

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته فیزیک
(گرایش فیزیک گرانش و کیهان‌شناسی)

اثرات کوانتومی در گرانش شامه‌ای

استاد راهنما: دکتر شهرام جلال‌زاده

استاد مشاور: دکتر حمیدرضا سپنجی

نگارنده: یعقوب حیدرزاده

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که داستان مهربانشان، امید را به من هدیه می کنند.

با سپاس از

اساتید عزیزم

که راهنمای من به سوی چشمه‌ی روشنی و دانش بودند.

چکیده

در این رساله ابتدا مروری بر مدل‌های گرانش شامه‌ای^۱ انجام داده و در ادامه به ارائه‌ی مفاهیم ریاضی و هندسی این مدل‌ها در قالب غوطه‌وری هندسی^۲ می‌پردازیم. در فصل بعد، با استفاده از معادلات انحراف ژئودزی القا شده بر روی شامه‌ی چهار بعدی، قاعده‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد^۳ را در مدل جهان شامه‌ای راندال-ساندرم^۴ بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که می‌توان از هندسه‌ی فضا-زمان اثرات کوانتومی را استخراج کرد و این نوع نگرش می‌تواند به عنوان روشی برای اتحاد گرانش با سایر نیروها بکار رود. سپس با استفاده از محاسبه‌ی تغییرات جرم سکون در نقاط مختلف فضا-زمان به عنوان اصل ماخ تعمیم یافته^۵، استفاده از مفاهیم اختلال شامه^۶ و تبدیلات کیهان‌شناسی مقیاس گسسته^۷ رابطه‌ی کوانتش برای مقیاس‌های مختلف جهان را استخراج می‌کنیم. با استفاده از این رابطه مدار سیارات و قمرهای منظومه‌ی شمسی و همچنین مدار سیارات درسیستم‌های سیاره‌ای خارجی^۸ را پیش بینی کرده و نشان می‌دهیم که این نتایج با داده‌های مشاهداتی توافق بسیار خوبی دارند و نوعی رفتار کوانتومی در مقیاس بزرگ جهان نیز وجود دارد.

کلمات کلیدی: گرانش شامه‌ای، هندسه‌ی غوطه‌وری، معادله‌ی انحراف ژئودزی القا شده، قاعده‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد، اصل ماخ تعمیم یافته، کیهان‌شناسی مقیاس گسسته، کوانتش مدار سیستم‌های سیاره‌ای.

^۱Brane World Models

^۲Geometric Embedding

^۳Bohr-Sommerfeld Quantization Rule

^۴L. Randall and R. Sundrum

^۵Generalized Mach principle

^۶Perturbation of the Brane

^۷Discrete Scale Transformation

^۸Extra-Solar Planetary Systems

فهرست مطالب

۴	مقدمه	۱
۷	تئوری‌های ابعاد اضافی	۲
۷	دلایل مطالعه‌ی تئوری‌های ابعاد اضافی	۱.۲
۷	اتحاد نیروها	۱.۱.۲
۷	کوانتومی کردن گرانش در نظریه‌ی ریسمان	۲.۱.۲
۸	مساله‌ی سلسله‌مراتبی	۳.۱.۲
۸	مساله‌ی ثابت کیهان‌شناسی	۴.۱.۲
۹	تئوری‌های ابعاد اضافی	۲.۲
۹	نسبیت عام در ابعاد بالاتر	۱.۲.۲
۱۱	نظریه‌ی کالوزا-کلاین	۲.۲.۲
۱۶	نظریه‌ی <i>STM</i>	۳.۲.۲
۱۶	جهان شامه‌ای <i>ADD</i>	۴.۲.۲
۱۹	جهان شامه‌ای <i>RS</i>	۵.۲.۲
۲۳	جهان شامه‌ای <i>DGP</i>	۶.۲.۲
۲۴	نظریه‌ی ریسمان	۷.۲.۲
۲۵	چکیده‌ی فصل	۳.۲
۲۶	غوطه‌وری هندسی	۳
۲۶	غوطه‌وری بدون اختلال	۱.۳
۳۹	غوطه‌وری اختلالی	۲.۳
۵۱	چکیده‌ی فصل	۳.۳
	معادلات انحراف ژئودزی القا شده روی شامه و قاعده‌ی کوانتس بوه-زامرفلد	۴
۵۲		

۵۳	معادله‌ی انحراف ژئودزی	۱.۴
		معادله‌ی انحراف ژئودزی القا شده روی شامه و قاعده‌ی کوانتش بوهر-	۲.۴
۵۶	زامرفلد	
۶۲	چکیده‌ی فصل	۳.۴
۶۳		کوانتش مدار سیارات و قمرهای آنها	۵
۶۳	دینامیک ذرات آزمون	۱.۵
۷۳	جرم القایی، اصل ماخ و قاعده‌ی کوانتش مقیاس	۲.۵
۸۵	چکیده‌ی فصل	۳.۵



فصل ۱

مقدمه

انسان‌ها و تمام موجودات اطراف قسمتی از یک سیستم بی‌نهایت بزرگ بنام جهان هستی هستند اما آنچه که انسان را از سایر موجودات این سیستم بی‌پایان متمایز می‌کند تلاش وی برای فهمیدن و درک و تسخیر جهانی است که در آن زندگی می‌کند. این تلاش ابتدا با جاری شدن کلمه "چرا؟" بر زبان وی شروع می‌شود و در پی یافتن پاسخ این سوال، از هیچ تلاشی فروگذار نمی‌کند. ماه‌ها، سال‌ها و قرن‌ها می‌گذرد. هر روز "چرا"ی قبلی حل می‌شود و "چرا"ی دیگر ذهن این موجود کنجکاو را به خود مشغول می‌سازد. اما از دیر باز تا به امروز سوالاتی بی‌پاسخ و سر به مهر مانده اند. در این بین انسان‌هایی در صدد جوابگویی به این سوالات برآمده و گاه توانسته‌اند تا حدودی پرده از اسرار این جهان هستی بردارند. اما گویی این طبیعت هر روز معمایی جدید برای انسان می‌آفریند. هر روز عمق سوالات بیشتر می‌شود تا این موجود جوای حقیقت را به تفکری عمیق‌تر سوق دهد. تاریخ علم گواه این تکاپوی بی‌حد انسان در طی اعصار گذشته است که گاه سیری صعودی و گاه مکشی کوچک داشته است اما هیچ‌گاه بطور کلی از حرکت باز نمانده است.

ماهیت "فضا" و "زمان" از اولین و بنیادی‌ترین سوالات بشر تا به امروز بوده اند. با گذشت زمان و تغییر نگرش‌ها نسبت به این دو، مفاهیم و معانی مختلف و گاه کاملاً متضاد با مفاهیم و معانی قبلی مطرح شده‌اند. بارزترین آنها را می‌توان در نظریات دکارت^۱، لایبنیتز^۲، کانت^۳ و نیوتن^۴ دید. دکارت اصل سیستم مختصاتی را برای قابل شناسایی کردن فاصله‌ها بکار برد و از دید او اشکال به عنوان قسمت‌هایی از فضای نامتناهی مطرح می‌شوند. تا پیش از دکارت فضا تنها اهمیت و بعد کیفی داشت و مکان اجسام با اعداد بیان نمی‌شدند. در واقع نقش عمده‌ی او بعد کمی دادن به فضا و زمان بود. لایبنیتز از طرفداران فضای نسبی بود و اعتقاد داشت فضا

^۱Decart

^۲Leibniz

^۳kant

^۴Isaac Newton

نوعی سیستم است که از روابط میان چیزهای بدون حجم و ذهنی تشکیل می‌شود. او فضا را به عنوان نظام اشیا همزیست یا نظام وجود برای تمام اشیا می‌داند که همزمان هستند می‌دید. برخلاف لایبنیتز، نیوتن به فضایی متشکل از نقاط و زمانی متشکل از لحظات باور داشت که وجود این فضا و زمان مستقل از اجسام و حوادثی بودند که در آن‌ها قرار می‌گرفتند. در اصل او قائل به مطلق بودن فضا و زمان (نظریه‌ی فضای مطلق) بود. به عقیده‌ی نیوتن فضا و زمان اشیا واقعی و ظرف‌هایی به گسترش نامتناهی هستند. درون آن‌ها کل توالی رویدادهای طبیعی در جهان، جایگاهی تعریف شده می‌یابد و بدین ترتیب حرکت یا سکون اشیا در واقع به وقوع می‌پیوندد و به رابطه‌ی آن‌ها با دیگر اجسام مربوط نمی‌شود. کانت فضا را به عنوان جنبه‌ای از درک انسانی و متمایز و مستقل از ماده مورد توجه قرار داد. او جنبه‌های مطلق فضا و زمان نیوتن را از مرحله‌ی دنیای خارجی تا ذهن انسان گسترش داد. به عقیده‌ی کانت فضا و زمان مسایل مفهومی و شهودی هستند که دقیقاً در ذهن انسان و در ساختار فکری او جای دارند و نمی‌توانند قائم به ذات باشند. علاوه بر کامیابی‌های اولیه، این پاسخ‌ها و باورها از فضا و زمان اعتبار خود را با گذشت زمان از دست دادند. اینشتین^۵ با ارائه‌ی نظریه‌ی نسبیت خاص^۶ و نظریه‌ی نسبیت عام^۷ مفهوم فضا و زمان مطلق را در هم شکست.

از دیگر سو، نیروهای شناخته شده تا به آن روز که ماهیت غیر مستقل آنها که در آزمایشاتی از سوی افراد مختلفی مانند فارادی^۸ گزارش شده بود فیزیکدانان رابه فکر اتحاد این نیروها سوق داد. سرانجام دو نیروی الکتریسیته و مغناطیس در قالب معادلات الکترودینامیک ماکسول^۹ با یکدیگر متحد شدند. در نظریه‌ی نسبیت خاص نشان داده می‌شود که معادلات ماکسول، تحت تبدیلات لورنتس^{۱۰} ناوردا می‌مانند. پس از اتحاد فضا و زمان از یک سو و اتحاد الکترومغناطیس از دیگر سو، فیزیکدانان از جمله اینشتین و نوردستروم^{۱۱} بطور مستقل در صدد اتحاد گرانش، دیگر نیروی شناخته شده تا آن زمان، با الکترومغناطیس برآمدند.

در سال ۱۹۱۶، با ارائه نظریه‌ی نسبیت عام^{۱۲} توسط اینشتین، گرانش از رده‌ی نیروها جدا و بعنوان صحنه‌ی ظهور سایر نیروها و یا بعبارت دیگر، بعنوان هندسه‌ی فضا-زمان معرفی شد. موفقیت‌های چشمگیر نظریه‌ی نسبیت عام در مقابل نظریه‌ی گرانشی نیوتن در توجیه و پیش بینی پدیده‌هایی مانند انحراف نور^{۱۳} در عبور از کنار اجرام آسمانی سنگین مانند ستاره‌گان، جابجایی حضيض عطارد^{۱۴} و سرخ‌گرایی گرانشی^{۱۵}، این نظریه را مورد تایید قرار

^۵Einstein^۶Special Relativity^۷General Relativity^۸Faraday^۹Maxwell Equations^{۱۰}Lorentz transformation^{۱۱}Nordstrom^{۱۲}General Relativity^{۱۳}Light Deflection^{۱۴}Perihelion Advance

داده و نظریه‌ی گرانش نیوتن را بعنوان حدی برای نظریه‌ی نسبیت عام مبدل کرد. در سال‌های بعد افرادی مانند کالوزا^{۱۶} با الهام از ایده‌ی اینشتین مبنی بر افزایش بعد زمان به سه بعد فضایی و عدم جدایی آنها، از بعد پنجم (بعد فضایی) برای اتحاد نیروهای الکترومغناطیس و گرانش استفاده کردند. بطور همزمان و مستقل از کار کالوزا، اسکار کلاین^{۱۷} نیز ایده‌ی بعد پنجم را برای اتحاد نیروها مطرح می‌کند. کلاین با اطلاع از اینکه کالوزا قبل از او این ایده را مطرح کرده است روی مفهوم بعد پنجم، تاکید می‌کند و تعبیر فشردگی و کوانتومی بودن آن را ارائه می‌دهد. چندی بعد نیروهای هسته‌ای قوی و ضعیف^{۱۸} نیز کشف می‌شوند و چون این نیروها در مقیاس‌های کوانتومی بروز پیدا می‌کنند بنابراین برای اتحاد نیروهای کشف شده‌ی جدید با گرانش و الکترودینامیک لازم می‌شود که گرانش و الکترودینامیک را نیز کوانتومی کنند. در پی تلاش‌های بسیار الکترودینامیک و نیروهای هسته‌ای قوی و ضعیف در قالب نظریه‌ی وحدت بزرگ متحد^{۱۹} شدند اما برای اتحاد گرانش با این نیروها لازم بود تا ابعاد اضافی^{۲۰} بیشتری وارد کار شوند که منجر به نظریات ابر گرانش ۱۱ بعدی^{۲۱} و نظریه‌ی ریسمان^{۲۲} ۱۰ و ۲۶ بعدی گردید.

در این رساله ابتدا به اختصار به معرفی مدل‌های ابعاد اضافی^{۲۳} مطرح شده می‌پردازیم. در ادامه ابزار ریاضی مطالعه‌ی مدل‌های با ابعاد بالاتر و در واقع غوطه‌وری هندسی را بررسی می‌کنیم و در فصل بعدی با بکارگیری ابزار ریاضی یاد شده توجه خویش را به اثرات کوانتومی گرانش شامه‌ای معطوف کرده و در قالب مدل راندال-ساندرم قاعده‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد را بدست می‌آوریم. در فصل بعد، با بدست آوردن رابطه‌ی تغییرات جرم در نقاط مختلف فضا-زمان به عنوان اصل ماخ تعمیم یافته و استفاده از مفاهیم اختلال در شامه و تبدیلات مقیاس گسسته، رابطه‌ی کوانتش برای مقیاس‌های مختلف جهان را بدست می‌آوریم. در ادامه با استفاده از این رابطه، مدار سیارات و قمرهای آن‌ها در منظومه‌ی شمسی و سایر سیستم‌های سیاره‌ای را بدست می‌آوریم و با مقایسه با داده‌های مشاهداتی نشان خواهیم داد که توافق خوبی بین این داده‌ها و نتایج بدست‌آمده‌ی ما وجود دارد.

^{۱۵}Gravitational Redshift

^{۱۶}Kaluza

^{۱۷}Oscar Klein

^{۱۸}Weak and Strong Forces

^{۱۹}GUT

^{۲۰}Extra Dimensions

^{۲۱}Super Gravity

^{۲۲}String Theory

^{۲۳}Extra Dimension Models

فصل ۲

تئوری‌های ابعاد اضافی

۱.۲ دلایل مطالعه‌ی تئوری‌های ابعاد اضافی

۱.۱.۲ اتحاد نیروها

چهار نیروی شناخته شده‌ی طبیعت در لحظات اولیه پیدایش جهان و نزدیک به مه‌بانگ بصورت یکپارچه و متحد بوده اند. با سرد شدن کیهان و عبور از دمای گذار فاز، شکست تقارن^۱ اتفاق می‌افتد و پس از آن این نیروها یکی پس از دیگری از اتحاد خارج می‌شوند و صورتی که امروزه می‌شناسیم در می‌آیند. در طی این شکست تقارن، ابتدا گرانش سپس نیروهای ضعیف و قوی و در نهایت الکترومغناطیس از اتحاد خارج می‌شوند. برای ساختن نظریه‌ای که این نیروها را متحد کند یکی از رهیافت‌ها می‌تواند استفاده از ابعاد اضافی باشد که اولین بار توسط کالوزا و کلاین مطرح شد. آن‌ها متوجه این موضوع شدند که برهمکنش‌های گرانشی و الکترومغناطیسی با در نظرگیری ابعاد اضافی می‌توانند بوسیله‌ی یک منشا مشترک توصیف شوند.

۲.۱.۲ کوانتومی کردن گرانش در نظریه‌ی ریسمان

حوزه ظهور نیروهای هسته‌ای قوی و ضعیف و حتی الکترومغناطیس در مقیاس‌های بسیار ریز کوانتومی است. این سه نیرو در نظریات QED ، EW و QCD بصورت یکپارچه متحد می‌شوند اما در مسیر اتحاد گرانش با این سه نیرو مشکلاتی وجود دارد از جمله اینکه بر خلاف

^۱Symmetry Breaking

حوزه حضور و حکم‌فرمایی این نیروها، گرانش در مقیاس‌های بزرگ کیهانی حکم‌فرماست و در مقیاس‌های کوانتومی بسیار ناچیز است. بعنوان مثال اگر نیروی گرانش و نیروی الکتریکی بین دو پروتون را با یکدیگر مقایسه کنیم گرانش 10^{36} مرتبه کوچک‌تر است. امروزه نظریه‌ی ریسمان مهمترین کاندید برای گرانش کوانتومی است. در این نظریه، یک ریسمان بسته بصورت ذره‌ای با جرم صفر و اسپین 2 مطرح می‌شود که مشخصات گرویتون 2 در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی 4 ، بعنوان ذره‌ی مبادله‌گر نیروی گرانشی است.

۳.۱.۲ مساله‌ی سلسله مراتبی

مساله‌ی سلسله مراتبی 5 در واقع همان ضعیف بودن گرانش در مقایسه با سایر نیروهاست. در نظریه‌های ابعاد اضافی تمام نیروها بجز گرانش محدود به شامه اند و تنها گرانش می‌تواند در ابعاد اضافی انتشار پیدا کند. بنابراین، انتشار گرانش در ابعاد دیگر می‌تواند دلیل ضعیف بودن آن در چهار بعد باشد.

۴.۱.۲ مساله‌ی ثابت کیهان‌شناسی

ثابت کیهان‌شناسی 6 ابتدا توسط انیشتین برای توصیف جهان ایستا بکار گرفته شد. با گزارش انبساط کیهان توسط مشاهدات هابل 7 ، انیشتین این جمله را از معادلات خود حذف کرد و از آن با عنوان بزرگترین اشتباه زندگی خویش نام برد اما در واقع، وارد شدن ثابت کیهان‌شناسی در معادلات اشتباه نبود. چندی بعد با مطالعه‌ی مشاهدات بدست آمده از ابر نو اختر 8 نوع Ia و اندازه‌گیری انتقال به سرخ آن که گویای شتاب مثبت کیهان بود لزوم وارد کردن آن دیده شد. در واقع ثابت کیهان‌شناسی نقش نوعی دافعه‌ی گرانش را ایفا می‌کند که سبب انبساط شتابدار 9 جهان می‌شود. از سوی دیگر، در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی اختلاف بین انرژی بر همکنش بین ذرات از دید تئوری و مشاهده به انرژی خلا 10 موسوم است اما ثابت کیهان‌شناسی مشاهداتی، در مقایسه با پیش بینی نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی 10^{120} مرتبه کوچکتر است و این واقعا اختلاف بزرگی است. این مشکل به مساله‌ی ثابت کیهان‌شناسی

^۶Spin

^۷Graviton

^۸Quantum Field Theory

^۹Hierarchy Problem

^{۱۰}Cosmological Constant

^{۱۱}Hubble

^{۱۲}Supernova

^{۱۳}Accelerated Expansion

^{۱۴}Vacuum Energy

موسوم است و یکی از انگیزه‌های نظریات ابعاد اضافی برداشتن این شکاف بین تئوری و مشاهده است.

۲.۲ تئوری‌های ابعاد اضافی

۱.۲.۲ نسبیت عام در ابعاد بالاتر

برای بررسی نظریه‌های با ابعاد بالاتر، ابتدا بهتر است با فرمول‌بندی نسبیت عام در ابعاد بالا آشنا شویم. بر اساس نسبیت عام، فضا-زمان بوسیله منیفولد شبه ریمانی^{۱۱} D بعدی \mathcal{M}_D بصورت زیر توصیف می‌شود:

$$\mathcal{M} = \bigcup_k U_k. \quad (۱.۲)$$

در این رابطه U_k مجموعه‌های باز هستند بگونه‌ای که با تعریف نگاشت مختصاتی $X : U_k \rightarrow R^D$ هر نقطه روی آن با مختصات $X^M = X^M(p)$ که در آن $M = 0, 1, \dots, D-1$ مشخص می‌شود. هرگاه p همزمان متعلق به دو چارت U و U' با مختصات متفاوت X و X' باشد نگاشت $X(p) \rightarrow X'(p)$ که در آن p متعلق به مجموعه‌ی اشتراک U و U' است یک دیفومورفیسم^{۱۲} از مرتبه‌ای است که تمام مشتقات را خوش تعریف نگه می‌دارد. اگر \mathcal{G}_{AB} متریک این منیفولد باشد فاصله‌ی بی‌نهایت کوچک بین دو نقطه با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$dS^2 = \mathcal{G}_{AB} dX^A dX^B. \quad (۲.۲)$$

زمانی که میدان گرانشی و ثابت کیهان‌شناسی وجود ندارد فضا-زمان متناظر، فضا-زمان مینکوفسکی با متریک $\mathcal{G}_{AB} = \eta_{AB}$ که در آن $A = 0, 1, 2, \dots, D-1$ می‌باشد. متریک و معکوس آن، برای جابجایی اندیس‌های هر تانسور مرتبه‌ی دلخواه تعریف شده در این فضا-زمان بکار می‌رود و شرط این که متریک معکوس داشته باشد یعنی $\mathcal{G}_{AC} \mathcal{G}^{AB} = \delta_C^B$ این است که $\det \mathcal{G}_{AB} \neq 0$. معادلات میدان اینشتین^{۱۳} D بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R \mathcal{G}_{AB} + \frac{D-2}{2} \Lambda_D \mathcal{G}_{AB} = \kappa \pi G_D T_{AB}. \quad (۳.۲)$$

^{۱۱}Riemannian Manifold

^{۱۲}Diffeomorfism

^{۱۳}Einstein Field Equations

که در آن به ترتیب M_D ، Λ_D ، $G_D \equiv M_D^{\gamma-D}$ ، T_{AB} ، R ، R_{AB} تانسور ریچی^{۱۴}، اسکالر ریچی^{۱۵}، تانسور انرژی-تکانه^{۱۶}، ثابت گرانش نیوتن^{۱۷} D بعدی، ثابت کیهان‌شناسی D بعدی و جرم پلانک^{۱۸} D بعدی (در واحد $c = \hbar = 1$) هستند. تانسور انرژی-تکانه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^{AB} = \frac{2}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \frac{\delta S_m[\Phi, \mathcal{G}]}{\mathcal{G}^{AB}}. \quad (4.2)$$

که در آن S_m تابعی^{۱۹} کنش توصیف‌گر دینامیک میدان‌های مادی $\Phi(X)$ در فضا-زمان خمیده و یا به بیان دیگر در حضور میدان‌های گرانشی است. برای همبسته لوی-چیویتا^{۲۰} می‌توان نشان داد (اتحاد بیانکی^{۲۱}):

$$\nabla_A (R^{AB} - \frac{1}{2} R \mathcal{G}^{AB}) = 0. \quad (5.2)$$

که با توجه به معادلات میدان اینشتین منجر به معادله‌ی پایستگی تانسور انرژی-تکانه^{۲۲} می‌شود:

$$\nabla_A T^{AB} = 0. \quad (6.2)$$

ساده‌ترین حالت زمانی است که هیچ ماده وجود نداشته و ثابت کیهان‌شناسی را نیز صفر بگیریم که در اینصورت داریم $R^{AB} = 0$. باید دقت کرد این به معنی فضا-زمان تخت نیست چون برای فضا-زمان تخت نیاز به شرط قوی‌تر $R_{BCD}^A = 0$ داریم. به عنوان نمونه از حل‌های غیر بدیهی معادلات اینشتین با $R^{AB} = 0$ می‌توان حل شوارتزشیلد^{۲۳} را ذکر کرد. در غیاب میدان‌های مادی حل‌های بیشینه متقارن^{۲۴}، شرط زیر را برای ثابت کیهان‌شناسی ارضا می‌کنند:

$$R_{AB} = \Lambda_D \mathcal{G}_{AB}. \quad (7.2)$$

که تعریغی از بهنجارش ثابت کیهان‌شناسی در ابعاد مختلف است. برای مورد $\Lambda_D = 0$ فضا-زمان مینکوفسکی $\mathcal{M}_D = M_D$ ^{۲۵}، برای $\Lambda_D > 0$ فضا-زمان دسیته $\mathcal{M}_D = dS_D$

^{۱۴} Ricci Tensor^{۱۵} Ricci Scalar^{۱۶} Energy-Momentum Tensor^{۱۷} Newton Gravitational Constant^{۱۸} Plank Mass^{۱۹} Functional^{۲۰} Levi-Civita Connection^{۲۱} Bianchi Identity^{۲۲} Conservation of Energy-Momentum Tensor^{۲۳} Shwartzschild Solution^{۲۴} Maximally Symmetric^{۲۵} Minkowski Space-Time

^{۲۶} و برای $\Lambda_D < 0$ فضا-زمان پاد دسیته $AdS_D = \mathcal{M}_D$ ^{۲۷} را داریم. البته می‌توان جمله‌ی مربوط به ثابت کیهان‌شناسی را در طرف دوم معادلات اینشتین به‌عنوان نوعی ماده با تانسور انرژی-تکانه‌ی زیر در نظر گرفت: نیز در نظر گرفت.

$$T_{AB}^{\Lambda} = -\frac{D-2}{16\pi G_D} \Lambda_D \mathcal{G}_{AB}. \quad (۸.۲)$$

کنش اینشتین-هیلبرت ^{۲۸} بر اساس منیفولد (شبه) ریمانی \mathcal{M}_D با متریک \mathcal{G}_{AB} ، میدان‌های مادی Φ و مرز $\partial\mathcal{M}_D$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_{EH}[\Phi, \mathcal{G}] = \frac{1}{16\pi G_D} \int_{\mathcal{M}_D} d^D X \sqrt{|\mathcal{G}|} [R - (D-2)\Lambda_D] + S_m[\Phi, \mathcal{G}]. \quad (۹.۲)$$

که $d^D X \sqrt{|\mathcal{G}|}$ المان حجم القایی توسط متریک \mathcal{G}_{AB} روی \mathcal{M}_D است. با استفاده از وردش کنش نسبت به متریک:

$$\frac{\partial S_{EH}}{\partial \mathcal{G}_{MN}} = 0. \quad (۱۰.۲)$$

و شرایط مرزی ^{۲۹}

$$\delta \mathcal{G}_{AB}|_{\partial\mathcal{M}_D} = 0. \quad (۱۱.۲)$$

$$\delta \nabla^A \mathcal{G}_{AB}|_{\partial\mathcal{M}_D} = 0. \quad (۱۲.۲)$$

می‌توان معادلات اینشتین را بدست آورد. [۱]

۲.۲.۲ نظریه‌ی کالوزا-کلاین

برای درک بهتر از فرمول‌بندی کالوزا-کلاین، ^{۳۰} یادآوری شباهت‌های نظریه‌ی الکترومغناطیس و گرانش که اولین بار اینشتین، نوردشترم و وایل ^{۳۱} به آن پی‌بردند می‌تواند مفید باشد [۲].

