T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Berna KARTAL

s-KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI – 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

s-KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Doç. Dr. Abdullah ERGÜN

Bu çalışmada, Katugampola tarafından tanımlanan kesirli integral operatörler aracılığıyla 4. anlamda s-konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizliklerinin oluşturulması amaçlanmaktadır. Bu bağlamda, kesirli integral operatörleri kullanarak eşitsizliklere yeni üst sınırlar elde edilmiş ve bazı diğer eşitsizliklerin bu kesirli integral operatör ile elde edilmiş eşitsizliklerle ilişkisi gösterilmiştir. Parametrelerin özel halleri için literatürde mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırma yapılmıştır.

2023, 30 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler,Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Katugampola integral eşitsizlikler, konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, 4. anlamda s-konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

INEQUALITIES THAT CONTAIN KATUGAMPOLA FRACTIONAL INTEGRALS FOR S-CONVEX FUNCTIONS

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Doç. Dr. Abdullah ERGÜN

In this study, new integral inequalities for fourth-sense s-convex functions are aimed to be formed by using fractional integral operations that are formed by Katugampola. In this regard, new upper limits to inequalities are obtained by using fractional integral operations. Besides, the relationship between some other inequalities and these fractional integral operations are demonstrated. As for the special conditions of the parameters, a comparison has been made with some results that are available in the literature.

2023, 30 pages

Key Words: Inequalities, Hermite-Hadamard Inequality, Katugampola Integral Inequalities, convex function, s- convex function, s- convex function in the fourth sense.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, bu alanda çalışmamı destekleyen, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen annem Leyla KARTAL'a babam Erol KARTAL'a ve kardeşim
Eda KARTAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2023

Berna KARTAL

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_-$	: Negatif Reel Sayılar Kümesi
U	: $\mathbb{R}$'de Bir Aralık
U^o	: U'nın İçi
$L(\Delta)$	: Δ Bölgesi Üzerinde İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_1[\iota_1, \iota_2]$	: $[\iota_1, \iota_2]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_2(\Delta)$	: Δ Bölgesi Üzerinde İkinci Mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
ς''	: ς Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\frac{\partial^2 \varsigma}{d\lambda d\gamma}$	: ς Fonksiyonunun λ ve γ'ya Göre Kısmi Türevi
$J^{\alpha,\beta}$	: (α, β) mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri
$SX(h, U)$	: h -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, U)$	: h -Konkav Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^4	: Dördüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$\max$	: Maksimum
$\min$	: Mininmum
$Q(U)$	: Godunova-Levin Fonksiyonu
$P(U)$	: P -Fonksiyon
$L(U)$	: $\log$ -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$C(U)$	: Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(U)$	: $Quasi$ -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$J(U)$	: Jensen -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$S^*(b)$	: Starshaped Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, \Delta)$	: Δ Üzerinde h -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h, \Delta)$	: Δ Üzerinde h -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(\Delta)$	: Δ Üzerinde $quasi$ -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$J(\Delta)$	: Δ Üzerinde Jensen -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\left\Vert \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial\lambda\partial\gamma} \right\Vert_\infty$	: ς'nin λ, γ'ya Göre Kısmi Türevinin Sonsuz Normu

1. GİRİŞ

Neredeyse tüm hesaplamalar bir miktar tahmin içerir ve yaklaşım eşitsizliklere bağlıdır. Eşitsizlikler istatistik, fizik, mühendislik ve matematiğin tüm alanlarında çok önemli bir yere sahiptir. Günümüzde hala çalışmalara konu olan değerli bir başlıktır.

Eşitsizlikler teorisinin temeli 18.yüzyıla kadar dayanmakta olup bu teori üzerine günümüze kadar Hardy, Mitronovic, Pecaric, Fink, Niculescu, Dragomir ve daha birçok bilim insanı tarafından eserler literatüre kazandırılmıştır. Eşitsizlikler teoride en bilinen eşitsizlik türleri Simpson eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Ostrowski eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği ve eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan konveks fonksiyonlar ile ilişkili olan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Ch. Hermite'nin Mathesis dergisine gönderdiği bir mektupta elde edilmesine rağmen uzun yıllar bu durum anlaşılmamıştır. O kadar ki 1948'de E.F. Beckenbach bu eşitsizliğin 1893'de Hadamard tarafından ispatlandığını söylemiştir. Ancak bu durum ile ilgili gerçekler daha sonraki yıllarda anlaşılmış ve bu eşitsizlik ya Hadamard eşitsizliği ya da daha çok Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak literatüre girmiştir. Eşitsizlik teori ve konvekslik üzerine daha fazla bulgu için Mitrinovic and Vasic (1970), Mitrinovic et al. (1993), Akdemir (2012), Pachpatte (2005), Pečarić and Tong (1992), Niculescu and Persson (2006), Set (2010), Alomari (2011), Dragomir et al. (1999), Dragomir et al. (1995), Set et al. (2012) çalışmalarına bakılabilir. Aynı zamanda konveks bir fonksiyonun integral ortalaması ile ilgili en iyi bilinen eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Hadamard'ın eşitsizliği konveks fonksiyonlar için Cauchy Ortalama Değer Teoremi açısından hassastır. Çünkü Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyonların ortalaması için üst ve alt sınırlar elde etmemize imkan verir. Konvekslik, pür ve uygulamalı bilimlerin çeşitli alanlarında önemli bir rol oynar. Konvekslik teorisi son yıllarda hızla gelişim göstermiştir. Sonuç olarak, literatürde konveks fonksiyonların çok sayıda yeni genellemesi ortaya konmuştur. Tanımı bir eşitsizlik ile ifade edilen konvekslik kavramının geçmişi Archimedes'in M.Ö. 250 yılında π sabit değerini hesaplamasına kadar dayanır. Tarihi çok eski olmasına rağmen konvekslik ve konveks fonksiyonlar teorisi 19. yüzyılın sonlarında matematik literatüründe yer almıştır. Konveks fonksiyonlar, ilk günlerden günümüze matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynamıştır. Son yıllarda, literatürde çeşitli konveks fonksiyon sınıflarının birçok yeni tanımı ve özelliği ortaya çıkmıştır. Bunlardan bazıları m-konveks, geometrik konveks, log-konveks, s-konveks, h-konveks gibi fonksiyon sınıflarıdır.

Kesirli analiz kavramı ilk kez Leibniz'e L'Hospital tarafından 1695 yılında yazılan bir mektupta

$$\frac{d^n x}{dy^n}$$

notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ için ne olacağını sorması üzerine Leibniz, "Bu bir paradoks yaratıyor, ancak bir gün kesinlikle önemli sonuçlara yol açacak" dedi. Daha sonra bu konu; Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, Liouville, Grunwald ve Letnikov gibi öncü birçok bilim insanı ve araştırmacının ilgi odağı haline gelmiştir. Sonuç olarak günümüze kadar kesirli analiz yeni kesirli integral ve kesirli türev çalışmaları ile etkisini sürdürerek gelmiştir.

