



HADAMARD-TİPLİ PELL- p DİZİLERİ

Ayhan İNCEKARA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM

Haziran 2024



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



HADAMARD-TİPLİ PELL- p DİZİLERİ

Ayhan İNCEKARA
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM

HAZİRAN 2024
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi Ayhan İNCEKARA'nın Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Hadamard-Tipli Pell- p Dizileri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilecek oy ile kabul edilmiştir.

13/06/2024

	Adı Soyadı	imza
Başkan	: Prof. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye	: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun...../...../20.....gün ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Vedat ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçlar bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğum,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi durumda aleyhime doğabilecek tüm hak ve kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Ayhan İNCEKARA

Tarih

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Hadamard-Tipli Pell- p Dizileri

Ayhan İNCEKARA

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM

Bu tez çalışmasında, Pell dizisi ve genelleştirilmiş Pell p -dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard tipli çarpımı ile yeni bir dizi tanımlanmış ve bu diziye Hadamard-tipli Pell- p dizisi adı verilmiştir. Daha sonra Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi elde edilmiş ve Hadamard-tipli Pell- p sayılar yardımıyla bu üreteç matrisin n . kuvveti üretilmiştir. Ayrıca Hadamard-tipli Pell- p sayılarının Binet formülü, üreteç fonksiyonu, toplamsal, permanental ve determinantal temsilleri verilmiştir. Son olarak, Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi ve üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli Pell- p sayılarının üstel temsili ve sonlu toplamları türetilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pell Dizisi, Genelleştirilmiş Pell p -Dizisi, Hadamard Tipli Çarpım, Hadamard-Tipli Pell- p Dizisi, Karakteristik Polinom, Matris.

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

HADAMARD-TİPLİ PELL- p SEQUENCE

Ayhan İNCEKARA

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM

In this thesis, a new definition sequence is defined by the Hadamard-type product of the characteristic polynomials of the Pell sequence and the generalized Pell p -sequence, and this sequence is called the Hadamard-type Pell- p sequence. Then the generating matrix of the Hadamard-type Pell- p sequence is obtained and the n th power of this generating matrix is produced with the aid of Hadamard-type Pell- p numbers. Additionally, the Binet formula, generating function, combinatorial, permanental, and determinantal representations of Hadamard-type Pell- p numbers are given. Finally, the exponential representation and finite sums of Hadamard-type Pell- p numbers are derived using the generating matrix and generating function of the Hadamard-type Pell- p sequence.

Key Words: Pell Sequence, Generalized Pell p -Sequence, Hadamard Type Product, Hadamard-Type Pell- p Sequence, Characteristic Polynomial, Matrix.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Yüksek lisans tez çalışması boyunca karşılaştığım her türlü zorluklar karşısında bana destek olan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen tez danışmanım ve hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yeşim AKÜZÜM'e ve bu süreçte tecrübesiyle bana yol gösteren, bilimsel ve akademik anlamda yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ' ye teşekkür ederim.

Bu yolda destekleyen ve motivasyon kaynağım olan sevgili eşim Yağmur İNCEKARA'ya, biricik annem Mualla ASLAN'a, kız kardeşim Ecem ŞAHİN'e, dostum, çocukluk arkadaşım Mustafa Cihat ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın hazırlanmasında ve tez savunmasına hazır hale gelmesinde emeği geçen Fen Bilimleri Enstitüsü'nün her kademedeki kıymetli çalışanlarına da teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ.....	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
BÖLÜM 1.....	1
1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.....	3
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Cebirsel yapılar	3
2.2. Matris Cebiri	5
2.3. Lineer İndirgemeli Diziler	15
2.4. Fibonacci Dizisi ve k -basamak Fibonacci Dizisi	16
2.5. Pell Dizileri ve Genelleştirilmiş k -Mertebeden Pell Dizisi	18
2.6. Genelleştirilmiş Pell (p, i) -Sayıları	20
BÖLÜM 3.....	22
3. MATERYALVE YÖNTEM	22
3.1. Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci Dizileri.....	22
3.2. Hadamard-Tipli k -Basamak Pell Dizileri	33
BÖLÜM 4.....	44
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	44
4. 1. Hadamard-Tipli Pell- p Dizileri	44
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	53
6. KAYNAKÇA.....	54

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	:	Grubun birim elemanı
R	:	Reel sayılar kümesi
Z	:	Tamsayılar kümesi
C	:	Kompleks sayılar kümesi
N	:	Doğal sayılar kümesi
G	:	Grup
$ G $:	Grubun mertebesi
$\langle A \rangle$:	$ A $ dan üretilen grup
G/N	:	G nin N ye göre bölüm grubu
$H \leq G$:	H, G nin alt grubu
$N \triangleleft G$:	N, G nin normal alt grubu
$H, +, \cdot$:	Halka
$A = (a_{ij})_{m \times n}$:	$n \times n$ tipinde kare matris
A^T	:	A matrisinin transpozu
$\det(A)$:	A matrisinin determinanı
$\text{sgn}(\sigma)$:	İşaret fonksiyonu
E	:	Elementer matris
$K(k_1, k_2, \dots, k_v)$:	Companion matrisi”
$M \circ K$:	M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı
$\{P(n)\}$:	Padovan dizisi
$\{F_n\}$:	Fibonacci dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$:	k -basamak Fibonacci dizisi
$\{J_n\}$:	Jacobsthal dizi
M_p	:	Hadamard tipli Padovan- p dizisinin companion matrisi
$(M_p)^n$:	Hadamard tipli Padovan- p matrisinin n . kuvveti
P_n^h	:	n . Hadamard tipli Padovan- p sayısı
$f_p(x)$:	Hadamard tipli Padovan- p dizisinin üreteç fonksiyonu
T_n	:	Hadamard tipli Padovan- p sayılarının toplamı
$\{HF_k(n)\}$:	Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi

$HF_k(n)$: n . Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayısı
 FM_k^n : Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci matrisi



BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalardaki yeri gün geçtikçe artan ve son derece öneme sahip olan indirgemeli diziler, Sayılar Teorisi alanında en çok çalışılan konulardan biridir. Bunun yanı sıra birçok bilimsel disiplinde indirgemeli dizilerin uygulamalarına sıklıkla rastlanmaktadır. Bunlara örnek olarak [1-15] 'deki çalışmalar verilebilir.

Cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin, üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, üstel, permanental ve toplamsal temsilleri gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmalardan güncel olanlara örnek olarak [16-21] çalışmaları verilebilir. Bu çalışmaların birçoğunda indirgemeli dizilerin üreteç matrisleri ve bu matrisler yardımıyla tanımlanan özel matrisler kullanılarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Aküzüm ve Deveci [22] 'deki çalışmalarında ilk kez Hadamard-tipli çarpım olarak adlandırılan yeni bir polinom çarpımı tanımlamışlardır. Daha sonra Fibonacci dizisi ve k -basamak Fibonacci dizisinin karakteristik polinomlarına, tanımlanan bu çarpım uygulanarak yeni bir k -basamak dizisi elde etmişlerdir.

Deveci ve Arkadaşları [23] 'deki çalışmalarında ise Pell dizisi ve k -basamak Pell dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard tipli çarpımı ile yeni bir dizi tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizi için çeşitli özellikler elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında ise Hadamard-tipli Pell- p dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisinin n . kuvveti yardımıyla Hadamard-tipli Pell- p sayıları için Binet formülü ve toplamsal temsil elde edilmiştir. Ayrıca Hadamard-tipli Pell- p sayılarının permanental ve determinantal temsilleri verilmiştir. Son olarak, Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi ve üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli Pell- p sayılarının üstel temsili ve sonlu toplamları üretilmiştir.

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Kuramsal Temeller bölümünde konu ile ilgili detaylı literatür bilgisi ve bazı temel kavramlar verilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizileri ve Hadamard-tipli k -Basamak Pell dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin yapısal özellikleri belirlenmiştir. Tezin son

bölümü olan bulgular bölümünde ise Hadamard-tipli Pell- p adı verilen yeni bir dizi tanımlanmış ve tanımlanan bu dizinin çeşitli özelliklerini elde edilmiştir.



BÖLÜM 2

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Cebirsel yapılar

Tanım 2.1.1. A bir küme olsun. $A \times A$ 'dan A 'ya

$$*: A \times A \rightarrow A, (x, y) = x * y$$

fonksiyonuna A kümesinde bir ikili işlem ve $(A, *)$ ikilisine cebirsel yapı denir.

Örnek 2.1.1. $R \times R \rightarrow R$ olmak üzere ve her $a, b \in R$ için

$$a \circ b = -2a - b + 1$$

şeklinde tanımlanan \circ işlemi ikili işlem olur.

Tanım 2.1.2. $G \neq \emptyset$ rastgele bir küme olmak üzere ve $*$ işlemi de G kümesinde tanımlı olan ikili işlem diyelim. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G, *)$ cebirsel yapısına grup denir.

- i. Her $a, b \in G$ dir. (Kapalılık özelliği)
- ii. Her $a, b, c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir. (Birleşme özelliği)
- iii. Her $a \in G$ için $a*e = e*a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman)
- iv. Her $a \in G$ için G nin birim elemanı e olmak üzere, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$, eşitliğini sağlayan bir $a^{-1} \in G$ vardır. (Ters eleman)

Tanım 2.1.3. $(G, *)$ cebirsel yapısı için Tanım 2.1.2'deki (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanıyorsa monoidtir.

Tanım 2.1.4. $(G, *)$ bir grup olmak üzere her $a, b \in G$ için $a*b = b*a$ eşitliği sağlanıyorsa G ye abelyan grup olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.5. G bir grup, $H \neq \emptyset$, $H \subseteq G$ ise ve H da G grubunun ikili işlemine göre grup ise H, G 'nin bir alt grubu olarak nitelendirilir ve $H \leq G$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.6. $(G, *)$ bir grubu ve e birim eleman (bu grubun) olmak üzere $(\{e\}, *)$ ve $(G, *)$ cebirsel yapıları $(G, *)$ grubunun alt grupları olup bu gruplara aşikar alt gruplar denir.

Tanım 2.1.7. Bir grubun aşikar alt gruplarından farklı bir alt grubuna özalt grup denir.

Tanım 2.1.8. H boştan farklı bir küme olsun. H kümesinde toplama (+) ile çarpma (\cdot) ikili işlemleri ile oluşturulan cebirsel yapı $(H, +, \cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Eğer her $x, y, z \in H$ için

$$x(y + z) = (xy) + (xz)$$

ise $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında sol taraftan dağılma niteliği vardır. Her $x, y, z \in H$ olması koşuluyla

$$(x + y)z = (xz) + (yz)$$

ise $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında sağdan dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.1.10. $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin.