^{۲۶} deSitter

^{۲۷} Anti deSitter

^{۲۸} Einstein-Hilbert Action

^{۲۹} Boundary Conditions

^{۳۰} K-K Formalism

^{۳۱} Wyle

هر دو معادلات میدان الکترومغناطیس و گرانش با استفاده از معادلات پواسون^{۳۲} توصیف می‌شوند. معادلات میدان انیشتین $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ را به متریک نشان می‌دهد و معادلات ناهمگن ماکسول $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$ نیز ارتباط بین جریان و میدان‌های الکترومغناطیس را نشان می‌دهند. بطور کلی در هر دو مورد گرانش و الکترومغناطیس با یک سری معادلات دیفرانسیل برای میدان‌ها سر و کار داریم که در آنها، ماده و جریان به عنوان منبع در سمت راست معادلات قرار می‌گیرند:

$$(13.2) \quad \text{منبع } (T_{\mu\nu} \text{ یا } J_\mu) = \text{تغییرات } (g_{\mu\nu} \text{ یا } F_{\mu\nu})$$

با توجه به این شباهت‌ها، سوال این است که آیا می‌توان به همانگونه که گرانش هندسی می‌شود میدان‌های الکترومغناطیس را نیز هندسی کرد؟ یعنی آیا می‌توان میدان $F_{\mu\nu}$ را به عنوان یک ویژگی هندسی فضا-زمان بیان کرد؟

برای هندسی کردن الکترومغناطیس ایده‌های مختلفی مطرح شد که در آن‌ها میدان‌های الکترومغناطیس بصورت قسمتی از انحنا، همبسته و یا متریک در نظر گرفته می‌شوند. در این راستا، کالوزا و کلاین میدان‌های EM را بعنوان مولفه‌های متریک پنج بعدی در نظر گرفته و سعی کردند با وارد کردن تمام میدان‌ها در متریک، نوعی اتحاد هندسی^{۳۳} بین نیروها برقرار کنند. این رهیافت هندسی، میدان‌ها را به عنوان نمودی از یک کمیت واحد که همان متریک است بیان می‌کند.

همانگونه که گفته شد، کالوزا از معادلات میدان پنج بعدی که در آن میدان‌های EM قسمتی از متریک پنج بعدی می‌باشند استفاده کرد و متریک را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$(14.2) \quad \mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} \text{قسمت هندسی } g_{\mu\nu} & \text{قسمت الکترومغناطیس } g_{4\nu} \\ \text{قسمت الکترومغناطیس } g_{\nu 4} & g_{44} = \phi \end{pmatrix}$$

که در آن، قسمت مربوط به الکترومغناطیس را به بردار A_μ نسبت داد و در آن اندیس‌های $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ و $\mu = 0, 1, 2, 3$ می‌باشند. کالوزا برای بدست آوردن مولفه‌های متریک پنج بعدی ابتدا از شرط استوانه‌ای^{۳۴} استفاده کرد. این شرط از آنجا ناشی می‌شود که کریستوفل‌ها بصورت زیرند:

^{۳۲}Poisson Equations

^{۳۳}Geometrical Unification

^{۳۴}Cylinder condition

$$\begin{aligned}\Gamma_{\epsilon\mu\nu} &= -\frac{1}{\epsilon}(\partial_\epsilon g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\epsilon} - \partial_\nu g_{\epsilon\mu}), \\ \Gamma_{\mu\nu\epsilon} &= -\frac{1}{\epsilon}(\partial_\mu g_{\nu\epsilon} + \partial_\nu g_{\epsilon\mu} - \partial_\epsilon g_{\mu\nu}).\end{aligned}\quad (15.2)$$

برای اینکه بتوانیم معادلات همگن ماکسول $\partial_\mu F_{\nu k} + \partial_\nu F_{k\mu} + \partial_k F_{\mu\nu} = 0$ را بدست آوریم، با فرض $\partial_\epsilon \mathcal{G}_{AB} = 0$ کریستوفل‌های بالا تنها شامل قسمت EM خواهند شد. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\epsilon\mu\nu} &= \alpha(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \alpha F_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu\epsilon} &= \alpha(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu), \\ \Gamma_{\epsilon\epsilon\mu} &= \partial_\mu \phi.\end{aligned}\quad (16.2)$$

که ϕ یک میدان اسکالر^{۳۵} دلخواه است. در واقع شرط استوانه‌ای به این معنی است که میدان‌های مادی مستقل از بعد اضافه بوده و تنها به مختصات فضا-زمان چهار بعدی وابسته اند.

کالوزا همچنین از شرط میدان ضعیف^{۳۶} برای بدست آوردن حل تحلیلی معادلات میدان استفاده کرد. در این شرط، متریک $g_{\mu\nu}$ بصورت $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ می‌باشد که در آن $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ و $\eta_{\mu\nu}$ متریک مینکوفسکی است. بنابراین، چون تانسور ریمان^{۳۷} بصورت زیر است:

$$R_{BCD}^A = \partial_C \Gamma_{BD}^A - \partial_D \Gamma_{BC}^A + \Gamma_{EC}^A \Gamma_{BD}^E - \Gamma_{ED}^A \Gamma_{BC}^E. \quad (17.2)$$

جملات سوم و چهارم آن با استفاده از تقریب میدان ضعیف، مرتبه‌ی دوم از h بوده و در نتیجه قابل نظر کردن هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$R_{BCD}^A \simeq \partial_C \Gamma_{BD}^A - \partial_D \Gamma_{BC}^A. \quad (18.2)$$

در نتیجه مولفه‌های تانسور ریچی بصورت زیر خواهند بود:

^{۳۵}Scalar Field

^{۳۶}Weak Field

^{۳۷}Riemann Tensor

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \\ R_{\epsilon\nu} &= \alpha \partial_\lambda F_\nu^\lambda, \\ R_{\epsilon\epsilon} &= -\partial_\mu \partial^\mu \phi. \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

در این تقریب، چون اسکالر ریچی R مرتبه‌ی بالاتری از h میشود در نتیجه خواهیم داشت:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (۲۰.۲)$$

با توجه به ۱۹.۲ و معادلات ناهمگن ماکسول می‌توان نتیجه گرفت:

$$T_{\mu\epsilon} = J_\mu. \quad (۲۱.۲)$$

و در نهایت فرم کلی تانسور انرژی-تکانه بصورت زیر قابل استخراج خواهد بود:

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} T_{\mu\nu} = \text{قسمت ماده} & J_\mu = \text{بار} \\ J_\mu & \cdot \end{pmatrix}. \quad (۲۲.۲)$$

که در آن $J_\mu = (\rho, J_1, J_2, J_3)$ و در مولفه $T_{\epsilon\epsilon}$ از شرط معادله‌ی پواسون برای ϕ استفاده شده است.

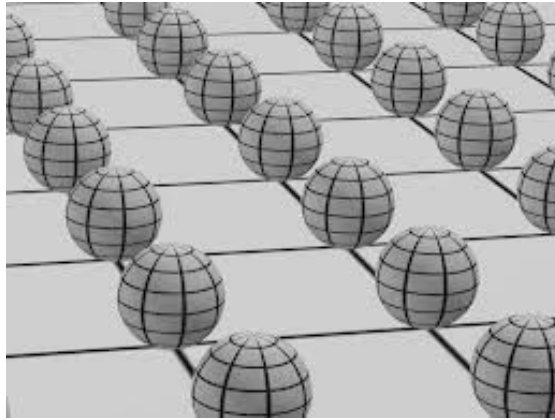
کلاین از شرط فشردگی^{۳۸} که در آن بعد اضافه می‌تواند بصورت یک حلقه به شعاع L باشد، استفاده کرد [۳]. البته برای تعداد بعد اضافه بیش از یک بعد، فضای ابعاد اضافه می‌تواند یک کره، چنبره و یا منیفولدهای دیگری نیز باشد (شکل ۱.۲). اگر بعد اضافه بصورت یک دایره با شعاع L در نظر گرفته شود فضا-زمان پنج بعدی بصورت $M^4 \times S^1$ خواهد بود. کلاین با در نظر گرفتن این شرط و حل معادلات میدان پنج بعدی، متریک را به فرم زیر بدست آورد:

$$\mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}. \quad (۲۳.۲)$$

شرط فشردگی ایجاب می‌کند که میدان‌ها نسبت به ζ نوسانی باشند و در نتیجه می‌توان آن‌ها را بسط فوریه داد:

$$\mathcal{G}_{AB} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{AB}^n(x^\mu) e^{\frac{in\zeta}{L}}. \quad (۲۴.۲)$$

^{۳۸} Compacification Condition



شکل ۱.۲: فضا-زمان کالوزا-کلاین

که در آن ζ نشانگر بعد اضافه است. این بسط به بسط کالوزا-کلاین^{۳۹} مشهور بوده و تک تک جملات آن را مدهای کالوزا-کلاین^{۴۰} گویند. در انرژی‌های پایین، $E \ll \frac{1}{L}$ ، تنها مد صفر اهمیت پیدا می‌کند اما در انرژی‌های بالا، $E \gg \frac{1}{L}$ ، دیگر مدها نیز اهمیت پیدا می‌کنند. در نتیجه با استفاده از کنش پنج بعدی که در قسمت قبل مطرح شد و نیز با در نظر گرفتن بسط بالا، کنش برای مد صفر بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_{zm} = M_\delta^2 \pi L \int d^4 x \sqrt{g} \left(R_4 - \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi}{\phi^2} \right). \quad (25.2)$$

که در آن جمله‌ی اول کنش گرانش چهار بعدی، جمله‌ی دوم کنش میدان‌های الکترومغناطیس و جمله‌ی سوم معادله‌ی کلاین-گوردن برای میدان اسکالر ϕ هستند. با توجه به کنش گرانشی چهار بعدی خواهیم داشت:

$$M_{pl}^2 = M_\delta^2 2\pi L. \quad (26.2)$$

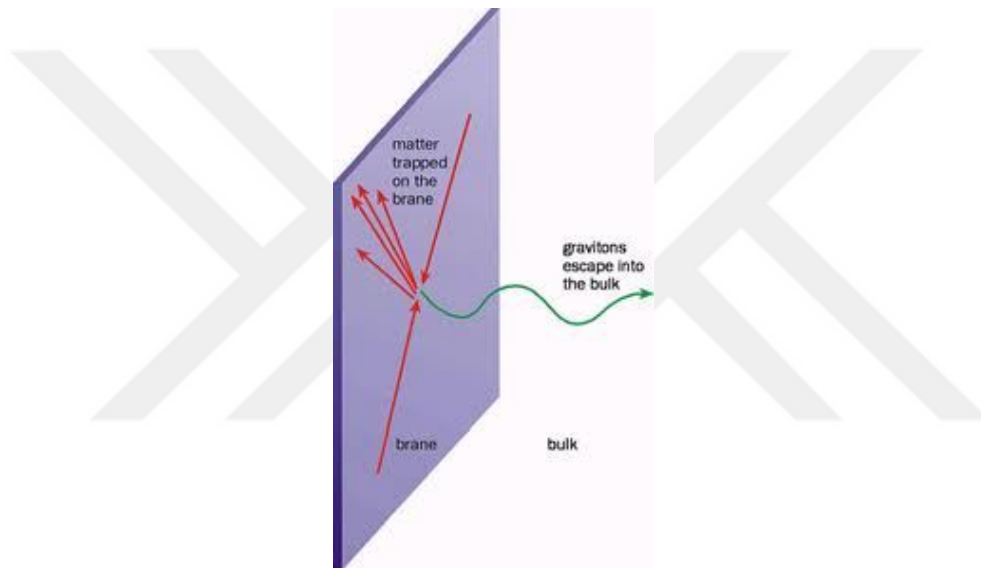
همچنین با توجه به اینکه $G_N = \frac{1}{\lambda \pi M_{pl}^2}$ است در نتیجه ثابت گرانش نیوتن بر حسب مقیاس انرژی ابعاد اضافه و شعاع فشردگی، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$G_N = \frac{1}{16\pi^2 M_\delta^2 L}. \quad (27.2)$$

^{۳۹} KK Expansion^{۴۰} KK Modes

۳.۲.۲ نظریه STM

این مدل توسط وسون^{۴۱} مطرح شد و به نظریه‌ی ماده‌ی القایی^{۴۲} یا فضا-زمان-ماده^{۴۳} مشهور است. این مدل در واقع نوعی تعمیم نظریه‌ی کالوزا-کلاین است با تفاوتی که در این مدل، بعد پنجم دیگر فشرده نیست. این مدل از این جهت نظریه‌ی ماده‌ی القایی خوانده می‌شود که در آن فضا-زمان پنج بعدی را ریچی-تخت^{۴۴} می‌گیرند و از هندسه‌ی پنج بعدی، خواص ماده‌ی فضای چهار بعدی را بدست می‌آورند. در این مدل، بعد اضافه می‌تواند زمان‌گونه^{۴۵}، فضاگونه^{۴۶} و یا بر اساس نظر وسون، جرم‌گونه^{۴۷} نیز باشد [۴].



شکل ۲.۲: مدل ADD

۴.۲.۲ جهان شامه‌ای ADD

مدل ADD که در واقع توسط $Dimopoulos, Arkani-hamed$ و $Dvali$ مطرح شد مدلی با ابعاد اضافی فشرده است شکل (۲.۲). این مدل می‌تواند به عنوان راه حلی برای مسأله‌ی ثابت کیهان‌شناسی باشد. همچنین این مدل پیش‌بینی‌های جدیدی می‌کند که

^{۴۱}P.S. Wesson

^{۴۲}Induced Matter Theory

^{۴۳}Space-Time-Matter Theory

^{۴۴}Ricci-Flat

^{۴۵}Timelike

^{۴۶}Spacelike

^{۴۷}Masslike

انتظار داریم در طی پیشرفت‌های جدید شاهد به آزمایش در آمدن آنها باشیم [۱، ۵، ۶]. اجزای اصلی این مدل عبارتند از:

• ذرات مدل استاندارد روی شامه ۳ بعدی محبوس اند در حالی که گرانش در تمام ابعاد انتشار می‌یابد.

• مقیاس بنیادی گرانش M_D و مقیاس ماوراء بنفش UV مدل استاندارد در حدود چند TeV است و این ویژگی مساله‌ی ثابت کیهان‌شناسی را حل می‌کند.

• d بعد اضافه، همگی فشرده‌اند.

کنش این مدل بصورت زیر است :

$$S_{ADD} = \frac{M_D^{\gamma+d}}{2} \int d^{\epsilon} x \int^{\gamma\pi L} d^d \zeta \sqrt{\mathcal{G}} R_{\epsilon+d} + \int d^{\epsilon} x \sqrt{g} (\tau + \mathcal{L}_{SM}(\Psi, M_{SM})). \quad (28.2)$$

که در آن $M_D \sim (1-10) TeV$ ، $g(x) = \mathcal{G}(x, \zeta = \cdot)$ و $\tau + \langle \mathcal{L}_{SM} \rangle = \cdot$ است. در واقع شرط سوم، تنظیم ظریف^{۴۸} برای ثابت کیهان‌شناسی است. در این مدل فرض می‌شود که :

۱. ضخامت شامه ناچیز است (مقیاس ضخامت شامه M_D^{-1} است).

۲. نوسانات شامه ناچیزند.

۳. طول تمام ابعاد اضافی یکسان و برابر R است (در حالت کلی می‌توانند متفاوت باشند).

۴. تنها گرانش در توده انتشار می‌یابد (در حالت کلی دیگر میدان‌ها نیز می‌توانند درون توده انتشار یابند).

کنش ۴ بعدی این مدل برای مد صفر بصورت زیر در می‌آید :

$$\frac{M_D^{\gamma+d}}{2} \int d^{\epsilon} x \int^{\gamma\pi R} d^d \zeta \sqrt{\mathcal{G}} R_{\epsilon+d} \rightarrow \frac{M_D^{\gamma+d} (\gamma\pi R)^d}{2} \int d^{\epsilon} x \sqrt{g_{ZM}} R_{ZM}. \quad (29.2)$$

و جرم پلانک ۴ بعدی بصورت زیر است :

$$M_{Pl}^{\gamma} = M_D^{\gamma+d} (\gamma\pi R)^d. \quad (30.2)$$

^{۴۸}Fine Tuning

بنابراین دلیل وجود مساله‌ی سلسله مراتبی می‌تواند حجم بزرگ فضای ابعاد اضافه باشد. با فرض اینکه مقیاس انرژی گرانش کوانتومی $M_D \sim TeV$ باشد طول بعد اضافه بصورت زیر خواهد بود :

$$R \sim 10^{-17+30/d} cm. \quad (31.2)$$

برای یک بعد اضافه $d = 1$ ، $M_D \sim 1 TeV$ ، طول بعد اضافه $R \sim 10^{13} cm$ خواهد بود و این بر اساس اطلاعات ما از گرانش نیوتنی در مقیاس منظومه شمسی غیر محتمل است. برای $d = 2$ طول بعد اضافه $R \sim 10^{-2} cm$ می‌باشد و این مورد، نوعی اصلاح قانون گرانش برای فواصل کم تر از میلی متر است که موضوع آزمایش‌های جدید می‌باشد. برای d های بزرگ تر مقدار R کاهش می‌یابد ولی حتی برای $d = 6$ این طول در مقایسه با $\frac{1}{M_{PL}}$ خیلی بزرگ است.

در نهایت در این مدل، پتانسیل گرانشی برای منابع استاتیک غیر نسبیتی روی شامه بصورت زیر بدست می‌آید :

$$V(r) = -G_N m_1 m_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\Psi_n(\zeta = \cdot)|^2 \frac{e^{-m_n r}}{r}. \quad (32.2)$$

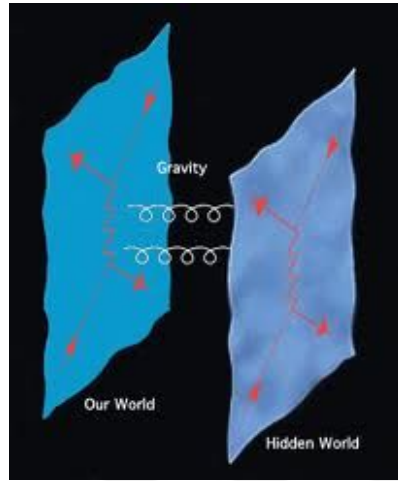
که $\Psi_n(\zeta = \cdot)$ تابع موج n امین مد کالوزا-کلاین و $m_n = \frac{|n|}{R}$ است. برای $r \gg R$ داریم :

$$V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r}. \quad (33.2)$$

که همان پتانسیل ۴ بعدی گرانش نیوتنی است. برای $r \ll R$ نیز داریم :

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_D^{2+d} r^{1+d}}. \quad (34.2)$$

که قانون گرانش $d + 4$ بعدی است. بنابراین می‌بینیم در این مدل نوعی تصحیح بر قانون گرانش نیوتن برای فواصل مختلف وجود دارد.

شکل ۳.۲: مدل RS

۵.۲.۲ جهان شامه‌ای RS

رانندال و ساندروم با مطالعه‌ی اثر انحنا^{۴۹} در توده، دو نسخه از مدل‌های جهان شامه‌ای ارائه دادند. در مدل RSI دو شامه وجود دارد (شکل ۳.۲) و کنش پنج بعدی آن بصورت زیر است [۱، ۵، ۷]

$$S_{RSI} = \frac{M_\Delta^r}{16\pi} \int d^r x \int d\zeta \sqrt{|G|} [R_\Delta - 3\Lambda_\Delta] \\ + \int_1 d^r x \sqrt{|g^{(1)}|} (\mathcal{L}_1 - \tau_1) + \int_2 d^r x \sqrt{|g^{(2)}|} (\mathcal{L}_2 - \tau_2). \quad (35.2)$$

که در آن اندیس‌ها نشانگر دو شامه می‌باشند که در $\zeta = 0$ و $\zeta = \pi R$ قرار دارند. بعد اضافه در این مدل دارای توپولوژی S_1/Z_2 است. τ_1 و τ_2 تنش^{۵۰} دو شامه اند که $\tau_1 = -\tau_2 = \tau > 0$ و \mathcal{L}_1 و \mathcal{L}_2 لاگرانژی ماده روی این دو شامه‌اند. شامه با تنش مثبت را شامه‌ی نهان^{۵۱} و شامه با تنش منفی را شامه‌ی مرئی^{۵۲} می‌گویند.

^{۴۹}Curvature

^{۵۰}Tension

^{۵۱}Hidden Brane

^{۵۲}Visible Brane

مولفان متریک فضای توده را که شامل ناوردایی پوانکاره‌ی ^{۵۳} چهار بعدی نیز می‌باشد را بصورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$dS^2 = a^2(\zeta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\zeta^2. \quad (36.2)$$

که در آن به

$$a^2(\zeta) = e^{-2\sigma(\zeta)}. \quad (37.2)$$

عامل پیچش گفته می‌شود. مولفان با استفاده از حل معادلات اینشتین پنج بعدی

$$R_{AB} - \frac{1}{2}R\mathcal{G}_{AB} + \frac{3}{2}\Lambda_\Delta\mathcal{G}_{AB} = \lambda\pi G_\Delta T_{AB}, \quad (38.2)$$

که در آن

$$\sqrt{|\mathcal{G}|}T_{AB} = \tau_1\sqrt{|g^1|}g_{\mu\nu}^{(1)}\delta_A^\mu\delta_B^\nu\delta(\zeta) + \tau_2\sqrt{|g^2|}g_{\mu\nu}^{(2)}\delta_A^\mu\delta_B^\nu\delta(\zeta - \pi R). \quad (39.2)$$

می‌باشد به متریک توده‌ی RS گفته شده با شرط زیر می‌رسند:

$$\sigma(\zeta) = k|\zeta|; k > 0,$$

$$\Lambda_\Delta = -\left(\frac{\lambda\pi}{3}\tau G_\Delta\right)^2. \quad (40.2)$$

که در آن $k = \frac{4}{3}\pi\tau$ است. این رابطه در واقع تنظیم ظریف تنش شامه و ثابت کیهان‌شناسی فضای توده می‌باشد. می‌بینیم ثابت کیهان‌شناسی فضای توده منفی است که به اصطلاح گفته می‌شود که در این مدل، دو شامه توسط فضای توده‌ی پاددسیته از هم جدا شده‌اند.

با شرط بالا تابع پیچش در این مدل بصورت شکل (۴.۲) خواهد بود.

برای بررسی مدهای کالوزا-کلاین (نوسانات گرویتون)، اختلال در متریک این مدل را بصورت زیر در نظر می‌گیرند:

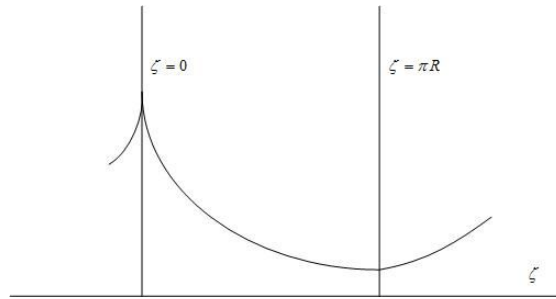
$$dS^2 = a^2(\zeta)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, \zeta))dx^\mu dx^\nu - d\zeta^2. \quad (41.2)$$

با انتخاب پیمانه‌ی عرضی ^{۵۴} و شرط رد صفر ^{۵۵} بصورت

^{۵۳}Poincare Invariance

^{۵۴}Transverse Gauge

^{۵۵} Trace Free Condition



شکل ۴.۲: تابع پیچش

$$\begin{aligned} \partial_\mu h^\mu{}_\nu &= 0, \\ h_{\mu\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (42.2)$$

می‌توان $h_{\mu\nu}$ را بصورت زیر بسط داد:

$$h_{\mu\nu}(x, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^{(n)}(x) \frac{\chi_n(\zeta)}{R}. \quad (43.2)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \chi_n(\zeta) &= 2\sqrt{kR} e^{-2k|\zeta|}, \\ \chi_n(\zeta) &= N_n [C_1 Y_2\left(\frac{M_n}{k} e^{k|\zeta|}\right) + C_2 J_2\left(\frac{M_n}{k} e^{k|\zeta|}\right)]. \end{aligned} \quad (44.2)$$

بوده و Y_2 و J_2 توابع بسل و N_m ضریب بهنجارش می‌باشند. با در نظر گیری ماده بر روی شامه‌ی با تنش منفی و استفاده از تبدیلات مختصات $z^\mu = x^\mu e^{-\pi k R}$ می‌توان متریک را بصورت زیر نوشت:

$$ds^2 = e^{2k(\pi R - |\zeta|)} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(z, \zeta)) dz^\mu dz^\nu - d\zeta^2. \quad (45.2)$$

بنابراین متریک شامه‌ی دارای ماده بصورت زیر خواهد بود:

$$g_{\mu\nu}^{(2)}(z) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (46.2)$$

در نتیجه با برگشت به کنش اولیه‌ی

$$S_{RSI} = \frac{M_\Delta^\nu}{16\pi} \int_{\mathcal{M}_\mp} d^\nu x \int_{-L}^L d\zeta \sqrt{|\mathcal{G}|} R_\Delta + \dots \quad (47.2)$$

با قرار دادن $L = \pi R$ و در نظر گرفتن متریک مد صفر

$$ds^\nu = e^{\nu k(\pi R - |\zeta|)} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(\cdot)}) dz^\mu dz^\nu - d\zeta^2. \quad (48.2)$$

خواهیم داشت:

$$S_{RSI} = \frac{M_\Delta^\nu}{16\pi} \int_{\mathcal{M}_\mp} d^\nu x z e^{\nu \pi R k} \int_{-L}^L d\zeta e^{-\nu k|\zeta|} e^{-\nu k(\pi R - |\zeta|)} R_\mp ((\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(\cdot)}) + \dots) \quad (49.2)$$

از طرفی با توجه به کنش اینشتین-هیلبرت بر روی این شامه

$$S_{RSI} = \frac{M_{Pl}^\nu}{16\pi} \int_{\mathcal{M}_\mp} d^\nu x \sqrt{|g^{(\nu)}|} R_\mp. \quad (50.2)$$

و با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$M_{Pl}^\nu = e^{\nu k \pi R} \int_{-L}^L d\zeta e^{-\nu k|\zeta|} M_\Delta^\nu. \quad (51.2)$$

که منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$M_{Pl}^\nu = \frac{M_\Delta^\nu}{k} (e^{\nu k L} - 1). \quad (52.2)$$

که در آن L فاصله‌ی دو شامه است. با استفاده از این رابطه می‌بینیم که اختلاف بین مقیاس پلانک M_{Pl} و مقیاس انرژی توده M_Δ ناشی از جمله‌ی نمایی و یا به عبارت دیگر ناشی از انحنا‌ی فضای توده است و بنابراین مدل RS می‌تواند جوابگوی مساله‌ی ثابت کیهان‌شناسی و مساله‌ی سلسله‌مراتبی باشد.

راندال و ساندروم در مدل $RSII$ که تنها شامل یک شامه با تنش مثبت است و در واقع نوعی حد $L \rightarrow \infty$ برای مدل RSI است به رابطه‌ی زیر بین مقیاس پلانک و مقیاس توده می‌رسند:

$$M_{Pl}^\nu = \frac{M_\Delta^\nu}{k}. \quad (53.2)$$

که بیان‌گر این نکته است که در مدل $RSII$ مساله‌ی سلسله‌مراتبی حل نشده باقی می‌ماند. همچنین در قالب این مدل، مولفان پتانسیلی بصورت زیر بست می‌آورند:

$$V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{(rL)^2}{r^2}\right). \quad (54.2)$$

که در آن جمله دوم در فواصل $r \lesssim L$ غالب می‌شود و تصحیحی برگرانش نیوتنی است و می‌تواند موضوع آزمایش‌های جدید قرار گیرد.