Bu gelişimin öncüsü sayılan bize kesirli türev ve integral kavramlarını ilk kez tanıtan matematikçi Liouville'in kesirli analize çok büyük katkıları olmuştur. Kesirli türetme muhakemesi üzerine ilk çalışma 1819'da Lacroix tarafından yayınlanmıştır. Euler daha sonra kesirli türevi yeniden tanımlamıştır. 17. yüzyıldan beri birçok matematikçi, kesirli türev ve integral kavramlarını genelleştirerek konu hakkında kapsamlı araştırmalar yapmıştır. Önceden, tamsayı mertebeli modeller kullanılmakta iken günümüzde neredeyse tüm reel dünya problemleri kesirli operatörler ile çözümlenmeye çalışılmaktadır. Bununla birlikte, artık kesirli türevler ve integraller problemini çözmek için çok çeşitli yaklaşım yöntemleri geliştirilmiştir. Kesirli türevler, fiziksel fenomenlerin doğasını anlamada önemli bir rol oynar ve bazı fiziksel fenomenleri tanımlarken tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerdeki boşlukları doldurur.

Araştırmalar, gerçek dünyada karşılaşılan nesneleri ve modelleri tanımlarken türev ve keyfi mertebeli integral kavramlarının klasik yöntemlere göre çok daha efektif sonuçlar verdiğini göstermiştir. Modellerin nümerik çözümlerinde daha etkin sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Kesirli türevler ve integraller alanında uzmanlaşmış araştırmacılar yeni operatörleri tanımlamak suretiyle en işlevsel bulgulara ulaşmayı hedef edinmişlerdir. Kesirli türevler ve kesirli integrallerle ilgili Riemann-Liouville kesirli integral, Hadamard kesirli integral, Katugampola kesirli integral, Caputo-Fabrizio kesirli integral, Atangana-Baleanu kesirli integral, uyumlu kesirli integral gibi birçok kesirli operatör literatüre kazandırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamın dayanağı olan kavramlar verilecektir.

Konveks fonksiyonlarla ile ilgili en iyi bilinen eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğidir:

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel sayıların I aralığında tanımlanmış konveks fonksiyon ve $a, b \in I \quad a < b$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak ifade edilir (Hardy et al. (1952)).

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

.

Tanım 2.1 ***(Konveks Fonksiyon):*** *$f : A \to \mathbb{R}$ gerçek değerli bir fonksiyon olmak üzere*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa f e konveks fonksiyon denir. Burada $x, y \in A$ ve $t \in [0,1]$ dir (Pečarić and Tong, 1992).

Tanım 2.2 ***(m-Konveks Fonksiyon):*** $\Upsilon : [0,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu $m \in [0,1]$ ve her*

$x_1, x_2 \in [0,b]$, $\tau \in [0,1]$, için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa Υ fonksiyonuna m-konveks fpnksiyon denir:

$$\Upsilon\left(\tau x_1 + m(1-\tau)x_2\right) \leq \tau\Upsilon\left(x_1\right) + m(1-\tau)\Upsilon(x_2)$$

(Maruşciac and Breckner, 1985).

Tanım 2.3 ***(Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon):***

$$\mathbb{R}_+ = [0, \infty) f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad ve \quad 0 < s \leq 1$$

olsun. $\alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha^s + \beta^s = 1$ *olmak üzere her* $u, v \in \mathbb{R}_+$ *için*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyonu denir (Breckner, 1978), (Hudzik and Maligranda, 1994).

Tanım 2.4 ***(İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon):***

$$\mathbb{R}_+ = [0, \infty) f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad ve \quad 0 < s \leq 1$$

olsun. $\alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1$ *olmak üzere her* $u, v \in \mathbb{R}_+$ *için*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 *ile gösterilir.*

Yukarıda verilen her iki s- konvekslik tanımı s=1 için bilinen konveksliğe dönüşür (Breckner, 1978).

Tanım 2.5 ***(Dördüncü Anlamda s-Konveks Fonksiyon):***

U, X vektör uzayının konveks bir alt kümesi olsun. $s \in (0, 1]$. *ve* $f : U \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa 4.anlamda s-konveks fonksiyondur denir.*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y)$$

her $x, y \in U$ *ve her* $\lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda^s + \mu^s = 1$ *ve*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} f(y), \quad \lambda \in [0, 1]$$

4.anlamda s-konveks fonksiyonlar K_s^4 *ile gösterilir (Hudzik and Maligranda, 1994)(Zeynep et al., 2021) .*

Örnek 2.1 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $k \in \mathbb{R}_+$ $f : U \to \mathbb{R}$ $f \in K_s^4 ve f(x) = -k$ *olsun.* $\lambda \in [0, 1]$ *ise aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda) y) &= -k \\ &= -(\lambda + (1 - \lambda) k) \\ &= -\lambda k - (1 - \lambda) k \\ &\leq -\lambda^{\frac{1}{s}} k - (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} k \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}} f(y) (Zeynep et\ al.,\ 2021). \end{aligned}$$

Konveks fonksiyonlar optimizasyon, kontrol teorisi, oyun teorisi, olasılık, istatistik, biyolojik sistem, ekonomi, tıp, sanat, doğrusal programlama ve konveks programlama gibi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle konvekslik, sahip olduğu özellikler ve sayısız uygulama ile günlük hayatımızda büyük bir etkiye sahiptir. $s-$konveks fonksiyonların birinci ve ikinci anlamda verildiği çalışmalar ve dördüncü anlamda $s-$konveks fonksiyonlar konvekslik kavramının literatürde en bilinen ve üzerine çalışma yapılan genelleştirmeleri olarak dikkat çekmektedir. $s-$konveks fonksiyon sınıflarına ilişkin yeni bulgulara Kemali (2022b), Akdemir et al. (2022b), Akdemir et al. (2022a), Alomari and Darus (2008a), Alomari and Darus (2008b), Dragomir and Fitzpatrick (1999), Hudzik and Maligranda (1994), Ozdemir et al. (2012a), Ozdemir et al. (2012b) çalışmalarından ulaşılabilir.

Şimdi çalışmanın ikinci önemli motive edici kavramı olan Katugampola kesirli integral operatörler hakkında bilgi verilecektir.

Kesirli integrallerin temelleri, Riemann tarafından geliştirilen integral hesabın başlangıcıyla yakından ilgilidir. Pratik mühendislik problemlerinde bir atılım, 1832'de Liouville'deki çalışmasından gelmiştir. Bu çalışma, yeni sonuçlar geliştirme ihtiyacı nedeniyle kesirli analizin geliştirilmesindeki birkaç konuyu ele almıştır. Tarihsel olarak, Riemann-Liouville kesirli integrali, kesirli hesabın kaynağıdır. Riemann-Liouville kesirli integrali esasen $n.$ kez Cauchy tekrarlı integral sürecinden elde edilir. $n \in N$ için

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-1)^{a-1} f(t) dt$$

yazılır ki burada n yi bir $a > 0$ sayısı ile değiştirerek tanımlanmış klasik Riemann-Liouville kesirli integralini alır (Gorenflo and Mainardi, 1997).

Tanım 2.6 *:* $f \in L[a,b]$ $J^{\alpha}_{\alpha^+} f ve J^{\alpha}_{\alpha^-} f$ $\alpha \geq 0$

$$(J^{\alpha}_{\alpha^+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad (x > a)$$

$$(J^{\alpha}_{b^-} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad (x < b)$$

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ Gamma Fonksiyonudur (Gorenflo and Mainardi, 1997).

Tanım 2.7

$$\int_a^x t_1^{\rho} dt_1 \int_a^{t_1} t_2^{\rho} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} t_n^{\rho} f(t_n) dt_n = \frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-1} \tau^{\rho} f(\tau) d(\tau)$$

Bu da Katugampola Kesirli İntegralini oluşturur (Katugampola, 2011).

