



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI



LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN GÜRBÜZ ASİMPOTİK KARARLILIĞININ
EHLİCH VE ZELLER YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

RAWANA JOHA

MAYIS 2024

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN GÜRBÜZ ASİMPOTİK KARARLILIĞININ
EHLİCH VE ZELLER YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

RAWANA JOHA

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Kamil F. DİLAVER

Mayıs 2024

Rawana JOHA tarafından **Dr. Öğretim.Üyesi Kamil Fatih DİLAVER** danışmanlığında hazırlanan “**Lineer Olmayan Sistemlerin Gürbüz Asimptotik Kararlılığının Ehlich ve Zeller Yöntemiyle Belirlenmesi**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Elektrik Elektronik Mühendisliği** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Aytekin BAĞIŞ
Erciyes Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Recep YILDIZ
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Kamil Fatih DİLAVER
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 10/05/2024 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Prof. Dr. Mustafa KARATEPE
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Rawana JOHA

ÖZET

LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN GÜRBÜZ ASİMPOTİK KARARLILIĞININ EHLİCH VE ZELLER YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

JOHA, Rawana

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Kamil F. DİLAVER

Mayıs 2024, 121 sayfa

Bu yüksek lisans tezinde, kararlılık bölgelerinin belirlenmesinde, ikinci derece Lyapunov fonksiyonları ile birlikte Ehlich ve Zeller'in geliştirdiği yöntem kullanılmıştır. Bu yöntem aslında, kararlı denge noktaları etrafında asimptotik kararlılık bölgesi olarak kabul edilen bölgeleri karakterize eden gerek ve yeter koşulları sağlar. Bu teknik, bu yüksek lisans çalışmasında polinom yapısındaki lineer olmayan sistemlere uygulanmıştır. Çalışmada, ikinci derece Lyapunov fonksiyonlarından yararlanan ve Ehlich ve Zeller'in önerdiği yöntemle elde edilen gerek ve yeter koşulları kullanan sayısal bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımla $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki maksimum kararlılık bölgesi elde edilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla olabildiğince çok sayıda ikinci derece Lyapunov fonksiyonu kullanılmıştır. Maksimum kararlılık bölgesini bulmak için her bir Lyapunov fonksiyonundan elde edilen kararlılık bölgelerinin birleşimi alınmıştır. Önerilen yöntem, polinom yapısındaki lineer olmayan sistemler için bir çeşit optimizasyon problemi tanımlama ve onun nümerik çözümünü içerir. Bu yaklaşımın başlıca özelliği, seçilen ikinci derece bir Lyapunov fonksiyonu için elde edilebilecek maksimum kararlılık bölgesinin bulunabilmesidir.

Anahtar Sözcükler: lineer olmayan dinamik sistemler, asimptotik kararlılık bölgesi, Lyapunov fonksiyonları, Ehlich ve Zeller.

SUMMARY

DETERMINATION OF ROBUST ASYMPTOTIC STABILITY OF NONLINEAR SYSTEMS BY EHLICH AND ZELLER METHOD

JOHA, Rawana

Nigde Omer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electric Electronic Engineering

Supervisor : Dr. Öğr. Üyesi Kamil F. DİLAVER

May 2024, 121 pages

In this master's thesis, the method developed by Ehlich and Zeller, along with second-degree Lyapunov functions, was utilized to determine stability regions. This method actually satisfies necessary and sufficient conditions characterizing the regions considered as asymptotically stable regions around stable equilibrium points. This technique has been applied to nonlinear systems with polynomial structures in this master's study. In the study, a numerical approach utilizing second-degree Lyapunov functions and the necessary and sufficient conditions obtained with the method proposed by Ehlich and Zeller has been suggested. With this approach, an attempt has been made to obtain the maximum stability region around the equilibrium point $x^* = 0$. To achieve this, as many second-degree Lyapunov functions as possible have been utilized. To find the maximum stability region, the union of stability regions obtained from each Lyapunov function has been taken. The proposed method defines a kind of optimization problem for nonlinear systems with polynomial structures and involves its numerical solution. The main feature of this approach is the ability to find the maximum stability region achievable for the selected second-degree Lyapunov function.

Keywords: nonlinear dynamical systems, asymptotic stability region, Lyapunov functions, Ehlich and Zeller.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez çalışmam sürecinde bana rehberlik ederek, bilgi ve birikimlerinizi eksiksiz bir şekilde paylaşarak, her adımda yanımda olduğu için içtenlikle değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Kamil Fatih DİLAVER'e teşekkür ederim. Sizlerin desteği olmadan bu başarıya ulaşamazdım. Verdiğiniz öğütler, sunduğunuz eleştiriler ve sağladığınız destek benim için çok değerliydi.

Ayrıca, her daim yanımda olan, beni teşvik eden ve destekleyen sevgili eşim Mouaviya Eldemaşki'ye de teşekkür etmek isterim. O olmadan, bu zorlu süreci başarıyla tamamlayamazdım. Onun sabrı, anlayışı ve sevgisi, benim en büyük güç kaynağım oldu.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	İV
SUMMARY	V
ÖN SÖZ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	İX
SİMGE VE KISALTMALAR	XII
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM II	3
LINEER OLMAYAN SİSTEMLERDE KARARLILIK VE LYAPUNOV KARARLILIK TEOREMİ	3
2.1 Kararlılık Kavramı.....	3
2.2 Kararlılık Türleri	3
2.3 İç Kararlılık	4
2.4 Üstel Kararlılık.....	6
2.5 Lineer Olmayan Sistemlerde Kararlılık Analizi	8
2.6 Lineer Olmayan Sistemlerde Bazı Ortak Davranışlar.....	8
2.7 Lyapunov Kararlılık Teorisi.....	9
2.8 Lyapunov Teorisine Göre Kararlılık Yöntemleri.....	14
2.8.1 Lyapunov'un doğrudan yöntemi	15
2.9 Lineer Olmayan Sistemlerde Asimptotik Kararlılık	17
2.9.1 Kararlılık tanımı	17
2.10 Lyapunov Teoremine Göre Asimptotik Kararlılık.....	21
2.11 Dar Anlamda Kararlılık.....	23
2.12 Genel Anlamda Kararlılık	23
BÖLÜM III	26
EHLICH VE ZELLER İLE GÄRTEL TEOREMLERİNİN TANITIMI.....	26
3.1 Ehlich ve Zeller Teoremi	26
3.2 Gärtel'in Eşitsizlikleri.....	30
3.3 Örnekler.....	34
3.3.1 Örnek 3.1.....	34

3.3.2 Örnek 3.2.....	36
3.3.3 Örnek 3.3.....	38
BÖLÜM IV	41
POLİNOM YAPISINDAKİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE BELLİ BİR İKİNCİ DERECE LYAPUNOV FONKSİYONU İÇİN MAKSİMUM KARARLILIK BÖLGESİNİN BELİRLENMESİ.....	41
4.1 İkinci Dereceden Bir Lyapunov Fonksiyonu İçin Kararlılık Bölgesinin Belirlenmesi	41
4.1.1 Örnek 4.1.....	43
4.2 Polinomiyal Sistemler İçin Güvenli Kararlılık Bölgelerinin Hesaplanması	47
4.3 Güvence Altına Alınmış Maksimum Kararlılık Bölgesinin Sayısal Hesaplama Yöntemi.	50
4.3.1 Örnek 4.2.....	50
4.3.2 Örnek 4.3.....	64
4.3.3 Örnek 4.4.....	68
BÖLÜM V	74
POLİNOM YAPISINDAKİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE İKİNCİ DERECE LYAPUNOV FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BULUNABİLECEK MAKSİMUM GÜVENLİ KARARLILIK BÖLGESİ	74
a) Birinci Durum $\tan^2 \alpha^* > 0$	76
b) İkinci Durum $\tan^2 \alpha^* < 0$	76
5.2 Örnekler.....	77
5.2.1 Örnek 5.1.....	77
5.2.2 Örnek 5.2.....	86
5.2.3 Örnek 5.3.....	95
5.2.4 Örnek 5.4.....	104
BÖLÜM VI.....	114
SONUÇ.....	114
KAYNAKLAR	115
ÖZ GEÇMİŞ.....	121

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Kararlılık kavramının dik koni ile temsili	4
Şekil 2.2. Bir denge noktasının kararlılık durumları	6
Şekil 2.3. Lineer olmayan bir kütle-sönüm-yay sistemi	16
Şekil 2.4. Otonom bir sistemin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki olası kararlılık durumları.....	19
Şekil 2.5. İki değişkenli olası bir Lyapunov fonksiyonu ve eşdeğer çizgileri	22
Şekil 3.1. Seçilen 16 nokta için Örnek 3.1'deki $p(\theta)$ polinomunun alt ve üst sınırları	35
Şekil 3.2. N=9 Chebyshev noktası için Örnek 3.2.'deki $p(x)$ polinomunun alt ve üst sınırları	37
Şekil 3.3. Örnek 3.3 için Chebyshev noktaları ve J dikdörtgeni.....	39
Şekil 3.4. N=9 Chebyshev noktası için Örnek 3.3.'deki $p(x)$ polinomunun alt ve üst sınırları	40
Şekil 4.1. İki durumlu lineer olmayan bir sistem için güvenli bir kararlılık bölgesi Ω_C	43
Şekil 4.2. Örnek 4.1'deki (4.6) sistemi için güvence altına alınmış kararlılık bölgesi Ω_1	46
Şekil 4.3. $x^* \in \mathbb{R}^2$ denge noktasının orijine kaydırılması.....	48
Şekil 4.4. İki boyutlu düzlemde güvenli bir kararlılık bölgesi Ω_c	49
Şekil 4.5. İki boyutlu düzlemde mümkün olan en büyük güvenli kararlılık bölgesi Ω_c^*	50
Şekil 4.6. Fonksiyon $V(x) = C$ ile tanımlanan elips	51
Şekil 4.7. İki boyutlu düzlemde Ω_c ve Ω_C arasındaki ilişki.....	56
Şekil 4.8. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r^* için alt ve üst sınırlar	67
Şekil 4.9. 30 adet nokta için en büyük güvenli kararlılık bölgesi.....	68
Şekil 4.10. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r^* için üst ve alt sınırlar	72
Şekil 4.11. 40 adet nokta için en büyük güvenli kararlılık bölgesi $\Omega_{C_i^*}$	73
Şekil 5.1. yatay eksenle arasındaki açı α^* olan bir elips	75
Şekil 5.2. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için alt ve üst sınırlar	80
Şekil 5.3. 249 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi.....	81

Şekil 5.4. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar	84
Şekil 5.5. 277 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi.....	85
Şekil 5.6. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi	85
Şekil 5.7. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi	86
Şekil 5.8. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için alt ve üst sınırlar	89
Şekil 5.9. 223 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi.....	90
Şekil 5.10. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar	93
Şekil 5.11. 195 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi	94
Şekil 5.12. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi.....	94
Şekil 5.13. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi	95
Şekil 5.14. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için üst ve alt sınırlar	98
Şekil 5.15. 88 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi	99
Şekil 5.16. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar	102
Şekil 5.17. 92 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi	103
Şekil 5.18. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi.....	103
Şekil 5.19. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi	104
Şekil 5.20. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için üst ve alt sınırlar	107
Şekil 5.21. 200 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi	108
Şekil 5.22. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar	111
Şekil 5.23. 172 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi	112

Şekil 5.24. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyon ile elde edilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi 112

Şekil 5.25. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi 113



SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
ε	Sıfıra yakın pozitif bir değer
$V(x)$	İkinci derece Lyapunov fonksiyonu
$\dot{V}(x)$	$V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi
$x(t)$	n-boyutlu durum vektörü
$\dot{x}(t)$	$x(t)$ durum vektörünün türevi
x^0	$x(t)$ durum vektörünün $t=0$ anındaki başlangıç koşulu
A	Sistem dinamiği matrisi
Q	Simetrik kesin pozitif tanımlı matris
k	Herhangi bir pozitif sabit
δ	Sıfıra yakın pozitif bir değer
λ	Lineer sistemlerde özdeğer
J	Jordan kanonik formu
P	Simetrik matris
x^*	Denge noktası
(∇V)	$V(x)$ fonksiyonunun gradyanı
$p(\theta)$	m. dereceden trigonometrik polinom
$\theta \in [0, 2\pi]$	Açısal değişken
a_{ki}, a_k ve	Polinom katsayıları
$b_k \in \mathbb{R}$	
$J_\theta, [0, 2\pi]$	Açısal kapalı aralık
$\ p_1(\theta)\ ^{J_\theta}$	J_θ bölgesindeki maksimum norm,
$C(\frac{m}{N_\theta})$	Ehlich ve Zeller teorisinden elde edilen sabit
(P_1^m)	Cebirsel polinomlar
Ω_E	Var olan kararlılığı bölgesi
Ω_c	$x^* = 0$ denge noktası için bir güvenli kararlılık bölgesi
C	Kararlılık bölgesi eşdeğer yüzeyi
C^*	Kararlılık bölgesi eşdeğer yüzeyinin maksimum değeri

BÖLÜM I

GİRİŞ

Son yıllarda, lineer olmayan dinamik sistemler için asimptotik kararlılık bölgesini belirleme konusu birçok makalede incelenmiştir. İncelemelerin çoğu, genellikle bir denge noktası etrafında yeterli bir kararlılık bölgesine tamamen izin veren ikinci dereceden aday Lyapunov fonksiyonlarını kullanan yöntemlere dayanır (Jerbi, 2017; Jerbi vd., 2020; Zakhama vd., 2020; Zakhama vd., 2018; Hamidi ve Jarbi, 2009; Barkana, 2020; Ibrahim vd., 2022; Hamidi vd, 2011). Mevcut yöntemin ana amacı, güvence altına alınmış kararlılık bölgesinin eşdeğer yüzeyini, bu bölge denge noktası etrafındaki kararlılık bölgesi içinde kalacak şekilde, maksimuma çıkarmaktır. Bu çalışmada maksimum sayıda Lyapunov fonksiyonu kullanımıyla en geniş güvenli kararlı bölge belirlenmiştir. Geliştirilen bu sayısal yöntem polinom yapısı dışındaki lineer olmayan sistem modellerine de uygulanabilir. Bu tez çalışmasında, kararlılık bölgelerinin belirlenmesinde, ikinci derece Lyapunov fonksiyonları ile birlikte Ehlich ve Zeller'in geliştirdiği yöntem kullanılmıştır (Tibken ve Dilaver, 2002). Bu yöntem aslında, kararlı denge noktaları etrafında asimptotik kararlılık bölgesi olarak kabul edilen bölgeleri karakterize eden gerek ve yeter koşulları sağlar. Bu teknik bu yüksek lisans çalışmasında polinom yapısındaki lineer olmayan sistemlere uygulanmıştır. Çalışmada, ikinci derece Lyapunov fonksiyonlarından yararlanan ve Ehlich ve Zeller'in önerdiği yöntemle elde edilen gerek ve yeter koşulları kullanan sayısal bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımla $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki maksimum kararlılık bölgesi elde edilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla olabildiğince çok sayıda ikinci derece Lyapunov fonksiyonu kullanılmıştır. Maksimum kararlılık bölgesini bulmak için her bir Lyapunov fonksiyonundan elde edilen kararlılık bölgelerinin birleşimi alınmıştır.

Önerilen yöntem, polinom yapısındaki lineer olmayan sistemler için bir çeşit en iyileme problemi tanımlama ve onun nümerik çözümünü içerir. Bu yaklaşımın başlıca özelliği, seçilen ikinci derece bir Lyapunov fonksiyonu için elde edilebilecek maksimum kararlılık bölgesinin bulunabilmesidir. Literatürden seçilen sistem örnekleri ile önerilen yöntemin doğruluğu test edilmiştir (Genesisio ve Tartaglia, 1985).

Lineer olmayan sistemlerde asimptotik kararlı denge noktaları için kararlılık bölgelerinden bahsedilebilir. Kararlılık bölgesi içindeki her bir yörünge zamanla denge noktasına doğru hareket edecek ve orada sonlanacaktır (Khalil, 1996). Asimptotik kararlı lineer sistemlerde $x^* = 0$ tek denge noktasıdır ve kararlılık bölgesi bütün durum düzlemidir. Zorluk, lineer olmayan sistemlerin kararlılık bölgelerinin belirlenmesindedir. Kararlılık bölgesini belirlemek için literatürde yapılan çalışmalar mevcuttur (Chesi vd., 2005; Tibken ve Dilaver, 2002; Hachicho, 2006). Bu çalışmalarda elipsoidal kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. (Trofino, 2000)'da daha karmaşık Lyapunov fonksiyonlar önerilmiştir. (Amato vd., 2006)'daki çalışmada ikinci dereceden lineer olmayan sistemlerin özel durumu için kararlılık bölgesi belirleme yöntemi önerilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde genel olarak kararlılık türleri tanımlanmış ve lineer olmayan sistemlerin kararlılığı incelenmiş, ayrıca lineer olmayan sistemlerin kararlılığının belirlenmesinde Lyapunov'un teorisi ele alınmıştır.

Geliştirilen algoritmalar Ehlich ve Zeller (Ehlich ve Zeller, 1964) teoremine dayanmaktadır. Bu teorem, kapalı bir aralıkta tek değişenli bir polinomun normu için bir eşitsizlik verir. Gärtel, Ehlich ve Zeller tarafından ispatlanan eşitsizliğin çok değişkenli polinomlar için de geçerli olduğunu göstermiştir (Gärtel,1987) ve kapalı bir bölgede bir polinomun kesin pozitifliğini belirlemek için kullanılacak eşitsizlikleri ispatlamıştır. Bu nedenle Ehlich ve Zeller teoremi ve Gärtel tarafından ispatlanan eşitsizlikler Bölüm 3'de ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Dördüncü bölümde, 2. dereceden bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak sistemin denge noktası etrafındaki güvence altına alınmış maksimum kararlılık bölgesini belirleyen nümerik en iyileme yöntemi sunulmuştur.

Beşinci bölümde, olası bütün 2. dereceden Lyapunov fonksiyonları için bulunan güvence altına alınmış kararlılık bölgelerinin birleşimleriyle elde kararlılık bölgesi literatürden seçilen çeşitli sistem örnekleri ile belirlenmiştir. Tarama işleme için gerekli bir algoritma geliştirilmiştir, her bir Lyapunov fonksiyonu için, en geniş güvenli kararlılık bölgesi elde edilmiştir ve bu işlem bütün Lyapunov fonksiyonları için tekrarlanmıştır.

BÖLÜM II

LINEER OLMAYAN SİSTEMLERDE KARARLILIK VE LYAPUNOV KARARLILIK TEOREMİ

2.1 Kararlılık Kavramı

Sistem kararlılığı, genellikle, bir sisteminin, kabul edilebilir dengeli bir çalışma şartında bulunması ve bir bozucu etki sonrası tekrar normal denge durumuna dönebilmesi olarak tanımlanır. Örneğin güç sistemlerinde gerilim kararlılığı, dünyanın çeşitli yerlerinde meydana gelen enerji sistem çökmeleri nedeniyle, güç sistem analizi ve kontrolünde çok önemli bir konu olmaya başlamıştır. Enerji iletim sistemlerinin planlanması, kurulması, işletilmesi ve kontrolünde kararlılık çalışmaları yapılarak güç sisteminin çalıştırılması sırasında kararlılık sınır değerlerinin ihlalinin önüne geçilebilir.

2.2 Kararlılık Türleri

Lineer ve lineer olmayan sistemlerin zamanla değişip değişmeme durumlarına göre çok farklı şekillerde kararlılık tanımları verilmektedir. Genelde iki tip kararlılıktan bahsedilir. Bunlardan biri asimptotik anlamda kararlılık diğeri ise sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlılığıdır. Sistemde hiçbir giriş uygulanmadığı halde başlangıç koşulları altında sistemin durumu ve çıkışı $t \rightarrow \infty$ için sifıra gidiyorsa sistem asimptotik anlamda kararlıdır. Sistemin girişine uygulanan sınırlı girişler için çıkışı da $t \rightarrow \infty$ için sınırlı kalıyorsa sistem sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlıdır.

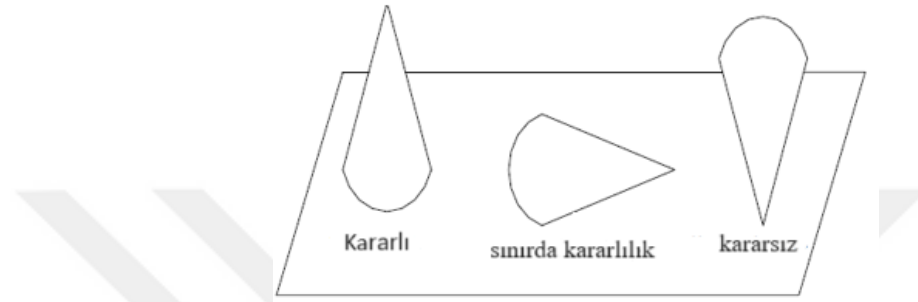
Bir sistemin sınırlı her girişe cevabı sınırlı ise o sistem kararlıdır. Kararlılık farklı şekillerde de tanımlanabilir.

- i) Kararlı bir sistem bir bozucu giriş karşısında geçici durum davranışını gösterdikten sonra tekrar denge konumuna geri dönen sistem kararlıdır.
- ii) Bir sistemin impuls cevabı zaman sonsuza giderken sifıra yaklaşırsa, o sistem kararlıdır.

Sisteme giriş, referans değerinden veya bozucu değerden olabilir. Kararlılık kavramı bir dik koni yardımıyla açıklanabilir. Tabanı üzerinde oturan koninin tepesine hafifçe dokunulursa koni hemen yine başlangıçtaki denge konumuna gelir. Bu durum kararlı

davranışa örnektir. Yan yüzü üzerinde yatık duran koni hafifçe dokunulunca yan yüzü üzerinde yuvarlanır ve yine yan yüzü üzerinde kalır. Bu durum sınırdaki kararlılığı göstermektedir. Tepesi üzerinde, tabanı yukarı gelecek şekilde tutulan koni ise bırakılınca yan kenarı üzerine düşer bu hale ise kararsız hal denir (Terzioğlu, Mart 2017).

Şekil 2.1. dikey koninin durumları incelenerek bahsedilen kararlılık durumlarını temsil etmektedir.



Şekil 2.1. Kararlılık kavramının dik koni ile temsili (Terzioğlu, Mart 2017).

Dinamik bir sistemde sistemin bir girişe cevabı sürekli artıyorsa veya büyüyen genlikli bir titreşim şeklinde ise bu sistemde kararsızlık mevcuttur. Böyle bir kararsız çalışmada, sistemde doyma olmazsa veya mekanik olarak durdurulmazsa sistem kendine zarar verebilir; çünkü fiziksel bir sistemin cevabı sonsuza kadar artamaz. Bunu tersinde ise o sistemde kontrolden bahsedilemez. Bir sistemin cevabı düzgün veya küçülen genlikli titreşim şeklinde azalıyorsa kararlılık var demektir.

2.3 İç Kararlılık

Bu bölümde homojen durum denklemleri için denge noktalarının kararlılığına odaklanacağız. Lineer olmayan n durumlu otonom bir sistemin durum denklemleri genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{d}{dt}x = f[x(t)], \quad x(0) = x^0 \quad (2.1)$$

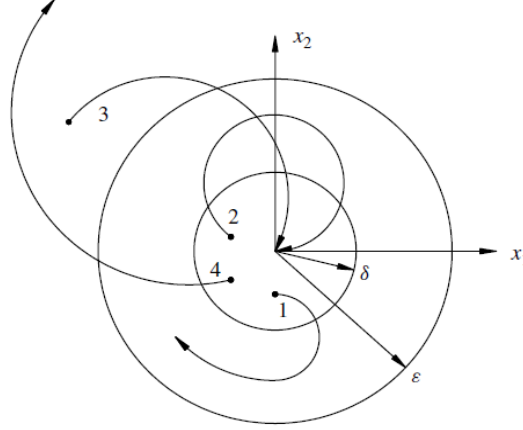
(2.1) eşitliğinde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ise sistemin başlangıç koşulları vektörüdür. Denge noktalarında durumlar zamanla değişmezler. $x^* \in \mathbb{R}^n$ denge noktaları $f(x^*) = 0$ denklem takımının çözümü ile belirlenir.

Bir denge noktasının kararlılığı, denge noktasının yakınında başlayan yörüngelerin niteliksel davranışını ifade eder. Lineer olmayan bir durum denklemi, her biri farklı kararlılık özelliklerine sahip birden fazla denge noktasına sahip olabilir. Bir sistemin kararlılığından bahsederken aslında denge noktalarının kararlılığına işaret edilmektedir (Williams ve Lawrence, 2007).

Tanım 2.1 Denklem (2.1)'in denge noktası $x^* = 0$ vektörü olsun.

- **Kararlı Denge Noktası:** ε ve δ sifira yakın pozitif değerler olmak üzere durumların başlangıç koşulları vektörünün normu $\|x(0)\| \leq \delta$ kaldığı sürece $t \geq 0$ için durum vektörünün normu $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ şartını sağlıyorsa denge noktası kararlıdır denir.
- **Kararsız Denge Noktası:** Denge noktası kararlılık şartını sağlamıyorsa kararsız denge noktası adını alır.
- **Asimptotik Kararlı Denge Noktası:** Sistem kararlılık şartını sağlıyorsa ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ oluyorsa denge noktası asimptotik kararlıdır.
- **Global Asimptotik Kararlı Denge Noktası:** Durumların başlangıç koşulları ne olursa olsun denge noktası asimptotik kararlılık şartına sağlıyorsa, denge noktası global asimptotik kararlı olur.
- **Üstel Asimptotik Kararlı Denge Noktası:** δ sifira yakın pozitif değer, λ ve k pozitif sabitler olmak üzere durumların başlangıç koşulları vektörünün normu $\|x(0)\| \leq \delta$ olduğunda $t \geq 0$ için $\|x(t)\| \leq ke^{-\lambda t} \|x(0)\|$ şartı sağlanıyorsa denge noktasına üstel asimptotik kararlı denge noktası adı verilir.

- **Global Üstel Asimptotik Kararlı Denge Noktası:** λ ve k pozitif sabitler olmak üzere bütün olası başlangıç koşulları için $\|x(t)\| \leq ke^{-\lambda t}\|x(0)\|$ şartı sağlanıyorsa denge noktasına global üstel asimptotik kararlı denge noktası adı verilir. (Williams ve Lawrence, 2007).



Şekil 2.2. Bir denge noktasının kararlılık durumları (Williams ve Lawrence, 2007).

Şekil 2.2'de 1 nolu yörünge kararlı denge noktasına, 4 nolu yörünge kararsız denge noktasına, 2 ve 3 nolu yörüngeler asimptotik kararlı denge noktasına işaret etmektedir.

2.4 Üstel Kararlılık

Sürekli lineer zamanla değişmeyen sistemlerde (LTI), sistem kutuplarının reel kısımlarının negatif olması sistemin üstel olarak kararlı olduğunu anlamına gelir. Üstel kararlılık, bir asimptotik kararlılık biçimidir. Lineer olmayan sistemlerin durum yörüngeleri üstel bir fonksiyon ile sınırlıysa, bu sistemler de üstel olarak kararlıdır. Asimptotik kararlılık ve üstel kararlılık, lineer zamanla değişmeyen sistemler için eşdeğerdir. (Anonim1, Mart 2023)

Durum yörüngesinin normu üzerinde açık bir üstel sınır türetmek için Lyapunov analizini kullanabilir. Lineer sistem asimptotik kararlı, yani A matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları negatif olsun. $Q = I$ birim matris seçebilir. Bu durumda (Williams ve Lawrence, 2007).

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.2)$$

Lyapunov denklemi simetrik pozitif tanımlı bir P matris çözümüne sahiptir. $V(x) = x^T P x$

olarak seçilen Lyapunov fonksiyonunun aşağıda zamana göre türevini alınmıştır.

$$\frac{d}{dt} V(x) = x^T (A^T P + P A) x = -x^T x \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} V(x) = -x(t)^T x(t) \quad (2.4)$$

$$\leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} x(t)^T P x(t) \quad (2.5)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} V[x(t)] \quad (2.6)$$

Rayleigh-Ritz (Anonim2, Mart 2013) eşitsizlik teoremini kullanarak aşağıdaki $w(t)$ fonksiyonunu tanımlanabilir.

$$w(t) = \frac{d}{dt} V[x(t)] + \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} V[x(t)] \quad (2.7)$$

Bu fonksiyonda tüm $t \geq 0$ için $w(t) \leq 0$ olacaktır. Buradan birinci mertebeden adi diferansiyel denklem çıkar.