۶.۲.۲ جهان شامه‌ای DGP

این مدل توسط دوالی^{۵۶}، گابادازه^{۵۷} و پوراتی^{۵۸} مطرح شد [۵، ۱]. تفاوت اصلی این مدل با مدل‌های شامه‌ای قبلی در این است که در این مدل حجم ابعاد اضافی بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود یعنی:

$$V_d \equiv \int d^d \zeta \sqrt{G} \rightarrow \infty. \quad (55.2)$$

در این مدل چون ابعاد اضافه نه بصورت فشرده و نه بصورت تابیده‌اند بنابراین نیازی به تشبیت اندازه‌ی آن‌ها نیست. در این مدل به دلیل وجود ابعاد اضافی با حجم بی‌نهایت، جملات تصحیحی برای برهمکنش‌های گرانشی در مقیاس‌های بزرگ وارد می‌شود و به جواب‌های جدیدی برای کیهان‌شناسی و شتاب جهان منجر می‌شود. کنش پنج بعدی این مدل بصورت زیر نوشته می‌شود [۸، ۹، ۱۰]:

$$S_{DGP} = \frac{M_\Delta^{\nu}}{2} \int d^{\nu} x \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \sqrt{G} R_\Delta + \int d^{\nu} x \sqrt{g} \left(\frac{M_{Pl}^{\nu}}{2} R_\nu + \tau + \mathcal{L}_{SM}(\Psi, M_{SM}) \right). \quad (56.2)$$

در این مدل فرض می‌شود که:

^{۵۶}G. R. Dvali

^{۵۷}G. Gabadadze

^{۵۸}M. Porrati

۱. میدان‌های مدل استاندارد محدود به شامه اند در حالی که گرانش در ابعاد اضافه انتشار پیدا می‌کند.

۲. در این مدل، حد بالای UV بصورت $M_{SM} \sim M_{GUT} \gg M_\delta$ در نظر گرفته می‌شود.

۳. ضخامت شامه به اندازه $\frac{1}{M_{SM}}$ است.

۴. $\tau + \langle \mathcal{L}_{SM} \rangle = 0$ که در واقع تنظیم دقیق ثابت کیهان‌شناسی است.

پتانسیل گرانشی در این مدل برای حد $r \ll r_c$ بصورت زیر است:

$$V(r) \simeq -\frac{1}{\lambda\pi^2 M_{Pl}^2 r} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left[-1 + \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) \right] \left(\frac{r}{r_c}\right) + \mathcal{O}(r^2) \right\}. \quad (57.2)$$

که در آن $r_c \equiv \frac{M_{Pl}^2}{\sqrt{M_\delta^2}}$ بصورت $r_c \sim 10 - 100 \text{ MeV}$ انتخاب می‌شود. می‌بینیم که در این مدل پتانسیل گرانشی برای فواصل نزدیک بصورت پتانسیل گرانشی نیوتن و برای فواصل دورتر دارای جمله‌ی تصحیح دافعه لگاریتمی است.

برای فواصل $r \gg r_c$ نیز پتانسیل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V(r) \simeq -\frac{1}{\lambda\pi^2 M_{Pl}^2 r} \left\{ \frac{r_c}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}. \quad (58.2)$$

یعنی در این مدل، در فواصل دور، پتانسیل بصورت $\frac{1}{r^2}$ تغییر می‌کند.

۷.۲.۲ نظریه‌ی ریسمان

نظریه‌ی ریسمان یکی از نظریه‌هایی است که می‌تواند شکاف بین مکانیک کوانتوم و نسبیت عام را برطرف سازد. در این نظریه، تمام ذرات هستی بجای ذرات بنیادی بدون بعد از ریسمان‌های یک بعدی مرتعش ساخته شده‌اند. مدهای مختلف این ریسمان‌های مرتعش، ذرات مختلف با بار و جرم مخصوص بخود را خلق می‌کند. در نظریه‌ی ریسمان اولیه که فقط شامل بوزونها^{۶۰} می‌شد حالت‌هایی با نرم منفی که اصطلاحاً آنها را *Ghost* می‌نامند وجود داشت. این حالت‌ها، فقط با در نظر گرفتن ۲۶ بعد برای فضا-زمان، قابل حذف بودند.

^{۵۹}Hubble Horizon

^{۶۰}Bosons

نظریه‌های ریسمان بوزونی بخاطر وجود حالت پایه‌ی تکیونیک^{۶۱} ناپایدار هستند و از سوی دیگر، چون جهان ما شامل فرمیون‌ها^{۶۲} نیز است بنابراین باید حالت‌های فرمیونی نیز وارد این نظریه می‌شدند. با اضافه‌شدن فرمیون‌ها به این نظریه، حالت‌های با نرم منفی جدیدی نیز بروز پیدا کردند. اما در نهایت، این مشکلات در قالب نظریه‌ی ابر ریسمان^{۶۳} که تعداد بعد فضا-زمان را ۱۰ پیش بینی می‌کند و همچنین شامل ابرتقارن^{۶۴} نیز می‌باشد، حل شدند [۱۱، ۱۲].

۳.۲ چکیده‌ی فصل

در این فصل ابتدا به دلایل مطالعه‌ی مدل‌های ابعاد اضافی و توانایی این مدل‌ها در حل مشکلات بنیادین فیزیک اشاره شد. در ادامه به فرمالیسم کلی این مدل‌ها در قالب نسبیت عام در ابعاد بالا پرداخته شد. سپس مدل‌های ابعاد اضافی مطرح شده تاکنون و نقاط قوت و ضعف آن‌ها مختصراً مورد مطالعه قرار گرفت و برای مطالعه‌ی بیشتر و دقیق‌تر منابعی برای این مدل‌ها ذکر شد. امید است خواننده‌ی علاقمند با مطالعه‌ی مطالب ارائه شده و استفاده از منابع مذکور بتواند زمینه‌ی پژوهشی مناسبی برای خود فراهم آورد.

^{۶۱}Tachionic

^{۶۲}Fermions

^{۶۳}Super String

^{۶۴}Super Symmetry

فصل ۳

غوطه‌وری هندسی

۱.۳ غوطه‌وری بدون اختلال

فرض کنید منی‌فولد شبه ریمانی n بعدی Σ (شامه) در یک فضای m بعدی (فضای توده^۱) غوطه‌ور است و $\{X^A\}$ مختصات موضعی^۲ فضای توده، $\{x^\alpha\}$ مختصات موضعی روی شامه و $\{x^a\}$ مختصات فضای ابعاد اضافه‌اند و در آن‌ها $A = 0, 1, \dots, m$ ، $\alpha = 0, 1, \dots, n$ و $a = 0, 1, \dots, m$ لازم به ذکر است که بعنوان تعریف، اگر بعد منی‌فولد Σ از فضای توده یکی کمتر باشد اصطلاحاً آن را "ابر سطح"^۳ گویند. بطور کلی المان طول فضای توده بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$dS^\Sigma = \mathcal{G}(e_A, e_B) dX^A \otimes dX^B = \mathcal{G}_{AB} dX^A dX^B. \quad (1.3)$$

که در آن $\{e_A\}$ بردارهای پایه در فضای توده می‌باشند. مختصات فضای توده تابعی از مختصات شامه بصورت زیرند:

$$X^A = X^A(x^\alpha). \quad (2.3)$$

و

$$dX^A = X^A_{,\alpha} dx^\alpha := \varepsilon_\alpha^A dx^\alpha. \quad (3.3)$$

در نتیجه المان طول در فضای توده بصورت زیر در می‌آید:

$$dS^\Sigma = \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.3)$$

^۱Bulk Space

^۲Local Coordinates

^۳Hypersurface

که در آن

$$g_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{AB}\varepsilon_{\alpha}^A\varepsilon_{\beta}^B. \quad (5.3)$$

را متریک القایی روی شامه^۴ گوییم. بردارهای پایه‌ی فضای توده را می‌توان بر حسب بردارهای پایه‌ی شامه و فضای ابعاد اضافه بصورت زیر نوشت:

$$e_A = \varepsilon_A^{\alpha}e_{\alpha} + \varepsilon_A^m e_m. \quad (6.3)$$

در نتیجه، هر بردار در فضای توده بر حسب این پایه‌ها بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{V} = V^A e_A = V^A(\varepsilon_A^{\alpha}e_{\alpha} + \varepsilon_A^m e_m) = V^{\alpha}e_{\alpha} + V^m e_m. \quad (7.3)$$

بطور مشابه می‌توان برای هر تانسور در فضای توده نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{AB}e_A \otimes e_B \\ &= T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha}^A\varepsilon_{\beta}^B + T^{\alpha m}\varepsilon_{\alpha}^A\varepsilon_m^B + T^{n\beta}\varepsilon_n^A\varepsilon_{\beta}^B + T^{mn}\varepsilon_m^A\varepsilon_n^B. \end{aligned} \quad (8.3)$$

حال برای بردارهای پایه‌ی شامه داریم:

$$\begin{aligned} e_{\alpha} \cdot e_{\beta} &= \mathcal{G}(e_{\alpha}, e_{\beta}) = \mathcal{G}(\varepsilon_{\alpha}^A e_A, \varepsilon_{\beta}^B e_B) \\ &= \varepsilon_{\alpha}^A \varepsilon_{\beta}^B \mathcal{G}(e_A, e_B) = \varepsilon_{\alpha}^A \varepsilon_{\beta}^B \mathcal{G}_{AB}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = g(e_{\alpha}, e_{\beta}) = g_{\alpha\beta}. \quad (10.3)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$g_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{AB}\varepsilon_{\alpha}^A\varepsilon_{\beta}^B. \quad (11.3)$$

^۴Induced Metric

به دلیل تعامد بردارهای پایه‌ی فضای ابعاد اضافه بر بردارهای پایه‌ی شامه داریم:

$$e_\alpha \cdot e_m = \mathcal{G}(e_\alpha, e_m) = \mathcal{G}(\varepsilon_\alpha^A e_A, \varepsilon_m^B e_B) = 0. \quad (12.3)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\varepsilon_\alpha^A \varepsilon_m^B \mathcal{G}_{AB} = 0. \quad (13.3)$$

بطور مشابه برای بردارهای پایه‌ی ابعاد اضافه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} e_m \cdot e_n &= \mathcal{G}(e_m, e_n) = \mathcal{G}(\varepsilon_m^A e_A, \varepsilon_n^B e_B) \\ &= \varepsilon_m^A \varepsilon_n^B \mathcal{G}(e_A, e_B) = \varepsilon_m^A \varepsilon_n^B \mathcal{G}_{AB}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

پس خواهیم داشت:

$$\eta_{mn} = \varepsilon_m^A \varepsilon_n^B \mathcal{G}_{AB}. \quad (15.3)$$

و در نهایت بر حسب بردارهای پایه‌ی فضای توده داریم:

$$\begin{aligned} e_A \cdot e_B &= \mathcal{G}(e_A, e_B) = \mathcal{G}(\varepsilon_A^\alpha e_\alpha + \varepsilon_A^m e_m, \varepsilon_B^\beta e_\beta + \varepsilon_B^n e_n) \\ &= \varepsilon_A^\alpha \varepsilon_B^\beta \mathcal{G}(e_\alpha, e_\beta) + \varepsilon_A^m \varepsilon_B^n \mathcal{G}(e_m, e_n). \end{aligned} \quad (16.3)$$

بنابراین می‌توان متریک فضای توده را بصورت زیر نوشت:

$$\mathcal{G}_{AB} = g_{\alpha\beta} \varepsilon_A^\alpha \varepsilon_B^\beta + \eta_{mn} \varepsilon_A^m \varepsilon_B^n. \quad (17.3)$$

اگر از رابطه‌ی ۱۱.۳ نسبت به مختصات شامه مشتق هموردا بگیریم خواهیم داشت:

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B + \mathcal{G}_{AB} \nabla_\gamma \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B + \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\alpha^A \nabla_\gamma \varepsilon_\beta^B = 0. \quad (18.3)$$

و با جابجایی اندیس‌ها و در نظر گرفتن قاعده‌ی جمع انیشتین در آن داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{AB,C} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B \varepsilon_\gamma^C + \mathcal{G}_{AB} \{ \nabla_\gamma \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B + \varepsilon_\alpha^A \nabla_\gamma \varepsilon_\beta^B \} &= 0, \\
\mathcal{G}_{BC,A} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B \varepsilon_\gamma^C + \mathcal{G}_{AB} \{ \nabla_\gamma \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B + \varepsilon_\alpha^A \nabla_\gamma \varepsilon_\beta^B \} &= 0, \\
\mathcal{G}_{CA,B} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B \varepsilon_\gamma^C + \mathcal{G}_{AB} \{ \nabla_\gamma \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B + \varepsilon_\alpha^A \nabla_\gamma \varepsilon_\beta^B \} &= 0.
\end{aligned} \quad (۱۹.۳)$$

با جمع رابطه‌ی دوم و سوم و کم کردن رابطه‌ی اول از آنها به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mathcal{G}_{BC} \Gamma_{MN}^B \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N \varepsilon_\gamma^C + \mathcal{G}_{CB} \varepsilon_\gamma^C \nabla_\alpha \varepsilon_\beta^B = 0. \quad (۲۰.۳)$$

که می‌توان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\mathcal{G}_{AB} \{ \nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A + \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N \} \varepsilon_\gamma^B = 0. \quad (۲۱.۳)$$

که در آن Γ_{MN}^A نماد کریستوفل توده است. از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۱۳.۳ خواهیم داشت:

$$\nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A + \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N = \varepsilon_m^A K^m{}_{\alpha\beta}. \quad (۲۲.۳)$$

$K^m{}_{\alpha\beta}$ را اصطلاحاً تانسور انحنای عرضی^۵ یا فرم بنیادی دوم^۶ گویند و در واقع بیانگر تفاوت بین دو شامه‌ی غوطه‌ور دارای خواص ذاتی یکسان، از دید ناظر فضای توده است. بعنوان مثال صفحه و استوانه را که هر دو هندسه‌ی دو بعدی یکسانی دارند و خطوط موازی روی هر دو موازی باقی می‌مانند با استفاده از غوطه‌وری در فضای سه بعدی، از دید ناظر فضای سه بعدی متفاوت خواهند شد بطوری که صفحه انحنای عرضی صفر و استوانه انحنای عرضی ثابت خواهند داشت. همچنین با نوشتن رابطه بالا بفرم زیر

$$\nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A = -\Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N + \varepsilon_m^A K^m{}_{\alpha\beta}. \quad (۲۳.۳)$$

می‌توان گفت که انحنای عرضی تصویر تغییرات بردار مماس بر شامه ε_β^A در راستای α روی ابعاد اضافه است. حال با تعریف مشتق هموردای تعمیم‌یافته بصورت زیر

$$\tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A := \nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A + \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N. \quad (۲۴.۳)$$

خواهیم داشت:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A = \varepsilon_m^A K^m{}_{\alpha\beta}. \quad (۲۵.۳)$$

^۵Extrinsic Curvature

^۶Second Fundamental Form

و یا بطور معادل داریم:

$$K^m_{\alpha\beta} = \varepsilon_A^m \tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A. \quad (۲۶.۳)$$

بوسیله‌ی این رابطه نیز توضیحاتی که در مورد انحنای عرضی در بالا دادیم مشهود است. همچنین با استفاده از این تعریف می‌توان نشان داد مشتق هموردای متریک فضای توده نسبت به مختصات شامه صفر می‌شود. به این صورت که:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \mathcal{G}_{AB} &= \mathcal{G}_{AB,\alpha} - \Gamma_{AN}^M \varepsilon_\alpha^N \mathcal{G}_{MB} - \Gamma_{BN}^M \varepsilon_\alpha^N \mathcal{G}_{MA} \\ &= \mathcal{G}_{AB,\alpha} - \varepsilon_\alpha^N \{ \Gamma_{AN}^M \mathcal{G}_{MB} + \Gamma_{BN}^M \mathcal{G}_{MA} \} \\ &= \mathcal{G}_{AB,\alpha} - \varepsilon_\alpha^N \{ [B, AN] + [A, BN] \} \\ &= \mathcal{G}_{AB,\alpha} - \varepsilon_\alpha^N \mathcal{G}_{AB,N} = 0. \end{aligned} \quad (۲۷.۳)$$

در نتیجه داریم:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \mathcal{G}_{AB} = \tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (۲۸.۳)$$

از طرف دیگر برای هر بردار پایه‌ی فضای توده داریم:

$$de_A = \Gamma_{AB}^C e_C \otimes e^B. \quad (۲۹.۳)$$

که در آن همانطور که قبلاً بیان کردیم بردار پایه‌ی فضای توده بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$e_C = \varepsilon_C^\alpha e_\alpha + \varepsilon_C^m e_m. \quad (۳۰.۳)$$

در نتیجه داریم:

$$de_A = \Gamma_{AB}^C [\varepsilon_C^\alpha \varepsilon_\beta^B e_\alpha \otimes e^\beta + \varepsilon_C^m \varepsilon_\beta^B e_m \otimes e^\beta]. \quad (۳۱.۳)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} de_A &= d(\varepsilon_A^\alpha e_\alpha + \varepsilon_A^m e_m) \\ &= \varepsilon_{A,\beta}^\alpha e_\alpha \otimes e^\beta + \varepsilon_A^\alpha de_\alpha + \varepsilon_{A,\beta}^m e_m \otimes e^\beta + \varepsilon_A^m de_m. \end{aligned} \quad (۳۲.۳)$$

با تعریف

$$\begin{aligned} de_\alpha &:= \{\alpha^\gamma\} e_\gamma \otimes e^\beta + K^m_{\alpha\beta} e_m \otimes e^\beta, \\ de_m &:= K^m_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e^\beta + A_{\beta m}^n e_n \otimes e^\beta. \end{aligned} \quad (۳۳.۳)$$

که در آن $\{\alpha^\gamma\}$ همبسته‌های^۷ شامه‌اند. در نتیجه رابطه‌ی ۳۲.۳ به فرم زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} de_A &= \varepsilon_{A,\beta}^\alpha e_\alpha \otimes e^\beta + \varepsilon_A^\alpha (\{\alpha^\gamma\} e_\gamma \otimes e^\beta + K^m_{\alpha\beta} e_m \otimes e^\beta) \\ &+ \varepsilon_{A,\beta}^m e_m \otimes e^\beta + \varepsilon_A^m (K^m_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e^\beta + A_{\beta m}^n e_n \otimes e^\beta) \\ &= [\varepsilon_{A,\beta}^\alpha + \varepsilon_A^\gamma \{\alpha^\beta\} + \varepsilon_A^m K^m_{\alpha\beta}] e_\alpha \otimes e^\beta \\ &+ [\varepsilon_{A,\beta}^m + \varepsilon_A^\alpha K_{\alpha\beta}^m + \varepsilon_A^n A_{\beta n}^m] e_m \otimes e^\beta. \end{aligned} \quad (۳۴.۳)$$

با استفاده از روابط ۳۱.۳ و ۳۴.۳ به معادلات زیر که ارتباط بین انحناى عرضی و همبسته‌های شامه را با همبسته‌های توده نشان می‌دهند می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A,\beta}^\alpha + \varepsilon_A^\gamma \{\alpha^\beta\} + \varepsilon_A^m K^m_{\alpha\beta} &= \Gamma_{AB}^C \varepsilon_C^\alpha \varepsilon_\beta^B, \\ \varepsilon_{A,\beta}^m + \varepsilon_A^\alpha K_{\alpha\beta}^m + \varepsilon_A^n A_{\beta n}^m &= \Gamma_{AB}^C \varepsilon_C^m \varepsilon_\beta^B. \end{aligned} \quad (۳۵.۳)$$

از طرفی با توجه به خواص تابع دلتا می‌دانیم:

$$\tilde{\nabla}_\alpha (\varepsilon_\beta^A \varepsilon_A^\lambda) = \nabla_\alpha (\varepsilon_\beta^A \varepsilon_A^\lambda) = 0. \quad (۳۶.۳)$$

بنابراین داریم:

$$(\nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A) \varepsilon_A^\lambda = -\varepsilon_\beta^A (\nabla_\alpha \varepsilon_A^\lambda). \quad (۳۷.۳)$$

^۷Connection

و برای $\tilde{\nabla}_\alpha$ نیز رابطه‌ی مشابهی داریم. در نتیجه با استفاده از روابط ۲۳.۳، ۲۴.۳ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_A^\lambda \nabla_\alpha \varepsilon_\beta^A + \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N \varepsilon_A^\lambda = \varepsilon_A^\lambda \tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A. \quad (38.3)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۳۷.۳ داریم:

$$-\varepsilon_\beta^A \nabla_\alpha \varepsilon_A^\lambda + \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_\beta^N \varepsilon_A^\lambda = -\varepsilon_\beta^A \tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_A^\lambda. \quad (39.3)$$

و در نتیجه با ضرب طرفین به ε_B^β به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \varepsilon_B^\lambda = \nabla_\alpha \varepsilon_B^\lambda - \Gamma_{MB}^A \varepsilon_\alpha^M \varepsilon_A^\lambda. \quad (40.3)$$

با توجه به این رابطه و رابطه‌ی اول ۳۵.۳ و تعریف مشتق هموردای تعمیم یافته می‌توان نوشت:

$$\tilde{\nabla}_\beta \varepsilon_A^\alpha = -\varepsilon_A^m K_m^\alpha{}_\beta. \quad (41.3)$$

همچنین می‌توان رابطه‌ی دوم ۳۵.۳ را نیز بصورت زیر نوشت:

$$\tilde{\nabla}_\beta \varepsilon_A^m = -\varepsilon_A^\alpha K_{\beta\alpha}{}^m - \varepsilon_A^n A_{\beta n}{}^m. \quad (42.3)$$

با ضرب رابطه‌ی ۴۱.۳ در ε_σ^A داریم:

$$\varepsilon_\sigma^A \tilde{\nabla}_\beta \varepsilon_A^\alpha = -\varepsilon_\sigma^A \varepsilon_A^m K_m^\alpha{}_\beta = 0. \quad (43.3)$$

در نتیجه با توجه به تعریف مشتق هموردای تعمیم یافته خواهیم داشت:

$$\{\alpha\}_{\beta\sigma} = \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^B \varepsilon_\sigma^A \varepsilon_C^\alpha - \varepsilon_{A,\beta}^\alpha \varepsilon_\sigma^A. \quad (44.3)$$

که با توجه به رابطه‌ی

$$\varepsilon_\sigma^A \varepsilon_A^\alpha = \delta_\sigma^\alpha. \quad (45.3)$$

بصورت زیر در می‌آید:

$$\{\alpha\}_{\beta\sigma} = \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^B \varepsilon_\sigma^A \varepsilon_C^\alpha + \varepsilon_A^\alpha \varepsilon_{\sigma,\beta}^A. \quad (46.3)$$

که ارتباط بین همبسته‌های شامه و توده را نشان می‌دهد و می‌توان از آن برای بدست آوردن هر کدام از آن‌ها بر حسب دیگری استفاده کرد. همچنین می‌دانیم که اگر $\bar{\nabla}$ مشتق هموردا در فضای توده باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\alpha e_\beta &= \bar{\nabla}_\alpha(\varepsilon_\beta^A e_A) = \nabla_{(\varepsilon_\alpha^B e_B)}(\varepsilon_\beta^A e_A) \\ &= \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_{\beta,B}^A e_A + \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B \bar{\nabla}_B e_A = (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) e_C.\end{aligned}\quad (۴۷.۳)$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{\nabla}_\alpha e_\beta = (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) e_C. \quad (۴۸.۳)$$

از سوی دیگر می‌توان با استفاده از مفهوم انحنای عرضی نوشت:

$$\bar{\nabla}_\alpha e_\beta = \{\alpha\beta\}^\gamma e_\gamma + K^m_{\alpha\beta} e_m. \quad (۴۹.۳)$$

در نتیجه با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$K_{m\alpha\beta} = e_m \cdot \bar{\nabla}_\alpha e_\beta = -e_\beta \cdot \bar{\nabla}_\alpha e_m. \quad (۵۰.۳)$$

همان‌گونه که می‌بینیم این رابطه نیز بیانگر این نکته است که انحنای عرضی چگونگی تغییرات بردار عمود بر شامه نسبت به مختصات شامه را نشان می‌دهد. با استفاده از شکل بردار در فضای توده می‌توان رابطه‌ی ۴۸.۳ را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\alpha e_\beta &= (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) e_C \\ &= (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) (\varepsilon_C^\gamma e_\gamma + \varepsilon_C^m e_m) \\ &= (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) \varepsilon_C^\gamma e_\gamma + (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) \varepsilon_C^m e_m.\end{aligned}\quad (۵۱.۳)$$

با مقایسه‌ی این رابطه و رابطه‌ی ۴۹.۳ به دو رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\{\alpha\beta\}^\gamma &= \varepsilon_{\beta,\alpha}^C \varepsilon_C^\gamma + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_C^\gamma, \\ K^m_{\alpha\beta} &= (\varepsilon_{\beta,\alpha}^C + \Gamma_{AB}^C \varepsilon_\beta^A \varepsilon_\alpha^B) \varepsilon_C^m.\end{aligned}\quad (۵۲.۳)$$

بر اساس مشتق هموردای توده برای هر تانسور ε_β^B داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^B &= \bar{\nabla}_{(\varepsilon_\alpha^A e_A)} \varepsilon_\beta^B = \varepsilon_\alpha^A \bar{\nabla}_A \varepsilon_\beta^B = \varepsilon_\alpha^A (\varepsilon_{\beta,A}^B + \Gamma_{AC}^B \varepsilon_\beta^C) \\ &= \partial_A \left(\frac{\partial X^B}{\partial x^\beta} \right) \partial_\alpha X^A + \Gamma_{AC}^B \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^C = \frac{\partial^2 X^B}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma_{AC}^B \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^C.\end{aligned}\quad (53.3)$$

به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$\bar{\nabla}_\beta \varepsilon_\alpha^B = \frac{\partial^2 X^B}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma_{AC}^B \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^C. \quad (54.3)$$

در نتیجه با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\bar{\nabla}_\beta \varepsilon_\alpha^B = \bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^B. \quad (55.3)$$

و نشان می‌دهد این مشتق نسبت به اندیس‌های مختصاتی شامه متقارن است و یا بطور معادل می‌توان گفت نسبت به این اندیس‌ها جابجایی دارد. از طرفی اگر ∇_α مشتق هموردای روی شامه باشد داریم:

$$\nabla_\beta \varepsilon_\alpha^A = \varepsilon_{\alpha,\beta}^A - \{\alpha\beta\}^\gamma \varepsilon_\gamma^A = \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \{\alpha\beta\}^\gamma \varepsilon_\gamma^A. \quad (56.3)$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی ۵۳.۳ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 X^A}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_\beta^C. \quad (57.3)$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی ۵۶.۳ می‌توان رابطه‌ی بین مشتق هموردای شامه و توده را بصورت زیر بدست آورد:

$$\nabla_\beta \varepsilon_\alpha^A = \bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A - \{\alpha\beta\}^\gamma \varepsilon_\gamma^A - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_\beta^C. \quad (58.3)$$

و یا

$$\bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_\beta^A = \nabla_\beta \varepsilon_\alpha^A + \{\alpha\beta\}^\gamma \varepsilon_\gamma^A + \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_\beta^C. \quad (59.3)$$

که مشتق هموردای توده را بر حسب مشتق هموردای شامه، همبسته‌های توده و همبسته‌های شامه بدست می‌دهد.