Tanım 2.8

$$f \in L[a,b] \qquad \alpha \in C \qquad Re(\alpha) > 0$$

olmak üzere sol taraflı Katugampola kesirli integrali ${}^{\rho}I^{\alpha}_{a+}$ *ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$${}^{\rho}I^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-a}} f(t)dt, \qquad x > a$$

Benzer şekilde sağ taraflı Katugampola kesirli integrali ${}^{\rho}I^{\alpha}_{b-}$ *ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$${}^{\rho}I^{\alpha}_{b-} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^{\rho} - x^{\rho})^{1-a}} f(t)dt, \qquad x < b$$

(Katugampola, 2011).

Katugampola'nın operatörleri, A. Erdélyi ve H. Kober operatörlerinin genellemeleridir. Son on yılın matematik literatüründe tekrarlı integraller,teorik ve pratik uygulamalarla bağlantılı olarak kesirli integraller kullanılmaktadır.

Remark: Katugampola kesirli integralinde $\rho = 1$ seçilirse integralimiz Reimann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. 4.Anlamda s-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar

Teorem 3.1 *$f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise $her x, y \in U$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.*

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^{\frac{1}{s}}}$$

İspat $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ için ispat açıktır (Zeynep et al., 2021).

Sonuç 3.1 *$f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise f≤0 dır.*

Örnek 2.1 de $y = x$ kabul edersek $f(x) \leq 2^{1-\frac{1}{s}} f(x)$ olur. Yani $(1 - 2^{1-\frac{1}{s}})f(x) \leq 0$ böylece $f \leq 0$ bulunur (Zeynep et al., 2021).

Teorem 3.2 *$f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 4.anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Tanım 2.6 daki eşitsizlik her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0 \quad ve \quad \lambda + \mu \leq 1$ için sağlanır.*

İspat $x, y \in U$ $\lambda, \mu \in R_+ \quad ve \quad 0 \leq \lambda + \mu \leq olsun.$ $\gamma = \lambda + \mu, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\gamma} \quad ve \quad \beta = \frac{\mu}{\gamma}$ yazalım. O halde $\alpha + \beta = \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\mu}{\gamma} = 1$ olur.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= f(\alpha\gamma x + \beta\gamma y) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} f(\gamma x) + \beta^{\frac{1}{s}} f(\gamma y) \\
&= \alpha^{\frac{1}{s}} f(\gamma x + (1-\gamma).0) + \beta^{\frac{1}{s}} f(\gamma y + (1-\gamma).0) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} [\gamma^{\frac{1}{s}} f(x) + (1-\lambda)^{\frac{1}{s}}.f(0)] + \beta^{\frac{1}{s}} [\gamma^{\frac{1}{s}} f(y) + (1-\lambda)^{\frac{1}{s}}.f(0)] \\
&= \alpha^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} f(x) + \beta^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} f(y) + (\alpha^{\frac{1}{s}} + \beta^{\frac{1}{s}})(1-\gamma)^{\frac{1}{s}}.f(0) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} f(x) + \beta^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s}} f(y) \\
&= \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y)
\end{aligned}$$

Jensen eşitsizliği konveks fonksiyon teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Aşağıdaki teorem 4.anlamda s-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğini gösterir (Zeynep et al., 2021) .

Teorem 3.3 $f: U \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu 4.anlamda s-konveks fonksiyon olsun.*

$$x_1, x_2, ..., x_m \in U, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R_+ ve \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1^{\frac{1}{s}} f(x_1) + \lambda_2^{\frac{1}{s}} f(x_2) + ... + \lambda_m^{\frac{1}{s}} f(x_m)$$

İspat Tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. Eşitsizlik m=2 için doğrudur. m= k için doğruluğunu kabul edip m=k+1 için doğru olduğunu gösterelim.

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k + 1 x_k + 1$$

olacak şekilde bir reel sayı ve

$$x_1, ..., x_{k+1} \in U, \lambda_1, ..., \lambda_k + 1 \geq 0 ve \lambda_1 + ... + \lambda_k + 1 = 1$$

en az bir $\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}$ 1 den küçük olmalıdır. $\lambda_{k+1} \leq 1$ olsun.

$$\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1}$$

olur. Bu durumda $\lambda_* < \lambda_1 + ... + \lambda_k = \lambda_* \, (\frac{\lambda_1}{\lambda_*}) + ... + (\frac{\lambda_m}{\lambda_*}) = 1$ olduğunda hipotez gereği

$$f(\frac{\lambda_1}{\lambda_*} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda_*} x_k) \leq (\frac{\lambda_1}{\lambda_*})^{\frac{1}{s}}.f(x_1) + ...(\frac{\lambda_k}{\lambda_*})^{\frac{1}{s}}.f(x_k).$$

4. anlamda s-konveksliği kullanarak

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lambda_*(\frac{\lambda_1}{\lambda_*} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda_*} x_k) + \lambda_{k+1}.x_{k+1}\right) \\ &\leq \lambda_*^{\frac{1}{s}} f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda_*} x_k\right) + \lambda_{k+1}^{\frac{1}{s}} f(x_{k+1}) \\ &\leq \lambda_1^{\frac{1}{s}} f(x_1) + ... + \lambda_{k+1}^{\frac{1}{s}} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.Tümevarımla ispat tamamlanmış olur (Zeynep et al., 2021) .

Teorem 3.4 *$s_1 \leq s_2$ olsun. Eğer $f : U \to \mathbb{R}$ s_2 4.anlamda konkav fonksiyon ise f s_1 4.anlamda konkav fonksiyon olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.5 *$s_1 \leq s_2$ olsun. $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f \in K^4_{s2}$ ise $f \in K^4_{s1}$ olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.6 *Eğer $f : U \to \mathbb{R}_-$ konveks fonksiyon ise f dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.7 *Eğer $f : U \to \mathbb{R}$ konkav fonksiyon ise f dördüncü anlamda s-konkav fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.8 *Eğer $f : U \to \mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s-konkav fonksiyon ise f dördüncü anlamda s-konkav fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.9 *$f : U \to \mathbb{R}$ ve $x, y \in U$ olsun. Eğer $g : [0, 1] \to \mathbb{R} g(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)x)$ şeklinde tanımşı g fonksiyonu dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise f fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.10 *Eğer $f_i : U \to \mathbb{R}_-$ i=1,2,...m fonksiyonları dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar ise o halde*

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$$

toplamı da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon olur (Zeynep et al., 2021).