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] = -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} V[x(t)] + w(t) \quad (2.8)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$V[x(t)] = e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} t} V(x_0) + \int_0^t e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-\tau)} w(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

olacaktır. $t \geq 0$ için $w(\tau) \leq 0$, dolayısı ile $w(t)$ 'nin bulunduğu integral negatif çıkacağından aşağıdaki eşitsizlik geçerli olacaktır.

$$V[x(t)] \leq e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}t} V(x_0), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

Rayleigh-Ritz eşitsizlik teoremini uyguladığımızda (2.13)'deki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\lambda_{\min}(p) x^T(t) x(t) \leq V[x(t)] \leq e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}t} V(x_0) \quad (2.11)$$

$$\leq \lambda_{\max}(p) e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}t} x_0^T x_0 \quad (2.12)$$

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}t}} \|x_0\| \quad \forall t \geq 0 \quad (2.13)$$

(2.13)'deki eşitsizlikte de görüleceği üzere durum yörüngelerinin normu üstel olarak azalacaktır (Williams ve Lawrence, 2007).

2.5 Lineer Olmayan Sistemlerde Kararlılık Analizi

Lineer olmayan sistem modellerinin kararlılık analizi, lineer sistem modellerinin kararlılık analizi kadar kolay değildir. Lineer sistemlerin davranışı, zaman bölgesinde veya frekans bölgesinde analiz edilebilir. Bununla birlikte, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin doğrudan çözümü genellikle imkansız olduğundan ve frekans alanı dönüşümleri uygulanamadığından, lineer olmayan sistemlerin analizi zorlaşır.

Lineer olmayan sistemlerinin kararlılık analizi zor olsa da buna uygun teorik araçlar geliştirilmiştir. Bunlardan biri Lyapunov Teorisi'nden yararlanmaktadır (Slotine, 1991).

2.6 Lineer Olmayan Sistemlerde Bazı Ortak Davranışlar

Fiziksel sistemler doğal olarak lineer değildir. Bu nedenle, tüm sistemler bir dereceye kadar lineer değildir. Lineer olmayan sistemler, lineer olmayan diferansiyel denklemlerle tanımlanabilir (Slotine, 1991).

- **Çoklu Denge Noktaları**

Lineer olmayan sistemler sıklıkla birden fazla denge noktasına sahiptir (Slotine, 1991).

- **Limit Döngü**

Bazı lineer olmayan sistemlerde, yörüngeler harici bir uyarı olmadan sabit bir genlik ve sabit bir periyotla hareket ederler. Bu salınımlara limit döngüler veya kendinden uyarımlı salınımlar denir (Slotine, 1991).

- **Çatallaşma**

Lineer olmayan dinamik sistemlerin parametreleri değiştikçe, denge noktasının kararlılığı ve denge noktalarının sayısı değişebilir. Sistemin hareketinin niteliksel doğasının değiştiği bu parametrelerin değerleri, kritik veya çatallaşma değerleri olarak bilinir. Çatallaşma olgusu, yani sistem özelliklerinin niteliksel değişimine yol açan parametrelerin nicel değişimi, çatallaşma teorisinin konusudur (Slotine, 1991).

- **Kaos**

Kararlı lineer olmayan sistemlerde, başlangıç koşullarındaki küçük farklılıklar sistem durumlarının yörüngelerinde yalnızca küçük farklılıklara neden olabilir. Bununla birlikte, lineer olmayan sistemler, durumlardaki değişimin başlangıç koşullarına son derece duyarlı olduğu anlamına gelen, kaos adı verilen bir olgu gösterebilir. Kaosun temel özelliği, durumlardaki değişimin öngörülemezliğidir. Lineer olmayan kaotik bir sistemde durumların zamana göre değişimi tahmin edilemez (Slotine, 1991)

2.7 Lyapunov Kararlılık Teorisi

Lyapunov kararlılık teorisi ilk olarak Lyapunov (1892) tarafından lineer olmayan bir sistemin kararlılığı bağlamında geliştirilmiştir. Lineer olmayan bir sistemin kararlılığı Lyapunov fonksiyonları tarafından belirlenir (Çifci, 2011).

Dinamik sistemleri tanımlayan diferansiyel denklemlerin veya fark denklemlerinin çözümleri için çeşitli kararlılık türleri tartışılabilir. Bu türlerden en önemlisi bir denge noktasının yakın civarındaki kararlılık ile ilgili olandır. Aleksandr Lyapunov'un teorisi $x^* = 0$ denge noktasının yakın civar kararlılığının belirlenmesini sağlar. Basit bir ifadeyle, bu denge noktasının yakınında başlayan durum yörüngeleri zaman sonsuza giderken denge noktasının yakın civarında kalıyorlarsa, o zaman denge noktası Lyapunov anlamında kararlıdır. Denge noktasının yakınında başlayan durum yörüngeleri zaman sonsuza giderken sadece denge noktasının yakın civarında kalmayıp aynı zamanda denge noktasına doğru yöneliyorlarsa denge noktası Lyapunov anlamında asimptotik kararlıdır (Anonim3, Haziran 2023; Vidyasagar, 2002).

Lyapunov Kararlılık Teorisi sistemin enerjisine benzer bir fonksiyon tanımlamaya dayanır. $x^* = 0$ denge noktası etrafında sistem enerjisinin yada enerji benzeri fonksiyonun zamanla azaldığı gösterilebilirse, bu yörüngelerin denge noktasına doğru yönlendiği anlamına gelecektir. O zaman denge noktası Lyapunov anlamında asimptotik kararlıdır. Genel anlamda (2.1)'deki lineer olmayan durum denklemlerini ele alınabilir. Bu sistem için, durum değişkenlerine bağlı $x = 0$ noktasında sıfır değerine sahip, $x \neq 0$ noktalarında pozitif tanımlı olan bir $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu tanımlanır. Tanımlanan bu fonksiyon enerji benzeri bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun $x^* = 0$ denge noktasının yakın civarındaki durum değişkenlerine göre türevleri sürekli olmalıdır. (2.1)'deki durum denklemleri ile tanımlı sistem için $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi alınabilir (Williams ve Lawrence, 2007).

$$\frac{d}{dt}V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\dot{x}_n \quad (2.14)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) = (\nabla V)^T f(x) \quad (2.16)$$

$V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi olan $\frac{d}{dt}V(x)$ fonksiyonuna bakarak Lyapunov anlamında $x^* = 0$ denge noktasının kararlılığı belirlenebilir.

- **Kararlı:** $\frac{d}{dt}V(x)$ fonksiyonu yarı negatif tanımlı ise; $(\frac{d}{dt}V(x) \leq 0, x \neq 0)$, $x^* = 0$ denge noktası kararlı demektir.
- **Asimptotik Kararlı:** $\frac{d}{dt}V(x)$ fonksiyonu negatif tanımlı ise; $(\frac{d}{dt}V(x) < 0, x \neq 0)$, $x^* = 0$ denge noktası asimptotik kararlı demektir; zamana göre türevi $\frac{d}{dt}V(x)$ (yarı) negatif tanımlı olan pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonuna Lyapunov fonksiyonu adı verilir. Yukarıdaki sonuç önemlidir. Çünkü $x^* = 0$ denge noktasının kararlılığı, sistem yörüngelerinin açık bilgisi olmadan doğrudan sistem enerjisinin azaldığı garanti edilerek belirlenebilir. Bu yaklaşım Lyapunov'un doğrudan yöntemi olarak adlandırılır. Bu yöntem, lineer olmayan sistemler bağlamında son derece önemlidir. Çünkü lineer olmayan sistemlerde yörüngeleri analitik olarak belirlemek son derece zordur.

Lyapunov'un doğrudan yöntemi $x^* = 0$ denge noktasının (asimptotik) kararlılığı için bir yeter koşuldur. Başka bir deyişle, pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonun zamana göre türevi olan $\frac{d}{dt}V(x)$ fonksiyonun (yarı) negatif tanımlı olmaması $x^* = 0$ denge noktasının kararsız olduğu anlamına gelmez.

$$\frac{d}{dt}x = A x(t) \quad , \quad x(0) = x^0 \quad (2.17)$$

(2.17)'daki durum denklemlerine sahip lineer bir sistem için Lyapunov kararlılık analizi çok daha kolay uygulanabilir. (2.18)'deki denklemde verilen ikinci dereceden pozitif tanımlı enerji benzeri bir Lyapunov fonksiyonu seçilir (Williams ve Lawrence, 2007).

$$V(x) = x^T P x = \sum_{ij=1}^n P_{ij} x_i x_j \quad (2.18)$$

(2.18)'deki eşitlikte P ($n \times n$) boyutlu simetrik kare bir matristir ve aynı zamanda pozitif tanımlıdır. Yani P matrisini bütün özdeğerleri reel ve pozitiftir.

$$0 < \lambda_{\min}(P) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}(P) \quad (2.19)$$

Simetrik ($n \times n$) bir P kare matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığını belirleyen diğer bir yöntem ise Sylvester Teoremi'dir. Bu yöntemde P matrisinin özdeğerlerini bulmaya ihtiyaç yoktur. P matrisinin asal minörleri olan ve (2.20)'da verilen bütün alt kare matrislerin determinantlarının pozitif olması P matrisinin bütün özdeğerlerinin pozitif olduğu sonucunu verecektir (Anonim4, Haziran 2023).

$$p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (2.20)$$

P matrisinin pozitif tanımlı olması, $V(x) = x^T P x$ ikinci derece polinomun da pozitif tanımlı olmasını sağlayacaktır. $V(x)$ fonksiyonun gradientin $\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right)^T = 2x^T P$ olacaktır. $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevini alınca (Williams ve Lawrence, 2007).

$$V(x) = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2p_{11}x_1 & 2p_{12}x_2 \\ 2p_{12}x_1 & 2p_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_{11} & 2p_{12} \\ 2p_{12} & 2p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2 P x, \quad P = P^T \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = (2x^T P)(A x) \quad (2.25)$$

$$= x^T P A x + x^T P A x \quad (2.26)$$

$$(x^T P A x)^T = x^T P A x = x^T A^T P x \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = x^T P A x + x^T A^T P x \quad (2.28)$$

$$= x^T [A^T P + PA] x \quad (2.29)$$

$A^T P + PA = -Q$ şeklinde ($n \times n$) boyutlu simetrik bir matristir, Q matrisi pozitif tanımlı ise $(A^T P + PA)$ matrisinin negatif tanımlı olacağı anlamına gelir. Bu durumda $x^T [A^T P + PA] x$ ikinci derece polinomu negatif tanımlı demektir. Bu durumda $x^* = 0$ denge noktasının Lyapunov anlamında asimptotik kararlı olacağı sonucu ortaya çıkar.

Teorem 2.2 Herhangi bir simetrik kesin pozitif tanımlı Q matrisi için (Williams ve Lawrence, 2007).

$$A^T P + PA = -Q \quad (2.30)$$

Lyapunov denklemini sağlayan kesin pozitif tanımlı bir P matrisinin mevcut olmasının gerek ve yeter koşulu A matrisinin bütün özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olmasıdır (Williams ve Lawrence, 2007).

Örnek 2.1 Lineer bir sistemin sistem matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Basitlik için $Q = I$ birim matris seçilmiştir. Birim matris simetrik ve pozitif tanımlı bir matristir. P matrisi simetriktir ve elemanları aşağıda verilmiştir.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = P^T \quad (2.32)$$

(2.29)'daki Lyapunov denklemini çözümü.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -2p_{12} & -2p_{22} \\ p_{11}-3p_{12} & p_{12}-3p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11}-3p_{12} \\ -2p_{22} & p_{12}-3p_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4p_{12} & p_{11}-3p_{12}-2p_{22} \\ p_{11}-3p_{12}-2p_{22} & 2p_{12}-6p_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Bilinmeyenlerin p_{11} , p_{12} ve p_{22} olduğu 3 bilinmeyenli 3 denklem oluşur. Bu denklemleri matrisel formda yazılır ve çözümlenir.

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

P matrisini belirledikten sonra kesin pozitif tanımlılığı test etmek için Sylvester Kriteri kullanılabilir.

$$|p_{11}| = 1.25 > 0 \text{ ve } \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = 0.25 > 0 \tag{2.36}$$

(2.36)'de görüldüğü gibi P matrisinin asal minörleri pozitif çıkmıştır. Bu da bize P matrisinin pozitif tanımlı olduğunu söyler. Teorem 2.2'ye göre A matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları negatiftir ve örnekteki lineer sistem asimptotik kararlıdır.

2.8 Lyapunov Teorisine Göre Kararlılık Yöntemleri

Temel Lyapunov teorisi, Lyapunov tarafından tanıtılan iki yöntemi içerir, dolaylı yöntem ve doğrudan yöntem. Dolaylı yöntem veya lineerleştirme yöntemi, bir denge noktasının

yakın çevresinde lineer olmayan bir sistemin kararlılık özelliklerinin, esasen onun lineerleştirilmiş modeliyle aynı olduğunu belirtir. Yöntem, doğası gereği her zaman lineer olmayan fiziksel sistemlerde denge noktasının yakın civarında geçerli olacaktır. Doğrudan yöntem, sistemin lineer olmayan modelini kullanır. Doğrudan yöntem, lineer olmayan sistemlerin kararlılık analizi için güçlü bir araçtır ve bu nedenle Lyapunov analizi olarak adlandırılır (Slotine, 1991; Taieb, 2021; Ibrahim vd., 2022).

2.8.1 Lyapunov'un doğrudan yöntemi

Lyapunov'un doğrudan yönteminin temel felsefesi, otonom bir sistemdeki enerji değişimine bakmasıdır. Eğer fiziksel bir sistem toplam enerjisini zamanla sürekli olarak kaybediyorsa ister lineer ister lineer olmayan olsun, bütün enerjisini kaybettiğinde bir denge noktasına oturacaktır. Böylece, enerji benzeri bir fonksiyonun değişimini inceleyerek bir sistemin kararlılığını belirlenebilir (Slotine, 1991).

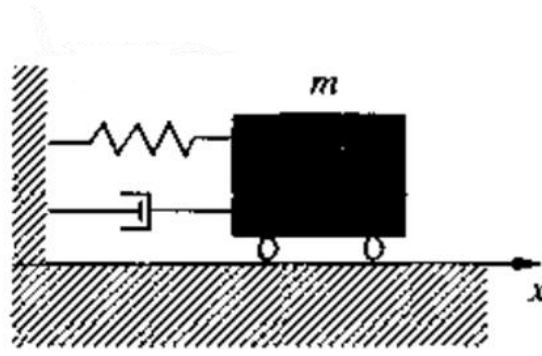
Örneğin, dinamik denklemi eşitlik (2.37)'de verilen şekil 2.3'teki lineer olmayan kütle-sönüm-yay sistemini ele alabilir (Slotine, 1991).

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0x + k_1x^3 = 0 \quad (2.37)$$

$b\dot{x}$ lineer olmayan sönümü, $k_0x + k_1x^3$ lineer olmayan yay hareketini temsil eder. Kütle için yayın doğal uzunluğundan büyük bir mesafe çekildiğini ve sonra serbest bırakıldığını varsayılır. Ortaya çıkan hareket kararlı olacak mı? Bu soruyu kararlılık tanımlarını kullanarak cevaplamak çok zordur. Çünkü bu lineer olmayan diferansiyel denklemin analitik genel çözümü mevcut değildir. Lineerleştirme yöntemi de kullanılamaz çünkü yay denge noktasından çok uzağa çekilmiştir.

Ancak sistem enerjisinin incelenmesi yayın hareketi ve sistemin kararlılığı hakkında fikir verecektir (Slotine, 1991).

Şekil 2.3 fiziksel bir sistemde enerji kaybı olup olmadığına ilişkin bir çalışmanın örneğini temsil etmektedir.



Şekil 2.3. Lineer olmayan bir kütle-sönüm-yay sistemi (Soltine,1991)

Sistemin toplam mekanik enerjisi, sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin toplamıdır.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x(k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (2.38)$$

Eşitlik (2.38)'deki aday Lyapunov fonksiyonu sistemin toplam enerji fonksiyonudur. Kararlılık ve mekanik enerji arasındaki ilişki şu şekilde özetlenebilir (Slotine, 1991).

- Sistem enerjinin sıfır olması sistemin denge noktasında bulunduğu anlamına gelecektir.
- Toplam mekanik enerjinin zamanla azalıp sıfıra yaklaşması denge noktasının asimptotik kararlılığına işaret eder.
- Toplam mekanik enerjinin artıyorsa denge noktası kararsız olacaktır.

Skaler bir fonksiyonun zamanla değişiminin, bu örnekte olduğu gibi toplam mekanik enerjinin, durum vektörünün zamanla değişimini, dolayısı ile denge noktasının kararlılığını belirlediği söylenebilir.

Sistemin hareketi sırasındaki enerji değişim oranı, (2.38)'deki birinci eşitliğin türevi alınarak ve (2.37) kullanılarak kolayca elde edilir.

$$\frac{d}{dt}V(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (K_0x + K_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \quad (2.39)$$

Denklem (2.39), sistemin enerjisinin, bir başlangıç değerinden başlayarak, kütle yerleşene kadar, yani denge noktasına gelene kadar sürekli olarak azaldığını ifade eder (Slotine, 1991).

Lyapunov'un doğrudan yöntemi, yukarıdaki kütle-sönüm-yay sistemindeki kavramların daha karmaşık sistemlere genelleştirilmesine dayanmaktadır. Bir dizi lineer olmayan diferansiyel denklemlerle karşılaşıldığında, Lyapunov'un doğrudan yönteminin temel prosedürü, dinamik sistem için bir skaler "enerji benzeri" fonksiyon üretmek ve bu skaler fonksiyonun zaman değişimini incelemektir. Bu şekilde, durumların çözümler hakkında açık bilgi gerektirmeden, diferansiyel denklem setinin kararlılığı hakkında sonuçlar çıkarılabilir (Slotine, 1991).

2.9 Lineer Olmayan Sistemlerde Asimptotik Kararlılık

2.9.1 Kararlılık tanımı

Dinamik sistemin kararlılığının belirlenmesi kesinlikle gerekli bir özelliktir ve bu nedenle kontrol mühendisliğindeki diğer tüm amaçlara göre önceliğe sahiptir. Lineer sistemler için, bir sistemin kararlılığını test etmek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bununla birlikte, lineer olmayan sistemlerin kararlılığının araştırılması daha zordur, çünkü kararlılığı test etmek için lineer sistemlere göre çok daha az kriter mevcuttur.

Kararlılık, aslında sistemdeki bir denge noktasının kararlılık durumunu belirtir. Bir sistemin üç olası kararlılık durumu vardır. Sistem bir denge noktasında ya asimptotik olarak kararlıdır, sadece kararlıdır (sınırlı kararlı) ya da kararsızdır. Bu bölümde, otonom sistemlerde denge noktasının kararlılığı incelenmektedir. Otonom bir sistemin dinamik davranışı genellikle durum uzayı diferansiyel denklemleriyle tanımlanır.

$$\frac{d}{dt}x = f(x), \quad x(0) = x^0 \quad (2.40)$$

(2.40)'deki durum uzayı modelinde $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörünü, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ise başlangıç koşulları vektörünü göstermektedir. Eşitlik (2.41)'deki

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

vektörü lineer veya lineer olmayan fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Genelliği kaybetmeden, $x = 0$ 'ın otonom sistemin bir denge noktası olduğunu varsayılabilir. Bu durumda

$$f(0) = 0 \quad (2.42)$$

eşitliği geçerli olacaktır. Eşitlik (2.43) n boyutlu uzayda küresel bir bölgeyi tanımlar.

$$\Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \quad (2.43)$$

Aşağıda Ω_r küresel bölgesine göre kararlılık, asimptotik kararlılık ve kararsızlığın tanımları verilmiştir.

Kararlılık: $x^0 \in \Omega_r$ başlangıç durumu vektörü için, her t anında $x(t)$ yörüngesi $R > 0$ yarıçaplı küresel bölgenin içinde kalıyorsa $x^* = 0$ denge noktası kararlı olacaktır.

$$x^* = 0 \text{ kararlıdır.} \quad \Leftrightarrow x(t) \in \Omega_R, \quad t \in [0, \infty)$$

Asimptotik Kararlılık: Sistem denge noktası etrafında kararlıysa ve ilaveten, $x^0 \in \Omega_r$ başlangıç durumu vektörü için, $x(t)$ yörüngesi artan zamanla $x^* = 0$ denge noktasına doğru hareket ediyor ve denge noktasında sonlanıyorsa, $x^* = 0$ denge noktası asimptotik olarak kararlıdır denir.

$$x^* = 0 \text{ asimptotik kararlıdır.} \quad \Leftrightarrow x(t) \in \Omega_R, \quad t \in [0, \infty) \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Durum uzayındaki bütün olası başlangıç durum vektörleri için $x^* = 0$ denge noktası asimptotik kararlıysa $x^* = 0$ denge noktası global asimptotik kararlı denge noktası adını alır.

$x = 0$ noktası her zaman lineer bir sistemin denge noktası olacaktır. Sistem matrisi A düzenli bir matris ise ($|A| \neq 0$) $x = 0$ lineer sistemin tek denge noktası olduğu anlamına gelecektir.

(2.44)'teki durum uzayı denklemleri, başlangıç koşulu x^0 olan ve (2.46)'da verilen tek bir $x(t)$ çözüm vektörüne sahiptir.

$$x(t) = e^{At}x^0 \quad (2.46)$$

Bu çözüm durum uzayında bir yörüngeyi tanımlar. Burada $(n \times n)$ e^{At} kare matrisine lineer sistemin durum geçiş matrisi adı verilir (Bronstein vd., 2001; Lunze, 1996).

Lineer bir sistemin asimptotik olarak kararlı mı yoksa kararsız mı olduğunu belirlemek için sistem matrisi A 'nın özdeğerleri bakılır. e^{At} durum geçiş matrisini bulmak gerekli değildir. Sistem matrisi A 'nın tüm özdeğerlerinin gerçekteki kısımları negatif ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0 \quad (2.47)$$

olacaktır. Buradan da lineer sistemin asimptotik kararlı olduğu sonucu çıkar.

A matrisinin özdeğerlerinin en az birinin gerçekteki kısmı pozitif ise, e^{At} durum geçiş matrisinin normu artan zamanla üstel olarak sonsuza doğru gidecektir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| \rightarrow \infty \quad (2.48)$$

Bu sonuç lineer sistemin kararsız olduğunu gösterir (Ludyk,1995; Lunze, 1996; Vidyasagar, 2002). Lineer olmayan sistemlerde, bir denge noktasının kararlılığı denge noktası etrafında lineerleştirme ile belirlenebilir. Durum uzayında $x^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlılığını araştırmak için, denge noktası etrafındaki lineer olmayan sistem modeli lineerleştirilir. Lineerleştirilmiş modelin sistem matrisi (Ludyk,1995; Lunze, 1996; Vidyasagar, 2002)

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \quad (2.49)$$

eşitliği ile ele edilir. Bu eşitlikte

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Jacobian matrisi veya Jacobian fonksiyonel matrisi adını alır (Föllinger, 1994). $x^* = 0$ denge noktası etrafında lineerleştirilen modelin asimptotik kararlı olması, $x^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlı olduğu anlamına gelir (Khalil,1996a; Lunze, 1996b).

2.10 Lyapunov Teoremine Göre Asimptotik Kararlılık

Lineer olmayan dinamik sistemlerin kararlılığını incelemek, lineer sistemlerin kararlılığını incelemekten çok daha karmaşıktır. Lineer olmayan sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan birkaç kararlılık kriterinden biri, Lyapunov teoremine göre asimptotik kararlılık analizidir.

A. M. Lyapunov, doğrudan yönteminde, lineer olmayan sistemin diferansiyel denklemlerinin açık bir çözümünün bilinmediği varsayımından yola çıkar. Temel fikri, sistem enerjisinin fiziksel yorumuna dayanmaktadır. Fiziksel bir sistemin enerjisi denge noktasının yakınında sürekli olarak düşüyorsa, denge noktası kararlı veya asimptotik olarak kararlıdır. Denge noktası etrafındaki sistem enerjisinin sürekli olarak azaldığı kanıtlanabildiği sürece, lineer olmayan sistemin denge noktasının kararlı olduğu anlamına gelecektir. Bu yöntemle, denge noktasının kararlılığını belirlemek için, lineer olmayan sistemin durum denklemlerinin çözülmesine gerek kalmaz (Salle ve Lefschetz, 1967; Vidyasagar, 2002).

Lyapunov'un teoremleri bu düşüncenin bir genelleştirilmesidir. Bir skaler pozitif tanımlı fonksiyon $V(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa aday Lyapunov fonksiyonu adını alır.

- $V(x)$ ve birinci kısmi türevleri orijinin etrafındaki kapalı bir Ω bölgesinde süreklidir.

- $V(x)$ fonksiyonunun Ω bölgesinde yalnızca tek bir kökü vardır ve bu kök $x = 0$ 'da olmalıdır. Başka bir deyişle, $V(0) = 0$.
- $V(x)$ fonksiyonu Ω bölgesi içinde her noktada pozitifdir. Sadece $x = 0$ 'da sıfır değerini alır. $x = 0$ noktası $V(x)$ fonksiyonunun izole edilmiş minimumudur.
- Ω bölgesi içinde

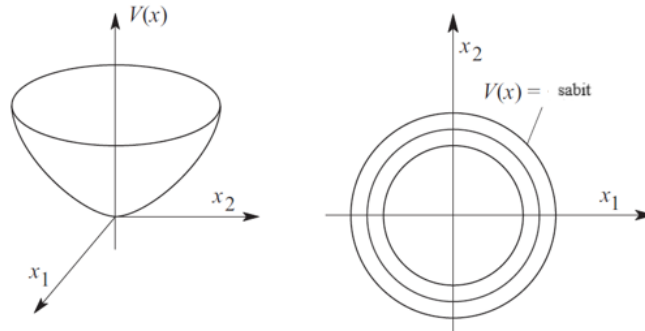
$$\frac{d}{dt}V(x) = \nabla V^T \frac{d}{dt}x = \nabla V^T f(x) \leq 0 \quad \forall x(t) \in \Omega \quad (2.51)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada (∇V) , $V(x)$ fonksiyonunun gradyanını temsil eder ve (2.52)'deki ifade ile verilir.

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Yukarıda verilen şartları sağlayan $V(x)$ fonksiyonuna Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Salle ve Lefschetz, 1967). Lyapunov fonksiyonları, enerji kavramının bir uzantısını temsil eder. Lyapunov teoreminin ana fikri, bir $V(x)$ Lyapunov fonksiyonunun özelliklerini kullanarak $x^* = 0$ denge noktasının kararlılığını belirlemektir.

Şekil 2.5, iki durumlu lineer olmayan bir sistem için olası bir Lyapunov fonksiyonunu ve onun eşdeğer çizgilerini göstermektedir (Salle ve Lefschetz, 1967).



Şekil 2.5. İki değişkenli olası bir Lyapunov fonksiyonu ve eşdeğer çizgileri (Salle ve Lefschetz, 1967)

2.11 Dar Anlamda Kararlılık

Lineer olmayan bir sistem için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, sistem dar anlamda kararlıdır.

- Durum uzayı açıklaması (2.17) ile verilen sistem için, $x = 0$ denge noktası komşuluğunda rastgele bir kapalı alan Ω 'da tanımlanan, pozitif tanımlı bir Lyapunov fonksiyonu $V(x)$ bulunabilirse ($\frac{d}{dt}V(x) \leq 0$), $x = 0$ denge noktası kararlıdır.
- Eğer Ω bölgesinde $\frac{d}{dt}V(x) < 0$ ise, o zaman $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlı olacaktır.