حال به محاسبه‌ی مشتق بردارهای راستای ابعاد اضافه نسبت به شامه می‌پردازیم. اگر $\bar{\nabla}_\alpha$ مشتق هموردا از دید توده باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_m^A &= \bar{\nabla}_{(\varepsilon_\alpha^B e_B)} \varepsilon_m^A = \varepsilon_\alpha^B \bar{\nabla}_B \varepsilon_m^A = \varepsilon_\alpha^B (\varepsilon_{m,B}^A + \Gamma_{BC}^A \varepsilon_m^C) \\ &= \partial_\alpha X^B \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^B} \partial_\alpha \left(\frac{\partial X^A}{\partial x^m} \right) + \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_m^C.\end{aligned}\quad (۶۰.۳)$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{\nabla}_\alpha \varepsilon_m^A = \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^\alpha \partial x^m} + \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_m^C.\quad (۶۱.۳)$$

با اعمال این مشتق بر روی بردارهای پایه ابعاد اضافه نیز خواهیم داشت:

$$\bar{\nabla}_\alpha e_m = M_{\alpha m}^\beta e_\beta + N_{\alpha m}^n e_n.\quad (۶۲.۳)$$

که در این رابطه می‌توان با استفاده از تعامد بردارهای پایه‌ی ابعاد اضافه بر شامه $M_{\alpha m}^\beta$ و $N_{\alpha m}^n$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}N_{\alpha mn} &= e_n \cdot \bar{\nabla}_\alpha e_m := \mathcal{G}(e_n, \bar{\nabla}_\alpha e_m), \\ M_{\alpha \beta m} &= e_\beta \cdot \bar{\nabla}_\alpha e_m := \mathcal{G}(e_\beta, \bar{\nabla}_\alpha e_m).\end{aligned}\quad (۶۳.۳)$$

با توجه به رابطه‌ی ۳۳.۳ و ۵۰.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}N_{\alpha mn} &= A_{\alpha mn}, \\ M_{\alpha \beta m} &= -e_m \cdot \bar{\nabla}_\alpha e_\beta = -K_{\alpha \beta m}.\end{aligned}\quad (۶۴.۳)$$

و با استفاده از این تساوی‌ها خواهیم داشت:

$$\bar{\nabla}_\alpha e_m = -K_{\alpha m}^\beta e_\beta + A_{\alpha m}^n e_n.\quad (۶۵.۳)$$

و در نهایت با استفاده از این رابطه و رابطه‌ی ۶۱.۳ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{m,\alpha}^A = -\varepsilon_\mu^A g^{\mu\nu} K_{m\nu\alpha} - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\alpha^B \varepsilon_m^C + \eta^{nl} \varepsilon_n^A A_{\alpha ml}. \quad (۶۶.۳)$$

که در آن $g^{\mu\nu}$ و η^{nl} به ترتیب متریک شامه و فضای ابعاد اضافه‌اند. با استفاده از رابطه‌ی بالا براحتی می‌توان انحنای عرضی شامه را بصورت زیر بدست آورد:

$$K_{\mu\nu m} = -\mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\mu^A \varepsilon_{m;\nu}^B. \quad (۶۷.۳)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از روابطی که بدست آوردیم به محاسبه‌ی رابطه‌ی بین تانسور ریمان شامه و توده بپردازیم. برای این منظور از اتحاد ریچی بصورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] \varepsilon_\alpha^A = (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) \varepsilon_\alpha^A = \varepsilon_\sigma^A g^{\sigma\beta} R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (۶۸.۳)$$

که $R_{\beta\alpha\mu\nu}$ تانسور ریمان شامه است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۲۳.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu \varepsilon_\alpha^A &= -(\nabla_\nu \Gamma_{MN}^A) \varepsilon_\mu^M \varepsilon_\alpha^N - \Gamma_{MN}^A (\nabla_\nu \varepsilon_\mu^M) \varepsilon_\alpha^N \\ &\quad - \Gamma_{MN}^A \varepsilon_\mu^M (\nabla_\nu \varepsilon_\alpha^N) + (\nabla_\nu \varepsilon_m^A) K_{\mu\alpha}^m + \varepsilon_m^A (\nabla_\nu K_{\mu\alpha}^m). \end{aligned} \quad (۶۹.۳)$$

با جایگذاری روابطی که قبلاً برای هر یک از عبارات بالا بدست آوردیم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu \varepsilon_\alpha^A &= -\Gamma_{MN,B}^A \varepsilon_\mu^M \varepsilon_\alpha^N \varepsilon_\nu^B \\ &\quad - \Gamma_{MN}^A (-\Gamma_{BC}^M \varepsilon_\nu^B \varepsilon_\mu^C + \varepsilon_m^M K_{\nu\mu}^m) \varepsilon_\alpha^N \\ &\quad - \Gamma_{MN}^A (-\Gamma_{DE}^N \varepsilon_\nu^D \varepsilon_\alpha^E + \varepsilon_n^N K_{\nu\alpha}^n) \varepsilon_\mu^M \\ &\quad + (\varepsilon_\lambda^A g^{\lambda\sigma} K_{m\sigma\nu} - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\nu^B \varepsilon_m^C + \eta^{nl} \varepsilon_n^A A_{\nu ml}) K_{\mu\alpha}^m \\ &\quad + \varepsilon_m^A (\nabla_\nu K_{\mu\alpha}^m). \end{aligned} \quad (۷۰.۳)$$

بطور مشابه با جابجایی اندیس‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu \nabla_\nu \varepsilon_\alpha^A &= -\Gamma_{CD,E}^A \varepsilon_\mu^C \varepsilon_\alpha^D \varepsilon_\nu^E \\
 &\quad - \Gamma_{CD}^A (-\Gamma_{FG}^C \varepsilon_\mu^F \varepsilon_\nu^G + \varepsilon_m^C K_{\mu\nu}^m) \varepsilon_\alpha^D \\
 &\quad - \Gamma_{WY}^A (-\Gamma_{EF}^Y \varepsilon_\mu^E \varepsilon_\alpha^F + \varepsilon_n^Y K_{\mu\alpha}^n) \varepsilon_\nu^W \\
 &\quad + (\varepsilon_\alpha^A g^{\alpha\beta} K_{n\beta\mu} - \Gamma_{DE}^A \varepsilon_\mu^D \varepsilon_m^E + \eta^{kl} \varepsilon_k^A A_{\mu nl}) K_{\nu\alpha}^n \\
 &\quad + \varepsilon_n^A (\nabla_\mu K_{\nu\alpha}^n). \tag{۷۱.۳}
 \end{aligned}$$

در این رابطه برای جلوگیری از اشتباه در جمع تک تک جملات و حذف شدن آنها، از اندیس‌های متفاوت استفاده کرده‌ایم. با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی ۶۸.۳ و مرتب کردن اندیس‌ها در نهایت به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon_m^A (\nabla_\nu K_{\mu\alpha}^m - \nabla_\mu K_{\nu\alpha}^m + \eta^{ml} A_{\nu nl} K_{\mu\alpha}^n - \eta^{np} A_{\mu mp} K_{\nu\alpha}^m) \\
 &\quad + \varepsilon_\nu^M \varepsilon_\mu^B \varepsilon_\alpha^N \mathcal{R}_{NBM}^A \\
 &\quad + \varepsilon_\sigma^A (-R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{m\beta\nu} K_{\mu\alpha}^m - K_{n\beta\mu} K_{\nu\alpha}^n) = 0. \tag{۷۲.۳}
 \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه و رابطه‌ی ۱۳.۳ به دو رابطه‌ی زیر که به ترتیب به معادلات گاوس و کودازی^۸ مشهورند می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \eta^{mn} (K_{m\mu\alpha} K_{n\nu\beta} - K_{m\mu\beta} K_{n\nu\alpha}) \\
 &\quad + \mathcal{R}_{ABCD} \varepsilon_\mu^A \varepsilon_\nu^B \varepsilon_\alpha^C \varepsilon_\beta^D. \tag{۷۳.۳}
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha K_{m\mu\nu} - \nabla_\nu K_{m\mu\alpha} &= \eta^{nl} (A_{nm\alpha} K_{l\mu\nu} - A_{nm\nu} K_{l\mu\alpha}) \\
 &\quad + \mathcal{R}_{ABCD} \varepsilon_\mu^A \varepsilon_\nu^B \varepsilon_\alpha^C \varepsilon_m^D. \tag{۷۴.۳}
 \end{aligned}$$

از سوی دیگر با ضرب طرفین رابطه‌ی ۶۶.۳ در $\mathcal{G}_{DA} \varepsilon_b^D$ و با توجه به اینکه:

$$\mathcal{G}_{AB} \varepsilon_n^A \varepsilon_m^B = \eta_{mn} = \varepsilon_a \delta_{nm}. \tag{۷۵.۳}$$

^۸Gauss and Codazzi Equations

که در آن ϵ_a زمان‌گونه یا فضاگونه بودن ابعاد اضافی را نشان می‌دهد خواهیم داشت:

$$A_{\alpha mn} = \mathcal{G}_{AD} \epsilon_n^D \epsilon_{m,\alpha}^A + [BC, D] \epsilon_n^D \epsilon_\alpha^B \epsilon_m^C. \quad (۷۶.۳)$$

حال با مشتق گرفتن از رابطه‌ی ۷۵.۳ نسبت به مختصات شامه خواهیم داشت:

$$\mathcal{G}_{AB} [\epsilon_{m,\mu}^A \epsilon_n^B + \epsilon_m^A \epsilon_{n,\mu}^B] + \mathcal{G}_{AB,C} \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\mu^C = 0. \quad (۷۷.۳)$$

با تکرار این عمل بر روی رابطه‌ی ۱۳.۳ و استفاده از روابط ۲۲.۳ و ۶۶.۳ و جایگذاری آن‌ها در این رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{AB} \epsilon_{m,\mu}^A \epsilon_n^B &= -\mathcal{G}_{AB} \epsilon_m^A \epsilon_{n,\mu}^B \\ &\quad - \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\mu^C [AC, B] - \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\mu^C [BC, A]. \end{aligned} \quad (۷۸.۳)$$

با همسان‌سازی اندیس‌ها و جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی ۷۶.۳، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} A_{\alpha mn} &= -\mathcal{G}_{AB} \epsilon_{m,\alpha}^A \epsilon_n^B \\ &\quad - \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\alpha^C [BC, A] - \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\alpha^C [AC, B] \\ &\quad + \epsilon_m^A \epsilon_n^B \epsilon_\alpha^C [AB, C]. \end{aligned} \quad (۷۹.۳)$$

در این رابطه می‌بینیم که $A_{\alpha mn}$ نسبت به تعویض اندیس‌های m و n پادمتقارن است. بنابراین اگر تنها یک بعد اضافی داشته باشیم $A_{\alpha mn}$ صفر خواهد بود. با مشتق هموردا گرفتن نسبت به مختصات شامه از رابطه‌ی ۶۶.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_{m;\alpha\beta}^A &= -\epsilon_\mu^A g^{\mu\nu} K_{m\nu\alpha;\beta} + \epsilon_{\mu;\beta}^A g^{\mu\nu} K_{m\nu\alpha} \\ &\quad - \Gamma_{BC,D}^A \epsilon_\alpha^B \epsilon_m^C \epsilon_\beta^D - \Gamma_{BC}^A \epsilon_{\alpha;\beta}^B \epsilon_m^C - \Gamma_{BC}^A \epsilon_\alpha^B \epsilon_{m;\beta}^C \\ &\quad + \eta^{nl} \epsilon_{n;\beta}^A A_{\alpha ml} + \eta^{nl} \epsilon_n^A A_{ml\alpha;\beta}. \end{aligned} \quad (۸۰.۳)$$

با جابجایی اندیس‌های مشتق و استفاده از رابطه‌ی ۷۴.۳ به رابطه‌ی زیر که به معادله‌ی ریچی^۹ مشهور است می‌رسیم:

^۹Ricci equation

$$\begin{aligned}
A_{ml\alpha;\beta} - A_{ml\beta;\alpha} = & \eta^{nk} [A_{ml\alpha} A_{\beta nk} - A_{ml\beta} A_{\alpha nk}] \\
& + g^{\mu\nu} [K_{m\nu\alpha} K_{l\beta\mu} - K_{m\nu\beta} K_{l\mu\alpha}] \\
& + \mathcal{R}_{ABCD} \varepsilon_{\beta}^A \varepsilon_{\alpha}^B \varepsilon_m^C \varepsilon^D.
\end{aligned} \tag{۸۱.۳}$$

معادلات گاوس، کودازی و ریچی شرایط انتگرال‌پذیری برای غوطه‌وری ایزومتریک هستند. با توجه به خاصیت پادتقارنی $A_{ml\alpha}$ ها، در صورت وجود تنها یک بعد اضافی معادلات گاوس و کودازی باقی خواهند ماند. همچنین لازم به ذکر است که علاوه بر مطالب گفته شده در این فصل، خواننده‌ی علاقمند برای آشنایی و مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌تواند از مراجع [۱۳، ۱۴] نیز استفاده کند.

۲.۳ غوطه‌وری اختلالی

در ادامه می‌خواهیم به بررسی اختلال در مدل‌های شامه‌ای بپردازیم. این اختلال‌ها می‌توانند ناشی از افت و خیزهای کوانتومی حول شامه باشند. از نظر تاریخی، بررسی زیر منیفولدهای غوطه‌ور دیفرنسیل‌پذیر که از طریق اختلال بوجود آمده‌اند ابتدا توسط جان نش^{۱۰} صورت گرفته است [۱۵] و او در آن به این سوال پرداخته که آیا می‌توان بطور پیوسته در شامه‌ی اولیه اختلالاتی ایجاد کنیم بطوری که نتیجه‌ی نهایی حاصل از این کار نشان‌دهنده‌ی یک شامه‌ی دیگر در همان فضای توده باشد؟ اگر Z^A نشان‌دهنده‌ی اختلال درنگاشت غوطه‌وری و ζ یک راستای دلخواه که شامه را قطع می‌کند باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
Z^A(x^\alpha, \zeta^m) &= X^A(x^\alpha) + \sqrt{\sigma} \zeta^a X_{,a}^A(x^\alpha) \\
&= X^A(x^\alpha) + \sqrt{\sigma} \zeta^a \varepsilon_a^A(x^\alpha).
\end{aligned} \tag{۸۲.۳}$$

که در این رابطه $\sqrt{\sigma}$ پارامتر اختلال است و در واقع میزان نفوذ ذرات در توده را نشان می‌دهد. همچنین در ادامه خواهیم دید که این پارامتر مشخص‌کننده‌ی مرتبه‌ی اختلال و در نتیجه تعیین‌کننده‌ی اهمیت جملات در بسط‌ها می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$dZ^A(x^\mu, \zeta^m) = Z_{,\mu}^A dx^\mu + Z_{,m}^A d\zeta^m. \tag{۸۳.۳}$$

^{۱۰} John Nash

با تعریف

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{,\mu}^A &= q_\mu^A, \\ \mathcal{Z}_{,m}^A &= q_m^A. \end{aligned} \quad (۸۴.۳)$$

خواهیم داشت:

$$d\mathcal{Z}^A(x^\mu, \zeta^m) = q_\mu^A dx^\mu + q_m^A d\zeta^m. \quad (۸۵.۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} q_\mu^A &= \mathcal{Z}_{,\mu}^A = (X^A(x^\mu) + \sqrt{\sigma}\zeta^a \varepsilon_a^A)_{,\mu} = X_{,\mu}^A + \sqrt{\sigma}\zeta^a \varepsilon_{a,\mu}^A, \\ q_m^A &= \mathcal{Z}_{,m}^A = (X^A(x^\mu) + \sqrt{\sigma}\zeta^a \varepsilon_a^A)_{,m} = \sqrt{\sigma}\varepsilon_m^A. \end{aligned} \quad (۸۶.۳)$$

با توجه به این که در قسمت غوطه‌وری غیر اختلالی رابطه‌ی زیر را بدست آوردیم :

$$\varepsilon_{a,\mu}^A = -\varepsilon_\alpha^A \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{K}_{a\beta\mu} - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\mu^B \varepsilon_a^C + \eta^{mn} \varepsilon_m^A A_{\mu an}. \quad (۸۷.۳)$$

که در این جا و در ادامه‌ی محاسبات برای تمییز شامه‌ی اولیه‌ی غیراختلالی از علامت بار استفاده کرده‌ایم. با توجه به رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$q_\mu^A = \varepsilon_\mu^A + \sqrt{\sigma}\zeta^a (-\varepsilon_\alpha^A \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{K}_{a\beta\mu} - \Gamma_{BC}^A \varepsilon_\mu^B \varepsilon_a^C + \eta^{mn} \varepsilon_m^A A_{\mu an}). \quad (۸۸.۳)$$

که اگر $\Gamma_{BC}^A = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$q_\mu^A = \varepsilon_\mu^A - \sqrt{\sigma}\varepsilon_\alpha^A \zeta^a \bar{K}_{a\mu}^\alpha + \sqrt{\sigma}\varepsilon_m^A A_\mu^m. \quad (۸۹.۳)$$

که در آن از تعریف $A_\mu^m := \zeta^a A_{\mu a}^m$ استفاده کرده‌ایم. اکنون به بررسی رابطه‌ی متریک فضای توده، متریک شامه و متریک فضای ابعاد اضافی می‌پردازیم. با استفاده از روابط بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_\nu^B \\
&= \mathcal{G}_{AB} [\varepsilon_\mu^A - \sqrt{\sigma} \varepsilon_\alpha^A \zeta^a \bar{K}_{a\mu}^\alpha + \sqrt{\sigma} \varepsilon_m^A A_\mu^m] \\
&\times [\varepsilon_\nu^B - \sqrt{\sigma} \varepsilon_\beta^B \zeta^b \bar{K}_{b\nu}^\beta + \sqrt{\sigma} \varepsilon_n^B A_\nu^n] \\
&= \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\mu^A \varepsilon_\nu^B + \sigma \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\beta^B \zeta^a \zeta^b \bar{K}_{a\mu}^\alpha \bar{K}_{b\nu}^\beta \\
&- \sqrt{\sigma} \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\mu^A \varepsilon_\beta^B \zeta^b \bar{K}_{b\nu}^\beta - \sqrt{\sigma} \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_\alpha^A \varepsilon_\nu^B \zeta^a \bar{K}_{a\mu}^\alpha \\
&+ \sigma \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_m^A \varepsilon_n^B A_\mu^m A_\nu^n. \tag{۹۰.۳}
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از روابطی که در ابتدای فصل برای متریک اولیه‌ی غیر اختلالی، متریک ابعاد اضافی و متریک فضای توده داشتیم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_\nu^B &= \bar{g}_{\mu\nu} - 2\sqrt{\sigma} \zeta^a \bar{K}_{a\mu\nu} \\
&+ \sigma \bar{g}_{\alpha\beta} \zeta^a \zeta^b \bar{K}_{a\mu}^\alpha \bar{K}_{b\nu}^\beta + \sigma \eta_{mn} A_\mu^m A_\nu^n. \tag{۹۱.۳}
\end{aligned}$$

و بطور مشابه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_m^B &= \mathcal{G}_{AB} [\varepsilon_\mu^A + \sqrt{\sigma} \varepsilon_\alpha^A \zeta^a \bar{K}_{a\mu}^\alpha + \sqrt{\sigma} \varepsilon_n^A A_\mu^n] \sqrt{\sigma} \varepsilon_m^B \\
&= \sigma \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_n^A \varepsilon_m^B A_\mu^n = \sigma \eta_{mn} A_\mu^n = \sigma A_{\mu m}. \tag{۹۲.۳}
\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\mathcal{G}_{AB} q_m^A q_n^B = \sigma \mathcal{G}_{AB} \varepsilon_m^A \varepsilon_n^B = \sigma \eta_{mn}. \tag{۹۳.۳}$$

پس بطور خلاصه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_\nu^B &= g_{\mu\nu} + \sigma \eta_{mn} A_\mu^m A_\nu^n, \\
\mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_m^B &= \sigma A_{\mu m}, \\
\mathcal{G}_{AB} q_m^A q_n^B &= \sigma \eta_{mn}, \\
g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} - 2\sqrt{\sigma} \zeta^a \bar{K}_{a\mu\nu} + \sigma \bar{g}_{\alpha\beta} \zeta^a \zeta^b \bar{K}_{a\mu}^\alpha \bar{K}_{b\nu}^\beta. \tag{۹۴.۳}
\end{aligned}$$

همانگونه که قبلاً هم اشاره شد در این روابط $g_{\mu\nu}$ متریک شامه‌ی اختلالی^{۱۱}، $\bar{g}_{\mu\nu}$ متریک شامه‌ی اولیه‌ی بدون اختلال^{۱۲} و $\bar{K}_{a\mu\nu}$ انحنای عرضی شامه‌ی بدون اختلال می‌باشند. بنابراین با توجه به رابطه‌ی فوق متریک توده در چارچوب گوسی نمایشی بصورت زیر خواهد داشت:

$$\mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \sigma A_{\mu m} A^m{}_{\nu} & \sigma A_{\mu m} \\ \sigma A_{\nu n} & \sigma \eta_{mn} \end{pmatrix}. \quad (۹۵.۳)$$

و یا بطور معادل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} dS^\tau &= \mathcal{G}_{AB} dZ^A dZ^B \\ &= (g_{\mu\nu} + \sigma A_{\mu m} A^m{}_{\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &\quad + 2\sigma A_{\mu m} dx^\mu d\zeta^m + \sigma \eta_{mn} d\zeta^m d\zeta^n. \end{aligned} \quad (۹۶.۳)$$

برای قطری کردن متریک فضای توده می‌توانیم از تبدیلات زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^A &:= q_\mu^A - q_a^A A_\mu^a, \\ \Lambda_m^A &:= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} q_m^A. \end{aligned} \quad (۹۷.۳)$$

با استفاده از این تبدیلات می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{AB} \Lambda_\mu^A \Lambda_\nu^B &= \mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_\nu^B - \mathcal{G}_{AB} q_\mu^A q_b^B A_\nu^b \\ &\quad - \mathcal{G}_{AB} q_a^A q_\nu^B A_\mu^a + \mathcal{G}_{AB} q_a^A q_b^B A_\mu^a A_\nu^b \\ &= g_{\mu\nu} + \sigma \eta_{ab} A_\mu^a A_\nu^b - \sigma A_{\mu b} A_\nu^b \\ &\quad - \sigma A_{a\nu} A_\mu^a + \sigma \eta_{ab} A_\mu^a A_\nu^b \\ &= g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (۹۸.۳)$$

^{۱۱}Deformed Brane's Metric or Perturbed Brane's Metric

^{۱۲}Original Brane's Metric

و همچنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{AB}\Lambda_{\mu}^A\Lambda_a^B &= \mathcal{G}_{AB}(q_{\mu}^A - q_m^A A^m_{\mu})q_a^B \\ &= \sqrt{\sigma}A_{\mu a} - \sqrt{\sigma}\eta_{ma}A^m_{\mu} = 0.\end{aligned}\quad (99.3)$$

و

$$\mathcal{G}_{AB}\Lambda_m^A\Lambda_n^B = \frac{1}{\sigma}\mathcal{G}_{AB}q_m^A q_n^B = \eta_{mn}.\quad (100.3)$$

پس می‌توان بطور خلاصه برای این حالت نیز نوشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{AB}\Lambda_{\mu}^A\Lambda_{\nu}^B &= g_{\mu\nu}, \\ \mathcal{G}_{AB}\Lambda_{\mu}^A\Lambda_a^B &= 0, \\ \mathcal{G}_{AB}\Lambda_m^A\Lambda_n^B &= \eta_{mn}.\end{aligned}\quad (101.3)$$

و یا بطور معادل می‌توان نوشت:

$$\mathcal{G}_{AB} = \Lambda_A^{\alpha}\Lambda_B^{\beta}g_{\alpha\beta} + \Lambda_A^m\Lambda_B^n\eta_{mn}.\quad (102.3)$$

برای بدست آوردن بردارهای پایه‌ی تحت این تبدیلات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu} &= \mathcal{Z}_{,\mu}\partial_A = q_{\mu}^A\partial_A = (\Lambda_{\mu}^A + q_m^A A^m_{\mu})\partial_A \\ &= \Lambda_{\mu}^A\partial_A + q_m^A A^m_{\mu}\partial_A \\ &= \hat{e}_{\mu} + A^m_{\mu}\partial_m.\end{aligned}\quad (103.3)$$

و بطور مشابه داریم:

$$\partial_m = \mathcal{Z}_{,m}\partial_A = q_m^A\partial_A = \sqrt{\sigma}\Lambda_m^A\partial_A = \sqrt{\sigma}\hat{e}_m.\quad (104.3)$$

در نتیجه پایه‌های جدید بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\mu &= \partial_\mu - A^m{}_\mu \partial_m, \\ \hat{e}_m &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_m.\end{aligned}\quad (10.5.3)$$

با محاسبه‌ی جابجایی این پایه‌ها و استفاده از تعریف $A_\mu{}^m := \zeta^a A_{\mu a}{}^m$ و توجه به خاصیت پادتقارنی آن نسبت به اندیس‌های ابعاد اضافی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] &= [\partial_\mu - A^m{}_\mu \partial_m, \partial_\nu - A^n{}_\nu \partial_n] \\ &= (A^n{}_{\mu,\nu} - A^n{}_{\nu,\mu} - A^n{}_\nu A^m{}_{m\mu} - A^m{}_\mu A^n{}_{m\nu}) \partial_n \\ &= \zeta^a (A^n{}_{a\nu,\mu} - A^n{}_{a\mu,\nu} + A^m{}_{\mu\nu} A^n{}_{m\mu} - A^m{}_{a\mu} A^n{}_{m\nu}) \partial_n \\ &= \sqrt{\sigma} \zeta^a F_{\mu\nu}{}^n{}_a \hat{e}_n.\end{aligned}\quad (10.6.3)$$

با تکرار این عمل برای پایه‌های شامه و ابعاد اضافی نیز داریم:

$$\begin{aligned}[\hat{e}_\mu, \hat{e}_a] &= [\partial_\mu - A^m{}_\mu \partial_m, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_a] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\partial_\mu \partial_a - \partial_\mu \partial_a + A^m{}_\mu \partial_m \partial_a - A^m{}_\mu \partial_m \partial_a - A^m{}_{a\mu} \partial_m) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} A^m{}_{a\mu} \partial_m = -A^m{}_{a\mu} \hat{e}_m \\ &= A_{\mu a}{}^m \hat{e}_m.\end{aligned}\quad (10.7.3)$$

برای پایه‌های ابعاد اضافی این براکت صفر می‌شود. در نتیجه در این پایه‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] &= \sqrt{\sigma} \zeta^a F_{\mu\nu}{}^n{}_a \hat{e}_n, \\ [\hat{e}_\mu, \hat{e}_a] &= A_{\mu a}{}^m \hat{e}_m, \\ [\hat{e}_m, \hat{e}_n] &= 0.\end{aligned}\quad (10.8.3)$$

بطور مشابه با روابط ۴۹.۳ و ۶۵.۳ می‌توان ثابت کرد:

$$\begin{aligned} D_\mu \hat{e}_\nu &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \hat{e}_\alpha + \hat{K}_{\mu\nu}^a \hat{e}_a, \\ D_\mu \hat{e}_a &= -\hat{K}_{\mu a}^\nu \hat{e}_\nu + A_{\mu a}^b \hat{e}_b. \end{aligned} \quad (10.9.3)$$

که در این رابطه برای تمایز با پایه‌های قبلی از نماد مشتق هموردای D_μ استفاده کرده‌ایم. از طرفی می‌دانیم [۱۶، ۱۷]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z \mathcal{G}(D_Z Y, X) &= -X \mathcal{G}(Y, Z) + Y \mathcal{G}(Y, Z) + Z \mathcal{G}(Y, Z) \\ &\quad - \mathcal{G}([Z, X], Y) - \mathcal{G}([Y, Z], X) + \mathcal{G}([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (11.0.3)$$

این رابطه به فرمول کوزول^{۱۳} معروف است و در آن X و Y و Z میدان‌های برداری دلخواه هستند. با استفاده از این رابطه داریم:

$$\mathcal{L}_Z \mathcal{G}(D_\gamma \hat{e}_\nu, \hat{e}_\mu) = \mathcal{L}_Z \hat{\Gamma}_{\gamma\nu}^\rho g_{\rho\mu} = \hat{\partial}_\nu g_{\gamma\mu} + \hat{\partial}_\gamma g_{\mu\nu} - \hat{\partial}_\mu g_{\nu\gamma}. \quad (11.1.3)$$