Teorem 3.11 *Eğer $f_i : U \to R_-$ i=1,2,...m fonksiyonları dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar ise $f : U \to \mathbb{R}_-$ $f = max f_i$ fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.12 *Eğer $f_i : U \to \mathbb{R}$ i=1,2,...m fonksiyonları dördüncü anlamda s-konkav fonksiyonlar ise $f : U \to \mathbb{R}$ $f = min f_i$ fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konkav fonksiyon olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.13 *$f : U \to \mathbb{R}_-$ fonksiyonu dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ve $g : f(U) \to \mathbb{R}$ artan ve lineer fonksiyon ise $gof : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.14 *$g : U \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu dördüncü anlamda s-konkav fonksiyon ve $f : g(U) \to \mathbb{R}$ azalan ve lineer fonksiyon ise $fog : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.15 *$f : U \to \mathbb{R}_- ve g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ artan fonksiyon olmak üzere eğer $f \in K_s^4$ ve $g \in K_s^3$ ise $gof \in K_{s^2}^4$ dir (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.16 *$f : U \to \mathbb{R}_+$ dördüncü anlamda s-konkav fonksşyon ve $g : f(U) \to \mathbb{R}$ azalan ve üçüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise $gof \in K_{s^2}^4$ dir (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.17 *$g : U \to V$ lineer dönüşüm ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için eğer $f \in K_s^4$ ise $fog \in K_s^4$ tür (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.18 *$g : U \to \mathbb{R}_- vef : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ artan fonksiyon olmak üzere eğer $f \in K_s^1$ ve $g \in K_s^4$ ise $fog : U \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.19 *$g : U \to \mathbb{R}_- vef : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ artan fonksiyon f konveks fonksiyon olmak üzere $g \in K_s^4$ ise $fog \in K_s^4$ olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.20 *$g : U \to \mathbb{R}_+ vef : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ azalan fonksiyon olmak üzere eğer $f \in K_s^1$ ve g dördüncü anlamda s-konkav fonksiyon ise $fog : U \to \mathbb{R}_+$ konveks fonksiyondur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.21 *$g : U \to \mathbb{R}_+$ dördüncü anlamda s-konkav fonksiyon ve $g : f(U) \to \mathbb{R}$ azalan s-konveks fonksiyon ise $fog \in K_s^4$ olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.22 *$s_2 \leq s_1$ $g : U \to \mathbb{R}_+$ dördüncü anlamda konkav fonksiyon ve $f : g(u) \to \mathbb{R}$ azalan s_2 konveks fonksiyon ise $fog \in K_{s^2}^4$ olur (Zeynep et al., 2021).*

Teorem 3.23 *$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}_-$ [a,b] de integrallenebilir ve dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$2^{\frac{1}{s}-1}\psi(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)dx \leq \frac{s}{s+1}[\psi(a)+\psi(b)]$$

(Kemali, 2022a).

Teorem 3.24 *ψ [a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyon olmak üzere*

$$G(T) := \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

şeklinde tanımlı G fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için;

i. Eğer ψ $[a,b]$ aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise G fonksiyonu da [a,b] aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur.

ii. Eğer ψ $[a,b]$ aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik her

$t \in [0,1]$ için gerçeklenir:

$$G(t) \geq 2^{\frac{1}{s}-1}\psi(\frac{a+b}{2})$$

(Kemali, 2022a).

Teorem 3.25 *Aşağıdaki gibi $[0,1]$ aralığında G_1 $\quad ve \quad$ G_2 fonksiyonları tanımlansın:*

$$G_1(t) := \frac{1}{b-a}t^{\frac{1}{s}}\int_a^b \psi(x)dx + (1-t)^{\frac{1}{s}}\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$G_2(t) := \frac{s}{s+1}\left(\psi\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + \psi\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Eğer ψ [a,b] aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise

$$G(t) \leq min(G_1(t), G_2(t))$$

$t \in [0,1]$ tanımlanır. Burada G(t) Teorem 3.24 te tanımlanmış fonksiyondur (Kemali, 2022a).

Teorem 3.26 *ψ [a,b] aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ve G_1, G_2 Teorem 3.25 te tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere $\tilde{G}(t) := max(G_1(t), G_2(t)) \quad t \in [0,1]$ aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\tilde{G}(t) \leq \frac{s}{s+1}\left(t^{\frac{1}{s}}(\psi(a) + \psi(b)) + (1-t)^{\frac{1}{s}}2\psi(\frac{a+b}{2})\right)$$

(Kemali, 2022a).

Teorem 3.27 $[0,1]$ *aralığında aşağıda tanımlı J(t) fonksiyonu dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur.*

$$J(t)=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left[\psi\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}x\right)+\psi\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}x\right)\right]dx$$

(Kemali, 2022a).

Teorem 3.28 ψ *[a,b] aralaığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.* $t\in[0,1]$ *olmak üzere;*

$$F(t):=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\psi(tx+(1-t)y)dxdy$$

Eğer ψ *[a,b] aralığında dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ise F(t) fonksiyonu da dördüncü anlamda s-konveks fonksiyondur (Kemali, 2022a).*

3.2. Katugampola İntegral Operatör ve İlgili Eşitsizlikler

Tanım 3.1 *g karmaşık değerli ve Lebesgue ölçü uzayına ait bir fonksiyon ve* $[u,v]\subseteq\mathbb{R}$ *olsun.*

$$H_\gamma^\theta(u,v)=g:[u.v]\rightarrow\varepsilon||g||_{H_\gamma^p}<\infty$$

şeklinde tanımlanan $H_\gamma^\theta(u,v)$ *fonksiyonu karmaşık değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayı olarak adlandırılır.* $g\in H_\gamma^\theta(u,v)$ *olmak üzere* α *Katugampola sağ ve sol kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$^{\rho}I_{u+}^{\alpha}g(x) = \frac{\int_u^x\left(\frac{x^\rho-w^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{g(w)}{w^{1-\rho}}dw}{\Gamma(\alpha)} \quad (\rho>0)$$

$$^{\rho}I_{v-}^{\alpha}g(x) = \frac{\int_x^v\left(\frac{w^\rho-x^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{g(w)}{w^{1-\rho}}dw}{\Gamma(\alpha)} \quad (\rho>0)$$

(Katugampola, 2011) (Wu, 2020).

Teorem 3.29 *$\rho > 0, \quad 0 \le u < v, \quad g : [u^\rho, v^\rho] \to R$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve Eğer $|g'|$ s konveks fonksiyon ve $g \in H_r^\theta(u^\rho, v^\rho)$ ise*

$$\left|\frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\frac{{}^\rho I_{u^+}^\alpha g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I_{v^-}^\alpha g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha}\right] - g(x^\rho)\right| \le$$

$$\frac{1}{2(1+s)(1+\alpha+s)}\alpha(x^\rho - u^\rho)\,|g'(u^\rho)| + \alpha(v^\rho - x^\rho)|g'(v^\rho)|$$

$$+(1+\alpha+s)(v^\rho - u^\rho)[1 - B(\alpha+1, s+1) - sB(\alpha+1, s+1)]|g'(x^\rho)|$$

$Burada \quad \alpha > 0, s \in (0,1], x \in [u,v] \quad B \quad Betafonksiyonudur$ *(Wu, 2020).*

Teorem 3.30 *$\rho > 0, \quad 0 \le u < v, \quad g : [u^\rho, v^\rho] \to R$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve Eğer $|g'|^p s - konveksfonksiyon \quad |g'| \in H_r^\theta(u^\rho, v^\rho)$ ise*

$$\left|\frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\frac{{}^\rho I_{u^+}^\alpha g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I_{v^-}^\alpha g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha}\right] - g(x^\rho)\right| \le$$

$$\tfrac{(x^\rho - u^\rho)}{2}\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[\tfrac{\alpha}{(s+1)(s+\alpha+1)}|g'(u^\rho)|^p + \left(\tfrac{1}{s+1} - B(\alpha+1, s+1)\right)|g'(x^\rho)|^p\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$+\frac{(v^\rho - x^\rho)}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[\frac{\alpha}{(s+1)(s+\alpha+1)}|g'(v^\rho)|^p + \left(\frac{1}{s+1} - B(\alpha+1, s+1)\right)|g'(x^\rho)|^p\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$Burada \quad \alpha > 0, s \in (0,1], x \in [u,v] \quad B \quad Betafonksiyonudur$ *(Wu, 2020).*

Lemma 3.1 *$\xi \in (0,1)$, $\nu > 0$ ve $f : [\kappa^\nu, \tau^\nu] \to \Re$ ve $0 < \kappa^\nu < \tau^\nu$ olmak üzere $f(\kappa^\nu, \tau^\nu)$ aralığında ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.O zaman Katugampola kesirli integral operatörü aşağıdaki eşitlik için geçerlidir:*

$$A = \frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu - \kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right) f\left(\tau^\nu\right) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right) f\left(\kappa^\nu\right)\right) - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)$$

$$= \frac{(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4}\left[\int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f'\left(\frac{t^\nu}{2}\kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\tau^\nu\right)dt + \int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f'\left(\frac{t^\nu}{2}\tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\kappa^\nu\right)dt\right]$$

(Cakaloğlu et al., 2023).