- i. $(H, +)$ değişmeli gruptur.
- ii. (H, \cdot) 'nin birleşme özelliği vardır.
- iii. $(H, +, \cdot)$ 'da soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

şartları sağlanıyorsa $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

Tanım 2.1.11. $(H, +, \cdot)$ halkası verilsin. H halkasının $+$ işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_H ile gösterilir. H halkasının \cdot işlemine göre etkisiz elemanı varsa bu elemana halkanın birim elemanı denir ve 1_H ile gösterilir. Birim elemanı olan halkaya birimli halka denir.

Tanım 2.1.12. H bir halka ve $0_H \neq a \in H$ olsun. $ab=0$ eşitliği sağlayan bir $ab=0$ varsa a ya sol sıfır bölen, b ye de sağ sıfır bölen denir. Hem sol hem de sağ sıfır bölen elemana sıfır bölen denir.

Tanım 2.1.13. Birim elemanlı ve değişmeli olan ancak sıfır böleni olmayan bir halkaya tamlik bölgesi denir.

Tanım 2.1.14. $(H, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli bir halka olsun. $H - \{0_H\}$ ikinci işleme göre grup ise $(H, +, \cdot)$ cisim denir.

2.2. Matris Cebiri

Tanım 2.2.1. F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tabloya matris denir. m satır ve n sütundan oluşan bu matrise $m \times n$ tipinde matris denir. Matrisler A, B, C, \dots gibi büyük harflerle gösterilir ve genel olarak bir matris $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde ifade edilir. Burada a_{ij} sayıları matrisin elemanlarıdır. A matrisinin herhangi i . satırını $r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, ($1 \leq i \leq m$) ile herhangi j . sütunu is

$$s_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, (1 \leq j \leq n)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri verilsin. Her $i = 1, 2, \dots, m$ ve her $j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $A = B$ matrislerine eşit matrisler denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri aynı tipte iki matris olsun.

$A + B$ toplamı

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.2.4. $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in F$ matrisi verilsin. Bu matrisin $c \in R$ skaler sayısı ile çarpımı,

$$cA = c [a_{ij}]_{m \times n} = [ca_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde A matrisinin bütün elemanlarının c skaler sayısı ile çarpımı olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.1. A, B ve C aynı tip matrisler ve $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere

- i. $A + B = B + A$ dir. (Değişme Özelliği)
- ii. $A + (B + C) = (A + B) + C$ dir. (Birleşme Özelliği)
- iii. $A + 0 = A$ dir. (Etkisiz Eleman)
- iv. $A - A = 0$
- v. $c_1(A + B) = c_1A + c_1B$
- vi. $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$
- vii. $(c_1c_2)A = c_1(c_2A)$
- viii. $1.A = A$

özellikleri vardır [24].

Tanım 2.2.5. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerinin çarpımı olan $A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m \times p}$ matrisi,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemin yapılabilmesi için A matrisinin sütun sayısı ile B matrisinin satır sayısı birbirine eşit olmalıdır.

Teorem 2.2.2. Eğer, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times t}$ ve $C = [c_{ij}]_{t \times q}$ olmak üzere

$$A(BC) = (AB)C$$

formülü geçerlidir [25].

Teorem 2.2.3. *i.* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times t}$ ve $C = [c_{ij}]_{n \times t}$ olmak üzere

$$A(B + C) = AB + AC$$

denklemini geçerlidir. Bu özelliğe soldan dağılım kuralı denir.

ii. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{t \times m}$ ve $C = [c_{ij}]_{t \times m}$ olmak üzere

$$(B + C)A = BA + CA$$

denklemini geçerlidir. Bu özelliğe sağdan dağılım kuralı denir [25].

Tanım 2.2.6. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise A matrisinin transpozudur denir ve A^T sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. Elemanlarının tamamı sıfırdan oluşan matrislere sıfır matrisi denir.

Tanım 2.2.8. Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matrisi denir.

Tanım 2.2.9. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipindeki matris için A 'nın asal köşegen elemanları $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ olup bu elemanlar dışındaki elemanları sıfır olan matrise köşegen matris denir.

Tanım 2.2.10. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipindeki matris için A 'nın asal köşegen elemanlarının üstünde kalan elemanlar sıfır ise alt üçgensel matris, altında kalan elemanlar sıfır ise üst üçgensel matris denir.

Tanım 2.2.11. Köşegen bir matrisin, asal köşegendeki elemanları aynı ise bu matrise skaler matris ve asal köşegenindeki bütün elemanlar 1 ise bu matrise birim matris denir.

Tanım 2.2.12. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ oluyorsa A simetrik matristir. Eğer her $i = j$ için $a_{ij} = 0$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = -a_{ji}$ oluyorsa A ters simetrik matristir. Ya da $A = A^T$ ise A simetrik matris ve $-A = A^T$ ters simetrik matristir.

Tanım 2.2.13. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matris ve I $n \times n$ tipinde birim matris olsun.

$$AB = BA = I$$

eşitliğini sağlayan $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi varsa B matrisine A matrisinin tersi denir, $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.4. Kare matrisin tersi varsa tektir [25].

İspat: A kare matrisinin B ve C şeklinde iki tane tersi mevcut olsun. Bu takdirde ters matris tanımından A matrisinin tersi B ise,

$$AB = BA = I \quad (2.2.1)$$

aynı şekilde A matrisinin tersi C ise,

$$AC = CA = I \quad (2.2.2)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri ve matrislerin çarpma işlemindeki birleşme özelliği göz önüne alarak

$$B = I, B = (CA)B = C(AB) = C, I = C$$

eşitliği elde edilir ve kanıt tamamlanır.

Tanım 2.2.14. A matrisinin tersi varsa A matrisine ters çevrilebilir matris denir. Eğer A matrisinin tersi yoksa A matrisine ters çevrilemez matris denir.

Teorem 2.2.5. A ve B ters çevrilebilir matrisler ise AB çarpımı da ters çevrilebilir olup

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Tanım 2.2.15. A sıfır olmayan bir $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere

$$AB = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B , $n \times n$ tipinde bir kare matris varsa, o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere

$$CA = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir C , $n \times n$ tipinde bir kare matris varsa, o zaman da A matrisine sağ sıfır bölen matrisi denir. Eğer A matrisi hem sol sıfır bölen matrisi hem de sağ sıfır bölen matrisi ise, o takdirde A matrisine sadece sıfır bölen matris denir [25].

Teorem 2.2.6. A sıfır olmayan tersi mevcut olan kare matris ise A matrisi sıfır bölen matris değildir.

Tanım 2.2.16. I birim matrisine elemanter satır işlemlerinden yalnız biri uygulanarak elde edilen matrise elemanter matris denir ve E ile gösterilir.

Teorem 2.2.7.

- i. $A, m \times n$ matrisine bir elemanter satır işlemi uygulanarak $B, m \times n$ tipinde matrisi ile elde edilsin. B matrisi A matrisi ile yapılan elemanter satır işlemlerine karşılık gelen $m \times m$ elemanter matrisin çarpımına eşittir. Yani ε ile elemanter satır işlemi gösterilirse

$$B = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

- ii. Elemanter matrisler ters çevrilebilir olup her elemanter matrisin tersi de elemanter matristir [25].

İspat:

- i. E_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $E_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris ve $E_j(\alpha)$ ile $r_j \leftrightarrow \alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin.

Buna göre $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matris olmak üzere,

$$E_{ij} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olur. Bu da $E_{ij}A$ matrisinin i . satır ile j . satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen bir matris olduğunu gösterir. Gerçekten $I, m \times m$ birim matris olmak üzere bu birim matrisin i . satır ile j . satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise $\varepsilon(I_m)$ denilir. Ve bu matris ile A matrisi soldan çarpılırsa yine $E_{ij}A$ matris elde edilir.

Bu da $E_{ij}A$ elemanter matrisi için

$$B = E_{ij}A = \varepsilon(I_m)A$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$B = E_i(\alpha)A = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

ve

$$B = E_j(\alpha)A = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

olduğu gösterilebilir.

ii. Kolaylıkla

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$$

$$(E_i(\alpha))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$(E_j(\alpha))^{-1} = E_j(-\alpha)$$

eşitlikleri elde edilebilir. Dolayısıyla elemanter matrisler ters çevrilebilirdir ve elemanter matrislerin tersleri de birer elemanter matristir.

Tanım 2.2.17. $A = [a_{ij}]$ matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu matrisin determinantı

$n = 1$ için $\det(A) = a_{ij}$ 'dir ve $n \geq 2$ olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

eşitliği ile ifade edilir.

Tanım 2.2.18. $A = [a_{ij}]$ matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu matris herhangi bir i . satır ile j . sütunun silinmesiyle oluşan matrise A matrisinin alt matrisi denir. Oluşan bu matris M_{ij} ile gösterilir. a_{ij} elemanının minörü ise M_{ij} matrisinin determinanı eşittir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

değerine de a_{ij} elemanının kofaktörü denir.

Teorem 2.2.8. Bir köşegen matrisin köşegen elemanlarının çarpımı matrisin determinantına eşittir.

Teorem 2.2.9. “Üst üçgensel (veya alt üçgensel) bir matrisin determinanı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

Teorem 2.2.10. Bir matrisin determinanı ile transpozunun determinanı eşittir. Yani A kare matris olmak üzere

$$\det A = \det A^T \text{’dir.}$$

Teorem 2.2.11. A kare matrisi için $\det(A) \neq 0$ ise ters çevrilebilirdir.

Teorem 2.2.12. E elementer bir matris olsun. Bu durumda,

- i. E matrisinin determinanı sıfırdan farklı olmalıdır.
- ii. E matrisinin determinanı ile transpozunun determinanı eşittir.
- iii. E^{-1} matrisi de bir elementer matristir.

Teorem 2.2.13. E $n \times n$ tipli elementer bir matris ve A $n \times n$ tipli matris ise

$$\det(EA) = (\det E)(\det A) \text{’dir.}$$

Teorem 2.2.14 A ve B matrisleri $n \times n$ tipinde matrisler ise

$$\det(AB) = (\det A) (\det B) \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.19. A matrisinin permanenti $per(A)$ ile gösterilir. S_n simetrik grup (permütasyon) ve σ permütasyonu olmak üzere A 'nın permanenti:

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

eşitliği ile elde edilir.

Tanım 2.2.20. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $n \times n$ tipindeki ve $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $n \times 1$ tipindeki

matrisler verilsin. $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ değerine A matrisinin özdeğeri (ya da karakteristik değeri) denir. $AX = \lambda X$ denkleminde $(AX - \lambda X) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. $|A - \lambda I|$ değeri λ ya göre n . dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir. $|A - \lambda I| = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

şeklinde bir polinomdur [24].

Tanım 2.2.21. λ , A kare matrisinin bir özdeğeri olmak üzere bu özdeğere karşılık gelen özvektör (karakteristik vektör)

$$AX = \lambda X$$

denklemini sağlayan X vektörüdür.

Tanım 2.2.22. A ve B aynı tipte kare matrisler olmak üzere

$$B = P^{-1}AP$$

eşitliğini sağlayan ters çevrilebilir bir P matrisi varsa A ve B matrislerine benzer matrisler denir.

