



MARMARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



# Belirli Tip Fonksiyon Sınıfı İçin Kesirli Reaksiyon ve Kesirli Kinetik Enerji Denklemleri

ECEM YAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Durmuş ALBAYRAK

İSTANBUL, 2024





MARMARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



# Belirli Tip Fonksiyon Sınıfı için Kesirli Reaksiyon ve Kesirli Kinetik Enerji Denklemleri

ECEM YAŞAR

(520917011)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Durmuş ALBAYRAK

İSTANBUL, 2024



# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca tüm zorlukları birlikte aştığımız; sabrını, manevi desteğini, abiliğini asla esirgemeyen, bu tezi bitirmemin gururunu birlikte yaşadığım, astrofizik ve matematik ilişkisini işlerken yaşadığımız tüm zorlukları bile gülümsemeyele hatırlayacağım, yeri bende bambaşka olan canım hocam Dr. Öğr. Üyesi Durmuş Albayrak'a ve bu süreçte yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Ercan Gürvit'e en içten teşekkürlerimi borç bilirim. Beni bu günlere getirmek için her şeyi yapan, maddi manevi her zaman yanımda olan ve beni hep destekleyen, hayattaki en güzel şansım en değerlim canım aileme ve beni kızları gibi gören, Alman ailem Birgit ve Frank Knäpper'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez, Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından FYL-2023-11017 proje numarası ile desteklenmiştir. Bilimsel Araştırma Koordinasyon Projeleri Birimi'ne desteğinden ötürü teşekkür ederim.

# İçindekiler

TEŞEKKÜR . . . . .	i
ÖZET . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	iv
1 GİRİŞ . . . . .	1
1.1 Kesirli Hesabın Kısa Tarihi . . . . .	1
1.2 Riemann-Liouville Kesirli Operatörleri ve Laplace Dönüşümü . . . . .	9
2 MATERYAL VE YÖNTEM . . . . .	21
3 BULGULAR ve TARTIŞMA . . . . .	27
4 SONUÇLAR . . . . .	49

# ÖZET

## **Belirli Tip Fonksiyon Sınıfı İçin Kesirli Reaksiyon ve Kesirli Kinetik Enerji Denklemleri**

Bu tezde, kompleks integral gösterilişinin çekirdeği iki değişkenli olan bir fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Tanımlanan bu fonksiyon sınıfına ait olması gereken fonksiyonların kompleks integral gösterilişlerindeki çekirdeğin özellikleri incelenmiştir. Bu sınıftan alınan keyfi bir fonksiyon için kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemleri elde edilip çözülmüştür. Son olarak, elde edilen bu denklem ve çözümlerdeki fonksiyonların kompleks integral gösterilişlerindeki çekirdekler özel seçilerek farklı tipte yeni kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemleri ve çözümleri elde edilmiştir. Böylece, hem literatürdeki çalışmalarını içine alan bir çalışma olmuş hem de literatüre yeni kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemler ve çözümleri elde ederek katkıda bulunulmuştur.

Tezin bir kısmı 35. Ulusal Matematik Sempozyumunda "Kesirli Reaksiyon Denklemi ve Kesirli Kinetik Denklemleri Üzerine" başlığı altında sunulmuştur.

## **ABSTRACT**

### **Fractional Reaction and Fractional Kinetic Energy Equations for a Certain Type of Function Class**

In this thesis, a class of functions with a two-variable kernel for the representation of complex integral notation has been defined. The properties of the kernel in the complex integral representations of functions belonging to this defined class have been examined. Fractional reaction and fractional kinetic equations for an arbitrary function taken from this class have been derived and solved. Finally, by specifically selecting the kernels in the complex integral representation of the functions obtained from these equations and solutions, new types of fractional reaction and fractional kinetic equations and their solutions have been obtained. Thus, this study encompasses existing literature and contributes to the literature by obtaining new fractional reaction and fractional kinetic equations along with their solutions.

A part of the thesis was presented at the 35th National Mathematics Symposium under the title "On Fractional Reaction Equation and Fractional Kinetic Equations.

## SEMBOL LİSTESİ

$\mathcal{D}^{-\nu} f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $\nu$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$\Gamma(\xi)$	: Gamma Fonksiyonu
$\Gamma(\xi, x)$	: Eksik Gamma Fonksiyonu
$\gamma(\xi, x)$	: Eksik Gamma Fonksiyonu
$\mathcal{L}\{f(t); s\}$	: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$f(x) * g(x)$	: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu
$E_\alpha(z)$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	: Wiman fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$	: Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$(\Gamma)I_{p_i, q_i, r}^{m, n}(z)$	: Eksik $I$ -fonksiyonu
$(\gamma)I_{p_i, q_i, r}^{m, n}(z)$	: Eksik $I$ -fonksiyonu
$I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n}(z)$	: $I$ -fonksiyonu
$\Gamma_{p, q, r}^{m, n}(z)$	: Eksik $H$ -fonksiyonu
$\gamma_{p, q, r}^{m, n}(z)$	: Eksik $H$ -fonksiyonu
${}_p\Psi_q^{(\Gamma)}(z)$	: Fox-Wright Eksik $\Psi$ -fonksiyonu
${}_p\Psi_q^{(\gamma)}(z)$	: Fox-Wright Eksik $\Psi$ -fonksiyonu
${}_p\Gamma_q(z)$	: Eksik Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon
${}_p\gamma_q(z)$	: Eksik Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon
$H_{p, q}^{m, n}(z)$	: Fox'ın $H$ -fonksiyonu
${}_p\Psi_q(z)$	: Fox'ın $\Psi$ -fonksiyonu
${}_pF_q(z)$	: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$\bar{\Gamma}_{p, q}^{m, n}(z)$	: Eksik $\bar{H}$ -fonksiyonu
$\bar{\gamma}_{p, q}^{m, n}(z)$	: Eksik $\bar{H}$ -fonksiyonu

# 1 GİRİŞ

## 1.1 Kesirli Hesabın Kısa Tarihi

Kesirli hesap, klasik analizin bir uzantısı olarak yaklaşık 325 yıl önce ortaya çıkmıştır. 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital'ın aylarca süren mektuplaşmaları sonucu kesirli hesabın ilk temelleri atılmıştır. O yıldaki mektuplaşmaların birinde Leibniz, L'Hospital'e şu soruyu sordu [47]:

- Leibniz: "Tamsayı mertebedeki türevin anlamı, tamsayı olmayan mertebelerden türevlere anlam kazanacak biçimde genelleştirilebilir mi?"

L'Hopital bu sorunun cevabını merak etmiş ve Leibniz'e şu soruyla cevap yazmıştır?

- L'Hopital: Ya türevin mertebesi  $\frac{1}{2}$  olursa?

Leibniz kesirli hesabın tohumlarının atıldığı gün olarak kabul edilen 30 Eylül 1695 tarihli mektubunda şu cevabı verdi:

- Leibniz: "Bu bir paradoksa yol açacak ve bir gün bundan faydalı sonuçlar çıkarılacaktır."

Leibniz tarafından ortaya atılan kesirli türev problemi, sonraki yıllarda da devam etmiştir[12, 47]. Kesirli hesap için L'Hopital ve Leibniz tarafından yapılan ilk çalışmalarının ardından, Avrupa'nın en iyi matematik dahisi olan Euler tarafından 1730'da L'Hopital ve Leibniz'e benzer şu soru sorulmuştur [12]:

- Euler: " $n$  pozitif bir tamsayı iken ve  $p = p(x)$ ,  $x$  değişkenine bağlı bir fonksiyon olmak üzere  $\frac{d^n p}{dx^n}$  oranı her zaman cebirsel olarak ifade edilebilir. Peki,  $n$  kesirli bir sayı ise nasıl bir oran oluşturulabilir?"

18.yy'ın sonlarına doğru, 19.yy'ın önemli ve büyük matematikçileri olan Lagrange, Laplace, Lacroix, Fourier, Riemann, Green, Holmgren, Grunwald, Letnikov, Sonini, Laurent, Nekrassov, Krug, Weyl ve diğerleri, kesirli türev ile ilgili çalışmaları geliştirmişlerdir [25, 42, 45]. Bu dahi matematikçiler arasında Lacroix, 1819 yılında, Leibniz ve L'Hospital'in arasında geçen  $\frac{1}{2}$ . mertebeden türevi  $x$  fonksiyonu

için

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}},$$

biçiminde ilk kez doğru hesaplayan kişi olmuştur [28]. Lacroix, bu hesaplamayı 1819 yılında yayınlanan matematik üzerine yazdığı 700 sayfalık kitabında yer vermiştir [28]. İlk olarak,  $m$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,  $y = x^m$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden türevini hesaplayan aşağıdaki formülü elde etmiştir:

$$D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n} (x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n$$

Bu formülde faktöriyel sembolünü bir genişlemesi olan

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx,$$

ile tanımlı Gamma fonksiyonu ile yer değiştirerek, bir polinom fonksiyonunun kesirli türevinin formülünü  $\alpha$  ve  $\beta$  kesirli sayılar olmak üzere,

$$D_x^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha},$$

biçiminde elde etmiştir. Lacroix Bu formülde özel olarak  $\alpha = \frac{1}{2}$  ve  $\beta = 1$  seçerek,

$$D_x^{1/2} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}},$$

formülünü hesaplamıştır. Bulunan formüldeki en ilginç olay ise,  $\beta = 0$  seçerek elde edilen sabit fonksiyonun kesirli türevinin sıfırdan farklı olmasıdır. Çünkü

$$D_x^\alpha 1 = D_x^\alpha x^0 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0.$$

Kesirli türevlerin doğrusallık özelliğinden yola çıkarak geliştirilen Lacroix'nin yöntemi, herhangi bir analitik fonksiyonun kuvvet serisi açılımını terim terime türetmek uygulanabilir. Ancak bu yöntem genellikle kabul edilebilirlikten oldukça uzaktır, çünkü kullanılan fonksiyon sınıfı oldukça kısıtlıdır.

Bu erken teorik gelişmelerle eş zamanlı olarak, kesirli hesaplamaların ilk pratik uygulamalarının da ortaya çıkması dikkat çekicidir. Bu bağlamda, bunların ilki olan Abel'in 1823'teki keşfidir [1, 2, 16]. Abel, Tautochrone problemine ilişkin integral denklem çözümünü inceledi ve çözümün, bir integral dönüşümle elde edilebileceğini ve bu dönüşümün yarı türev olarak ifade edilebileceğini keşfetti. Abel tarafından keşfedilen integral dönüşüm

$$A = \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} f(\xi) d\xi, \quad A = \text{sabit} . \quad (1.1)$$

biçimindedir. Daha sonra Abel, bu dönüşümün sağ tarafını bir fonksiyonun  $\frac{1}{2}$ . mertebeden kesirli türevi olarak aşağıdaki biçimde ifade etmiştir:

$$\sqrt{\pi} \left( \frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}} (f(x)) \right).$$

Abel'in bu çözümü, Joseph Liouville tarafından ilgi görmüş ve ardından Liouville'in, 1832 civarında kesirli hesaplamalar ile ilgili yaptığı ilk ve ciddi çalışmalarında kaydettiği ilerlemeler potansiyel teori problemlerinin uygulamalarında kendine yer bulmuştur [32, 33, 34, 35]. Liouville, teorik gelişmelerinde,  $n$ 'nin tamsayı mertebedeki türevler için bilinen sonuçları kullanarak başlamıştır. Örneğin

$$D_x^n e^{ax} = a^n e^{ax},$$

ifadesi  $n$ 'in tamsayı olmayan mertebesi için

$$D_x^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax}, \quad (1.2)$$

biçiminde genelleştirilir. Fourier açılımı kullanılarak, birçok fonksiyon kompleks üslerin birleşimi olarak ifade edilebilir. Örneğin,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \text{Re}(a_n) > 0$$

Yine, kesirli türevin doğrusallığını kullanarak, Liouville bir fonksiyonun  $\alpha$ . mertebesindeki türevi için

$$D_x^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x},$$

ifadesini elde etmiştir. Bu formül, kesirli türev için Liouville'in ilk formülüdür [32, 33]. Ancak, bu formül, Lacroix formülü gibi fonksiyon sınıfının sınırlı olmasından dolayı kesirli türevin genel bir tanımı olarak kabul edilmemiştir. Bu problemi çözmek için Liouville,

$$I = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-xt} dt, \quad \beta > 0, x > 0$$

integrali yardımı ile ikinci bir kesirli türev formülü elde etmeye çalışmıştır ve günümüzde ikinci Liouville formülü olarak bilinen

$$D_x^\alpha x^{-\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \quad \beta > 0$$

formülünü türetmiştir.