Sonuç 3.2 *$f : [\kappa^\nu, \tau^\nu] \to \Re$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve (κ^ν, τ^ν) $0 \leq \kappa < \tau$ olsun. Eğer $|f'|$ $m-$konveks fonksiyon ise, o zaman Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right)f\left(\tau^\nu\right)+\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right)f\left(\kappa^\nu\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)$$

$$\leq \frac{\nu\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)}{4}\frac{1}{2\nu\xi+4\nu}\left(\left|f'\left(\kappa^\nu\right)\right|+\frac{m\left(\nu\xi+3\nu\right)}{\nu\xi+\nu}\left(\left|f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right)\right|\right)+\left|f'\left(\tau^\nu\right)\right|\right)$$

(Cakaloğlu et al., 2023).

Sonuç 3.3 *$f : [\kappa^\nu, \tau^\nu] \to \Re$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve (κ^ν, τ^ν) $0 \leq \kappa < \tau$ olsun. Eğer $|f'|$ $m-$ konveks fonksiyon ise, o zaman Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right)f\left(\tau^\nu\right)+\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right)f\left(\kappa^\nu\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)$$

$$\leq \frac{\nu\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)}{4}\left(\frac{1}{\nu\xi p+\nu p-p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2\nu+2}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left[\left(\left|f'\left(\kappa^\nu\right)\right|^q+m\left(2\nu+1\right)\left|f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\tau^\nu\right)\right|^q+m\left(2\nu+1\right)\left|f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$p > 1$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$dir (Cakaloğlu et al., 2023).

Sonuç 3.4 *If $f : [\kappa^\nu, \tau^\nu] \to \Re$ diferansiyellenebilir fonksiyon (κ^ν, τ^ν) $\kappa^\nu < \tau^\nu$ ve $f' \in L_1[\kappa^\nu, \tau^\nu]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ $m-$konveks fonksiyon ise, o zaman Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$|A| \leq \frac{\nu\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)}{4}\left(\frac{1}{\nu\xi+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2\nu\xi+4\nu}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\left(\left|f'\left(\kappa^\nu\right)\right|^q+\frac{m\left(\nu\xi+3\nu\right)}{\left(\nu\xi+\nu\right)}\left|f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\tau^\nu\right)\right|^q+\frac{m\left(\nu\xi+3\nu\right)}{\left(\nu\xi+\nu\right)}\left|f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

burada $q \geq 1$ dir (Cakaloğlu et al., 2023).

Sonuç 3.5 *$f : [\kappa^{\nu}, \tau^{\nu}] \rightarrow \Re$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve $(\kappa^{\nu}, \tau^{\nu})$ $0 \leq \kappa < \tau$ olsun. Eğer $|f'|$ is $m-$konveks fonksiyon ise, o zaman Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^{\nu}-\kappa^{\nu}\right)^{\xi}}\left(\left({}^{\nu}I^{\xi}_{\left(\frac{\kappa^{\nu}+\tau^{\nu}}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_{+}}\right)f\left(\tau^{\nu}\right)+\left({}^{\nu}I^{\xi}_{\left(\frac{\kappa^{\nu}+\tau^{\nu}}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_{-}}\right)f\left(\kappa^{\nu}\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^{\nu}+\tau^{\nu}}{2}\right)$$

$$\leq \frac{\nu\left(\tau^{\nu}-\kappa^{\nu}\right)}{4}\left[\frac{2}{\nu\xi p^{2}+\nu p^{2}-p^{2}+p}+\frac{\left|f'\left(\kappa^{\nu}\right)\right|^{q}+m\left(2\nu+1\right)\left(\left|f'\left(\frac{\tau^{\nu}}{m}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{\kappa^{\nu}}{m}\right)\right|^{q}\right)+\left|f'\left(\tau^{\nu}\right)\right|^{q}}{2\nu q+2q}\right.$$

$p, q > 1$ *(Cakaloğlu et al., 2023).*

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın bu bölümünde Katugampola tarafından tanımlanan kesirli integral operatörler aracılığıyla 4. anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilecektir.

4.1. 4.Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar İçin Katugampola Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler

Teorem 4.1 *f 4.anlamda s-konveks fonksiyon olsun.* $t \in [0,1] \quad ve \quad s \in (0,1]$ *olsun.*

$$\frac{1}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\, {}^\rho I^\alpha_{a^+} f(b^\rho) \leq \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\alpha\rho + \frac{\rho}{s})} f(a^\rho) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\rho^{1-\alpha}}{\alpha\rho} - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\frac{\rho}{s} + \alpha\rho}\right) f(b^\rho)$$

olur. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ *Gamma Fonksiyonudur.*

İspat f 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise

$$f(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho) \leq t^{\frac{\rho}{s}} f(a^\rho) + (1-t^\rho)^{\frac{1}{s}} f(b^\rho)$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha\rho-1}$ ile çarpıp Odan 1e integralini alalım:

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha\rho-1} f(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho)dt \leq \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}} f(a^\rho) + t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}} f(b^\rho))dt\right]$$

olur.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafını gösterelim:

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha\rho-1} f(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho)dt$$

$$t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho = x^\rho$$

$$(\rho t^{\rho-1} a^\rho - \rho t^{\rho-1} b^\rho)dt = \rho x^{\rho-1} dx$$

$$(t^{\rho-1} a^\rho - t^{\rho-1} b^\rho)dt = x^{\rho-1} dx$$

Ayrıca

$$t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho = x^\rho$$

$$t^\rho a^\rho + b^\rho - t^\rho b^\rho = x^\rho$$

$$t^\rho = \frac{x^\rho - b^\rho}{a^\rho - b^\rho}$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a t^{\alpha\rho-1}f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{t^{\rho-1}(a^\rho-b^\rho)}dx\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a t^{\rho(\alpha-1)}f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{a^\rho-b^\rho}dx\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a \left(\frac{x^\rho-b^\rho}{a^\rho-b^\rho}\right)^{\alpha-1}f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{a^\rho-b^\rho}dx\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a \frac{(x^\rho-b^\rho)^{\alpha-1}}{(a^\rho-b^\rho)^\alpha}f(x^\rho)x^{\rho-1}dx\\
&=\frac{1}{(a^\rho-b^\rho)^\alpha}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{(x^\rho-b^\rho)^{1-\alpha}}f(x^\rho)x^{\rho-1}dx=\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\,{}^\rho I^\alpha_{a^+}f(b^\rho)
\end{aligned}
$$