Tanım 2.2.23. A bir köşegen matris olsun. B kare matrisi A matrisine benzer ise B matrisine köşegenleştirilebilirdir denir.

Tanım 2.2.24. $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ polinomuna ait Companion matrisi

$$C = [c_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.15. $v \times v$ boyutlu $K(k_1, k_2, \dots, k_v)$ Companion matrisi

$$K(k_1, k_2, \dots, k_v) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_v \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

$K^u(k_1, k_2, \dots, k_v)$ matrisinin i . satır ve j . sütunundaki elamanı

$$k_{i,j}^{(u)}(k_1, k_2, \dots, k_v) = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_v)} \frac{t_j + t_{j+1} + \dots + t_v}{t_1 + t_2 + \dots + t_v} \times \binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} k_1^{t_1} \dots k_v^{t_v} \quad (2.2.3)$$

olup burada toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinden $t_1 + 2t_2 + \dots + vt_v = u - i + j$

koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} = \frac{(t_1 + \dots + t_v)!}{t_1! \dots t_v!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer

$u = i - j$ ise (2.2.3) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [26].

Tanım 2.2.25. V_n $n \times n$ tipli Vandermonde matrisi $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ için

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [27].

Tanım 2.2.26. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde matrisler olmak üzere

$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$ $m \times n$ çarpımına bu matrislerin Hadamard çarpımı denir.

Tanım 2.2.27. A kare matrisi için $\text{per}A = \det(A \circ B)$ eşitliğini sağlayan $n \times n$ tipli elemanları 1 ve -1 sayılarından oluşan B matrisi varsa A matrisine değiştirilebilir (convertible) matris denir.

Tanım 2.2.28. $A = [a_{ij}]$ matrisi $m \times n$ tipinde reel matris olsun. Bu matrisin k . satırı (ya da sütunu) iki tane sıfırdan farklı elemanı varsa bu matrise k . satırı (ya da sütunu) göre indirgenebilir (contractible) matris denir.

Tanım 2.2.29. x_1, x_2, \dots, x_u 'lar $m \times n$ tipli $A = [a_{ij}]$ matrisinin satır vektörleri olsun. A matrisi $a_{\tau,n} \neq 0$, $a_{\sigma,n} \neq 0$ ve $\tau \neq \sigma$ olacak şekilde n . sütuna göre indirgenebilirse $(u-1) \times (v-1)$ tipindeki $A_{\tau,\sigma,n}$ matrisi, A matrisinin τ . satırının $a_{\tau,n}x_\sigma + a_{\sigma,n}x_\tau$ ile değiştirilip, σ . satırının silinmesi ile elde edilebilir. n . sütun, τ . ve σ . satırla bağlantılı indirgeme sütunu olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.16. $\alpha > 1$ olmak üzere M matrisi α mertebesinde reel matris ve N matrisi M matrisinin indirgemesi olmak üzere $\text{Per}(M) = \text{Per}(N)$ dir [28].

2.3. Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.3.1. R birim elemanlı, değişmeli halka olsun. R 'nin elemanlarının a_1, a_2, \dots, a_k başlangıç değerleriyle ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n \quad (2.3.1)$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağlantıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$ elemanları sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz [29].

Tanım 2.3.2. $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k$ şeklindeki k . dereceden polinoma (2.3.1) denklemindeki lineer indirgemeli bağlantının karakteristik polinomu denir. Z, Q, R, C üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli dizilere sırayla tamsayı, rasyonel, reel ve karmaşık lineer indirgemeli diziler denir.

$c_k R$ nin tersinir elemanı olup (2.3.1) deki dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$, şeklinde devam eder. R halkasının sıfır böleni yoksa $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir [29].

Tanım 2.3.3. R birim elemanlı, abelyan halka olsun. R nin elemanlarının a_1, a_2, \dots, a_k başlangıç değerleriyle ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_{k+1}$$

bağlantısıyla tanımlanan diziye homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir ve

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1)a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i)a_{n+k-i} - c_k a_n \quad (2.3.2)$$

şeklindeki $n+1$. mertebeden homojen olmayan indirgemeli bağlantı elde edilir. Bu bağlantının karakteristik polinomu:

$$F(x) = (x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_{k-1} x - c_k)(x-1)$$

şeklindedir [29].

Kalman [30] da a_0, a_1, \dots, a_{k-1} başlangıç değerleri ve c_0, c_1, \dots, c_{k-1} sabit sayılar olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki k – basamak lineer indirgeme bağlantısıyla tanımlanan dizinin elemanlarını:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

(2.3.3)

denklemleri yardımıyla elde edilmiştir.

2.4. Fibonacci Dizisi ve k -basamak Fibonacci Dizisi

Tanım 2.4.1. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$n \geq 0 \text{ için } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklindeki indirgeme bağlantısıyla tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

şeklindedir.

Silvester,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir [31].

[32] 'de Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere Q matrisi tarafından üretilebileceği gösterilmiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q - matrisi denir.

Fibonacci dizisinin terimlerinin bildiğimiz bir özelliği şöyledir:

$$f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n.$$

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla induksiyon kullanılarak gösterilebilir.

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \frac{a^n - \beta^n}{a - \beta}$ eşitliğine Binet formülü denir. Bu formül n 'nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin genel halini verir.

$a^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.4.2. $\{F_n^{(k)}\}$ k -basamak Fibonacci dizisi, $F_0 = F_1 = \dots = F_{k-2} = 0, F_{k-1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere;

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + \dots + F_n^{(k)} \quad (n \geq 0) \quad (2.4.1)$$

dizisinin özel halidir. Burada c_0, c_1, \dots, c_{k-1} reel sabitlerdir.

2.5. Pell Dizileri ve Genelleştirilmiş k-Mertebeden Pell Dizisi

Tanım 2.5.1. $\{P_n\}$ Pell dizisi, $n \geq 0$ ile $P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklinde tanımlanır. O halde Pell dizisi

$$0, 1, 2, 2, 12, 29, 70, 169, \dots$$

şeklindedir.

Pell sayıları aşağıdaki matris tarafından üretilmiştir [33];

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{Z}$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.2. Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell sayılarının bir k dizisi,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1 - i \text{ ise} \\ 1 & n \neq 1 - i \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleriyle, $n > 0$ ve $1 - k \leq n \leq 0$ için;

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \dots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanmıştır [34].

Burada P_n^i , i -inci dizisinin n -inci terimidir. $i = k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş k -Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k = 2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir ve $i = k$ için, P_n^k ya genelleştirilmiş k -Pell sayıları denir.

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell matrisi;

$$R = [r_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir.

Aynı zamanda

$$E_n = [e_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \dots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

olmak üzere

$$E_{n+1} = R.E_n$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir. Burada R , $k \times k$ tipindeki matris, genelleştirilmiş k -mertebeden Pell matrisi olarak adlandırılmıştır [34].

Lemma 2.5.1. R ve E_n sırasıyla (2.5.1) ve (2.5.2) deki gibi olsunlar. Bu durumda tüm $n \geq 0$ tamsayıları için,

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

eşitliği yazılabilir [34].

Genelleştirilmiş Pell dizilerini induksiyonla da ispatlanabilen $\alpha > 0$ sabit katsayıları için,

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (M^{(\alpha)})^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisiyle de oluşturulabileceği gösterilmiştir [20].

$P_n^{(\alpha)k}$, k - basamak genelleştirilmiş Pell dizisi, $n \geq 0$ sabit katsayılar, $n \geq 0$ ve

$1 \leq j \leq k-1$ için $\beta_j = \binom{\alpha+j}{j+1}$ olacak şekilde

$$P_0^{(\alpha)k} = (\alpha+1)P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \dots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha)k}$$

şeklinde tanımlanmıştır [34].

k - basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için,

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha)k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir.

$$U = [u_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine, k - basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir [34].

2.6. Genelleştirilmiş Pell (p,i) -Sayıları

Genelleştirilmiş Pell sayıları, verilen herhangi bir, p ($p=1,2,3,\dots$), $n > p+1$ ve

$0 \leq i \leq p$ durumunda ve $P_p^{(i)}(1) = \dots = P_p^{(i)}(i) = 0$ için

$P_p^{(i)}(i+1) = P_p^{(i)}(i+2) = \dots = P_p^{(i)}(p+1) = 1$ başlangıç koşulları altında

$$P_p^{(i)}(n) = 2P_p^i(n-1) + P_p^{(i)}(n-p-1) \quad (2.6.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Eğer $i=0$ ise başlangıç koşulu

$$P_p^{(0)}(1) = P_p^{(0)}(2) = \dots = P_p^{(0)}(p+1) = 1$$

olur [17].

Örnek 2.6.1. $i = p = 1$ olduğunda genelleştirilmiş Pell (1,1)-sayısı $(n+1)$ 'inci Pell sayısı olur. Eğer $p = 2$ ve $i = 0$ olarak alırsak $\{P_2^{(0)}(n)\}$ genelleştirilmiş Pell (2,0)-sayılarının dizisi

$$1, 1, 1, 3, 7, 15, 33, 73, 161, \dots$$

şeklinde olur [17].

Ayrıca $p = 2$ ve $i = 1$ olduğunda, genelleştirilmiş Pell (2,1)-sayılarının başlangıç koşulları $P_2^{(1)}(1) = 0, P_2^{(1)}(2) = P_2^{(1)}(3) = 1$ olup $\{P_2^{(1)}(n)\}$ genelleştirilmiş Pell (2,1)-sayılarının dizisi,

$$0, 1, 1, 2, 5, 11, 24, 53, 117, 258, \dots$$

şeklindedir [17].

BÖLÜM 3

3. MATERYALVE YÖNTEM

3.1. Hadamard-Tipli k -basamak Fibonacci Dizileri

Tanım 3.1.1.

$$der(f(x)) = m, \quad der(g(x)) = n$$

olmak üzere

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

iki adet polinom seçelim f ve g polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) * g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i * b_i) * x^i$$

$$a_i + b_i = \begin{cases} a_i b_i & \text{eğer } a_i b_i \neq 0 \\ a_i + b_i & \text{eğer } a_i b_i = 0 \end{cases}$$

[22]'de Fibonacci dizisi ve k -basamak Fibonacci dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard-tipli çarpımından faydalanılarak yeni bir k -basamak dizisi tanımlanmış olup, bu dizi Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi olarak adlandırılmıştır:

Tanım 3.1.2. $k \geq 3$ ve $n \geq 0$ için Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi $HF_k(0) = \dots = HF_k(k-2) = 0, HF_k(k-1) = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte,

$$HF_k(n+k) = HF_k(n+k-1) + \dots + HF_k(n+2) - HF_k(n+1) - HF_k(n) \quad (3.1.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlanır [22].