2.12 Genel Anlamda Kararlılık

Lyapunov'un kararlılık kriteri tüm durum uzayı için geçerliyse, kararlılık genel anlamda olacaktır. Dar anlamda asimptotik kararlılık, aşağıdaki şartların sağlanması ile elde edilir (Föllinger,1993; Hahn, 1967; Khalil,1996; Vidyasagar, 2002).

- $V(x)$, tanımlanmış olan Ω_C kapalı alanında pozitif tanımlıdır.
- $V(x)$ 'in ilk kısmi türevleri Ω_C 'de süreklidir.
- C 'nin sabit olduğu $V(x) = C$ yüzeyi, Ω_C 'nin sınırını oluşturur ve eşdeğer yüzey adını alır. Ω_C kapalı alanı aşağıdaki küme ile verilebilir.

$$\Omega_C = \{ x \mid V(x) \leq C \}, \quad C > 0 \quad (2.53)$$

∇V vektörü, $x = 0$ dışında, Ω_C alanında hiçbir yerde kaybolmaz. ($\nabla V \neq 0 \in \Omega_C \subset \mathbb{R}^n$)

- $\frac{d}{dt}V(x)$, Ω_C kapalı alanında negatif tanımlıdır.

Yukarıdaki koşullar yerine getirilirse, $x = 0$ denge noktası asimptotik olarak kararlıdır. Bu, Ω_C 'de başlayan her $x(t)$ yörüngesinin zamanla orijine doğru ilerlediği anlamına gelir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_C \quad (2.54)$$

Bu koşullar tüm durum uzayında sağlanırsa ve

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty \quad (2.55)$$

şartı geçerli ise, $x = 0$ denge noktası genel olarak asimptotik kararlı olacaktır.

Daha önce bahsedildiği gibi, lineer sistemlerde $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıysa, bu denge noktası genel anlamda asimptotik kararlıdır. Ayrıca lineer sistemlerin genel anlamda asimptotik kararlılığı Lyapunov teoremi yardımıyla da gösterilebilir. Bunun için ikinci dereceden

$$V(x) = x^T P x \quad (2.56)$$

skaler fonksiyonu seçilir. Burada P matrisi simetrik ve kesin pozitif tanımlıdır. P matrisinin kesin pozitif tanımlı olması Lyapunov fonksiyonunu da kesin pozitif tanımlı yapmaktadır.

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (2.57)$$

Ayrıca, $V(x)$ fonksiyonu radyal olarak sınırsızdır.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} x^T P x \rightarrow \infty \quad (2.58)$$

$V(x)$ fonksiyonu zamana göre türevi (2.59)'da verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \frac{d}{dx} (x^T P x) \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x \\ \frac{d}{dt} V(x) &= x^T (A^T P + P A) x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.59)$$

Bundan, (2.56)'deki $V(x)$ fonksiyonunun bir Lyapunov fonksiyonu olduğu ve sistem matrisi A olan lineer sistemin Lyapunov'un kararlılık teoremine göre (Föllinger,1993; Hahn, 1967; Khalil,1996; Vidyasagar, 2002) asimptotik kararlı olduğu sonucu çıkar.



BÖLÜM III

EHlich VE ZELLER İLE GÄRTEL TEOREMLERİNİN TANITIMI

3.1 Ehlich ve Zeller Teoremi

Bu bölümde Ehlich ve Zeller'in teoremi anlatılmaktadır. Teorem hem trigonometrik hem de cebirsel polinomlar için geçerlidir (Ehlich ve Zeller,1964).

m. dereceden tek bir değişkenli trigonometrik polinom (3.1)'deki ifade ile verilebilir.

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^k a_{ki} \sin^i \theta \cos^{k-i} \theta = \sum_{k=0}^m (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (3.1)$$

Burada $\theta \in [0, 2\pi]$ açıdır ve a_{ki} , a_k ve $b_k \in \mathbb{R}$ polinomun katsayılarıdır.

$p_1(\theta)$ m. dereceden trigonometrik polinomların (P_1^m) kümesine ait olsun ve (P_1^m) , bir değişkenli tüm trigonometrik polinomların kümesini tanımlasın.

$$\vartheta_i = \alpha + \frac{\pi}{N} i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N_\theta \quad (3.2)$$

noktalarını $p_1(\theta)$ trigonometrik polinomu için ele alalım. Burada $\alpha \in [0, 2\pi]$ aralığında bir sabit açıdır. $p_1(\theta)$ trigonometrik polinomu aynı zamanda ϑ_i noktalarında (3.3)'deki eşitsizlik şartlarını sağlasınlar.

$$|p_1(\vartheta_i)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 2N_\theta \quad (3.3)$$

Ehlich ve Zeller teoremi (3.4)'teki eşitsizliğin doğruluğunu bize ispatlar. (Ehlich ve Zeller,1964)

$$\|p_1(\theta)\|_{J_\theta} = \max_{\theta \in J_\theta} |p_1(\theta)| \leq C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) \quad (3.4)$$

(3.4)'teki eşitsizlikte $N_\theta > m$ koşulu her zaman sağlanmalıdır. Burada N_θ ϑ_i noktalarının sayısının yarısına eşittir. $J_\theta, [0, 2\pi]$ kapalı aralığını temsil etmektedir.

$\|p_1(\theta)\|^{J_\theta}$ J_θ bölgesindeki maksimum norm, $(C(\frac{m}{N_\theta}))$ ise (3.5) denklemiyle elde edilen bir sabittir.

$$C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) = \left[\cos\frac{\pi m}{2N_\theta}\right]^{-1} \quad (3.5)$$

(3.3) eşitsizliğindeki kabulü biraz yumuşatılabilir. (3.1)'de verilen m . dereceden $p_1(\theta)$ polinomu için seçilen ϑ_i noktalarından oluşan küme $\theta(N_\theta, J_\theta)$ olsun.

$$\theta(N_\theta, J_\theta) = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{2N_\theta}\} \quad (3.6)$$

Bu küme, J_θ kapalı aralığının bir alt kümesi olacaktır. $\theta(N_\theta, J_\theta)$ kümesindeki bir $p(\theta)$ trigonometrik polinomunun maksimum normu

$$\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = \max_{\vartheta_i \in \theta(N_\theta, J_\theta)} |p(\vartheta_i)|, \quad i = 1, \dots, 2N_\theta \quad (3.7)$$

ile tanımlanır. Seçilen ϑ_i noktaları bilindiğinden, $p(\theta)$ polinomunun $\theta(N_\theta, J_\theta)$ kümesinde maksimum normu bulunabilir.

$p(\theta)$ polinomunu $\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)}$ normuna bölündüğü zaman

$$p_1(\theta) = \frac{p(\theta)}{\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)}} \quad (3.8)$$

(P_1^m) kümesine ait olan ve (3.3) şartını sağlayan ve (3.8)'de verilen $p_1(\theta)$ trigonometrik polinomunu elde edilir. Ehlich ve Zeller teoremine göre (Ehlich ve Zeller,1964), (3.4) eşitsizliği $p(\theta)$ polinomundan elde edilen $p_1(\theta)$ trigonometrik polinomu için geçerli olacaktır. (3.4) eşitsizliğinden yola çıkarak $p(\theta)$ trigonometrik polinomu için (3.9) eşitsizliği bulunur.

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} \leq C\left(\frac{m}{N_\theta}\right) \|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \quad (3.9)$$

(3.9) eşitsizliğinde

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} = \max_{\theta \in J_\theta} |p(\theta)| \quad (3.10)$$

$J_\theta = [0, 2\pi]$ aralığında $p(\theta)$ polinomunun maksimum normunu temsil eder.

Genel olarak, m . dereceden tek değişkenli cebirsel bir polinom (3.11)'deki ifade ile gösterilebilir.

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

(3.11) ifadesinde a_i , polinomun i -inci dereceli teriminin katsayısını ifade eder.

$p_1(\tilde{x})$, m dereceli polinomların (P_1^m) kümesine ait olsun. (P_1^m) kümesindeki bütün polinomların $J_e = [-1, 1]$ aralığında, $N > m$ koşulu altında seçilen

$$\tilde{x}_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

noktalarında (3.13) eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Bu noktalar Chebyshev polinomunun sıfırları oldukları için Chebyshev noktaları olarak adlandırılır (Bronstein vd., 2001).

$$|p_1(\tilde{x}_i)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

Chebyshev noktalarından oluşan kümeye

$$\tilde{x}(N, J_e) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N\} \quad (3.14)$$

adı verilebilir. Bu küme aynı zamanda J_e kapalı aralığının bir alt kümesi olacaktır.

m . dereceden bir Chebyshev polinomu

$$T_m(x) = \cos(m(\arccos x)) \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır. Bu polinomun diğer bir ifadesi

$$T_m(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m \right] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

şeklinde verilebilir. Bir Chebyshev polinomunun tüm sıfırları J_e aralığındadır ve tüm Chebyshev polinomları (P_1^m) , $m \in \mathbb{N}$, m . derece polinomlar kümesine aittirler. Çünkü bu polinomlar

$$|T_m(x)| \leq 1, \quad x \in J_e, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.17)$$

şartını sağlarlar. Chebyshev noktaları, J_e kapalı aralığında optimal olarak dağıtılmış noktalardır. Bu noktalar J_e kapalı aralığında eşit uzaklıkta değildirler ve kapalı aralığın uçlarına doğru yığılma gösterirler (Schwarz, 1997).

(3.4) eşitsizliği (P_1^m) kümesindeki cebirsel polinomlar için de geçerlidir. Cebirsel polinomlar için geçerli olan bu eşitsizlik (3.18)'de verilmiştir.

$$\|p_1(\tilde{x})\|^{J_e} = \max_{\tilde{x} \in J_e} |p_1(\tilde{x})| \leq C \left(\frac{m}{N} \right) \quad (3.18)$$

(3.13) eşitsizliğindeki kabul biraz yumuşatılabilir. m . derecedeki tek değişkenli cebirsel bir polinom için kapalı aralık

$$J = [a, b], \quad b > a, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.19)$$

olsun. Bu kapalı aralıktaki Chebyshev noktaları

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{(2i-1)\pi}{2N} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

formülü ile elde edilirler. J kapalı aralığında bulunan Chebyshev noktalarının oluşturduğu küme

$$x(N, J) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (3.21)$$

adı verilebilir. $\|p(x)\|^{x(N,J)}$ $p(x)$ polinomunun Chebyshev noktalarındaki maksimum normunu temsil etsin. m . dereceden trigonometrik polinomlardaki duruma benzer şekilde m . dereceden cebirsel polinomlar için (3.22) eşitsizliği geçerli olacaktır

$$\|p(x)\|^J \leq C \left(\frac{m}{N}\right) \|p(x)\|^{x(N,J)} \quad (3.22)$$

3.2 Gärtel'in Eşitsizlikleri

Gärtel (Gärtel,1987) (3.22) eşitsizliğinin, birden fazla değişken içeren polinomlar için de geçerli olduğunu ispatlamıştır. $p(x)$, n değişkenli bir cebirsel polinom olsun. Her bir değişkenin (3.23)'de verilen kapalı aralıklarda tanımlı olduklarını kabul edilebilir.

$$J_i = [a_i, b_i], \quad b_i > a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

Bu durumda bütün değişkenlerin tanım bölgesi

$$\hat{J} = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \quad (3.24)$$

ile temsil edilen bir hiperküp olacaktır. $p(x)$ polinomunun \hat{J} hiperkübündeki maksimum normu (3.25)'daki ifade ile bulunabilir.

$$\|p(x)\|^{\hat{J}} = \max_{x_1 \in J_1} \left[\max_{x_2 \in J_2} \left[\dots \left[\max_{x_n \in J_n} |p(x_1, x_2, \dots, x_n)| \right] \dots \right] \right] = \max_{x \in \hat{J}} |p(x)| \quad (3.25)$$

(3.26)'deki eşitsizlikte m_i , $p(x)$ polinomunun x_i değişkenine göre derecesidir. N_i ise J_i kapalı aralığında seçilen Chebyshev noktalarının sayısıdır.

$$N_i > m_i, \quad i = 1 \dots n \quad (3.26)$$

Bu varsayımlar altında, J_i aralığındaki x_i değişkeni için Chebyshev noktaları,

$$x_{i,j} = \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{b_i - a_i}{2} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N_i}\right), \quad j = 1, \dots, N_i \quad (3.27)$$

formülü ile belirlenirler. x_i değişkeni için tanımlanan J_i kapalı aralığındaki N_i adet Chebyshev noktasından oluşan küme

$$x_i(N_i, J_i) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,N_i}\} \quad (3.28)$$

olsun. Bu durumda

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = x_1(N_1, J_1) \times x_2(N_2, J_2) \times \dots \times x_n(N_n, J_n) \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanan küme \hat{J} bölgesi içindeki bütün Chebyshev noktalarının kümesi olacaktır. \hat{J} içindeki toplam Chebyshev noktası sayısı

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^n N_i \quad (3.30)$$

çarpımıyla elde edilir. Gärtel, Ehlich ve Zeller'in ispatladığı (3.22) eşitsizliğinden yola çıkarak çok değişkenli cebirsel polinomlar için (3.31) eşitsizliğini ispatlamıştır.

$$\|p(x)\|_{\hat{J}} \leq K \|p(x)\|_{x(\hat{N}, \hat{J})} \quad (3.31)$$

(3.31) ifadesindeki K bir sabittir. Bu sabit (3.32)'deki ifadede verildiği gibi her bir değişke ait C sabitlerinin çarpımıyla hesaplanır.

$$K = \prod_{i=1}^n C\left(\frac{m_i}{N_i}\right) \quad (3.32)$$

(3.31) eşitsizliği n değişkenli bir trigonometrik polinom için de geçerlidir. n değişkenli trigonometrik bir polinom için her bir kapalı aralık $[0, 2\pi]$ olacaktır. Bütün kapalı aralıklardan oluşan n boyutlu hiperkübe

$$\hat{J}_0 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi] \quad (3.33)$$

adı verilebilir. (3.34) eşitsizliğinde m_i , $p(\theta)$ polinomunun θ_i değişkenine göre derecesini ifade etmektedir. N_{θ_i} ise θ_i değişkeni için seçilen nokta sayısının yarısına karşılık gelmektedir. N_{θ_i} değerleri (3.34) şartlarını sağlayacak biçimde belirlenirler.

$$N_{\theta_i} > m_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

Her bir θ_i değişkeni için $[0, 2\pi]$ kapalı aralığındaki noktalar

$$\vartheta_{i,j} = \frac{(j-1)}{N_{\theta_i}} \pi, \quad j = 1, \dots, 2N_{\theta_i} \quad (3.35)$$

formülü ile elde edilirler. θ_i değişkeni için belirlenen noktaların oluşturduğu küme

$$\theta_i(N_{\theta_i}, J_{\theta_i}) = \{ \vartheta_{i,1}, \vartheta_{i,2}, \dots, \vartheta_{i,2N_{\theta_i}} \} \quad (3.36)$$

olsun. $\theta_i(N_{\theta_i}, J_{\theta_i})$ kümesindeki J_{θ_i} sembolü $[0, 2\pi]$ kapalı aralığını temsil etmektedir. Her bir değişken için elde edilen (3.36)'daki kümelerin toplamını

$$\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta) = \theta_1(N_{\theta_1}, J_{\theta_1}) \times \theta_2(N_{\theta_2}, J_{\theta_2}) \times \dots \times \theta_n(N_{\theta_n}, J_{\theta_n}) \quad (3.37)$$

kümesi ile gösterilebilir. Bu küme aynı zamanda (\hat{J}_θ) hiperkübünün bir alt kümesi olacaktır ve seçilen noktaların kümesini tanımlar. $\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)$ kümesindeki toplam eleman sayısı

$$\hat{N}_\theta = 2^n \prod_{i=1}^n N_{\theta_i} \quad (3.38)$$

değerine eşittir.

n değişkenli cebirsel polinomlar için geçerli olan (3.31)'deki eşitsizlik n değişkenli trigonometrik polinomlar için de geçerlidir. Bu eşitsizlik (3.39)'da verilmiştir.

$$\|p(\theta)\|_{\hat{J}_\theta} \leq K_\theta \|p(\theta)\|_{\theta(\hat{N}_\theta, \hat{J}_\theta)} \quad (3.39)$$

(3.39) eşitsizliğindeki K_θ değeri

$$K_\theta = \prod_{i=1}^n C \left(\frac{m_i}{N_{\theta_i}} \right) \quad (3.40)$$

formülü ile hesaplanan bir sabittir. Gärtel çalışmasında (3.31) eşitsizliğinden yararlanarak

$$p_{\min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1)p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})} - (K-1)p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})} \right\} \quad (3.41)$$

ve

$$p_{\max}^{\hat{J}} \leq \frac{1}{2} \left\{ (K+1)p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})} - (K-1)p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})} \right\} \quad (3.42)$$

eşitsizliklerinin de geçerli olduğunu ispatlamıştır. (3.41) ve (3.42) ifadelerindeki K sabiti (3.32)'deki formül ile bulunur. $p_{\min}^{\hat{J}}$ $p(x)$ polinomunun (3.24)'de tanımlanan \hat{J} hiperkübündeki minimum değerini, benzer şekilde $p_{\max}^{\hat{J}}$ ise \hat{J} hiperkübündeki maksimum değerini ifade eder. $p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})}$, $p(x)$ polinomunun (3.29)'de tanımlanan Chebyshev noktaları kümesindeki minimum değeri, $p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})}$ ise maksimum değeridir. (3.41) ve (3.42) eşitsizlikleri n değişkenli trigonometrik polinomlar için de sağlanır. Trigonometrik polinomlar için geçerli olan eşitsizlikler (3.43) ve (3.44)'de verilmişlerdir.

$$p_{\min}^{\hat{J}_\theta} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K_\theta+1)p_{\min}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)} - (K_\theta-1)p_{\max}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)} \right\} \quad (3.43)$$

$$p_{\max}^{\hat{J}_\theta} \leq \frac{1}{2} \left\{ (K_\theta+1)p_{\max}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)} - (K_\theta-1)p_{\min}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)} \right\} \quad (3.44)$$

(3.43) ve (3.44) ifadelerindeki K_θ sabiti (3.40)'daki formül ile bulunur. $p_{\min}^{\hat{J}_\theta}$ $p(\theta)$ trigonometrik polinomunun (3.33)'de tanımlanan \hat{J}_θ hiperkübündeki minimum değerini, benzer şekilde $p_{\max}^{\hat{J}_\theta}$ ise \hat{J}_θ hiperkübündeki maksimum değerini ifade eder. $p_{\min}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)}$, $p(\theta)$ polinomunun (3.37)'de tanımlanan kümedeki minimum değeri, $p_{\max}^{\theta(\hat{N}_\theta,\hat{J}_\theta)}$ ise maksimum değeridir.

3.3 Örnekler

Önceki alt bölümlerde ele alınan matematiksel teoriler, bu bölümde üç örnek üzerinden açıklanmaktadır (Dilaver, 2008).

3.3.1 Örnek 3.1

Bu örnekte beşinci dereceden (3.45)'de verilen tek değişkenli trigonometrik polinom ele alınmıştır (Dilaver, 2008).

$$p(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{9} + \frac{\cos 5\theta}{25} \right) \quad (3.45)$$

Bu polinom için $J_\theta = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında $2N_\theta = 16$ nokta kullanılmıştır ($N_\theta = 8$).

$$\theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2N_\theta}, \quad i = 1, \dots, 2N_\theta \quad (3.46)$$

(3.46)'daki formülle hesaplanan noktaların oluşturduğu küme (3.47)'de verilmiştir.

$$\theta(N_\theta, J_\theta) = \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{23\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{27\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}, \frac{31\pi}{16} \right\} \quad (3.47)$$

$p(\theta)$ polinomunun $\theta(N_\theta, J_\theta)$ kümesindeki minimum ve maksimum değerleri ile maksimum normu (3.48)'de verilmiştir.

$$\|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 2.966, \quad p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 0.176 \text{ ve } p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 2.966 \quad (3.48)$$

C sabitinin değeri

$$C \left(\frac{m}{N_\theta} \right) = \left[\cos \left(\frac{\pi m}{2N_\theta} \right) \right]^{-1} = \left[\cos \left(\frac{5\pi}{16} \right) \right]^{-1} = 1.8 \quad (3.49)$$

olarak elde edilir. Ehlich ve Zeller teoremine göre

$$\|p(\theta)\|^{J_\theta} \leq C \left(\frac{m}{N_\theta}\right) \|p(\theta)\|^{\theta(N_\theta, J_\theta)} = 5.3388 \quad (3.50)$$

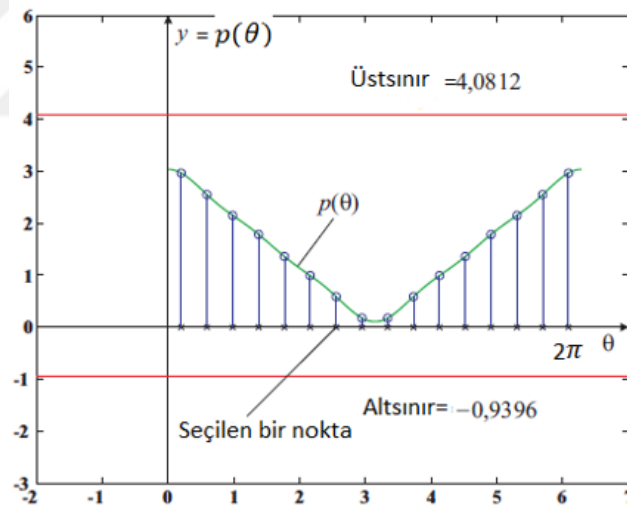
olduğu sonucuna varılır.

Gärtel'in ispatladığı (3.43) ve (3.44) eşitsizlikleri kullanılarak $p(\theta)$ polinomunun J_θ kapalı aralığında minimum değeri için bir alt sınır ve maksimum değeri için bir üst sınır bulunur. Alt ve üst sınırlar (3.52) ve (3.53)'de verilmişlerdir.

$$p_{\min}^{J_\theta} \leq p(\theta) \leq p_{\max}^{J_\theta}, \quad \theta \in J_\theta \quad (3.51)$$

$$p_{\min}^{J_\theta} \geq \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N_\theta} \right) + 1 \right) p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} - \left(C \left(\frac{m}{N_\theta} \right) - 1 \right) p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \right\} = -0.94 \quad (3.52)$$

$$p_{\max}^{J_\theta} \leq \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N_\theta} \right) + 1 \right) p_{\max}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} - \left(C \left(\frac{m}{N_\theta} \right) - 1 \right) p_{\min}^{\theta(N_\theta, J_\theta)} \right\} = 4.08 \quad (3.53)$$



Şekil 3.1. Seçilen 16 nokta için Örnek 3.1'deki $p(\theta)$ polinomunun alt ve üst sınırları (Dilaver, 2008)

Şekil 3.1'de beşinci dereceden (3.45)'de verilen tek değişkenli trigonometrik polinom J_θ kapalı aralığında seçilen 16 nokta için $p_{\max}^{J_\theta}$ için üst sınır, $p_{\min}^{J_\theta}$ için alt sınır ve $p(\theta)$ polinomu grafiksel olarak gösterilmiştir (Dilaver, 2008).

3.3.2 Örnek 3.2

Bu örnekte (3.54)'de verilen üçüncü dereceden cebirsel polinom seçilmiştir (Dilaver,2008).

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \quad (3.54)$$

Bu polinom için Chebyshev noktaları (3.55)'daki formül kullanılarak $J = [-4, 3]$ kapalı aralığında hesaplanmıştır.

$$x_i = \frac{-4+3}{2} + \frac{3-(-4)}{2} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.55)$$

Bu hesaplamada Chebyshev noktalarının sayısı $N = 9$ alınmıştır. Dokuz Chebyshev noktasından oluşan küme (3.56) 'de verilmiştir.

$$x(N, J) = \{2.95, 2.53, 1.75, 0.7, -0.5, -1.7, -2.75, -3.53, -3.95\} \quad (3.56)$$

$p(x)$ polinomunun $x(N, J)$ kümesindeki minimum ve maksimum değerleri ile maksimum normu (3.57)'de verilmiştir.

$$\|p(x)\|^{x(N, J)} = 19.77, \quad p_{\min}^{x(N, J)} = -19.77 \quad \text{ve} \quad p_{\max}^{x(N, J)} = 12.58 \quad (3.57)$$

$N = 9$ Chebyshev nokta sayısına göre C sabitinin değeri

$$C\left(\frac{m}{N}\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right)\right]^{-1} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3.58)$$

bulunur. Ehlich ve Zeller teoremine göre $p(x)$ polinomunun J kapalı aralığındaki maksimum normunun

$$\|p(x)\|^J \leq C\left(\frac{m}{N}\right) \|p(x)\|^{x(N, J)} = 22.82 \quad (3.59)$$

olduğu sonucuna varılır.

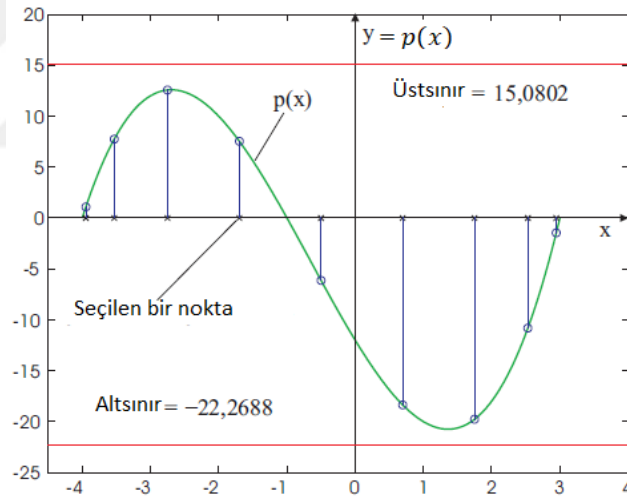
Gärtel'in ispatladığı (3.41) ve (3.42) eşitsizlikleri kullanılarak $p(x)$ polinomunun J kapalı aralığında minimum değeri için bir alt sınır ve maksimum değeri için bir üst sınır bulunur. Alt ve üst sınırlar (3.60) ve (3.61)'de verilmişlerdir.

$$p_{\min}^J \geq \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N} \right) + 1 \right) p_{\min}^{x(N,J)} - \left(C \left(\frac{m}{N} \right) - 1 \right) p_{\max}^{x(N,J)} \right\} = -22.27 \quad (3.60)$$

$$p_{\max}^J \leq \frac{1}{2} \left\{ \left(C \left(\frac{m}{N} \right) + 1 \right) p_{\max}^{x(N,J)} - \left(C \left(\frac{m}{N} \right) - 1 \right) p_{\min}^{x(N,J)} \right\} = 15.08 \quad (3.61)$$

$$p(x) \in [p_{\min}^J, p_{\max}^J] \quad \forall x \in J = [-4, 3] \quad (3.62)$$

Şekil 3.2'de üçüncü dereceden tek değişkenli cebirsel polinom J kapalı aralığında $N = 9$ Chebyshev nokta sayısına göre p_{\max}^J için üst sınır, p_{\min}^J için alt sınır ve $p(x)$ polinomu grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.2. $N=9$ Chebyshev noktası için Örnek 3.2.'deki $p(x)$ polinomunun alt ve üst sınırları (Dilaver, 2008)

3.3.3 Örnek 3.3

Bu örnekte (3.63)'de verilen iki değişkenli cebirsel polinom ele alınmıştır (Dilaver,2008).

$$p(x) = 1 + x_1 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.63)$$

Fonksiyon x_1 değişkeni için $J_1 = [a_1, b_1] = [-2, 1]$ kapalı aralığında, x_2 değişkeni için $J_2 = [a_2, b_2] = [-3, 2]$ kapalı aralığında incelenmiştir. Bu durumda iki değişken için tanım bölgesi

$$\hat{J} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [-2, 1] \times [-3, 2] \quad (3.64)$$

dikdörtgeni olacaktır. Polinomun x_1 değişkenine göre derecesi $m_1 = 1$, x_2 değişkenine göre derecesi $m_2 = 2$ 'dir.

