



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZAMAN GECİKMELİ BİR SÜRDÜRÜLEBİLİR TURİZM MODELİNİN DİNAMİĞİ VE HOPF ÇATALLANMASI

BÜNYAMİN KURTKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mustafa Taylan ŞENGÜL

İSTANBUL, 2024



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZAMAN GECİKMELİ BİR SÜRDÜRÜLEBİLİR TURİZM MODELİNİN DİNAMİĞİ VE HOPF ÇATALLANMASI

BÜNYAMİN KURTKAYA

(520921002)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mustafa Taylan ŞENGÜL

İSTANBUL, 2024

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başından itibaren çalışmamın her aşamasında bana destek olan Marmara Üniversitesi Öğretim Üyesi değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa Taylan ŞENGÜL'e ve Matematik bölümündeki tüm kıymetli hocalarıma, benden sevgisini, sabrını ve desteğini hiç esirgemeyen hayat arkadaşım Ezgi Dilek'e, hayatımı yoluna koymama destek olan beni sevgiyle ve saygıyla büyüten güzel aileme, yardımlarını ve dostluklarını esirgemeyen kalpleri güzel dostlarıma, gençliğimden bu yana bana yol gösteren kıymetli hocam ve ağabeyim Onur Nurer'e, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İçindekiler

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
1 GİRİŞ	1
1.1 Model	1
2 LİTERATÜR TARAMASI	3
3 MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1 Sabit Noktanın Kararlılık Analizi	5
3.1.1 Merkez Katman Teoremi	8
3.2 Hopf Çatallanmaları	10
3.2.1 Kritik-üstü Hopf Çatallanması	10
3.2.2 Kritik-altı Hopf Çatallanması	13
4 MODEL VE ANALİZ	15
4.1 Ana Sistemin İyi Konulmuşluğu	15
4.2 Zaman Gecikmesiz Sistemin Pozitif Dengesinin Varlığı ve Kararlılığı	16
4.3 Zaman Gecikmeli Sistemdeki Denge Noktası İçin Hopf Çatallanması	19
4.4 Hopf Çatallanması Analizi	28
4.4.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklem Formu	32
4.4.2 Eşlenik Operatör	33
4.4.3 A 'nın Özvektörleri	33

4.4.4	Eşlenik Özvektör	35
4.4.5	Normalizasyon Koşulu	37
4.4.6	Merkez Katman Analizi	38
4.5	Nümerik Simülasyonlar	48
5	SONUÇ	53
	KAYNAKÇA	54



ÖZET

ZAMAN GECİKMELİ BİR SÜRDÜRÜLEBİLİR TURİZM MODELİNİN DİNAMİĞİ VE HOPF ÇATALLANMASI

Bu çalışmada, koruma alanlarını ziyarete gelen turistler, çevre kirliliği ve sermaye stoku arasındaki ilişkileri sürdürülebilir turizm başlığı altında dikkate alarak, bir çevre koruma alanı modeli oluşturulacaktır. Bu model ziyaretçi turistlerin, çevre kirliliğinin ve sermaye stokunun dinamiğini tanımlayan üç adet doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemi ile modellenmiştir. Çevre koruma harcamaları ve sürdürülebilir turizmin gelişimi için, araştırmacıların büyük bir kısmı sosyo-ekolojik sistemlerin analizi; ekolojik, sosyal ve ekonomik faktörlerin beraber değerlendirilmesini mümkün kılan çeşitli modellemeler geliştirip bunlar üzerine çalışmalar yapmaktadır. Bu çalışmalar sürdürülebilir turizm için bir stratejik planlama yapabilme olanağı sağlamaktadır. Turistik tesisler sosyo-ekolojik sistem kabul edildiği gibi benzer şekilde çevre koruma alanları da sosyo-ekolojik sistem kabul edilmektedir. Koruma alanlarının çekiciliği bölgeye gelecek turist sayısını arttıracak ve bu durum ekonomik anlamda kalkınmaya katkı sağlasa bile bilinçsiz kitle turizmi nedeniyle ekolojik olarak bölgeye zarar verecektir. Ayrıca bölgenin çekiciliği nedeniyle artan turist sayısı belli bir eşikten sonra kalabalık etkisi yaratıp, bölgenin çekiciliği için olumsuz bir etkiye neden olacaktır. Turizm kalkınma için bir araçtır fakat bu araç düzgün kullanılmazsa ekosistemin yenilenebilir ve yenilenemeyen doğal kaynaklarının kalitesini bozabilmektedir. Bu bağlamda koruma alanlarının günümüzde çok fazla zarar görmesi üzerine, yapılan çalışmalar her zaman biz araştırmacılar için yol gösterici olmuştur.

Bu çalışmada tasarlanan modelde dinamikler kurgulanırken gerçeğe ve mantığa uygun olacak şekilde tasarlanmıştır. Önerilen modelde ziyaretçilerin sermaye ve ekonomik anlamda olumlu bir etkisi olduğu düşünülürken ekosistem bağlamında çevreye karşı olumsuz bir etkisinin olduğu düşünülmektedir. Ayrıca turistlerin sermayeye katkısı sayesinde, sermayedeki artış ve bu artışın getirisiyle sermayenin

bir kısmı çevrenin iyileştirilmesi, temizlenmesi yani onarımı için kullanılmaktadır. Öncelikle modelin pozitif bir denge noktasının varlığı gösterilecektir. Ardından bu denge noktasının kararlılık ve çatallanma analizi yapılacaktır. Zaman gecikmesi çatallanma parametresi olarak seçildiğinde pozitif dengenin yakınında Hopf çatallanma analizi yapılacaktır. Oluşturulan modelde Hopf çatallanmasının varlığı ve kararlılığı analiz edilerek incelenecektir. Hopf çatallanması matematiksel çatallanma teorisinde bir sistemin denge çözümünün kararlılığının değişmesi ve periyodik bir çözümün ortaya çıkması ile ilgilidir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığı ve Hopf çatallanmasının yönü ile ilgili formüller, normal form teorisi ve merkez katman teoremi uygulanarak gösterilecektir.

ABSTRACT

DYNAMICS AND HOPF BIFURCATION OF A SUSTAINABLE TOURISM MODEL WITH TIME DELAY

In this study, an expenditure model for an environmental protection area will be proposed, taking into account the relationships between tourists visiting the protected areas, the environmental pollution, and the capital stock. This problem is modeled by a system of three nonlinear ordinary differential equations that describe the dynamics of visiting tourists, the environmental pollution, and the capital stock. For environmental protection expenditures and the development of sustainable tourism, most researchers analyze socio-ecological systems. They develop and work on various models that make it possible to evaluate ecological, social, and economic factors together. These studies provide the opportunity to make strategic planning for sustainable tourism. Both touristic facilities and environmental protection areas are accepted as socio-ecological systems. The attractiveness of the protected areas will increase the number of tourists visiting the region. Even if this contributes to economic development, it may also ecologically damage the region due to mass tourism. In addition, the increasing number of tourists due to the attractiveness of the region will create a crowding effect after a certain threshold and will cause a negative effect on the attractiveness of the region. Tourism is a tool for development, but if this tool is not used properly, it can degrade the quality of the renewable and non-renewable natural resources of the ecosystem.

In the model designed in the study, the dynamics are designed to be in accordance with reality and logic. In our model, while the visitors have a positive effect in terms of capital and economy, it is thought that they have a negative effect on the environment in the context of the ecosystem. In addition, thanks to the contribution by the tourists to the capital, a part of the capital is stable used for the improvement of the environment. It is shown that the system possesses a positive equilibrium solution. It is shown that without time delay, this station is stable. When the time delay is

selected as the bifurcation parameter, a Hopf bifurcation analysis is performed near the positive equilibrium. The existence and the stability of Hopf bifurcation in the proposed model is analyzed. Hopf bifurcation is associated with the change of stability of an equilibrium solution and the emergence of a time periodic solution. The formulas for the stability of the bifurcated periodic solution and the direction of the Hopf bifurcation are analyzed by applying the normal form theory and the center manifold theorem.



1 GİRİŞ

1.1 Model

Günümüzde birçok çalışmanın koruma alanlarını konu alma sebebi doğal ekosistem bozulmasıdır. Korumalı bölgeler artık yalnızca ikonik doğal manzaraları, okyanus manzaralarını kaydetmek ve nesli tükenmekte olan yabani hayvanlara yaşam alanı sağlamak için değil, aynı zamanda çeşitli yerel toplulukların geçimine katkıda bulunarak turizm gelirleri yoluyla sivil ekonomileri ayağa kaldırmak, ulus ekonomisine katkı sağlamak ve turizm ile sağlanan gelirin sürdürülebilir olması açısından önemli bir yere sahiptir [1]. Çalışmamızın kökeni, Paulo Russu'nun 2004 yılında koruma alanları üzerine tasarladığı [2] modelinin çatallanma ve kararlılık analizine dayanmaktadır. Söz konusu çalışmadaki model, aşağıda verilen zaman gecikmeli üç boyutlu çevre koruma harcama modelidir.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= m_1 E(t) + m_2 K(t) - aV^2(t) \\ \dot{E}(t) &= r(\bar{P} - E(t)) - bV(t - \tau) + c\eta V(t - \tau) \\ \dot{K}(t) &= (1 - \eta)V(t - \tau) - \delta K(t).\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

Modelde kullanılan değişkenler şu şekildedir; V ziyaretçi sayısı, K sermaye stoku ve E çevrenin kalitesidir. Verilen parametrelerin tümü pozitif sabitlerdir ve şu şekildedir: m_1 çevre kalitesinin ziyaretçi değişim hızı üzerindeki etkisi ve m_2 sermaye stokunun ziyaretçi değişim hızı üzerindeki etkisidir. a parametresi kalabalıklaşma etkisini temsil eder. Yani ziyaretçi sayısı, korunan alanın ziyaretçiler açısından çekiciliğini giderek olumsuz yönde etkilemektedir. b , ziyaretçi başına kirlilik değişim oranıdır ve $\bar{P}$, kabul edilebilir maksimum kirlilik seviyesidir. r parametresi kirliliğin, çevre kalitesinin değişim hızı üzerindeki etkisini temsil eder. η çevrenin iyileştirilmesi için ayrılan sermaye payını temsil eder. c bu payın etkinliğini temsil eder. δ , belirli ekonomik sebeplerden (enflasyon gibi) dolayı sermaye stokunun azalmasını ifade eder. Son olarak τ , etkileri daha sonra tartışılacak olan zaman gecikmesidir [2].

