2015), “Alternative proofs of some classical Tauberian theorems for the weighted mean method of integrals.” Filomat, Vol. 29, No. 10, pp. 2281-2287.