Şimdiye kadar anlatılan tanımların hiçbiri kesirli türevin genel bir tanımı için uygun bulunmamıştır. Daha sonraki yıllarda, birçok matematikçi tarafından benzer formüller elde edilmiştir. Örneğin, Greer [17], Liouville'in elde ettiği (1.2) formülünü kullanarak trigonometrik fonksiyonların kesirli türevleri için

$$D_x^\alpha e^{iax} = a^\alpha \left( \cos \frac{\pi\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\cos ax + i \sin ax), \quad (1.3)$$

formülünü türetmiştir.

Joseph Fourier, bir  $f$  fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri için

$$D_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \cos \left[ t(x - \xi) + \frac{n\pi}{2} \right] dt d\xi,$$

integral gösterilişini elde etmiştir [15]. Fourier, bu gösterilişte,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sayısı

yerine  $\alpha \in \mathbb{R}$  sayısını yazarak

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} t^\alpha \cos \left[ t(x - \xi) + \frac{\alpha\pi}{2} \right] dt d\xi,$$

sonucunu elde etmiştir.

Kesirli kalkülüsün gelişmesindeki en büyük çalışma G. F. Bernhard Riemann'ın [51] öğrenci iken yazdığı ancak ölümünden sonra 1892'de yayınlamış olduğu çalışmadır. Riemann 1853'te bir Taylor serisinin genelleştirilmesi üzerine çalışmış ve belirli bir integral yardımıyla tamsayı olmayan üslere sahip kuvvet serilerine uygulanabilen aşağıdaki tanımı türetmiştir:

$$D_{c,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi + \phi(x),$$

Bu tanım, kesirli integralin bugün kullanılan en yaygın tanımlarındandır. Riemann, integralin alt sınırındaki belirsizlikten dolayı, tanımına tamamlayıcı bir fonksiyon olarak  $\phi(x)$  fonksiyonunu eklemiştir. Fakat kesirli integralin bugünkü tanımında problem yaratacak bu tür bir tamamlayıcı fonksiyon yoktur. Riemann ve Liouville'in her ikisi de bu problemi çözememelerine rağmen, bugünkü Riemann-Liouville tanımını ortaya çıkmıştır.

Bu oluşuma yol açtığı bilinen en eski çalışma, N. Ya. Sonin 1869'da [66], Cauchy'nin integral formülünü keyfi mertebeden türevlere ulaşmak için bir başlangıç noktası olarak kullanmıştır. 1872'de, A. V. Letnikov bu tanımı genişletmiş [30, 31] ve her ikisi de kapalı bir kontür integrali ile kesirli türev tanımını vermeye çalışmıştır. Cauchy'nin tamsayı mertebesinden türevler için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt,$$

integral formülünde  $n$  yerine  $\alpha! = \Gamma(1 + \alpha)$  yazılarak kesirli Cauchy integral formülü tamsayı olmayan mertebeden türevlere genişletilmiştir. Ancak, tam sayı olmayan değerlere doğrudan genişletme, kontür içinde bir dallanma noktası varlığı

sorununu beraberinde getirir. Bu durumda, uygun bir kontur seçimi, Sonin ve Letnikov'un çalışmasında ele alınmayan bir dallanma kesimini içermesi gerekebilir. En sonunda Laurent, Riemann-Liouville kesirli integralin günümüzdeki tanımını oluşturmak için, Sonin ve Letnikov'un kullandığı kapalı devre yerine, Laurent döngüsü olarak adlandırılan bir açık devre konturunu tercih etti [29]. Bu şekilde, kesirli integralin tanımına yeni bir perspektif getirdi. Bugün, Riemann-Liouville kesirli integrali

$$D_{c,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.4)$$

biçiminde tanımlıdır. Bu tanımda  $c = -\infty$  seçilirse ifade Liouville kesirli integrale,  $c = 0$  alınırsa ifade Riemann kesirli integrale indirgenir. Bu sebepten ötürü, keyfi bir  $c$  alt sınırı için (1.5), Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır. Bu tanım literatürde en çok kullanılan kesirli integral operatörünün tanımıdır. Kesirli integrasyon ve türevleme gösterimleri arasındaki fark yalnızca (1.5) ifadesindeki  $\alpha$  parametresinin işaretindedir. Ancak, kesirli integrasyondan türeve geçiş, (1.5)'un sağ tarafına negatif bir  $\alpha$  ekleyerek doğrudan gerçekleştirilemez. Sorun, sağ tarafındaki integralin negatif mertebeler için iraksak olma eğiliminde oluşudur. Bununla birlikte, analitik devam yöntemi ile literatürde çok iyi bilinen

$$D_{c,x}^{\alpha} f(x) = D_{c,x}^{n-\beta} f(x) = D_{c,x}^n \left[ D_{c,x}^{-\beta} f(x) \right] = \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt \right),$$

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ortaya çıkar. Burada,  $n = [\alpha]$ ,  $0 < \beta = n - \alpha < 1$  olmak üzere  $\alpha$ 'dan büyük en küçük tamsayıdır.

Hemen hemen aynı yıllarda, Grunwald ve Letnikov, çeşitli sayısal yöntemlerin türetilmesinde kullanılan farklı bir kesirli türev tanımını ortaya koymuşlardır [18]. Liouville'den farklı bir yaklaşımla Grunwald (1867), bir fark bölümünün limiti olarak farklı bir türev tanımı vermiştir. Tamsayı mertebeden türevleri belirli integral formülleri ile göstermeyi başarmış ve Riemann'ın belirli integralinin sonlu bir alt sınır olarak yorumlamıştır. Ancak Liouville için aynı şeyi söylemenin mümkün

olmadığını alt sınırın  $-\infty$  olması gerektiğini göstermiştir. Literatürde, Grunwald-Letnikov kesirli türevi

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

biçiminde tanımlıdır. Letnikov bu tanımın uygun koşullar altında Riemann ve Liouville tarafından verilen tanımlara indirgenebildiğini göstermiştir [30]. Bu tanım temelde kesirli türevleri yaklaşık olarak hesaplamak için çeşitli sayısal yöntemlerin türetilmesinde kullanılmaktadır. On dokuzuncu yüzyılın bu konu üzerinde çalışan diğer bir isim O. Heaviside'dır [23]. Heaviside'ın çeşitli fizik ve mühendislik problemlerini çözmek için geliştirdiği kesirli hesap operatörü, geliştirilmiş türevlerin uygulanmasında etkili bir rol oynar.

Weyl ve Hardy [19, 20, 70], 1917'de Lebesgue ve Lipschitz sınıflarına ait fonksiyonların differentegrallerinin özelliklerini incelemiş ve  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,

$$I_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad I_-^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt,$$

eşitliklerin sağ tarafındaki integrallerin yakınsak oldukları varsayımı altında kesirli integarllerin yazılabileceğini göstermiştir. Buradaki,  $I_+^\alpha \varphi(x)$  integrali, Riemann-Liouville kesirli integral tanımındaki  $c \rightarrow -\infty$  durumudur, ve genellikle Weyl kesirli integrali olarak da adlandırılır. Literatürde, bu integrallere aynı zamanda sırasıyla, sağ ve sol Liouville kesirli integralleri denir.

Daha sonra 1927'de Marchaud, Grunwald-Letnikov kesirli türev tanımını geliştirerek

$${}^M D_x^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0$$

integrali ile gösterilen ve literatürde kendi ismiyle anılan Marchaud kesirli türevini tanımlamıştır [52]. Bu kesirli türevin kökeni Grunwald-Letnikov kesirli türeve

dayandığından belirli koşullar altında Riemann-Liouville kesirli türevine de indirgenir.

Kesirli hesap ile ilgilenen bir diğer matematikçi olan M. Riesz, 1938 yılından sonra bir dizi makale yayınlamış ve literatürde Riesz Potansiyeli olarak bilinen

$${}^R I^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{|t-x|^{1-\alpha}} dt, \quad \text{Re } \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots$$

kesirli integralini tanımlamıştır [53, 54]. Bu integral ile Riemann-Liouville kesirli integralleri arasında

$${}^R I^\alpha = (I_+^\alpha + I_-^\alpha) \frac{1}{\left(2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)},$$

biçiminde bir ilişki mevcuttur.

Riemann-Liouville kesirli türevinin uygulamalarındaki zorluklarından biri, adi türev operatörü yerine Riemann-Liouville kesirli türev operatörü kullanılarak elde edilen bir kesirli diferansiyel denklemin sıradışı başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Özellikle, kesirli diferansiyel denklemin çözümünün elde edilebilmesi için belirli kesirli integrallerin ve türevlerin başlangıç anındaki değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Caputo, uygulamalarda klasik başlangıç koşullarına sahip kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için Riemann-Liouville kesirli türevinin tanımını yeniden inşa etmiştir [7, 8].

Caputo,  $(n - 1)$ . mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir  $f$  fonksiyonu için, kesirli türevi

$$D_C^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^n f(s) ds,$$

integrali ile vermiştir.

Bu türev operatörünü viskoelastisite ile ilgili çalışmasıyla literatüre kazandıran ilk kişi Rabotnov [50] olmasına rağmen, günümüzde Caputo türev operatörü olarak bilinmektedir. Bu türev operatörünün Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ile aralarında sağlam bir bağ vardır ve birçok bilim dalının uygulamalarında oldukça sık kullanılmaktadır.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısına yaklaşıldığında kesirli hesap kendine oldukça

geniş bir çalışma alanı bulmuştur. Öyle ki 1974 yılında New Haven'da "The First Conference on Fractional Calculus and its Applications" başlığı altında sadece kesirli hesap teorisi ve uygulamaları ile ilgili ilk konferans düzenlendi. Ardından aynı yıl, Oldham ve Spanier tarafından çalışmaları 1968'e dayanan kesirli hesap üzerine ilk kitap yayınlandı [45]. O zamandan beri günümüze kadar birçok matematikçi tarafından kesirli hesap teorisi ve uygulamaları üzerine çeşitli kitaplar yazılmaya devam etmiştir [9, 10, 24, 26, 25, 38, 41, 42, 44, 48, 55, 56, 58].

Bu konuda basılan ve sadece bu konuda yayın yapmaya devam eden ilk dergi 1998 yılında yayın hayatına başlayan "Fractional Calculus & Applied Analysis" isimli dergidir. Son olarak, bu konuda yapılan ilk konferans 2004 yılında Bordeaux'da "Kesirli Türev ve Uygulamaları" başlığı altında düzenlenmiştir ve her iki yılda bir yapılmaya devam etmektedir [36].

## 1.2 Riemann-Liouville Kesirli Operatörleri ve Laplace Dönüşümü

Bir önceki bölümde Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, Weyl kesirli türev ve integral operatörleri gibi günümüzde birçok alanda kullanılan farklı türde kesirli türev ve integral operatörü tanımı vardır [7, 8, 18, 31, 30, 32, 33, 34, 35, 51, 70]. Özellikle fizik ve mühendislik problemlerinin modelleme süresince kullanılan kesirli türev ve integral operatörleri modelleme yapabilmek için ihtiyaç duyulan kesirli diferansiyel denklemlerin yapı taşlarını oluşturmaktadır. Bu tür denklemleri çözmek için klasik diferansiyel denklemlerin çözüm metotlarından biri olan integral dönüşümlere de ihtiyaç vardır. Bu bölümde, tez boyunca elde edilecek olan kesirli diferansiyel denklemleri oluşturmak ve çözmek için gerekli literatürde en sık kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev ve integral operatörleri ile Laplace dönüşümünün tanımları verilecektir. Aynı zamanda yine bu operatörler ve dönüşümün bazı özelliklerine yer verilecektir. Ek olarak tez boyunca kullanılacak olan özel fonksiyonların tanımları ve özel durumları verilecektir.