Ayrıca Caraballo T. ve arkadaşları Russu'nun önerdiği gecikmeli çevresel savunma harcamaları modelinde gecikmenin olmadığı durumda denge kararlılığı hakkında farklı sonuçlar elde etmişlerdir. Zaman gecikmeli modelde denge ve Hopf çatallanmasının kararlılığına ilişkin daha ayrıntılı bir analiz sunmuşlardır [3].

Russu (1.1.1) modeliyle ilgili temel sorun, genel olarak kabul edilebilir maksimum kirlilik düzeyini tanımlamanın mümkün olmamasıdır. Aslında (1.1.1) modeline göre $P = \bar{P} - E$ kirliliğinin zaman arttıkça maksimum tolere edilebilir kirlilik olan $\bar{P}$ 'ı aşması mümkündür. Modeldeki bu eksikliği aşmak için aşağıdaki gibi yeni bir model önermekteyiz.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= v_1 V(t - \tau) - v_2 V(t - \tau)P(t) + v_3 K(t) \\ \dot{P} &= p_1 V(t) - p_2 P(t) \\ \dot{K} &= k_1 V(t - \tau) - k_3 K(t).\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

Bu yeni modelde V değişkeni korunan alana gelen ziyaretçi sayısını, K değişkeni ise sermaye stokunu temsil etmektedir. Çevre kalitesi olan E yerine, değişken olarak kirlilik düzeyi olan P kullanılmıştır. Bu modeldeki parametreler şunlardır: v_1 , topluluğun bölgeyi övme oranını temsil eder. v_2 , ziyaretçilerin değişim hızı üzerindeki kirlilik etkisini, v_3 ise ziyaretçilerin değişim oranının sermaye stoğuyla orantılı olduğunu temsil etmektedir. Öte yandan, p_1 ziyaretçilerin kirlilik oranının değişiminin etkisidir ve p_2 çevrenin kendi kendini temizleme yeteneğidir. k_1 turizm ziyaretçilerinden elde edilen geliri temsil etmektedir. Sermaye stoğu k_3 oranında amortismanına tabi tutulmuştur.

Zaman gecikmesi bir çok çalışmaya konu olmuştur [4]. Bunun ana sebebi zaman gecikmesi olan bir modelin dinamiklerini incelemek ve dolayısıyla bu modele gerçek hayata dair bir anlam kazandırmaktır. Çünkü birçok farklı modelde kurgulanan senaryolarda gerçekleşen süreçlerin çoğunluğu kelimenin tam anlamıyla "anında" gerçekleşmemektedir. Kısaca zaman gecikmesi olmayan herhangi bir model iyi ihtimalle bir yaklaşımdır [5]. Birçok çalışmaya konu olan zaman gecikmesi farklı mo-

delerde farklı anlamlar taşımaktadır. Örneğin bazı popülasyon temelli dinamikleri incelemek için tasarlanan modellerde biyolojik türlerin gelişme ve olgunlaşma periyodu [6], [7], [8] canlının veya organizmaların çoğalırken geçen kuluçka süresi [9], sinir biliminde tasarlanan bir modelde sinirlerdeki nöronlar arası iletişimde geçen süre [10] olarak karşımıza çıkmaktadır.

Çalışma kapsamında kullanılan modelde τ gecikme parametresi incelendiğinde ise ziyaretçi sayısının, ziyaretçi sayısı ve sermaye stokundaki değişimi τ zaman gecikmesiyle etkileyeceği anlamına gelmektedir. Zaman gecikmesi, ziyaretçilerin korunan alanlarla ilgili bilgileri yayması ve yöneticinin çevreyi korumak için geliri dağıtması için gereken süreyi modeller.

Daha önce tartışıldığı gibi, çalışmada kullanılan modelin en temel farkı çevre kalitesi değişkeni E yerine kirlilik P teriminin kullanılmasıdır. Zira önerilen ana modelin dayandığı Russu [2]'nin çalışmasında, maksimum tolere edilebilir kirliliğin tanımıyla ilgili bir sorun bulunmaktadır. Özellikle [2]'de, P kirlilik seviyesinin tolere edilebilir maksimum kirlilik seviyesi $\bar{P}$ altında kalması gerektiği gösterilmemiştir. Yani, herhangi bir başlangıç koşulu için ve her $t \geq 0$ için $P(t) \leq \bar{P}$ olduğu gösterilmemiştir. Böylece çevresel kalite değişkeni $E(t) = \bar{P} - P(t)$ 'nin zamanla negatif hale gelmesi mümkündür. Ancak [2]'de E 'nin her zaman pozitif olduğu varsayılmaktadır.

Bu eksikliğin üstesinden gelmek için, dinamik bir değişken olarak çevre kalitesi yerine kirliliği içeren (1.1.1) modeline alternatif olarak (1.1.2) modelini öneriyoruz.

2 LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde çalışmanın başlangıç ve gelişimi aşamasında literatürde bulunan bir çok çalışma ve kurgu üzerinde incelemelerde bulunulmuştur. Bu çalışmalardaki yöntem ve ilerlemelerden yararlanılmıştır. Çalışmalarda kurgulanan model, kararlılık analizi, simülasyonlar vb. gibi bir çok detayı inceledik. İlk olarak [11] çalışması incelendiğinde genel transandantal fonksiyonların sıfırları üzerine bir temel teorem

oluşturulduğu gözlemlenmiştir. Temel teoreme dayanarak, bazı üstel polinomların kararlılığını araştırmak, yani üstel polinomların tüm sıfırlarının negatif gerçel kısımlara sahip olduğu koşulları bulmak için bir ayrıştırma tekniği geliştiriliyor. Teknik, D-ayrıştırma ve τ -ayrıştırma yöntemlerini birleştirerek çoklu gecikmeli diferansiyel denklemleri incelemek için kullanılabilir. Uygulama olarak ise (2.0.1) şeklinde verilen bileşik optik rezonatörleri modelleyen iki gecikmeli bir skaler denklemin kararlılığı ve çatallanması incelenmiştir.

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + [f(x(t - \tau_1)) + f(x(t - \tau_2))]. \quad (2.0.1)$$

Çoğu modelleme çalışması birden fazla fiziksel veya biyolojik süreci içermektedir. Tüm fiziksel veya biyolojik süreçlerin tamamlanması zaman almaktadır. Bu nedenle birden fazla zaman gecikmesi doğal olarak meydana gelir ve daha ileri modelleme çalışmalarında dikkate alınmalıdır. Bu tür doğal süreçlerin dikkatlice formüle edilmiş modelleri genellikle birden fazla gecikmeyi ve gecikmeye bağlı parametreleri içermektedir. Ancak birden fazla ayrık gecikme ve gecikmeye bağlı parametreye sahip modellerin kararlılık analizi için genel ve pratik bir teori mevcut değildir. Bir diğer araştırmada (2.0.2) modeli çalışılmıştır [12].

$$\begin{aligned} S'(t) &= bS(t)(1 - S(t)) - \beta e^{-m\tau_1} S(t)I(t - \tau_1) \\ I'(t) &= \beta e^{-m\tau_1} S(t)I(t - \tau_1) - \beta e^{-d\tau} S(t - \tau)I(t - \tau_1 - \tau) - dI(t) \\ R'(t) &= \beta e^{-d\tau} S(t - \tau)I(t - \tau_1 - \tau) - dR(t). \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

Burada S , I ve R sırasıyla duyarlı, enfekte ve iyileşmiş popülasyonu belirtir; b ve d doğum ve ölüm oranını temsil eder; β enfeksiyon katsayısıdır; τ_1 gizli dönemdir; τ enfeksiyondan iyileşmeye kadar geçen süredir. Araştırmanın temel amacı, iki ayrı zaman gecikmesi ve gecikme bağımlı parametre ile bir modelin istikrar analizinden kaynaklanabilen genel bir aşamalı denklemin kararlılık değiştirme özelliklerini incelemek için pratik bir geometrik yöntem sunmaktır. Basit ve göstergeli örneklerle ek olarak, iki ayrı gecikme SIR(Susceptible-Infectious-Recovered) modelinin çalış-

masında yöntemin ayrıntılı bir uygulaması sunulmaktadır.

Çalışmamızın kökeni olan Russu'nun modeli üzerinden farklı bir tartışma yaratan bir diğer model ise (2.0.3) sistemidir.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= a_1 V(t - \tau_1) - a_2 V^2(t - \tau_1) + mK(t) \\ \dot{E}(t) &= r_1 E(t) + r_2(\bar{P} - E(t)) - (b - c\eta)V(t - \tau_2)E(t) \\ \dot{K}(t) &= (1 - \eta)V(t - \tau_2) - \delta K(t).\end{aligned}\tag{2.0.3}$$

Burada ise iki zaman gecikmesine sahip bir çevre koruma alanı modelinin dinamikleri incelenmektedir. Burada ziyaretçi, çevre kalitesi ve sermaye arasındaki ilişkiye değinilmekte ve sürdürülebilir bir strateji sunulmaktadır. Analitik sonuçlar için çeşitli simülasyonlar tasarlanmıştır. Bununla beraber ulaşılan sonuç çevre harcamaları için bazı parametre koşulları altında, çevre korumaya yönelik turizm kullanıcı ücretlerinin ürettiği toplam gelir payının τ_1 ve τ_2 gecikmeleriyle ilişkili olduğunu göstermektedir [13].