بنابراین نماد کریستوفل منحصر بفرد (همبسته ریمانی یا همبسته لوی‌چیویتا) برای پایه‌های جدید بصورت زیر در می‌آید:

$$\hat{\Gamma}_{\gamma\nu}^\sigma = \frac{1}{\zeta} g^{\sigma\mu} (\hat{\partial}_\nu g_{\gamma\mu} + \hat{\partial}_\gamma g_{\mu\nu} - \hat{\partial}_\mu g_{\nu\gamma}). \quad (11.2.3)$$

که منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$\Gamma_{\gamma\nu}^\sigma := \hat{\Gamma}_{\gamma\nu}^\sigma = \bar{\Gamma}_{\gamma\nu}^\sigma - \sqrt{\sigma} \zeta^m \bar{g}^{\sigma\mu} (\hat{\nabla}_\gamma \bar{K}_{\mu\nu m} + \hat{\nabla}_\nu \bar{K}_{\mu\gamma m} - \hat{\nabla}_\mu \bar{K}_{\gamma\nu m}). \quad (11.3.3)$$

که در این رابطه بترتیب $\bar{\Gamma}_{\gamma\nu}^\sigma$ ، $\bar{g}^{\sigma\mu}$ و $\bar{K}_{\mu\gamma m}$ همبسته، متریک و انحنای عرضی شامه‌ی اولیه هستند. همچنین در این روابط

^{۱۳}Koszul Formula

$$\begin{aligned}\hat{\partial}_\mu &:= \partial_\mu - A_\mu^m \partial_m, \\ \hat{\nabla}_\beta \bar{K}_{\mu\gamma m} &:= \nabla_\beta \bar{K}_{\mu\gamma m} - A_{\beta mn} \bar{K}_{\mu\gamma}^n.\end{aligned}\quad (114.3)$$

می‌باشند. با استفاده از روابط ۱۰۸.۳ و ۱۱۰.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\varkappa \mathcal{G}(D_\mu \hat{e}_\nu, \hat{e}_m) &= -\hat{e}_m g_{\mu\nu} - \mathcal{G}([\hat{e}_\mu, \hat{e}_m], \hat{e}_\nu) \\ &\quad - \mathcal{G}([\hat{e}_\nu, \hat{e}_\mu], \hat{e}_m) + \mathcal{G}([\hat{e}_m, \hat{e}_\nu], \hat{e}_\mu) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_m g_{\mu\nu} - \mathcal{G}(-A_{m\mu}^n \hat{e}_n, e_\nu) \\ &\quad + \mathcal{G}(A_{m\nu}^n \hat{e}_n, \hat{e}_\mu) - \mathcal{G}(\sqrt{\sigma} \zeta^a F_{\nu\mu}{}^a{}_n, \hat{e}_m) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_m g_{\mu\nu} - \sqrt{\sigma} \zeta^a F_{\nu\mu}{}^a{}_n \eta_{mn}.\end{aligned}\quad (115.3)$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی ۱۰۹.۳ داریم:

$$\begin{aligned}\varkappa \mathcal{G}(D_\mu \hat{e}_\nu, \hat{e}_m) &= \varkappa \mathcal{G}(\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \hat{e}_\sigma + \hat{K}_{\mu\nu}^a \hat{e}_a, \hat{e}_m) \\ &= \varkappa \eta_{ma} \hat{K}_{\mu\nu}^a = \varkappa \hat{K}_{\mu\nu m}.\end{aligned}\quad (116.3)$$

و در نهایت با توجه به دو رابطه‌ی بالا انحنای عرضی شامه‌ی اختلالی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{K}_{\mu\nu m} = -\frac{1}{\varkappa \sqrt{\sigma}} \partial_m g_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varkappa} \zeta^a F_{\nu\mu am}.\quad (117.3)$$

این رابطه رفتار انحنای عرضی نسبت به اختلال در شامه‌ی اولیه را نشان می‌دهد. این رابطه نشان می‌دهد که علاوه بر ماده و گرانش، سایر نیروها که در $F_{\nu\mu am}$ نمود پیدا می‌کنند نیز می‌توانند منشا انحنای عرضی شامه در فضای توده باشند. با استفاده از رابطه‌ی ۹۴.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,m} &= -\sqrt{\sigma} \bar{K}_{\mu\nu m} + \sigma \zeta^a \bar{K}_{\mu\gamma a} \bar{K}_{\nu m}^\gamma + \sigma \zeta^b \bar{K}_{\mu\gamma m} \bar{K}_{\nu b}^\gamma \\ &= -\sqrt{\sigma} \bar{K}_{\mu\nu m} + \sigma \zeta^a (\bar{K}_{\mu\gamma a} \bar{K}_{\nu m}^\gamma + \bar{K}_{\mu\gamma m} \bar{K}_{\nu a}^\gamma). \end{aligned} \quad (۱۱۸.۳)$$

و در نتیجه انحنای عرضی شامه‌ی اختلالی بر حسب شامه‌ی اولیه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K_{\mu\nu m} := \hat{K}_{\mu\nu m} = \bar{K}_{\mu\nu m} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2}} \zeta^a (\bar{K}_{\mu\gamma a} \bar{K}_{\nu m}^\gamma + \bar{K}_{\mu\gamma m} \bar{K}_{\nu a}^\gamma - F_{\nu\mu a m}). \quad (۱۱۹.۳)$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی ۱۱۰.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \mathcal{G}(D_a \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) &= -\hat{e}_\nu \mathcal{G}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_a) + \hat{e}_\nu \mathcal{G}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_a) - \hat{e}_\nu \mathcal{G}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_a) \\ &\quad - \mathcal{G}([\hat{e}_a, \hat{e}_\nu], \hat{e}_\mu) - \mathcal{G}([\hat{e}_a, \hat{e}_\nu], \hat{e}_\mu) + \mathcal{G}([\hat{e}_a, \hat{e}_\nu], \hat{e}_\mu) \\ &= \hat{e}_a g_{\mu\nu} + \sqrt{\sigma} \zeta^m F_{\nu\mu a m} \\ &= \hat{e}_a g_{\mu\nu} - \sqrt{\sigma} \zeta^m F_{\mu\nu a m} \\ &= -\sqrt{2} \hat{K}_{\mu\nu a}. \end{aligned} \quad (۱۲۰.۳)$$

9

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \mathcal{G}(D_a \hat{e}_\mu, \hat{e}_b) &= -\hat{e}_b \mathcal{G}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_a) + \hat{e}_\mu \mathcal{G}(\hat{e}_a, \hat{e}_b) + \hat{e}_a \mathcal{G}(\hat{e}_b, \hat{e}_\mu) \\ &\quad - \mathcal{G}([\hat{e}_a, \hat{e}_b], \hat{e}_\mu) - \mathcal{G}([\hat{e}_\mu, \hat{e}_a], \hat{e}_b) + \mathcal{G}([\hat{e}_b, \hat{e}_\mu], \hat{e}_a) \\ &= -\mathcal{G}(-A_{\mu a}^m \hat{e}_m, \hat{e}_b) + \mathcal{G}(-A_{\mu a}^m \hat{e}_m, \hat{e}_b) \\ &= A_{\mu a b} + A_{\mu b a} = 0. \end{aligned} \quad (۱۲۱.۳)$$

بنابراین داریم:

$$D_a \hat{e}_\mu = -\hat{K}_{\mu a}^\nu \hat{e}_\nu. \quad (۱۲۲.۳)$$

و بطور مشابه می‌توان

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(D_a \hat{e}_b, \hat{e}_\alpha) &= -\hat{e}_\alpha \mathcal{G}(\hat{e}_b, \hat{e}_a) + \hat{e}_b \mathcal{G}(\hat{e}_a, \hat{e}_\alpha) + \hat{e}_a \mathcal{G}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_b) \\
&\quad - \mathcal{G}([\hat{e}_a, \hat{e}_\alpha], \hat{e}_b) - \mathcal{G}([\hat{e}_b, \hat{e}_a], \hat{e}_\alpha) + \mathcal{G}([\hat{e}_\alpha, \hat{e}_b], \hat{e}_a) \\
&= -\mathcal{G}(-A_{\alpha a}{}^m \hat{e}_m, \hat{e}_b) + \mathcal{G}(-A_{ab}{}^m \hat{e}_m, \hat{e}_\alpha) \\
&= A_{\mu ab} + A_{\mu ba} = 0.
\end{aligned} \tag{۱۲۳.۳}$$

در نتیجه برای این پایه نیز داریم:

$$D_a \hat{e}_b = 0. \tag{۱۲۴.۳}$$

با استفاده از تعریف تانسور ریمان داریم [۱۷]:

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z. \tag{۱۲۵.۳}$$

در نتیجه با استفاده از این رابطه و روابطی که برای مشتق پایه‌های جدید بدست آوردیم می‌توان نوشت (صفحه‌ی بعد):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)\hat{e}_\gamma &= D_\alpha(D_\beta\hat{e}_\gamma) - D_\beta(D_\alpha\hat{e}_\gamma) - D_{[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta]}\hat{e}_\gamma \\
 &= D_\alpha(\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma\hat{e}_\sigma + \hat{K}_{\beta\gamma}^a\hat{e}_a) - D_\beta(\hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma\hat{e}_\sigma + \hat{K}_{\alpha\gamma}^a\hat{e}_a) \\
 &\quad - \sqrt{\sigma}\zeta^a F_{\alpha\beta}{}^n{}_a D_n\hat{e}_\gamma \\
 &= \hat{\partial}_\alpha\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma(\hat{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\rho\hat{e}_\rho + \hat{K}_{\alpha\sigma}^m\hat{e}_m) \\
 &\quad + \hat{\partial}_\alpha\hat{K}_{\beta\gamma}^a + \hat{K}_{\beta\gamma}^a(-\hat{K}_{\alpha a}^\nu\hat{e}_\nu + A_{\alpha a}^b\hat{e}_b) \\
 &\quad - \hat{\partial}_\beta\hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma(\hat{\Gamma}_{\beta\sigma}^\rho\hat{e}_\rho + \hat{K}_{\beta\sigma}^m\hat{e}_m) \\
 &\quad - \hat{\partial}_\beta\hat{K}_{\alpha\gamma}^a + \hat{K}_{\alpha\gamma}^a(\hat{K}_{\beta a}^\nu\hat{e}_\nu - A_{\beta a}^b\hat{e}_b) \\
 &\quad - \sqrt{\sigma}\zeta^a F_{\alpha\beta}{}^n{}_a(-\hat{K}_{\gamma n}^\nu\hat{e}_\nu) \\
 &= [\hat{\partial}_\alpha\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma - \hat{\partial}_\beta\hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\alpha\rho}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\beta\rho}^\sigma \\
 &\quad - \hat{K}_{\beta\gamma}^a\hat{K}_{\alpha a}^\nu + \hat{K}_{\alpha\gamma}^a\hat{K}_{\beta a}^\sigma + \sqrt{\sigma}\zeta^a F_{\alpha\beta}{}^n{}_a\hat{K}_{\gamma n}^\sigma]\hat{e}_\sigma \\
 &\quad + [\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma\hat{K}_{\alpha\sigma}^m + \hat{\partial}_\alpha\hat{K}_{\beta\gamma}^a + \hat{K}_{\beta\gamma}^a A_{\alpha a}{}^m \\
 &\quad - \hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma\hat{K}_{\beta\sigma}^m - \hat{\partial}_\alpha\hat{K}_{\alpha\gamma}^m - \hat{K}_{\alpha\gamma}^a A_{\beta a}{}^m]\hat{e}_m \\
 &= [\hat{\partial}_\alpha\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma - \hat{\partial}_\beta\hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\alpha\rho}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\beta\rho}^\sigma \\
 &\quad - \hat{K}_{\beta\gamma}^a\hat{K}_{\alpha a}^\nu + \hat{K}_{\alpha\gamma}^a\hat{K}_{\beta a}^\sigma + \sqrt{\sigma}\zeta^a F_{\alpha\beta}{}^n{}_a\hat{K}_{\gamma n}^\sigma]\hat{e}_\sigma \\
 &\quad + [\hat{\nabla}_\alpha\hat{K}_{\beta\gamma}^m - \hat{\nabla}_\beta\hat{K}_{\alpha\gamma}^m - \hat{K}_{\alpha\gamma}^a A_{\beta a}{}^m + \hat{K}_{\beta\gamma}^a A_{\alpha a}{}^m]\hat{e}_m.
 \end{aligned} \tag{۱۲۶.۳}$$

در نتیجه با استفاده از این رابطه می‌توان رابطه‌ی بین مولفه‌های مختلف تانسورهای ریمان شامه‌ی اختلالی و فضای توده را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{e}_\mu, \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)e_\gamma \rangle &= \Lambda_\alpha^A \Lambda_\beta^B \Lambda_\gamma^C \Lambda_\mu^D \mathcal{R}_{DCAB} \\
 &= \hat{R}_{\mu\gamma\alpha\beta} - \hat{K}_{\beta\gamma}^a \hat{K}_{\alpha\mu a} + \hat{K}_{\alpha\gamma}^a \hat{K}_{\beta\mu a}.
 \end{aligned} \tag{۱۲۷.۳}$$

که در این رابطه $\hat{R}_{\mu\gamma\alpha\beta}$ تانسور ریمان شامه‌ی اختلالی و بصورت زیر می‌باشد:

$$R_{\gamma\alpha\beta}^\sigma := \hat{R}_{\gamma\alpha\beta}^\sigma = \hat{\partial}_\alpha\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma - \hat{\partial}_\beta\hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\alpha\rho}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\rho\hat{\Gamma}_{\beta\rho}^\sigma + \sqrt{\sigma}\zeta^a F_{\alpha\beta}{}^n{}_a \hat{K}_{\gamma n}^\sigma. \tag{۱۲۸.۳}$$

از این رابطه نیز می‌بینیم که سایر نیروها نیز می‌توانند منبعی برای انحنای فضا زمان باشند. در واقع در حضور این نیروها انحنای فضا زمان تحت تاثیر قرار می‌گیرد. به طریق مشابه با استفاده از رابطه‌ی ۱۲۶.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \langle \hat{e}_l, \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)\hat{e}_\gamma \rangle &= \Lambda_\alpha^A \Lambda_\beta^B \Lambda_\gamma^C \Lambda_\mu^D \mathcal{R}_{DCAB} \\ &= \hat{\nabla}_\alpha \hat{K}_{\beta\gamma l} - \hat{\nabla}_\beta \hat{K}_{\alpha\gamma l} - \hat{K}_{\alpha\gamma}^a A_{\beta a l} + \hat{K}_{\beta\gamma}^a A_{\alpha a l}. \end{aligned} \quad (129.3)$$

با برگشت به رابطه‌ی ۱۲۵.۳ دوباره می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_m)\hat{e}_n &= D_\alpha(D_m \hat{e}_n) - D_m(D_\alpha \hat{e}_n) - D_{[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_m]}\hat{e}_n \\ &= -D_m(-\hat{K}_{\alpha n}^\nu \hat{e}_{n\nu} - A_{\alpha n}^b \hat{e}_b) + A_{\alpha m}^b D_b \hat{e}_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \hat{K}_{\alpha n, m}^\nu \hat{e}_\nu + \hat{K}_{\alpha n}^\nu (-\hat{K}_{\nu m}^\sigma \hat{e}_\sigma) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \hat{K}_{\alpha n, m}^\sigma - \hat{K}_{\alpha n}^\nu \hat{K}_{\nu m}^\sigma \right] \hat{e}_\sigma. \end{aligned} \quad (130.3)$$

بنابراین می‌توان بطور مشابه با رابطه‌ی ۱۲۹.۳ نوشت:

$$\begin{aligned} \langle \hat{e}_\mu, \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_m)\hat{e}_n \rangle &= \Lambda_\alpha^A \Lambda_m^B \Lambda_n^C \Lambda_\mu^D \mathcal{R}_{DCAB} \\ &= g_{\mu\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \hat{K}_{\alpha n, m}^\sigma - \hat{K}_{\alpha n}^\nu \hat{K}_{\nu m}^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (131.3)$$

و همچنین

$$\langle \hat{e}_l, \mathcal{R}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_m)\hat{e}_n \rangle = \Lambda_\alpha^A \Lambda_m^B \Lambda_n^C \Lambda_l^D \mathcal{R}_{DCAB} = 0. \quad (132.3)$$

همانگونه که اشاره شد با استفاده از روابط فوق می‌توان مولفه‌های تانسور ریمن توده و شامه را بدست آورد.

۳.۳ چکیده‌ی فصل

در این فصل به مطالعه‌ی غوطه‌وری هندسی به عنوان پایه‌ی هندسی نظریه‌های ابعاد اضافی پرداختیم. ابتدا روابط بین متریک فضای شامه، ابعاد اضافی و توده را در حالت بدون اختلال در شامه بیان کردیم. در ادامه به مفهوم انحنای عرضی اشاره شد. سپس معادلات گاوس و کودازی و ریچی که شرایط انتگرالپذیری برای غوطه‌وری ایزومتریک هستند معرفی شدند. در انتهای این فصل به مطالعه‌ی اختلال در شامه و شرایط غوطه‌وری اختلالی پرداخته و روابط بین متریک شامه‌ی اختلالی و انحنای عرضی این شامه و شامه‌ی اولیه را بدست آوردیم. همچنین تانسورهای ریمان شامه و توده را تحت اختلال محاسبه کردیم. در فصل‌های بعدی به کاربردهای این فصل خواهیم پرداخت.

فصل ۴

معادلات انحراف ژئودزی القا شده روی شامه و قاعده‌ی کوانتس بوه‌ر-زامرفلد

در این فصل معادلات انحراف ژئودزی القا شده روی شامه را در مدل جهان شامه ای راندال-ساندرم I را که در آن تمام میدان‌های مادی بجز گرانش مقید به شامه اند را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان خواهیم داد قاعده‌ی کوانتس بوه‌ر - زامرفلد را با استفاده از معادلات ژئودزیک و انحراف ژئودزی القا شده روی شامه می‌توان بدست آورد. همچنین با استفاده از این قاعده‌ی کوانتس خواهیم دید که مسیر ذرات آزمون کوانتیزه شده و بصورت ضربی از واحد طول بنیادی کامپتون $\frac{h}{mc}$ در می‌آید.

در مورد اهمیت مطالعه این فصل باید گفت که در دوره حاضر، فرمول‌بندی یک نظریه‌ی سازگار گرانش کوانتومی مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است که در این راستا فیزیکدانان سعی می‌کنند گرانش را مانند سایر نیروهای شناخته شده طبیعت کوانتومی کنند. البته رهیافت دیگری نیز وجود دارد که در آن تلاش بر این است که اثرات کوانتومی را به نوعی از هندسه فضا-زمان استخراج کنند. ما نیز در این فصل، رهیافت دوم را مد نظر قرار داده‌ایم. البته لازم به ذکر است که برای هندسی کردن مکانیک کوانتوم نیز رهیافت‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال می‌توان افزایش تعداد ابعاد فضا-زمان در مدل‌های گرانشی KK [۱۸]، فضا-زمان وایلی^۱ [۱۹]، نظریه‌های گرانش اسکالر تانسوری^۲ [۲۰] و یا هر تعمیم مناسبی از نظریه‌ی نسبیت عام انیشتین را نام برد.

در مدل‌های ابعاد اضافه نشان داده می‌شود که وجود ابعاد اضافی غیر فشرده منجر به اثرات کوانتومی در کمیت‌های کلاسیکی القا شده روی شامه چهار بعدی می‌شود [۲۱]. به عنوان مثال دیگری از این رهیافت کوانتس می‌توان به رهیافت مولفان [۲۲] اشاره کرد که در آن مولفان برای ساختن یک نظریه‌ی گرانش کوانتومی شبه کلاسیک بر اساس اثرات هندسی

^۱ Weylian Space-Time

^۲ Scalar-Tensor Gravity

از مدل IMT که تعمیمی از مدل KK می‌باشد استفاده کرده‌اند. در این رهیافت نه تنها میدان‌های پیمانه‌ای با گرانش متحد شده و منشا هندسی پیدا می‌کنند بلکه میدان‌های مادی نیز با گرانش متحد شده و بصورت هندسی و بر اساس انحنای عرضی توصیف می‌شوند. در این رهیافت مولفان نشان می‌دهند که منشا اثرات کوانتومی در واقع نوسانات میدان‌های مادی حول شامه‌ی چهار بعدی است.

رفتار ژئودزی‌ها روی شامه و فضای توده در مدل جهان شامه‌ای راندال-ساندرم و پیامدهای آن بطور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته اند [۲۳، ۲۴]. البته شکل کلی معادلات ژئودزی القایی روی شامه که در آن تمام میدان‌های مادی بجز گرانش محدود به شامه می‌باشند و تنها گرانش در فضای توده انتشار پیدا می‌کند در [۲۵] نیز داده شده‌اند. این مولفان معادله‌ی ژئودزی القایی روی شامه‌ی چهار بعدی را بصورت زیر بدست می‌آورند:

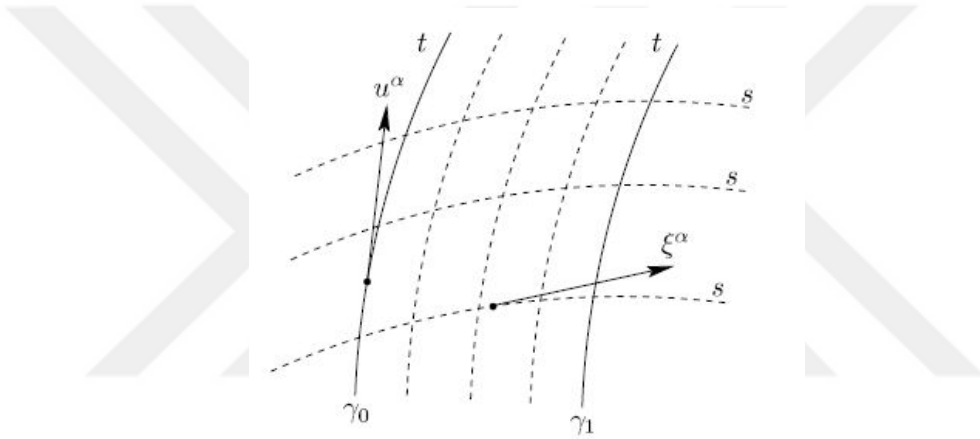
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.4)$$

که در آن $\mu = 0, 1, 2, 3$ زمان ویژه‌ی تعریف شده روی شامه و $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ نمادهای کریستوفل شامه‌ی چهار بعدی هستند که از طریق متریک القایی روی شامه که در فصل قبل در مورد آن بحث کردیم بدست می‌آیند. در اصل این معادله با القا کردن معادله ژئودزی پنج بعدی در فضای توده به روی شامه‌ی چهار بعدی بدست می‌آید. می‌توان به طریق مشابه معادله‌ی انحراف ژئودزی القایی روی شامه را نیز بدست آورد که موضوع این فصل از این پایان‌نامه است. در این راستا ابتدا شکل کلی این معادله که می‌تواند در هر یک از مدل‌های ابعاد اضافی بکار گرفته شود ارائه می‌شود و سپس توجه خود را به مدل راندال-ساندرم معطوف می‌کنیم و از این طریق قاعده‌ی کوانتتش بوهر-زامرفلد را استخراج می‌کنیم.

۱.۴ معادله‌ی انحراف ژئودزی

ابتدا بهتر است مروری بر معادله‌ی ژئودزی در فضا-زمان چهار بعدی در قالب نظریه‌ی نسبیت عام داشته باشیم. در واقع یکی از نمودهای فیزیکی تانسور ریمان و یا انحنای در بررسی وضعیت ژئودزی‌ها نسبت به هم آشکار می‌شود. با توجه به شکل (۱.۴) در صفحه‌ی بعد اگر γ_0 و γ_1 دو ژئودزی با نمایش $x^\mu(t)$ باشند که در آن t یک پارامتر آفین است، میدان برداری $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$

بردار مماس بر این ژئودزی‌ها بوده و در رابطه‌ی $u^\mu_{;\alpha} u^\alpha = 0$ صدق می‌کند. اگر فضای بین γ_0 و γ_1 را به ژئودزیک‌هایی که با $s \in [0, 1]$ مشخص می‌شوند تقسیم کنیم بصورتی که γ_0 با $s = 0$ و γ_1 با $s = 1$ مشخص شوند می‌توان مجموعه‌ی این ژئودزیک‌ها را با $x^\mu(s, t)$ نشان داد که در آن s مشخص‌کننده هر یک از ژئودزیک‌ها و t یک پارامتر آفین برای هر ژئودزی است. اگر t را در $x^\mu(s, t)$ ثابت نگه داریم و s را تغییر دهیم خانواده‌ای از خم‌ها که با t مشخص و با s پارامتریزه می‌شوند را بدست خواهیم آورد که در حالت کلی ژئودزیک نیستند.



شکل ۱.۴: انحراف ژئودزی‌ها نسبت به هم

در این خانواده $\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$ بردار مماس بر این خم‌ها خواهد بود. هدف ما بررسی تغییرات این بردار نسبت به t است یعنی:

$$\frac{D^\nu \xi^\mu}{Dt^\nu} = u^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta \xi^\mu), \quad (2.4)$$

در فضا-زمان تخت ژئودزی‌های γ_0 و γ_1 خط راست هستند و حتی اگر فاصله آنها با t تغییر کند این تغییر الزاما خطی است یعنی:

$$\frac{D^\nu \xi^\mu}{Dt^\nu} = 0, \quad (3.4)$$

اما زمانی که انحنا وارد صحنه می‌شود این شتاب دیگر صفر نیست و متناسب با تانسور ریمان است. از تعریف $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ و $\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$ و تعریف مشتق لی یک بردار بصورت زیر:

$$\mathcal{L}_Y A^\alpha = Y^\beta \nabla_\beta A^\alpha - A^\beta \nabla_\beta Y^\alpha, \quad (۴.۴)$$

خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_u \xi^\alpha = \mathcal{L}_\xi u^\alpha = 0, \quad (۵.۴)$$

و یا

$$\xi^\alpha_{;\beta} u^\beta = u^\alpha_{;\beta} \xi^\beta. \quad (۶.۴)$$

با استفاده از معادله‌ی ژئودزی $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$ و روابط بالا می‌توان ثابت کرد که $\xi^\alpha u_\alpha$ در راستای γ ثابت می‌ماند به اینصورت که:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\xi^\alpha u_\alpha) &= u^\beta \nabla_\beta (\xi^\alpha u_\alpha) \\ &= u^\beta (\nabla_\beta \xi^\alpha) u_\alpha + u^\beta \xi^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) \\ &= \xi^\beta (\nabla_\beta u^\alpha) u_\alpha = \frac{1}{\gamma} \xi^\beta \nabla_\beta (u^\alpha u_\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

بنابراین می‌توان پارامتر مناسب مسیر ژئودزی را طوری انتخاب کرد که در روی ژئودزی ξ^α ، γ در هر نقطه بر u^α عمود باشد یعنی $\xi^\alpha u_\alpha = 0$ و این بدین معنی است که خم $t = constant$ ، ژئودزی γ را بصورت قائم قطع کند که در اینصورت از ξ^α به عنوان بردار انحراف تعبیر می‌شود. در نهایت با برگشت به رابطه‌ی ۲.۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{D^\gamma \xi^\alpha}{Dt^\gamma} &= u^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha) \\ &= u^\gamma \nabla_\gamma (\xi^\beta \nabla_\beta u^\alpha) = u^\gamma \xi^\beta \nabla_\gamma (\nabla_\beta u^\alpha) + u^\alpha \nabla_\beta u^\alpha \nabla_\gamma \xi^\beta \\ &= (\nabla_\gamma \nabla_\beta u^\alpha - R^\alpha_{\mu\beta\gamma} u^\mu) \xi^\beta u^\gamma + \nabla_\beta u^\alpha \nabla_\gamma u^\beta \xi^\gamma \\ &= \nabla_\beta (\nabla_\gamma u^\alpha u^\gamma) \xi^\beta - \nabla_\gamma u^\alpha \nabla_\beta u^\gamma \xi^\beta \\ &\quad - R^\alpha_{\mu\beta\gamma} u^\mu \xi^\beta u^\gamma + \nabla_\beta u^\alpha \nabla_\gamma u^\beta \xi^\gamma. \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

که در آن از اتحاد ریچی که در فصل پیش نیز داشتیم استفاده کرده‌ایم. جمله‌ی اول با استفاده از معادله‌ی ژئودزیک صفر می‌شود و جملات دوم و چهارم نیز همدیگر را حذف می‌کنند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{D^\nu \xi^\alpha}{Dt^\nu} = -R^\alpha_{\mu\beta\gamma} u^\mu \xi^\beta u^\gamma. \quad (9.4)$$

این رابطه موسوم به معادله‌ی انحراف ژئودزی است و نشان می‌دهد که انحنای فضا-زمان که در تانسور ریمان نمود پیدا می‌کند باعث شتاب نسبی دو ژئودزی کنار هم می‌شود [۲۶، ۲۷].