(3.1.1) bağıntısı kullanılarak $\{HF_k(n)\}$ Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci dizisi için Companion matrix formundaki üreteç matrisi

$$FM_k^h = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Hadamard-ipli k -basamak Fibonacci matrisi olarak adlandırılmaktadır. n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak Hadamard-ipli k -basamak Fibonacci matrisinin n -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilir:

i. $k = 3$ için,

$$(FM_3^h)^n = \begin{bmatrix} HF_3^{n+2} & -HF_3^{n+1} & -HF_3^n & -HF_3^{n+1} \\ HF_3^{n+1} & -HF_3^n & -HF_3^{n-1} & -HF_3^n \\ HF_3^n & -HF_3^{n-1} & -HF_3^{n-2} & -HF_3^{n-1} \end{bmatrix}$$

ii. $k = 4$ için,

$$(FM_4^h)^n = \begin{bmatrix} HF_4^{n+3} & HF_4^{n+4} & -HF_4^{n+3} & -HF_4^{n+2} & -HF_4^{n+1} & -HF_4^{n+2} \\ HF_4^{n+2} & HF_4^{n+3} & -HF_4^{n+2} & -HF_4^{n+1} & -HF_4^n & -HF_4^{n+1} \\ HF_4^{n+1} & HF_4^{n+2} & -HF_4^{n+1} & -HF_4^n & -HF_4^{n-1} & -HF_4^n \\ HF_4^n & HF_4^{n+1} & -HF_4^n & -HF_4^{n-1} & -HF_4^{n-2} & -HF_4^{n-1} \end{bmatrix}$$

iii. $k \geq 5$ için $(FM_k^h)^n$ matrisi

$$(FM_k^h)^n = \begin{bmatrix} HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k-2} & -HF_k^{n+k-3} & -HF_k^{n+k-4} \\ HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k-1} & -HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k-3} & -HF_k^{n+k-4} & -HF_k^{n+k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & FM_k^{h,*} & \vdots & \vdots \\ HF_k^{n+1} & HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} & HF_k^n & -HF_k^{n-1} & -HF_k^{n-2} \\ HF_k^n & HF_k^{n+1} & -HF_k^n & HF_k^{n-1} & -HF_k^{n-2} & -HF_k^{n-3} \\ & & & -HF_k^{n+k-2} & -HF_k^{n+k-3} & -HF_k^{n+k-2} \\ & & & -HF_k^{n+k-3} & -HF_k^{n+k-4} & -HF_k^{n+k-3} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & -HF_k^n & -HF_k^{n-1} & -HF_k^n \\ & & & -HF_k^{n-1} & -HF_k^{n-2} & -HF_k^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $n \geq 3$ için $(k-5) \times (k-5)$ boyutlu $FM_k^{h,*}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} HF_k^{n+k+1} & -HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} & HF_k^{n+k+2} & -HF_k^{n+k+1} & -HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} & \dots \\ HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} & -HF_k^{n+k-2} & HF_k^{n+k+1} & -HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} & -HF_k^{n+k-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} & HF_k^{n+4} & -HF_k^{n+3} & -HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} & \dots \\ HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} & -HF_k^n & HF_k^{n+3} & -HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} & -HF_k^n & \dots \\ & & & HF_k^{n+2k-5} & -HF_k^{n+2-6} & \dots & -HF_k^{n+k} & -HF_k^{n+k-1} \\ & & & HF_k^{n+2k-6} & -HF_k^{n+2k-7} & \dots & -HF_k^{n+k-1} & -HF_k^{n+k-2} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & HF_k^{n+k-3} & -HF_k^{n+k-4} & \dots & -HF_k^{n+2} & -HF_k^{n+1} \\ & & & HF_k^{n+k-4} & -HF_k^{n+k-5} & \dots & -HF_k^{n+1} & -HF_k^n \end{bmatrix}$$

Ayrıca $\det FM_k^h = (-1)^k$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisi için binet form aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Lemma 3.1.1. Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^k - x^{k-1} - \dots - x^2 + x + 1 = 0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [22].

İspat: $f(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x^2 + x + 1$ olsun. $k = 3$ için Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ şeklinde olup, bu denklemin kökleri

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.77184 - 1.1151i, \\ x_2 &= 0.77184 + 1.1151i \end{aligned}$$

ve

$$x_3 = -0.54369$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, $k = 4$ için Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ şeklinde olup denklemin kökleri:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.1924 - 0.54788i, \\ x_2 &= 1.1924 + 0.54788i, \\ x_3 &= -0.69244 - 0.31815i \end{aligned}$$

ve

$$x_4 = -0.69244 + 0.31815i$$

olarak elde edilir. Böylece $k=3$ ve $k=4$ için $f(x)=0$ denkleminin çok katlı kökü olmadığı kolaylıkla görülmektedir. Şimdi de $k \geq 5$ durumunu göz önüne alalım. Farz edelim ki denklem

$$g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 2x^2 - 1$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$x^k = \frac{1-2x^2}{x-2} \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Öte yandan $g(x) = (k+1)x^k - 2kx^{k-1} + 4x$ olup

$$x^k = \frac{-4x^k}{(k+1)x - 2k} \quad (3.1.3)$$

olmalıdır. (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri göz önünde bulun durularak

$$(2k-2)x^3 + (8-4k)x^2 - (k+1) + 2k = 0 \quad (3.1.4)$$

olduğu görülür ki buradan da $k = 1 + \frac{4x^2 - 2x + 2}{-2x^3 + 4x^2 + x - 2}$ eşitliğine ulaşılır.

Wolfram Mathematica 10.0 [35] gibi uygun yazılımları kullanarak denklemin bir çözümü olmadığı görülür. Dolayısıyla, $k \geq 5$ için bu eşitliği sağlayacak k tam sayısının varlığı noktasında çelişki elde edilir. Bu da bize $f(x)=0$ denkleminin çok katlı köklerinin olmadığı sonucunu verir.

x_1, x_2, \dots, x_k 'lar FM_k^h matrisinin kökleri ise o zaman Lemma 3.1.1'den x_1, x_2, \dots, x_k 'lerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Bu kökler yardımıyla $k \times k$ boyutunda V_k Vandermonde matrisi

$$V_k = \begin{bmatrix} (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \dots & (x_k)^{k-1} \\ (x_1)^{k-2} & (x_2)^{k-2} & \dots & (x_k)^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $U_k(i, j)$ matrisi

$$U_k(i, j) = \begin{bmatrix} x_1^{n+k-i} \\ x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ x_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. $k \times k$ boyutlu $V_k(i, j)$ matrisi, V_k matrisinin j -inci sütununun $U_k(i, j)$ sütun matrisiyle yer değiştirilmesi sonucu elde edilsin [22].

Teorem 3.1.1. $n \geq 3$ ve $k \geq 3$ için $(FM_k^h)^n = [f_{i,j}^{h,k,n}]$ olsun. Bu durumda

$$f_{i,j}^{h,k,n} = \frac{\det V_k(i, j)}{\det V_k}$$

dir [22].

İspat: FM_k^h matrisini öz değerleri birbirinden farklı olduğundan FM_k^h matrisi köşegenleştirilebilir. Bu durumda $FM_k^h V_k = V_k P_k$ olduğu kolaylıkla görülür ki, burada $P_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dir. V_k matrisi tersinir matris olduğundan $(V_k)^{-1} FM_k^h V_k = P_k$ eşitliği yazılabilir. Bu yazımdan dolayı FM_k^h matrisi P_k matrisine benzerdir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $n \geq 3$ ve $k \geq 3$ için $(FM_k^h)^n V_k = V_k (P_k)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} f_{i,1}^{h,k,n} x_1^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_2^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_1^{n+k-i} \\ f_{i,1}^{h,k,n} x_2^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_2^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ f_{i,1}^{h,k,n} x_k^{k-1} + f_{i,2}^{h,k,n} x_k^{k-2} + \dots + f_{i,k}^{h,k,n} = x_k^{n+k-i} \end{cases}$$

Lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \dots, k$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$f_{i,j}^{h,k,n} = \frac{\det V_k(i, j)}{\det V_k}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Sonuç 3.1.1. $k = 3$ için $HF_k(n)$, n -inci Hadamard-tipli k -Fibonacci sayısı olmak üzere

$$HF_k(n) = \frac{\det V_k(k, 1)}{\det V_k} = \frac{\det V_k(k-1, k)}{\det V_k}$$

eşitliği elde edilir [22].

Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin Companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin permanental temsilleri elde edilmiştir:

Tanım 3.1.3. $\alpha \geq k$ ($k \geq 3$) bir tamsayı olmak üzere $\alpha \times \alpha$ boyutlu $L_{\alpha,k} = [l_{i,j}^{\alpha,k}]$ süper köşegen matrisi:

$$l_{i,j}^{\alpha,k} = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha, \\ i = u \text{ ve } j = u + 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - 1, \\ \vdots \\ i = u \text{ ve } j = u + k - 3 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 3 \\ \text{ve} \\ i = u \text{ ve } j = u - 1 \text{ ise } 2 \leq u \leq \alpha, \\ \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u + k - 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 2 \\ \text{ve} \\ i = u \text{ ve } j = u + k - 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \end{array} \\ -1 & \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Yani $L_{\alpha,k} = [l_{i,j}^{\alpha,k}]$ süper köşegen matrisi:

$$L_{\alpha,k} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (k)\text{-inci} \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir [22]

Teorem 3.1.2. $\alpha \geq k$ ve $k \geq 3$ için,

$$\text{per}L_{\alpha,k} = HF_k(\alpha + k - 1)$$

eşitliği elde edilir [22].

İspat: Teorem α üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanır. Denklemin $\alpha \geq k$ için $\text{per}L_{\alpha,k} = HF_k(\alpha + k - 1)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda,

denklemin $\alpha + 1$ için de sağlandığını gösterilmelidir. Eğer $perL_{\alpha,k}, L_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perL_{\alpha+1,k} = perL_{\alpha,k} + perL_{\alpha-1,k} + \dots + perL_{\alpha-k+3,k} - perL_{\alpha-k+2,k} - perL_{\alpha-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} perL_{\alpha,k} &= HF_k(\alpha + k - 1), \\ perL_{\alpha-1,k} &= HF_k(\alpha + k - 1 - 2), \\ &\vdots \\ perL_{\alpha-k+3,k} &= HF_k(\alpha + 2), \\ perL_{\alpha-k+2,k} &= HF_k(\alpha + 1) \end{aligned}$$

ve

$$perL_{\alpha-k+1,k} = HF_k(\alpha)$$

olduğundan $perL_{\alpha+1,k} = HF_k(\alpha + k)$ sonucuna ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanır.