Her bir değişken için $N_1 = N_2 = 3$ Chebyshev noktası aldığımızda \hat{J} bölgesi içindeki toplam Chebyshev noktası sayısı

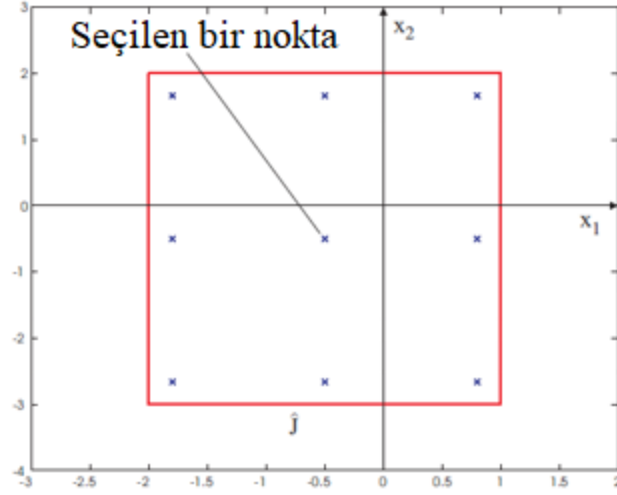
$$\hat{N} = \prod_{i=1}^2 N_i = N_1 N_2 = 9 \quad (3.65)$$

ve (3.27)'deki formülle hesaplanan Chebyshev noktalarından oluşan küme

$$x(\hat{N}, \hat{J}) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 0.8 \\ 1.67 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} 0.8 \\ -0.5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} 0.8 \\ -2.67 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} -0.5 \\ 1.67 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} -0.5 \\ -0.5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} -0.5 \\ -2.67 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} -1.8 \\ 1.67 \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{l} -1.8 \\ -0.5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} -1.8 \\ -2.67 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad 3.66$$

olarak bulunur.

\hat{J} dikdörtgen bölgesi ve bu bölge içindeki Chebyshev noktaları Şekil 3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Örnek 3.3 için Chebyshev noktaları ve \hat{J} dikdörtgeni (Dilaver, 2008)

$p(x)$ polinomunun $x(\hat{N}, \hat{J})$ kümesindeki minimum ve maksimum değerleri ile maksimum normu (3.67)'de verilmiştir. K sabitinin değeri

$$\|p(x)\|^{x(\hat{N}, \hat{J})} = 8.9, \quad p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} = -0.55 \quad \text{ve} \quad p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} = 8.9 \quad (3.67)$$

(3.69)'daki eşitsizliği sağlayan K sabiti

$$K = \prod_{i=1}^2 C\left(\frac{m_i}{N_i}\right) = 2.31 \quad (3.68)$$

olacaktır. $p(x)$ polinomunun \hat{J} dikdörtgensel bölgesindeki maksimum normunun

$$\|p(x)\|^{\hat{J}} \leq K \|p(x)\|^{x(\hat{N}, \hat{J})} = 20.56 \quad (3.69)$$

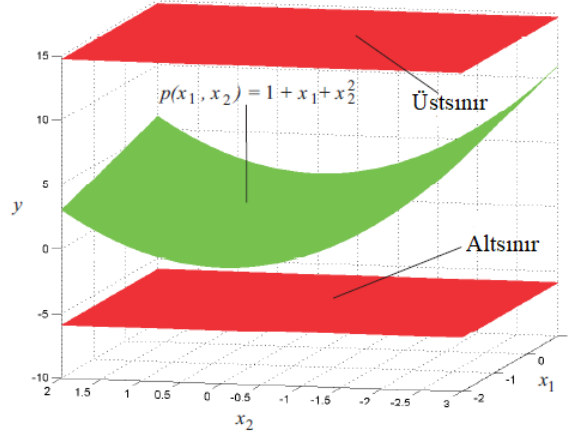
olduğu sonucuna varılır.

Gärtel'in ispatladığı (3.41) ve (3.42) eşitsizlikleri kullanılarak $p(x)$ polinomunun \hat{J} bölgesindeki minimum değeri için bir alt sınır ve maksimum değeri için bir üst sınır bulunur. Alt ve üst sınırlar (3.70) ve (3.71)'de verilmişlerdir.

$$p_{\min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1)p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K-1)p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} = -6.74 \quad (3.70)$$

$$p_{\max}^{\hat{J}} \leq \frac{1}{2} \left\{ (K + 1)p_{\max}^{x(\hat{N}, \hat{J})} - (K - 1)p_{\min}^{x(\hat{N}, \hat{J})} \right\} = 15.09 \quad (3.71)$$

Şekil 3.4'de \hat{J} bölgesinde, $\hat{N} = 9$ Chebyshev noktasında hesaplanan $p_{\max}^{\hat{J}}$ için üst sınır, $p_{\min}^{\hat{J}}$ için alt sınır ve \hat{J} bölgesindeki $p(x)$ polinomu grafiksel olarak gösterilmiştir (Dilaver,2008).



Şekil 3.4. $N=9$ Chebyshev noktası için Örnek 3.3.'deki $p(x)$ polinomunun alt ve üst sınırları

BÖLÜM IV

POLİNOM YAPISINDAKİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE BELLİ BİR İKİNCİ DERECE LYAPUNOV FONKSİYONU İÇİN MAKSİMUM KARARLILIK BÖLGESİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde ikinci dereceden Lyapunov fonksiyonu kullanılarak polinom yapısındaki bir sistemin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki maksimum güvenli kararlılık bölgesinin belirlenmesine yönelik Gärtel eşitsizlikleri yardımıyla geliştirilen sayısal bir yöntem tanıtılmaktadır.

4.1 İkinci Dereceden Bir Lyapunov Fonksiyonu İçin Kararlılık Bölgesinin Belirlenmesi

Eğer bir lineer olmayan sistemin denge noktası asimptotik kararlılık ise, denge noktası etrafında Ω_E ile temsil edebileceğimiz bir kararlılığı bölgesi vardır. (4.1)'deki durum uzayı denklemlerinden elde edilen ve (4.2) şartını sağlayan bütün $x(t)$ yörüngelerinin başlangıç durumları $x^* = 0$ denge noktasının Ω_E kararlılık bölgesini oluştururlar.

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (4.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.2)$$

Ω_E kararlılık bölgesi aşağıdaki küme ile ifade edilebilir:

$$\Omega_E = \left\{ x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \right\}, \quad x(t) \in \Omega_E \quad (4.3)$$

Burada x^0 vektörü $x(t)$ yörüngesinin başlangıç durumunu ifade etmektedir (Föllinger, 1993; Khalil, 1996).

Lineer olmayan sistemler için Lyapunov teoremini kullanarak Ω_E kararlılık bölgesini tam olarak belirlemek neredeyse imkansızdır. Çünkü bu bölgeyi belirleyebilecek bir Lyapunov fonksiyonu bulacak bir yöntem yoktur. Ancak uygun bir kesin pozitif tanımlı

bir $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu bulabilen bazı yöntemler mevcuttur. Lyapunov asimptotik kararlılık şartlarını sağlayan kesin pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonu vasıtasıyla tanımlanan

$$\Omega_c = \{ x \mid V(x) \leq C \} \quad (4.4)$$

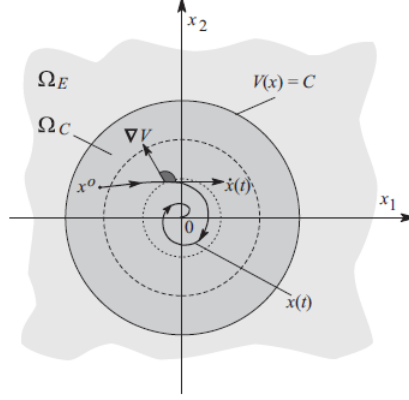
bölgesi içinde Lyapunov kararlılık şartları sağlanıyorsa, başka bir deyişle bu bölge içinde başlayan $x(t)$ yörüngeleri $x^* = 0$ denge noktasında sonlanıyorsa Ω_c bölgesi Ω_E kararlılık bölgesinin içindedir, yani alt kümesidir.

$$\Omega_c \subseteq \Omega_E \quad (4.5)$$

Ω_c , $x^* = 0$ denge noktası için bir güvenli kararlılık bölgesi olarak adlandırılır (Föllinger, 1993; Khalil, 1996). Ω_E ve Ω_c bölgeleri ne kadar büyük olursa, $x^* = 0$ denge noktası çevresindeki sistem kararlılığı o kadar sağlam (robust) olacaktır.

Lyapunov teoremi ile yapılan kararlılık analizinin olumsuz yönü, bu teoremin asimptotik kararlılık için sadece yeter koşul olmasıdır. Ayrıca, $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilen güvenli kararlılık bölgesi Ω_c , gerçek kararlılık bölgesi Ω_E 'nin sadece bir kısmını kapsar. Lyapunov kararlılık kriterlerini sağlayacak uygun bir $V(x)$ Lyapunov fonksiyonunun bulunamaması, $x^* = 0$ denge noktasının kararsız olduğu anlamına gelmez. Ancak, en büyük kararlılık bölgesi olan Ω_E 'yi bulmayı sağlayacak Lyapunov fonksiyonunu belirleyecek bir yöntem yoktur (Salle, 1967). Literatürde, mümkün olduğunca büyük bir güvenli kararlılık bölgesini tespit etmek amacıyla optimal bir Lyapunov fonksiyonu üretmeyi amaçlayan bir dizi yayın bulunmaktadır (Chesi vd., 2002; Chiang ve Thorp, 1989; Levin, 1994; Hamidi vd., 2013; Tibken ve Hachicho, 2000; Jerbi vd., 2014; Chesi, 2009; Dilaver ve Tibken, 2006; Pang ve Zhang, 2015; Tesi, 1994; Chesi vd., 2003; Xue vd., 2020; Polcz ve Szederkényi, 2021; Coutinho vd., 2020), Aşağıda, basit bir örnek üzerinden Lyapunov teoreminin nasıl uygulandığı gösterilmektedir.

Şekil 4.1'de iki boyutlu düzlemde, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir Ω_c kararlılık bölgesi gösterilmektedir. Bir kararlılık bölgesinde, ∇V ve $\dot{x}(t)$ vektörleri şekil 4.1'de görüldüğü gibi da bir açı oluşturur.



Şekil 4.1. İki durumlu lineer olmayan bir sistem için güvenli bir kararlılık bölgesi Ω_C (Tibken, 2000)

4.1.1 Örnek 4.1

Aşağıdaki 2 durumlu bir sistemin polinom yapısındaki durum uzayı denklemlerini ele alınmaktadır (Tibken, 2000).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x) = -x_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) = -x_2 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (4.6)$$

Sistemde tek bir denge noktası bulunur ve bu denge noktası orjindedir. $x^* = 0$ denge noktasının kararlılığı (4.7)'daki Jacobian matrisinin yardımıyla belirlenebilir (Tibken, 2000).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\quad (4.7)$$

Eğer sistem denge noktası etrafında lineerleştirilirse, (4.8) eşitliğindeki lineer durum uzayı denklemleri elde edilir.

$$\dot{x}(t) = A x(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = x^0\quad (4.8)$$

Lineerleştirilmiş bu model için durum geçiş matrisi (4.9)'da verilmiştir.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0$ olması $x^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu söyler.

Lineer sistemin asimptotik kararlılığı Lyapunov teoremi yardımı ile de gösterilebilir. Bunun için (4.10)'daki aday Lyapunov fonksiyonunu kullanılabilir.

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ikinci dereceden aday Lyapunov fonksiyonunu oluşturan

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

matrisi simetrik ve kesin pozitif tanımlıdır, aynı zamanda (2.59)'deki şartı da sağlar.

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

matrisi kesin negatif tanımlıdır. Bu sonuç $V(x)$ fonksiyonunun uygun bir Lyapunov fonksiyonu olduğunu gösterir. $V(x)$ fonksiyonunun (2.59) şartını sağlaması orijindeki denge noktasının asimptotik kararlılığını garanti altına alır. Lineer olmayan bir sistemin $x^* = 0$ denge noktası asimptotik kararlı ise bu nokta etrafında her zaman bir kararlılık bölgesi Ω_E bulunur. Ancak, genellikle Ω_E kararlılık bölgesini belirlemek zordur. Bunun yerine, Lyapunov teoremi kullanarak güvence altına alınmış bir kararlılık bölgesi Ω_c hesaplanabilir. Bu örnekte Ω_c bölgesi Lyapunov fonksiyonundan yararlanarak (4.13)'teki küme ile tanımlanmıştır (Tibken, 2000).

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C\}, \quad C > 0 \quad (4.13)$$

İkinci dereceden kesin pozitif tanımlı polinomlar, Lyapunov'un asimptotik kararlılık analizi için gereken koşulları biri hariç doğrudan sağlarlar; ancak kapalı Ω_c bölgesinde

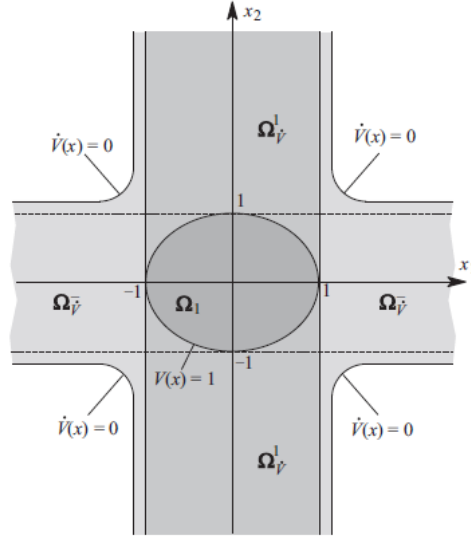
bu polinomların zamana göre türevlerinin kesin negatif tanımlı olması koşulunun da sağlanması gerekir (Tibken, 2000). Bu nedenle, Lyapunov fonksiyonu olarak kabul edilen $V(x)$ polinomunun bu koşulu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. Eğer $V(x)$ polinomunun uygun bir Lyapunov fonksiyonu olduğu kesinse, bu koşul sayesinde Ω_c bölgesinde Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevinin kesin negatif tanımlı olduğu bir sabit eşdeğer C yüzeyi belirlenebilir. Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevinin

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x) &= (\nabla V)^T \frac{d}{dt}x = (\nabla V)^T f(x) \\
&= (2x_1 \quad 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \\
&= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 \\
&= -2x_1^2 + 2x_2^2 (x_1^2 - 1) < 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şartının $x^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlılığını göstermek için sağlanması gerekir.

$$-1 \leq x_1 \leq 1 \tag{4.15}$$

değerleri için (4.14) koşulu sağlanmış olur. Bu durumda $x^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu ve bu nokta etrafında her zaman bir kararlılık bölgesi Ω_E bulunduğunu anlamına gelir (Tibken, 2000).



Şekil 4.2. Örnek 4.1'deki (4.6) sistemi için güvence altına alınmış kararlılık bölgesi Ω_1
(Tibken, 2000)

Koşul (4.15), aşağıdaki bölgeyi tanımlar

$$\Omega_V^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1\} \quad (4.16)$$

Ω_V^1 bölgesi $\frac{d}{dt}V(x)$ fonksiyonunun kesin negatif tanımlı olduğu bölgeyi ifade eder. (4.16) bölgesi ise (4.14)'deki eşitsizlik şartının sağlandığı bölgenin bir alt kümesidir. (4.14) bölgesi (4.17)'de verilen Ω_V^- kümesi ile gösterilebilir (Tibken, 2000).

$$\Omega_V^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d}{dt}V(x) < 0\right\} \quad (4.17)$$

Lyapunov Teoremi'ne göre, güvence altına alınmış bir kararlılık bölgesi, Ω_V^- bölgesinin bir alt kümesi olmalıdır. Eğer Ω_c kümesi Ω_V^1 bölgesinin bir alt kümesi olarak seçilirse, o zaman bu Ω_c kümesi (4.6) sistemi için bir güvence altına alınmış kararlılık bölgesi olacaktır. Bölgeler arasındaki bu bağlantı (4.18)'de matematiksel olarak verilmiştir (Tibken, 2000).

$$\Omega_c \subseteq \Omega_V^1 \subseteq \Omega_V^- \quad (4.18)$$

Lyapunov fonksiyonun eşdeğer yüzeyini $C = 1$ seçildiğinde

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \quad (4.19)$$

kararlılık bölgesini elde edilir. Bu bölge Ω_V^1 kararlılık bölgesinin bir alt kümesidir ve güvenli bir kararlılık bölgesi tanımlar. Şekil 4.2'de (4.6) sestimi için Ω_V^- , Ω_V^1 ve Ω_1 güvenli bölgeleri grafiksel olarak gösterilmiştir (Tibken, 2000).

4.2 Polinomial Sistemler İçin Güvenli Kararlılık Bölgelerinin Hesaplanması.

Daha önce belirtildiği gibi, genellikle kontrol mühendisliğinde, dinamik bir sistemin denge noktasının kararlılığını incelemek gereklidir. Eğer denge noktası asimptotik kararlı ise, bir sonraki adım olarak güvence altına alınmış bir kararlılık bölgesi Ω_c 'nin belirlenmesi gerekebilir. Bu bölümde temel kavramlar tekrarlanmaktadır (Vidyasagar, 2002).

(4.20)'de n durumlu lineer olmayan otonom bir sistemin genel durum uzayı denklemleri verilmiştir.

$$\frac{d}{dt}x = f(x), \quad x(0) = x^0 \quad (4.20)$$

(4.20)'deki durum uzayı denklemlerinde $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü sistemin durum vektörünü, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ vektörü başlangıç durumunu ve $f(x) \in \mathbb{R}^n$ bileşenleri n değişkenli polinomlar olan vektörü temsil eder. Sistem (4.20) aşağıdaki iki şartı yerine getirmelidir (Vidyasagar, 2002).

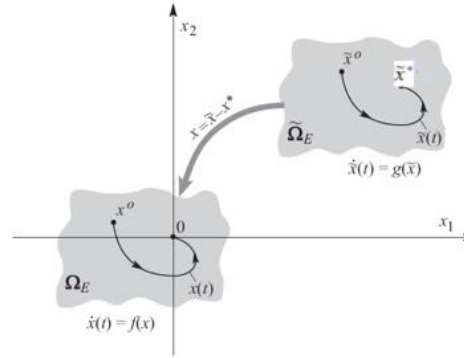
Birincisi $x^* = 0$ sistemin bir denge noktasıdır, ikincisi ise bu denge noktası asimptotik kararlıdır.

İlk koşul, genel olarak herhangi bir kısıtlama olmadan sağlanabilir. Eğer sistemin orijinde bir denge noktası yoksa, herhangi bir denge noktası (Vidyasagar, 2002) koordinat dönüşümü ile $x = 0$ noktasına çekilebilir. \tilde{x}^* , (4.21)'de durum uzayı denklemleri verilen sistemin bir denge noktası olsun.

$$\dot{\tilde{x}} = g(\tilde{x}) \quad , \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0 \quad (4.21)$$

$$x = \tilde{x} - \tilde{x}^* \quad (4.22)$$

(4.22)'deki durum dönüşümüyle bu denge noktası $x = 0$ noktasına çekilmiş olur. Dönüşümden sonra oluşan lineer olmayan sisteminde $x^* = 0$ bir denge noktasıdır. Yeni oluşan sistem modelinde $\dot{x} = \tilde{x}, f(x) = g(x + x^*)$ ve $x^0 = \tilde{x}^0 - \tilde{x}^*$ olacaktır. Dönüşüm, sistemin kararlılığını değiştirmez. Eğer x^* denge noktası asimptotik kararlı ise, $x^* = 0$ denge noktası asimptotik kararlı demektir ve \tilde{x}^* etrafındaki Ω_E kararlılık bölgesinin şekli $x^* = 0$ denge noktası etrafında değişmeden kalır. Şekil 4.3'te \tilde{x}^* sistemin denge noktası $x = 0$ noktasına çekilmiş grafiksel olarak gösterilmiştir (Vidyasagar, 2002).



Şekil 4.3. $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}^2$ denge noktasının orijine kaydırılması (Vidyasagar, 2002)

Bu bölümde güvenli kararlılık bölgesi Ω_c 'yi belirlemek için (4.23)'teki ikinci derece Lyapunov fonksiyonlarından yararlanılacaktır (Vidyasagar, 2002) .

$$V(x) = x^T P x \quad (4.23)$$

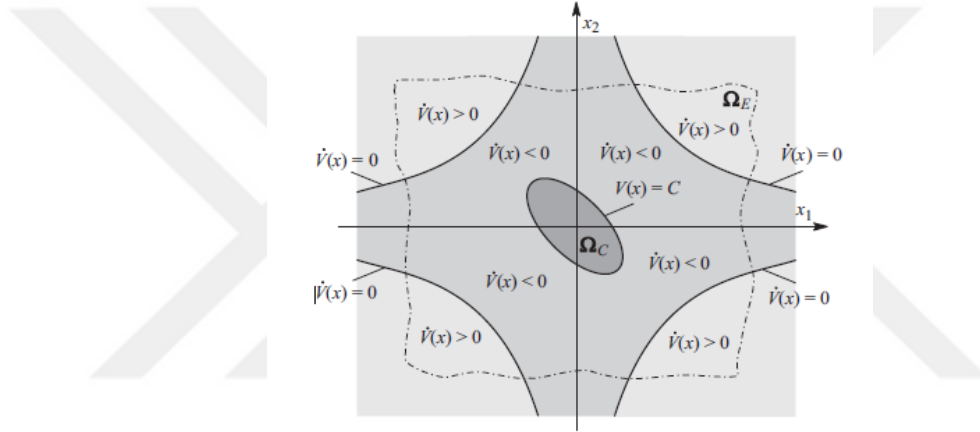
Daha önce de bahsedildiği gibi P matrisi simetriktir ve kesin pozitif tanımlıdır. Amacı Lyapunov kararlılık teorisinden yararlanarak (4.24) ifadesi ile verilen güvenli kararlılık bölgesi Ω_c için uygun bir C eşdeğer yüzeyi belirlemektir.

$$\Omega_c = \{ x \mid V(x) \leq C \} \quad (4.24)$$

(4.20)'deki sistem için seçilen Lyapunov fonksiyonun zamana göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= f(x)^T P x + x^T P f(x) < 0\end{aligned}\quad (4.25)$$

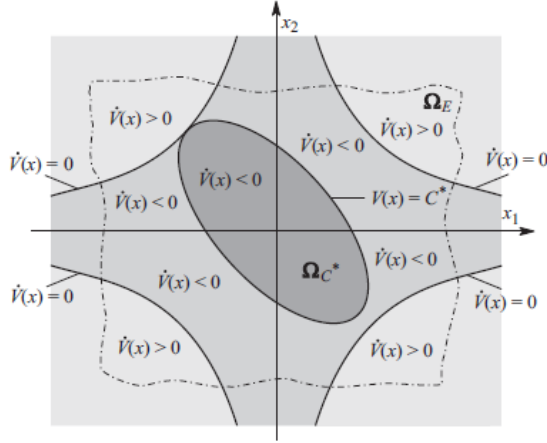
güvenli kararlılık bölgesi Ω_c içindeki her noktada ($x = 0$ hariç) kesin negatif tanımlı olmalıdır (Föllinger,1993; Khalil,1996). Şekil 4.4'de iki boyutlu düzlemde $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki kararlılık bölgesi Ω_E 'nin bir alt kümesi olan güvenli bir kararlılık bölgesi Ω_c gösterilmiştir.



Şekil 4.4. İki boyutlu düzlemde güvenli bir kararlılık bölgesi Ω_c (Föllinger,1993; Khalil,1996).

Bu bölümün amacı, seçilen bir Lyapunov fonksiyonu için, güvenli kararlılık bölgesi Ω_c 'nin kararlılık bölgesi Ω_E 'nin içinde kalacak biçimde eşdeğer yüzey C 'nin değerini maksimize etmektir. C değeri ne kadar büyük olursa, Ω_c bölgesinin n boyutlu uzaydaki alanı veya hacmi de o kadar büyük olur. Bu amaca ulaşmak için yöntemlerin kullanıldığı çeşitli yayınlar bulunmaktadır (Dilaver, 2002; Genesio vd.,1985; Hachicho ve Tibken, 2002; Tesi vd, 1996; Tibken, 2000; Tibken ve Hachicho, 2000; Hughes ve Chraibi, 2011).

Şekil 4.5, iki durumlu bir sistemin mümkün olan en büyük güvenli kararlılık bölgesi Ω_c örneğini göstermektedir. Ω_E kararlılık bölgesi tüm durum uzayını kapsıyorsa, $x^* = 0$ denge noktası genel (global) asimptotik karardır ve Ω_E 'nin toplama alanı tüm \mathbb{R}^n 'dir.



Şekil 4.5. İki boyutlu düzlemde mümkün olan en büyük güvenli kararlılık bölgesi Ω_C^* (Föllinger,1993; Khalil,1996).

4.3 Güvence Altına Alınmış Maksimum Kararlılık Bölgesinin Sayısal Hesaplama Yöntemi.

Bu kısımda, uygun bir ikinci dereceden Lyapunov fonksiyonu için C 'nin maksimum değeri C^* 'ın belirlenmesini sağlayan ve (3.43) ile (3.44)'deki Gärtel eşitsizliklerinden yararlanan nümerik bir hesaplama yöntemi tanıtılacaktır (Tibken, ve Dilaver, 2002). Kapalı alan Ω_C^* sistemin güvenli bir kararlılık bölgesi olmalıdır. Bunun anlamı, Ω_C^* içindeki her x durum vektörünün (4.25) eşitsizliğini sağladığıdır.

$$V(x) = x^T P x = C, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.26)$$

denklemini C 'nin sabit olması durumunda n boyutlu uzayda bir elipsoid tanımlar. C sabiti ne kadar büyük olursa, Ω_C kapalı alanını temsil eden elipsoidin hacmi de o oranda büyük olur.

Bir sonraki örnek, yukarıdaki teoremi iki boyutlu düzlemde göstermektedir (Tibken, ve Dilaver, 2002).

4.3.1 Örnek 4.2

İkinci dereceden kesin pozitif tanımlı (Tibken, ve Dilaver, 2002).

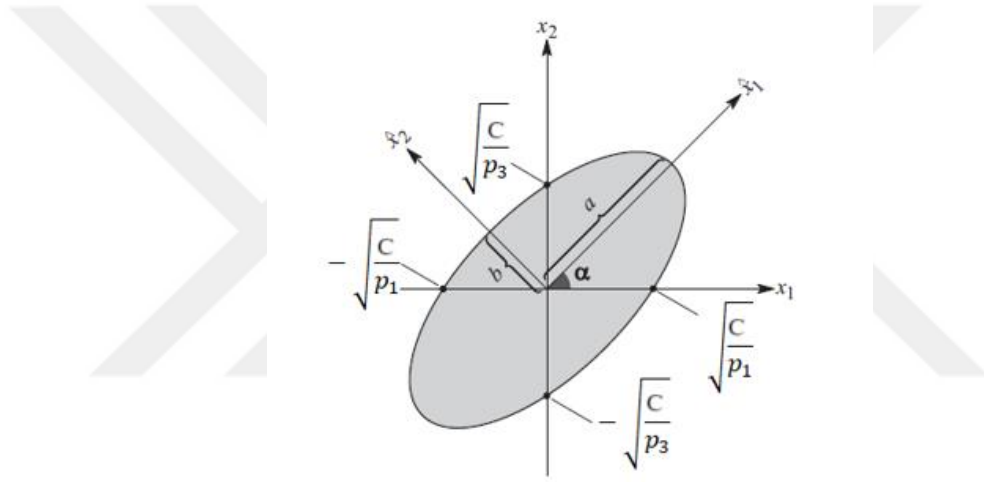
$$V(x) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad P = P^T > 0$$

$$= p_1 x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 \quad (4.27)$$

polinomu $x^* = 0$ bir denge noktası olan otonom bir sistem için uygun bir Lyapunov fonksiyonu olsun.

$$V(x) = p_1 x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 = C \quad (4.28)$$

denklemini Şekil 4.6'da gösterildiği gibi, $V(x) = C$ bir elips tanımlar.



Şekil 4.6. Fonksiyon $V(x) = C$ ile tanımlanan elips (Tibken, ve Dilaver, 2002).

(\hat{x}_1, \hat{x}_2) koordinat sisteminde elips (4.29) denkleminin tanımlanır.

$$\frac{\hat{x}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad (4.29)$$

(4.29) denkleminde a ve b pozitif sayılar olup, elipsin alan S (4.30) ifadesi ile hesaplanır (Leupold vd., 1991).

$$S = \pi a b \quad (4.30)$$

(4.29) denklemi, (4.31)'deki koordinat dönüşümü kullanılarak elde edilir (Bronstein vd., 2001).