3 MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Sabit Noktanın Kararlılık Analizi

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Adi diferansiyel denklem sistemi (ADD) başlangıç koşuluyla ele alınmıştır.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.\tag{3.1.1}$$

Eğer f , x_0 civarında bir Lipschitz sürekli fonksiyonu ise, denklem $t_0 = 0$ başlangıç zamanını içeren bir I aralığında tek bir çözüme sahiptir. Bu durumda bu tek çözüm şu şekilde gösterilmiştir.

$$\phi^t x_0, \quad t \in I.$$

$\{\phi^t : t \in \mathbb{R}\}$ dönüşüm ailesi, (3.1.1) ile ilgili evrim operatörü olarak bilinmektedir. ϕ^t temel olarak x_0 başlangıç koşulunu t zamanındaki çözüm değeriyle eşler. Böyle bir çözüm için,

$$\{\phi^t x_0 : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

eğrisi, x_0 başlangıç koşulundan geçen **yörünge** olarak adlandırılmaktadır. $\mathbb{R}^n$ içindeki tüm yörüngelerin bir arada gösterilmesi, (3.1.1)'nin **faz portresini** tanımlar. **Denge çözümü** (veya **sabit nokta**) ile (3.1.1)'in,

$$x(t) = x^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.1.2)$$

şeklinde bir çözümü kastedilmektedir. Burada $x^* \in \mathbb{R}^n$ bir sabittir. Bu, x^* 'in f dönüşümünün bir sıfırı olduğu anlamına gelir. Yani,

$$f(x^*) = 0.$$

Örnek 3.1 Skaler ADD,

$$\dot{x} = x^2 - 1,$$

$x = \pm 1$ şeklinde verilen iki denge çözümüne sahiptir.

Denge çözümlerinin (dengelerin) (yerel) kararlılığı, bir ADD'nin dinamik davranışının analizinde önemli bir rol oynar. Bir denge çözümünün (yerel) kararlılığı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.1 Eğer tüm $\varepsilon > 0$ için ,

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|\phi^t x_0 - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.1.3)$$

önermesini sağlayacak bir $\delta > 0$ varsa, (3.1.1)'in x^* denge çözümüne **yerel ve nötr olarak kararlı** denir.

(3.1.1)'nin x^* denge çözümü, nötr olarak kararlı değilse **kararsız** olarak adlandırılır. Sezgisel olarak, $t = 0$ başlangıç zamanında nötr olarak kararlı bir denge çözümü x^* 'a

yakın olan yörüngeler her zaman x^* 'a yakın kalır [14].

Tanım 3.1.2 (3.1.1)'nin x^* denge çözümü, eğer nötr olarak kararlıysa ve

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi^t x_0 - x^*\| = 0, \quad (3.1.4)$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ mevcutsa, **yerel ve asimptotik olarak kararlıdır**.

Dolayısıyla x^* denge çözümüne yakın yörüngelerin x^* 'a $t \rightarrow \infty$ olarak yaklaşması sebebiyle, asimptotik kararlılık nötr kararlılıktan daha güçlüdür.

Söz konusu tanımların yerel nitelikte olduğunun vurgulanması önemlidir. Başka bir deyişle, denge noktası etrafındaki küçük pertürbasyonları dikkate alan kararlılık analiziyle ilgilidirler.

Bir denge çözümünün yerel kararlılığı, aşağıda özetlediğimiz **doğrusal kararlılık analizi** ile belirlenebilir.

$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektör alanının **Jakobiyen matrisini**,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ile gösterelim.

Teorem 3.1.1 x^* , (3.1.1)'nin bir denge çözümü olsun ve $Df(x^*)$, x^* 'daki Jakobiyen matrisi olsun. Ayrıca $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ değerleri ise $Df(x^*)$ 'in özdeğerleri olsun.

- $x = x^*$ sabit noktasının yerel ve asimptotik olarak kararlı bir denge çözümü olması için, $Df(x^*)$ matrisindeki tüm özdeğerlerin tüm gerçel kısımlarının negatif olması gerekir.
- Denge çözümünün kararsız olması için özdeğerlerden en az birinin gerçel kısmının pozitif olması gerekir.

Jakobiyen matrisinin özdeğerleri negatif gerçel kısımlar ile sıfır gerçel kısımlardan oluşan bir kombinasyon gösteriyorsa, sabit noktanın kararlılık özelliklerini belirlemek için daha ayrıntılı bir analize ihtiyaç vardır.

3.1.1 Merkez Katman Teoremi

(3.1.1) sistemini ele alalım ve $x = x^*$ sabit noktasının bir denge çözümü olduğunu varsayalım. Bu denge çözümünden $y(t)$ sapmasını aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$x(t) = x^* + y(t).$$

İfadeyi (3.1.1)'e koyarak ve Taylor Teoremi'ni kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\dot{y} = Df(x^*)y + R(y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1.5)$$

Doğrusal olmayan terimler ise,

$$R(y) = O(|y|^2)$$

ile ifade edilir. Ayrıca (3.1.5) dengesinin $y = 0$ olduğunu not edelim.

Lineer cebirin temel tanımından, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının sırasıyla negatif, sıfır ve pozitif gerçel kısımlı özdeğerlere karşılık gelen $Df(x^*)$ 'in özvektörleri tarafından gerilen(span) üç ayrık V_s , V_c ve V_u alt uzayına ayrıştırılabileceğini biliyoruz.

$$\mathbb{R}^n = V_s \oplus V_c \oplus V_u. \quad (3.1.6)$$

$\Pi_s : \mathbb{R}^n \rightarrow V_s$, $\Pi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow V_c$ ve $\Pi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow V_u$ izdüşüm operatörleri olsun. Daha sonra $Df(x^*)$ doğrusal operatörünün bu uzaylara kısıtlamasını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$A_s = \Pi_s Df(x^*), \quad A_c = \Pi_c Df(x^*), \quad A_u = \Pi_u Df(x^*).$$

(3.1.6) ile her $y \in \mathbb{R}^n$ ve bazı $y_s \in V_s$, $y_c \in V_c$, $y_u \in V_u$ için benzersiz bir şekilde

yazılabilir.

$$y = y_s + y_c + y_u.$$

(3.1.1) ana denklemini bu uzayların her birine izdüşürerek aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\dot{y}_s = A_s y_s + R_s(y_s, y_c, y_u), \quad (3.1.7)$$

$$\dot{y}_c = A_c y_c + R_c(y_s, y_c, y_u), \quad (3.1.8)$$

$$\dot{y}_u = A_u y_u + R_u(y_s, y_c, y_u). \quad (3.1.9)$$

Burada R_s , R_c ve R_u doğrusal olmayan R operatörünün sabit, merkez ve kararsız alt uzaylara izdüşümleridir.

Bu doğrusal olmayan vektör alanının analizi aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

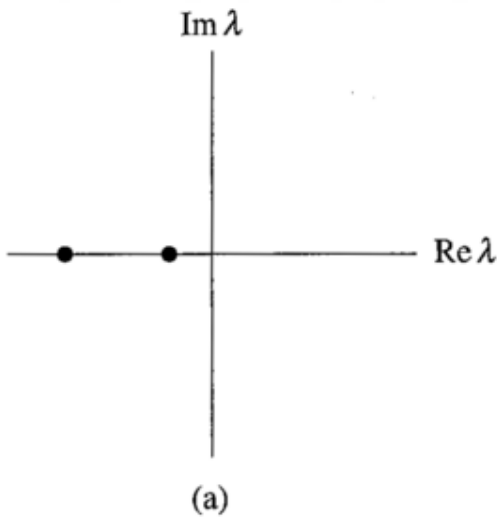
Teorem 3.1.2 $\mathbb{C}^{k+1}$ (burada $k \geq 1$) içinde tanımlanan ve $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ vektör alanını ele alalım. A , f 'nin orijindeki türevini temsil eden $A = Df(0)$ matrisi olarak ifade edilsin. Bu vektör alanı kararlı (V^s), kararsız (V^u) ve merkez (V^c) altuzaylarına yol açar.

- Herhangi bir δ pozitif değeri için $\mathcal{M}$ yerel merkez katmanını tanımlayabiliriz. Bu katman, $\phi(x_c)$ noktalarının toplamı olarak tanımlanabilir; burada $\phi : V^c \mapsto \mathbb{R}^n$ ve $\pi_c \phi(x_c) = x_c$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbb{C}^k$ fonksiyonudur. Ayrıca x_c , $|x_c| < \delta$ koşulu ile V^c alt uzayına aittir.
- $\mathcal{M}$ merkez katmanı f vektör alanının yerel akışı altında invaryant kalır. Bu, eğer bir x noktası $\mathcal{M}$ içinde yer alıyorsa, o zaman x 'in f akışına göre evrimleştirilmesiyle elde edilen $\tilde{x}(t, x)$ noktasının, t 'nin yeterince küçük değerleri için $\mathcal{M}$ içinde kaldığı anlamına gelir.
- Merkez katman $\mathcal{M}$, orijinde merkez altuzayı V^c 'ye teğettir.
- Özellikle, başlangıç noktasının yeterince küçük bir komşuluğu içinde kalan ve global olarak sınırlı olan herhangi bir yörünge, tamamen $\mathcal{M}$ merkez katmanının sınırları içinde yer alır.