böylelikle eşitsizliğin sol tarafını göstermiş oluruz. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafını gösterelim:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\,{}^\rho I^\alpha_{a^{\rho}+}f(b^\rho)&\le\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}}f(b^\rho))dt\right]\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)dt+\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}}f(b^\rho))dt\right]\\
&\le\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)dt+\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}(1^{\frac{1}{s}}-t^{\frac{\rho}{s}})f(b^\rho))dt\right]\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[f(a^\rho)\frac{t^{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}|_1^0+\int_0^1\left(t^{\alpha\rho-1}-t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)dt\right]\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\left(\frac{t^{\alpha\rho}}{\alpha\rho}-\frac{t^{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)|_0^1\right]\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\left(\frac{1}{\alpha\rho}-\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)\right]\\
&=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}f(b^\rho)\left(\frac{1}{\alpha\rho}-\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 4.1 *Teorem 4.1'de $\rho=1$ için*

$$
\frac{1}{(b-a)^\alpha}\,{}^1 I^\alpha_{\alpha+}f(b)\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)\big(\alpha+\frac{1}{s}\big)}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\frac{1}{s}+\alpha}\right)f(b)
$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2 *Teorem 4.1'de $\rho=1s=1$ için*

$$
\frac{1}{(b-a)^\alpha}\,{}^1 I^\alpha_{\alpha+}f(b)\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)\big(\alpha+1\big)}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\right)f(b)
$$

elde edilir.

Teorem 4.2 *f 4.anlamda s-konveks fonksiyon olsun.* $t \in [0,1] \quad ve \quad s \in (0,1]$ *olsun.*

$$\frac{1}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha} {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(a^\rho) \le \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\alpha\rho + \frac{\rho}{s})} f(a^\rho) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\rho^{1-\alpha}}{\alpha\rho} - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\frac{\rho}{s} + \alpha\rho} \right) f(b^\rho)$$

olur. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ *Gamma Fonksiyonudur.*

İspat f 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise

$$f(t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho) \le t^{\frac{\rho}{s}} f(b^\rho) + (1-t^\rho)^{\frac{1}{s}} f(a^\rho)$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha\rho-1}$ ile çarpıp Odan 1e integralini alalım:

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha\rho-1} f(t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho) dt \le \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}} f(b^\rho) + t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}} f(a^\rho)) dt \right]$$

olur.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafını gösterelim:

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha\rho-1} f(t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho) dt$$

$$t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho = x^\rho$$

$$(\rho t^{\rho-1} b^\rho - \rho t^{\rho-1} a^\rho) dt = \rho x^{\rho-1} dx$$

$$(t^{\rho-1} b^\rho - t^{\rho-1} a^\rho) dt = x^{\rho-1} dx$$

Ayrıca

$$t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho = x^\rho$$

$$t^\rho b^\rho + a^\rho - t^\rho a^\rho = x^\rho$$

$$t^\rho = \frac{x^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}$$

olur.

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b t^{\alpha\rho-1}f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{t^{\rho-1}(b^\rho-a^\rho)}dx$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b t^{\rho(\alpha-1)}f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{b^\rho-a^\rho}dx$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\frac{x^\rho-a^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^{\alpha-1} f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{b^\rho-a^\rho}dx$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha-1}}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}f(x^\rho)x^{\rho-1}dx$$

$$=\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a \frac{x^{\rho-1}}{(x^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}f(x^\rho)x^{\rho-1}dx=\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{}^\rho I^\alpha_{b-}f(a^\rho)$$

böylelikle eşitsizliğin sol tarafını göstermiş oluruz. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafını gösterelim:

$$\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{}^\rho I^\alpha_{b^\rho-}f(a^\rho)\leq\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}}f(b^\rho))dt\right]$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)dt+\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}(1-t^\rho)^{\frac{1}{s}}f(b^\rho))dt\right]$$

$$\leq\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1(t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)dt+\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}(1^{\frac{1}{s}}-t^{\frac{\rho}{s}})f(b^\rho))dt\right]$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[f(a^\rho)\frac{t^{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}|_1^0+\int_0^1\left(t^{\alpha\rho-1}-t^{\alpha\rho-1+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)dt\right]$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\left(\frac{t^{\alpha\rho}}{\alpha\rho}-\frac{t^{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)|_0^1\right]$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\left(\frac{1}{\frac{1}{s}+\alpha\rho}-\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)f(b^\rho)\right]$$

$$=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}f(a^\rho)+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}f(b^\rho)\left(\frac{1}{\alpha\rho}-\frac{1}{\alpha\rho+\frac{\rho}{s}}\right)$$

bulunur.

Sonuç 4.3 *Teorem 4.2'de $\rho=1$ için*

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}^1 I^\alpha_{b-}f(a)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)\big(\alpha+\frac{1}{s}\big)}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\bigg(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\frac{1}{s}+\alpha}\bigg)f(b)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4 *Teorem 4.2'de $\rho=1s=1$ için*

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}^1 I^\alpha_{b-}f(a)\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)\big(\alpha+1\big)}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\bigg(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\bigg)f(b)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3 $\rho > 0, \quad 0 \leq u < v \quad g : [u^\rho, v^\rho] \to \mathbb{R}$ *diferansiyellenebilir fonksiyon ve* $|g'|$ *4.anlamda s-konveks fonksiyon olsun.*

$$\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2} \left[\frac{{}^\rho I^\alpha_{u+} g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I^\alpha_{v-} g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha} \right] - g(x^\rho) \right|$$

$$\leq \frac{|g'(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho + \frac{\rho}{s}} - \frac{1}{\alpha\rho + \rho + \frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\frac{\rho}{s} + \rho} - \frac{1}{\alpha\rho + \rho} + \frac{1}{\alpha\rho + \rho + \frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho + \frac{\rho}{s}} - \frac{1}{\alpha\rho + \rho + \frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\frac{\rho}{s} + \rho} - \frac{1}{\alpha\rho + \rho} + \frac{1}{\alpha\rho + \rho + \frac{\rho}{s}} \right]$$

olur.

İspat Teorem 3.30 gereği

$$\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2} \left[\frac{{}^\rho I^\alpha_{u+} g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I^\alpha_{v-} g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha} \right] - g(x^\rho) \right|$$

$$\leq \frac{\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\alpha\rho}) w^{\rho-1} |g'(w^\rho u^\rho + (1 - w^\rho)x^\rho)| dw$$

$$+ \frac{\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\alpha\rho}) w^{\rho-1} |g'((1 - w^\rho)x^\rho) + w^\rho v^\rho| dw$$

sağlanır. $|g'|$ 4.anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan;

$$\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2} \left[\frac{{}^\rho I^\alpha_{u+} g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I^\alpha_{v-} g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha} \right] - g(x^\rho) \right| \leq \frac{\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\rho\alpha}) w^{\rho-1} w^{\frac{\rho}{s}} |g'(u^\rho)| dw$$

$$+ \frac{\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\rho\alpha}) w^{\rho-1} (1 - w^{\frac{\rho}{s}}) |g'(x^\rho)| dw$$

$$+ \frac{\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\rho\alpha}) w^{\rho-1} w^{\frac{\rho}{s}} |g'(v^\rho)| dw$$

$$+ \frac{\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 (1 - w^{\rho\alpha}) w^{\rho-1} (1 - w^{\frac{\rho}{s}}) |g'(x^\rho)| dw$$

$$= \frac{|g(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1+\frac{\rho}{s}} - w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1} - w^{\alpha\rho+\rho-1} \right) (1 - w^{\frac{\rho}{s}}) dw$$