Tanım 3.1.4. $\alpha > k$ olmak üzere $\alpha \times \alpha$ boyutlu $Y_{\alpha,k} = [y_{i,j}^{\alpha,k}]$ matrisi;

$$y_{i,j}^{\alpha,k} = \begin{cases} 1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha, \\ &i = u \text{ ve } j = u + 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &i = u \text{ ve } j = u + 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &\vdots \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 3 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &i = u \text{ ve } j = u - 1 \text{ ise } 2 \leq u \leq \alpha - k + 1, \\ &\text{ve} \\ &i = \alpha - k + 1 \text{ ve } j = \alpha, \end{aligned} \\ -1 & \begin{aligned} &\text{eğer } i = u \text{ ve } j = u + k - 2 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k, \\ &\text{ve} \\ &i = u \text{ ve } j = u + k - 1 \text{ ise } 1 \leq u \leq \alpha - k, \end{aligned} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\alpha \times \alpha$ boyutlu $D_{\alpha,k} = [d_{i,j}^{\alpha,k}]$ matrisi,

$$\begin{array}{c}
(\alpha - k + 1)\text{-inci} \\
\downarrow \\
D_{\alpha,k} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & Y_{\alpha-1,k} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Teorem 3.1.3.

i. $\alpha > k$ için,

$$perY_{\alpha,k} = HF_k(\alpha)$$

ii. $\alpha > k + 1$ için,

$$perD_{\alpha,k} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} HF_k(i)$$

şeklinde elde edilir [22].

İspat:

i. İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Denklemin $\alpha > k$ için sağladığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $k + 1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $perY_{\alpha,k}, Y_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$\begin{aligned}
perY_{\alpha+1,k} &= perY_{\alpha,k} + perY_{\alpha-1,k} + \dots + perY_{\alpha-k+3,k} - perY_{\alpha-k+2,k} - perY_{\alpha-k+1,k} \\
&= HF_k(\alpha) + HF_k(\alpha+1) + \dots + HF_k(\alpha-k+3) - HF_k(\alpha-k+2) - HF_k(\alpha-k+1)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. Eğer $perD_{\alpha,k}, D_{\alpha,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$perD_{\alpha,k} = perD_{\alpha-1,k} + perY_{\alpha-1,k}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.1.2 ve 3.1.2 (i). göz önünde bulundurularak α üzerinde indüksiyon ile görülebilir.

$\alpha > k + 1$ için $\alpha \times \alpha$ boyutlu bir R matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 3.1.2. $\alpha > k+1$ için,

$$\det(L_{\alpha,k} \circ R) = HF_k(\alpha + k - 1)$$

$$\det(Y_{\alpha,k} \circ R) = HF_k(\alpha)$$

ve

$$\det(D_{\alpha,k} \circ R) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} HF_k(i)$$

eşitlikleri elde edilir [22].

Aşağıdaki Sonuç ile Hadamard-tipli k -Fibonacci sayıları için toplamsal temsil verilmektedir.

Sonuç 3.1.3. $k \geq 3$ için $HF_k(\alpha)$, α -inci Hadamard-tipli k -Fibonacci sayısı olsun.

i.

$$HF_k(\alpha) = \sum_{(f_1, f_2, \dots, f_k)} \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} (-1)^{t_{k-1} + t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = \alpha - k + 1$ şartını sağlamaktadır.

ii.

$$HF_k(\alpha) = - \sum_{(f_1, f_2, \dots, f_k)} \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} x^{\binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k}} (-1)^{t_{k-1} + t_k}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinden $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = \alpha + 1$ koşulu sağlanmaktadır [22].

İspat: Teorem 2.2.15 de (i). durum için $i=k$ ve $j=1$ ve (ii). durumu için $i=k-1, j=k$ olarak alınırsa ispat Hadamard-tipli k -Fibonacci matrisinden kolaylıkla görülür.

Hadamard-tipli k -Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x^{k-1}}{1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının üstel temsilleri verilmiştir.

Teorem 3.1.4. Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının üstel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$g_k(x) = x^{k-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^i\right).$$

Burada $k \geq 3$ olur [22].

İspat:

$$\begin{aligned} \ln g_k(x) &= \ln \frac{x^{k-1}}{1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k} \\ &= \ln x^{k-1} - \ln(1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} -\ln(1-x-x^2-\dots-x^{k-2}+x^{k-1}+x^k) &= -[-x(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})- \\ &\quad \frac{1}{2}x^2(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^2-\dots- \\ &\quad \frac{1}{n}x^n(1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^n-\dots] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (1+x+\dots+x^{k-3}-x^{k-2}-x^{k-1})^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Hadamard-tipli k -basamak Fibonacci sayılarının toplamını göz önüne alalım. O halde

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} HF_k(\alpha)$$

olmak üzere ve $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu A_k^h matrisi aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$A_k^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & FM_k^h & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Bu durumda $(A_k^h)^\alpha$ matrisi aşağıdaki gibi olup tümevarım yöntemi ile görülebilir [22]

$$(A_k^h)^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_{\alpha+k-2} & & & \\ S_{\alpha+k-3} & & (FM_k^h)^\alpha & \\ \vdots & & & \\ S_{\alpha-1} & & & \end{bmatrix}.$$

3.2. Hadamard-Tipli k -Basamak Pell Dizileri

Tanım 3.2.1. $k \geq 3$ ve $n \geq 0$ için, Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi $HP_0^k = HP_1^k \dots = HP_{k-2}^k = 0$ ve $HP_{k-1}^k = 1$ başlangıç koşulları ile birlikte

$$HP_{n+k}^k = 2HP_{n+k-1}^k + HP_{n+k-2}^k + \dots + HP_{n+2}^k - 2HP_{n+1}^k - HP_n^k \quad (3.2.1)$$

şeklinde indirgeme bağlantısı ile tanımlanır [23].

(3.2.1) bağlantısı yardımıyla Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisi için üreteç matrisi

$$H_k^p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu matris Hadamard-tipli k-Pell matrisi olarak adlandırılmıştır. n üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak Hadamard-tipli k-basamak Pell dizisi matrisinin n -inci kuvveti aşağıdaki gibi elde edilir:

i. $k = 3$ için,

$$(HP_3^p)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+2}^3 & -2HP_{n+1}^3 & -HP_n^3 & -HP_{n+1}^3 \\ HP_{n+1}^3 & -2HP_n^3 & -HP_{n-1}^3 & -HP_n^3 \\ HP_n^3 & -2HP_{n-1}^3 & -HP_{n-2}^3 & -HP_{n-1}^3 \end{bmatrix}$$

ii. $k = 4$ için

$$(HP_4^p)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+3}^4 & HP_{n+4}^4 & -2HP_{n+3}^4 & -2HP_{n+2}^4 & -HP_{n+1}^4 & -HP_{n+2}^4 \\ HP_{n+2}^4 & HP_{n+3}^4 & -2HP_{n+2}^4 & -2HP_{n+1}^4 & -HP_n^4 & -HP_{n+1}^4 \\ HP_{n+1}^4 & HP_{n+2}^4 & -2HP_{n+1}^4 & -2HP_n^4 & -HP_{n-1}^4 & -HP_n^4 \\ HP_n^4 & HP_{n+1}^4 & -2HP_n^4 & -2HP_{n-1}^4 & -HP_{n-2}^4 & -HP_{n-1}^4 \end{bmatrix}$$

iii. $k \geq 5$ için $(HP_k^p)^n$ matrisi

$$(HP_k^p)^n = \begin{bmatrix} HP_{n+k-1}^k & HP_{n+k}^k & -2HP_{n+k-1}^k & & -2HP_{n+k-2}^k & -HP_{n+k-3}^k & -HP_{n+k-2}^k \\ HP_{n+k-2}^k & HP_{n+k-1}^k & -2HP_{n+k-2}^k & & -2HP_{n+k-3}^k & -HP_{n+k-4}^k & -HP_{n+k-3}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & HP_k^{p*} & \vdots & \vdots & \vdots \\ HP_{n+1}^k & HP_{n+2}^k & -2HP_{n+1}^k & & -2HP_n^k & -HP_{n-1}^k & -HP_n^k \\ HP_n^k & HP_{n+1}^k & -2HP_n^k & & -2HP_{n-1}^k & -HP_{n-2}^k & -HP_{n-1}^k \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

şeklinde olup $n \geq k-3$ için, $(k-4) \times (k-4)$ boyutlu HP_k^{p*} matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix}
HP_{n+k-2}^k + HP_{n+k-3}^k + \dots + HP_{n+3}^k - 2HP_{n+2}^k - HP_{n+1}^k & HP_{n+k-2}^k + HP_{n+k-3}^k + \dots + HP_{n+4}^k - 2HP_{n+3}^k - HP_{n+2}^k \dots \\
HP_{n+k-3}^k + HP_{n+k-4}^k + \dots + HP_{n+2}^k - 2HP_{n+1}^k - HP_n^k & HP_{n+k-3}^k + HP_{n+k-4}^k + \dots + HP_{n+3}^k - 2HP_{n+2}^k - HP_{n+1}^k \dots \\
\vdots & \vdots \\
HP_n^k + HP_{n-1}^k + \dots + HP_{n-k+5}^k - 2HP_{n-k+4}^k - HP_{n-k+3}^k & HP_n^k + HP_{n-1}^k + \dots + HP_{n-k+6}^k - 2HP_{n-k+5}^k - HP_{n-k+4}^k \dots \\
HP_{n-1}^k + HP_{n-2}^k + \dots + HP_{n-k+4}^k - 2HP_{n-k+3}^k - HP_{n-k+2}^k & HP_{n-1}^k + HP_{n-2}^k + \dots + HP_{n-k+5}^k - 2HP_{n-k+4}^k - HP_{n-k+3}^k \dots \\
& HP_{n+k-2}^k - 2HP_{n+k-3}^k - HP_{n+k-4}^k \\
& HP_{n+k-3}^k - 2HP_{n+k-4}^k - HP_{n+k-5}^k \\
& \vdots \\
& HP_n^k - 2HP_{n-1}^k - HP_{n-2}^k \\
& HP_{n-1}^k - 2HP_{n-2}^k - HP_{n-3}^k
\end{bmatrix}$$

Ayrıca $\det H_k^p = (-1)^k$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Şimdi Hadamard-tipli k -Pell dizisi için Binet formülü üzerinde duracağız;

Lemma 3.2.1. $k, k \geq 3$ olacak şekilde bir tek tam sayı olsun. Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin karakteristik denklemi $x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1 = 0$ olup, bu denklemin çok katlı kökü yoktur [23].

İspat: $f(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1$ olsun. $k = 3$ için Hadamard-tipli k -Pell dizisinin karakteristik denklemi $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ şeklinde olup bu denklemin kökleri

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.1766 - 1.2028i, \\
x_2 &= 1.1766 + 1.2028i, \\
x_3 &= -0.35321
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece $k = 3$ için $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı köklü olmadığı kolaylıkla görülmektedir.