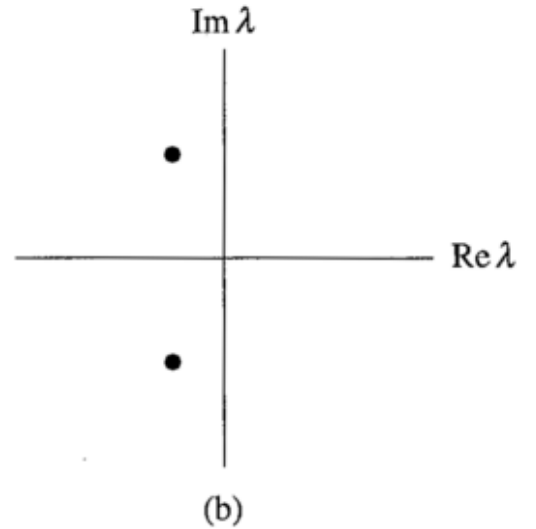
- Pozitif sonsuza doğru yönelen t ile birlikte orijine yaklaşan her $x(t)$ yörüngesi için merkez katman $\mathcal{M}$ üzerinde pozitif bir sabit η ve ilgili bir $y(t)$ yörüngesini keşfedebiliriz. Daha da önemlisi, t pozitif sonsuza yaklaştığında, $x(t)$ ile $y(t)$ arasındaki fark, $e^{\eta t}$ üstel fonksiyonuyla ölçeklendirilerek sıfıra yönelir.

3.2 Hopf Çatallanmaları

İki boyutlu bir sistemi ele alalım. Sistemin denge noktasını kararlı varsayalım. μ kontrol parametresi değiştikçe kararlılığını kaybetmesinin nedenleri Jakobiyen matrisinin özdeğerleriyle ilgilidir. Denge noktasının kararlı olması için, hem λ_1 hem de λ_2 özdeğerlerinin gerçel kısımları, $\text{Re } \lambda < 0$ olan sol yarı düzlemde yer alması gerekmektedir. İkinci dereceden denklemin gerçel katsayılarına bağlı olarak belirlenen özdeğerler için iki farklı durum vardır. Ya her iki özdeğer de gerçel ve negatiftir (Şekil (1)) ya da bu özdeğerler karmaşık eşleniktir (Şekil (2)). Sabit noktanın kararsız olması için özdeğerlerden en az birinin veya muhtemelen her ikisinin μ değiştikçe sağ yarı düzleme geçmesi gerekir[15].



Şekil 1



Şekil 2

3.2.1 Kritik-üstü Hopf Çatallanması

Kritik-üstü Hopf Çatallanması, üstel sönümlenme sergileyen fiziksel bir sistemde meydana gelir ve küçük bozuklukların salınım davranışı yoluyla kademeli olarak

denge durumuna yerleşmesine neden olur. Bu, bozuklukların başlangıçta 'çınlanması' ve ardından zamanla zayıflaması olarak görselleştirilebilir (Şekil (3)). Bununla birlikte, eğer bir kontrol parametresi μ değişirse, salınımların azalma hızı yavaşlar ve sonunda μ kritik bir değere ulaştığında büyümeye doğru geçiş yapar. Daha önce stabil olan denge durumu kararsız hale gelir. Bu gibi durumlarda sistem, önceki kararlı durumun etrafında merkezlenen, limit döngüsü olarak bilinen küçük genlikli, sinüzoidal bir salınım olarak ortaya çıkan önemli bir değişikliğe uğrar (Şekil (4)). Bu geçişe **Kritik-üstü Hopf Çatallanması** denir [15].



Şekil 3: (a) $\mu < \mu_c$



Şekil 4: (b) $\mu > \mu_c$

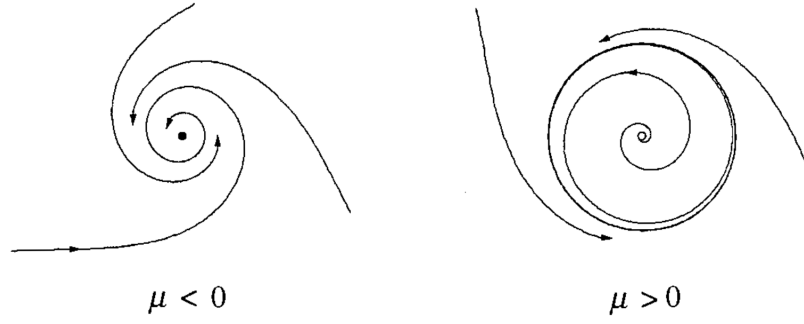
Kritik-üstü Hopf çatallanması, küçük, neredeyse eliptik ve yörüngesel olarak kararlı bir sınır döngüsüyle çevrelenirken faz uzayında kararsız bir spirale dönüştüğü bir senaryoyu ifade eder. Ancak çatallanmayı ifade ederken daha kolay anlaşılabilmesi için iki boyutlu durumu ele alacağız.

Basit bir örnek ele alalım,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Sistemin karakterizasyonunu ifade eden üç parametremiz var. μ orijinindeki denge noktasının kararlılığını etkiler. ω sonsuz şekilde tekrarlanan küçük salınımların frekansını belirler. Son olarak b daha büyük genlikli salınımlar için genlik ve frekans arasındaki ilişkiyi yönetir[15].

Şekil (5) farklı μ değerleri için faz portreleridir. $r = 0$ 'ın orijini, $\mu < 0$ olduğunda sabit bir spirale karşılık gelir ve dönme yönü ω 'nın işaretiyle belirlenir. $\mu = 0$ olduğunda, orijin yavaş cebirsel bozunumla sabit bir sarmal olarak kalır. Son olarak, $\mu > 0$ olduğunda, $r = \sqrt{\mu}$ 'da sabit limit döngüsü meydana gelirken, başlangıç nok-



Şekil 5

tasında kararsız bir sarmal ortaya çıkar.

Çatallanma sırasında özdeğerlerin davranışını analiz etmek için, Jakobiyeen matri-sinin belirlenmesini basitleştiren Kartezyen koordinatlara bir dönüşüm uygulanır [15].

Bu dönüşüm, değişkenlerin $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ olarak ifade edilmesini içerir. Daha sonra bu Kartezyen gösterim kullanılarak daha ileri analizler yapılabilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\
 &= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \\
 &= (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y \\
 &= \mu x - \omega y + O(x^3).
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Benzer şekilde (3.2.3)'deki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + O(x^3). \tag{3.2.3}$$

Sonuç olarak, başlangıç noktasında hesaplanan Jakobiyeen matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Yani Jakobiyen matrisi aşağıdaki özdeğerlere sahiptir.

$$\lambda = \mu \mp i\omega \quad (3.2.5)$$

Beklendiği gibi, μ negatif değerlerden pozitif değerlere doğru ilerledikçe, özdeğerler imajiner eksenin solundan sağına doğru geçiş yapar.

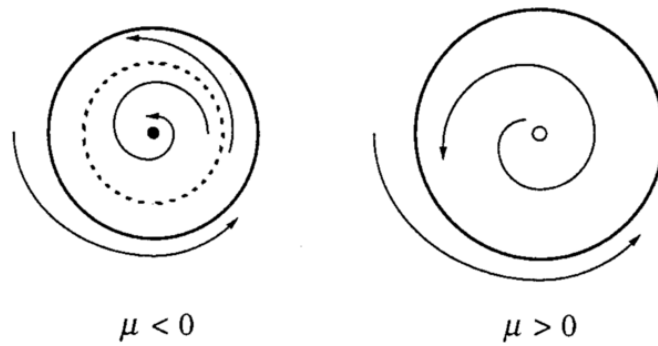
3.2.2 Kritik-altı Hopf Çatallanması

Hopf çatallanmaları kritik-üstü veya kritik-altı şekillerde ortaya çıkabilir [16]. Kritik-altı senaryo, mühendislik uygulamalarında çok daha dramatik ve potansiyel olarak tehlikeli olabileceğinden özellikle dikkate değerdir [15].

Bu durumu sağlayan iki boyutlu bir sistem örneğini ele alalım,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Daha önceki kritik-üstü durumdan önemli bir fark, yörüngeleri aktif olarak başlangıç noktasından uzaklaştıran kararsızlaştırıcı kübik terimin (r^3) işaretidir [15].



Şekil 6

Şekil 6'da gösterilen faz portreleri bu sistemin dinamiklerini göstermektedir. $\mu < 0$ olduğunda, sistemdeki çekiciler orijindeki kararlı sabit nokta ve kararlı limit döngüsüdür. Bu iki çekici arasında kararsız bir kesikli döngü vardır. μ artmaya devam

ettikçe kararsız ayırık döngü, başlangıç noktasındaki kararlı sabit nokta etrafında yavaş yavaş daralmaya başlar [15].

Kritik-altı Hopf Çatallanması $\mu = 0$ olduğunda meydana gelir. İki çekici arasındaki bu kararsız döngünün genliği sıfırlanır ve orijindeki kararlı sabit nokta kararsız hale gelir. $\mu > 0$ sonrasında sistemdeki tek çekici, kararlı limit döngüsü haline gelir [15].

Sistemdeki büyük genlikli salınımlar bir kez başlatıldığında μ sıfıra döndürülerek durdurulamaz. Bu salınımlar yalnızca $\mu = -1/4$ kadar devam eder.

Örnek 3.2 Aşağıda verilen sistemin Hopf çatallanma analizini yapalım.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + xy^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y + y^3.\end{aligned}$$

Çözüm: Başlangıç noktasında, Jakobiyen matrisi $A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ ile verilir. A 'ın özdeğerleri $\lambda = \mu \pm i$, matrisin izi $\tau = 2\mu$ ve determinantı $\Delta = \mu^2 + 1 > 0$ 'dır. Sonuç olarak, μ sıfıra yaklaştıkça orijin sabit bir sarmaldan kararsız bir sarmala doğru geçiş yapar. Bu bulgu, Hopf çatallanmasının $\mu = 0$ 'da gerçekleştiğini göstermektedir [15]. ■

Çatallanmanın türünü belirlemek için sayısal entegrasyon ve mantıksal akıl yürütmeyi kullanabiliriz. Sistemi kutupsal koordinatlara dönüştürerek araştırmamızı ilerletebiliriz [15].