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Ters dönüşüm (4.32)'de verilmiştir (Leupold vd., 1991).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Eşitlik (4.32)'deki x_1 değişkeni terimi $\cos \alpha \hat{x}_1 - \sin \alpha \hat{x}_2$ ve x_2 değişkeni terimi $\sin \alpha \hat{x}_1 + \cos \alpha \hat{x}_2$ ile değiştirildiğinde, (4.28)'deki Lyapunov fonksiyonu \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 değişkenlerine bağlı olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} V(\hat{x}) = & (p_1 \cos^2 \alpha + p_3 \sin^2 \alpha + p_2 \sin 2\alpha) \hat{x}_1^2 + \\ & (p_1 \sin^2 \alpha + p_3 \cos^2 \alpha - p_2 \sin 2\alpha) \hat{x}_2^2 + \\ & (p_3 \sin 2\alpha - p_1 \sin 2\alpha + 2 p_2 \cos 2\alpha) \hat{x}_1 \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.33)'de Lyapunov fonksiyonu \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 değişkenlerine bağlı olarak tanımlanmıştır.

(4.33)'deki Lyapunov fonksiyonunun (4.29)'daki elips denklemine eşit olabilmesi için $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2$ teriminin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$(p_3 - p_1) \sin 2\alpha + 2 p_2 \cos 2\alpha = 0 \quad (4.34)$$

(4.34) denkleminde α açısının değerinin

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2p_2}{p_1 - p_3}\right) \quad (4.35)$$

olması gerektiği bulunur. Eğer α , (4.35)'de bulunan değer seçilirse, o zaman

$$V(\hat{x}) = k_1 \hat{x}_1^2 + k_2 \hat{x}_2^2 = C \quad (4.36)$$

olacaktır. (4.36)'daki denklem (4.29)'dakine dönüştürüldüğünde

$$\frac{k_1}{C} \hat{x}_1^2 + \frac{k_2}{C} \hat{x}_2^2 = \frac{\hat{x}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{b^2} = 1 \quad (4.37)$$

elipsin a ve b sabitleri

$$a = \sqrt{\frac{C}{k_1}} \quad \text{ve} \quad b = \sqrt{\frac{C}{k_2}} \quad (4.38)$$

Elipsin alanı ise

$$S = \pi a b = \frac{\pi C}{\sqrt{k_1 k_2}} \quad (4.39)$$

olacaktır. (4.39) ifadesinde k_1 ve k_2 sabit sayılardır. (4.39) ifadesinden anlaşılacağı üzere, S alanı C değeri ile doğru orantılıdır.

(4.40)'daki gibi simetrik ve kesin pozitif tanımlı bir ($n \times n$) matris

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \ddots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Cholesky ayrıştırması yardımı ile (4.41)'de verilen biri diğerinin transpozu olan ($n \times n$) iki matrise bölünebilir (Horn, 1999; Schwarz, 1997; Stoer,1994).

$$P = L^T L \quad (4.41)$$

(4.41)'deki L matrisi (4.42)'de verilen üst üçgensel bir matristir.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Matris L'nin elemanları (4.43)'de verilen ifadelerle belirlenir (Schwarz, 1997; Stoer, 1994).

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{p_{11}} \\
l_{1j} &= \frac{p_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 2, \dots, n \\
l_{ii} &= \sqrt{\left(p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2\right)}, \quad i = 2, \dots, n \\
l_{ij} &= \frac{1}{l_{ii}} \left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.43}$$

L matrisi kullanılarak (4.20) sistemine

$$\hat{x} = L x \tag{4.44}$$

durum dönüşümü yapalım, burada \hat{x} yeni durum vektörüdür. \hat{x} 'ya bağlı sistemin yeni durum uzayı modeli (4.45)'te verilmiştir.

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}) = L f(L^{-1}\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0 = L x^0 \tag{4.45}$$

(4.45)'deki yeni durum uzayı modelinde de $\hat{x}^* = 0$ sistemin bir denge noktasıdır. (4.27)'de verilen Lyapunov fonksiyonu yeni durum vektörü cinsinden (4.46)'da ifade edilmiştir.

$$V(x) = x^T P x = x^T L^T L x = \hat{x}^T \hat{x} = \hat{V}(\hat{x}) \tag{4.46}$$

(4.46) ifadesinde Lyapunov fonksiyonu \hat{x} durum vektörü cinsinden en basit ikinci derece polinoma dönüşmüştür. C eşdeğer yüzeyi $V(x)$ fonksiyonu için n -boyutlu uzayda bir elipsoidi, $\hat{V}(\hat{x})$ fonksiyonu için ise n -boyutlu uzayda bir küreyi tanımlar (Schwarz, 1997; Stoer, 1994). Sistemin

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0 \tag{4.47}$$

yeni durum uzayı modeli için

$$\hat{\Omega}_C = \{\hat{x} \mid \hat{V}(\hat{x}) < C\}, \quad C > 0 \tag{4.48}$$

n boyutlu uzayda Lyapunov şartlarının sağlandığı küresel güvenli bir kararlılık bölgesi olsun. Bu kabul, $\widehat{\Omega}_C$ içinde başlayan her durum yörüngesinin $\widehat{\Omega}_C$ içinde kalacağı ve zamanla $\hat{x}^* = 0$ denge noktasında sonlanacağı anlamına gelir. Bu durum (4.49)'da matematiksel ifade edilmiştir (Schwarz, 1997; Stoer, 1994).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0 \quad \forall \hat{x}(t) \in \widehat{\Omega}_C \quad (4.49)$$

Dönüşüm matrisi L, $\widehat{\Omega}_C$ ve Ω_c güvenli kararlılık bölgeleri arasında lineer bir dönüşüm sağlar. Kararlılık bölgeleri arasındaki bu dönüşüm (4.50)'de matematiksel olarak anlatılmıştır.

$$\hat{x}(t) \in \widehat{\Omega}_C \Leftrightarrow x(t) = L^{-1} \hat{x}(t) \in \Omega_c \quad (4.50)$$

Eğer (4.49) ve (4.50) deki koşullar birlikte değerlendirilirse (4.51)'deki sonuç ortaya çıkar.

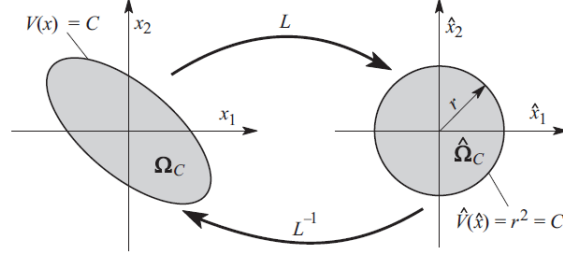
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = 0 & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} L x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_c \\ L \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_c \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(t) \in \Omega_c \quad (4.52)$$

(4.52) her bir durum yörüngesi $x(t)$ için Ω_c ellipsoidal bölgesinde geçerli olduğundan dolayı, (4.53)'deki gerçek sistem için Ω_c güvenli bir kararlılık bölgesi olacaktır.

$$\frac{d}{dt}x = f(x), \quad x(0) = x^0 \quad (4.53)$$

Şekil 4.7'de, güvence altına alınmış kararlılık bölgesi Ω_c ve $\widehat{\Omega}_C$ arasındaki ilişki iki boyutlu düzlemde grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.7. İki boyutlu düzlemde Ω_C ve $\hat{\Omega}_C$ arasındaki ilişki (Tibken, ve Dilaver, 2002).

(4.47)'deki sistemin asimptotik kararlılığı, Lyapunov'un kararlılık teorisi kullanılarak

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x} \quad (4.54)$$

Lyapunov fonksiyonu ile incelenebilir. $\hat{x}^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlı olması durumunda amaç, n-boyutlu uzaydaki küresel $\hat{\Omega}_C$ bölgesinin hacmini maksimize etmek ve bunun için gerekli olan C^* eşdeğer yüzey değerini belirlemektir. $\hat{\Omega}_C$ bölgesinin hacmini maksimize etmek, aralarındaki lineer ilişkiden dolayı Ω_C güvenli kararlılık bölgesinin hacmini de maksimize etmeyi sağlayacaktır. (4.54)'de tanımlanan Lyapunov fonksiyonu, güvenli kararlılık bölgesinin mevcudiyeti için gerekli olan üç koşulun ikisini doğrudan sağlar.

İlk koşul, $\hat{V}(\hat{x})$ fonksiyonunun ve gradyanının sürekli olmasıdır. İkinci koşul, $\hat{V}(\hat{x})$ 'in kesin pozitif tanımlı olması gerekliliğidir. Üçüncü ve en önemli koşul, $\hat{V}(\hat{x})$ 'in zamana bağlı türevinin kararlılık bölgesinde kesin negatif tanımlı olmasıdır. Bu üçüncü özellik sayesinde güvenli bir kararlılık bölgesi $\hat{\Omega}_C$ veya (4.54)'deki Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi $\hat{\Omega}_{C^*}$ hesaplanabilir. (4.54)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi (4.55)'de verilmiştir.

$$\dot{\hat{V}}(\hat{x}) = 2 \hat{x}^T \dot{\hat{x}} = 2 \hat{x}^T \hat{f}(\hat{x}) \quad (4.55)$$

(4.55)'deki polinom kararlılık bölgesinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. Başka bir deyişle

$$p(\hat{x}) = -\hat{V}(\hat{x}) \quad (4.56)$$

polinomu $\hat{\Omega}_c$ bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacak demektir. $p(\hat{x})$ polinomunun k . dereceden bir polinom olduğunu kabul edelim. Sonraki adımda, Ehlich ve Zeller Teoremi'nin (Ehlich ve Zeller,1964) uygulanmasından önce, kartezyen koordinatlarından küresel koordinatlara geçilecektir. Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara dönüşüm formülleri (4.57)'de verilmişlerdir.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ \hat{x}_2 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ \hat{x}_3 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ \hat{x}_i &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-i} \sin \theta_{n-i+1} \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= r \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

(4.57)'deki denklemlerde, r n -boyutlu kürenin yarıçapını ve θ_i , $i = 1, \dots, (n-1)$, açıları temsil ederler. (4.54)'deki Lyapunov fonksiyonunun küresel koordinatlardaki ifadesi

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{V}(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = r^2 \quad (4.58)$$

olacaktır. Kompakt bir gösterim için $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})^T$ ve $y = (r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})^T$ vektörlerini kullanalım. (4.56)'daki polinom, küresel koordinatlarda

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= p(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = p(r, \theta) = p(y) \\ &= a_1 r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_2 r^2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

şeklinde ifade edilecektir. Burada katsayılar a_i , $i = 2, \dots, k$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ açılarının fonksiyonlarıdır.

$$p(r, \theta) = a_1 r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_2 r^2 \quad (4.60)$$

polinomu $\widehat{\Omega}_C$ güvenli kararlılık bölgesinde kesin pozitif tanımlıdır. r yarıçap olduğundan pozitif değerli bir değişkendir. Maksimum r^* yarıçapını belirlemek amacıyla Gärtel'in (Gärtel,1987) çalışmasında ispatlamış olduğu (4.61) eşitsizliğinden yararlanacağız.

$$p_{\min}^{\hat{J}} \geq \frac{1}{2} \left\{ (K+1)p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})} - (K-1)p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})} \right\} \quad (4.61)$$

(4.61) eşitsizliğinde \hat{J} n-boyutlu uzayda kapalı ve sınırlı bir kompakt bölgeyi temsil eder. $x(\hat{N}, \hat{J})$, \hat{J} bölgesi içindeki Chebyshev noktalarından oluşan kümedir. ($p_{\min}^{\hat{J}}$), \hat{J} bölgesinde p fonksiyonunun minimumudur. $p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})}$ ve $p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})}$, p fonksiyonunun Chebyshev noktalarında alabileceği en küçük ve en büyük değerlerdir. K , (3.32) formülü ile hesaplanan sabit bir sayıdır. Eğer (4.61) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfırdan büyükse, ya da farklı bir ifadeyle,

$$(K+1)p_{\min}^{x(\hat{N},\hat{J})} - (K-1)p_{\max}^{x(\hat{N},\hat{J})} > 0 \quad (4.62)$$

oluyorsa, p fonksiyonunun n-boyutlu uzayda r yarıçaplı \hat{J} küresel bölgesindeki en küçük değerinin pozitif olduğu, başka bir deyişle p fonksiyonunun \hat{J} bölgesinde kesin pozitif tanımlı olduğu sonucuna varılır.

$$(K+1)p_{\min}^{y(\hat{N},\hat{J})} - (K-1)p_{\max}^{y(\hat{N},\hat{J})} > 0 \quad (4.63)$$

(4.62) eşitsizliğini (4.63)'deki şekilde yazılabilir. Burada $y(\hat{N}, \hat{J})$ n-boyutlu uzayda r yarıçaplı \hat{J} küresel bölgesindeki Chebyshev noktalarının kümesidir. (4.63) eşitsizliği $p(r, \theta)$ fonksiyonunun r yarıçaplı küresel bir bölgede kesin pozitif tanımlı olduğunu gösteren bir yeter koşuldur.

$p(r, \theta)$ fonksiyonunun n değişkeninden biri r yarıçapı, $(n-1)$ adedi ise açısız değişkenlerdir. Açısız değişkenlerden θ_1 açısı $[0, 2\pi]$ kapalı aralığında değer alırken, diğer açısız değişkenler $[0, \pi]$ kapalı aralığında değer alırlar. r değişkeninin Chebyshev noktaları, $[0, r]$ kapalı aralığında bulunurlar.

\hat{J} küresel bölgesindeki Chebyshev noktalarının toplam sayısı (4.64) formülü ile bulunur.

$$\hat{N} = \prod_{i=1}^n N_i \quad (4.64)$$

(4.64) formülünde N_i i . değişkene ait Chebyshev noktalarının sayısını temsil eder. Eğer (4.63) eşitsizliği sağlanıyorsa, (4.65) eşitsizlikleri de otomatikman sağlanacaktır.

$$(K + 1) p(y[i]) - (K - 1) p(y[j]) > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N} \quad (4.65)$$

$$p_{\min}^{y(\hat{N},j)} \leq p(y[i]) \leq p_{\max}^{y(\hat{N},j)}, \quad i = 1, \dots, j, \dots, \hat{N} \quad (4.66)$$

(4.65) eşitsizliğinde $y[i], y[j]$ r yarıçaplı \hat{J} küresel bölgesindeki, $y(\hat{N}, \hat{J})$ kümesine ait olan iki Chebyshev noktasını temsil etmektedirler. (4.65) eşitsizliği aslında birbirinden farklı \hat{N}^2 adet eşitsizliğin tek bir eşitsizlikle gösterimidir.

(4.63)'deki eşitsizlik kullanılarak, belli bir r yarıçapı için $p(r, \theta)$ fonksiyonunun r yarıçaplı \hat{J} küresel bölgesinde kesin pozitif tanımlı olup olmadığı test edilebilir. (4.63) şartının sağlanması bizi $p(\hat{x})$ polinomunun \hat{J} bölgesinde kesin pozitif tanımlı olduğu sonucuna vardırır.

$$(K + 1) p_{\min}^{y(\hat{N},j)} - (K - 1) p_{\max}^{y(\hat{N},j)} > 0 \Rightarrow p(r, \theta) = p(\hat{x}) > 0 \quad \forall x \in \hat{J} \quad (4.67)$$

Amaç (4.65) eşitsizliklerini kullanarak, maksimum eşdeğer yüzey C^* 'ı, maksimum yarıçap r^* 'ı bulma yoluyla belirlemektir. Çünkü tek başına (4.63) eşitsizliği maksimum yarıçap r^* 'ı bulmak için yetersiz kalacaktır.

$$\hat{J}_\theta = J_{\theta_1} \times J_{\theta_2} \times \dots \times J_{\theta_{n-1}} = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi] \quad (4.68)$$

açılar üzerinden tanımlı $n-1$ boyutlu uzaydaki dikdörtgensel kapalı bölgeyi gösterebiliriz. r yarıçapı için aralık belirlenmemiştir. Maksimum yarıçapı bulabilmek için r yarıçapı bilinmeyen bir parametre olarak kabul edilmiştir. (4.65) eşitsizliklerinin çözüm kümesi ile maksimum yarıçap için bir aralık belirlenebilir. Bu aralıktaki r değerleri için \hat{J} küresel bölgesinde, $p(r, \theta)$ polinomu kesin pozitif tanımlı olacaktır. Aralığın üst sınırı, maksimum yarıçap r^* için bir üst sınırdır. \hat{J} küresel bölgesindeki Chebyshev noktalarının

sayısı ne kadar arttırılırsa, r^* için bulunan üst sınır r^{*2} 'ın gerçek değerine o kadar yakın olacaktır. Daha sonra r^{*2} ile maksimum eşdeğer yüzey C^* belirlenir.

r yarıçapı bilinmeyen bir parametre olarak kabul edildiğinden, $p(r, \theta)$ fonksiyonu şimdi θ_i açılarından oluşan $(n - 1)$ adet değişkenden oluşacaktır. Açılar için \hat{J}_θ kapalı bölgesi bilindiğinden bu açılar için Chebyshev noktaları hesaplanabilir. Değişken sayısı azaldığından Chebyshev noktalarının toplam sayısı değişir ve toplam nokta sayısı (4.69)'daki formülle bulunur.

$$\hat{N}_\theta = \prod_{i=1}^{n-1} N_{\theta_i} \quad (4.69)$$

$p(r, \theta)$ fonksiyonu şimdi sadece açılardan oluşan ϑ_i Chebyshev noktalarında hesaplanır.

$$\begin{aligned} p(r, \vartheta_i) &= a_k^i r^k + a_{k-1}^i r^{k-1} + \dots + a_2^i r^2 \\ &= r^2 (a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \dots + a_2^i), \quad \vartheta_i \in \theta(\hat{N}, \hat{J}), \quad i = 1, \dots, \hat{N}_\theta \end{aligned} \quad (4.70)$$

(4.70) denkleminde, $\theta(\hat{N}, \hat{J})$ değişkenleri açılardan oluşan Chebyshev noktaları kümesini temsil eder. a_k^i katsayıları Chebyshev noktalarının fonksiyonlarıdır ve $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ Chebyshev noktaları bilindiğinden, her katsayı a_t^i , $t = 2, \dots, k$ bilinir ve sabittir. $p(r, \vartheta_i)$ polinomu Chebyshev noktalarında değişkeni yalnızca r yarıçapı olan k . dereceden tek değişkenli fonksiyona dönüşür.

(4.65) eşitsizlikleri (4.71)'deki matematiksel ifade ile verilebilir.

$$\begin{aligned} (K + 1) p(y_i) - (K - 1) p(y_j) &= (K + 1) p(r, \vartheta_i) - (K - 1) p(r, \vartheta_j) \\ &= (K + 1) (a_k^i r^k + a_{k-1}^i r^{k-1} + \dots + a_2^i r^2) \\ &\quad - (K - 1) (a_k^j r^k + a_{k-1}^j r^{k-1} + \dots + a_2^j r^2) \\ &= [(K + 1) a_k^i - (K - 1) a_k^j] r^k + [(K + 1) a_{k-1}^i - \\ &\quad (K - 1) a_{k-1}^j] r^{k-1} + \dots + [(K + 1) a_2^i - (K - 1) a_2^j] r^2 \\ &= a_k^{ij} r^k + a_{k-1}^{ij} r^{k-1} + \dots + a_2^{ij} r^2 \\ &= r^2 (a_k^{ij} r^{k-2} + a_{k-1}^{ij} r^{k-3} + \dots + a_2^{ij}) > 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

(4.71) eşitsizliklerinde a_k^{ij} terimleri

$$a_t^{ij} = (K + 1) a_t^i - (K - 1) a_t^j \quad , \quad t = 2, \dots, k \quad , \quad i, j = 1, \dots, \widehat{N}_\theta \quad (4.72)$$

ifadelerine karşılık gelmektedirler ve Chebyshev noktalarında tanımlandıkları için sabittirler.

(4.71) eşitsizliklerinde r^2 ($r \neq 0$) her zaman pozitif olacağından \widehat{N}_θ^2 adet olan bu eşitsizlikler (4.73)'te verilen eşitsizliklere dönüşürler.

$$a_k^{ij} r^{k-2} + a_{k-1}^{ij} r^{k-3} + \dots + a_2^{ij} > 0 \quad , \quad i, j = 1, \dots, \widehat{N}_\theta^2 \quad (4.73)$$

$p(r, \theta)$ fonksiyonunun n -boyutlu uzayda hangi r yarıçaplı küresel bölgede kesin pozitif tanımlı olduğunu belirlemek için önce tüm \widehat{N}_θ adet Chebyshev noktasında $p(r, \theta)$ fonksiyonunu pozitif yapacak r yarıçap değeri araştırılmalıdır. \widehat{N}_θ adet olan bu eşitsizlikler (4.75)'de verilmiştirler.

$$p(r, \vartheta_i) > 0 \Leftrightarrow a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \dots + a_2^i > 0 \quad (4.74)$$

$$a_k^i r^{k-2} + a_{k-1}^i r^{k-3} + \dots + a_2^i > 0 \quad , \quad i = 1, \dots, \widehat{N}_\theta \quad (4.75)$$

(4.75) eşitsizliklerinin çözüm kümesi $r \in [0, r^*] \setminus \{0\}$, küresel yapıdaki \widehat{J} güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r^* için bir üst sınır verecektir.

Eğer (4.75) eşitsizliklerinin çözüm kümesi boş küme ise, (4.23) polinomu (4.20) sistemi için uygun bir Lyapunov fonksiyonu değil demektir. (4.75) eşitsizlikleri maksimum yarıçap r^* için bir üst sınır verdiklerinden gerek koşulları oluştururlar. (4.75) eşitsizlikleri aynı zamanda (4.73) eşitsizliklerinden de türetilbilirler. ($i = j$) , yani $\theta_i = \theta_j$ olacağından (4.73) eşitsizlikleri (4.76) eşitsizliklerine dönüşürler.

$$(K + 1)p(r, \vartheta_i) - (K - 1)p(r, \vartheta_i) = 2p(r, \vartheta_i) > 0 \quad (4.76)$$

$$\Rightarrow p(r, \vartheta_i) > 0 \quad , \quad i = 1, \dots, \widehat{N}_\theta$$

(4.76)'daki her eşitsizliğin çözümü r^* yarıçapı için bir aralık belirler. (4.76) eşitsizliklerindeki i . eşitsizlik için çözüm aralığı aşağıdaki kapalı aralık olsun.

$$R_{dış}^i = [0, r_{dış}^i] \quad (4.77)$$

$R_{dış}^i$ kapalı aralığının üst sınırı $r_{dış}^i$, i . eşitsizliği sağlayan en küçük pozitif reel sayıdır. (4.76)'da verilen tüm \hat{N}_θ eşitsizliğin sağlandığı kapalı aralık, her bir eşitsizlik için bulunan kapalı aralıkların kesişim kümesidir ve bu küme (4.78)'de tanımlanmıştır.

$$R_{dış}^* = \bigcap_{i=1}^{\hat{N}_\theta} R_{dış}^i = [0, r_{dış}^*] \quad (4.78)$$

$R_{dış}^*$ kümesinin üst sınırı $r_{dış}^*$, $p(r, \theta)$ fonksiyonunun kesin pozitif tanımlı olduğu n -boyutlu uzaydaki küresel bölgenin maksimum yarıçapı r^* için bir üst sınırdır. Bu, şu anlama da gelir:

$$r^* \leq r_{dış}^* \quad (4.79)$$

(4.79)'da r^* maksimum yarıçapın gerçek değerini göstermektedir.

$$(K+1)p(r, \vartheta_i) - (K-1)p(r, \vartheta_j) = a_k^{ij} r^k + \dots + a_2^{ij} r^2 > 0, \quad i, j = 1, \dots, \hat{N}_\theta$$

$$\Rightarrow p(r, \theta) = p(\hat{x}) > 0, \quad \forall \hat{x} \in \hat{J} \quad (4.80)$$

(4.80)'de verilen \hat{N}_θ^2 adet eşitsizlik maksimum yarıçap r^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r^* için bir alt sınır verecektir. (4.80) eşitsizliklerindeki i . eşitsizlik için çözüm kümesi (4.81) kapalı aralığı olsun.

$$R_{iç}^i = [0, r_{iç}^i] \quad (4.81)$$

$R_{iç}^i$ kapalı aralığının üst sınırı $r_{iç}^i$, i . eşitsizliği sağlayan en küçük pozitif reel sayıdır. (4.80)'de verilen tüm \hat{N}_θ^2 eşitsizliğin sağlandığı kapalı aralık, her bir eşitsizlik için bulunan kapalı aralıkların kesişim kümesidir ve bu küme (4.82)'de tanımlanmıştır.

$$R_{iç}^* = \bigcap_{i=1}^{\tilde{N}_\theta^2} R_{iç}^i = [0, r_{iç}^*] \quad (4.82)$$

$R_{iç}^*$ kümesinin üst sınırı $r_{iç}^*$, $p(r, \theta)$ fonksiyonunun kesin pozitif tanımlı olduğu n -boyutlu uzaydaki küresel bölgenin maksimum yarıçapı r^* için bir alt sınırdır. Bu, şu anlama da gelir:

$$r_{iç}^* \leq r^* \quad (4.83)$$

Eğer (4.79) ve (4.83) eşitsizlikleri birleştirilirse, maksimum yarıçapı r^* (4.84)'deki aralıkta bulunacaktır sonucu ortaya çıkar.

$$r_{iç}^* \leq r^* \leq r_{dış}^* \quad (4.84)$$

(4.28)'deki Lyapunov fonksiyonunun maksimum C^* eşdeğer yüzeyinin bulunduğu aralık (4.85)'de verilmiştir.

$$C_{iç}^* \leq C^* \leq C_{dış}^* \quad (4.85)$$

$C^* = r^{*2}$ olduğundan (4.85)'deki alt ve üst sınırlar

$$C_{iç}^* = (r_{iç}^*)^2 \quad \text{ve} \quad C_{dış}^* = (r_{dış}^*)^2 \quad (4.86)$$

değerlerine sahip olacaklardır.

(4.23)'deki Lyapunov fonksiyonunun $C_{iç}^*$ eşdeğer yüzeyine göre tanımlanan

$$\Omega_{C_{iç}^*} = \{x \mid V(x) \leq C_{iç}^*\}, \quad C_{iç}^* > 0 \quad (4.87)$$

kümesi Chebyshev noktalarının sayısına bağlı olarak $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu için (4.20)'deki sistemin $x^* = 0$ denge noktasının n -boyutlu uzayda garanti altına alınmış en büyük elipsoidal güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

4.3.2 Örnek 4.3

Bu örnekte, örnek 4.1'deki otonom sistem durum uzayı denklemleri kullanılmıştır (Tibken, 2000; Tibken, ve Dilaver, 2002). Sistemin durum uzayı denklemleri (4.88)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (4.88)$$

(4.89)'daki 2. derece polinomu aday Lyapunov fonksiyonu seçilirse,

$$\begin{aligned}V(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P x \\ &= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.89)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (4.90)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır (Tibken, 2000; Tibken, ve Dilaver, 2002). Üst üçgen matris L'nin elemanları (4.43)'te tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir. Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (4.91)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L matrisi ile (4.92)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L x\quad (4.92)$$

L matrisi birim matris olduğundan, yeni durum vektörü \hat{x} ve sistem durum vektörü x özdeşdir. Dönüşümden sonra, ne sistemin (4.88)'deki durum uzay denklemleri ne de

(4.89)'daki Lyapunov fonksiyonu değişir. Bu nedenle, \hat{x} yerine x durum vektörünü kullanmaya devam edilebilir (Tibken, 2000; Tibken, ve Dilaver, 2002).