۲.۴ معادله‌ی انحراف ژئودزی القا شده روی شامه و قاعده‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد

اکنون پس از آشنایی و مرور معادله‌ی انحراف ژئودزی، برای دستیابی به هدف این فصل که در ابتدا اشاره شد، بطور مشابه از معادله‌ی انحراف ژئودزی در فضای توده که به صورت زیر است شروع می‌کنیم:

$$\frac{(\delta) D^\nu \xi^A}{DS^\nu} = \mathcal{R}^A_{BCD} \frac{dx^B}{dS} \frac{dx^C}{dS} \xi^D, \quad (10.4)$$

که در این رابطه \mathcal{R}^A_{BCD} تانسور ریمان فضای توده، ξ^A یک بردار انحراف ژئودزی بی‌نهایت کوچک و S یک پارامتر آفین در فضای توده است. برای القا کردن معادله‌ی فوق روی شامه، به مولفه‌های تانسور ریمان القایی روی شامه نیاز داریم که از طریق معادلات گاوس و کودازی و روابط ۱۲۷.۳، ۱۲۹.۳ و ۱۳۲.۳ که در فصل قبل بطور مفصل مورد مطالعه قرار گرفتند بدست می‌آیند. با استفاده از روابط یاد شده در چارچوب نرمال گاوسی داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\mu_{\alpha\beta\gamma} &= R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + K_{\alpha\beta} K^\mu_\gamma - K_{\alpha\gamma} K^\mu_\beta \\ \mathcal{R}^\mu_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} K^\mu_{\alpha,\alpha} - K^\sigma_\alpha K_\sigma^\mu, \end{aligned} \quad (11.4)$$

که $R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu}$ تانسور ریمن چهار بعدی و $K_{\alpha\beta}$ انحنای عرضی شامه است. در نتیجه با جایگذاری این روابط در رابطه‌ی ۱۰.۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{({}^{\delta})D^{\nu}\xi^{\mu}}{DS^{\nu}} &= \mathcal{R}_{BCD}^{\mu} \frac{dx^B}{dS} \frac{dx^C}{dS} \xi^D \\ &= \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{dS} \frac{dx^{\beta}}{dS} \xi^{\gamma} + \mathcal{R}_{\epsilon\alpha\epsilon}^{\mu} \frac{dx^{\epsilon}}{dS} \frac{dx^{\alpha}}{dS} \xi^{\epsilon} \\ &\quad + \mathcal{R}_{\epsilon\epsilon\alpha}^{\mu} \left(\frac{dx^{\epsilon}}{dS}\right)^2 \xi^{\alpha}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

که در آن بقیه‌ی مولفه‌ها با استفاده از خواص تانسور ریمن صفر می‌شوند. بنابراین رابطه‌ی بالا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{({}^{\delta})D^{\nu}\xi^{\mu}}{dS^{\nu}} &= (R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + K_{\alpha\beta}K_{\gamma}^{\mu} - K_{\alpha\gamma}K_{\beta}^{\mu}) \frac{dx^{\alpha}}{dS} \frac{dx^{\beta}}{dS} \xi^{\gamma} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}K_{\alpha,\epsilon}^{\mu} - K_{\sigma}^{\sigma}K_{\sigma}^{\mu}\right) \left[\frac{dx^{\epsilon}}{dS} \frac{dx^{\alpha}}{dS} \xi^{\epsilon} - \left(\frac{dx^{\epsilon}}{dS}\right)^2 \xi^{\alpha}\right]. \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$(14.4)$$

اکنون برای اینکه مشتقات نسبت به المان طول پنج بعدی dS را با پارامتر آفین چهار بعدی جایگزین کنیم از پارامتر کلی λ که مسیرهای چهار بعدی روی شامه را پارامتریزه می‌کند استفاده می‌کنیم و بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{({}^{\delta})D^{\nu}\xi^{\mu}}{DS^{\nu}} &= \frac{D\lambda}{DS} \frac{{}^{\delta}D}{D\lambda} \left(\frac{{}^{\delta}D\xi^{\mu}}{D\lambda} \frac{D\lambda}{DS}\right) \\ &= \left(\frac{D\lambda}{DS}\right)^2 \frac{D^{\nu}\xi^{\mu}}{D\lambda^{\nu}} + \frac{D\lambda}{DS} \frac{D}{D\lambda} \left(\frac{D\lambda}{DS}\right) \frac{{}^{\delta}D\xi^{\mu}}{D\lambda} \\ &= \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^2 \frac{D^{\nu}\xi^{\mu}}{D\lambda^{\nu}} + \frac{d\lambda}{ds} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right) \frac{{}^{\delta}D\xi^{\mu}}{D\lambda}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

در این مرحله لازم است به بررسی رابطه‌ی بین مشتق هموردای پنج بعدی و مشتق هموردای چهار بعدی بپردازیم. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{(\Delta) D\xi^\mu}{D\lambda} &= \frac{dX^A}{d\lambda} \nabla_A \xi^\mu = \frac{dX^A}{d\lambda} (\partial_A \xi^\mu + \Gamma_{BC}^\mu \xi^B) \\
&= \frac{D\xi^\mu}{D\lambda} + \Gamma_{AB}^\mu \frac{dx^A}{d\lambda} \xi^B \\
&= \frac{D\xi^\mu}{D\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^B + \Gamma_{\mathfrak{r}\alpha}^\mu \frac{dx^\mathfrak{r}}{d\lambda} \xi^\alpha + \Gamma_{\alpha\mathfrak{r}}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mathfrak{r} + \Gamma_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}}^\mu \frac{d\xi^\mathfrak{r}}{d\lambda} \xi^\mathfrak{r}.
\end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

با استفاده از نتایجی که در [۲۸] برای نمادهای کریستوفل بدست آمده‌اند و بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\alpha}^\mu &= -K^\mu_{\alpha\alpha}, \\
\Gamma_{ab}^\mu &= \Gamma_{bc}^a = \Gamma_{b\alpha}^a = \cdot, \\
\Gamma_{\alpha\beta}^a &= -K^a_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{(\Delta) D\xi^\mu}{D\lambda} = \frac{D\xi^\mu}{D\lambda} - K^\mu_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mathfrak{r} - K^\mu_{\alpha} \frac{dx^\mathfrak{r}}{d\lambda} \xi^\alpha. \tag{۱۸.۴}$$

در نتیجه با استفاده از این رابطه و رابطه‌ی ۱۵.۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{(\Delta) D^\mathfrak{r} \xi^\mu}{DS^\mathfrak{r}} &= \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^\mathfrak{r} \frac{(\Delta) D^\mathfrak{r} \xi^\mu}{d\lambda^\mathfrak{r}} + \frac{d\lambda}{ds} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^\mathfrak{r} \frac{(\Delta) D\xi^\mu}{D\lambda} \\
&= \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^\mathfrak{r} \frac{(\Delta) D^\mathfrak{r} \xi^\mu}{d\lambda^\mathfrak{r}} + \frac{d\lambda}{dS} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^\mathfrak{r} \left[\frac{D\xi^\mu}{D\lambda} \right. \\
&\quad \left. - K^\mu_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mathfrak{r} - K^\mu_{\alpha} \frac{dx^\mathfrak{r}}{d\lambda} \xi^\alpha \right].
\end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{D^\tau \xi^\mu}{D\lambda^\tau} &= \left(\frac{dS}{d\lambda}\right)^\tau \frac{D^\tau \xi^\mu}{DS^\tau} \\
 &- \left(\frac{dS}{d\lambda}\right)^\tau \frac{d\lambda}{dS} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right) \left[\frac{D\xi^\mu}{D\lambda} - K^\mu_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\tau - K^\mu_\alpha \frac{dx^\tau}{d\lambda} \xi^\alpha \right] \\
 &= \left(\frac{dS}{d\lambda}\right)^\tau \left\{ (R^\mu_{\alpha\beta\gamma} - K_{\alpha\beta} K^\mu_\gamma - K_{\alpha\gamma} K^\mu_\beta) \frac{dx^\alpha}{dS} \frac{dx^\beta}{dS} \xi^\gamma \right. \\
 &+ (K^\mu_{\alpha,\tau} - K_{\alpha\sigma} K^{\sigma\mu}) \left(\frac{dx^\tau}{dS} \frac{dx^\alpha}{dS} \xi^\tau - \left(\frac{dx^\tau}{dS}\right)^\tau \xi^\alpha \right) \\
 &- \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^{-1} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right) \left\{ \frac{D\xi^\mu}{D\lambda} - K^\mu_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\tau - K^\mu_\alpha \frac{dx^\tau}{d\lambda} \xi^\alpha \right\} \\
 &= (R^\mu_{\alpha\beta\gamma} - K_{\alpha\beta} K^\mu_\gamma - K_{\alpha\gamma} K^\mu_\beta) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \xi^\gamma \\
 &+ (K^\mu_{\alpha,\tau} - K_{\alpha\sigma} K^{\sigma\mu}) \left(\frac{dx^\tau}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\tau - \left(\frac{dx^\tau}{d\lambda}\right)^\tau \xi^\alpha \right) \\
 &- \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)^{-1} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dS}\right) \left\{ \frac{D\xi^\mu}{D\lambda} - K^\mu_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\tau - K^\mu_\alpha \frac{dx^\tau}{d\lambda} \xi^\alpha \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{۲۰.۴}$$

این رابطه یک رابطه‌ی کلی است و می‌توان آن را در هر یک از مدل‌های ابعاد اضافی بکار برد. برای مثال در مدل IMT چون ذرات آزمون بطور کلی به یک شامه‌ی ثابت محدود نیستند [۲۹، ۳۰] بنابراین در قالب این مدل، سرعت ذرات در راستای بعد اضافی دیگر صفر نیست و باید مورد توجه قرار گیرد.

در اینجا ما فرض می‌کنیم که تمام میدان‌های مادی مقید به شامه‌اند و تنها گرانش به بعد بالاتر نفوذ می‌کند. بنابراین می‌توانیم از جمله‌ی سرعت در راستای بعد اضافه در معادلات قبل صرف نظر کنیم. از سوی دیگر اگر از زمان ویژه‌ی روی شامه بعنوان پارامتر آفین برای پارامتریزه کردن مسیر ذرات آزمون استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{D^\tau \xi^\mu}{D\tau^\tau} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta \xi^\gamma + (K_{\alpha\beta} K^\mu_\gamma - K_{\alpha\gamma} K^\mu_\beta) u^\alpha u^\beta \xi^\gamma, \tag{۲۱.۴}$$

که در این رابطه u^α سرعت ذرات آزمون روی شامه است. اکنون به مرور مطالب لازم برای هدفی که در این فصل دنبال می‌کنیم می‌پردازیم که قبلاً در فصل دوم در بخش مربوط به مدل راندال-ساندرم گفته شد:

$$\begin{aligned}
 dS^{\tau} &= e^{-\tau k|\zeta|} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} + d\zeta^{\tau}, \\
 k &= \sqrt{-\frac{\Lambda_{\delta}}{M_{\delta}^{\tau}}}, \\
 m &= m_{\cdot} e^{-kr\pi}.
 \end{aligned} \tag{۲۲.۴}$$

که در این روابط Λ_{δ} ثابت کیهان‌شناسی فضای توده، M_{δ} مقیاس پلانک بنیادی پنج بعدی، $e^{-\tau k|\zeta|}$ فاکتور پیچش و r شعاع فشردگی است. همانگونه در فصل دوم نیز اشاره شد در مدل نشان داده می‌شود که اگر جرم هیگز یا هر پارامتر دیگر در لاگرانژی پنج بعدی در حدود مقیاس پلانک، $m_{\cdot} = m_{Pl} \sim 10^{16} TeV$ باشد با استفاده از رابطه بالا به ازای $kr \sim 12$ روی شامه $m \sim 1 TeV$ را بدست می‌دهد و در واقع از این طریق بود که مسالهی سلسله مراتبی در این مدل حل شد.

با استفاده از متریک فوق و رابطه‌ای که برای محاسبه‌ی انحنای عرضی در فصل قبل اشاره شد خواهیم داشت:

$$K_{\mu\nu} = k \frac{|\zeta|}{\zeta} e^{-\tau k|\zeta|} \eta_{\mu\nu}. \tag{۲۳.۴}$$

از طرفی همانگونه که قبلاً اشاره شد، این مدل شامل دو شامه در $\zeta = 0$ و $\zeta = r\pi$ می‌باشد که شامه‌ی اولی را شامه‌ی نهان و دومی را شامه‌ی مرئی که جهان ما را نشان می‌دهد. بنابراین معادله‌ی انحراف ژئودزی بر روی شامه مرئی بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{D^{\tau} \xi^{\mu}}{D\tau^{\tau}} = k^{\tau} e^{-\tau\pi kr} (\eta_{\alpha\beta} \eta^{\mu}_{\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\mu}_{\beta}) u^{\alpha} u^{\beta} \xi^{\gamma}. \tag{۲۴.۴}$$

حال با برگشت به رابطه‌ی ۱.۴ و حل معادله‌ی ژئودزیک برای این متریک، سرعت ثابتی برای ذرات آزمون بصورت $u^{\mu} = constant$ بدست می‌آید که بیانگر این است که ژئودزی‌های اولیه موازی همیشه موازی خواهند ماند و این ویژگی فضا-زمان مینکوفسکی چهاربعدی است. از طرفی با حل معادله‌ی بالا برای ذرات جرم دار خواهیم داشت:

$$\xi^{\mu} = b^{\mu} e^{ik\tau e^{-\pi kr}}, \tag{۲۵.۴}$$

که b^μ ثابت انتگرال‌گیری است. این معادله بیانگر نوسان فاصله بین دو ژئودزیک می‌باشد. بنابراین با استفاده از سازگاری این رابطه با معادله‌ی ژئودزیک که سرعت ثابتی برای ذرات روی شامه می‌دهد به شرط محدود کننده‌ی زیر می‌رسیم:

$$ck\tau e^{-\pi kr} = n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (26.4)$$

که c سرعت نور است که در روابط قبلی برابر یک گرفته بودیم. از طرفی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int p_\mu dx^\mu &= \int m u_\mu dx^\mu = \int m g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu d\tau \\ &= \int m \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 d\tau = mc^2 \tau. \end{aligned} \quad (27.4)$$

در نتیجه با استفاده از این روابط خواهیم داشت:

$$\int p_\mu dx^\mu = n\pi \frac{mce^{\pi kr}}{k}. \quad (28.4)$$

با جایگذاری رابطه‌ی جرم و قرار دادن $k \sim \frac{1}{l_{Pl}}$ و توجه به اینکه جرم و طول پلانک بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} m_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \\ l_{Pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

خواهیم داشت:

$$\int p_\mu dx^\mu = nh, \quad (30.4)$$

که مشابه رابطه‌ی کوانتس بوه‌ر-زامرفلد در مکانیک کوانتوم قدیم است. از طرفی با برگشت به رابطه‌ی ۲۷.۴ داریم:

$$\tau = n \frac{h}{mc^2}, \quad (31.4)$$

که بیانگر این می‌تواند باشد که زمان ویژه‌ی ذرات آزمون ضریبی از واحد طول بنیادی کامپتون $\frac{h}{mc}$ است که می‌توان از آن این نتیجه را گرفت که جهان خط ذرات نیز از چنین ضریب طولی ساخته شده است و یا بطور معادل می‌توان گفت مسیر ذرات کوانتیزه‌اند.

۳.۴ چکیده‌ی فصل

در این فصل ابتدا بطور مختصر در رابطه با کارهایی که اخیراً در مورد القا کردن معادلات ژئودزی و انحراف ژئودزی بر روی شامه انجام شده صحبت گردید. در ادامه معادله‌ی انحراف ژئودزی چهار بعدی که پیامد وجود انحنا در فضا-زمان است مورد مطالعه قرار گرفت. سپس معادلات انحراف ژئودزی القایی بر روی شامه و شکل کلی این معادله را بدست آوردیم. در ادامه به کاربرد این معادله در مدل جهان شامه‌ای راندال-ساندرم پرداخته و از این طریق قاعده‌ی کوانتس بوه‌ر-زامرفلد را بدست آوردیم. همچنین با استفاده از نتایج بدست آمده دیدیم که مسیر ذرات از واحدهای بنیادی طول کامپتونی ساخته شده‌اند. بطور کلی در این فصل سعی بر آن است که نشان دهیم می‌توان از هندسه‌ی فضا-زمان اثرات کوانتومی را استخراج کرد و این رهیافت می‌تواند کوششی برای اتحاد نیروها باشد.

فصل ۵

کوانتش مدار سیارات و قمرهای آنها

۱.۵ دینامیک ذرات آزمون

در این فصل با استفاده از مباحثی که در فصل دوم به آن اشاره شد به بررسی دینامیک ذرات آزمون در راستای بعد اضافی و روی شامه می‌پردازیم و در ادامه اصل ماخ تعمیم‌یافته را مطرح کرده و با استفاده از آن، به معرفی قاعده‌ی کوانتش برای ساختار و زیرساختارهای موجود در مقیاس‌های مختلف جهان می‌پردازیم. در ادامه به بررسی صحت رابطه‌ی بدست آمده در سیستم‌هایی مانند منظومه‌ی شمسی، سیارات و قمرهای آنها می‌پردازیم و با استفاده از داده‌های مشاهداتی خواهیم دید که پیش‌بینی ما در مورد مدار سیارات و قمرهای آنها همخوانی خوبی با این داده‌ها دارند. البته لازم به ذکر است که در این رهیافت از فرض‌هایی برای ساده‌سازی حل مساله استفاده کرده‌ایم و این رهیافت می‌تواند تکمیل‌تر و دقیق‌تر نیز بشود.

برای بدست آوردن دینامیک ذرات آزمون از کنش پنج بعدی مرسوم زیر شروع می‌کنیم:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \left[\frac{1}{e(\lambda)} \mathcal{G}_{AB} \dot{Z}^A \dot{Z}^B - e(\lambda) M^2 \right]. \quad (1.5)$$

در این رابطه λ یک پارامتر دلخواه روی جهان خط با نقاط ابتدا و انتهای A و B ، $e(\lambda)$ تابعی از این پارامتر و M جرم ذره‌ی آزمون در فضای توده است. وردش کنش بالا نسبت به $e(\lambda)$ و Z^A منجر به معادلات زیر می‌شود [۳۰]:

$$e = \frac{1}{M} \sqrt{\mathcal{G}_{AB} \frac{dZ^A}{d\lambda} \frac{dZ^B}{d\lambda}} = \frac{1}{M} \frac{dS}{d\lambda},$$

$$\frac{d\dot{Z}^A}{d\lambda} + \Gamma_{BC}^A \dot{Z}^B \dot{Z}^C = \frac{\dot{e}}{e} \dot{Z}^A. \quad (2.5)$$

در واقع می‌توان با استفاده از مطالبی که در فصل سوم به آن اشاره شد لاگرانژی رابطه‌ی ۱.۵ دینامیک ذرات آزمون را بصورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e} \left[\frac{1}{\sigma} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \epsilon \sigma \zeta^2 \right] - eM^2. \quad (3.5)$$

که در آن متریک شامه‌ی اختلالی، علامت نقطه مشتق نسبت به پارامتر λ ، ϵ مشخصه‌ی زمانگونه یا فضاگونه بودن بعد اضافی، σ در واقع پارامتر اختلال^۱ که مرتبه‌ی اختلال در متریک شامه‌ی اولیه را نشان می‌دهد و σ پارامتر مقیاس گسسته^۲ که برای تمییز مقیاس‌های مختلف جهان که مقیاس طول یا مقیاس جرم ساختارهای مختلف جهان و ارتباط آنها با یکدیگر را نشان می‌دهد می‌باشند. قبل از ادامه‌ی محاسبات مد نظر خودمان، بهتر است مقدمه‌ای در مورد تبدیلات مقیاس گسسته و این که چرا مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است ارائه دهیم. به عنوان مثال در [۳۱، ۳۲، ۳۳]، مولفان با استفاده از تبدیلات مقیاس گسسته^۳

$$x \rightarrow \acute{x} = \rho^n x. \quad (4.5)$$

به بررسی چگالی لاگرانژی تحت این تبدلات برای یک میدان دیراک پرداخته و خانواده‌ای از لاگرانژی‌ها که در آنها تحت این تبدیلات، جرم بصورت

$$m = m_0 \rho^n. \quad (5.5)$$

تبدیل می‌شود را بدست می‌آورند و با استفاده از این رابطه، طیف جرم ذرات بنیادی مانند لپتون‌ها را بدست می‌آورند. این مولفان از $\rho = \frac{m_\mu}{m_e} = 207$ بعنوان پارامتر مقیاس گسسته استفاده کرده‌اند اما تصریح کرده‌اند که برای این منظور می‌توان از سایر ثابت‌های بدون بعد^۴ همچون ثابت ساختار ریز^۵ نیز استفاده کرد.

^۱ Perturbation Parameter

^۲ Discrete Scale parameter

^۳ Discrete Scale Transformations

^۴ Dimensionless Constants

^۵ Fine Structure Constant

بطور مشابه مولف [۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷] در قالب مدلی به نام الگوی کیهان‌شناسی خود متشابه^۶ برای ساختارهای مختلف جهان از اتم تا ابرخوشه‌ها که بزرگترین ساختارهای مشاهداتی هستند به اصل جهان شمول ناوردایی مقیاس گسسته اشاره می‌کند و چنین نتیجه‌ای را ارائه می‌کند:

$$\begin{aligned} L_{\psi} &= \Lambda L_{\psi-1}, \\ T_{\psi} &= \Lambda T_{\psi-1}, \\ M_{\psi} &= \Lambda^D M_{\psi-1}. \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

که در آن L_{ψ} مقیاس طول ساختار ψ ام، T_{ψ} مقیاس زمانی ساختار ψ ام و M_{ψ} مقیاس جرمی ساختار ψ ام هستند. ثابت‌های خود متشابه $\Lambda = 5/2 \times 10^{17}$ و $D \simeq 3/174$ بصورت تجربی بدست می‌آیند. در این روابط $\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots = \psi$ می‌باشد که برای مقیاس اتمی، منظومه و کهکشان بترتیب $\psi = -1$ ، $\psi = 0$ و $\psi = +1$ هستند. و یا مولف [۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲] در قالب تبدیلات مقیاس گسسته ۴.۵ به بررسی ارتباط بین فیزیک ساختار ریز و فیزیک ساختارهای بزرگ و به عبارت دیگر، فیزیک ذرات بنیادی و کیهان‌شناسی پرداخته است. مولف با این رهیافت طیف جرم مشابه با رابطه‌ی ۵.۵ را بدست آورده و با قرار دادن ثابت ساختار ریز بعنوان پارامتر مقیاس گسسته در [۳۸] به رابطه‌ای زیر برای مقیاس‌های طولی مختلف جهان رسیده است:

$$L_n = L_{.n} \rho^n = 3 \times 10^{24} \alpha_{EM}^n cm. \quad (۷.۵)$$

که در آن n عددی صحیح و مقیاس‌های مختلف را برچسب می‌زند و α_{EM} ثابت ساختار ریز الکترومغناطیس است. این نتیجه بسیار مشابه با نتیجه‌ای است که ما در ادامه با استفاده از ملاحظات ابعاد اضافی و استفاده از تبدیلات مقیاس گسسته به آن خواهیم رسید. البته ما نه تنها مقیاس ساختارها بلکه زیر ساختارهای آنها را نیز بدست خواهیم آورد. با استفاده از این مقدمات در مورد تبدیلات مقیاس گسسته و اهمیت آنها در مقیاس‌های مختلف و کارهایی که تاکنون در این زمینه انجام شده است، اکنون به ادامه‌ی رهیافت پیشنهادی خود می‌پردازیم. با استفاده از لاگرانژی رابطه‌ی ۲.۵ می‌توان دینامیک ذرات آزمون در راستای بعد اضافی و همچنین روی شامه را بدست آورد. برای بدست آوردن دینامیک ذرات در راستای بعد اضافی داریم:

$$p_{\zeta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{1}{e} \epsilon \sigma \dot{\zeta}. \quad (۸.۵)$$

^۶Self-Similar Cosmological Paradigm

با استفاده از معادله‌ی اوپلر-لاگرانژ^۷ داریم:

$$\frac{d}{d\lambda} p_\zeta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = 0, \quad (9.5)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\epsilon \sigma}{e} \dot{\zeta} \right) - \frac{1}{2e\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \zeta} u^\mu u^\nu = 0. \quad (10.5)$$

با یادآوری رابطه‌ی ۱۱۷.۳ که بدست آوردن انحنای عرضی شامه‌ی اختلالی معرفی شد خواهیم داشت:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \sqrt{\sigma} \zeta}. \quad (11.5)$$

در نتیجه رابطه‌ی ۱۰.۵ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon \sigma \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{\zeta}}{e} \right) + \frac{\sqrt{\sigma}}{e\sigma} K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (12.5)$$

که در آن $K_{\mu\nu}$ انحنای عرضی شامه‌ی اختلالی است. این رابطه منجر می‌شود به:

$$\epsilon \sigma \left(\frac{\ddot{\zeta}}{e} - \dot{\zeta} \frac{\dot{e}}{e^2} \right) + \frac{\sqrt{\sigma}}{e\sigma} K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (13.5)$$

و در نهایت معادله‌ی دینامیک ذره در راستای بعد اضافه بصورت زیر در می‌آید:

$$\sigma \ddot{\zeta} + \epsilon \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma} K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \sigma \dot{\zeta} \frac{\dot{e}}{e} = 0. \quad (14.5)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی ۲.۵ و تعریف $l^\alpha := g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ و استفاده از المان طول پنج بعدی خواهیم داشت:

$$e^\alpha M^\alpha = \frac{1}{\sigma} l^\alpha + \epsilon \sigma \dot{\zeta}^\alpha. \quad (15.5)$$

با فرض ثابت بودن جرم پنج بعدی و مشتق‌گیری نسبت به پارامتر λ خواهیم داشت:

$$\dot{e} e M^\alpha = \frac{1}{\sigma} \dot{l} l + \epsilon \sigma \dot{\zeta}^\alpha. \quad (16.5)$$