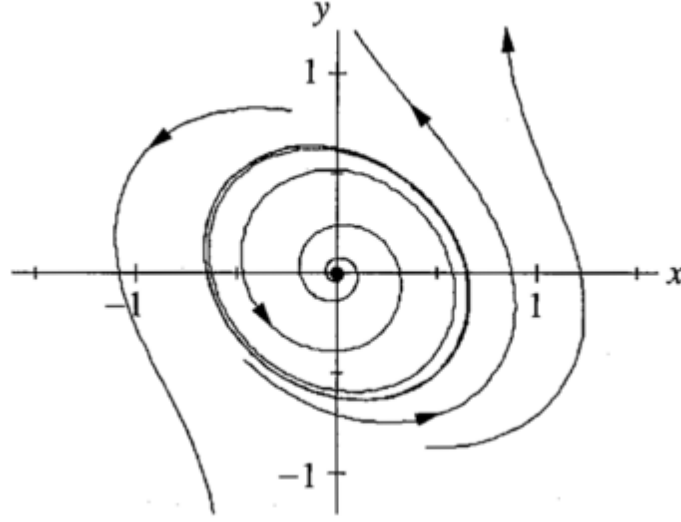
$$\dot{r} = \mu r + ry^2. \quad (3.2.7)$$

Aşağıda verilen bilgilerin doğrulanması gerekmektedir. Sonuç olarak $\dot{r} \geq \mu r$ olduğu belirlenebilir. Bu eşitsizlik, $\mu > 0$ için $r(t)$ büyümesinin en az $r_0 e^{\mu t}$ kadar hızlı olduğunu gösterir. Yani tüm yörüngeler sonsuza itilir. Sonuç olarak, $\mu > 0$ için şüphesiz kapalı yörüngeler yoktur. Özellikle, kararlı bir limit çevrimi kararsız sarmalı kapsamaz. Sonuç olarak çatallanma kritik-üstü olarak sınıflandırılmaz [15].

Çatallanmanın bozulması için, $\mu = 0$ olduğunda orijinin doğrusal olmayan bir merkez gibi davranması gerekir. x ekseninden bakıldığında $\dot{r}$ 'nın tamamen pozitif ol-

duğu açık olduğundan, kapalı yörüngelerin var olması hala imkansızdır [15].

Bir tarama süreci yoluyla, çatallanmanın kritik altı olduğu sonucuna varılabilir. Bu çıkarım aynı zamanda $\mu = -0,2$ için görselleştirilmiş bir faz portresini gösteren Şekil 7 tarafından da desteklenmektedir.



Şekil 7

Kritik altı çatallanma bağlamında beklendiği gibi, gözlemlenen faz portresi, kararlı sabit noktayı saran kararsız bir sınır döngüsünün varlığını ortaya koymaktadır. Üstelik bu ilmik neredeyse eliptik bir şekil sergiliyor ve hafifçe kıvrılan bir spirali çevreliyor. Bu özellikler her iki Hopf çatallanma tipini de temsil etmektedir.

4 MODEL VE ANALİZ

4.1 Ana Sistemin İyi Konulmuşluğu

Bu bölümde öncelikle (1.1.2) modelinin (1.1.1)'den farklı olarak iyi konulmuş olduğu gösterilecektir. Negatif olmayan başlangıç verilerine sahip çözümlerin gelecek tüm zamanlar için negatif olmadığı gösterilecektir. Sonuçta çözümler küreseldir, yani her zaman için vardır. İlk adım olarak (4.1.1) teoremi kanıtlanmıştır.

Teorem 4.1.1 $V(0) \geq 0, P(0) \geq 0, K(0) \geq 0$ için $V \geq 0, P \geq 0, K \geq 0$ ise, o zaman (1.1.2) modelinin $(V(t), P(t), K(t))$ çözümü yerel varoluş zamanına kadar negatif olmayan

bir çözüm olarak kalır.

İspat. (1.1.2) sistemini kompakt formda yazalım.

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u = (V, P, K).$$

Burada $f = (f_1, f_2, f_3)$, (1.1.2) sisteminin sağ tarafı tarafından tanımlanan vektör alanıdır. İspat, Efendiev tarafından önerilen f vektör alanının negatif olmayan ortanta işaret ettiğini garanti eden [17] yöntemine dayanmaktadır. İspatı tamamlamak için yalnızca $f_1(0, P, K)$, $f_2(V, 0, K)$, $f_3(V, P, 0)$ ifadelerinin tüm $V \geq 0$, $P \geq 0$, $K \geq 0$ için negatif olmadığını kontrol etmemiz gerekiyor. Bu durum, kolayca kontrol edilebilir.

$$f_1(0, P, K) = v_3 K \geq 0$$

$$f_2(V, 0, K) = p_1 V \geq 0$$

$$f_3(V, P, 0) = k_1 V \geq 0$$

Bu nedenle sistemimiz iyi konulmuştur. ■

4.2 Zaman Gecikmesiz Sistemin Pozitif Dengesinin Varlığı ve Kararlılığı

Bu bölümde sistemde herhangi bir gecikme olmadığında yani $\tau = 0$ olduğunda sabit nokta analizi gerçekleştirilecektir. İlk olarak, gecikmesiz sistemin bir çekici olan tek ve bariz olmayan bir dengeye sahip olduğu gösterilmiştir.

Önerme 4.1 (1.1.2) sistemi bariz olmayan tek bir dengeye sahiptir.

$$F = (V_\infty, P_\infty, K_\infty). \quad (4.2.1)$$

Burada,

$$V_\infty = \frac{v_1 p_2 k_3 + v_3 p_2 k_1}{v_2 p_1 k_3} > 0, \quad P_\infty = \frac{p_1}{p_2} V_\infty, \quad K_\infty = \frac{k_1}{k_3} V_\infty. \quad (4.2.2)$$

İspat. Üç dinamik sistem denklemi $\dot{V} = 0$, $\dot{P} = 0$ ve $\dot{K} = 0$ eşitlikleri kullanılarak çözüldüğünde,

$$V_{\infty} = \frac{-v_3 K_{\infty}}{v_1 - v_2 P_{\infty}}, \quad P_{\infty} = \frac{p_1 V_{\infty}}{p_2}, \quad K_{\infty} = \frac{k_1 V_{\infty}}{k_3}. \quad (4.2.3)$$

K_{∞} ve P_{∞} , V_{∞} ile değiştirilirse,

$$V_{\infty} = \frac{\frac{v_3 k_1}{k_3} V_{\infty}}{\frac{v_2 p_1}{p_2} V_{\infty} - v_1} \Rightarrow \frac{v_2 p_1}{p_2} V_{\infty}^2 - v_1 V_{\infty} = \frac{v_3 k_1}{k_3} V_{\infty}. \quad (4.2.4)$$

Yani, V_{∞} cinsinden (4.2.5) şeklinde verilen ikinci dereceden bir denklem elde edilir.

$$\frac{v_2 p_1}{p_2} V_{\infty}^2 - \left(v_1 + \frac{v_3 k_1}{k_3} \right) V_{\infty} = 0. \quad (4.2.5)$$

Yukarıdaki denklemin sıfırdan farklı çözümü olan V_{∞} aşağıdaki gibi belirlenir.

$$V_{\infty} = \frac{\frac{v_1 k_3 + v_3 k_1}{k_3}}{\frac{v_2 p_1}{p_2}} = \frac{v_1 p_2 k_3 + v_3 p_2 k_1}{v_2 p_1 k_3} > 0. \quad (4.2.6)$$

■

Önerme 4.2 $F = (V_{\infty}, P_{\infty}, K_{\infty})$ çekici bir denge noktasıdır.

İspat. $F = (V_{\infty}, P_{\infty}, K_{\infty})$ için hesaplanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki şekilde verilir.

$$J(F) = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 P_{\infty} & -v_2 V_{\infty} & v_3 \\ p_1 & -p_2 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

$J(F)$ matrisinin karakteristik denklemi (4.2.8) şeklinde verilmiştir.

$$\lambda^3 + \mathcal{I}_1 \lambda^2 + \mathcal{I}_2 \lambda + \mathcal{I}_3 = 0. \quad (4.2.8)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= -\text{tr}(J(F)) = v_1 - v_2 P_\infty - p_2 - k_3 \\
\mathcal{I}_2 &= -v_1 p_2 + v_2 p_2 P_\infty - v_1 k_3 + v_2 k_3 P_\infty + p_2 k_3 + v_2 p_1 V_\infty - v_3 k_1 \\
\mathcal{I}_3 &= -\det(J(F)).
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Ayrıyeten λ , $J(F)$ 'ın özdeğerini belirtir. Ayrıca $\det(J(F))$, (4.2.10) şeklinde kolayca hesaplanabilir.

$$\det(J) = A_{11} + A_{12} + A_{13}. \tag{4.2.10}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{vmatrix} = (v_1 - v_2 P_\infty) p_2 k_3 \\
A_{12} &= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} p_1 & 0 \\ k_1 & -k_3 \end{vmatrix} = -v_2 p_1 k_3 V_\infty \\
A_{13} &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} p_1 & -p_2 \\ k_1 & 0 \end{vmatrix} = v_3 p_2 k_1,
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