Şimdi de $k \geq 5$ durumunu göz önüne alalım. Farz edelim ki $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 3x^k + x^{k-1} + 3x^2 - x - 1$$

bu durumda

$$x^k = \frac{-3x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Öte yandan $g'(x) = (k+1)x^k - 3kx^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + 6x - 1$ olup

$$x^k = \frac{-6x^3 + x^2}{(k+1)x^2 - 3kx + k - 1} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. (3.2.3) ve (3.2.4) denkleminin eşitliğinden

$$k = 1 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 4x}{-3x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 1}$$

eşitliğine ulaşılır. Wolfram Mathematica 10.0 [35] gibi uygun yazılımları kullanarak denklemin bir çözümü olmadığı görülür. Dolayısıyla $k \geq 5$ için bu eşitliği sağlayacak k tam sayısının varlığı noktasında çelişki elde edilir. Bu yüzden $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı köklerinin olmadığı sonucunu verir.

x_1, x_2, \dots, x_k ler $x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x^2 + 2x + 1$ denkleminin kökleri ise o zaman

Lemma 3.2.1'den $k \times k$ boyutlu V^k Vandermonde matrisi

$$V^k = \begin{bmatrix} (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \dots & (x_k)^{k-1} \\ (x_1)^{k-2} & (x_2)^{k-2} & \dots & (x_k)^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x & & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $R^k(i, j)$ matrisi

$$R^k(i, j) = \begin{bmatrix} x_1^{n+k-i} \\ x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ x_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. $k \times k$ boyutlu $V^k(i, j)$ matrisi, V^k matrisinin j -inci sütununu $R^k(i, j)$ sütun matrisiyle yer değiştirir.

Teorem 3.2.1. $k \geq 3$ olacak şekilde k tek tamsayısı ve $n \geq 0$ için $(H_k^p)^n = [h_{i,j}^{p,k,n}]$

olsun. Bu durumda

$$h_{i,j}^{p,k,n} = \frac{\det V^k(i, j)}{\det V^k}$$

dir [23].

İspat: x_1, x_2, \dots, x_k öz değer H_k^p matrisidir. Bu durumda $H_k^p V^k = V^k S^k$ olduğu kolaylıkla görülür ki burada $S^k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ dir. V^k matrisi tersinir matris olduğundan $(V^k)^{-1} H_k^p V^k = S^k$ eşitliği sağlanır ki, H_k^p matrisi S^k matrisine benzerdir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $(H_k^p)^n V^k = V^k (S^k)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} \{h_{i,1}^{p,k,n} x_1^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_1^{p,k,n} + \dots + h_{i,k}^{p,k,n} = x_1^{n+k-i} \\ \{h_{i,1}^{p,k,n} x_2^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_2^{k-2} + \dots + h_{i,k}^{p,k,n} = x_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ \{h_{i,1}^{p,k,n} x_k^{k-1} + h_{i,2}^{p,k,n} x_k^{k-2} + \dots + h_{i,1}^{p,k,n} = x_k^{n+k-i} \end{cases}$$

Lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \dots, k$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$h_{i,j}^{p,k,n} = \frac{\det V^k(i, j)}{\det V^k}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $k \geq 3$ olacak şekilde k tek tamsayı ve $n \geq 0$ için HP_n^k n -inci, Hadamard-tipli k -basamak Pell sayısı olmak üzere

$$HP_n^k = \frac{\det V^k(k, 1)}{\det V^k} = \frac{\det V^k(k-1, k)}{\det V^k}$$

eşitliği bulunur [23].

Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin Companion matris formundaki üreteç matrisleri dikkate alınarak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır. Bu matrisin permanent değerleri üzerinden Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin permanental ifadesi elde edilmiştir:

Tanım 3.2.2. $r \geq k$ ($k \geq 3$) bir tamsayı olmak üzere $r \times r$ boyutlu $M^{r,k} = [m_{i,j}^{r,k}]$ süper köşegen matrisi;

$$m_{i,j}^{r,k} = \begin{cases} & \begin{array}{l} \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-1, \\ i=t \text{ ve } j=t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-2, \\ \vdots \\ i=t \text{ ve } j=t+k-3 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+3, \\ \text{ve} \\ i=t \text{ ve } j=t-1 \text{ ise } 2 \leq t \leq r, \\ \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t \text{ ise } 1 \leq t \leq r, \\ \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+2, \\ \text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ \text{diğer durumlarda} \end{array} \\ 1 & \\ 2 & \\ -2 & \\ -1 & \\ 0 & \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Teorem 3.2.2. $r \geq k$ ve $k \geq 3$ için,

$$\text{per}M^{r,k} = \text{HP}_{r+k-1}^k$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Kanıt matematiksel tümevarım ile yapılacaktır. Denklemin $r \geq k$ için $\text{per}M^{r,k} = \text{HP}_{r+k-1}^k$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $r+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $\text{per}M^{r,k}, M^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise,

$$\text{per}M^{r+1,k} = 2\text{per}M^{r,k} + \text{per}M^{r-1,k} + \dots + \text{per}M^{r-k+3,k} - 2\text{per}M^{r-k+2,k} - \text{per}M^{r-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
perM^{r,k} &= HP_{r+k-1}^k, \\
perM^{r-1,k} &= HP_{r+k-2}^k, \\
&\vdots \\
perM^{r-k+3,k} &= HP_{r+2}^k, \\
perM^{r-k+2,k} &= HP_{r+1}^k
\end{aligned}$$

ve

$$perM^{r-k+1,k} = HP_r^k$$

olduğundan $perM^{r+1,k} = HP_{r+k}^k$ sonucuna ulaşılır.

Tanım 3.2.3. $r > k$ olmak üzere $r \times r$ boyutlu $N^{r,k} = [n_{i,j}^{r,k}]$ matrisi;

$$n_{i,j}^{r,k} = \begin{cases} \begin{aligned} &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-2, \\ &i=t \text{ ve } j=t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-3, \\ &\vdots \\ &i=t \text{ ve } j=t+k-3 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+2, \\ &\text{ve} \\ &i=t \text{ ve } j=t-1 \text{ ise } 2 \leq t \leq r, \\ &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t \text{ ise } 1 \leq t \leq r-1, \\ &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-2 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ &\text{eğer } i=t \text{ ve } j=t+k-1 \text{ ise } 1 \leq t \leq r-k+1, \\ &0 \quad \text{diğer durumda} \end{aligned} \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$r \times r$ boyutlu $B^{r,k} = [b_{i,j}^{r,k}]$ matrisi aşağıdaki gibi,

$$\begin{aligned}
&(r-k)\text{-inci} \\
&\downarrow \\
B^{r,k} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & N^{r-1,k} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3.

i. $r > k$ durumunda,

$$\text{per}N^{r,k} = -HP_{r-1}^k,$$

ii. $r > k+1$ durumunda,

$$\text{per}B^{r,k} = -\sum_{i=0}^{r-2} HP_i^k$$

eşitlikleri elde edilir [23].

İspat: i. Teorem r üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanacaktır. Denklemin $r > k$ için şartların sağlandığını farz edelim. Hal böyle olunca denklemin $r+1$ için sağlandığı gösterilmeli. Eğer $\text{per}N^{r,k}, N^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise

$$\text{per}N^{r+1,k} = 2\text{per}N^{r,k} + \text{per}N^{r-1,k} + \dots + \text{per}N^{r-k+3,k} - 2\text{per}N^{r-k+2,k} - \text{per}N^{r-k+1,k}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{per}N^{r,k} &= HP_{r-1}^k, \\ \text{per}N^{r-1,k} &= HP_{r-2}^k, \\ &\vdots \\ \text{per}N^{r-k+3,k} &= HP_{r-k+2}^k, \end{aligned}$$

ve

$$\text{per}N^{r-k+1,k} = HP_{r-k}^k$$

olduğundan $\text{per}N^{r+1,k} = HP_r^k$ sonucuna ulaşılır ve böylece kanıt tamamlanır.

ii. Eğer $\text{per}B^{r,k}, B^{r,k}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak genişletilir ise

$$\text{per}B^{r,k} = \text{per}B^{r-1,k} + \text{per}N^{r-1,k}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.2.2. ve 3.2.3 (i). göz önünde bulundurularak r üzerinde tümevarım yönteminden ispat kolaylıkla görülür.

$r > k+1$ için $r \times r$ boyutlu bir Q matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 3.2.2. $r > k + 1$ için,

$$\det(M^{r,k} \circ Q) = HP_{r+k-1}^k,$$

$$\det(N^{r,k} \circ Q) = -HP_{r-1}^k$$

ve

$$\det(B^{r,k} \circ Q) = -\sum_{i=0}^{r-2} HP_i^k$$

eşitlikleri elde edilir [23].

Aşağıdaki sonuç ile Hadamard-tipli k -basamak Pell sayıları için toplamsal temsil verilmektedir.

$k \geq 3$ için HP_n^k , n -inci Hadamard-tipli k -basamak Pell sayısı

Sonuç 3.2.3. $k \geq 3$ için HP_n^k , n -inci Hadamard-tipli k -basamak Pell sayısı olsun. yani

i.

$$HP_n^k = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} 2^{t_1} (-2)^{t_{k-1}} (-1)^{t_k}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = n - k + 1$ şartını sağlamaktadır.

ii.

$$HP_n^k = - \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_k)} \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} 2^{t_1} (-2)^{t_{k-1}} (-1)^{t_k}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (k)t_k = n + 1$ şartını sağlamaktadır [23].

İspat: Teorem 2.2.15 de i. durum için $i=k$ ve $j=1$ ve ii. durumu için $i=k-1, j=k$ olarak alınırsa ispatı Hadamard-tipli k -basamak Pell matrisinden kolaylıkla görülür.

Hadamard-tipli k -basamak Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_k(x) = \frac{x^{k-1}}{1-2x-x^2-\dots-x^{k-2}-2x^{k-1}+x^k}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının üstel ifadeleri verilmiştir.

Teorem 3.2.4. Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının üstel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$g_k(x) = x^{k-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^i\right).$$

Burada $k \geq 3$ tür [23].

İspat:

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = -\ln(1-2x-x^2-\dots-x^{k-2}+2x^{k-1}+x^k)$$

ve

$$-\ln(1-2x-x^2-\dots-x^{k-2}+2x^{k-1}+x^k) = -\left[-x(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1}) - \frac{1}{2}x^2(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^2 - \dots - \frac{1}{n}x^n(2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^n - \dots\right]$$

olduğundan

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^{k-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (2+x+\dots+x^{k-3}-2x^{k-2}-x^{k-1})^i$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Hadamard-tipli k -basamak Pell sayılarının toplamını göz önüne alalım. O halde $n \geq 0$ ve $k \geq 3$ için,

$$S_n = \sum_{i=0}^n HP_n^k$$

olmak üzere ve $(k+1) \times (k+1)$ boyutlu L_k^h matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$L_k^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & H_k^p & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

bu durumda $(L_k^h)^n$ matrisi aşağıdaki gibi olup tümevarım yöntemi ile görülebilir:

$$(L_k^h)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n+k-2} & & & \\ S_{n+k-3} & (HP_k^p)^n & & \\ \vdots & & & \\ S_{n-2} & & & \end{bmatrix}$$

BÖLÜM 4

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4. 1. Hadamard-Tipli Pell- p Dizileri

Pell dizisi ve genelleştirilmiş Pell (p, i) -dizisinin karakteristik polinomlarının Hadamard-tipli çarpımı kullanılarak yeni bir dizi tanımlanmış olup, bu dizi Hadamard-tipi Pell- p dizisi olarak adlandırılmıştır;

Tanım 4.1.1. $n \geq 0$ ve $p \geq 3$ tamsayıları için Hadamard-tipi Pell- p dizisi

$a_0^p = a_1^p = \dots = a_{p-1}^p = 0$ ve $a_p^p = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a_{n+p+1}^p = 2a_{n+p}^p - a_{n+2}^p + 2a_{n+1}^p - a_n^p \quad (4.1.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [36].