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (4.89)'daki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevini alındığında (4.93)'teki polinom oluşur.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x) &= 2 x^T \frac{d}{dt}x = 2 x^T f(x) \\ &= (2x_1 \quad 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2\end{aligned}\quad (4.93)$$

(4.93)'teki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_c içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt}V(x)$ polinomunun Ω_c içinde kesin negatif tanımlı olması

$$p(x) = -\frac{d}{dt}V(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 \quad (4.94)$$

polinomunun aynı Ω_c bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r \cos \theta_1 \quad x_2 = r \sin \theta_1 \quad (4.95)$$

dönüşümünü uygularırsa $p(x)$ polinomunun (4.96)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde edilir.

$$\begin{aligned}p(r, \theta_1) &= 2 r^2 \cos^2 \theta_1 + 2 r^2 \sin^2 \theta_1 - 2 r^4 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \\ p(r, \theta_1) &= -2 r^4 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 + 2r^2 \\ &= r^2 (-2 r^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 + 2)\end{aligned}\quad (4.96)$$

Bundan sonraki incelemede $p(r, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsunlar.

$p(r, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r^2 her zaman pozitif olacağından (4.97)'de verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_4^i r^2 + a_2^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (4.97)$$

(4.97) eşitsizliklerinde

$$a_4^i = -2\cos^2\vartheta_{1,i}\sin^2\vartheta_{1,i} \quad \text{ve} \quad a_2^i = 2 \quad (4.98)$$

değerlerini temsil ederler. (4.97) eşitsizliklerinin çözümünden (4.88)'deki sistemin (4.89)'da kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r^* için bir üst sınır olan $r_{dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1)p(r, \vartheta_{1,i}) - (K - 1)p(r, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (4.99)$$

(4.99)'de verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r^* için bir alt sınır olan $r_{iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 200 adet noktada (4.97) ve (4.99) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r^* için (4.100)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r^* \in [r_{iç}^*, r_{dış}^*] = [1.9991, 2.0001] \quad (4.100)$$

$$C^* = (r^*)^2 \quad (4.101)$$

olduğundan C^* eşdeğer yüzeyi (4.102)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

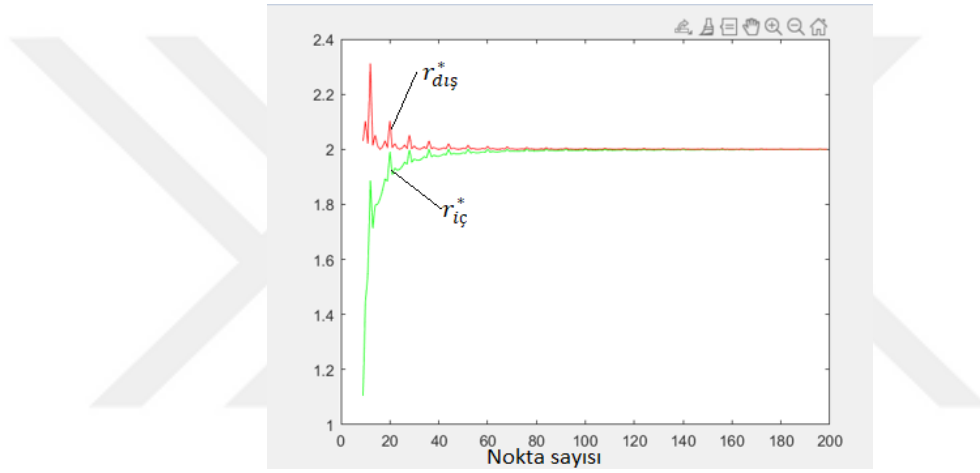
$$C^* \in [C_{iç}^*, C_{dış}^*] = [3.9963, 4.0002] \quad (4.102)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 200 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{c_{iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{iç}^* = 3.9963 \} \quad (4.103)$$

daresi (4.88) sistemi için (4.89)'daki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

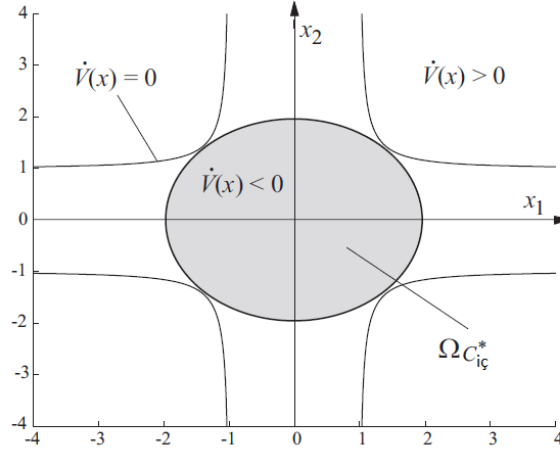
Şekil 4.8 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{iç}^*$ ve üst sınır $r_{dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 4.8. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r^* için alt ve üst sınırlar

Şekil 4.9'da θ_1 değişkeni için seçilen 30 adet nokta için (4.104)'de tanımlanan $\Omega_{c_{iç}^*}$ en büyük güvenli kararlılık bölgesi çizilmiştir. Bu bölge içinde (4.88)'deki durum uzay denklemleri tanımlanan sistem asimptotik kararlı olacaktır.

$$\Omega_{c_{iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{iç}^* = 3.8616 \} \quad (4.104)$$



Şekil 4.9. 30 adet nokta için en büyük güvenli kararlılık bölgesi

4.3.3 Örnek 4.4

Bu örnekte incelenecek otonom sistem durum uzayı denklemleri (4.105)'te verilmiştir (Chiang ve Thorp, 1989; Tesi vd., 1996; Tibken ve Dilaver, 2002).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (4.105)$$

(4.106)'daki 2. derece aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V(x) &= 0.33x_1^2 + 0.498x_1x_2 + 0.376x_2^2 \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0.33 & 0.249 \\ 0.249 & 0.376 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x^T P x \end{aligned} \quad (4.106)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.249 \\ 0.249 & 0.376 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak alt üçgen ve üst üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L'nin elemanları (4.43)'te tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L

$$L = \begin{pmatrix} 0.5745 & 0.4335 \\ 0 & 0.4337 \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

olacaktır. İkinci adımda, L matrisi ile (4.109)'da verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5745 & 0.4335 \\ 0 & 0.4337 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

dönüşümden sonra sistemin \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine bağlı (4.110)'daki durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= -\hat{x}_1 + 8.027 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 16.0465 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 8.0196 \hat{x}_2^3 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 \end{aligned} \quad (4.110)$$

(4.46) denkleminde anlaşılacağı üzere, durum dönüşümü Lyapunov fonksiyonunu yeni durum değişkenleri cinsinden (4.111)'deki yapıya çevirir.

$$\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{x} = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 \quad (4.111)$$

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (4.111)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevini aldığımızda (4.112)'deki polinom oluşur.

$$\begin{aligned} \hat{V}'(\hat{x}) &= 2 \hat{x}^T \frac{d}{dt} \hat{x} = 2 \hat{x}^T \hat{f}(\hat{x}) \\ &= (2\hat{x}_1 \quad 2\hat{x}_2) \begin{pmatrix} -\hat{x}_1 + 8.027 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 16.0465 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 8.0196 \hat{x}_2^3 \\ -\hat{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= 2 (-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - 16.0465 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 + 8.027 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 + 8.0196 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3) \end{aligned} \quad (4.112)$$

(4.112)'deki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi $\hat{\Omega}_C$ içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt}\hat{V}(\hat{x})$ polinomunun $\hat{\Omega}_C$ içinde kesin negatif tanımlı olması

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= -\hat{V}(\hat{x}) \\ &= 2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 16.0465 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - 8.027 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 8.0196 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3) \end{aligned} \quad (4.113)$$

polinomunun aynı $\hat{\Omega}_C$ bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$\hat{x}_1 = r \cos \theta_1, \quad \hat{x}_2 = r \sin \theta_1 \quad (4.114)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p(\hat{x})$ polinomunun (4.115)'te verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} p(r, \theta_1) &= 2(16.0465 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 - 8.027 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \\ &\quad - 8.0196 \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1) r^4 + 2 r^2 \\ &= \sin 2\theta_1 (8.0233 \sin 2\theta_1 - 8.027 \cos^2 \theta_1 - 8.0196 \sin^2 \theta_1) r^4 + 2 r^2 \\ &= r^2 [\sin 2\theta_1 (8.0233 \sin 2\theta_1 - 8.027 \cos^2 \theta_1 - 8.0196 \sin^2 \theta_1) r^2 + 2] \end{aligned} \quad (4.115)$$

Bundan sonraki incelemede $p(r, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\theta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p(r, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r^2 her zaman pozitif olacağından (4.116)'de verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_4^i r^2 + a_2^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (4.116)$$

(4.116) eşitsizliklerinde

$$a_4^i = \sin 2(\vartheta_{1,i}) (8.0233 \sin 2(\vartheta_{1,i}) - 8.027 \cos^2(\vartheta_{1,i}) - 8.0196 \sin^2(\vartheta_{1,i})) \quad (4.117)$$

$$a_2^i = 2 \quad (4.118)$$

değerlerini temsil ederler. (4.116) eşitsizliklerinin çözümünden (4.110)'daki sistemin (4.111)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonu ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r^* için bir üst sınır olan $r_{dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1)p(r, \vartheta_{1,i}) - (K - 1)p(r, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (4.119)$$

(4.119)'da verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r^* için yeter koşulları temsil ederler.

Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r^* için bir alt sınır olan $r_{iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 189 adet noktada (4.116) ve (4.119) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r^* için (4.120)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$[r_{iç}^*, r_{dış}^*] = [0.9933, 0.9983] \quad (4.120)$$

$$C^* = (r^*)^2 \quad (4.121)$$

olduğundan C^* eşdeğer yüzeyi (4.122)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

$$[C_{iç}^*, C_{dış}^*] = [0.9866, 0.9966] \quad (4.122)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 189 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{iç}^*} = \{x \mid V(x) = 0.33 x_1^2 + 0.498 x_1 x_2 + 0.376 x_2^2 \leq 0.9866\} \quad (4.123)$$

elipsin yüzeyi ve içi (4.105) sistemi için (4.106)'daki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

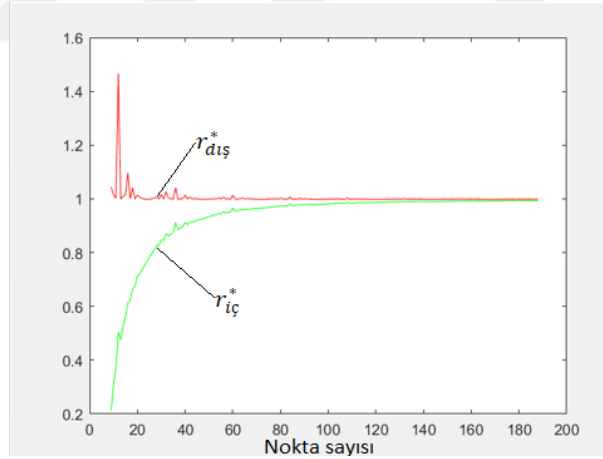
Şekil 4.10 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{iç}^*$ ve üst sınır $r_{dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.

Şekil 4.11'de θ_1 değişkeni için seçilen 40 adet nokta için (4.124)'de tanımlanan $\Omega_{C_{iç}^*}$ en büyük güvenli kararlılık bölgesi ve (4.116)'daki N_{θ_1} adet eşitsizliğin çözümü ile belirlenen ve (4.125)'te tanımlanan $\Omega_{C_{dış}^*}$ bölgesi çizilmiştir.

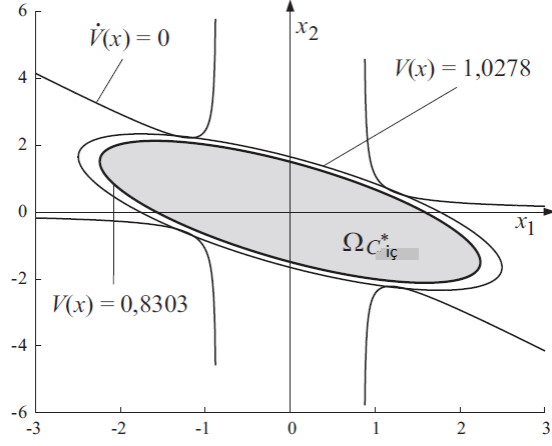
$$\Omega_{C_{iç}^*} = \{x \mid V(x) = 0.33 x_1^2 + 0.498 x_1 x_2 + 0.376 x_2^2 \leq 0.8303\} \quad (4.124)$$

ve alan

$$\Omega_{C_{dış}^*} = \{x \mid V(x) = 0.33 x_1^2 + 0.498 x_1 x_2 + 0.376 x_2^2 \leq 1.0278\} \quad (4.125)$$



Şekil 4.10. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r^* için üst ve alt sınırlar



Şekil 4.11. 40 adet nokta için en büyük güvenli kararlılık bölgesi $\Omega_{C_{ic}^*}$

Ellich ve Zeller teoremine dayanan algoritma, diğer algoritmalarından farklı olarak maksimum kararlılık bölgesi Ω 'nın sınırlarının gerçek değerinin belli bir aralıkta belirlenmesini sağlar ve tamamen lineer eşitsizliklere dayanır. Bu sebeple bu yöntem lineer programlama algoritmalarını kullanılmaya uygundur.

BÖLÜM V

POLİNOM YAPISINDAKİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERDE İKİNCİ DERECE LYAPUNOV FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BULUNABİLECEK MAKSİMUM GÜVENLİ KARARLILIK BÖLGESİ

Bu bölümde, 4. bölüm'de Ehlich ve Zeller teorisine dayalı oluşturulan nümerik optimizasyon yöntemini 2. dereceden olası bütün aday Lyapunov fonksiyonlarına uygulamak ve herbiri yardımıyla elde edilecek güvenli kararlılık bölgelerinin birleşim kümesini belli bir sistem için bulmak amaçlanmıştır. Bu sayede 2. derece Lyapunov fonksiyonları yardımıyla elde edilebilecek en geniş güvenli kararlılık bölgesinin belirlenecektir. Yapılan çalışma, dört farklı polinom yapısındaki lineer olmayan sistem üzerinden örneklendirilecektir. Verilen örneklerin hepsinde önce farklı 2 adet Lyapunov fonksiyonu için sistemin güvenli kararlılık bölgeleri belirlenecek ve gösterilecektir. Daha sonra 2. dereceden olası bütün aday Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla en geniş güvenli kararlılık bölgesi tespit edilecektir.

5.1 İkinci Derece Lyapunov Fonksiyonlarını Belirleme Yöntemi

İkinci dereceden Lyapunov fonksiyonlarını en genel biçimde

$$V(x) = p_1 x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonların aday Lyapunov fonksiyonları olabilmeleri için kesin pozitiflik şartını sağlamaları gerekir. Sylvester Teoremi'ne göre bu fonksiyonların kesin pozitif olmaları $p_1 > 0$ ve $p_1 \cdot p_3 > p_2^2$ şartlarının sağlanmasına bağlıdır.

Genellemeyi bozmayacak biçimde p_1 katsayı değerini $p_1 = 1$ alınabilir. Bu durumda aday Lyapunov fonksiyonlarının kesin pozitiflik şartı $p_3 > p_2^2$ eşitsizliğine indirgenir.

$$V(x) = x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 = C \quad (5.2)$$

a) Birinci Durum $\tan(2 \alpha^*) > 0$

Bu durumda $\tan(2 \alpha^*) = |\tan(2 \alpha^*)|$ alınabilir. Bu koşul altında ikinci derece eşitsizlik

$$|\tan(2 \alpha^*)| p_2^2 + 2 p_2 - |\tan(2 \alpha^*)| < 0 \quad (5.6)$$

olacaktır. (5.6) eşitsizliğinin sağlanması için p_2 katsayısı

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + |\tan(2 \alpha^*)|^2}}{|\tan(2 \alpha^*)|} < p_2 < \frac{-1 + \sqrt{1 + |\tan(2 \alpha^*)|^2}}{|\tan(2 \alpha^*)|} \quad (5.7)$$

aralığında bulunmalıdır.

b) İkinci Durum $\tan(2 \alpha^*) < 0$

Bu durumda $\tan(2 \alpha^*) = -|\tan(2 \alpha^*)|$ alınabilir. Bu koşul altında ikinci derece eşitsizlik

$$|\tan(2 \alpha^*)| p_2^2 - 2 p_2 - |\tan(2 \alpha^*)| < 0 \quad (5.8)$$

olacaktır. (5.8) eşitsizliğinin sağlanması için p_2 katsayısı

$$\frac{1 - \sqrt{1 + |\tan(2 \alpha^*)|^2}}{|\tan(2 \alpha^*)|} < p_2 < \frac{1 + \sqrt{1 + |\tan(2 \alpha^*)|^2}}{|\tan(2 \alpha^*)|} \quad (5.9)$$

aralığında bulunmalıdır.

(5.7) ve (5.9) aralıklarında bulunan herhangi bir p_2 değeri için p_3 katsayısı (5.4) ifadesi ile elde edilir. Böylece

$$V(x) = x_1^2 + 2p_2 x_1 x_2 + p_3 x_2^2 \quad (5.10)$$

kesin pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu kurulur. Bu Lyapunov fonksiyonu için 4. bölüm'de tanıtılan yöntemle $x^* = 0$ denge noktasının maksimum asimptotik kararlılık bölgesi belirlenir.

α^* açısı $[0, \pi]$ kapalı bölgesinde düzenli aralıklarla değiştirildiğinde ve p_2 katsayısı için (5.7) ve (5.9) aralıklarında belli sayıda değerler alındığında iki boyutlu düzlemde olası bütün ikinci derece Lyapunov fonksiyonları taranmış olur. Herbir Lyapunov fonksiyonu için bulunan kararlılık bölgelerinin birleşim kümesi verilen polinom yapısındaki bir sistem için ikinci derece Lyapunov fonksiyonları ile elde edilebilecek maksimum kararlılık alanını verecektir.

5.2 Örnekler

5.2.1 Örnek 5.1

Bu örnekte durum uzayı denklemleri (5.11)'de tanımlanan otonom sistem kullanılmıştır (Levin, 1994).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= -2x_1 + x_1x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 + x_1x_2\end{aligned}\tag{5.11}$$

a) (5.12)'deki 2. derece polinom 1. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned}V_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P_1 x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.12}$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{5.13}$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_1 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_1 matrisi ile (5.15)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_1 x \quad (5.15)$$

L_1 matrisi birim matris olduğundan, yeni durum vektörü \hat{x} ve sistem durum vektörü x özdeştir.

Dönüşümden sonra, ne sistemin (5.11)'deki durum uzay denklemleri ne de (5.12)'deki Lyapunov fonksiyonu değişir. Bu nedenle, \hat{x} yerine x durum vektörü kullanmaya devam edilebilir.

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.12)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevini alındığında (5.16)'daki polinom oluşur.

$$\frac{d}{dt} V_1(x) = 2 x^T f(x) = -4x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2^2 \quad (5.16)$$

(5.16)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_1(x)$ polinomunun Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$p_1(x) = -\frac{d}{dt} V_1(x) = 4x_1^2 - 2x_1^2x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2^2 \quad (5.17)$$

polinomunun aynı Ω_{C_1} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.18)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_1(x)$ polinomunun (5.19)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesi elde edilir.

$$p_1(r_1, \theta_1) = 2 r_1^2 (1 + \cos^2 \theta_1) - r_1^3 \sin 2\theta_1 [\cos \theta_1 + \sin \theta_1] \quad (5.19)$$

Bundan sonraki incelemede $p_1(r_1, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_1 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_1(r_1, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_1^2 her zaman pozitif olacağından (5.20)'da verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{1,3}^i r + a_{1,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.20)$$

(5.20) eşitsizliklerinde

$$a_{1,3}^i = -\sin 2\vartheta_{1,i} [\cos \vartheta_{1,i} + \sin \vartheta_{1,i}] \quad \text{ve} \quad a_{1,2}^i = 2(1 + \cos^2 \vartheta_{1,i}) \quad (5.21)$$

değerlerini temsil ederler. (5.20) eşitsizliklerinin çözümünden (5.11)'deki sistemin (5.12)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonunun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_1^* için bir üst sınır olan $r_{1,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,i}) - (K - 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.22)$$

(5.22)'de verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_1^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_1^* için bir alt sınır olan $r_{1,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 249 adet noktada (5.20) ve (5.22) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_1^* için (5.23)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_1^* \in [r_{1,iç}^*, r_{1,dış}^*] = [1.4218, 1.4228] \quad (5.23)$$

$$C_1^* = (r_1^*)^2 \quad (5.24)$$

olduğundan C_1^* eşdeğer yüzeyi (5.25)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

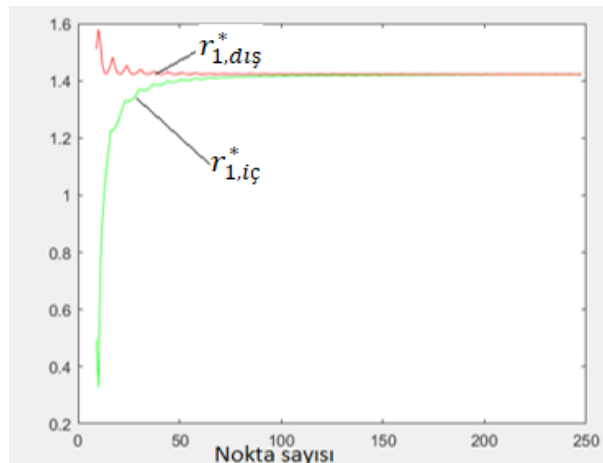
$$C_1^* \in [C_{1,iç}^*, C_{1,dış}^*] = [2.0216, 2.0244] \quad (5.25)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 249 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{1,iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{1,iç}^* = 2.0216\} \quad (5.26)$$

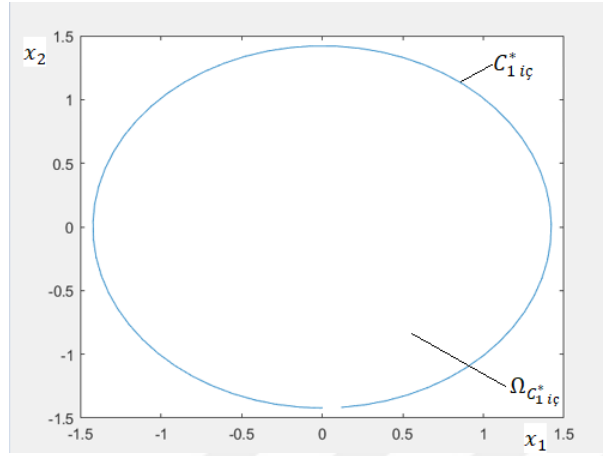
daresi (5.11) sistemi için (5.12)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.2 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{1,iç}^*$ ve üst sınır $r_{1,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.2. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için alt ve üst sınırlar

Şekil 5.3'de $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.11) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.



Şekil 5.3. 249 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

b) (5.27)'deki 2. derece polinom 2. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_2(x) &= 0.33x_1^2 + 0.498x_1x_2 + 0.376x_2^2 = x^T P x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.33 & 0.2490 \\ 0.2490 & 0.376 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.2490 \\ 0.2490 & 0.376 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_2 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.5745 & 0.4335 \\ 0 & 0.4337 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.30)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_2 x \quad (5.30)$$

İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.31)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5745 & 0.4335 \\ 0 & 0.4337 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

dönüşümden sonra sistemin \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine bağlı (5.32)'deki durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= -2.9995 \hat{x}_1 + 4.0455 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + 1.9991 \hat{x}_2 - 4.0437 \hat{x}_2^2 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 + 1.7406 \hat{x}_1 \hat{x}_2 - 1.7398 \hat{x}_2^2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.27)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine göre (5.33)'deki polinom oluşur.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(x) = 2 x^T f(x) &= -5.9990 \hat{x}_1^2 + 8.0910 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 + 3.9982 \hat{x}_1 \hat{x}_2 - 2 \hat{x}_2^2 - \\ &4.6062 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 - 3.4796 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.33)$$

(5.33)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_2(x)$ polinomunun Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olması.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{d}{dt} V_2(x) \\ &= 5.9990 \hat{x}_1^2 - 8.0910 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 3.9982 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + 2 \hat{x}_2^2 + 4.6062 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 3.4796 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.34)$$

polinomunun aynı Ω_{C_2} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_2 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_2 \sin \theta_1 \quad (5.35)$$

Dönüşümünü uygulanırsa $p_2(x)$ polinomunun (5.36)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde edilir.

$$p_2(r_2, \theta_1) = [5.9996 \cos^2 \theta_1 - 3.9982 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + 2 \sin^2 \theta_1] r_2^2 + [-8.0910 \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1 + 3.4796 \sin^3 \theta_1] r_2^3 \quad (5.36)$$

Bundan sonraki incelemede $p_2(r_2, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_2 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{2,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_2(r_2, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_2^2 her zaman pozitif olacağından (5.37)'de verilen N_{θ_2} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{2,3}^i r + a_{2,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_2} \quad (5.37)$$

(5.37) eşitsizliklerinde

$$a_{2,3}^i = -8.0910 \cos^2 \vartheta_{2,i} \sin \vartheta_{2,i} + 3.4796 \sin^3 \vartheta_{2,i} \quad (5.38)$$

$$a_{2,2}^i = 5.9996 \cos^2 \vartheta_{2,i} - 3.9982 \cos \vartheta_{2,i} \sin \vartheta_{2,i} + 2 \sin^2 \vartheta_{2,i} \quad (5.39)$$

değerlerini temsil ederler. (5.37) eşitsizliklerinin çözümünden (5.11)'deki sistemin (5.27)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_2^* için bir üst sınır olan $r_{2,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,i}) - (K - 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.40)$$

(5.40)'da verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_2^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_2^* için bir alt sınır olan $r_{2,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 277 adet noktada (5.37) ve (5.40) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_2^* için (5.38)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_2^* \in [r_{2,iç}^*, r_{2,dış}^*] = [0.6812, 0.6822] \quad (5.41)$$

$$C_2^* = (r_2^*)^2 \quad (5.42)$$

olduğundan C_2^* eşdeğer yüzeyi (5.43)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

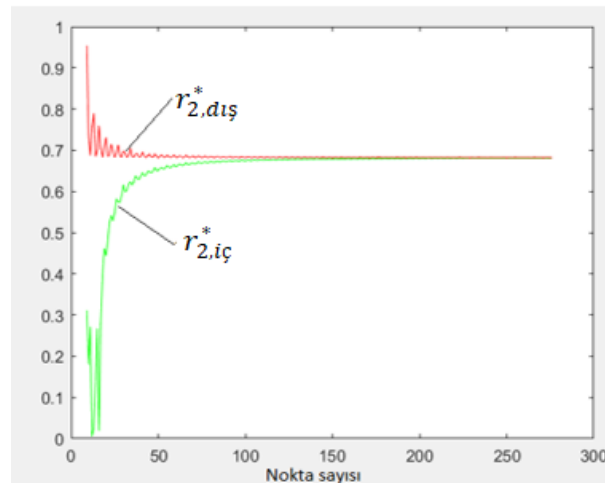
$$C_2^* \in [C_{2,iç}^*, C_{2,dış}^*] = [0.4641, 0.4654] \quad (5.43)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 277 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{2,iç}^*} = \{x \mid V_2(x) = 0.33x_1^2 + 0.498x_1x_2 + 0.376x_2^2 \leq C_{2,iç}^* = 0.4641\} \quad (5.44)$$

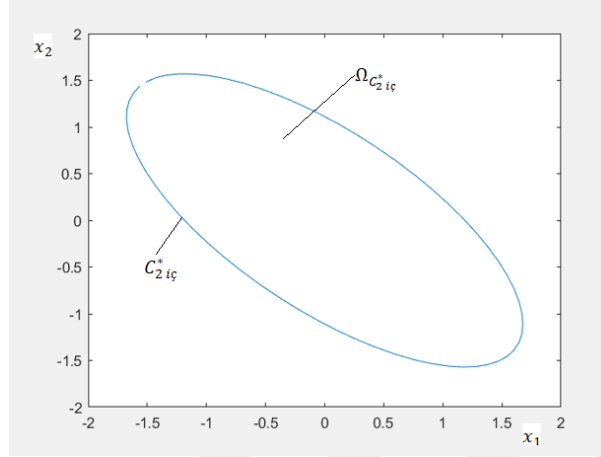
elipsi (5.11) sistemi için (5.27)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.4 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{2,iç}^*$ ve üst sınır $r_{2,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.4. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.5’de $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.11) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.