şeklinde ifade edildikten sonra verilen Jakobiyen matrisinin determinanı (4.2.12) şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\det(J) &= v_1 p_2 k_3 - v_2 p_2 k_3 P_\infty - v_2 p_1 k_3 V_\infty + v_3 p_2 k_1 \\
&= v_1 p_2 k_3 + v_3 p_2 k_1 - 2v_2 p_1 k_3 V_\infty.
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Daha sonra $J(F)$ özdeğerlerinin kararlılığını incelemek için Routh-Hurwitz Teoremi kullanılmıştır. Routh-Hurwitz Teoremi'ne göre

$$\mathcal{I}_1 > 0, \quad \mathcal{I}_2 > 0, \quad \mathcal{I}_3 > 0 \tag{4.2.13}$$

ve

$$H = \mathcal{I}_2 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3 > 0 \tag{4.2.14}$$

ise $J(F)$ 'nin tüm özdeğerleri negatif gerçel kısımlara sahiptir. (4.2.6) denklemindeki V_∞ değeri yerine yazılıp $\det(J)$, $\mathcal{I}_2$ ve $\text{tr}(J)$ değerleri hesaplanırsa, tüm parametreler pozitif sabit olduğundan (4.2.15) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}\text{tr}(J) &= \frac{-\frac{v_3 p_2 k_1}{k_3} - p_2^2 - p_2 k_3}{p_2} < 0 \\ \det(J) &= -v_1 p_2 k_3 - v_3 p_2 k_1 < 0 \\ \mathcal{I}_2 &= v_1 p_2 + p_2 k_3 + \frac{2v_3 p_2 k_1}{k_3} > 0 \\ H &= \frac{v_1 v_3 p_2 k_1}{k_3} + \frac{2v_3^2 p_2 k_1^2}{k_3^2} + v_1 p_2^2 + p_2^2 k_3 + \frac{2v_3 p_2^2 k_1}{k_3} + p_2 k_3^2 + 2v_3 p_2 k_1 > 0.\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

Dolayısıyla (4.2.13) ve (4.2.14) koşullarının sağlandığı gösterilir.

4.3 Zaman Gecikmeli Sistemdeki Denge Noktası İçin Hopf Çatal- lanması

(4.2.1)'deki F denge çözümü, sisteme τ gecikmesi de eklendiğinde hala bir denge çözümüdür. Yani F ana sistemin bir denge noktasıdır.

Bu dengedeki bir pertürbasyon ele alınarak denge noktası (4.3.1)'de yeniden incelenmiştir.

$$\begin{aligned}X_1(t) &= V(t) - V_\infty \\ X_2(t) &= P(t) - P_\infty \\ X_3(t) &= K(t) - K_\infty.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Pertürbasyona uğrayan değerler için sistem (4.3.1), (4.3.2) şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1(t)}{dt} &= \frac{dV(t)}{dt} \\
&= v_1(X_1(t-\tau) + V_\infty) - v_2(X_1(t-\tau) + V_\infty)(X_2(t) + P_\infty) + \\
&\quad v_3(X_3(t) + K_\infty) \\
\frac{dX_2(t)}{dt} &= \frac{dP(t)}{dt} \\
&= p_1(X_1(t) + V_\infty) - p_2(X_2(t) + P_\infty) \\
&= p_1X_1(t) - p_2X_2(t) \\
\frac{dX_3(t)}{dt} &= \frac{dK(t)}{dt} \\
&= k_1(X_1(t-\tau) + v_\infty) - k_3(X_3(t) + K_\infty) \\
&= k_1X_1(t-\tau) - k_3X_3(t).
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Sistem yeniden düzenlendikten sonra (4.3.3) biçiminde olur.

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= v_1X_1(t-\tau) - v_2X_1(t-\tau)X_2(t) - v_2X_1(t-\tau)P_\infty - v_2X_2(t)V_\infty + v_3X_3(t) \\
\dot{X}_2 &= p_1X_1(t) - p_2X_2(t) \\
\dot{X}_3 &= k_1X_1(t-\tau) - k_3X_3(t).
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)$ aşıkâr çözümü (4.3.3) sisteminin denge çözümüdür. Şimdi hedefimiz ise aşıkâr denge çözümünün kararlılığını belirlemektir.

(4.3.3) sistemine karşılık gelen karakteristik denklem (4.3.4) şeklindedir.

$$\begin{vmatrix}
\lambda - (v_1e^{-\lambda\tau} - v_2P_\infty e^{-\lambda\tau}) & -v_2V_\infty & v_3 \\
p_1 & \lambda + p_2 & 0 \\
k_1e^{-\lambda\tau} & 0 & \lambda + k_3
\end{vmatrix} = M_{11} + M_{12} + M_{13} = 0 \tag{4.3.4}$$

burada M_{11} , M_{12} ve M_{13} determinantın kofaktörleridir.

$$\begin{aligned}
M_{11} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda + p_2 & 0 \\ 0 & \lambda + k_3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + (v_2 p_\infty - v_1) e^{-\lambda \tau})(\lambda + p_2)(\lambda + k_3) \\
M_{12} &= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} p_1 & 0 \\ k_1 e^{-\lambda \tau} & \lambda + k_3 \end{vmatrix} \\
&= p_1 v_2 V_\infty (\lambda + k_3) \\
M_{13} &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} p_1 e^{-\lambda \tau} & \lambda + p_2 \\ k_1 e^{-\lambda \tau} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -v_3 (\lambda + p_2) (k_1 e^{-\lambda \tau}).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.3.5) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\lambda^3 + \underbrace{((p_2 + k_3))}_{a_0} \lambda^2 + \underbrace{(p_2 k_3 + p_1 v_2 V_\infty)}_{a_1} \lambda + \underbrace{(p_1 v_2 k_3 V_\infty)}_{a_2} + \underbrace{[(v_2 P_\infty - v_1) \lambda^2 + (v_2 P_\infty - v_1)(p_2 + p_3) - v_3 k_1]}_{b_0} \\
&\underbrace{((v_2 P_\infty - v_1)(p_2 + p_3) - v_3 k_1)}_{b_1} \lambda + \underbrace{((v_2 P_\infty - v_1) p_2 k_3 - v_3 p_2 k_1)}_{b_2} e^{-\lambda \tau} = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Burada (4.3.5) denkleminin katsayıları (4.3.6) olarak verilmiştir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= p_2 + k_3 \\
a_1 &= p_2 k_3 + p_1 v_2 V_\infty \\
a_2 &= p_1 v_2 k_3 V_\infty \\
b_0 &= v_2 P_\infty - v_1 \\
b_1 &= (v_2 P_\infty - v_1)(p_2 + k_3) - v_3 k_1 \\
b_2 &= (v_2 P_\infty - v_1) p_2 k_3 - v_3 p_2 k_1.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Yani $\tau > 0$ olduğunda elde ettiğimiz karakteristik denklem (4.3.7) şeklindedir.

$$\lambda^3 + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 + (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (4.3.7)$$

Rouche Teoremi'ne göre, τ gecikme parametresini değiştirdikçe, (4.3.7) denkleminin kökleri de sürekli olarak değişecektir. Köklerin sayısı, katlılıkları dikkate alınarak, ancak hayali ekseninde bir kök belirirse veya onu geçerse değişebilir.

Sanal ekseninde $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ kökünün bulunduğu senaryo ele alınmıştır. Bu kökü (4.3.7) denkleminde yerine yazarak (4.3.8) denklemini elde edilir.

$$-i\omega^3 - a_0\omega^2 + a_1i\omega + a_2 + (-b_0\omega^2 + b_1i\omega + b_2)e^{-i\omega\tau} = 0. \quad (4.3.8)$$

$e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau$ ifadesi (4.3.8) denkleminde yerine yazılırsa, (4.3.9) denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned} -i\omega^3 - a_0\omega^2 + a_1i\omega + a_2 - b_0\omega^2 \cos \omega\tau + b_0\omega^2 i \sin \omega\tau + \\ b_1i\omega \cos \omega\tau + b_1\omega \sin \omega\tau b_2 \cos \omega\tau - b_2i \sin \omega\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

(4.3.9) denkleminin sanal ve reel kısımları ele alınmıştır.

$$Re(\omega) : -a_0\omega^2 + a_2 - b_0\omega^2 \cos \omega\tau + b_1\omega \sin \omega\tau + b_2 \cos \omega\tau = 0. \quad (4.3.10)$$

$$Im(\omega) : \omega^3 + a_1\omega + b_0\omega^2 \sin \omega\tau + b_1\omega \cos \omega\tau - b_2 \sin \omega\tau = 0. \quad (4.3.11)$$

(4.3.10) ve (4.3.11) denklemlerinin yeniden düzenlenmesi (4.3.12) ve (4.3.13) ifadelerini verir.

$$a_0\omega^2 - a_2 = (b_2 - b_0\omega^2) \cos \omega\tau + b_1\omega \sin \omega\tau. \quad (4.3.12)$$

$$\omega^3 - a_1\omega = b_1\omega \cos \omega\tau + (b_0\omega^2 - b_2) \sin \omega\tau. \quad (4.3.13)$$

Her iki denklemin taraf tarafa karesi alındığında,

$$\begin{aligned}
a_0^2 \omega^4 - 2a_0 a_2 \omega^2 + a_2^2 &= (b_2 - b_0 \omega^2)^2 \cos^2 \omega \tau + 2(b_2 - b_0 \omega^2) b_1 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau \\
&\quad + b_1^2 \omega^2 \sin^2 \omega \tau \\
\omega^6 - 2a_1 \omega^4 + a_1^2 \omega^2 &= b_1^2 \omega^2 \cos^2 \omega \tau + 2(b_0 \omega^2 - b_2) b_1 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau \\
&\quad + (b_0 \omega^2 - b_2)^2 \sin^2 \omega \tau,
\end{aligned}$$

ve taraf tarafa toplandığında τ değişkenini ortadan kaldırır, (4.3.14) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\omega^6 - 2a_1 \omega^4 + a_1^2 \omega^2 + a_0^2 \omega^4 - 2a_0 a_2 \omega^2 + a_2^2 &= b_1^2 \omega^2 + ((b_0^2 \omega^2 - b_2)^2) \\
&= b_1^2 \omega^2 + b_0^2 \omega^4 - 2b_0 b_2 \omega^2 + b_2^2.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Buradaki ifadeler toparlandığında (4.3.15) ifadesi elde edilir.