$$+ \frac{|g(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1+\frac{\rho}{s}} - w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1} - w^{\alpha\rho+\rho-1} \right) (1 - w^{\frac{\rho}{s}}) dw$$

$$= \frac{|g(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1+\frac{\rho}{s}} - w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1} - w^{\frac{\rho}{s}+\rho-1} - w^{\alpha\rho+\rho-1} + w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$+ \frac{|g(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1+\frac{\rho}{s}} - w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \int_0^1 \left(w^{\rho-1} - w^{\frac{\rho}{s}+\rho-1} - w^{\alpha\rho+\rho-1} + w^{\alpha\rho+\rho-1+\frac{\rho}{s}} \right) dw$$

$$= \frac{|g(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{w^{\rho+\frac{\rho}{s}}}{\rho+\frac{\rho}{s}} - \frac{w^{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]_0^1$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{w^\rho}{\rho} - \frac{w^{\frac{\rho}{s}+\rho}}{\frac{\rho}{s}+\rho} - \frac{w^{\alpha\rho+\rho}}{\alpha\rho+\rho} + \frac{w^{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]_0^1$$

$$+ \frac{|g(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{w^{\rho+\frac{\rho}{s}}}{\rho+\frac{\rho}{s}} - \frac{w^{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]_0^1$$

$$+ \frac{|g(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{w^\rho}{\rho} - \frac{w^{\frac{\rho}{s}+\rho}}{\frac{\rho}{s}+\rho} - \frac{w^{\alpha\rho+\rho}}{\alpha\rho+\rho} + \frac{w^{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}}}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]_0^1$$

$$= \frac{|g'(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho+\frac{\rho}{s}} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\frac{\rho}{s}+\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho} + \frac{1}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho+\frac{\rho}{s}} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\frac{\rho}{s}+\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho} + \frac{1}{\alpha\rho+\rho+\frac{\rho}{s}} \right]$$

bulunur.

Sonuç 4.5 *Teorem 4.3'te s=1 için*

$$\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2} \left[\frac{{}^\rho I^\alpha_{u+} g(x^\rho)}{(x^\rho - u^\rho)^\alpha} + \frac{{}^\rho I^\alpha_{v-} g(x^\rho)}{(v^\rho - x^\rho)^\alpha} \right] - g(x^\rho) \right|$$

$$\leq \frac{|g'(u^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+2\rho} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(x^\rho - u^\rho)}{2} \left[\frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho} + \frac{1}{\alpha\rho+2\rho} \right]$$

$$+ \frac{|g'(v^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+2\rho} \right]$$

$$+ \frac{|g'(x^\rho)|\rho(v^\rho - x^\rho)}{2} \left[\frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\alpha\rho+\rho} + \frac{1}{\alpha\rho+2\rho} \right]$$

eşitsizliği elde edillir.

Sonuç 4.6 *Teorem 4.3'te $\alpha = 1$ s=1 için;*

$$\left|\frac{\rho\Gamma(2)}{2}\left[\frac{{}^{\rho}I^{1}_{u+}g(x^{\rho})}{(x^{\rho}-u^{\rho})}+\frac{{}^{\rho}I^{1}_{v-}g(x^{\rho})}{(v^{\rho}-x^{\rho})}\right]-g(x^{\rho})\right|$$

$$\le \frac{|g'(u^{\rho})|\rho(x^{\rho}-u^{\rho})}{2}\left[\frac{1}{6\rho}\right]$$
$$+\frac{|g'(x^{\rho})|\rho(x^{\rho}-u^{\rho})}{2}\left[\frac{1}{3\rho}\right]$$
$$+\frac{|g'(v^{\rho})|\rho(v^{\rho}-x^{\rho})}{2}\left[\frac{1}{6\rho}\right]$$
$$+\frac{|g'(x^{\rho})|\rho(v^{\rho}-x^{\rho})}{2}\left[\frac{1}{3\rho}\right]$$

$$\left|\frac{\rho\Gamma(2)}{2}\left[\frac{{}^{\rho}I^{1}_{u+}g(x^{\rho})}{(x^{\rho}-u^{\rho})}+\frac{{}^{\rho}I^{1}_{v-}g(x^{\rho})}{(v^{\rho}-x^{\rho})}\right]-g(x^{\rho})\right|$$

$$\le \frac{|g'(u^{\rho})|\rho(x^{\rho}-u^{\rho})}{12\rho}$$
$$+\frac{|g'(x^{\rho})|\rho(x^{\rho}-u^{\rho})}{6\rho}$$
$$+\frac{|g'(v^{\rho})|\rho(v^{\rho}-x^{\rho})}{12\rho}$$
$$+\frac{|g'(x^{\rho})|\rho(v^{\rho}-x^{\rho})}{6\rho}$$

eşitsizliği elde edillir.

Teorem 4.4 *$f:[\kappa^v,\tau^v]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0\leq\kappa\leq\tau$ olmak üzere (κ^v,τ^v) aralığında diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer |f'| 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*
$A=\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right)f\left(\tau^\nu\right)+\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right)f\left(\kappa^\nu\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)$
olmak üzere

$$A\leq\frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Bigg[\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})}+|f'(\tau^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{(v\xi+v+\frac{v}{s})2^{\frac{1}{s}}}\right]+$$
$$\frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})}+|f'(\kappa^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{(v\xi+v+\frac{v}{s})2^{\frac{1}{s}}}\right]\Bigg].$$

İspat f 4.anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan Lemma 3.1 gereği aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
A &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Bigg[|f'(\kappa^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(\frac{t^v}{2}\right)^{\frac{1}{s}}dt\\
&+ |f'(\tau^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(\frac{2-t^v}{2}\right)^{\frac{1}{s}}dt\\
&+ |f'(\tau^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(\frac{t^v}{2}\right)^{\frac{1}{s}}dt\\
&+ |f'(\kappa^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(\frac{t^v}{2}\right)^{\frac{1}{s}}dt\Bigg]\\
&\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Bigg[\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}\int_0^1 t^{v\xi+v-1+\frac{v}{s}}dt\\
&+ |f'(\tau^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(1-\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right)dt\\
&+ \frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}\int_0^1 t^{v\xi+v-1+\frac{v}{s}}dt\\
&+ |f'(\kappa^v)|\int_0^1 t^{v\xi+v-1}\left(1-\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right)dt\Bigg]\\
&= \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Bigg[\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}\left(\frac{t^{v\xi+v+\frac{v}{s}}}{v\xi+v+\frac{v}{s}}\Bigg|_0^1\right)\\
&+ \left|f'(\tau^v)\right|\left(\frac{t^{v\xi+v}}{v\xi+v}-\frac{t^{v\xi+v+\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})}\Bigg|_0^1\right)\\
&+ \frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}\left(\frac{t^{v\xi+v+\frac{v}{s}}}{v\xi+v+\frac{v}{s}}\Bigg|_0^1\right)\\
&+ \left|f'(\kappa^v)\right|\left(\frac{t^{v\xi+v}}{v\xi+v}-\frac{t^{v\xi+v+\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})}\Bigg|_0^1\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Bigg[\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})} \\
&+ |f'(\tau^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{(v\xi+v+\frac{v}{s})2^{\frac{1}{s}}}\right] \\
&+ \frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(v\xi+v+\frac{v}{s})} \\
&+ |f'(\kappa^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{(v\xi+v+\frac{v}{s})2^{\frac{1}{s}}}\right]\Bigg]
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 4.7 *Teorem 4.4'te s=1 için*
$A=\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right)f\left(\tau^\nu\right)+\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right)f\left(\kappa^\nu\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)$
$\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left[\frac{|f'(\kappa^v)|}{2v\xi+4v}+|f'(\tau^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{2v\xi++4v}\right]+\frac{|f'(\tau^v)|}{2v\xi+4v}+|f'(\kappa^v)|\left[\frac{1}{v\xi+v}-\frac{1}{2v\xi+4v}\right]\right]$
eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.5 *$f:[\kappa^v,\tau^v]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $0\leq\kappa\leq\tau$ olmak üzere (κ^v,τ^v) aralığında diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ 4.anlamda s-konveks fonksiyon ise Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;*
$A=\frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)\nu^{\xi-1}}{\left(\tau^\nu-\kappa^\nu\right)^\xi}\left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_+}\right)f\left(\tau^\nu\right)+\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}_-}\right)f\left(\kappa^\nu\right)\right)-f\left(\frac{\kappa^\nu+\tau^\nu}{2}\right)\leq\frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}$
$|f'(\tau^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)}+|f'(\kappa^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\right)^{\frac{1}{q}}$ *olur.*
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