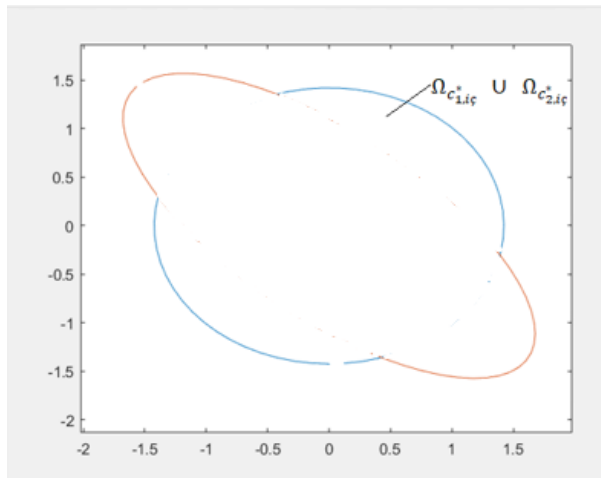


Şekil 5.5. 277 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

$\Omega_{C_{1,iç}^*}$ ve $\Omega_{C_{2,iç}^*}$ bölgelerinin her biri farklı Lyapunov fonksiyonlarıyla bulunan en büyük güvenli kararlılık bölgeleri olduklarından bunların birleşimlerinden oluşacak bölge de $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi oluşturulacaktır.

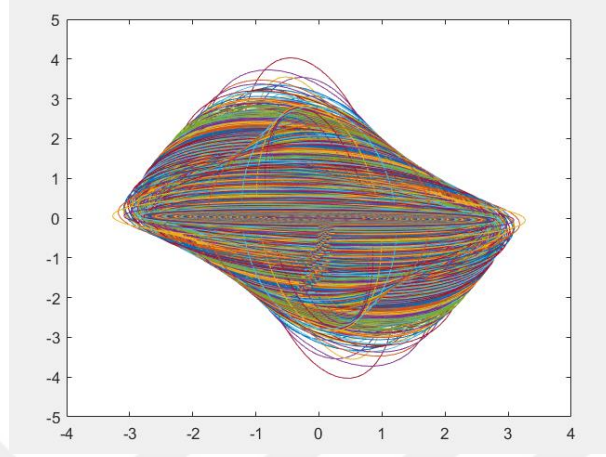
$$\Omega_{C_{1,iç}^*} \cup \Omega_{C_{2,iç}^*} \quad (5.45)$$

bölgesi Şekil 5.6’de gösterilmiştir.



Şekil 5.6. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi

Şekil 5.7.'de $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ aralığında α^* açısını değeri değiştirilmesiyle elde edilen 18000 adet 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonunun kullanımıyla $x^* = 0$ denge noktası etrafında elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi gösterilmiştir.



Şekil 5.7. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi

5.2.2 Örnek 5.2

Bu örnekte durum uzayı denklemleri (5.46)'de tanımlanan otonom sistem kullanılmıştır (Levin, 1994).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

a) (5.47)'deki 2. derece polinom 1. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P_1 x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_1 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_1 matrisi ile (4.50)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_1 x \quad (5.50)$$

L_1 matrisi birim matris olduğundan, yeni durum vektörü \hat{x} ve sistem durum vektörü x özdeşdir. Dönüşümden sonra, ne sistemin (5.46)'deki durum uzay denklemleri ne de (5.47)'deki Lyapunov fonksiyonu değişir. Bu nedenle, \hat{x} yerine x durum vektörü kullanılmaya devam edilebilir.

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.47)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında (5.51)'daki polinom oluşur.

$$\frac{d}{dt} V_1(x) = 2 x^T f(x) = -2x_1^2 + 4x_1^3x_2 - 2x_2^2 \quad (5.51)$$

(5.51)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_1(x)$ polinomunun Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$p_1(x) = -\frac{d}{dt} V_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1^3x_2 \quad (5.52)$$

polinomunun aynı Ω_{C_1} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.53)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_1(x)$ polinomunun (5.54)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde edebilir.

$$p_1(r_1, \theta_1) = 2 r_1^2 - 2 r_1^4 \sin 2\theta_1 \cos^2 \theta_1 \quad (5.54)$$

Bundan sonraki incelemede $p_1(r_1, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_1 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_1(r_1, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_1^2 her zaman pozitif olacağından (5.55)'da verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{1,3}^i r + a_{1,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.55)$$

(5.55) eşitsizliklerinde

$$a_{1,3}^i = \sin 2\vartheta_{1,i} \cos^2 \vartheta_{1,i} \quad \text{ve} \quad a_{1,2}^i = 1 \quad (5.56)$$

değerlerini temsil ederler. (5.55) eşitsizliklerinin çözümünden (5.46)'deki sistemin (5.47)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonunun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_1^* için bir üst sınır olan $r_{1,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,i}) - (K - 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.57)$$

(5.57)'de verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_1^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_1^* için bir alt sınır olan $r_{1,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 223 adet noktada (5.55) ve (5.57) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_1^* için (5.58)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_1^* \in [r_{1,iç}^*, r_{1,dış}^*] = [1.2403, 1.2413] \quad (5.58)$$

$$C_1^* = (r_1^*)^2 \quad (5.59)$$

olduğundan C_1^* eşdeğer yüzeyi (5.60)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

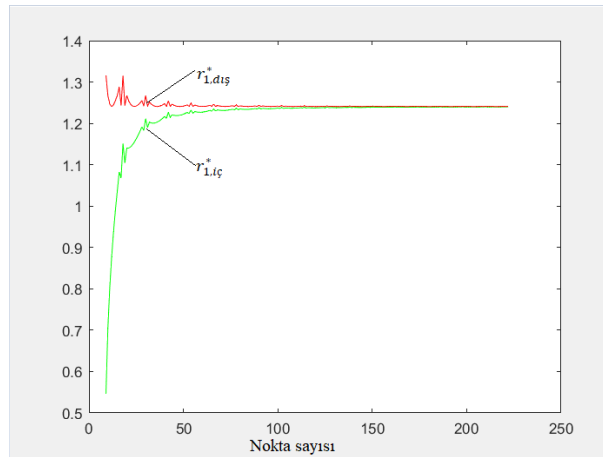
$$C_1^* \in [C_{1,iç}^*, C_{1,dış}^*] = [1.5384, 1.5408] \quad (5.60)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 223 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{1,iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{1,iç}^* = 1.5384\} \quad (5.61)$$

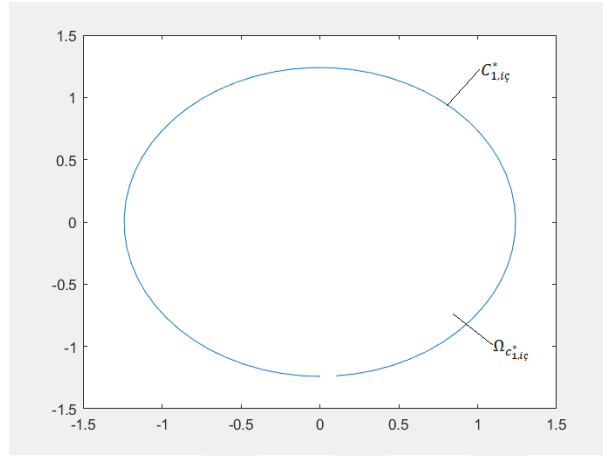
daresi (5.46) sistemi için (5.47)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.8 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{1,iç}^*$ ve üst sınır $r_{1,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.8. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için alt ve üst sınırlar

Şekil 5.9'de $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.46) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.



Şekil 5.9. 223 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

b) (5.62)'deki 2. derece polinom 2. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_2(x) &= x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 = x^T P x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_2 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.65)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_2 x \quad (5.65)$$

İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.65)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

dönüşümden sonra sistemin \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine bağlı (5.67)'daki durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= -\hat{x}_1 + 2.6490 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 5.2943 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 2.6471 \hat{x}_2^3 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.62)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine göre (5.68)'deki polinom oluşur.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(x) &= 2 x^T f(x) \\ &= -2\hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_2^2 + 5.2980 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 10.5886 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 + 5.2942 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.68)$$

(5.68)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_2(x)$ polinomunun Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{d}{dt} V_2(x) \\ &= 2\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_2^2 - 5.2980 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 + 10.5886 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - 5.2942 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.69)$$

polinomunun aynı Ω_{C_2} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_2 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_2 \sin \theta_1 \quad (5.70)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_2(x)$ polinomunun (5.71)'de verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesini elde edilir.

$$p_2(r_2, \theta_1) = 2r^2 + [-2.6490 \cos^2 \theta_1 \sin 2\theta_1 - 2.6471 \sin^2 \theta_1 \sin 2\theta + 2.6471 \sin^2 2\theta_1] r^4 \quad (5.71)$$

Bundan sonraki incelemede $p_2(r_2, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkinden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_2 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{2,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun. $p_2(r_2, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_2^2 her zaman pozitif olacağından (5.72)'da verilen N_{θ_2} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{2,3}^i r + a_{2,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_2} \quad (5.72)$$

(5.72) eşitsizliklerinde

$$a_{2,3}^i = -2.6490 \cos^2 \theta_1 \sin 2\theta_1 - 2.6471 \sin^2 \theta_1 \sin 2\theta + 2.6471 \sin^2 2\theta_1 \quad (5.73)$$

$$a_{2,2}^i = 2 \quad (5.74)$$

değerlerini temsil ederler. (5.72) eşitsizliklerinin çözümlerinden (5.46)'deki sistemin (5.62)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_2^* için bir üst sınır olan $r_{2,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,i}) - (K - 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.75)$$

(5.75)'da verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_2^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözümlerinin kümesi maksimum yarıçap r_2^* için bir alt sınır olan $r_{2,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 195 adet noktada (5.72) ve (5.75) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_2^* için (5.76)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_2^* \in [r_{2,iç}^*, r_{2,dış}^*] = [0.8688, 0.8698] \quad (5.76)$$

$$C_2^* = (r_2^*)^2 \quad (5.77)$$

olduğundan C_2^* eşdeğer yüzeyi (5.78)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

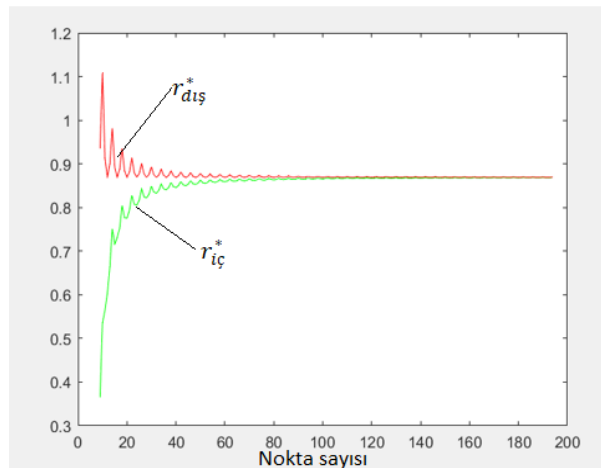
$$C_2^* \in [C_{2,iç}^*, C_{2,dış}^*] = [0.7548, 0.7565] \quad (5.78)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 195 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{2,iç}^*} = \{x \mid V_2(x) = x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 \leq C_{2,iç}^* = 0.7548\} \quad (5.79)$$

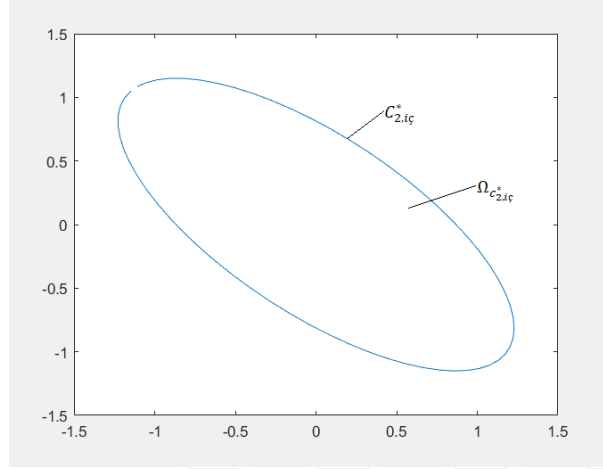
elipsi (5.46) sistemi için (5.62)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.10 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{2,iç}^*$ ve üst sınır $r_{2,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.10. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.11’de $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.46) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.

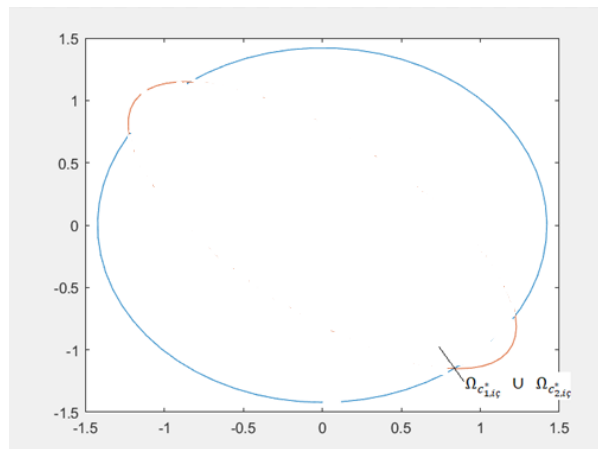


Şekil 5.11. 195 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

$\Omega_{c_{1,iç}^*}$ ve $\Omega_{c_{2,iç}^*}$ bölgelerinin her biri farklı Lyapunov fonksiyonlarıyla bulunan en büyük güvenli kararlılık bölgeleri olduklarından bunların birleşimlerinden oluşacak bölge de $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi oluşturulacaktır.

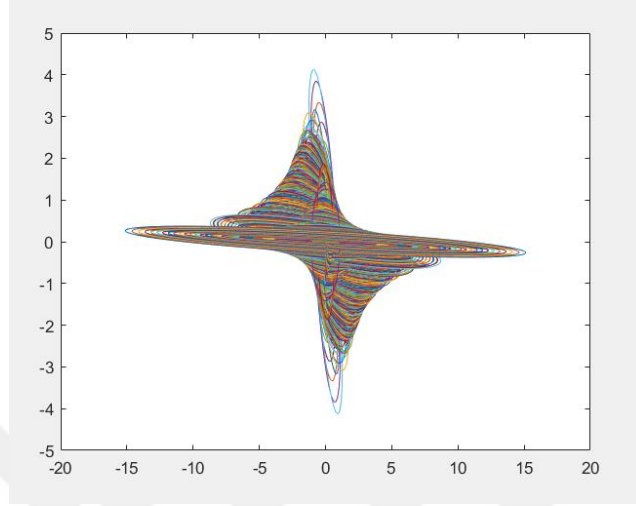
$$\Omega_{c_{1,iç}^*} \cup \Omega_{c_{2,iç}^*} \quad (5.80)$$

bölgesi Şekil 5.12’de gösterilmiştir.



Şekil 5.12. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi

Şekil 5.13'ta $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ aralığında α^* açısını değiştirilmesiyle elde edilen 9000 adet 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonunun kullanımıyla $x^* = 0$ denge noktası etrafında elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi gösterilmiştir.



Şekil 5.13. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi

5.2.3 Örnek 5.3

Bu örnekte durum uzayı denklemleri (5.81)'de tanımlanan otonom sistem kullanılmıştır (Levin, 1994).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 + x_1x_2^2 + x_1^3 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 + x_1^2x_2 + x_2^3 \end{aligned} \quad (5.81)$$

a) (5.82)'deki 2. derece polinomu 1. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P_1 x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_1 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir.

Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_1 matrisi ile (5.85)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_1 x \quad (5.85)$$

L_1 matrisi birim matris olduğundan, yeni durum vektörü \hat{x} ve sistem durum vektörü x özdeşdir.

Dönüşümden sonra, ne sistemin (5.81)'deki durum uzay denklemleri ne de (5.82)'deki Lyapunov fonksiyonu değişir. Bu nedenle, \hat{x} yerine x durum vektörü kullanmaya devam edebilir.

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.82)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında (5.86)'daki polinom oluşur.

$$\frac{d}{dt} V_1(x) = 2 x^T f(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1^2x_2^2 + 2x_1^4 + 2x_2^4 \quad (5.86)$$

(5.86)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_1(x)$ polinomunun Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$p_1(x) = -\frac{d}{dt} V_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 \quad (5.87)$$

polinomunun aynı Ω_{C_1} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.88)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_1(x)$ polinomunun (5.89)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesi elde edilir.

$$p_1(r_1, \theta_1) = r_1^2 + r_1^4 (-\cos^2\theta_1 \sin^2\theta_1 - \cos^4\theta_1 - \sin^4\theta_1) \quad (5.89)$$

Bundan sonraki incelemede $p_1(r_1, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_1 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_1(r_1, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_1^2 her zaman pozitif olacağından (5.90)'da verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{1,4}^i r_1^2 + a_{1,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.90)$$

(5.90) eşitsizliklerinde

$$a_{1,4}^i = -\cos^2\theta_1 \sin^2\theta_1 - \cos^4\theta_1 - \sin^4\theta_1 \quad \text{ve} \quad a_{1,2}^i = 1 \quad (5.91)$$

değerlerini temsil ederler. (5.90) eşitsizliklerinin çözümünden (5.81)'deki sistemin (5.82)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonunun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_1^* için bir üst sınır olan $r_{1,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,i}) - (K - 1) p_1(r_1, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.92)$$

(5.92)'de verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_1^* için yeter koşulları temsil ederler.

Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_1^* için bir alt sınır olan $r_{1,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 88 adet noktada (5.90) ve (5.92) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_1^* için (5.93)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_1^* \in [r_{1,iç}^*, r_{1,dış}^*] = [0.9991, 1] \quad (5.93)$$

$$C_1^* = (r_1^*)^2 \quad (5.94)$$

olduğundan C_1^* eşdeğer yüzeyi (5.95)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

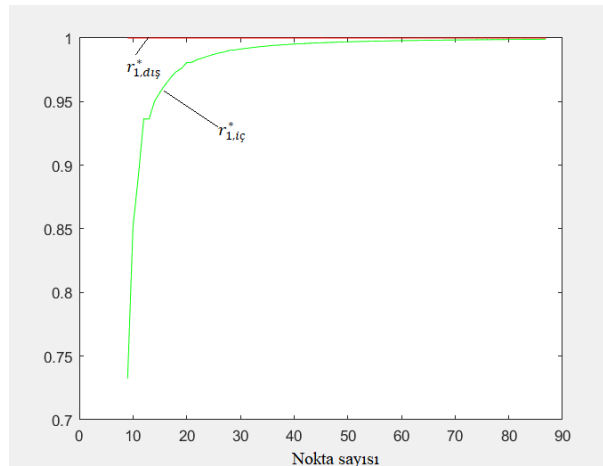
$$C_1^* \in [C_{1,iç}^*, C_{1,dış}^*] = [0.9980, 1] \quad (5.95)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 88 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{1,iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{1,iç}^* = 0.9980\} \quad (5.96)$$

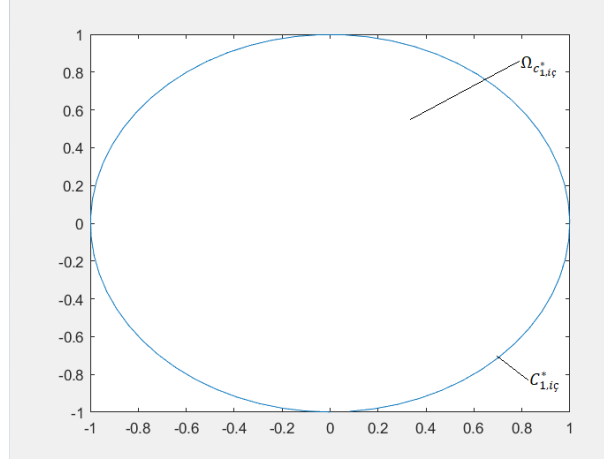
daresi (5.81) sistemi için (5.82)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.14 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{1,iç}^*$ ve üst sınır $r_{1,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.14. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.15'de $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.81) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.



Şekil 5.15. 88 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

b) (5.97)'deki 2. derece polinomu 2. aday Lyapunov fonksiyonu seçelim.

$$\begin{aligned}
 V_2(x) &= x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 = x^T P x \\
 &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \tag{5.98}$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_2 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir. Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \tag{5.99}$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.100)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_2 x \tag{5.100}$$

İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.100)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

dönüşümden sonra sistemin \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine bağlı (5.102)'daki durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= -\hat{x}_1 - 1.9986 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 + 2.755 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + \hat{x}_1^3 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 1.9986 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 2.7529 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.102)$$

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.97)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine göre (5.103)'deki polinom oluşur.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(x) &= 2 x^T f(x) \\ &= -\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - 0.9986 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 + 3.755 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 + \hat{x}_1^4 - 1.9986 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 + 2.7529 \hat{x}_2^4 \end{aligned} \quad (5.103)$$

(5.103)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_2(x)$ polinomunun Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{d}{dt} V_2(x) \\ &= \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 0.9986 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 3.755 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1^4 + 1.9986 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 - 2.7529 \hat{x}_2^4 \end{aligned} \quad (5.104)$$

polinomunun aynı Ω_{C_2} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_2 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_2 \sin \theta_1 \quad (5.105)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_2(x)$ polinomunun (5.106)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} p_2(r_2, \theta_1) &= r^2 + [0.9986 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 - 3.755 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \cos^4 \theta_1 + \\ & 1.9986 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 - 2.7529 \sin^4 \theta_1] r^4 \end{aligned} \quad (5.106)$$

Bundan sonraki incelemede $p_2(r_2, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişikenden θ_1 değişikeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_2 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{2,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_2(r_2, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_2^2 her zaman pozitif olacağından (5.107)'da verilen N_{θ_2} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{2,3}^i r + a_{2,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_2} \quad (5.107)$$

(5.107) eşitsizliklerinde

$$a_{2,3}^i = 0.9986 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 - 3.755 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \cos^4 \theta_1 + 1.9986 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 - 2.7529 \sin^4 \theta_1 \quad (5.108)$$

$$a_{2,2}^i = 1 \quad (5.109)$$

değerlerini temsil ederler. (5.107) eşitsizliklerinin çözümünden (5.81)'deki sistemin (5.97)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_2^* için bir üst sınır olan $r_{2,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,i}) - (K - 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.110)$$

(5.110)'da verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_2^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_2^* için bir alt sınır olan $r_{2,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 92 adet noktada (5.107) ve (5.110) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_2^* için (5.111)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_2^* \in [r_{2,iç}^*, r_{2,dış}^*] = [0.5621, 0.5631] \quad (5.111)$$

$$C_2^* = (r_2^*)^2 \quad (5.112)$$

olduğundan C_2^* eşdeğer yüzeyi (5.113)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

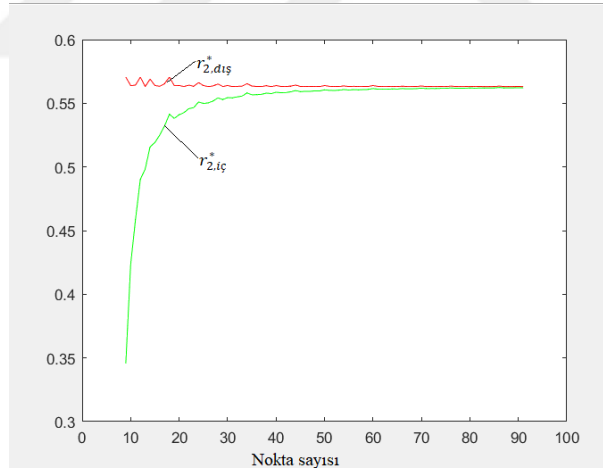
$$C_2^* \in [C_{2,iç}^*, C_{2,dış}^*] = [0.3160, 0.3171] \quad (5.113)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 92 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{2,iç}^*} = \{x \mid V_2(x) = x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 \leq C_{2,iç}^* = 0.3160\} \quad (5.114)$$

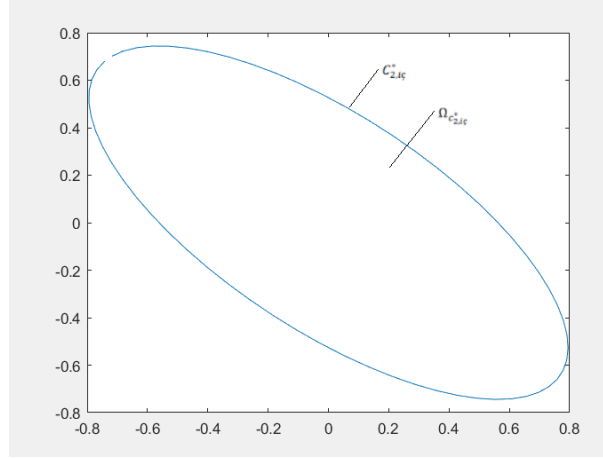
elipsi (5.81) sistemi için (5.97)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.16 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{2,iç}^*$ ve üst sınır $r_{2,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.16. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.17'de $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.81) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.

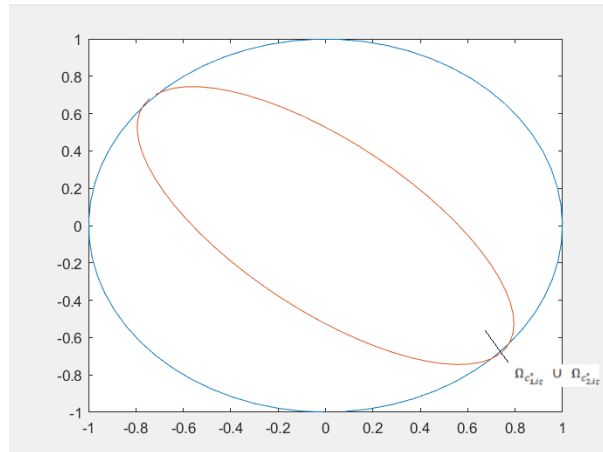


Şekil 5.17. 92 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

$\Omega_{c_{1,iç}^*}$ ve $\Omega_{c_{2,iç}^*}$ bölgelerinin her biri farklı Lyapunov fonksiyonlarıyla bulunan en büyük güvenli kararlılık bölgeleri olduklarından bunların birleşimlerinden oluşacak bölge de $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi oluşturulacaktır.

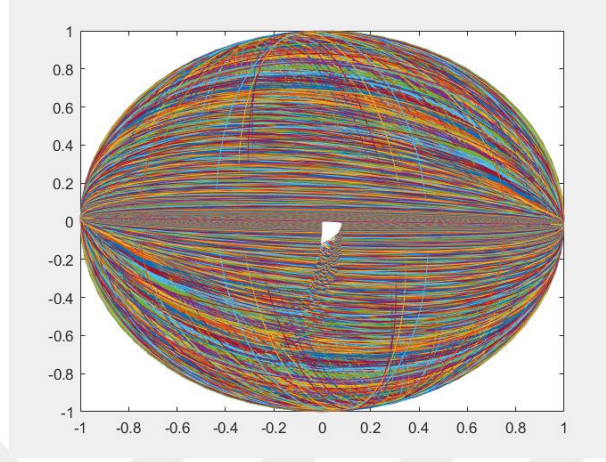
$$\Omega_{c_{1,iç}^*} \cup \Omega_{c_{2,iç}^*} \quad (5.115)$$

bölgesi Şekil 5.18’de gösterilmiştir.



Şekil 5.18. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi

Şekil 5.19’da $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ aralığında α^* açısını değeri değiştirilmesiyle elde edilen 18000 adet 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonu kullanımıyla $x^* = 0$ denge noktası etrafında elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi gösterilmiştir.



Şekil 5.19. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi

5.2.4 Örnek 5.4

Bu örnekte durum uzayı denklemleri (5.116)’de tanımlanan otonom sistem kullanılmıştır (Levin, 1994).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 + x_1^2x_2 \end{aligned} \quad (5.116)$$

a) (5.117)’deki 2. derece polinomu 1. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 = x^T P_1 x \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.117)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_1 'nin elemanları (4.43)'de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir. Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_1 matrisi ile (5.120)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_1 x \quad (5.120)$$

L_1 matrisi birim matris olduğundan, yeni durum vektörü \hat{x} ve sistem durum vektörü x özdeşdir.

Dönüşümden sonra, ne sistemin (5.116)'deki durum uzay denklemleri ne de (5.117)'deki Lyapunov fonksiyonu değişir. Bu nedenle, \hat{x} yerine x durum vektörü kullanmaya devam edilebilir.