^۷Euler-Lagrange Equation

در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی ۱۱۷.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{e}eM^r &= \frac{1}{\dot{\sigma}}\dot{l}l + \epsilon\sigma\dot{\zeta}\left[\frac{\dot{e}}{e}\dot{\zeta} - \epsilon\frac{1}{\sqrt{\sigma\dot{\sigma}}}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right] \\ &= \frac{1}{\dot{\sigma}}\dot{l}l + \epsilon\sigma\frac{\dot{e}}{e}\dot{\zeta}^2 - \frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فوق نوشت:

$$\frac{\dot{e}}{e}(e^r M^r - \epsilon\sigma\dot{\zeta}^2) = \frac{1}{\dot{\sigma}}\dot{l}l - \frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}. \quad (18.5)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۱۶.۵ خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{e}}{e} = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{1}{l^r}\sqrt{\sigma}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}, \quad (19.5)$$

همچنین با استفاده از تعریف $l^r := g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ داریم:

$$\dot{l}l = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\zeta}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}. \quad (20.5)$$

با استفاده از این رابطه نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\dot{l}}{l} = -\frac{\sqrt{\sigma}}{l^r}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}, \quad (21.5)$$

در نتیجه با استفاده از این رابطه و رابطه‌ی ۱۹.۵ خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\frac{2\sqrt{\sigma}}{l^r}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\dot{\zeta}. \quad (22.5)$$

با توجه به این رابطه و رابطه‌ی ۱۱۷.۳ و اینکه پارامتر اختلال σ بسیار کوچک است [۴۳] می‌توان از مرتبه‌های بالاتر آن در رابطه‌ی ۱۱۷.۳ یعنی جمله‌ی سوم صرف‌نظر کرد. در واقع کوچک بودن پارامتر اختلال به این معنی است که ذرات نفوذ کمی در فضای ابعاد اضافی دارند که در غیر اینصورت با دور شدن ذرات از شامه، شامه ناپایدار خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma\ddot{\zeta} + \epsilon\frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}}K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0. \quad (23.5)$$

از سوی دیگر می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\zeta}{d\lambda} \right) = \frac{ds}{d\lambda} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \frac{d\zeta}{ds} \right) \\ &= \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds} \frac{ds}{d\lambda} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) \\ &= \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \right).\end{aligned}\quad (24.5)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sigma \left[\left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \right) \right] + \epsilon \frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}} K_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (25.5)$$

و

$$\sigma \left[\frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \right] + \epsilon \frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}} K_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (26.5)$$

در روابط فوق ds المان طول شامه است. با توجه به تعریف l^γ جمله‌ی دوم داخل براکت از جنس $\frac{l}{l}$ و در نتیجه از مرتبه $\sqrt{\sigma}$ بوده و با توجه به ضریب σ در خارج از براکت قابل صرف نظر کردن است و در واقع ما تا مرتبه اول σ را در نظر خواهیم گرفت. با استفاده از بسط متریک اختلالی که در فصل قبل بدست آوردیم داریم:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\bar{g}_{\mu\nu} - 2\sqrt{\sigma}\zeta \bar{K}_{\mu\nu} + \sigma\zeta^2 \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_\nu^\gamma) dx^\mu dx^\nu, \quad (27.5)$$

و در نتیجه

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -1 - 2\sqrt{\sigma}\zeta \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu + \sigma\zeta^2 \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_\nu^\gamma \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu. \quad (29.5)$$

که τ زمان ویژه بر روی شامه است و علامت بار نشان دهنده مختصات شامه‌ی اولیه است. با استفاده از این روابط و نگهداشتن تنها مرتبه‌ی اول σ در رابطه‌ی ۲۶.۵ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\sigma \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \epsilon \frac{\sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}} K_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu (-1 + 2\sqrt{\sigma}\zeta \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu) = 0. \quad (30.5)$$

با جایگذاری بسط انحنای عرضی متریک اختلالی برحسب متریک شامه‌ی اولیه که در فصل سوم بدست آوردیم خواهیم داشت:

$$\sigma \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \epsilon \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma} (\bar{K}_{\mu\nu} - \sqrt{\sigma} \zeta \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma}) (-1 + 2\sqrt{\sigma} \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu}) \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} = 0. \quad (31.5)$$

با استفاده از تعریف انحنای عمودی^۸ شامه اولیه

$$\frac{1}{R} = \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu}. \quad (32.5)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \frac{\epsilon}{\sigma} \left(\frac{2}{R^2} + \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \right) \zeta + \frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma} \sigma R} = 0. \quad (33.5)$$

این معادله دینامیک ذرات آزمون در راستای بعد اضافه را بیان می‌کند و برای حل این معادله باید متریک و انحنای عرضی آن را داشته باشیم. مولفان [۴۴] رابطه‌ی مشابه این رابطه را بدون در نظر گرفتن پارامتر اختلال و پارامتر مقیاس گسسته بدست آورده‌اند و برای حل تقریبی و کلی این معادله از روش WKB ^۹ استفاده کرده‌اند. در این‌جا چون هدف ما بررسی ساختارهای بزرگ جهان مانند کهکشان، منظومه شمسی و سیارات و قمرهای آن است بنابراین متریک مورد نیاز ما متریک حل سیاهچاله‌ای بر روی شامه است و برای حل این معادله لازم است که متریک و انحنای عرضی آن بر روی شامه را داشته باشیم. بنابراین در این مرحله مرور مختصری بر حل سیاهچاله‌ای بر روی شامه که مولفان [۴۶] انجام داده‌اند می‌کنیم. معادلات میدان خلا اینشتین بر روی شامه بصورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}, \quad (34.5)$$

که در آن

$$Q_{\mu\nu} = (K K_{\mu\nu} - K_{\mu\alpha} K_{\nu}^{\alpha}) + \frac{1}{2} (K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2) g_{\mu\nu}. \quad (35.5)$$

یک کمیت کاملاً هندسی است. معادلات فوق بیانگر وجود نوعی ماده ناشی از هندسه و تاثیر ابعاد اضافه روی شامه است. با در نظر گرفتن متریک متقارن کروی ایستا برای شامه بصورت زیر:

$$ds^2 = -e^{\mu(r)} dt^2 + e^{\nu(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (36.5)$$

^۸Normal Curvature

^۹Wentzel-Kramers-Brilluim method

مولفان نشان داده‌اند که:

$$\begin{aligned} G_{\cdot} &= \frac{e^{-\nu}}{r^2} (1 - r\dot{\nu} - e^{\nu}), \\ G_{\cdot 1} &= \frac{e^{-\nu}}{r^2} (1 + r\dot{\mu} - e^{\nu}), \\ G_{\cdot 2} &= G_{\cdot 3} = \frac{e^{-\nu}}{4r} (\dot{\nu}\dot{\mu} - \dot{\nu} - \dot{\mu}\dot{\nu}r + 2r\mu'' + r\dot{\mu}^2). \end{aligned} \quad (37.5)$$

برای متریک فرض شده با استفاده از رابطه‌ی انحنای عرضی که برای این متریک منجر به قطری بودن $K_{\mu\nu}$ می‌شود و با استفاده از معادلات کودازی، مولفان مولفه‌های انحنای عرضی را بصورت زیر بدست آورده‌اند:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\cdot\cdot}(r) &= -\alpha e^{\mu(r)}, \\ \bar{K}_{11}(r) &= \alpha e^{\nu(r)}, \\ \bar{K}_{22}(r) &= \alpha r^2 + \beta r, \\ \bar{K}_{33}(r) &= \alpha r^2 \sin^2\theta + r\beta \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (38.5)$$

9

$$\begin{aligned} K^{\cdot\cdot} &= g^{\cdot\cdot} g^{\cdot\cdot} K_{\cdot\cdot} = -\alpha e^{-\mu} + c e^{-\frac{2}{r}\mu}, \\ K^{11} &= g^{11} g^{11} K_{11} = \alpha e^{-\nu}, \\ K^{22} &= g^{22} g^{22} K_{22} = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}, \\ K^{33} &= g^{33} g^{33} K_{33} = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{\beta}{r^3 \sin^2\theta}. \end{aligned} \quad (39.5)$$

و در نهایت با محاسبه‌ی کمیت هندسی $Q_{\mu\nu}$ بر حسب انحنای عرضی بالا و برابری دو طرف معادله‌ی انیشتین به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$e^{\mu(r)} = e^{-\nu(r)} = 1 - \frac{C}{r} - \alpha^2 r^2 - 2\alpha\beta r - \beta^2. \quad (40.5)$$

در مقیاس منظومه شمسی این متریک باید به متریک آشنای شوارتزشیلد تبدیل شود در نتیجه $C = m = \frac{GM}{c^2}$ که M جرم جسم مرکزی، G ثابت گرانش نیوتنی و c سرعت نور هستند. با صفر در نظر گرفتن ثابت انتگرالگیری β خواهیم داشت:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \alpha^2 r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \alpha^2 r^2\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (41.5)$$

و از سوی دیگر با مقایسه‌ی این متریک با متریک مجانبی فضای دسیته^{۱۰} که بصورت زیر است:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (42.5)$$

می‌بینیم که:

$$\alpha^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (43.5)$$

و در نتیجه پتانسیل گرانشی برای این حل بصورت زیر خواهد بود:

$$\phi(r) = \frac{C}{r} + \alpha^2 r^2, \quad (44.5)$$

و همچنین با توجه به رابطه‌ی ۳۸.۵ برای این متریک داریم:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mu\nu} &= \alpha \bar{g}_{\mu\nu} \\ \frac{1}{R} &= \alpha \bar{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu = -\alpha. \end{aligned} \quad (45.5)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_\nu^\gamma \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu &= \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{g}^{\gamma\alpha} \bar{K}_{\nu\alpha} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu \\ &= \alpha^2 \bar{g}_{\mu\gamma} \bar{g}^{\gamma\alpha} \bar{g}_{\nu\alpha} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu = -\alpha^2. \end{aligned} \quad (46.5)$$

^{۱۰} Asymptotically deSitter Space

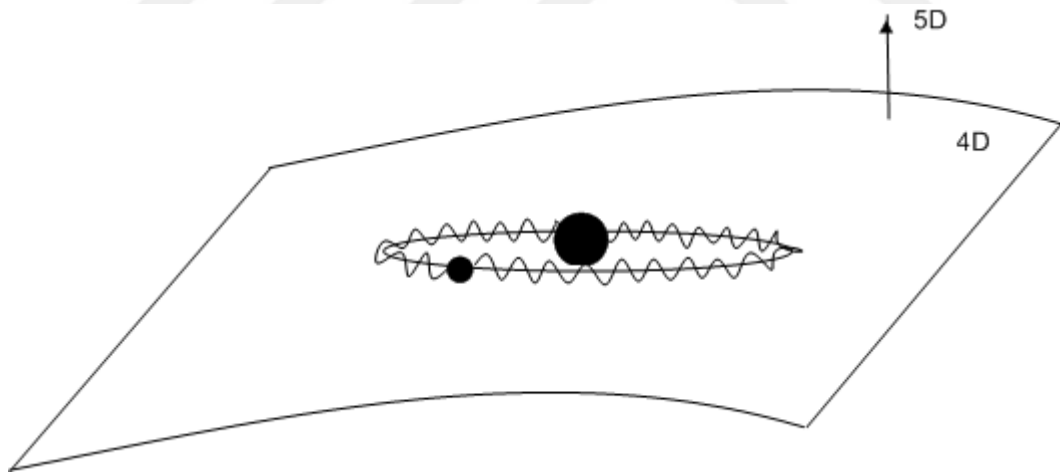
با جایگذاری این نتایج در رابطه‌ی ۳۳.۵ که دینامیک ذرات آزمون در راستای بعد اضافی را می‌دهد و به ازای $\epsilon = 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{\epsilon}{\sigma'}\alpha^2\zeta + \frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma}\sigma'R} = 0. \quad (47.5)$$

این معادله جوابی بصورت زیر دارد:

$$\zeta = A \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}\tau\right) - \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\sigma}R}, \quad (48.5)$$

و نشان می‌دهد ذرات حول شامه در نوسان بوده و تحت اختلال مقید به شامه باقی می‌مانند و شامه را ترک نمی‌کنند. می‌توان بصورت تقریبی گفت ذرات آزمون در این متریک حرکتی بصورت زیر خواهند داشت:



شکل ۱.۵: نوسان ذرات حول شامه در راستای بعد اضافی

۲.۵ جرم القایی، اصل ماخ و قاعده‌ی کوانتش مقیاس

اکنون به محاسبه‌ی تغییرات جرم در نقاط مختلف فضا-زمان که مطابق با اصل ماخ^{۱۱} است می‌پردازیم. می‌دانیم که برای ناظر پنج بعدی داریم:

$$\mathcal{G}_{AB}P^AP^B = M^2, \quad (۴۹.۵)$$

و حرکت از دید ناظر چهار بعدی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2, \quad (۵۰.۵)$$

و نیز با استفاده از لاگرائژی معرفی شده در ابتدای فصل داریم:

$$P_A = \frac{1}{e} \mathcal{G}_{AB} \dot{Z}^B, \quad (۵۱.۵)$$

و در نتیجه با در نظرگیری پارامتر مقیاس گسسته که در ابتدای فصل معرفی شد خواهیم داشت:

$$p_\mu = P_\mu = \frac{1}{e\sqrt{\sigma}} u_\mu. \quad (۵۲.۵)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۵۰.۵ و تعریف l^2 که قبلاً انجام دادیم خواهیم داشت:

$$m = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{l}{e}. \quad (۵۳.۵)$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\dot{m} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{\dot{l}}{e} - l \frac{\dot{e}}{e^2} \right). \quad (۵۴.۵)$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{e}}{e}. \quad (۵۵.۵)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۱۹.۵ خواهیم داشت:

^{۱۱} Mach Principle

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}}{m} &= \frac{\sqrt{\sigma}}{l^{\mathfrak{r}}} K_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} \dot{\zeta} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^{\mathfrak{r}}} K_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{d\zeta}{ds} \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^{\mathfrak{r}},\end{aligned}\quad (56.5)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}}{m} &= \sqrt{\sigma} K_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{d\zeta}{ds} ds \\ &= \sqrt{\sigma} K_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \bar{u}^{\mathfrak{r}} \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^{\mathfrak{r}} d\tau \\ &= \sqrt{\sigma} K_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \bar{u}^{\mathfrak{r}} d\tau (-1 + \mathfrak{r} \sqrt{\sigma} \zeta \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu}) \\ &= \sqrt{\sigma} (\bar{K}_{\mu\nu} - \sqrt{\sigma} \zeta \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma}) (-1 + \mathfrak{r} \sqrt{\sigma} \zeta \bar{K}_{\mu\nu} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu}) \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \bar{u}^{\mathfrak{r}}.\end{aligned}\quad (57.5)$$

در نتیجه با استفاده از تعریف انحنای عمودی خواهیم داشت:

$$\frac{dm}{m} = -\sqrt{\sigma} \left\{ \frac{1}{R} - \sqrt{\sigma} \left(\frac{\mathfrak{r}}{R^{\mathfrak{r}}} + \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \right) \zeta \right\} \bar{u}^{\mathfrak{r}} d\tau, \quad (58.5)$$

و بنابراین داریم:

$$m = m \cdot \exp\left(-\int \sqrt{\sigma} \left\{ \frac{1}{R} - \sqrt{\sigma} \zeta \left(\frac{\mathfrak{r}}{R^{\mathfrak{r}}} + \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \right) \right\} \bar{u}^{\mathfrak{r}} d\tau\right). \quad (59.5)$$

این رابطه تغییرات جرم ذرات نسبت به بعد اضافه و سرعت در راستای بعد اضافه را نشان می‌دهد. مولفان [۴۴] رابطه‌ی بالا را بدون در نظرگیری پارامترهای اختلال و مقیاس گسسته بدست آورده‌اند و از آن به اصل ماخ تعمیم‌یافته تعبیر کرده‌اند. اگر از دید نظریه‌ی ماده‌ی القایی به این رابطه نگاه کنیم می‌توان جمله‌ی مربوط به انحنای عرضی را بر حسب تانسور انرژی-تکانه نوشت. از دید نظریه‌ی ماده‌ی القایی داریم:

$$-\lambda \pi G \bar{T}_{\mu\nu} = \bar{Q}_{\mu\nu}, \quad (60.5)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
 -\lambda\pi G\bar{T}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu &= [\bar{K}_{\mu\alpha}\bar{K}_\nu^\alpha - \bar{K}\bar{K}_{\mu\nu} - \frac{1}{\gamma}(\bar{K}_{\alpha\beta}\bar{K}^{\alpha\beta} - \bar{K}^{\gamma\gamma})\bar{g}_{\mu\nu}]\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu \\
 &= \bar{K}_{\mu\alpha}\bar{K}_\nu^\alpha\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu - \frac{\bar{K}}{R} - \frac{1}{\gamma}\bar{K}_{\alpha\beta}\bar{K}^{\alpha\beta}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma}\bar{K}^{\gamma\gamma}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu \\
 &= \bar{K}_{\mu\alpha}\bar{K}_\nu^\alpha\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu - \frac{\bar{K}}{R} + \frac{1}{\gamma}\bar{K}_{\alpha\beta}\bar{K}^{\alpha\beta} - \frac{1}{\gamma}\bar{K}^{\gamma\gamma}.
 \end{aligned}
 \tag{۶۱.۵}$$

اگر از رابطه‌ی فوق رد ^{۱۲} بگیریم خواهیم داشت:

$$-\lambda\pi G\bar{T} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{K}_\mu^\gamma\bar{K}_{\gamma\nu} - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{K}\bar{K}_{\mu\nu} - \gamma(\bar{K}^{\alpha\beta}\bar{K}_{\alpha\beta} - \bar{K}^{\gamma\gamma}). \tag{۶۲.۵}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
 -\lambda\pi G(\bar{T}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \frac{1}{\gamma}\bar{T}) &= \bar{K}_{\mu\alpha}\bar{K}_\nu^\alpha\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu - \frac{\bar{K}}{R} + \frac{1}{\gamma}\bar{K}_{\alpha\beta}\bar{K}^{\alpha\beta} \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma}\bar{K}^{\gamma\gamma} + \frac{1}{\gamma}\bar{K}^{\nu\gamma}\bar{K}_{\gamma\nu} - \frac{1}{\gamma}\bar{K}^{\gamma\gamma} \\
 &\quad + \bar{K}^{\gamma\gamma} - \bar{K}_{\alpha\beta}\bar{K}^{\alpha\beta}.
 \end{aligned}
 \tag{۶۳.۵}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\bar{K}_{\mu\alpha}\bar{K}_\nu^\alpha\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = -\lambda\pi G(\bar{T}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \frac{1}{\gamma}\bar{T}) + \frac{\bar{K}}{R}. \tag{۶۴.۵}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان رابطه‌ی $\delta ۸.۵$ را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{dm}{m} = \sqrt{\sigma}\left\{\frac{1}{R} - \sqrt{\sigma}\left(\frac{\gamma}{R^2} - \lambda\pi G(\bar{T}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \frac{1}{\gamma}\bar{T}) + \frac{\bar{K}}{R}\right)\zeta\right\}\bar{u}^\tau d\tau. \tag{۶۵.۵}$$

^{۱۲}Trace

با استفاده از این رابطه می‌بینیم که جرم ذرات به توزیع ماده در جهان وابسته است و این نتیجه سازگار با اصل ماخ می‌باشد. لازم به ذکر است که مولفان [۴۵] رابطه‌ای مشابه با رابطه‌ی ۵۶.۵ را با استفاده از فرمول‌بندی هامیلتون-ژاکوبی^{۱۳} بدست آورده‌اند و نشان داده‌اند که این بیان برای تغییرات جرم مستقل از مختصات و نوع پارامتریزه کردن مسیر حرکت است. رابطه‌ی فوق و یا رابطه‌ی ۵۹.۵ و این نکته که ناظر چهار بعدی هیچ تغییری برای جرم ذرات پس از بازگشت از بعد اضافی بر روی شامه نمی‌بیند و جرم ذره بر روی شامه را ثابت اندازه‌گیری می‌کند و در واقع به بیان دیگر شرط پایداری مدارها منجر به شرط زیر از دید ناظر چهار بعدی می‌شود:

$$\int \sqrt{\sigma} \left\{ \frac{1}{R} - \sqrt{\sigma} \zeta \left(\frac{2}{R^2} + \bar{K}_{\mu\gamma} \bar{K}_{\nu}^{\gamma} \bar{u}^{\mu} \bar{u}^{\nu} \right) \right\} \bar{u}^{\epsilon} d\tau = 0. \quad (66.5)$$

در نتیجه با جایگذاری رابطه‌ی ۴۸.۵ که برای حرکت ذرات در راستای بعد اضافه بدست آوردیم و با انتگرالگیری از رابطه‌ی فوق به شرط کوانتش زیر می‌رسیم:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} \tau = n\pi, \quad (67.5)$$

از طرف دیگر برای زمان ویژه روی شامه می‌توان نوشت:

$$\tau = \frac{1}{m} \int p_{\mu} dx^{\mu}, \quad (68.5)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int p_{\mu} dx^{\mu} = \frac{nm\sqrt{\sigma}}{\alpha}. \quad (69.5)$$

این رابطه نیز مشابه با رابطه‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد است با این تفاوت که در آن در سمت دوم رابطه بجای ثابت پلانک، جرم جسم دوار، ثابت کیهان‌شناسی و پارامتر مقیاس گسسته نشسته‌اند. در رهیافت کیهان‌شناسی و فرضیه‌ی اعداد بزرگ دیراک^{۱۴}، گفته می‌شود که ثابت پلانک ممکن است یک ثابت بنیادی نباشد و در مقیاس‌های مختلف متفاوت باشد. در این راستا برای نمونه می‌توان به رهیافت مولف [۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰] برای بررسی رفتار کوانتومی مقیاس‌های بزرگ اشاره کرد که در آنها به معرفی ثابت پلانک موثر^{۱۵} برای مقیاس‌های مختلف از کهکشان‌ها تا اتم می‌پردازد.

^{۱۳} Hamilton-Jacobi Formalism

^{۱۴} Dirac's Cosmology and Dirac's Large Number Hypothesis

^{۱۵} Effective Plank Constant

با استفاده از پارامتر مقیاس گسسته می‌توان این رابطه را برای مقیاس‌های مختلف بکار گرفت که در آن برای هر مقیاس پارامتر مقیاس گسسته مقدار مخصوص و معینی دارد. در اینجا ما به کاربرد این رابطه برای مقیاس‌های بزرگ می‌پردازیم. با توجه به این که در مقیاس‌های بزرگ با سرعت‌های غیر نسبیتی سروکار داریم و همچنین با فرض اینکه اجرام متحرک در صفحه‌ی استوایی جرم مرکزی قرار داشته و مدارهای آنها پایدار می‌باشند خواهیم داشت:

$$\int p_{\varphi} d\varphi = \frac{nm\pi\sqrt{\sigma}}{\alpha}. \quad (70.5)$$

با برگشت به رابطه‌ی ۴۴.۵ که پتانسیل گرانشی مورد نظر ماست داریم:

$$F = \frac{mMG}{r^2} + 2m\alpha^2 r = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2, \quad (71.5)$$

با توجه به این که جمله‌ی دوم ضربی از ثابت کیهان‌شناسی که مقدار آن بسیار کوچک، $\Lambda = 10^{-52} \frac{1}{m^2}$ ، است در نتیجه می‌توان با تقریب خوبی از پتانسیل گرانشی نیوتن استفاده کرد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\omega^2 = \frac{MG}{r^3}, \quad (72.5)$$

که در این روابط M جرم مرکزی هر سیستم است. با نوشتن رابطه‌ی ۷۰.۵ در دستگاه قطبی و استفاده از رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی کوانتش مقیاس بصورت زیر دست پیدا خواهیم کرد:

$$r_n = \frac{n^2 \sigma'}{4\alpha^2 GM}. \quad (73.5)$$

در این رابطه همان گونه که قبلاً اشاره شد M ، G ، α^2 ، σ' و n بترتیب جرم مرکزی سیستم، ثابت گرانش نیوتن، ثابت کیهان‌شناسی، پارامتر مقیاس گسسته برای تمییز سیستم‌های مختلف و بیانگر توزیع فواصل اجرام از جرم مرکزی در هر سیستم می‌باشند. بعنوان مثال در یک سیستم سیاره‌ای، n شماره‌ی مدار مربوط به هر سیاره است. البته همان گونه که در ابتدای فصل بیان شد تحت تبدیلات مقیاس گسسته جرم نیز همانند مختصات بصورت $M \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sigma}} M$ تبدیل می‌شود و با انتخاب $1/\sqrt{\sigma} = 10^{56} \text{ gr}$ و $M = M_{\text{Universe}} = 1/53 \times 10^{56} \text{ gr}$ و محاسبه پارامترهای موجود در رابطه‌ی بالا در دستگاه $\hbar = c = 1$ بر حسب واحد متر خواهیم داشت:

$$r_n = 0.6614334 n^2 \sigma'^{3/2} \times 10^{26} \text{ m}. \quad (74.5)$$

با توجه به این که افق هابل R_H تقریباً برابر با مقدار $10^{26} m$ گرفته می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$r_n = 0.6614334 n^2 \sigma^{3/2} R_H. \quad (75.5)$$

این رابطه بسیار مشابه با رابطه‌ای است که مولف [۳۸] با در نظر گرفتن ثابت ساختار ریز بعنوان پارامتر مقیاس گسسته بدست آورده است و در اینجا ما نیز بطور مشابه و همان‌گونه که در ابتدای فصل در مورد این پارامتر بحث شد با انتخاب $\sigma = \alpha^{3/2} m$ خواهیم داشت:

$$r_{m,n} = 0.6614334 R_H n^2 \alpha^m, \quad (76.5)$$

در این رابطه m و n اعداد صحیح هستند که در آن m مقیاس‌های مختلف جهان و n مقیاس زیر ساختارهای درون هر ساختار را مشخص می‌کند. البته می‌توانستیم از همان ابتدا بدون در نظرگیری تشابه بین نتایج بدست آمده‌ی ما و مولف [۳۸]، σ را بصورت توانی از α در نظر بگیریم و سپس توان مناسب برای آن را تعیین کنیم و در واقع استفاده از این تشابه نتایج، از کلیت موضوع نمی‌کاهد. همان‌گونه که اشاره شد و در ادامه نیز خواهیم دید $m = 9$ برچسبی برای ساختاری تقریباً با مقیاس یک ستاره در یک سیستم سیاره‌ای است و $n = 1, 2, \dots$ در آن فواصل مجاز یا مدارهای مجاز برای سیارات از این ستاره را برچسب می‌زند. با استفاده از رابطه‌ی فوق به ازای m های مختلف و $n = 1$ که اولین زیر ساختار در هر ساختار بزرگ جهان را برچسب می‌زند داریم:

$$r_{.,1} = 0.6614334 R_H \simeq R_H, \quad (77.5)$$

که تقریباً برابر با بزرگترین مقیاس مشاهداتی ما یعنی افق هابل است می‌باشد. همچنین

$$r_{1,1} = 0.6614334 R_H \alpha^1 = 4/827985 \times 10^{23} m, \quad (78.5)$$

این مقیاس نیز تقریباً برابر مقیاس ابرخوشه‌های کهکشانی می‌باشد. با ادامه‌ی این روند به

$$r_{2,1} = 0.6614334 R_H \alpha^2 = 3/5241 \times 10^{21} m, \quad (79.5)$$

می‌رسیم که بطور تقریبی برابر مقیاس خوشه‌های کهکشانی است و یا برای $m = 4$ داریم:

$$r_{3,1} = 0.6614334 R_H \alpha^3 = 2/57232 \times 10^{19} m, \quad (80.5)$$

که مقیاس طولی کهکشان‌ها می‌باشد. برای $m = 4$ نیز داریم:

$$r_{4,1} = 0.6614334 R_H \alpha^4 = 1/8776 \times 10^{17} m, \quad (81.5)$$

که مقیاس خوشه‌های ستاره‌ای است. با ادامه این فرایند برای $m = 5$ و $m = 6$ به

$$r_{5,1} = 0.6614334 R_H \alpha^5 = 1/37.05 \times 10^{15} m, \quad (82.5)$$

و

$$r_{6,1} = 0.6614334 R_H \alpha^6 = 1/0.037 \times 10^{13} m, \quad (83.5)$$

می‌رسیم که تقریباً برابر با مقیاس طول سیستم‌های سیاره‌ای^{۱۶} همانند مقیاس منظومه‌ی شمسی خودمان می‌باشند. برای مورد $m = 8$ که آن را بیشتر مورد بحث قرار خواهیم داد به

$$r_{8,1} = 0.6614334 R_H \alpha^8 = 5/3299 \times 10^8 m, \quad (84.5)$$

می‌رسیم که تقریباً برابر مقیاس شعاع ستارگانی مانند خورشید می‌باشد و از آن به عنوان اولین مدار مجاز برای سیارات حول ستارگان در سیستم‌های سیاره‌ای استفاده می‌کنیم که مورد بحث قرار خواهیم داد. همچنین برای $m = 9$ داریم:

$$r_{9,1} = 0.6614334 R_H \alpha^9 = 3/89 \times 10^6 m, \quad (85.5)$$

که تقریباً برابر با مقیاس شعاع سیاراتی مانند زمین است و ما آن را به عنوان اولین مدار مجاز برای قمرهای سیارات تعبیر می‌کنیم و این مورد را نیز در ادامه مورد بحث قرار خواهیم داد. در نهایت برای $m = 17$ داریم:

$$r_{17,1} = 0.6614334 R_H \alpha^{18} = 3/134995 \times 10^{-11} m \simeq 0.3 A^0, \quad (86.5)$$

که تقریباً برابر با اولین شعاع اتم بوهر در مکانیک کوانتوم قدیم است. این نتیجه می‌تواند بیانگر ارتباط عمیق گرانش با سایر نیروها که در مقیاس اتمی و زیراتمی بروز پیدا می‌کنند باشد و در واقع می‌تواند نشان از یک منشا مشترک با نمودی متفاوت در مقیاس‌های مختلف باشد.