İspat f 4.anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan Lemma 3.1 gereği aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(\kappa^v)|\int_0^1\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}dt+|f'(\tau^v)|\int_0^1(\frac{2-t^v}{2})^{\frac{1}{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(\tau^v)|\int_0^1\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}dt+|f'(\kappa^v)|\int_0^1(\frac{2-t^v}{2})^{\frac{1}{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(\kappa^v)|\int_0^1\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}dt+|f'(\tau^v)|\int_0^1(1-\frac{t^v}{2})^{\frac{1}{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(\tau^v)|\int_0^1\frac{t^{\frac{v}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}dt+|f'(\kappa^v)|\int_0^1(1-\frac{t^v}{2})^{\frac{1}{s}}dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}+\frac{t^{\frac{v}{s}+1}}{\frac{v}{s}+1}\Bigg|_0^1+|f'(\tau^v)|\big(t-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}+\frac{t^{\frac{v}{s}}+1}{\frac{v}{s}+1}\Bigg|_0^1)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\left(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}}+\frac{t^{\frac{v}{s}+1}}{\frac{v}{s}+1}\Bigg|_0^1+|f'(\kappa^v)|\big(t-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}+\frac{t^{\frac{v}{s}}+1}{\frac{v}{s}+1}\Bigg|_0^1)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)} \\
&+ |f'(\tau^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi\rho+v\rho-\rho+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)}+|f'(\kappa^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 4.8 *Teorem 4.5'te $\rho = 1$ için;*

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi+v}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\kappa^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)}+|f'(\tau^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi+v}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\tau^v)|}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)}+|f'(\kappa^v)|(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}(\frac{v}{s}+1)})\Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.9 *Teorem 4.5'te $\rho = 1$ ve s=1 için;*

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi+v}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\kappa^v)|}{2(v+1)}+|f'(\tau^v)|(1-\frac{1}{2(v+1)})\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{v(\tau^v-\kappa^v)}{4}\Big(\frac{1}{v\xi+v}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{|f'(\tau^v)|}{2(v+1)}+|f'(\kappa^v)|(1-\frac{1}{2(v+1)})\Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmanın dördüncü bölümü olan Araştırma Bulguları kısmında, 4. anlamda $s-$konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni integral eşitsizliklere yer verilmiştir. Katugampola İntegral operatörler kullanılarak 4. anlamda $s-$konveks fonksiyon sınıfı için yeni integral eşitsizlikler ve genellemeler verilmiş olup sonuçların bazı özel durumlarına değinilmiştir. Böylece, çalışmanın temel amacı olan 4. anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için yeni üst sınırlar bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında verilen lemmalar veya onlara benzer yeni lemmalar kurularak 4. anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca, Hermite-Hadamard tipli veya Ostrowski tipli eşitsizlikler için yeni genellemeler ve birçok yeni eşitsizlikler yazılabilir. Konuyla ilgilenen araştırmacılar, Araştırma Bulguları kısmında kullanılan lemmaları farklı konveks fonksiyonlara ve farklı kesirli integral operatörler kullanılan lemmalara uygulayabilirler. Böylece yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir.

Kaynakça

Akdemir, A. (2012). *Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler*. PhD thesis, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Akdemir, A., Nazik, M., and Ozdemir, M. (2022a). Simpson's type inequalities for s- convex functions in the fourth sense. *COIA 2022, Bakü, Azerbaycan, Abstract Book*, page 57.

Akdemir, A., Nazik, M., Set, E., and Ekinci, A. (2022b). New approaches for differentiable s-convex functions in the fourth sense via fractional integral operators. In *5th International Conference on Mathematical and Related Sciences Book of Proceedings*, page 78.

Alomari, M. (2011). *Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type for s-convex, Quasi-convex and r-convex mappings and applications*. PhD thesis, Citeseer.

Alomari, M. and Darus, M. (2008a). Co-ordinated s-convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 3(32):1557–1567.

Alomari, M. and Darus, M. (2008b). The Hadamard's inequality for s-convex function of 2-variables on the co-ordinates. *Int. J. Math. Anal*, 2(13):629–638.

Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37):13–20.

Cakaloğlu, M., Butt, S., Akdemir, A., and S, A. (2023). Some new estimations for $m-$convex functions via Katugampola fractional operator. *submitted*.

Dragomir, S., Agarwal, R., and Barnett, N. (1999). Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA research report collection*, 2(3).

Dragomir, S. and Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4):687–696.

Dragomir, S., Pecaric, J., and Persson, L.-E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow J. Math*, 21(3):335–341.

Gorenflo, R. and Mainardi, F. (1997). *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*. Springer.

Hardy, G., Littlewood, J., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48(1):100–111.

Katugampola, U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied mathematics and computation*, 218(3):860–865.

Kemali, S. (2022a). Some generator functions for s–convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(3):1201–1214.

Kemali, S. (2022b). Some generator functions for s–convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(3).

Maruşciac, I. and Breckner, W. W. (1985). Proceedings of the colloquium on approximation and optimization: Cluj-napoca, october 25-27, 1984. *(No Title)*.

Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecth.

Mitrinovic, D. S. and Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.

Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.

Ozdemir, M., Kavurmaci, H., Akdemir, A., and Avci, M. (2012a). Inequalities for convex and s-convex functions on δ=[a, b]×[c, d]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):1–19.

Ozdemir, M., Latif, M., and Akdemir, A. (2012b). On some Hadamard-type inequalities for product of two s-convex functions on the co-ordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):1–13.

Pachpatte, B. G. (2005). *Mathematical inequalities*. Elsevier.

Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic press.

Set, E. (2010). *Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri*. PhD thesis, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Sardari, M., Ozdemir, M., and Rooin, J. (2012). On generalizations of the hadamard inequality for (α, m)-convex functions. *Kyungpook Mathematical Journal*, 52(3):307–317.

Wu, Y. (2020). On inequalities for s-convex function based on katugampola fractional integral. *Journal of Physics: Conference Series*, 1575(1):012012.

Zeynep, E., Sezer, S., Tınaztepe, G., and Adilov, G. (2021). s-convex functions in the fourth sense and some of their properties. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(2):260–267.