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.117)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevini aldığımızda (5.121)'daki polinom oluşur.

$$\frac{d}{dt} V_1(x) = 2 x^T f(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 \quad (5.121)$$

(5.121)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_1(x)$ polinomunun Ω_{C_1} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$p_1(x) = -\frac{d}{dt} V_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1^2x_2^2 \quad (5.122)$$

polinomunun aynı Ω_{C_1} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.123)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_1(x)$ polinomunun (5.124)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesi elde edilir.

$$p_1(r_1, \theta_1) = -r^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 + 1 \quad (5.124)$$

Bundan sonraki incelemede $p_1(r_1, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_1 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{1,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun. $p_1(r_1, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_1^2 her zaman pozitif olacağından (5.125)'de verilen N_{θ_1} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{1,4}^i r_1^2 + a_{1,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.125)$$

(5.125) eşitsizliklerinde

$$a_{1,4}^i = -\cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \quad \text{ve} \quad a_{1,2}^i = 1 \quad (5.126)$$

değerlerini temsil ederler. (5.125) eşitsizliklerinin çözümünden (5.116)'deki sistemin (5.117)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_1^* için bir üst sınır olan $r_{1,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K+1) p_1(r_1, \vartheta_{1,i}) - (K-1) p_1(r_1, \vartheta_{1,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.127)$$

(5.127)'de verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_1^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_1^* için bir alt sınır olan $r_{1,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 200 adet noktada (5.125) ve (5.127) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_1^* için (5.128)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_1^* \in [r_{1,iç}^*, r_{1,dış}^*] = [1.9991, 2.0001] \quad (5.128)$$

$$C_1^* = (r_1^*)^2 \quad (5.129)$$

olduğundan C_1^* eşdeğer yüzeyi (5.130)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

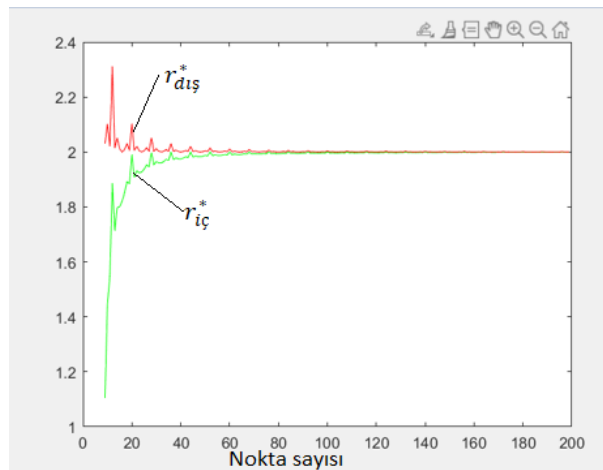
$$C_1^* \in [C_{1,iç}^*, C_{1,dış}^*] = [3.9963, 4.0002] \quad (5.130)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 200 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{1,iç}^*} = \{x \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq C_{1,iç}^* = 3.9963\} \quad (5.131)$$

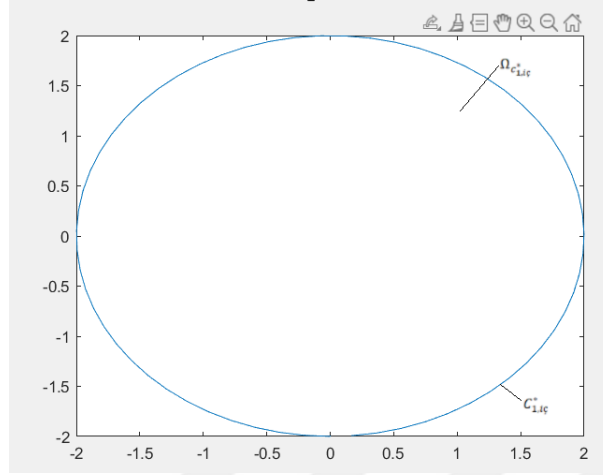
daresi (5.116) sistemi için (5.117)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.20 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{1,iç}^*$ ve üst sınır $r_{1,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.20. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_1^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.21’de $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.116) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.



Şekil 5.21. 200 adet nokta için $V_1(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

b) (5.132)’deki 2. derece polinom 2. aday Lyapunov fonksiyonu seçilmiştir.

$$\begin{aligned} V_2(x) &= x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 = x^T P x \\ &= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Simetrik ve kesin pozitif tanımlı

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0.7545 & 1.13939 \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

matrisi Cholesky ayrıştırması kullanılarak üst üçgen ve alt üçgen matrislere ayrılır. Üst üçgen matris L_2 'nin elemanları (4.43)’de tanımlanan Cholesky ayrıştırması formülleri ile belirlenir. Hesaplamalardan sonra, üst üçgen matris L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

olarak oluşur. İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.135)’de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\hat{x} = L_2 x \quad (5.135)$$

İkinci adımda, L_2 matrisi ile (5.135)'de verilen durum dönüşümü yapılır.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7545 \\ 0 & 0.7550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.136)$$

dönüşümden sonra sistemin \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine bağlı (5.137)'daki durum uzayı modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= -\hat{x}_1 + 0.9993 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 1.9972 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 0.9979 \hat{x}_2^3 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 + \hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - 1.9986 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 + 0.9986 \hat{x}_2^3 \end{aligned} \quad (5.137)$$

Lyapunov kararlılık teorisine göre, (5.132)'deki Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi alındığında \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 durum değişkenlerine göre (5.138)'deki polinom oluşur.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(x) &= 2 x^T f(x) \\ &= 2[-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 + 0.9993 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 0.9972 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - 1.0007 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 - 0.9986 \hat{x}_2^4] \end{aligned} \quad (5.138)$$

(5.138)'daki polinom herhangi bir güvenli kararlılık bölgesi Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olmalıdır. $\frac{d}{dt} V_2(x)$ polinomunun Ω_{C_2} içinde kesin negatif tanımlı olması

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{d}{dt} V_2(x) \\ &= 2[-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 + 0.9993 \hat{x}_1^3 \hat{x}_2 - 0.9972 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 - 1.0007 \hat{x}_1 \hat{x}_2^3 - 0.9986 \hat{x}_2^4] \end{aligned} \quad (5.139)$$

polinomunun aynı Ω_{C_2} bölgesi içinde kesin pozitif tanımlı olacağı anlamına gelir.

$$x_1 = r_2 \cos \theta_1, \quad x_2 = r_2 \sin \theta_1 \quad (5.140)$$

dönüşümünü uygulanırsa $p_2(x)$ polinomunun (5.141)'da verilen kutupsal koordinatlardaki ifadesi elde edilir.

$$p_2(r_2, \theta_1) = r^2 + [0.9993 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 + 0.9972 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + 1.0007 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 - 0.9986 \sin^4 \theta_1] r^4 \quad (5.141)$$

Bundan sonraki incelemede $p_2(r_2, \theta_1)$ polinomundaki 2 değişkenden θ_1 değişkeni, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında değişecektir. Diğer değişken r_2 yarıçapı bilinmeyen parametre olarak kabul edilecektir.

Seçilen N_{θ_1} adet Chebyshev noktasının oluşturduğu küme $\theta(N_{\theta_1}, J_{\theta_1})$, elemanları ise $\vartheta_{2,i}$, $i = 1, \dots, N_{\theta_1}$, olsun.

$p_2(r_2, \theta_1)$ polinomunun seçilen N_{θ_1} noktada pozitif değerlere sahip olması, $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi olabilmesi için gerek koşuldur. r_2^2 her zaman pozitif olacağından (5.142)'da verilen N_{θ_2} adet eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$a_{2,3}^i r + a_{2,2}^i > 0, \quad i = 1, \dots, N_{\theta_2} \quad (5.142)$$

(5.142) eşitsizliklerinde

$$a_{2,3}^i = 0.9993 \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 + 0.9972 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + 1.0007 \cos \theta_1 \sin^3 \theta_1 - 0.9986 \sin^4 \theta_1 \quad (5.143)$$

$$a_{2,2}^i = 1 \quad (5.144)$$

değerlerini temsil ederler. (5.142) eşitsizliklerinin çözümünde (5.116)'deki sistemin (5.132)'de kullanılan Lyapunov fonksiyonun ile tanımlanan güvenli kararlılık bölgesinin maksimum yarıçapı r_2^* için bir üst sınır olan $r_{2,dış}^*$ değeri elde edilir.

$$(K + 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,i}) - (K - 1) p_2(r_2, \vartheta_{2,j}) > 0, \quad i, j = 1, \dots, N_{\theta_1} \quad (5.145)$$

(5.145)'da verilen $N_{\theta_1}^2$ adet eşitsizlik maksimum yarıçap r_2^* için yeter koşulları temsil ederler. Bu eşitsizliklerin çözüm kümesi maksimum yarıçap r_2^* için bir alt sınır olan $r_{2,iç}^*$ değerini verir.

Seçilen 172 adet noktada (5.142) ve (5.145) eşitsizliklerinin çözümünden maksimum yarıçap r_2^* için (5.146)'de verilen kapalı aralık bulunur.

$$r_2^* \in [r_{2,iç}^*, r_{2,dış}^*] = [0.9607, 0.9617] \quad (5.146)$$

$$C_2^* = (r_2^*)^2 \quad (5.147)$$

olduğundan C_2^* eşdeğer yüzeyi (5.148)'deki kapalı aralıkta yer alacaktır.

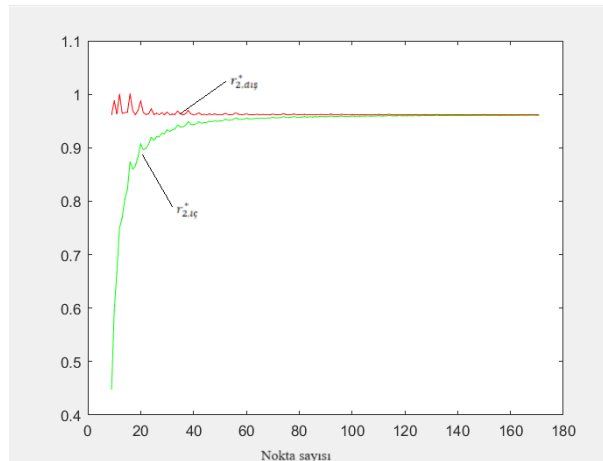
$$C_2^* \in [C_{2,iç}^*, C_{2,dış}^*] = [0.9229, 0.9249] \quad (5.148)$$

Sonuç olarak, $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ kapalı aralığında seçilen 172 adet nokta ile belirlenen

$$\Omega_{C_{2,iç}^*} = \{x \mid V_2(x) = x_1^2 + 1.50909 x_1 x_2 + 1.13939 x_2^2 \leq C_{2,iç}^* = 0.9229\} \quad (5.149)$$

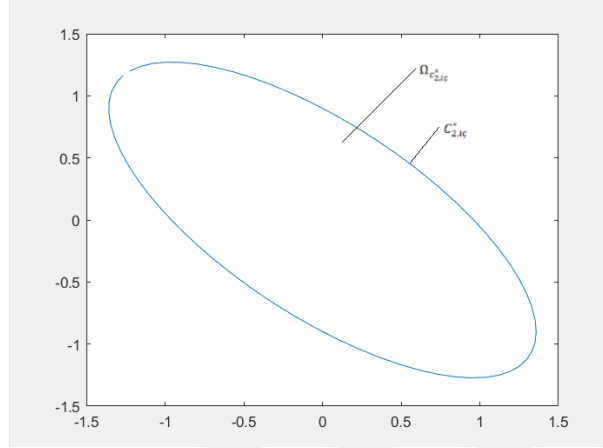
elipsi (5.116) sistemi için (5.132)'deki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bulunabilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesini verecektir.

Şekil 5.22 θ_1 değişkeni için seçilen nokta sayısına bağlı olarak alt sınır $r_{2,iç}^*$ ve üst sınır $r_{2,dış}^*$ değerlerinin değişimini göstermektedir.



Şekil 5.22. Seçilen nokta sayısına bağlı olarak r_2^* için üst ve alt sınırlar

Şekil 5.23’de $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile bulunabilecek (5.116) sisteminin $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en büyük kararlılık bölgesi verilmiştir.

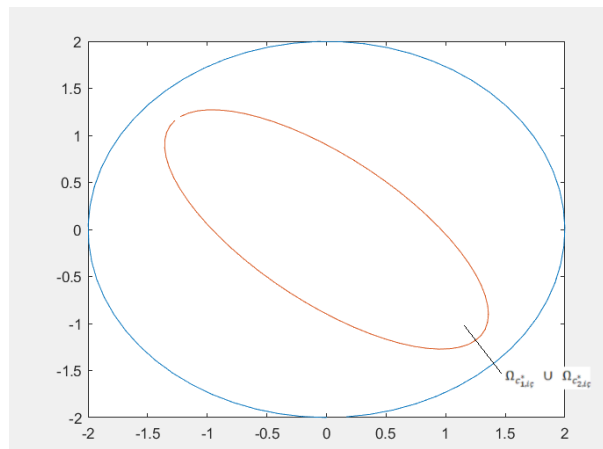


Şekil 5.23. 172 adet nokta için $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyonu ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgesi

$\Omega_{c_{1,iç}}^*$ ve $\Omega_{c_{2,iç}}^*$ bölgelerinin her biri farklı Lyapunov fonksiyonlarıyla bulunan en büyük güvenli kararlılık bölgeleri olduklarından bunların birleşimlerinden oluşacak bölge de $x^* = 0$ denge noktası etrafında güvenli bir kararlılık bölgesi oluşturulacaktır.

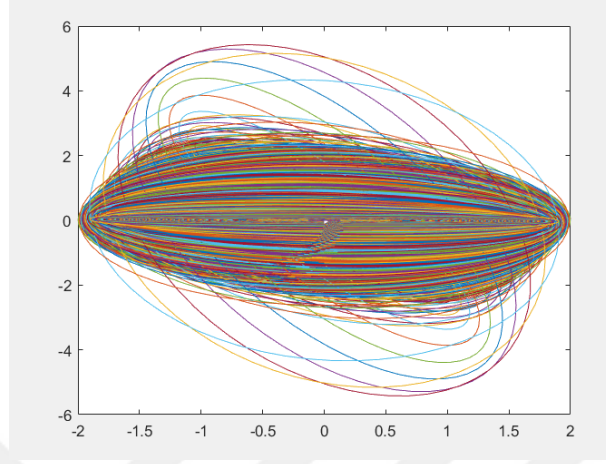
$$\Omega_{c_{1,iç}}^* \cup \Omega_{c_{2,iç}}^* \quad (5.150)$$

bölgesi Şekil 5.24’de gösterilmiştir.



Şekil 5.24. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ Lyapunov fonksiyon ile elde edilebilecek en büyük güvenli kararlılık bölgelerinin birleşiminden oluşan güvenli kararlılık bölgesi

Şekil 5.25.'da $J_{\theta_1} = [0, 2\pi]$ aralığında α^* açısını değeriyle değiştirilmesiyle elde edilen 18000 adet farklı Lyapunov fonksiyonu kullanımıyla $x^* = 0$ denge noktası etrafında elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi gösterilmiştir.



Şekil 5.25. 2. dereceden farklı Lyapunov fonksiyonlarının kullanımıyla elde edilmiş en geniş güvenli kararlılık bölgesi

BÖLÜM VI

SONUÇ

Bu çalışmada, belirli bir ikinci dereceden Lyapunov fonksiyonu için n-boyutlu bir polinom sisteminin kararlılık bölgesinin en büyük alt kümesini belirleyen bir yöntem sunulmuştur. Ehlich ve Zeller teoremi aracılığıyla, en büyük seviyeli C^* yüzeyini hesaplayan sayısal bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yüzey, n-boyutlu uzayda çekim alanının elipsoid şeklinde olan en büyük alt kümesini tanımlar. Çalışmada verilen örnekler, bu yeni algoritma tarafından elde edilen sonuçları göstermektedirler.

Yöntemin avantajı Ω_{C^*} ile adlandırılan elipsoid bölge için iç ve dış yaklaşımlar üretebilmesidir.

Uygulanan algoritmayla ve mümkün olan çok sayıdaki ikinci dereceden Lyapunov fonksiyonu kullanılarak polinom yapısındaki bir sistem için $x^* = 0$ denge noktası etrafındaki en geniş güvenli kararlılık bölgesi belirlenebilir. Bu yöntemin en önemli avantajlarından biri sonuçların Lyapunov fonksiyonuna bağlı olmasıdır. Ayrıca elde edilen kararlılık bölgesinin sınırları gerçek değerine çok yakındır. Bazı çalışmalarda Lyapunov fonksiyonundan bağımsız sonuçlar elde edilirken, bu yöntemin polinom yapısındaki lineer olmayan sistem modellerine uygulanması, gerçek kararlılık bölgesine çok yakın elipsoidal bir kararlılık bölgesi elde etmeyi kolaylaştırır. Bu yöntem, sadece belli bir denge noktasının asimptotik kararlılığını belirlemekle kalmaz, aynı zamanda kararlılık bölgesinin eşdeğer yüzeyini maksimuma çıkarmayı sağlar.

İkinci dereceden Lyapunov fonksiyonları belli bir yönteme göre taranarak, her bir Lyapunov fonksiyonu ile bulunan kararlılık bölgelerinin birleşiminden ikinci derece Lyapunov fonksiyonları ile elde edilebilen kararlılık bölgesinin en büyük alt kümesi hesaplanabilir.

Ehlich ve Zeller teorisi; polinom yapısındaki lineer olmayan sistemlerin kararlılık bölgelerini belirlerken doğrusal yapıda eşitsizlikler oluşturmamızı sağlar. Bu bir çeşit optimizasyon işlemidir. Bu eşitsizlikler iyilemedeki kısıtlamaları tanımlar. Lineer programlamayla bu optimizasyon probleminin çözümünden belli bir Lyapunov

fonksiyonu için maksimum kararlılık bölgesi belirlenir. Bu çalışmada doğrusal eşitsizlikler oluşturularak optimizasyon probleminin çözümü sağlanmıştır.

Maksimum kararlılık bölgesini belirlemek için Ehlich ve Zeller teorisine dayalı olarak geliştirilen bu yöntemin polinom yapısından farklı lineer olmayan sistemlere uygulanabilirliği ileriki çalışmalarda araştırılabilir.

Bu çalışmada sunulan sayısal optimizasyon yöntemi polinom yapısında olmayan sistemlere de uygulanabilecek şekilde düzenlenebilir. İlerdeki çalışmalar polinom yapısında olmayan sistem modelleri için uygun bir optimizasyon algoritması geliştirmek olacaktır.



KAYNAKLAR

Amato, F., Cosentino, C. ve Merola, A., “On the Region of Asymptotic Stability of Nonlinear Quadratic Systems”, *14th Mediterranean Conference on Control and Automation Control and Automation, IEEE*, 2006.

Anonim2, Rayleigh-Ritz theorem, <https://planetmath.org/rayleighritztheorem>, 22 March 2013.

Anonim1, Exponential stability, https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_stability , 31 March 2023.

Anonim3, Lyapunov stability, https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_stability, 28 June 2023.

Anonim4, Sylvester–Gallai theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester%E2%80%93Gallai_theorem, 5 June 2023.

Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. ve Mühlig, H., Taschenbuch der Mathematik, *Verlag Harri Deutsch*, Frankfurt, 2001.

Barkana, I., “New issues and results in nonlinear systems stability analysis (If the Lyapunov function has a constant limit for $t \rightarrow \infty$, should its derivative always strive to zero?)”, *MATHEMATICS IN ENGINEERING, SCIENCE AND AEROSPACE*, Vol. 11, No. 3, pp. 671-684, 2020.

Chiang, H. D.; Thorp, J. S., “Stability regions of nonlinear dynamical systems: A constructive methodology”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 12, S. 1229– 241, 1989.

Chesi, G., Tesi, A. ve Vicino, A., “Computing optimal quadratic Lyapunov functions for polynomial nonlinear systems via LMI’s”, *15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spanien, 2002.

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. ve Vicino, A., “On the role of homogeneous forms in robustness analysis of control systems”, *Multidisciplinary Research in Control*, LNCIS 289, pp. 161--177, 2003

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. ve Vicino, A., “LMI-based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems”, *INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL*, 15:35–49, 2005.

Chasi, G., “LMI- Based Estimation of The Domain of Attraction of Equilibrium Points for Nonlinear Non-Polynomial Dynamical Systems ”, *Proceedings of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, August 23–26, 2009.

Çifci, A, Enerji Fonksiyonu Analizi ile Gelirim Kararlılığı incelenmesi, Yüksek lisans, Sakarya Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sakarya, 28, 2011

Coutinho, D., Souza, C. E., Silva, J. M. G., Caldeira, A.F. ve Prieur Ch., “Regional Stabilization of Input-Delayed Uncertain Nonlinear Polynomial Systems”, *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, VOL. 65, NO. 5, 2020.

Dilaver, K. F. ve Tibken, B., “New Numerical Method for the Parameter Perturbation Region of Positive Polynomials”, *2006 American Control Conference Minneapolis*, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.

Föllinger, O., Nichtlineare Regelung I, *Oldenbourg Verlag*, Munich, 1993.

Föllinger, O., Regelungstechnik, *Hüthig Verlag*, Heidelberg, 1994.

Genesio, R., Tartaglia, M. ve Vicino, A., “On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 8, S. 747–755, 1985.

Gärtel, U., Fehlerabschätzungen für vektorwertige Randwertaufgaben zweiter Ordnung, insbesondere für Probleme aus der chemischen Reaktions-Diffusions-Theorie, Dissertation, GMD–Studien, No. 124, 1987.

Hahn, W., Stability of Motion, *Springer Verlag*, Berlin, 1967.

Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix Analysis, *Cambridge University Press*, 1999.

Hachicho, O., Tibken, B., “Estimating domains of attraction of a class of nonlinear dynamical systems with LMI methods based on the theory of moments”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, S. 3150–3155, 2002.

Hachicho, O., “A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions”, *Journal of the Franklin Institute* 344 535–552, 2007.

Hamidi, F. ve Jerbi H., “A synthesis on Lyapunov methods to the estimation and enlargement of attraction domain for nonlinear autonomous systems”, *International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation*, 978-0-7695-3795-5/09 IEEE DOI 10.1109/CSSim, 2009.

Hamidi, F., Abdelkrim M. N. ve Jerbi H., “Searching Candidate Lyapunov Function with Threshold Accepting Algorithm”, *Third International Conference on Computational Intelligence, Communication Systems and Networks*, DOI 10.1109/CICSyN, 2011.

Hughes, G. B. ve Chraibi, M., “Calculating Ellipse Overlap Areas”, *Computing and Visualization in Science*, DOI: 10.1007/s00791-013-0214-3, 2011.

Hamidi F., Jerbi H., Aggoune W., Djemaï M. ve Abdelkrim M.N., “Enlarging the Domain of Attraction in Nonlinear Polynomial”, *INT J COMPUT COMMUN, ISSN 1841-9836* 8(4):538-547, 2013.

Ibrahim, A., Bala, S. I., Ahmed, I., Ibrahim, M. J. ve Jarad, F., “Numerical Construction of Lyapunov Functions Using Homotopy Continuation Method”, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications* **6**, No. 3, 354,363, 2022.

Jerbi, H. ve Hamidi, F., “On the Estimation of A Maximal Lyapunov Function and Domain of Attraction Determination via A Genetic Algorithm”, *International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, 978-1-4244-4346-8/09/\$25.00 IEEE, 2009.

Jerbi, H., Braiek, N. B., Belhadj, A. ve Bacha, B., “A Method of Estimating the Domain of Attraction for Nonlinear Discrete-Time Systems”, *Arab J Sci Eng*, 39:3841–3849, DOI 10.1007/s13369-014-0947-4, 2014.

Jerbi, H., “Estimations of the Domains of Attraction for Classes of Nonlinear Continuous Polynomial Systems”, *Arab J Sci Eng (2017) 42:2829–2837*, DOI 10.1007/s13369-017-2513-3, 2017

Jerbi, H., Hamidi, F., Ben A. S., Olteanu, S. C. ve Popescu D., “Lyapunov-based Methods for Maximizing the Domain of Attraction”, *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTERS COMMUNICATIONS & CONTROL*, Volume: 15,2020.

Khalil, H. K., Nonlinear Systems, *Prentice Hall*, 1996.

Leupold, W., Georgi, H., Carl, J., Lehr- und Übungsbuch Mathematik III, *Fachbuchverlag*, 1991.

Levin, A., “An analytical method of estimating the domain of attraction for polynomial differential equations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, S. 2471–2475, 1994.

Ludyk, G., Theoretische Regelungstechnik 1, *Springer Verlag*, Berlin, 1995.

Lunze. J., Regelungstechnik 1, *Springer Verlag*, Berlin, 1996.

Pang, G. ve Zhang, K., “Estimation of asymptotic stability regions via composite homogeneous polynomial Lyapunov functions”, *International Journal of Control*, 88:3, 484-493, DOI: 10.1080/00207179.2014.962616, 2015.

Polcz, P. ve Szederkényi, G., “Lyapunov function computation for nonlinear systems through dynamical embedding – A case study”, *European Control Conference (ECC)*,. Rotterdam, Netherlands, June 29 - July 2, 2021.

Salle, J. L., Lefschetz, S., “Die Stabilitätstheorie von Ljapunow Die direkte Methode mit Anwendungen”, *Bibliographisches Institut*, Mannheim, 1967.

Slotine, J. J. E. ve Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 199, New Jersey. 1991.

Stoer, J., *Numerische Mathematik 1*, *SpringerVerlag*, Berlin,1994.

Schwarz, H. R., *Numerische Mathematik*, *B. G. Teubner Verlag*, Stuttgart, 1997.

Tesi, A., Francesca, V. ve Genesio, R. “On Stability Domain Estimation via a Quadratic Lyapunov Function: Convexity and Optimality Properties for Polynomial Systems”, *33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL - December 1994.

Tesi, A., Villoresi, F. ve Genesio, R., “On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: Convexity and optimality properties for polynomial systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 11, S. 1650–1657, 1996.

Tibken, B., “Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMI’s”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australien, S. 3860–3864, 2000.

Tibken, B., Hachicho, O., “Estimation of the domain of attraction for polynomial systems using multidimensional grids”, *Conference on Decision and Control* Sydney, Australia, 0-7803-6638-7 IEEE, December, 2000.

Tibken, B., Dilaver, K. F., “Computation of subsets of the domain of attraction for polynomial systems”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, S. 2651–2656, 2002.

Terzioğlu, H. “10.Hafta Routh Hurwitz Kararlılık”, https://tf.selcuk.edu.tr/dosyalar/files/033003/9_%20HAFTA.pdf , 5 March, 2017

Taieb, N. H., “Indefinite derivative for stability of time-varying nonlinear systems”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 38, 534–551 doi:10.1093/imamci/dnaa 040, 2021.

Vidyasagar, M., Nonlinear Systems Analysis, *SIAM*, 2002.

Williams, R. L. ve Lawrence, D. A., Linear State-Space Control Systems, *John Wiley & Sons*, Canada. 2007.

Xue, B., Zhan, N. ve Li, Y., “Robust Region of Attraction Generation For State-Constrained Perturbed Discerte-Time Polynomial Systems”, *International Federation of Automatic Control*, 10.1016/j.ifacol. 12.1761, 2020.

Zakhama, R., Bacha, A. B.B. ve Braiek, N. B., “A Lyapunov approach for attraction domain estimation of polynomial discrete nonlinear systems with quadratic and cubic terms”, *Computational and Applied Mathematics*, 39:189 <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01217-4>, 2020.

Zakhama, R., Bacha, A. B.B. ve Braiek, N. B., “Discretization of a Lyapunov Approach for Attraction Domain Estimation Through a BMI Optimization Problem”, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* , 29:551–557 <https://doi.org/10.1007/s40313-018-0400-0>, 2018.

ÖZ GEÇMİŞ

Rawana Joha yılında doğdu. İlk ve orta öğrenimini tamamladı. 2001 yılında girdiği 'nden da mezun oldu. 2019 yılından bu yana Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Elektrik – Elektronik Mühendisliği Bölümünde Yüksek Lisans çalışmalarını sürdürmektedir.