اکنون همان‌گونه که قبلاً اشاره شد موارد $m = 8$ و $m = 9$ را با دقت بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم. با بازنویسی رابطه‌ی ۷۶.۵ برای $m = 8$ داریم:

$$r_{8,m} = 5/3299 \times 10^8 m = 3/5627 \times 10^{-3} a.u. = 0.035627 n^2 a.u. \quad (87.5)$$

این رابطه مشابه با رابطه‌ی کوانتش بوهر برای اتم است. در این رابطه 0.035627 اولین شعاع مجاز برای سیارات در سیستم‌های سیاره‌ای است. مولفان [۵۱، ۵۲] با روندی برخلاف

^{۱۶}Planetary Systems

روندی که ما طی کردیم با الهام از قاعده‌ی کوانتش بوهر-زامرفلد و فرض درست بودن آن در مقیاس سیستم‌های سیاره‌ای، با جایگزینی مولفه‌های الکتروستاتیکی با مولفه‌های گرانشی

$$\frac{e^2}{\alpha_e} \rightarrow \frac{GMm}{\alpha_g}, \quad (۸۸.۵)$$

که در آن α_g ثابت ساختار گرانشی^{۱۷} است و با استفاده از داده‌های مشاهداتی به یک رفتار کوانتومی کلاسیک در مقیاس بزرگ اشاره می‌کنند. مولفان [۵۳] نیز با استفاده از هندسه‌ی وایل به چنین رابطه‌ای رسیده‌اند. همچنین مولفان [۵۴] با فرض کوانتیزه بودن تکانه‌ی زاویه‌ای نیز به روابطی مشابه با بقیه دست یافته‌اند اما این مولفان نتوانسته‌اند تمام سیارات منظومه‌ی شمسی را بصورت واحد بررسی کنند و مجبور به دو دسته کردن سیارات شده‌اند. بطور مشابه مولفان [۵۵] با رابطه‌ای به شکل $r_{m,n} = r \cdot \frac{n^2 + m^2}{p}$ اقدام به بررسی مدار سیارات کرده‌اند که برای سیارات ونوس، زمین و مریخ m مخالف n و برای بقیه‌ی سیارات $m = n$ گرفته‌اند. مولفان [۵۶، ۵۷، ۵۸] نیز بطور وسیعی در قالب نظریه‌ی نسبیت مقیاس^{۱۸} به یک رفتار کوانتومی و ساختار فراکتالی برای جهان اشاره می‌کنند و با استفاده از این نظریه به بررسی رفتار کوانتومی در مقیاس‌های مختلف بخصوص در سیستم‌های سیاره‌ای مانند منظومه‌ی شمسی خودمان می‌پردازند و رابطه‌ای مشابه با رابطه‌ای که ما بدست آوردیم ارائه می‌کنند. البته فرمول بندی ریاضی تیتوس-بوده^{۱۹} نیز یک رهیافت ریاضی برای رفتار گسسته‌ی کوانتومی در مقیاس منظومه‌ی شمسی است [۵۹، ۶۰، ۶۱].

اگر با استفاده از رابطه‌ی ۸۷.۵ به محاسبه‌ی توزیع مدارهای مجاز در منظومه‌ی شمسی بپردازیم خواهیم داشت:

<i>Solar System's Planets</i>	n	$r_{Theory}(a.u.)$	$r_{Observation}(a.u.)$	e
<i>Mercury</i>	۱۰	۰/۳۵۶۲۷	۰/۳۸۷۰۹۹	۷/۹۶۴
<i>Venus</i>	۱۴	۰/۶۹۸۲۸۹	۰/۷۲۳۳۳۲	۳/۴۶۲
<i>Earth</i>	۱۷	۱/۰۲۹۶۲۰۳	۱	۲/۹۶۲
<i>Mars</i>	۲۱	۱/۵۷۱۱۵۱	۱/۵۲۳۶۶۲	۳/۱۱۶۷
<i>Ceres</i>	۲۸	۲/۷۹۳۱۵۷	۲/۷۶۶	۰/۹۸۲
<i>Jupiter</i>	۳۸	۵/۱۴۴۵۳۹	۵/۲۰۳۳۶۳	۱/۱۳۰۵
<i>Saturn</i>	۵۲	۹/۶۳۳۵۴۱	۹/۵۳۷۰۷	۱/۰۱۱۵۳
<i>Uranus</i>	۷۳	۱۸/۹۸۵۶۳	۱۹/۱۹۱۲۶	۱/۰۷۱۵
<i>Neptune</i>	۹۲	۳۰/۱۵۴۶۹	۳۰/۰۶۸۹۶	۰/۲۸۶
<i>Pluto</i>	۱۰۵	۳۹/۲۷۸۷۷	۳۹/۴۸۲	۰/۵۱۵

^{۱۷}Gravitational Structure Constant

^{۱۸}Scale Relativity Theory

^{۱۹}Titius-Bode Law

که در آن e درصد خطای نسبی است. با توجه به نتایج بدست آمده می‌بینیم مدارهای مجازی که نظریه پیش بینی می‌کند در توافق خوبی با داده‌های مشاهداتی است. البته در مورد منشا خطاهایی که وجود دارند اطلاعی نداریم اما می‌توان به اندرکنش میدان‌های مغناطیسی سیارات با خورشید، نیروی بین سیارات و یا برخوردهایی که ممکن است در طی فرایند شکل‌گیری منظومه شمسی اتفاق افتاده باشد و یا مهم‌تر از همه‌ی این‌ها به تقریب‌هایی که برای سادگی محاسبات انجام شده اشاره کرد. همچنین می‌بینیم که تعداد زیادی مدار خالی وجود دارد و ممکن است این مدارها زمانی پر بوده باشند و با شکل‌گیری سیارات سنگین در نقاط مختلف منظومه‌شمسی و تحت تاثیر نیروی گرانش این سیارات مدار خود را حول خورشید ترک کرده و به مدارهایی حول این سیارات مهاجرت کرده و به قمری حول این سیارات تبدیل شده باشند. بحث دقیق‌تر در مورد این موضوع نیز به دانش اخترفیزیکی^{۲۰} و نظریه‌ی شکل‌گیری ساختار^{۲۱} نیازمند است که از حیطه‌ی این پایان‌نامه بسیار وسیع‌تر می‌باشند.

با تکرار این فرایند برای مقیاس طول رابطه‌ی ۸۵.۵ به عنوان اولین مدار مجاز برای قمرهای سیارات خواهیم داشت:

$$r_{q,n} = 0.6614334n^2 R_H \alpha^9 = 3/89n^2 \times 10^6 m. \quad (89.5)$$

^{۲۰} Astrophysics

^{۲۱} Structure Formation Theory

<i>Planet</i>	<i>Planet's Moons</i>	$r_{Theory}(km)$	$r_{Observation}(km)$	n	e
<i>Earth</i>	<i>Moon</i>	۳۸۹,۰۰۰	۳۸۴,۴۰۰	۱۰	۱/۱۹
<i>Jupiter</i>	<i>Thebe</i>	۲۴۸,۹۶۰	۲۲۱,۸۸۹	۸	۱۲/۲۲
	<i>Io</i>	۳۸۹,۰۰۰	۴۲۱,۷۰۰	۱۰	۷/۷۵
	<i>Europa</i>	۶۵۷,۴۱۰	۶۷۱,۰۳۴	۱۳	۲
	<i>Ganymede</i>	۱,۱۲۴,۲۱۰	۱,۰۷۰,۴۱۲	۱۷	۵
	<i>Callisto</i>	۱,۸۸۲,۷۶۰	۱,۸۸۲,۷۰۹	۲۲	۰
	<i>Themisto</i>	۷۵۳۱,۰۴۰	۷,۳۹۳,۲۱۶	۴۴	۱/۸
	<i>Leda</i>	۱۱,۳۴۳,۲۴۰	۱۱,۱۸۷,۷۸۱	۵۴	۱/۳
<i>Saturn</i>	<i>Mimas</i>	۱۹۰,۶۱۰	۱۸۵,۵۲۰	۷	۲/۷
	<i>Tethys</i>	۲۴۸,۹۶۰	۲۹۴,۶۶۰	۸	۱۵/۵
	<i>Dione</i>	۳۱۵,۰۹۰	۳۳۷,۴۰۰	۹	۶/۶۱
	<i>Rea</i>	۵۶۰,۱۶۰	۵۲۷,۰۴۰	۱۲	۶/۲۸
	<i>Titan</i>	۱,۲۶۰,۳۶۰	۱,۲۲۱,۸۵۰	۱۸	۳/۱۵
<i>Uranus</i>	<i>Miranda</i>	۱۴۰,۰۴۰	۱۲۹,۳۹۰	۶	۸/۲۳
	<i>Ariel</i>	۱۹۰,۶۱۰	۱۹۱,۰۲۱	۷	۰/۲۱
	<i>Umbriel</i>	۲۴۸,۹۶۰	۲۶۶,۳۰۰	۸	۶/۵۱
	<i>Titania</i>	۴۷۰,۶۹۰	۴۳۵,۹۱۰	۱۱	۷/۹۷
	<i>Oberon</i>	۵۶۰,۱۶۰	۵۸۳,۵۲۰	۱۲	۴
<i>Neptune</i>	<i>Despina</i>	۶۲,۲۴۰	۵۲,۵۲۶	۴	۱۸/۴۹
	<i>Proteus</i>	۹۷,۲۵۰	۱۱۷,۶۹۶	۵	۱۷/۳۷
	<i>Triton</i>	۳۸۹,۰۰۰	۳۵۴,۷۵۹	۱۰	۹/۶۵
	<i>Nereid</i>	۵,۶۱۷,۱۶۰	۵,۵۱۳,۸۱۸	۳۸	۱/۸۷
<i>Pluto</i>	<i>Charon</i>	۱۵,۵۶۰	۱۹,۵۷۱	۲	۲۰/۴۹
	<i>Nix</i>	۳۵,۰۱۰	۴۸,۶۷۵	۳	۲۸/۰۷

در مورد قمرهای سیارات نیز می‌بینیم بجز در چند مورد توافق خوبی بین داده‌های مشاهداتی و نتایج بدست آمده‌ی ما وجود دارد. می‌توان نتیجه‌ی بدست آمده را برای سیستم‌های سیاره‌ای خارجی نیز ^{۲۲} مورد بررسی قرار داد. در اینجا ما چند نمونه از این سیستم‌ها را می‌آوریم. بعنوان نمونه‌ی اول، سیستم سیاره‌ای *Andromedae - v* که در سال ۱۹۹۹ مشاهده شده و دارای سه سیاره می‌باشد که در آن جرم ستاره‌ی مرکزی تقریباً

^{۲۲}Extra-Solar Planetary Systems

برابر با خورشید، جرم سیاره‌ی اول تقریباً برابر با جرم *Jupiter*، جرم سیاره‌ی دوم تقریباً دو برابر سیاره‌ی اول و جرم سیاره‌ی سوم تقریباً چهار برابر سیاره‌ی اول است [۶۲]. برای این سیستم داریم:

$v - \text{Andromedae Planets}$	n	$r_{\text{Theory}}(a.u.)$	$r_{\text{Observation}}(a.u.)$	e
۱	۴	۰/۰۵۷۰۰۳	۰/۰۵۹	۳/۳۸۴۴
۲	۱۵	۰/۸۰۱۶۰۷۵	۰/۸۳	۳/۴۲۰۸
۳	۲۷	۲/۵۹۷۲۰۸	۲/۵	۳/۸۸

این نتایج بهتر از نتایج رهیافتی است که مولفان [۶۳] بصورت زیر بدست آورده‌اند:

$v - \text{Andromedae Planets}$	$r_{\text{author}}(a.u.)$	$r_{\text{Observation}}(a.u.)$	e
۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۹	۱۳/۵۵۹
۲	۰/۷۱۴	۰/۸۳	۱۳/۹۷
۳	۲/۱۵۳	۲/۵	۱۳/۸۸

همچنین برای سیستم سه سیاره‌ای تب اختر (پالسار) $PSRB1257 + 12^{23}$ که در [۶۴] مورد بررسی قرار گرفته‌اند نیز داریم [۶۵]:

^{۲۳}Pulsar

$PSRB1257 + 12 Planets$	n	$r_{Theory}(a.u.)$	$r_{Observation}(a.u.)$	e
۱	۷	۰/۱۷۴۵۷۲	۰/۱۹۱۶	۸/۸۸۷
۲	۱۰	۰/۳۵۶۲۷	۰/۳۶۴۶	۲/۲۸۵
۳	۱۱	۰/۴۳۱۰۸۷	۰/۴۷۲۷	۸/۸۰۳۳

برای سیستم سیاره‌ای پرجمعیت $HD10180$ که دارای هفت سیاره با جرم‌های ۱۲ تا ۲۵ برابر جرم زمین می‌باشد و اخیراً مشاهده شده نیز داریم [۶۶]:

$HD10180 Planets$	n	$r_{Theory}(a.u.)$	$r_{Observation}(a.u.)$	e
۱	۲	۰/۰۱۴۲۵۱	۰/۰۲۲۲۶	۳۵/۹۸
۲	۴	۰/۰۵۷۰۰۳۲	۰/۰۶۴۱	۱۰/۹۳
۳	۶	۰/۱۲۸۲۵۷	۰/۱۲۸۶	۰/۲۶۶
۴	۹	۰/۲۸۸۵۷۹	۰/۲۶۹۵	۷/۰۸
۵	۱۲	۰/۵۱۳۰۲۹	۰/۴۹۲۴	۴/۱۹۰
۶	۲۰	۱/۴۲۵۰۸	۱/۴۲۲	۰/۲۱۶۶
۷	۳۱	۳/۴۲۳۷۵۵	۳/۴	۰/۷

مشاهده می‌کنیم در دو مورد اول خطای بزرگی در پیش‌بینی ما وجود دارد اما در مورد پنج سیاره‌ی بعدی همخوانی بسیار خوبی بین داده‌های مشاهداتی و پیش‌بینی ما وجود دارد. البته در مورد موقعیت سیاره‌ی اول تردید وجود دارد و مولفان [۶۶] گفته‌اند که محتمل است سیاره‌ای در این فاصله نیز وجود داشته باشد.

۳.۵ چکیده‌ی فصل

در این فصل به مطالعه‌ی دینامیک ذرات آزمون در راستای بعد اضافی پرداخته شد. سپس با استفاده از جرم القایی و اصل ماخ تعمیم یافته به قاعده‌ی کوانتش مقیاس دست یافتیم. با استفاده از رابطه‌ی بدست آمده مقیاس‌های مختلف جهان را بدست آورده و در ادامه توجه خود را به مقیاس سیستم‌های سیاره‌ای معطوف کردیم. با مقایسه‌ی نتایج بدست آمده‌ی خود با داده‌های مشاهداتی شاهد توافق نسبتاً خوبی بودیم. البته در این زمینه منابع بسیاری وجود دارد که از رهیافت‌های متفاوت به نتایج مشابه بدست آمده در این فصل رسیده‌اند. در نهایت با توجه به حجم وسیع کارهایی که در این زمینه انجام شده است می‌توان گفت که در ساختارهای بزرگی مانند سیستم‌های سیاره‌ای نیز نوعی رفتار کوانتومی حکم‌فرماست.

کتابنامه

- [1] A. Dobado, An introduction to extra dimensions in particle physics, Central European School in Particle Physics, Prague, September, 2004.
- [2] L. Muntean, The Ontology of Spacetime II, Elsevier BV, ISSN 1871-1774, DOI:10.1016/S1871-1774(08)00015-6.
- [3] O. Klein(1926a,896) , Bregmann(1942).
- [4] P. S. Wesson: Space-Time-Matter Kaluza-Klein Theory. World Scientific, Singapore (1998).
- [5] G. Gabadadze, ICTP Lectures on Extra Dimensions, Summer School on Astroparticles Physics and Cosmology, Trieste, 17 June - 5 July 2002.
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali., ” The hierarchy problem and new dimension at a millimeter”, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali.,”Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimension and TeV scale quantum gravity”, Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999).
- [7] L. Randall and R. Sundrum, ” A large mass hierarchy from a small extra dimension,” Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv; hep-ph/9905221].

- [8] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, " 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space", Phys. Lett. B 485 208 (2000) [arxiv:hep-th/0005016].
- [9] G. R. Dvali, G. Gabadadze, " gravity on a brane in infinite-volume extra space", Phys. Rev. D 63, 065007 (2001) [arxiv:hep-th/0008054].
- [10] G. R. Dvali, G. Gabadadze, M. Kolanovic and F. Nitti, " The power of brane-induced gravity, " Phys. Rev. D , 084004 (2001).
- [11] M. B. Green, Scientific American, September (1986).
- [12] D. Paul; Julian R. Brown (Eds.) (1992). Superstrings: A Theory of Everything?, Cambridge University Press. p. 244. ISBN 0-521-43775-X.
- [13] L. P. Eisenhart., Riemannian Geometry, Princeton University Press (1949).
- [14] Y. Aminov., Differential Geometry and Topology of Curves, CRC Press (2000).
- [15] J. Nash, Ann. Maths. 63, 20 (1956).
- [16] J. M. Lee., Differential Geometry, Analysis and Physics (2000).
- [17] N. Straumann., General Relativity with Application to Astrophysics, Springer.
- [18] Gonseth F. and Juvet G. C. ,R. Acad. Sci., **185** (1927) 535; 732(E); Fisher J.W., Proc. R. Soc. London, Ser. A, **123** (1929) 489 Cambridge University Press, 1995.
- [19] E. Santamato., Phys. Rev. D, **29** (1984) 216; Wheeler J.T., Phys. Rev. D, **41** (1990) 431.

- [20] F. Shojai, A. Shojai and M. Golshani. , Mod. Phys. Lett. A, **13** (1998)2915.
- [21] P. S. Wesson, Space-Time-Matter (World Scientific, Singapoure) 1999; Gen. Relativ. Gravit., **36** (2004) 451; Class. Quantum Grav., **19** (2002) 2825.
- [22] P. Moyassari and S. Jalalzadeh., Gen. Relativ. Gravit., **39** (2007) 1467.
- [23] W. Muck, K. S. Viswanatahan and I. Volovich., Phys. Rev. D, **62** (2000) 105019.
- [24] D. Youm., Phys. Rev. D, **62** (2000) 084002.
- [25] S. Jalalzadeh and H. R. Sepangi., Class. Quantum Grav., **22** (2005) 2035.
- [26] E. Poisson., An advanced course in General relativity, Department of Physics University of Guelph (2002).
- [27] S. Carroll., SPACETIME AND GEOMETRY, Introduction to General Relativity (2004).
- [28] S. Jalalzadeh, B. Vakili, F. Ahmadi and H. R. Sepangi., Class. Quantum Grav., **23** (2006) 6015.
- [29] P. S. Wesson and J. Ponce De Leon., J. Math. Phys., **33** (1992) 3883
- [30] S. Jalalzadeh., Gen. Relativ. Gravit., **39** (2007) 387.
- [31] K. Tennakone and S. Pakvasa, Discrete Scale Transformation and a Possible Lepton Mass Spectrum, Physical Review Letters, Volume 27, Number 11, 1971.
- [32] A. Kleppe., Parametrization relating the fermionic mass spectra, Physical Review D, Volume 45, Number 11, 1993.

- [33] K. Tennakone and S. Pakvasa, A Model of Leptons, Physical Review D, Volume 6, Number 9, 1972.
- [34] R. L. Oldershaw., Towards a Resolution of the Vacuum Energy Density Crisis, journal of Cosmology, 17, 7359-7375, 2011.
- [35] R. L. Oldershaw., 1987, Astrophys. J. 322, 34
- [36] R. L. Oldershaw., 1989, Internat. J . Theor. Phys. 28, 669
- [37] R. L. Oldershaw., 1989, Internat. J . Theor. Phys. 28, 1503.
- [38] C. Sivaram., Scale transformatis and evolution of the early universe, Astrophysics and Space Science, **207**: 317-324, 1993.
- [39] C. Sivaram., Astrophysics and Space Science, **100**(1984) 467-470. 0004-640X/84/1002-04674.
- [40] C. Sivaram., Astrophysics and Space Science, **206**, 313.
- [41] C. Sivaram., Int. J. Theor. Phys. **33**, 2407.
- [42] C. Sivaram., Some Further effect of Discrete Scale Transformations, Astrophysics and Space Science, **271**: 321-326, 2000.
- [43] A. M. Yazdani, K. Atazadeh and S. Jalalzadeh., Localization of Gravity in Brane World with Arbitrary Extra Dimensions, Int J Theor Phys (2011) 50: 888-898.
- [44] S. Jalalzadeh and A. M. Yazdani., Variation of mass in the primordial nucleosynthesis as a test of induced matter brane gravity, Physics Letters B 664 (2008) 229-234.
- [45] J. Ponce de Leon, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 757 (2003)

- [46] M. Heydari-Fard, H. Razmi and H. R. Sepangi., Brane-World Black hole Solution Via a Confining Potential, arXiv: 0707.3558v3 [gr-qc] 11 Sep 2007.
- [47] M. DerSarkissian., Characteristic Action $\hbar^{(s)}$ in the structure of the universe, *Astrophysics and Space Science*. **125** (1986), 399-400.
- [48] M. DerSarkissian, *Astrophysics and Space Science*. **116**, 215.
- [49] M. DerSarkissian., *Nuovo Cimento Letters* **44**, 629 (1984)..
- [50] M. DerSarkissian., *Nuovo Cimento Letters* **40**, 390 (1984).
- [51] A. G. Agnese and R. Festa., Discretization on the Cosmic Scales Inspired from the Old Quantum Mechanics. arXiv: astro-ph/9807186v1 17 Jul 1998.
- [52] A. G. Agnese and R. Festa., Discretization ν -Andromedae planetary system. arXiv: astro-ph/9910534v2 5 Nov 1999.
- [53] P. Moyassari and S. Jalalzadeh., Weyl Geometry Quantization in Solar System, *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 20, No. 11 (2005) 2515-2521.
- [54] A. Rubcic and J. Rubcic., The Quantization of the Solar-Like gravitational Systems, *FIZIKA B* **7** (1998) 1, 1-13.
- [55] M. de Oliveira Neto and Ciencia e Cultura., journal of the Brazilian Association for the Advancement of Science, **48(3)** (1996) 166.
- [56] L. Nottale, Scale Relativity and Quantization of the Universe, *Astronomy and Astrophysics*, **327**, 867889 (1997).

- [57] L. Nottale, G. Schumacher, and J. Gay., Scale relativity and quantization of the solar system, *Astron. Astrophys.* 322, 10181025 (1997).
- [58] R. Hermann, G. Schumacher, and R. Guyard., Scale relativity and quantization of the solar system, Orbit quantization of the planet's satellites, *Astron. Astrophys.* 335, 281–286 (1998).
- [59] F. Scardigli., The Titius-Bode law and a quantum-like description of the planetary systems, arXiv:gr-qc/0507046 v2 30 Mar 2006.
- [60] K. U. LU., Mathematical investigation of Bode's Law and Quantization of Gravity, *Astrophysics and Space Science*, **225**: 227-235, 1995.
- [61] F. Scardigli., A Quantum-Like Description of the Planetary Systems, *Found Phys* (2007) 37: 1278–1295 DOI 10.1007/s10701-007-9151-7
- [62] R.P. Butler, G.W. Marcy, D.A. Fisher, T.W. Brown, A.R. Contos, S.G. Korzennik, P. Nisenson, and R.W. Noyes. Evidence for Multiple Companions to Upsilon Andromedae. Submitted to *Astrophysical Journal*, 1999.
- [63] L. Nottale, G. Schumacher, and E.T. Lef'evre., Scale-relativity and quantization of exoplanet orbital semi-major axes, *Astron. Astrophys.* 361, 379–387 (2000).
- [64] L. Nottale., Scale Relativity and Quantization of the Planetary System Around the Pulsar PSR B1257+12 Chaos, *Solitons Fractals* Vol. 9, No. 7, pp. 1043 1050, 1998.
- [65] A. Wolszczan, *Science*, 1994, 264, 538.

- [66] C. Lovis¹, D. S´egransan, M. Mayor, S. Udry, W. Benz, J.-L. Bertaux, F. Bouchy, A. C. M. Correia, J. Laskar, G. Lo Curto, C. Mordasini, F. Pepe, D. Queloz, and N. C. Santos., The HARPS search for southern extra-solar planets XXVII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems, *Astronomy Astrophysics manuscript no. HD10180* August 13, 2010.



Abstract

In this thesis after a review of the brane world models, we introduce geometrical concepts of these models in the context of the embedding geometry. Next, by using the induced geodesic equations on the 4D brane, we obtain the Bohr-Sommerfeld quantization rule in the Randall-Sundrum model as a result of consistency between the geodesic and geodesic deviation equations. This indicates that the path of test particle is made up of integral multiples of a fundamental Compton-type unit of length h/mc . In the last chapter we obtain a generalized Mach's principle as a consequence of the motion of test particles in the direction of extra dimension. Then, we obtain a quantization rule for different scales of the universe. Finally, as an application of the obtained rule, we focus on the planetary systems like ours and some other Extra-Solar systems. We obtain the orbit of the planets in these systems. We show that there is a good agreement between the observational data and our results.

Keywords: Brane World Models, Induced Geodesic Deviation Equations, Bohr-Sommerfeld Quantization Rule, Generalized Mach's Principle, Discrete Scale Transformation, Quantization of the Planetary Systems.



Shahid Beheshti University
Department of Physics

A dissertation submitted in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science
(Gravitation and Cosmology)

Quantum Effects in Brane Gravity

Supervisor: Dr. Shahram Jalalzadeh

Co-Supervisor: Dr. Hamid Reza Sepangi

Author: Yaghoub Heydarzade

January 2013