$$\omega^6 + \underbrace{(a_0^2 - 2a_1 - b_0^2)}_p \omega^4 + \underbrace{(a_1^2 - 2a_0 a_2 - b_1^2 + 2b_0 b_2)}_q \omega^2 + \underbrace{(a_2^2 - b_2^2)}_n = 0. \tag{4.3.15}$$

(4.3.15) ifadesindeki değişkenler (4.3.16) biçiminde verilmiştir.

$$\begin{aligned}
z &= \omega^2 \\
p &= a_0^2 - 2a_1 - b_0^2 \\
q &= a_1^2 - 2a_0 a_2 - b_1^2 + 2b_0 b_2 \\
n &= a_2^2 - b_2^2.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Dolayısıyla (4.3.15) denklemi (4.3.17) denkleme dönüşür.

$$s(z) = z^3 + pz^2 + qz + n = 0. \tag{4.3.17}$$

Dolayısıyla üçüncü dereceden bir polinom elde edilmiştir. Bu denklemin köklerinin

işaretleri bulunmak isteniyorsa Önerme 4.3 kullanılacaktır.

Önerme 4.3

$$\Delta = p^2 - 3q \leq 0, \quad z_1^* = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3} \quad \zeta = \frac{(b_1 - a_0 b_0) \omega_0^4 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1) \omega_0^2 - a_2 b_2}{(b_2 - b_0 \omega_0^2)^2 + b_1^2 \omega_0^2} \quad (4.3.18)$$

olsun. Aşağıdaki koşullar göz önünde bulundurulur.

- **Koşul 1.1:** $n < 0$.
- **Koşul 1.2:** $n \geq 0$, $\Delta > 0$, $z_1^* > 0$ ve $s(z_1^*) \leq 0$.
- **Koşul 2.1:** $n \geq 0$ ve $\Delta \leq 0$.
- **Koşul 2.2:** $n \geq 0$, $\Delta > 0$, veya $z_1^* < 0$ ya da $s(z_1^*) \geq 0$.
- **Koşul 3:** $-1 < \zeta < 1$.

(4.3.17) tarafından verilen üçüncü derece polinom $s(z)$ için pozitif köklerin sayısı N olsun. O halde aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

- Eğer **Koşul 1.1** veya **Koşul 1.2** sağlanırsa $N \geq 1$ olur.
- Eğer **Koşul 2.1** veya **Koşul 2.2** sağlanırsa, $N = 0$ olur.

Önerme 4.4 **Koşul 1.1** veya **Koşul 1.2**'nin karşılandığını varsayalım. Ayrıca **Koşul 3**'ün de karşılandığı varsayılır. O halde (4.3.7) karakteristik denkleminin $\tau = \tau_0 > 0$ için

$$\lambda = \pm i \omega_0 = \pm i \sqrt{z_0} \quad (4.3.19)$$

formunda bir çözümü vardır.

İspat. 2 (4.3.12) denklemi $(b_2 - b_0 \omega_0^2)$ ile, (4.3.13) denklemi $(b_1 \omega_0)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa, (4.3.20) denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} a_0 b_2 \omega_0^2 - a_0 b_0 \omega_0^4 - a_2 b_2 + a_2 b_0 \omega_0^2 &= (b_2 - b_0 \omega_0^2)^2 \cos \omega_0 \tau_0 - b_1 \omega_0 (b_0 \omega_0^2 - b_2) \sin \omega_0 \tau_0 \\ b_1 \omega_0^4 - a_1 b_1 \omega_0^2 &= (b_1 \omega_0)^2 \cos \omega_0 \tau_0 + b_1 \omega_0 (b_0 \omega_0^2 - b_2) \sin \omega_0 \tau_0, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

buradan,

$$\begin{aligned} & (b_1 - a_0 b_0) \omega_0^4 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1) \omega_0^2 - a_2 b_2 \\ & = \left((b_2 - b_0 \omega_0^2)^2 + b_1^2 \omega_0^2 \right) \cos \omega_0 \tau_0. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Artık (4.3.21) denkleminde τ_0 'ı hesaplamak kolaydır. Aslında $\cos$ fonksiyonunun periyodikliği nedeniyle, $\tau_0^{(k)}$ ile gösterdiğimiz sonsuz sayıda τ_0 değeri vardır. (4.3.22) ifadesi bu sonsuz sayıda τ_0 değerini verir. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\tau_0^{(k)} = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{(b_1 - a_0 b_0) \omega_0^4 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1) \omega_0^2 - a_2 b_2}{(b_2 - b_0 \omega_0^2)^2 + b_1^2 \omega_0^2} \right) + 2k\pi \right\}. \quad (4.3.22)$$

τ_0 değeri minimum olarak seçilir.

$$\tau_0 = \tau_0^{(k)} = \min_{k \in \{0,1,2,\dots\}} \left\{ \tau_0^{(k)} \right\}.$$

Daha sonra, Hopf Çatallanma Teoremi için transversallik koşulu kanıtlanır.

Lemma 4.1 Farz edelim ki **Önerme 4.4** koşulları sağlanıyor olsun. O halde eğer $s'(z_0) \neq 0$ ise

$$\frac{d \left(\operatorname{Re} \lambda \left(\tau_0^{(k)} \right) \right)}{d\tau} \neq 0$$

olur. Dahası $s'(z_0)$ ve $\frac{d \left(\operatorname{Re} \lambda \left(\tau_0^{(k)} \right) \right)}{d\tau}$ aynı işarete sahip olur.

İspat. $\lambda(\tau)$ değeri (4.3.7) denkleminde yerine yazılırsa ve τ değişkenine göre türevi alınırsa, (4.3.23) denklemi elde edilir.

$$\left(3\lambda^2 + 2a_0\lambda + a_1 + [2b_0\lambda + b_1 - (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)\tau]e^{-\lambda\tau} \right) \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)e^{-\lambda\tau}, \quad (4.3.23)$$

dolayısıyla (4.3.24) elde edilir.

$$\left[\frac{d\lambda}{d\tau} \right]^{-1} = \frac{(3\lambda^2 + 2a_0\lambda + a_1)e^{\lambda\tau}}{\lambda(b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)} + \frac{2b_0\lambda + b_1}{\lambda(b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (4.3.24)$$

$k = 1, 2, \dots$ için $\lambda = i\omega_0$ ve $\tau = \tau_0^{(k)}$ olarak ifade edildiğinde (4.3.25) elde edilir.

$$\begin{aligned}\lambda(b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) &= -b_1\omega_0^2 - i(b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0) \\ (3\lambda^2 + 2a_0\lambda + a_1)e^{\lambda\tau} &= (-3\omega_0^2 + 2ia_0\omega_0 + a_1)(\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) + i\sin(\omega_0\tau_0^{(k)})) \quad (4.3.25) \\ 2b_0\lambda + b_1 &= 2ib_0\omega_0 + b_1.\end{aligned}$$

Daha sonra paydalar eşlenik ile genişletilip sadece gerçel kısmı alındığında (4.3.26) elde edilir.

$$\begin{aligned}\Upsilon &= (-3\omega_0^2 + 2ia_0\omega_0 + a_1)(\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) + i\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}))(-b_1\omega_0^2 + i(b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)) \\ \text{Re}\{\Upsilon\} &= (3b_1\omega_0^4 - 2a_0b_0\omega_0^4 + 2a_0b_2\omega_0^2 - a_1b_1\omega_0^2)\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\ &\quad + (3b_0\omega_0^5 - 3b_2\omega_0^3 + 2a_0b_1\omega_0^3 - a_1b_0\omega_0^3 + a_1b_2\omega_0)\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}). \quad (4.3.26)\end{aligned}$$

(4.3.26) ifadesi ortak çarpan parantezleri içine alındığında (4.3.27) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}\text{Re}\{\Upsilon\} &= (2a_0\omega_0^2(b_2 - b_0\omega_0^2)\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) + b_1\omega_0^2(3\omega_0^2 - a_1)\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\ &\quad + 3\omega_0^3(b_0\omega_0^2 - b_2)\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) + \omega_0^3(2a_0b_1 - a_1b_0)\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) + a_1b_2\omega_0\sin(\omega_0\tau_0^{(k)})). \quad (4.3.27)\end{aligned}$$

Burada (4.3.12) ve (4.3.13) denklemleri kullanıldığında (4.3.28) denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}a_0\omega_0^2 - a_2 - b_1\omega_0\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) &= (b_2 - b_0\omega_0^2)\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\ \omega_0^3 - a_1\omega_0 - b_1\omega_0\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) &= (b_0\omega_0^2 - b_2)\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}). \quad (4.3.28)\end{aligned}$$