**Tanım 1.1** Bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\nu$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integ-

rali, integralin varlığı koşulu altında

$$\mathcal{D}^{-\nu} f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\tau (\tau - \sigma)^{\nu-1} f(\sigma) d\sigma, \quad \text{Re}(\nu) > 0 \quad (1.5)$$

biçiminde tanımlıdır [25, 42, 45]. Buradaki  $\Gamma(\cdot)$  fonksiyonu literatürde çok iyi bilinen Gamma fonksiyondur ve

$$\Gamma(\sigma) = \int_0^\infty \tau^{\sigma-1} \exp(-\tau) d\tau, \quad \text{Re}(\sigma) > 0$$

biçiminde tanımlıdır [3, 13, 46].

**Tanım 1.2** Literatürde,  $\text{Re}(\sigma) > 0, x \geq 0$  olmak üzere  $\gamma(\sigma, x)$  ve  $\Gamma(\sigma, x)$  ile gösterilen Eksik Gamma fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma, \tau) &= \int_0^\tau u^{\sigma-1} \exp(-u) du, \\ \Gamma(\sigma, \tau) &= \int_\tau^\infty u^{\sigma-1} \exp(-u) du, \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır [3, 13, 46] ve şu özelliğe sahiptir:

$$\gamma(\sigma, \tau) + \Gamma(\sigma, \tau) = \Gamma(\sigma), \quad (\text{Re}(\sigma) > 0).$$

**Tanım 1.3** Bir  $f(\tau)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(\tau); s\} = \int_0^\infty \exp(-s\tau) f(\tau) d\tau, \quad \text{Re } s > 0 \quad (1.6)$$

biçiminde tanımlıdır [11] ve ters Laplace dönüşümü

$$f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); \tau\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(s\tau) F(s) ds, \quad \text{Re } s > 0 \quad (1.7)$$

biçiminde tanımlıdır [11].

**Tanım 1.4**  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\tau)g(x - \tau)d\tau,$$

biçiminde tanımlıdır.

Bu tanıma göre,  $f * g = g * f$  olduğu aşıkardır. Literatürde çok iyi bilinen Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremi aşağıdaki biçimdedir [11].

**Teorem 1.1**  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$  ve  $\mathcal{L}\{g(x)\} = \mathfrak{G}(s)$  olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)\mathfrak{G}(s),$$

biçimindedir.

Bu teoreme göre, bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\nu$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümü,  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$  ve  $\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\} = \frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu}$  olmak üzere

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^{-\nu} f(t) \} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{L}\{ t^{\nu-1} \} \mathcal{L}\{ f(t) \} = s^{-\nu} F(s) \quad , p > 0 \quad (1.8)$$

olarak hesaplanır [42].

Kesirli hesapta en sık kullanılan özel fonksiyonlar Mittag-Leffler fonksiyonu ve genellemeleridir. Bu fonksiyonlar ve bu fonksiyonları içeren, kesirli hesapta sıkça kullanılan Laplace dönüşümleri şu şekildedir.

**Tanım 1.5** Mittag-Leffler tarafından tanımlanan ve ismiyle anılan fonksiyon  $\text{Re } \alpha > 0$  ve her  $z \in \mathbb{C}$  için

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

biçiminde seri gösterilişine sahiptir [43].

Bu fonksiyonu içeren Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(xz^\sigma); s\} = s^{-1} (1 - xs^{-\sigma})^{-1} \quad (1.9)$$

biçimindedir.

**Tanım 1.6** İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak da bilinen Wiman fonksiyonu  $\text{Re } \alpha > 0$ ,  $\text{Re } \beta > 0$  ve her  $z \in \mathbb{C}$  için

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

biçiminde seri gösterilişine sahiptir [71].

Bu fonksiyonu içeren Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(xz^\sigma); s\} = s^{-\beta} (1 - xs^{-\sigma})^{-1} \quad (1.10)$$

biçimdedir.

**Tanım 1.7** Prabhakar tarafından tanımlanan  $\text{Re } \alpha > 0$ ,  $\text{Re } \beta > 0$ ,  $\text{Re } \gamma > 0$  ve her  $z \in \mathbb{C}$  için

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}$$

biçiminde seri gösterilişine sahiptir [65].

Bu fonksiyonu içeren Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(xz^\sigma); s\} = s^{-\beta} (1 - xs^{-\sigma})^{-\gamma} \quad (1.11)$$

biçimdedir.

Şimdi tezin amacında rol oynayacak olan özel fonksiyonları ve özel durumlarını tanımlayalım:

**Tanım 1.8** Bansal ve Kumar tarafından tanıtılan  ${}^{(\Gamma)}I_{p_i, q_i, r}^{m, n}(z)$  ve  ${}^{(\gamma)}I_{p_i, q_i, r}^{m, n}(z)$  ile göste-

rilen eksik  $I$ -fonksiyonlarının Mellin-Barnes tipi integral yardımıyla gösterilişi

$$({}^{\Gamma})I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n}(z) = ({}^{\Gamma})I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n} (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{K}(\xi, x) z^{-\xi} d\xi \quad (1.13)$$

biçimindedir [5]. Burada

$$\mathbb{K}(\xi, x) = \frac{\Gamma(1 - u_1 - U_1 \xi, x) \prod_{j=1}^m \Gamma(v_j + V_j \xi) \prod_{i=2}^n \Gamma(1 - u_i - U_i \xi)}{\sum_{\ell=1}^r \left[ \prod_{j=m+1}^{q_\ell} \Gamma(1 - v_{j\ell} - V_{j\ell} \xi) \prod_{i=n+1}^{p_\ell} \Gamma(u_{i\ell} + U_{i\ell} \xi) \right]}, \quad (1.14)$$

ve

$$({}^{\gamma})I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n}(z) = ({}^{\gamma})I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n} (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] \quad (1.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{L}(\xi, x) z^{-\xi} d\xi, \quad (1.16)$$

biçimindedir. Burada

$$\mathbb{L}(\xi, x) = \frac{\gamma(1 - u_1 - U_1 \xi, x) \prod_{j=1}^m \Gamma(v_j + V_j \xi) \prod_{i=2}^n \Gamma(1 - u_i - U_i \xi)}{\sum_{\ell=1}^r \left[ \prod_{j=m+1}^{q_\ell} \Gamma(1 - v_{j\ell} - V_{j\ell} \xi) \prod_{i=n+1}^{p_\ell} \Gamma(u_{i\ell} + U_{i\ell} \xi) \right]}, \quad (1.17)$$

biçimindedir. Buradaki  $L$  uygun bir integral eğrisi olmak üzere,  $0 \leq n \leq p_\ell$  ve  $1 \leq m \leq q_\ell$  olacak şekilde  $m, n, p_\ell, q_\ell \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, p_\ell, j = 1, \dots, q_\ell$  biçiminde ve  $U_{i\ell}, V_{j\ell} \in \mathbb{R}^+, u_i, v_j \in \mathbb{C}$  ve  $x > 0$  olmak üzere,  $\mathbb{K}(\xi, x)$  ve  $\mathbb{L}(\xi, x)$  fonksiyonları (1.14) ve (1.17) biçiminde tanımlıdır.

(1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlar parametrelerin özel seçimi ile aşağıdaki özel fonksiyonlara indirgenir:

(i) (1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $x = 0$  seçilirse Saxena tarafından

tanımlanan

$$\begin{aligned}
& {}^{(\Gamma)}I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, 0), (u_i, U_i)_{2, n} (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] \\
& = I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1, n} (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right], \quad (1.18)
\end{aligned}$$

fonksiyonu elde edilir [59].

- (ii) (1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $r = 1$  seçilirse  $p_\ell = p$  ve  $q_\ell = q$  olmak üzere, Srivastava tarafından tanımlanan

$$\begin{aligned}
& {}^{(\Gamma)}I_{p, q, 1}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n} (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] \\
& = \Gamma_{p, q}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] \quad (1.19)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& {}^{(\gamma)}I_{p, q, 1}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n} (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] \\
& = \gamma_{p, q}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] \quad (1.20)
\end{aligned}$$

biçiminde eksik  $H$ -fonksiyonları elde edilir [4, 69].

- (iii) (1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_1 = 0$ ,  $V_1 = 1$  ve

$z = -z$  seçilirse

$$\begin{aligned} & {}^{(\Gamma)}I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1, x), (1-u_i, U_i)_{2,n} (1-u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{2,q} \end{array} \right. \right] \\ &= {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

ve

$$\begin{aligned} & {}^{(\gamma)}I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1, x), (1-u_i, U_i)_{2,n} (1-u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{2,q} \end{array} \right. \right] \\ &= {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

biçiminde Srivastava tarafından tanımlanan eksik Fox–Wright  $\Psi$ -fonksiyonları elde edilir [69].

- (iv) (1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $U_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $V_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ), ve  $z = -z$  seçilirse

$${}^{(\Gamma)}I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, 1, x), (1-u_i, 1)_{2,p} (1-u_i, 1)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, 1)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.23)$$

$$= {}_p\Gamma_q \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, x), (u_i)_{2,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.24)$$

ve

$$({}^\gamma)I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1-u_1, 1, x), (1-u_i, 1)_{2,p} (1-u_i, 1)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, 1)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.25)$$

$$= {}_p\mathcal{Y}_q \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, x), (u_i)_{2,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.26)$$

biçiminde Srivastava tarafından tanımlanan eksik genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar elde edilir [68].

- (v) (1.12) ile tanımlanan fonksiyonda  $r = 1$  ve  $x = 0$  seçilirse,  $\ell = 1$ ,  $p_\ell = p$  ve  $q_\ell = q$  olmak üzere

$$(\Gamma)I_{p,q,1}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, 0), (u_i, U_i)_{2,n} (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \quad (1.27)$$

biçiminde Fox'ın  $H$ -fonksiyonu elde edilir [40, 67].

- (vi) (1.12) ve (1.15) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = 1 + q$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$  ve  $x = 0$  seçilirse

$$(\Gamma)I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1-u_1, U_1, 0), (1-u_i, U_i)_{2,p} (1-u_i, U_i)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.28)$$

$$= {}_p\Psi_q \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \quad (1.29)$$

biçiminde Fox'ın  $\Psi$ -fonksiyonu elde edilir [40, 67].

- (vii) (1.12) ile tanımlanan fonksiyonda  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = 1 + q$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,

$U_{i\ell} = 1, (i = 1, \dots, p), V_{j\ell} = 1, (j = 1, \dots, q + 1)$  ve  $x = 0$  seçilirse

$$({}^{\Gamma})I_{p,q+1,1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1 - u_1, 1, 0), (1 - u_i, 1)_{2,p} (1 - u_i, 1)_{p+1,p} \\ (1 - v_j, 1), (1 - v_j, 1)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.30)$$

$$= {}_pF_q \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_i)_{1,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.31)$$

biçiminde genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon elde edilir [14, 40, 67].