(4.1.1) ilişkisini kullanarak, Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi

$$G_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)}$$

şeklinde elde edilir ve bu matris Hadamard-tipli Pell- p matrisi olarak adlandırılır. n üzerinde tümevarım metodu kullanılarak bu matrisin n -inci kuvveti

$$(G_p)^n = \begin{bmatrix} a_{n+p}^p & 2a_{n+p-1}^p - a_{n+p-2}^p & -a_{n+p-1}^p \\ a_{n+p-1}^p & 2a_{n+p-2}^p - a_{n+p-3}^p & -a_{n+p-2}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^p & 2a_n^p - a_{n-1}^p & -a_n^p \\ a_n^p & 2a_{n-1}^p - a_{n-2}^p & -a_{n-1}^p \end{bmatrix} G_p^* \quad (4.1.2)$$

şeklinde olup $n \geq p$ için $(p+1) \times (p-2)$ boyutlu G_p^* matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} -a_{n+2}^p + 2a_{n+1}^p - a_n^p & -a_{n+3}^p + 2a_{n+2}^p - a_{n+1}^p & \cdots & -a_{n+p-1}^p + 2a_{n+p-2}^p - a_{n+p-3}^p \\ -a_{n+1}^p + 2a_n^p - a_{n-1}^p & -a_{n+2}^p + 2a_{n+1}^p - a_n^p & \cdots & -a_{n+p-2}^p + 2a_{n+p-3}^p - a_{n+p-4}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-p+3}^p + 2a_{n-p+2}^p - a_{n-p+1}^p & -a_{n-p+4}^p + 2a_{n-p+3}^p - a_{n-p+2}^p & \cdots & -a_n^p + 2a_{n-1}^p - a_{n-2}^p \\ -a_{n-p+2}^p + 2a_{n-p+1}^p - a_{n-p}^p & -a_{n-p+3}^p + 2a_{n-p+2}^p - a_{n-p+1}^p & \cdots & -a_{n-1}^p + 2a_{n-2}^p - a_{n-3}^p \end{bmatrix}.$$

Ayrıca $\det G_p = (-1)^{p+1}$ olduğunu açık olarak görülmektedir [36].

Matris metodu kullanılarak Hamarad-tipli Pell- p dizisi için binet formülü aşağıdaki gibi elde edilir:

Lemma 4.1.1. Hamarad-tipli Pell- p dizisinin karakteristik denklemi $x^{p+1} - 2x^p + x^2 - 2x + 1 = 0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [36].

İspat: $f(x) = x^{p+1} - 2x^p + x^2 - 2x + 1$ olsun. Tüm $p \geq 3$ için $f(0) \neq 0$ ve $f(1) \neq 1$ olduğu açıktır. k , $f(x)$ in çok katlı kökü olsun o zaman, r 'nin çok katlı kök olduğu göz önüne alındığında $f(r) = 0$ ve $f'(r) = 0$ dır. Şimdi, $f(r) = r^{p+1} - 2r^p + r^2 - 2r + 1$ olduğunu düşünülürse

$$r^p = \frac{-r^2 + 2r - 1}{r - 2} \quad (4.1.3)$$

elde edilir. Ayrıca, $f'(r) = (p+1)r^p - 2pr^{p-1} + 2r - 2$ olup buradan da

$$r^p = \frac{-2r^2 + 2r}{(p+1)r - 2p} \quad (4.1.4)$$

olmalıdır. (4.1.3) ve (4.1.4) denklemleri göz önünde bulundurularak

$$p = \frac{r^2 - 3r}{r^2 - 3r + 2}$$

eşitliğine ulaşılır. Wolfram Mathematica 10.0 [35] uygun yazılımları kullanarak denklemin $p \geq 3$ için bir çözümü olmadığı görülür. Dolayısıyla $p \geq 3$ için bu eşitliği sağlayacak k tam sayısının varlığı noktasında çelişki elde edilir. Bu yüzden $f(x) = 0$ denkleminin çok katlı köklerinin olmadığı sonucuna ulaşılır. Eğer k_1, k_2, \dots, k_{p+1} , G_p matrisinin kökleri ise, o zaman Lemma 4.1.1'den k_1, k_2, \dots, k_{p+1} 'lerin birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Bu kökler yardımıyla, K^p Vandermonde matrisi

$$K^p = \begin{bmatrix} (k_1)^p & (k_2)^p & \dots & (k_{p+1})^p \\ (k_1)^{p-1} & (k_2)^{p-1} & \dots & (k_{p+1})^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1 & & \dots & (k_{p+1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $T^p(i, j)$ matrisi,

$$T^p(i, j) = \begin{bmatrix} k_1^{n+p+1-i} \\ k_2^{n+p+1-i} \\ \vdots \\ k_{p+1}^{n+p+1-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. $(p+1) \times (p+1)$ boyutlu $K^p(i, j)$ matrisi, K^p matrisinin j -inci sütununun $T^p(i, j)$ sütun matrisiyle yer değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Teorem 4.1.1. $n \geq p$ için $(G_p)^n = [g_{i,j}^{p,n}]$ olsun. Bu durumda

$$g_{i,j}^{p,n} = \frac{\det K^p(i, j)}{\det K^p}$$

dir [36].

İspat: k_1, k_2, \dots, k_{p+1} özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için G_p matrisi köşegenleştirilebilir. $D_p = (k_1, k_2, \dots, k_{p+1})$ olsun. Bu durumda $D_p = (k_1, k_2, \dots, k_{p+1})$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $G_p K^p = K^p D_p$ eşitliği elde edilir. Öte yandan $\det K^p \neq 0$ olduğundan K^p matrisi tersinir matristir. Böylece $(G_p)^n K^p = K^p (D_p)^n$ eşitliği sağlanır ki, bu da G_p matrisinin D_p matrisine benzer olduğunu göstermektedir.

Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $(G_p)^n K^p = K^p (D_p)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} g_{i,1}^{p,n} k_1^p + g_{i,2}^{p,n} k_1^{p-1} + \dots + g_{i,p+1}^{p,n} = k_1^{n+p+1-i} \\ g_{i,1}^{p,n} k_2^p + g_{i,2}^{p,n} k_2^{p-1} + \dots + g_{i,p+1}^{p,n} = k_2^{n+p+1-i} \\ \vdots \\ g_{i,1}^{p,n} k_{p+1}^p + g_{i,2}^{p,n} k_{p+1}^{p-1} + \dots + g_{i,p+1}^{p,n} = k_{p+1}^{n+p+1-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Her $i, j = 1, 2, \dots, p+1$ için lineer denklem sisteminin çözümünden

$$g_{i,j}^{p,n} = \frac{\det K^p(i, j)}{\det K^p}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1. α_n^p , n -incisi Hamarad-tipli Pell- p sayısı olmak üzere

$$\alpha_n^p = \frac{\det K^p(p+1, 1)}{\det K^p} = -\frac{\det K^p(p, p+1)}{\det K^p}$$

eşitliği elde edilir [36].

Aşağıdaki sonuç ile Hamarad-tipli Pell- p sayıları için toplamsal temsil verilmiştir.

Sonuç 4.1.2. $p \geq 3$ için α_n^p Hamarad-tipli Pell- p sayısı olsun. O halde

i.

$$\alpha_n^p = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_{p+1})} \binom{t_1 + \dots + t_{p+1}}{t_1, \dots, t_{p+1}} 2^{t_1 + t_p} (-1)^{t_{p-1} + t_{p+1}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (p+1)t_{p+1} = n - p$ şartını sağlamaktadır.

ii.

$$\alpha_n^p = - \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_u)} \frac{t_{p+1}}{t_1 + t_2 + \dots + t_{p+1}} x \binom{t_1 + \dots + t_{p+1}}{t_1, \dots, t_{p+1}} 2^{t_1 + t_p} (-1)^{t_{p-1} + t_{p+1}}$$

olup burada toplam negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \dots + (p+1)t_{p+1} = n+1$ şartını sağlamaktadır [36].

İspat: Teorem 2.2.15 de i. durum için $i = p+1$ ve $j = 1$ ve ii. durumu için $i = p$ ve $j = p+1$ olarak alınrsa ispat Hadamard-tipli Pell- p matrisinden kolaylıkla görülür.

Hadamard-tipli Pell- p dizisinin Companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi bir süper-köşegen matris tanımlanmıştır ve bu matrisin permanent değerleri üzerinden de Hadamard-tipli Pell- p dizisinin permanental temsilleri elde edilmiştir:

Tanım 4.1.2. $v \geq p + 1$ için $v \times v$ boyutlu $W_v^p = [w_{i,j}^{u,p}]$ süper köşegen matrisi:

$$\begin{array}{c}
 (p+1)\text{-inci} \\
 \downarrow \\
 W_v^p = \begin{bmatrix}
 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

şeklindedir [36].

Teorem 4.1.2. $v \geq p+1$ ve $p \geq 3$ için,

$$per W_v^p = a_{v+p}^p$$

eşitliği elde edilir [36].

İspat: Eşitliğin $v \geq p+1$ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda, denklemin $v+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. W_v^p matrisinin ilk satırı Laplace açılımı ile genişletilir ise

$$\text{per}W_{v+1}^p = 2\text{per}W_v^p - \text{per}W_{v-p+2}^p + 2\text{per}W_{v-p+1}^p - \text{per}W_{v-p}^p$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{per}W_v^p &= a_{v+p}^p, \text{per}W_{v-p+2}^p = a_{v+2}^p, \\ \text{per}W_{v-p+1}^p &= a_{v+1}^p, \text{per}W_{v-p}^p = a_v^p \end{aligned}$$

olduğundan $\text{per}W_{v+1}^p = a_{v+p+1}^p$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.3 $v \geq p+1$ için $v \times v$ boyutlu $R_v^p = [r_{i,j}^{v,p}]$ matrisi:

$$r_{i,j}^{v,p} = \begin{cases} 2 & \begin{aligned} & \text{eğer } i = \theta \text{ ve } j = \theta \text{ için } 1 \leq \theta \leq u-1 \\ & \text{ve} \\ & i = \theta \text{ ve } j = \theta + p - 1 \text{ için } 1 \leq \theta \leq u-p+1, \\ & \text{eğer } i = \theta \text{ ve } j = \theta + p - 2 \text{ için } 1 \leq \theta \leq u-p+1 \\ & \text{ve} \end{aligned} \\ -1 & \begin{aligned} & i = \theta \text{ ve } j = \theta + p \text{ için } 1 \leq \theta \leq u-p, \\ & \text{eğer } i = \theta \text{ ve } j = \theta - 1 \text{ için } 2 \leq \theta \leq r-1 \end{aligned} \\ 1 & \text{ve} \\ 0 & \begin{aligned} & i = u \text{ ve } j = u, \\ & \text{diğer durumda} \end{aligned} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [36].