**Tanım 1.9** Srivastava ve meslektaşları tarafından tanıtılan [69],  $\bar{\gamma}_{p,q}^{m,n}(z)$  ve  $\bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n}(z)$  ile gösterilen eksik  $\bar{H}$ -fonksiyonlarının Mellin-Barnes tipi integral yardımıyla gösterilişi

$$\bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n}(z) = \bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.32)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{G}(\xi, x) z^{-\xi} d\xi, \quad (1.33)$$

biçimindedir. Burada

$$\bar{G}(\xi, x) = \frac{[\Gamma(1 - u_1 - U_1\xi, x)]^{\alpha_1} \prod_{j=1}^m \Gamma(v_j + V_j\xi) \prod_{i=2}^n [\Gamma(1 - u_i - U_i\xi)]^{\alpha_i}}{\prod_{j=m+1}^q [\Gamma(1 - v_j - V_j\xi)]^{\beta_j} \prod_{i=n+1}^p \Gamma(u_i + U_i\xi)}, \quad (1.34)$$

ve

$$\bar{\gamma}_{p,q}^{m,n}(z) = \bar{\gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] \quad (1.35)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{g}(\xi, x) z^{-\xi} d\xi, \quad (1.36)$$

biçimindedir. Burada

$$\bar{g}(\xi, x) = \frac{[\gamma(1 - u_1 - U_1\xi, x)]^{\alpha_1} \prod_{j=1}^m \Gamma(v_j + V_j\xi) \prod_{i=2}^n [\Gamma(1 - u_i - U_i\xi)]^{\alpha_i}}{\prod_{j=m+1}^q [\Gamma(1 - v_j - V_j\xi)]^{\beta_j} \prod_{j=n+1}^p \Gamma(u_i + U_i\xi)}, \quad (1.37)$$

biçimindedir. Buradaki  $L$  uygun bir integral eğrisi olmak üzere,  $0 \leq n \leq p$  ve  $1 \leq m \leq q$  olacak şekilde  $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$  biçiminde ve  $U_i, V_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $u_i, v_j \in \mathbb{C}$  ve  $x > 0$  olmak üzere,  $\bar{g}(\xi, x)$  ve  $\bar{G}(\xi, x)$  fonksiyonları (1.37) ve (1.34) biçiminde tanımlıdır.

(1.32) ve (1.35) ile tanımlanan fonksiyonlar parametrelerin özel seçimi ile aşağıdaki özel fonksiyonlara indirgenir:

- (i) (1.32) ve (1.35) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$  ve  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  seçilirse

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; 1 : x), (u_i, U_i; 1)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; 1)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] \\ = \Gamma_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; 1 : x), (u_i, U_i; 1)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; 1)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] \\ = \gamma_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

biçiminde eksik  $H$ -fonksiyonları elde edilir [4, 69].

- (ii) (1.32) ve (1.35) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $q = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ ,

( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$  ve  $z = -z$  seçilirse

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1,p}^{p,q+1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1; 1 : x), (1-u_i, U_i; 1)_{2,p}, (1-u_i, U_i)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \\ = {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{1,p}^{p,q+1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1; 1 : x), (1-u_i, U_i; 1)_{2,p}, (1-u_i, U_i)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{2,q}, (1-v_j, V_j; 1)_{q+1,q} \end{array} \right. \right] \\ = {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

biçiminde Srivastava tarafından tanımlanan eksik Fox–Wright  $\Psi$ -fonksiyonları elde edilir [69].

- (iii) (1.32) ve (1.35) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $q = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $V_j = 1, U_i = 1$  for ( $i = 1, \dots, p$ ) ve  $z = -z$  seçilirse

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1,p}^{p,q+1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, 1; 1 : x), (1-u_i, 1; 1)_{2,p}, (1-u_i, 1)_{p+1,p} \\ (1-v_j, 1)_{1,q}, (1-v_j, 1; 1)_{q+1,q} \end{array} \right. \right] \\ = {}_p\Gamma_q \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, x), (u_i)_{2,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.42)$$

ve

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma}_{1,p}^{p,q+1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1; 1 : x), (1-u_i, U_i; 1)_{2,p}, (1-u_i, U_i)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{2,q}, (1-v_j, V_j; 1)_{q+1,q} \end{array} \right. \right] \\ &= {}_p\gamma_q \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, x), (u_i)_{2,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.43)$$

biçiminde Srivastava tarafından tanımlanan eksik genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar elde edilir [68].

(iv) (1.32) ile tanımlanan fonksiyonda  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  ve  $x = 0$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; 1 : 0), (u_i, U_i; 1)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; 1)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] \\ &= H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (1.44)$$

biçiminde Fox'ın  $H$ -fonksiyonu elde edilir [40, 67].

(v) (1.32) ve (1.35) ile tanımlanan fonksiyonlarda  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $m = 1$ ,  $q = q+1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$  ve  $x = 0$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_{1,p}^{p,q+1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (1-u_1, U_1; 1 : 0), (1-u_i, U_i; 1)_{2,p}, (1-u_i, U_i)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1-v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] \\ &= {}_p\Psi_q \left[ z \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

biçiminde Fox'ın  $\Psi$ -fonksiyonu elde edilir [40, 67].

(vi) (1.32) ile tanımlanan fonksiyonda  $j = 1, \dots, n$  için  $\alpha_j = 1$ ;  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ;  $j = m+1, \dots, q, q = q+1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ ,

$(i = 1, \dots, p), v_{q+1} = 0, V_{q+1} = 1, z = -z, U_i = V_j = 1$  ve  $x = 0$  seçilirse

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_{p,q+1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1 - u_1, 1; 1 : 0), (1 - u_i, 1; 1)_{2,p}, (1 - u_i, 1)_{p+1,p} \\ (0, 1), (1 - v_j, 1)_{1,q} \end{array} \right. \right] \\ & = {}_pF_q \left[ z \left| \begin{array}{c} (u_i)_{1,p} \\ (v_j)_{1,q} \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (1.46)$$

biçiminde genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu elde edilir [40, 67].

## 2 MATERYAL VE YÖNTEM

Kaotik hareket gösteren dinamik sistemlerin anormal reaksiyonunu ve reaksiyon kinetiğini açıklamak için, kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemler üzerinde durulur. 1994 yılında Zaslavsky [74], Hamiltonian Kaos için kesirli reaksiyon denklemini incelemiş ve daha sonra 1997 yılında Saichev ile birlikte reaksiyon denklemlerinin çözümleri ve uygulamaları üzerine tartışmışlardır [57]. Basit bir üretme-yok etme mekanizması için incelenen kesirli reaksiyon denklemi 2000 yılında Haubold ve Mathai tarafından ve 2002 yılında Saxena ve meslektaşları tarafından genişletilmiştir [60, 61, 62].

Bu bölümde daha önce Haubold, Mathai, Saxena ve meslektaşları tarafından verilen kesirli reaksiyon denklemlerinin birleştirici ve genişletici bir çözümü [22, 60, 61] üzerinde durularak, bu konu ile ilgili Saxena Mathai ve Haubold'un "Solution of the fractional reaction equation and the fractional diffusion equation" isimli çalışması ve Mathai ve Haubold'un "The Fractional Kinetics Equation and Thermonuclear functions" isimli çalışmalarının kısa bir özeti verilecektir [22, 64].

Bu bölümde elde edilmiş sonuçların çoğu, genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonları ile ifade edilmiştir ve bu ifadeler, sayısal hesaplamalar için uygun bir yapı sunar [22].

Güneş benzeri bir yıldızın teorik modellemesi, yıldızın içsel yapısını ve evrimini anlamak için temel bir çerçeve sunar. Bu modelleme, belirli varsayımlar altında ger-

çekleştirilir: Yıldızın küresel simetriye, dönmesizliğe ve manyetik alan olmamasına sahip olduğu düşünülür [22]. Ayrıca, termal ve hidrostatik denge koşulları karşılanırken, kimyasal bileşimin homojen olmadığı bir durumu ele alır [22].

Bu teorik modelleme, yıldızın özelliklerini karakterize eden kütle, parlaklık, yüzey sıcaklığı, yarıçap, merkezi yoğunluk ve merkezi sıcaklık gibi parametreleri içerir. Yıldızın iç yapısını tanımlayan dört adet bağımsız, lineer olmayan, birinci dereceden diferansiyel denkleme ek olarak, denklem durumu, nükleer enerji üretim hızı ve opaklık gibi ek bilgilerle desteklenir [22].

Yıldızın evrimi, kimyasal bileşiminin değişimini açıklayan ikinci bir diferansiyel denklemler sistemi tarafından yönetilir. Bu kinetik denklemler, her bir kimyasal türün yok olma ve üretme hızlarını tanımlar. Bu evrimsel süreçler, biyokimyasal reaksiyonlardan alınan modelleme yöntemlerinden ilham alır ve kimyasal reaksiyon ağları, dengesiz durumlar ve salınımlar gibi karmaşık olguları içerir [22].

Termonükleer reaksiyonların kararlılık incelemeleri, henüz tam olarak çözüme kavuşmamış olup, bu reaksiyon zincirlerinde olası kararsızlıkların Güneş gibi yıldızlarda dikkate alınması gerektiğine dair bir farkındalık vardır [22].

Reaksiyon kinetiği ve geri bildirim mekanizmalarının karmaşıklığını anlamak amacıyla temel bir denklem üzerinde durulmaktadır. Bu denklem, reaksiyon miktarını temsil eden  $X(t)$ 'ye odaklanmakta olup,  $\frac{dX}{dt}$  terimi ile reaksiyonun yok etme hızı  $d_r$  ve üretme hızı  $p_r$  arasındaki dengeyi ifade etmektedir:

$$\frac{dX}{dt} = -d_r + p_r.$$

Genel formdaki bu denklemde, yok etme ve üretme hızları  $d_r$  ve  $p_r$ , reaksiyon miktarına  $X$ 'e bağlı fonksiyonlar olarak düşünülür:  $d_r = d_r(X)$  ve  $p_r = p_r(X)$ . Bu bağıllık, reaksiyonun karmaşıklığını artırır çünkü yok etme veya üretme, anlık reaksiyon miktarı  $X(t)$ 'ye ek olarak geçmişteki değerler  $X(\tau)$ ,  $\tau < t$  üzerinden de belirlenir. Matematiksel olarak, bu bağımlılık şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{dX}{dt} = -d_r(X_t) + p_r(X_t),$$

burada  $X_t$  fonksiyonu, geçmişteki reaksiyon miktarını temsil eder:  $X_t(t^*) = X(t - \tau^*)$ ,  $\tau^* > 0$ . Özel bir durumu ele alarak,

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X(t),$$

denkleminde  $\alpha > 0$  sabiti ile ifade edilen durum, reaksiyon miktarının azaldığını belirtir. Bu ifadeler, reaksiyon kinetiği ve geri bildirim karmaşıklığını vurgulayarak, güneş benzeri yıldızların içsel yapısının anlaşılmasına katkı sağlar [22].

Sonuç olarak, yıldızların kompleks iç yapıları ve evrimsel süreçlerine dair teorik bir çerçeve sunarken, gelecek bölümlerde daha geniş kapsamlı sonuçların çıkarılacağına işaret eder.

Yazarlar, çalışmalarında diferansiyel denklemin standart çözümünü tartışırken, daha sonra kesirli diferansiyel denkleme genişletip çözmüşlerdir [22].

Türlerin üretimi ve yok edilmesi,  $i$  türünün  $X_i$  sayı yoğunluğunu zaman içinde değiştiren kinetik denklemlerle açıklanır.  $\langle \sigma v \rangle_{mn}$ ,  $m$  ve  $n$  türlerini içeren bir etkileşim için reaksiyon olasılığı olsun.  $i$  türünü üreten veya yok eden tüm reaksiyonlar üzerinden toplam hesaba katılırsa,

$$\frac{dX_i}{dt} = - \sum_j X_i X_j \langle \sigma v \rangle_{ij} + \sum_{k,l \neq i} X_k X_l \langle \sigma v \rangle_{kl}, \quad (2.1)$$

kinetik denklemi elde edilir [21].  $\rho$  kütle yoğunluğuna sahip bir gaz için  $i$  türünün  $X_i$  sayı yoğunluğu, bolluğu  $Y_i$  ile temsil edilmek üzere

$$X_i : X_i = \rho N_A \frac{Y_i}{A_i},$$

bağıntısı ile verilir. Burada  $N_A$  Avogadro sayısı ve  $A_i$  kütle biriminde  $i$  türünün kütlesidir.  $i$  türünün yok edilmesi için  $j$  türü tarafından belirlenen ortalama ömür  $\tau_j(i)$  ve  $\lambda_j(i)$ ,  $j$  türü ile etkileşimde bulunan  $i$  türünün bozunma hızını temsil etmek üzere

$$\lambda_j(i) = \frac{1}{\tau_j(i)} = X_j \langle \sigma v \rangle_{ij} = \rho N_A \frac{X_j}{A_j} \langle \sigma v \rangle_{ij},$$

bağıntısı ile verilir [21]. Bu denklem, (2.1) kinetik denklemi için  $\langle \sigma v \rangle_{ij}$ 'nin fiziksel önemini ortaya koyar. (2.1) denklemi

$$\frac{dX_i}{dt} = -X_i\gamma_i + X_i\delta_i = -(\gamma_i - \delta_i)X_i, \quad (2.2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $a_i$ , birim hacim başına birim zamandaki istatistiksel olarak beklenen  $i$  türünün yok edilen reaksiyon sayısıdır. Aynı zamanda  $a_i$  reaksiyonun ilerleme hızının bir ölçüsüdür. Öte yandan  $X_i\delta_i$ , sabit bir  $X_i$  için bir birim hacim başına birim zamandaki istatistiksel olarak beklenen  $i$  türünün üretilen reaksiyon sayısıdır.  $i$  türünün sayı yoğunluğu  $X_i = X_i(t)$ , zamanın bir fonksiyonu iken,  $\langle \sigma v \rangle_{mn}$ , termonükleer fonksiyonları içerdiği için [21], sadece gazın sıcaklığına bağlı değil aynı zamanda  $t$  ve  $N_i$ 'ye de bağlı olmadığı varsayılmaktadır. Buna göre, (2.2) denklemi için üç farklı durum söz konusudur:

$$\alpha_i = \gamma_i - \delta_i = 0, \quad \alpha_i < 0 \quad \text{ve} \quad \alpha_i > 0.$$

Bu durumların ilki olan  $\alpha_i = 0$  durumu,  $X_i$ 'nin zaman içinde değişmediği anlamına gelir, yani  $X_i$ ,  $i$  türünü içeren ileri ve geri reaksiyonların dengede olduğu bir değer halini alır ve bir sabit nokta olarak adlandırılır. Bu durumun dışındaki  $\alpha_i < 0$  durumunda,  $i$  türünün üretilmesinin ve  $\alpha_i > 0$  durumunda,  $i$  türünün yok edilmesinin ön plana çıktığını gösterir.  $\alpha_i > 0$  durumu için,  $t = 0$  anındaki  $i$  türünün sayı yoğunluğu  $X_i(t = 0) = X_0$  ile verilmek üzere aşağıdaki başlangıç-değer problemi gerçekleşir [22]:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = -\alpha_i X_i(t). \quad (2.3)$$

Bu problem için çözümün

$$X_i(t) = X_0 \exp(-\alpha_i t),$$

olduğu aşikârdır. Bu çözümdeki üstel fonksiyon, değişkenin değerine bağlı olarak değişkenin yok olma hızının değerine orantılı olduğu lineer bir tek boyutlu diferan-

siyel denklemin çözümünü temsil eder [22].

Haubold ve Mathai [22], (2.3) denkleminde  $i$  indisini ihmal edip, Riemann integral operatörü  ${}_0D_t^{-1}$  ile gösterilmek üzere

$$X(t) - X_0 = -\alpha {}_0D_t^{-1} X(t), \quad (2.4)$$

biçiminde integre etmişlerdir. Daha sonra, bu denklemde  ${}_0D_t^{-1}$  Riemann operatörü yerine  $\nu$ . mertebeden  ${}_0D_t^{-\nu}$  Riemann-Liouville kesirli integral operatörü kullanarak, (2.3) denkleminin karşılık gelen

$$X(t) - X_0 = -\alpha^\nu {}_0D_t^{-\nu} X(t), \quad (2.5)$$

kesirli kinetik denklemini ve Laplace dönüşümünü kullanarak çözümünü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} (\alpha t)^{\nu k}, \quad (2.6)$$

biçiminde elde etmişlerdir[22]. Bundan sonraki çalışmalarında Saxena, Mathai ve Haubold [64] tarafından daha genel olan birleştirilmiş kesirli reaksiyon denklemleri üzerine çalışmışlar ve aşağıdaki teoremi ispat etmişlerdir.

**Teorem 2.1**  $\operatorname{Re}(\nu_j) > 0, a_j > 0, j \in \mathbb{N}$  ve  $f(t), \mathbb{R}^+$  üzerinde tanımlı belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$X(t) - X_0 f(t) = - \sum_{j=1}^n a_{j0} {}_0D_t^{-\nu_j} X(t), \quad (2.7)$$

birleştirici reaksiyon denklemi çözülebilir ve çözüm  $r_1, \dots, r_n$  olmak üzere  $r_1 + \dots +$

$r_{n-1} = l$  koşulunu sağlayan tüm negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$X(t) = X_0 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{r_1+\dots+r_{n-1}=l} \frac{(l)!}{(r_1)! \dots (r_{n-1})!} \left\{ \prod_{\mu=1}^{n-1} (a_{\mu+1})^{r_{\mu}} \right\} \int_0^t f(u) (t-u)^{\sum_{\mu=1}^{n-1} \nu_{\mu+1} - 1} E_{\nu_1, \sum_{\mu=1}^{n-1} \nu_{\mu+1}}^{(l+1)} [-a_1 (t-u)^{\nu_1}] du, \quad (2.8)$$

olarak elde edilir [64].

Saxena, Mathai ve Haoubold aynı çalışmada, bu teoremin özel hallerini incelemiş ve aşağıdaki denklemleri ve çözümleri elde etmişlerdir. Teorem 2.1' de  $\nu_j = j\nu, a_j = \binom{n}{j} c^{j\nu}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) seçilirse, aşağıdaki genelleştirilmiş kesirli kinetik denklem ve çözümünü veren teorem elde edilir [64].

**Teorem 2.2**  $\operatorname{Re}(\nu) > 0, c > 0$  ve  $f(x) \in \mathbb{R}$  ise, o zaman aşağıdaki denklem sağlanır:

$$X(t) - X_0 f(t) = - \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} c^{\nu r} D_t^{-\nu r} X(t), \quad (2.9)$$

ve çözümü şu şekildedir:

$$X(t) = X_0 \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) E_{\nu,1}^n [-c^{\nu} (t-u)^{\nu}] du, \quad (2.10)$$

burada  $E_{\nu,1}^n$ , genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu temsil etmektedir [64].

Bu teoremde  $n = 1$  ise, Hille ve Tamarkin'in 1930'da verdiği aşağıdaki sonuç elde edilir [64].

**Önerme 2.1**  $\operatorname{Re}(\nu) > 0, c > 0$  ve  $f \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$X(t) - X_0 f(t) = -c^{\nu} D_t^{-\nu} X(t), \quad (2.11)$$

integral denkleminin çözümü:

$$X(t) = X_0 \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) E_{\nu} [-c^{\nu} (t-\tau)^{\nu}] d\tau, \quad (2.12)$$

olarak verilir. Burada  $E_\nu$  Mittag-Leffler fonksiyonunu temsil etmektedir [64].

### 3 BULGULAR ve TARTIŞMA

Literatürde birçok çalışmada, Teorem 2.1 ve Teorem 2.2’de verilen kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemler için seçilen  $f(t)$  özel fonksiyonlar için elde edilen denklem ve çözümleri uygulamalarda oldukça yararlı sonuçlar elde edilmesini sağlar. Örneğin, Choi ve Kumar [27],  $n=1$  ve

$$\Omega_{p_\kappa, q_\kappa, \tau_\kappa; \rho}^{m, n}(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(v_j + V_j \xi) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - v_i - V_i \xi)}{\sum_{\kappa=1}^{\rho} \tau_\kappa \prod_{j=m+1}^{q_\kappa} \Gamma(1 - v_{j\kappa} - V_{j\kappa} s) \prod_{j=n+1}^{p_\kappa} \Gamma(u_{i\kappa} + U_{i\kappa} s)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f(t) &= t^{\lambda-1} \mathfrak{S}[t] = t^{\lambda-1} \mathfrak{S}_{p_\kappa, q_\kappa, \tau_\kappa; \rho}^{m, n} \left[ ht^\sigma \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1, n}, [\tau_\kappa(u_{i\kappa}, U_{i\kappa})]_{n+1, p_\kappa; r} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, [\tau_\kappa(v_{j\kappa}, V_{j\kappa})]_{m+1, q_\kappa; r} \end{array} \right. \right] \\ &:= \frac{1}{2\pi i} \int_L \Omega_{p_\kappa, q_\kappa, \tau_\kappa; \rho}^{m, n}(\xi) (ht^\sigma)^{-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (3.1)$$

için

$$X(t) - X_0 t^{\lambda-1} \mathfrak{S}_{p_\kappa, q_\kappa, \tau_\kappa; \rho}^{m, n} \left[ ht^\sigma \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1, n}, [\tau_\kappa(u_{i\kappa}, U_{i\kappa})]_{n+1, p_\kappa; \rho} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, [\tau_\kappa(v_{j\kappa}, V_{j\kappa})]_{m+1, q_\kappa; \rho} \end{array} \right. \right] = -c_0^\nu {}_0 D_t^{-\nu} X(t) \quad (3.2)$$

kesirli kinetik denklemin çözümünü

$$\begin{aligned}
X(t) &= X_0 t^{\lambda-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-c_0^\nu t^\nu)^k \\
&\times \mathfrak{S}_{p_\kappa+1, q_\kappa+1, \tau_\kappa; \rho}^{m, n+1} \left[ ht^\sigma \left| \begin{array}{c} (1-\lambda, \sigma), (u_i, U_i)_{1, n}, [\tau_\kappa(u_{i\kappa}, (2-\lambda-\nu k, \sigma), U_{i\kappa})]_{n+1, p_\kappa; \rho} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, [\tau_\kappa(v_{j\kappa}, V_{j\kappa})]_{m+1, q_\kappa; \rho} \end{array} \right. \right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak bulmuştur. Burada fonksiyonun kompleks integral gösterilişi incelendiğinde çekirdeğin, yani  $\Omega_{p_i, q_i, \tau_i; r}^{m, n}(s)$  fonksiyonunun tek değişkene bağlı olduğu görülmektedir. Literatürdeki birçok çalışmada kesirli reaksiyon ve kinetik denklemler bu şekilde integral gösterilişinde çekirdeği tek değişkene bağlı özel fonksiyonlar için incelenmiş ve çözülmüştür. Tezin bu bölümünde, iki değişkenli çekirdek yardımıyla tanımlanan özel bir  $\mathcal{F}$  fonksiyon sınıfı tanımlanarak, bu fonksiyon sınıfı için kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemlerinin farklı tipte özel halleri ve çözümleri incelenecektir.

**Tanım 3.1**  $\mathcal{E}(t)$  fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlayan belirli bir çekirdek fonksiyonu  $\mathbb{E}(\xi, x)$  için Mellin-Barnes tipi bir kontür integral temsili ile tanımlanır:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) t^{-\xi} d\xi.$$

Burada:

- $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonu analitik,
- $L = L_{i\infty}(c \in \mathbb{R})$ , kompleks düzlemde  $c$  gerçel bir sayı olmak üzere doğrusal bir yol olarak seçilir. Bu yol,  $c - i\infty$  noktasından  $c + i\infty$  noktasına uzanır.
- $t$  reel olmayan bir sayıdır ve  $t \neq 0$  olmalıdır.

Bu genel tanım altında,  $\mathcal{E}(t)$  fonksiyonu, çeşitli analitik çekirdek fonksiyonları  $\mathbb{E}(\xi, x)$  için integral temsili ile ifade edilir. Bu tanım ile  $\mathcal{E}(t)$  fonksiyonunun hangi

türden çekirdek fonksiyonlarına sahip olduğu ve integralin nasıl hesaplandığı genel bir şekilde açıklanır. Çekirdek fonksiyonunun daha spesifik özellikleri bu genel tanımı daha fazla kısıtlayarak belirlenebilir.

**Tanım 3.2**  $\mathbb{E}(\xi, x)$  analitik bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçeklensin:

(1)  $P(\xi, x)$  ve  $Q(\xi, x)$  analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathbb{E}(\xi, x) = \frac{P(\xi, x)}{Q(\xi, x)},$$

biçiminde kesirli bir fonksiyon olarak ifade edilebilsin.