Tanım 4.1.4 $v \geq p+1$ olmak üzere $v \times v$ boyutlu $F_v^p = [f_{i,j}^{v,p}]$ matrisi:

$$F_v^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & R_{v-1}^p & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

(v-1)-inci
↓

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.3.

i. $v \geq p+1$ için,

$$\text{per}R_v^p = a_{v+p-1}^p$$

ii. $v > p+1$ için,

$$\text{per}F_v^p = \sum_{i=0}^{v+p-2} a_i^p$$

eşitliği elde edilir [36].

İspat: i. Teoremi ispatlamak için v üzerinde tümevarım yöntemini uygulayalım. Denklemin $v \geq p+1$ için sağlandığı kabul edelim. Bu durumda denklemin $v+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer R_v^p matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $\text{per}R_v^p$ genişletilir ise

$$\text{per}R_{v+1}^p = 2\text{per}R_v^p - \text{per}R_{v-p+2}^p + 2\text{per}R_{v-p+1}^p - \text{per}R_{v-p}^p$$

eşitliği elde edilir.

$$\text{per}R_v^p = a_{v+p-1}^p, \text{per}R_{v-p+2}^p = a_{v+1}^p, \text{per}R_{v-p+1}^p = a_v^p, \text{per}R_{v-p}^p = a_{v-1}^p$$

olduğundan $\text{per}R_{v+1}^p = a_{v+p}^p$ $\text{per}R_{v+1}^p = a_{v+1}^p$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. F_v^p matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $\text{per}F_v^p$ genişletilir ise

$$\text{per}F_v^p = \text{per}F_{v-1}^p + \text{per}R_{v-1}^p$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.1.3 (i)'den ve v üzerinde tümevarım yönteminden ispat kolaylıkla görülebilir.

Hadamard-tipi Pell- p sayıları için determinantal temsiller aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$u > p+1$ için $v \times v$ boyutlu bir Y matrisi

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

Sonuç 4.1.3. $u > p+1$ için,

$$\det(W_v^p \circ Y) = a_{v+p}^p,$$

$$\det(R_v^p \circ Y) = a_{v+p-1}^p$$

ve

$$\det(F_v^p \circ Y) = \sum_{i=0}^{v+p-2} a_i^p$$

eşitlikleri elde edilir [36].

Hadamard-tipi Pell- p dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_p(x) = \frac{x^p}{1 - 2x + x^{p-1} - 2x^p + x^{p+1}}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki Teorem ile üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipi Pell- p sayılarının üstel temsili verilmiştir.

Teorem 4.1.4. Hadamard-tipi Pell- p sayılarının üstel temsili aşağıdaki gibidir [36]:

$$g_p(x) = x^p \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (2 - x^{p-2} + 2x^{p-1} - x^p)^i\right).$$

İspat:

$$\ln \frac{g_p(x)}{x^p} = -\ln(1 - 2x + x^{p-1} - 2x^p + x^{p+1})$$

ve

$$-\ln(1-2x+x^{p-1}-2x^p+x^{p+1}) = -\left[-x(2-x^{p-2}+2x^{p-1}-x^p) - \frac{1}{2}x^2(2-x^{p-2}+2x^{p-1}-x^p)^2 - \dots - \frac{1}{n}x^n(2-x^{p-2}+2x^{p-1}-x^p)^n - \dots \right]$$

olduğundan

$$\ln \frac{g_k(x)}{x^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x)^i}{i} (2-x^{p-2}+2x^{p-1}-x^p)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$n \geq p-3$ ve $p \geq 3$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i^p$$

olsun. $(p+2) \times (p+2)$ boyutlu L_p matrisi aşağıdaki gibi gösterilsin [36]:

$$L_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & G_p & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Bu durumda $(L_p)^n$ matrisi:

$$(L_p)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_{n+2} & & & \\ S_{n+1} & (G_p)^n & & \\ \vdots & & & \\ S_{n-1} & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir [36].

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Pell dizisi ve genelleştirilmiş Pell p -dizisinin karakteristik polinomlarına Hadamard tipli çarpım uygulanarak yeni bir dizi tanımlandı ve bu diziye Hadamard-tipli Pell- p dizisi adı verildi. Tanımlanan bu dizi için Hadamard-tipli Pell- p matris adı verilen bir üreteç matris elde edildi ve bu üreteç matrisin n . kuvveti, Hadamard-tipli Pell- p sayıları yardımıyla üretildi.

Daha sonra Hadamard-tipli Pell- p dizisinin karakteristik polinomunun kökleri yardımıyla Binet formülü elde edildi. Ayrıca Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi kullanılarak üretilen bazı matrislerin permanental ve determinantal temsilleri verildi.

Bunun yanı sıra Hadamard-tipli Pell- p dizisi için toplamsal temsil ve üreteç fonksiyonu gibi bazı özellikleri elde edildi.

Son olarak, Hadamard-tipli Pell- p dizisinin üreteç matrisi ve üreteç fonksiyonu kullanılarak Hadamard-tipli Pell- p sayılarının üstel temsili ve sonlu toplamları türetildi.

6. KAYNAKÇA

- [1]. Adams, W. and Shanks, D., (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. *Mathematics of Computation*, 36(159), 255-300.
- [2]. Becker, P.G., (1994). k -Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. *Journal of Number Theory*, 49(3), 269-286.
- [3]. El Naschie, M.S., (2005). Deriving The Essential Features of Standard Model From The General Theory of Relativity, *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(4), 941- 946.
- [4]. Fraenkel, A.S., Klein, S.T., (1996). Robutst Universal Complete Codes for Transmission and Compression *Discrete Applied Mathematics*, 64(1), 31-55.
- [5]. Kirchoff, B.K. and Rutishauser, R., (1990). The Phyllotxy of *Costus* (Costaceae). *Botanical Gazette*, 151(1), 88-105.
- [6]. Mandelbaum, D., (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(2), 281-285.
- [7]. Spinadel, V.W., (2002). The Metallic Means Family and Forbidden Symmetries. *International journal of mathematics*, 2(3), 279-288.
- [8]. Stein, W., (1993). Modelling The Evolution of Stelar Architecture in Vascular Plants. *International Journal of Plant Sciences*, 154(2), 229-263.
- [9]. Deveci, Ö., Akuzum, Y. and Karaduman, E., (2015). The Pell-Padovan p -Sequences and Its Applications. *Utilitas Mathematica*, 98, 327-347.
- [10]. Deveci, Ö., Akdeniz, M. and Karaduman, E., (2015). The Generalized Pell p -Sequences in Groups. *Ars Combinatoria*, 120, 383-401.
- [11]. Deveci, Ö. and Aküzüm, Y., (2016). The Recurrence Sequences via The Fibonacci Groups. *AIP Conference Proceedings*, 1726, 020084-1-020084-4; doi: 10.1063/1.4945910.
- [12]. Deveci, Ö., Karaduman, E. and Campbell, C.M., (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science*, 41(4), 1033-1038.
- [13]. Deveci, Ö. and Shannon, A.G., (2017). On The Adjacency-Type Sequences. *International Journal of Advances in Mathematics*, 2017(2), 10-24. 62.

- [14]. Deveci, Ö. and Shannon, A.G., (2017). The Pell-Padovan-Circulant Sequences and their Applications. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(3), 100- 114.
- [15]. Falcon, S. and Plaza, A., (2009). k -Fibonacci Sequences Modulo m . Chaos, Solitons & Fractals, 41(1), 497-504.
- [16]. Bicknell, M., (1975). A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences. The Fibonacci Quarterly, 13(4), 345-350.
- [17]. Kilic, E., (2009). The generalized Pell (p,i) -Numbers and Their Binet Formulas, Combinatorial Representations, Sums. Chaos, Solitons & Fractals, 40 (4), 2047- 2063.
- [18]. Pinch, R.E.G., (1991). Recurrent Sequences Modulo Prime Powers. In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, The Institute of Mathematics and its Applications, Oxford university Press 1993, Proceedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester
- [19]. Shannon, A.G., Anderson, P.G. and Horadam, A.F., (2006). Properties of Cordonnieri Perrin and Van der Lann Numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 37(7), 825-831.
- [20]. Stakhov, A.P. and Rozin, B., (2006). Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p -Numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 27, 1162-1177.
- [21]. Tuglu, N., Kocer, E.G. and Stakhov, A.P., (2011). Bivariate Fibonacci like p -Polynomials. Applied Mathematics and Computation, 217(24), 10239-10246.
- [22]. Aküzüm, Y. and Deveci, Ö., (2022). The Hadamard-type n -step Fibonacci Sequences. Editorial Office. Faculty of Mathematics "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi (N.S.) Tomul LXVIII, 2022, f. 2, 153-165.
- [23]. Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Rashedi, M. E., (2022). The Hadamard-type-step Pell Sequences. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics , 28(2), 339-349.
- [24]. Ağargün, A.G. and Özdağ, H., (2008). Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri, Birsen Yayınevi, İstanbul. 24
- [25]. Taşcı, D., (2005). "Lineer Cebir". Gazi Kitapevi, Ankara. 25
- [26]. Chen, W.Y.C. and Louck, J.C., (1996). The combinatorial power of the companion matrix. Linear Algebra and Its Applications, 232, 261.278.

- [27]. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., (2007). Section 2.8.1. Vandermonde Matrices, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press,94. ISBN 978-0-521-88068-8.
- [28]. Brualdi R.A., Gibson PM., (1997). Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: applications of permanent function. Journal of combinatorial theory. Series A. 22, 194-230.
- [29]. Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I. and Ward, T., (2003). Recurrence Sequences. American Mathematical Society.
- [30]. Kalman, D., (1982). Generalized Fibonacci numbers by matrix methods. The Fibonacci Quarterly, 20(1), 73–76.
- [31]. Sylvester, J.R., (1979). Fibonacci properties by matrix methods. Mathematical Gazette, 63, 188-191.
- [32]. Hossenberg, R., (1985). The matrix Q, Mathematical Gems 3. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 106-107.
- [33]. Ercalano, J., (1979). Matrix Generators of Pell Sequences. Fibonacci Quart., 17 (1), 71-77.
- [34]. Kılıç, E. and Taşçı, D., (2010). On the generalized Fibonacci and Pell sequences by Hessenberg matrices. Ars Combinatoria, 94, 161-174.
- [35]. Wolfram Research., (2014). Mathematica Policy Research, Version 10.0: Champaign, Illinois.
- [36]. Aküzüm, Y., Deveci, Ö. and İncekara, A., The Hadamard-type Pell- p sequence. (sunulmuştur).