(2)  $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonu,  $\xi$  ve  $x$  'e bağlı olarak sınırlı olsun, yani

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi, x) = 0,$$

olsun.

(3)  $\mathbb{E}(\xi, x)$  fonksiyonunun belirli bir  $R > 0$  yarıçapında yani  $|\xi| < R$  içinde analitik olsun.

Bu koşulları sağlayan  $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonları, aşağıdaki gibi bir fonksiyon sınıfını oluşturur:

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{E}(t) \mid \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{P(\xi, x)}{Q(\xi, x)} t^{-\xi} d\xi, L = L_{ic\infty} (c \in \mathbb{R}), t \neq 0 \right\}.$$

Burada  $\mathcal{F}$  kümesi, çeşitli  $\mathcal{E}(t)$  fonksiyonlarını içeren bir sınıftır. Bu fonksiyonlar, tanım belirtilen koşulları ve çekirdek fonksiyonlarını sağladıkları sürece bu kümede yer alır.

Teorem 2.1 ve Teorem 2.2'de verilen kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemleri  $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$  olmak üzere

$$f(t) = t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu),$$

fonksiyonu için incelenirse tezin amacına hizmet edecek olan aşağıdaki ana iki teorem elde edilir:

**Teorem 3.1**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu) = - \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-\nu_j} X(t), \quad (3.4)$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma\left(\nu_1 \tau + \delta + \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi\right)} a^{-\lambda\xi} t^{-\mu\xi} d\xi, \quad (3.5)$$

biçimindedir. Burada  $\mathcal{E}(a^\lambda t^\mu)$  fonksiyonu iki değişkenli çekirdeğe sahip kompleks bir integraldir.

**İspat:**

$$f(t) = t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu) = \frac{t^{\delta-1}}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) t^{-\mu\xi} a^{-\lambda\xi} d\xi, \quad (3.6)$$

olmak üzere fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t); s\} = f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \Gamma(\delta - \mu\xi) s^{\mu\xi - \delta} a^{-\lambda\xi} d\xi, \quad (3.7)$$

kullanılarak (3.4) kesirli reaksiyon denkleminde eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır ve  $\mathcal{L}\{X(t); s\} = \mathcal{X}(s)$  yalnız bırakılırsa

$$\mathcal{X}(s) = X_0 \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_L \mathbb{E}(\xi, x) \Gamma(\delta - \mu\xi) s^{\mu\xi - \delta} a^{-\lambda\xi} d\xi}{1 + a_1 s^{-\nu_1} + \dots + a_n s^{-\nu_n}},$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{j=1}^n a_j s^{-\nu_j} < 1 + a_1 s^{-\nu_1}$$

koşulu altında

$$\mathcal{X}(s) = X_0 \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) s^{\mu\xi - \delta} \Gamma(\delta - \mu\xi) a^{-\lambda\xi} d\xi \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{\left( \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} s^{-\nu_{j+1}} \right)^\ell}{(1 + a_1 s^{-\nu_1})^{\ell+1}}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\left( \sum_{\kappa=1}^{\eta} x_{\kappa} \right)^{\rho} = \sum_{k_1 + \dots + k_{n-1} = \rho} \frac{(\rho)!}{(k_1)! \dots (k_{n-1})!} \prod_{\mu=1}^{\eta} x_{\mu}^{k_{\mu}},$$

binom açılımı uygulanırsa

$$\mathcal{X}(s) = X_0 \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \Gamma(\delta - \mu\xi) a^{-\lambda\xi} \times \left( \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{k_1 + \dots + k_{n-1} = \rho} \frac{(\rho)!}{(k_1)! \dots (k_{n-1})!} \frac{\left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{k_{\eta}} \right\} s^{-\sum_{\eta=1}^{n-1} \eta_{n+1} + \mu\xi - \delta}}{(1 + a_1 s^{-\nu_1})^{\ell+1}} \right) d\xi,$$

biçiminde yazılır. Bu fonksiyonda, iyi bilinen

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\gamma} (1 - as^{-\beta})^{-\delta}; t \right\} = t^{\gamma-1} E_{\beta, \gamma}^{\delta} (at^{\beta})$$

formülü kullanılarak ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{k_1+\dots+k_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(k_1)! \dots (k_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{r_\eta} \right\} \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \Gamma(\delta - \mu\xi) a^{-\lambda\xi} \left[ \begin{matrix} \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi + \delta - 1 \\ t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi + \delta} \\ E^{\ell+1}_{\nu_1, \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi + \delta} \\ (-a_1 t^{\nu_1}) \end{matrix} \right] d\xi,$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözümde

$$E^{\ell+1}_{\nu_1, \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi + \delta} (-a_1 t^{\nu_1}) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{\Gamma\left(\nu_1 \tau + \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi + \delta\right) (\tau)!},$$

olduğu bilindiğinden çözüm

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma\left(\nu_1 \tau + \delta + \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi\right)} a^{-\lambda\xi} t^{-\mu\xi} d\xi,$$

biçiminde elde edilir. ■

### Teorem 3.2

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu) = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t) \quad (3.8)$$

kesirli kinetik denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k t^{\delta+\nu k-1}}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma(\delta - \mu\xi + \nu k)} t^{-\mu\xi} a^{-\lambda\xi} d\xi \quad (3.9)$$

biçimindedir. Burada  $\mathcal{E}(a^\lambda t^\mu)$  fonksiyonu iki değişkenli çekirdeğe sahip kompleks bir integraldir.

**İspat:** (3.8) kesirli kinetik denklemi için verilen  $f(t) = t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu)$  fonksiyonunun integral gösterilişi (3.6) eşitliğinde verilmiştir. Bu fonksiyonun (3.7) ile verilen Laplace dönüşümü kullanılarak, (3.8) kesirli kinetik denklemine eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır ve  $\mathcal{L}\{X(t); s\} = \mathcal{X}(s)$  fonksiyonu yalnız bırakılırsa

$$\mathcal{X}(s) = X_0 \frac{s^{\nu r}}{(s^\nu + c^\nu)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \Gamma(\delta - \mu\xi) s^{\mu\xi - \delta} a^{-\lambda\xi} d\xi,$$

Burada, kuvvet serisi açılımı varsayılarak ve  $|c^\nu| < |s^\nu|$  koşulu altında, yukarıdaki denklem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathcal{X}(s) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-1)^k}{k!} c^{\nu k} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) s^{\mu\xi - \delta - \nu k} \Gamma(\delta - \mu\xi) a^{-\lambda\xi} d\xi,$$

Ters Laplace dönüşümü alınarak, denklemin çözümü aşağıdaki biçimde bulunur:

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} \frac{t^{\delta + \nu k - 1}}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma(\delta - \mu\xi + \nu k)} t^{-\mu\xi} a^{-\lambda\xi} d\xi.$$

■

$n = 1$  durumunda, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2, Bansal K.M., Kumar D, Harjule P. ve Singh J.'nin 2020'deki çalışmasına indirgenir [6].

Şimdi bu ana iki teorem için özel  $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonları seçerek elde edilecek olan denklemleri ve çözümleri inceleyelim.

Teorem 3.1 de  $\mathbb{E}(\xi, x)$  fonksiyonu yerine (1.14), (1.17), (1.37) ve (1.34) referanslarında tanımlanan  $\mathbb{K}(\xi, x)$ ,  $\mathbb{L}(\xi, x)$ ,  $\bar{g}(\xi, x)$  ve  $\bar{G}(\xi, x)$  fonksiyonları seçilirse aşağıdaki kesirli reaksiyon denklemleri ve çözümleri elde edilir.

**Önerme 3.1** Teorem 3.1 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \mathbb{K}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1(\Gamma)} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} I_{p_{\ell+1}, q_{\ell+1}, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.2** Teorem 3.1 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \mathbb{L}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1(\gamma)} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} I_{p_{\ell+1}, q_{\ell+1}, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.3** Teorem 3.1 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \overline{\mathbb{G}}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \overline{\Gamma}_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times \bar{\Gamma}_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2, n}, (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right], \quad (3.10)$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.4** Teorem 3.1 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \bar{g}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\gamma}_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2, n}, (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times \bar{\gamma}_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2, n}, (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right], \quad (3.11)$$

fonksiyonudur.

Teorem 3.2 de  $\mathbb{E}(\xi, x)$  fonksiyonu yerine (1.14), (1.17), (1.34) ve (1.37) referanslarında tanımlanan  $\mathbb{K}(\xi, x)$ ,  $\mathbb{L}(\xi, x)$ ,  $\bar{G}(\xi, x)$  ve  $\bar{g}(\xi, x)$  fonksiyonları seçilirse aşağıdaki kesirli kinetik denklemler ve çözümleri elde edilir.

**Önerme 3.5** Teorem 3.2 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \mathbb{K}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} (\Gamma) I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right] \\ = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0 D_t^{-p\nu} X(t), \quad (3.12)$$

kesirli kinetik denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \\ \times {}^{(\Gamma)}I_{p\ell+1, q\ell+1, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.6** Teorem 3.2 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \mathbb{L}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}^{(\gamma)}I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j)_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right] \\ = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t), \quad (3.13)$$

kesirli kinetik denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \\ \times {}^{(\gamma)}I_{p\ell+1, q\ell+1, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.7** Teorem 3.2 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \bar{G}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\Gamma}_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2, n}, (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] \\ = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t), \quad (3.14)$$

kesirli kinetik denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} \times \bar{\Gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right], \quad (3.15)$$

fonksiyonudur.

**Önerme 3.8** Teorem 3.2 de  $\mathbb{E}(\xi, x) = \bar{g}(\xi, x)$  seçilirse,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t), \quad (3.16)$$

kesirli kinetik denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} \times \bar{\gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right], \quad (3.17)$$

fonksiyonudur.

Bu önermelerde bulunan özel fonksiyonların özel durumları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 3.1** Önerme 3.1 veya Önerme 3.2 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $x = 0$  seçilir ve (1.18) ile verilen bağıntı kullanılırsa

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.2** (i) Önerme 3.1 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$  seçilirse ve (1.19) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$  ve  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  seçilir ve (1.38) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \Gamma_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-\nu_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} \Gamma_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

(ii) Önerme 3.2 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$  seçilirse ve (1.20) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.4 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$  ve  $j = m + 1, \dots, q$  için

$\beta_j = 1$  seçilirse ve (1.39) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \gamma_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} \gamma_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.3** (i) Önerme 3.1 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1, m = 1, n = p_\ell = p, q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_1 = 0, V_1 = 1, z = -z$  seçilirse ve (1.21) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1, j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1, m = 1, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_{q+1} = 0, V_{q+1} = 1, z = -z$  seçilir ve (1.40) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

- (ii) Önerme 3.2 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1, m = 1, n = p_\ell = p, q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_1 = 0, V_1 = 1, z = -z$  seçilirse ve (1.22) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.4 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1, j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1, q = q + 1, m = 1, n = p, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_{q+1} = 0, V_{q+1} = 1, z = -z$  seçilir ve (1.41) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1} = \rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

- Sonuç 3.4** (i) Önerme 3.1 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1, m = 1, n = p_\ell = p, q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_{q+1} = 0, V_{q+1} = 1, z = -z, U_{i\ell} = 1, (i = 1, \dots, p), V_{j\ell} = 1, (j = 1, \dots, q + 1), z = -z$  seçilirse ve (1.24) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $i = 1, \dots, n$  için  $\beta_j = 1, q = q + 1, m = 1, n = p, v_j = 1 - v_j, (j = 1, \dots, q + 1), u_i = 1 - u_i, (i = 1, \dots, p), v_{q+1} = 0, V_{q+1} = 1, V_j = 1, (j = 1, \dots, q + 1), U_i = 1, (i = 1, \dots, p), z = -z$  seçilir ve

(1.42) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

- (ii) Önerme 3.2 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $U_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $V_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $z = -z$  seçilirse ve (1.26) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.4 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $V_j = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $U_i = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $z = -z$  seçilir ve (1.43) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\mathcal{Y}_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_i)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1} \mathcal{Y}_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.5** Önerme 3.1 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$  ve  $x = 0$  seçilirse ve (1.27) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  ve  $x = 0$  seçilir ve (1.44) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_{H_{p,q}^{m,n}} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0 D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{H_{p+1,q+1}^{m,n+1}} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.6** Önerme 3.1 veya Önerme 3.2 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$  seçilirse ve (1.29) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 veya Önerme 3.4 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,

$z = -z$ , seçilir ve (1.45) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1} = \rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.7** Önerme 3.1 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $A_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $B_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $x = 0$  seçilirse ve (1.31) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.3 de verilen kesirli reaksiyon denklemi ve çözümünde  $j = 1, \dots, n$  için  $\alpha_j = 1$ ;  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ;  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ ,  $u_i = 1 - u_i$ ,  $v_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $z = -z$ ,  $U_i = V_j = 1$ ,  $x = 0$  seçilir ve (1.46) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_pF_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1} = \rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}F_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (a_i)_{1,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.8** Önerme 3.5 veya Önerme 3.6 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $x = 0$  seçilir ve (1.18) ile verilen bağıntı kullanılırsa

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemini ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.9** (i) Önerme 3.5 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$  seçilirse ve (1.19) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$  ve  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  seçilir ve (1.38) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \Gamma_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemini ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} \Gamma_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

(ii) Önerme 3.6 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$  seçilirse ve (1.20) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.8 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$  ve  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$

seçilirse ve (1.39) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \gamma_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} \gamma_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.10** (i) Önerme 3.5 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_1 = 0$ ,  $V_1 = 1$ ,  $z = -z$  seçilirse ve (1.21) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$  seçilir ve (1.40) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

(ii) Önerme 3.6 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_1 = 0$ ,  $V_1 = 1$ ,  $z = -z$  seçilirse ve (1.22) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da

Önerme 3.8 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q+1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$  seçilir ve (1.41) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.11** (i) Önerme 3.5 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q+1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $A_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $B_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $z = -z$  seçilirse ve (1.24) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m+1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q+1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $V_j = 1$ , ( $j = 1, \dots, q+1$ ),  $U_i = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $z = -z$  seçilir ve (1.42) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

Benzer biçimde,

- (ii) Önerme 3.6 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $A_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $B_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $z = -z$  seçilirse ve (1.26) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.8 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $V_j = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $U_i = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $z = -z$  seçilir ve (1.43) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (a_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_i)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.12** Önerme 3.5 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$  ve  $x = 0$  seçilirse ve (1.27) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$  ve  $x = 0$  seçilir ve (1.44) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} H_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.13** Önerme 3.5 veya Önerme 3.6 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $x = 0$  seçilirse ve (1.29) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 veya Önerme 3.8 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $i = 1, \dots, n$  için  $\alpha_i = 1$ ,  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ,  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $x = 0$  seçilir ve (1.45) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemini ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Psi_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

**Sonuç 3.14** Önerme 3.5 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p_\ell = p$ ,  $q_\ell = q_\ell + 1 = q + 1$ ,  $v_j = 1 - v_j$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $u_i = 1 - u_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $v_{q+1} = 0$ ,  $V_{q+1} = 1$ ,  $z = -z$ ,  $U_{i\ell} = 1$ , ( $i = 1, \dots, p$ ),  $V_{j\ell} = 1$ , ( $j = 1, \dots, q + 1$ ),  $x = 0$  seçilirse ve (1.31) ile verilen bağıntı kullanılırsa, ya da Önerme 3.7 de verilen kesirli kinetik denklem ve çözümünde  $j = 1, \dots, n$  için  $\alpha_j = 1$ ;  $j = m + 1, \dots, q$  için  $\beta_j = 1$ ;  $q = q + 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p$ ,  $v_j = 1 - v_j$ ,  $u_i = 1 - u_i$ ,  $v_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $z = -z$ ,  $U_i = V_j = 1$ ,  $x = 0$  seçilir ve (1.46) ile verilen bağıntı kullanılırsa,

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_pF_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçiminde kesirli kinetik denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} {}_{p+1}F_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (a_i)_{1,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü elde edilir.

## 4 SONUÇLAR

Bu bölümde, tez boyunca elde edilen sonuçlar verilecektir. İki değişkenli çekirdek yardımıyla tanımlanan özel bir fonksiyon sınıfı tanımlanarak bu fonksiyon sınıfı için çözülen kesirli reaksiyon ve kesirli reaksiyon denklemleri ve çözümleri aşağıdaki sonuçlar ile verilmiştir.

İki değişkenli çekirdek yardımıyla tanımlanan özel bir fonksiyon sınıfı ve özellikleri şu şekilde verilmiştir:

$\mathcal{E}(t)$  fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlayan belirli bir çekirdek fonksiyonu  $\mathbb{E}(\xi, x)$  için Mellin-Barnes tipi bir kontür integral temsili ile tanımlanır:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) t^{-\xi} d\xi,$$

Burada:

- $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonu analitik,
- $L = L_{i\infty}(c \in \mathbb{R})$ , kompleks düzlemde  $c$  gerçel bir sayı olmak üzere doğrusal bir yol olarak seçilir. Bu yol,  $c - i\infty$  noktasından  $c + i\infty$  noktasına uzanır.
- $t$  reel olmayan bir sayıdır ve  $t \neq 0$  olmalıdır.

$\mathbb{E}(\xi, x)$  analitik bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleştirin:

(1)  $P(\xi, x)$  ve  $Q(\xi, x)$  analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathbb{E}(\xi, x) = \frac{P(\xi, x)}{Q(\xi, x)},$$

biçiminde kesirli bir fonksiyon olarak ifade edilebilsin.

(2)  $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonu,  $\xi$  ve  $x$  'e bağlı olarak sınırlı olsun, yani

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi, x) = 0,$$

olsun.

(3)  $\mathbb{E}(\xi, x)$  fonksiyonunun belirli bir  $R > 0$  yarıçapında yani  $|\xi| < R$  içinde analitik olsun.

Bu koşulları sağlayan  $\mathbb{E}(\xi, x)$  çekirdek fonksiyonları, aşağıdaki gibi bir fonksiyon sınıfını oluşturur:

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{E}(t) \mid \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{P(\xi, x)}{Q(\xi, x)} t^{-\xi} d\xi, L = L_{i\infty} (c \in \mathbb{R}), t \neq 0 \right\},$$

Burada  $\mathcal{F}$  kümesi, çeşitli  $\mathcal{E}(t)$  fonksiyonlarını içeren bir sınıftır. Bu fonksiyonlar, tanımını belirtilen koşulları ve çekirdek fonksiyonlarını sağladıkları sürece bu kümede yer alır.

$\mathcal{E} \in \mathcal{F}$  olmak üzere

$$f(t) = t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu),$$

fonksiyonu için genel kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemlerin çözümünü veren aşağıdaki iki teorem ispatlandı:

#### **Teorem 4.1**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu) = - \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-\nu_j} X(t), \quad (4.1)$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma(\nu_1 \tau + \delta + \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} - \mu\xi)} a^{-\lambda\xi} t^{-\mu\xi} d\xi, \quad (4.2)$$

biçiminde elde edildi. Burada  $\mathcal{E}(a^\lambda t^\mu)$  fonksiyonu iki değişkenli çekirdeğe sahip kompleks bir integraldir.

#### Teorem 4.2

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \mathcal{E}(a^\lambda t^\mu) = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t), \quad (4.3)$$

kesirli kinetik denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k t^{\delta+\nu k-1}}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbb{E}(\xi, x) \frac{\Gamma(\delta - \mu\xi)}{\Gamma(\delta - \mu\xi + \nu k)} t^{-\mu\xi} a^{-\lambda\xi} d\xi, \quad (4.4)$$

biçimindedir. Burada  $\mathcal{E}(a^\lambda t^\mu)$  fonksiyonu iki değişkenli çekirdeğe sahip kompleks bir integraldir.

Bu iki teoremin uygulaması olarak literatür taraması sonucu çekirdeği çift değişkenli olan dört adet fonksiyon sonucu kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemler ve çözümlerini veren aşağıdaki önermeler elde edilmiştir:

#### Önerme 4.1

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1(\Gamma)} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{(\Gamma)} I_{p_{\ell+1}, q_{\ell+1}, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.2

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_{(\Gamma)} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{(\Gamma)} I_{p_{\ell+1}, q_{\ell+1}, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.3

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\Gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times \bar{\Gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.4

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_{j0} D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times \bar{\gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.5

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} (I) I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right]$$

$$= - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0 D_t^{-p\nu} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi elde edilir ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \\ \times {}^{(\Gamma)}I_{p\ell+1, q\ell+1, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonudur.

#### Önerme 4.6

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}^{(\gamma)}I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right] \\ = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \\ \times {}^{(\gamma)}I_{p\ell+1, q\ell+1, r}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1, x), (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{2, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.7

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\Gamma}_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2, n}, (u_i, U_i)_{n+1, p} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1, q} \end{array} \right. \right] \\ = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \times \bar{\Gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

#### Önerme 4.8

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \bar{\gamma}_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \times \bar{\gamma}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_1, U_1; \alpha_1 : x), (u_i, U_i; \alpha_i)_{2,n}, (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{n+1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j; \beta_j)_{m+1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

Bu önermelerde bulunan özel fonksiyonların özel durumları incelendiğinde aşağıdaki kesirli reaksiyon ve kesirli kinetik denklemler ve çözümleri elde edilmiştir.

#### Sonuç 4.1

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} I_{p_\ell, q_\ell, r}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ (v_j, V_j)_{1,m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} \Gamma_{p_\ell, q_\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p_\ell} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q_\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.2

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \Gamma_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0 D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} \Gamma_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.3

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \gamma_{p, q}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2, p} \\ (v_j, V_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0 D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} \gamma_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.4

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1 - \delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.5

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak elde edildi.

#### Sonuç 4.6

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemini ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!}$$

$$\times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü bulundu.

#### Sonuç 4.7

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_i)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemi ve

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}Y_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bu denklemin çözümü ispatlandı.

#### Sonuç 4.8

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_H_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{v_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1} + \delta - 1} {}_H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ \left( 1 - v_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} v_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bir fonksiyon olarak bulundu.

#### Sonuç 4.9

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-v_j} X(t),$$

biçiminde kesirli reaksiyon denklemin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}\Psi_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçimindeki fonksiyon olarak bulundu.

#### Sonuç 4.10

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_pF_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \sum_{j=1}^n a_j {}_0D_t^{-\nu_j} X(t),$$

kesirli reaksiyon denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^\rho \sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_{n-1}=\rho} \frac{(\rho)!}{(\kappa_1)! \dots (\kappa_{n-1})!} \left\{ \prod_{\eta=1}^{n-1} (a_{\eta+1})^{\kappa_\eta} \right\} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_\tau (-a_1 t^{\nu_1})^\tau}{(\tau)!} \\ \times t^{\sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1} + \delta - 1} {}_{p+1}F_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (a_i)_{1,p} \\ \left( 1 - \nu_1 \tau - \delta - \sum_{\eta=1}^{n-1} \nu_{\eta+1}, \mu \right), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak elde edildi.

#### Sonuç 4.11

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{p\nu} {}_0D_t^{-p\nu} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denklemin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^\nu)^k}{k!} t^{\delta + \nu k - 1} I_{p\ell, q\ell, r}^{m, n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1, n}, (u_{i\ell}, U_{i\ell})_{n+1, p\ell} \\ (1-\delta - \nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1, m}, (v_{j\ell}, V_{j\ell})_{m+1, q\ell} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.12

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \Gamma_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \Gamma_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak bulundu.

#### Sonuç 4.13

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} \gamma_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi elde edildi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} \gamma_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

olarak bulundu.

#### Sonuç 4.14

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denklemin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\Gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

fonksiyonu olarak elde edildi.

**Sonuç 4.15**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Psi_q^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

kesirli kinetik denklemi elde edildi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Psi_{q+1}^{(\gamma)} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, U_1, x), (u_i, U_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

olarak bulundu.

**Sonuç 4.16**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\Gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denklem bulundu ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\Gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edildi.

**Sonuç 4.17**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p\gamma_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (a_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denkleminin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+vk-1} {}_{p+1}\gamma_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{c} (1-\delta, \mu), (u_1, x), (a_i)_{2,p} \\ (1-\delta-vk, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde elde edilmiştir.

**Sonuç 4.18**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p H_{p,q}^{m,n} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0 D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denklemin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} {}_p H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde bulundu.

**Sonuç 4.19**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p \Psi_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (u_i, U_i)_{1,p} \\ (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0 D_t^{-pv} X(t),$$

kesirli kinetik denklemini elde edildi ve çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} {}_p \Psi_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (u_i, U_i)_{1,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (v_j, V_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçiminde ispatlandı.

**Sonuç 4.20**

$$X(t) - X_0 t^{\delta-1} {}_p F_q \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = - \sum_{p=1}^r \binom{r}{p} c^{pv} {}_0 D_t^{-pv} X(t),$$

biçimindeki kesirli kinetik denklemin çözümü

$$X(t) = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k (-c^v)^k}{k!} t^{\delta+\nu k-1} {}_p F_{q+1} \left[ t^\mu a^\lambda \left| \begin{array}{l} (1-\delta, \mu), (a_i)_{1,p} \\ (1-\delta-\nu k, \mu), (b_j)_{1,q} \end{array} \right. \right],$$

biçimindeki fonksiyon olarak elde edildi.



# Kaynakça

- [1] Abel, N.H. (1826). Auosung einer mechanischen Aufgabe. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1, 153-157.
- [2] Abel, N.H. (1881). Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales d'énies. Oeuvres Complètes, 1, 16-18.
- [3] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (1968). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York.
- [4] Bansal, M. K., Choi, J. (2019). A note on pathway fractional integral formulas associated with the incomplete H-Functions. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 5 (2019), Art. 133.
- [5] Bansal, M.K., Kumar, D. (2020). On the integral operators pertaining to a family of incomplete I-functions. AIMS Mathematics. 5, 1247–1259.
- [6] Bansal K.M., Kumar D., Harjule P., Singh J. (2020). Fractional Kinetic Equations Associated with Incomplete I-Functions. Fractal Fractional. 4(2) 19.
- [7] Caputo, M. (1969). Elasticità e Dissipazione. Zanichelli, Bologna.
- [8] Caputo, M. (1967). Linear Models of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent. Part II. Journal of the Royal Australian Society, 13, 529-539.
- [9] Das, S. (2007). Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer.

- [10] Davison, M., Essex, C. (1998). Fractional Differential Equations and Initial Value Problems. *Mathematical Scientist*, 23, 108–106.
- [11] Debnath, L., Bhatta, D. (2006) *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman and Hall/CRC.
- [12] Euler, L. (1738). De progressionibus transcendendibus seu quarum termini generales algebraicae dari nequeunt. *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, 5, 36-57. Translated to English by S. G. Langton, University of San Diego.
- [13] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, Toronto, and London.
- [14] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2. McGraw-Hill, New York, Toronto, and London.
- [15] Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris.
- [16] Gorenflo, R., Vessella, S. (1991). *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin Heidelberg.
- [17] Greer, H.R. (1858). On Fractional Differentiation. *Quarterly Journal of Mathematics*, 3, 327-330.
- [18] Grunwald, A.K. (1867). Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. *Zeit. für Mathematik und Physik*, 12, 441-480.
- [19] Hardy, G., Littlewood, J. (1928). Some Properties of Fractional Integrals. *Mathematische Zeitschrift*, 27(4), 565-606.
- [20] Hardy, G., Littlewood, J. (1932). Some Properties of Fractional Integrals, II. *Mathematische Zeitschrift*, 34, 403-439.
- [21] Haubold, H.J. and Mathai, A.M. (1995). A heuristic remark on the periodic variation in the number of solar neutrinos detected on Earth, *Astrophysics and Space Science*, 228, 113-134.

- [22] Haubold, H.J., Mathai, A.M. (2000). The fractional reaction equation and thermonuclear functions, *Astrophysics and Space Science*, 273, 53-63.
- [23] Heaviside, O. (1892). *Electrical Papers*. The Macmillan Company.
- [24] Hilfer, R. (Ed.) (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing Co.
- [25] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematical Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London, and New York.
- [26] Kiryakova, V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Longman Sci. & Techn., Harlow and J. Wiley & Sons, New York.
- [27] Kumar D., Choi J. (2016). Generalized fractional kinetic equations associated with aleph function. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 19(1), 145-155.
- [28] Lacroix, S. F. (1819). *Traite Du Calcul Differential et du Calcul Integral*, 2nd Vol. 3. Paris: Courcier, 409-410.
- [29] Laurent, H. (1884). Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3(3), 240-252.
- [30] Letnikov, A.V. (1868). *Theory of Differentiation with an Arbitrary Index* (Russian). *Moscow Mathematical Sbornik*, 3, 1-66.
- [31] Letnikov, A.V. (1872). *An Explanation of the Concepts of the Theory of Differentiation of Arbitrary Index* (Russian). *Moscow Mathematical Sbornik*, 6, 413-445.
- [32] Liouville, J. (1832a). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *Journal de l'École Royale Polytechnique*, 13, Section 21, 1-69.

- [33] Liouville, J. (1832b). Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. Journal de l'École Royale Polytechnique, 13, Sect. 21, 71-162.
- [34] Liouville, J. (1834). Memoire sur le théorème des fonctions complémentaires. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 11, 1-19.
- [35] Liouville, J. (1837). Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires. Journal de l'École Royale Polytechnique, 15(55), 58-84.
- [36] Machado, J.T., Kiryakova, V., Mainardi, F. (2011). Recent History of Fractional Calculus. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(3), 1140-1153.
- [37] Magnus, W., Oberhettinger, F. (1966) Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics.
- [38] Mainardi, F., Carpinteri, A. (Ed.) (1997). Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. V. 378 CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, Wien and New York.
- [39] Marchaud, A. (1927). Sur les dérivées et sur les différences des fonctions des variables réelles. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 9(6), 337-425.
- [40] Mathai, A.M., Saxena, R.K., Haubold H.J. (2010) The  $H$ -Function: Theory and Applications, New York, Dordrecht, Heidelberg and London: Springer.
- [41] McBride, A.C. (1979). Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions (Research Notes in Mathematics), 31. Pitman, 179 pp.
- [42] Miller, K. S., Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., New York.
- [43] Mittag-Leffler, G. M. (1903), Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ : Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 137, 554-558.

- [44] Nishimoto, K. (1991). *An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus: Integrals and Differentiation of Arbitrary Order (Calculus of the 21st Century)*. Descartes Press, Koriyama, Japan.
- [45] Oldham, K.B., Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York.
- [46] Oldham K.B., Spanier J., Myland, J. (2010) *An atlas of functions, 2ed.*, Springer.
- [47] Pertz, G.H., Gerhardt, C.J. (1849). *Leibnizens gesammelte Werke, Leibnizens mathematische Schriften, Erste Abtheilung, Band II, 301-302. Dritte Folge Mathematik (Erster Band)*. A. Asher & Comp.
- [48] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations, Volume 198 of Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego.
- [49] Prabhakar, T. R. (1971) A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel: *Yokohama Mathematical Journal*, 19, 7-15.
- [50] Rabotnov, Y.N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 7. Originally published in Russian as: *Polzuchest Elementov Konstruktsii*, Nauka, Moscow, 1966.
- [51] Riemann, B. (1876). "Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation." In *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, s. 331-344. Leipzig: Teubner. (Dover, New York, 1953).
- [52] Riesz, M. (1936). *L'intégrales de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes*. *Comptes Rendus du Congrès International de Mathématiques*, 2, 44-45.
- [53] Riesz, M. (1938). *L'intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*. *Acta Litteraria Academiae Scientiarum Szegediensis*, 9, 1-42.
- [54] Riesz, M. (1949). *L'intégrales de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*. *Acta Mathematica*, 81(1-2), 1-223.

- [55] Rubin, B. (1996). *Fractional Integrals and Potentials*. Addison–Wesley/Longman, Reading.
- [56] Sabatier, J., Agrawal, O.P. Machado, J.A.T. (2007) *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, Dordrecht.
- [57] Saichev, A. I., Zaslavsky, G. M. (1997). Fractional kinetic equations: solutions and applications. *Chaos*, 7, 753-784.
- [58] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- [59] Saxena, V. P. (1982). Formal solution of certain new pair of dual integral equations involving H-functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences India, Section A*, 52, 366–375.
- [60] Saxena, R. K., Mathai, A. M., Haubold, H. J. (2002). On fractional kinetic equations. *Astrophysics and Space Science*, 282, 281-287.
- [61] Saxena, R. K., Mathai, A. M., Haubold, H. J. (2004a). On generalized fractional kinetic equations. *Physica A*, 344, 657-664.
- [62] Saxena, R. K., Mathai, A. M., Haubold, H. J. (2004b). Unified fractional kinetic equation and a fractional diffusion equation. *Astrophysics and Space Science*, 290, 299-310.
- [63] Saxena, R. K., Mathai, A. M., Haubold, H. J. (2004c). Solution of generalized fractional reaction-diffusion equations. *Astrophysics and Space Science*, 305, 305-313.
- [64] Saxena, R.K., Mathai, A.M., Haubold, H.J. (2010). Solutions of the Fractional Reaction Equation and the Fractional Diffusion Equation. In: Haubold, H., Mathai, A. (eds) *Proceedings of the Third UN/ESA/NASA Workshop on the Inter-*

national Heliophysical Year 2007 and Basic Space Science. Astrophysics and Space Science Proceedings. Springer, Berlin, Heidelberg.

- [65] Shukla, A. K., Prajapati, J. C. (2007) On a generalized Mittag-Leffler function and its properties", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336, 797-811.
- [66] Sonin, N.Y. (1869). On Differentiation with Arbitrary Index. *Moscow Mathematical Sbornik*, 6(1), 1-38.
- [67] Srivastava, H. M., Gupta, K. C., Goyal, S. P. (1982). *The H-Functions of one and two variables with applications*. South Asian Publishers, New Delhi and Madras.
- [68] Srivastava, H.M., Chaudhry, M.A., Agarwal, R.P. (2012). The incomplete Pochhammer symbols and their applications to hypergeometric and related functions. *Integral Transforms and Special Functions*, 23, 659–683.
- [69] Srivastava, H. M., Saxena, R. K., Parmar, R. K. (2018). Some families of the incomplete H-Functions and the incomplete H-Functions and associated integral transforms and operators of fractional calculus with applications. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 25(1), 116–138.
- [70] Weyl, H. (1917). Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Ierteljshr Naturforsch Gesellsch Zurich*, 62, 296-302.
- [71] Wiman, A. (1905) U ber den fundamental Satz in der Theorie der Funktionen  $E_{\hat{i}\pm}(x)$ , *Acta Mathematica*, 29, 191-201.
- [72] Wright, E.M. (1933) On the coefficients of power series having exponential singularities: *Proceedings of the London Mathematical Society*, 8, 71-79.
- [73] Wright, E. M. (1935) The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function: *Proceedings of the London Mathematical Society*, 10(4), 286–293.

- [74] Zaslavsky, G. M. (1994). Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos.  
Physica D, 76, 110-122.



## ÖZGEÇMİŞ

Ecem Yaşar 1999'da Antalya Alanya'da doğdu. 2013 yılında Hasan Çolak Anadolu Lisesi'ne başladı. Lise eğitimini tamamladıktan sonra 2017 yılında Marmara Üniversitesi matematik bölümünde lisans eğitimine başladı. 2021 yılında lisans eğitimini tamamladıktan sonra aynı yıl Marmara Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimine matematik bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Anabilim Dalı'nda başladı. 2024 yılında yüksek lisans eğitimini "Belirli Tip Fonksiyon Sınıfı İçin Kesirli Reaksiyon ve Kesirli Kinetik Enerji Denklemleri" başlıklı tezi ile tamamladı.