(4.3.28) eşitlikleri (4.3.27) denkleminde yerine yazıldığında ise (4.3.29) ifadesi elde

edilir.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{\Upsilon\} &= 2a_0^2\omega_0^4 - 2a_0a_2\omega_0^2 - 2a_0b_1\omega_0^3\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) + 3b_1\omega_0^4\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\
&\quad - a_1b_1\omega_0^2\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) + 3\omega_0^6 - 3a_1\omega_0^4 - 3b_1\omega_0^4\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) + 2a_0b_1\omega_0^3\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\
&\quad - a_1b_0\omega_0^3\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) + a_1b_2\omega_0\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\
&= 3\omega_0^6 - 3a_1\omega_0^4 + 2a_0^2\omega_0^4 - 2a_0a_2\omega_0^2 - a_1\omega_0(b_0\omega_0^2 - b_2)\sin(\omega_0\tau_0^{(k)}) - a_1b_1\omega_0^2\cos(\omega_0\tau_0^{(k)}) \\
&= 3\omega_0^6 - 3a_1\omega_0^4 + 2a_0^2\omega_0^4 - 2a_0a_2\omega_0^2 - a_1\omega_0^4 + a_1^2\omega_0^2.
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Diğer taraftan (4.3.30) ifadesi tanımlandığında (4.3.31) ifadesi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\Xi &= (2ib_0\omega_0 + b_1)(-b_1\omega_0^2 + i(b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)) \\
\operatorname{Re}\{\Xi\} &= -b_1^2\omega_0^2 - 2b_0^2\omega_0^4 + 2b_0b_2\omega_0^2.
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]^{-1} &= \frac{3\omega_0^6 - 3a_1\omega_0^4 + 2a_0^2\omega_0^4 - 2a_0a_2\omega_0^2 - a_1\omega_0^4 + a_1^2\omega_0^2 - b_1^2\omega_0^2 - 2b_0^2\omega_0^4 + 2b_0b_2\omega_0^2}{b_1^2\omega_0^4 + (b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)^2} \\
&= \frac{3\omega_0^6 + (2a_0^2 - 4a_1 - 2b_0^2)\omega_0^4 + (a_1^2 - 2a_0a_2 - b_1^2 + 2b_0b_2)\omega_0^2}{b_1^2\omega_0^4 + (b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

(4.3.17) denkleminin tanımından elde edilen $s'(z_0)$ ve ayrıca $\omega_0 = \sqrt{z_0}$ ifadeleri yerine koyulduğunda (4.3.32) sonucu elde edilir.

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]^{-1} = \frac{z_0(3z_0^2 + 2pz_0 + q)}{b_1^2\omega_0^4 + (b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)^2} = \frac{z_0s'(z_0)}{\Lambda}. \tag{4.3.32}$$

Burada $\Lambda = b_1^2\omega_0^4 + (b_0\omega_0^3 - b_2\omega_0)^2 > 0$. Dolayısıyla ispatın sonunda, $s'(z_0)$ ve $\frac{d(\operatorname{Re}\lambda(\tau_0^{(k)}))}{d\tau}$ aynı işarete sahip olduğu görülmektedir.

Daha önce $F(V_\infty, P_\infty, K_\infty)$ dengesinin $\tau = 0$ olduğunda her zaman yerel olarak asimptotik kararlı olduğunu göstermiştik. Bizim analizimize göre, bu denge ya $\tau = \tau_0 > 0$ seviyesinde istikrarını kaybeder ya da tüm $\tau > 0$ için yerel olarak asimptotik kararlı kalır. Bu durum (4.3.1) teoreminde belirtilmiştir.

Teorem 4.3.1 Bu bölümdeki çalışmamız aşağıdaki teoremin ispatıdır.

1. Eğer **Koşul 2.1** veya **Koşul 2.2** sağlanırsa, o zaman (4.3.3) sisteminin F pozitif dengesi tüm $\tau \geq 0$ için asimptotik olarak kararlıdır.
2. Eğer **Koşul 1.1** veya **Koşul 1.2** ve ek olarak **Koşul 3** karşılanıyorsa, o zaman **Önerme 4.3'e** göre $\tau = \tau_0 > 0$ vardır ve pozitiftir. (4.3.3) sisteminin F pozitif dengesi $\tau \in [0, \tau_0)$ için asimptotik olarak kararlıdır. Ayrıca, (4.3.3) sistemi F dengesinde $\tau = \tau_0$ olduğunda bir Hopf çatallanmasına uğrar.

4.4 Hopf Çatallanması Analizi

Bu bölümde, Teorem 4.3.1'de belirtildiği gibi (1.1.2) sisteminin Hopf çatallanmasının yönü, periyodu ve kararlılığı analiz edilmiştir. Merkez katmanı ve normal form teorisi kullanılarak, τ_0 kritik değerinde meydana gelen çatallanma için açık formüller türetilmiştir.

Ana sistemin $\tau = \tau_0$ çatallanma noktasına yakın dinamik davranışının (4.4.1) normal form denklemi tarafından yakalandığı gösterilmiştir.

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(\tau)z + g(z, \bar{z}). \quad (4.4.1)$$

Burada $z(t) \in \mathbb{C}$ ve $\lambda(\tau)$ koşulları karşılayan kritik özdeğerdir.

$$\lambda(\tau_0) = i\omega\tau_0, \quad \lambda'(\tau_0) \neq 0.$$

$$g(z, \bar{z}) = g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\bar{z}^2 + g_{21}z^2\bar{z}. \quad (4.4.2)$$

$g_{20}, g_{11}, g_{02}, g_{21}$ katsayılarının tam ifadeleri çalışmanın ilerleyen kısımlarında verilecektir.

Hopf çatallanmasının davranışını belirleyen (4.4.3) değerleri tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= \frac{i}{2\omega_0\tau_0} \left(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21} \\
\kappa_2 &= 2\operatorname{Re}\{c_1(0)\} \\
\mu_2 &= -\frac{\operatorname{Re}\{c_1(0)\}}{\operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}} \\
\chi_2 &= -\frac{\operatorname{I}(c_1(0)) + \mu_2\operatorname{I}(\lambda'(\tau_0))}{\tau_0\omega_0}.
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Burada I imajiner kısmı göstermektedir. Merkez katman teorisine göre (4.4.1) teoremindeki sonuçlar çıkarılabilir.

Teorem 4.4.1 μ_2 , κ_2 ve χ_2 (4.4.3)'de tanımlandığı gibi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- κ_2 değeri çatallanan periyodik çözümlerin kararlı olup olmadığını belirler. $\kappa_2 < 0$ ise çatallanan periyodik çözümler karardır, $\kappa_2 > 0$ ise çatallanan periyodik çözümler kararsızdır.
- μ_2 parametresi Hopf çatallanmasının yönünü belirlemede rol oynar. $\mu_2 < 0$ ise Hopf çatallanması ileriye, $\mu_2 > 0$ ise Hopf çatallanması geriye doğrudur.
- χ_2 değeri çatallanmış periyodik çözümlerin periyodik davranışını belirler.

$\chi_2 < 0$ ise periyot azalır, $\chi_2 > 0$ ise periyot artar.

Amacımız öncelikle sistemi fonksiyonel bir diferansiyel denkleme dönüştürmek [19]. Çünkü gecikmeli diferansiyel denklemlerin (GDD'ler), çözümün geçmiş değerlerine bağlı türevleri içermesi nedeniyle doğrudan çözülmesi zordur. Bunun üstesinden gelmek için, GDD'ler genellikle türevleri yerine fonksiyonları içeren eşdeğer fonksiyonel diferansiyel denklemlere (FDD'ler) dönüştürülür [20]. Bu, gecikmenin bir bellek çekirdeği üzerinde bir integral olarak temsil edilmesiyle yapılır ve GDD'nin bir FDD'ye dönüştürülmesine olanak tanır. Fonksiyonel analiz teorisindeki yöntemler, çözümün kararlılığını ve özelliklerini incelemek için kullanılabilir. Bu nedenle, denklemin analizini ve çözümünü basitleştirir. FDD'ler gecikmeler,

hafıza etkileri ve geri besleme döngüleri sergileyen karmaşık olayları modellemek için yararlı bir araçtır.

$$t' = t/\tau, \quad \mu = \tau - \tau_0 \quad \text{ve} \quad X_i(t'\tau) = x_i(t'). \quad (4.4.4)$$

(4.4.4) dönüşümleriyle sistem (4.3.3) yeniden yazılmıştır. Öncelikle (4.4.5)'de olduğu gibi ifade edilmiştir.

$$\dot{X}_i = \frac{dX_i(t)}{dt} = \frac{dX_i(t'\tau)}{\tau dt'} = \frac{dx_i(t')}{\tau dt'}. \quad (4.4.5)$$

Ardından (4.4.5) ifadesi ile birlikte (4.3.3) ana sistem denkleminin yeni hali (4.4.6) şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t')}{\tau dt'} &= (v_1 x_1(t' - 1) - v_2 x_1(t' - 1)x_2(t') - v_2 x_1(t' - 1)P_\infty - v_2 x_2(t')V_\infty + v_3 x_3(t')) \\ \frac{dx_2(t')}{\tau dt'} &= (p_1 x_1(t') - p_2 x_2(t')) \\ \frac{dx_3(t')}{\tau dt'} &= (k_1 x_1(t' - 1) - k_3 x_3(t')). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

(4.4.6) sisteminde $\tau = \tau_0 + \mu$ dönüşümü yapıldıktan sonra (4.4.7) elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t')}{dt'} &= (\tau_0 + \mu) (v_1 x_1(t' - 1) - v_2 x_1(t' - 1)x_2(t') - v_2 x_1(t' - 1)P_\infty - v_2 x_2(t')V_\infty + v_3 x_3(t')) \\ \frac{dx_2(t')}{dt'} &= (\tau_0 + \mu) (p_1 x_1(t') - p_2 x_2(t')) \\ \frac{dx_3(t')}{dt'} &= (\tau_0 + \mu) (k_1 x_1(t' - 1) - k_3 x_3(t')). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Notasyon kolaylığı için (4.4.7)'de $t' = t$ dönüşümü yapılarak (4.4.8) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= (\tau_0 + \mu) (v_1 x_1(t - 1) - v_2 x_1(t - 1)x_2(t) - v_2 x_1(t - 1)P_\infty - v_2 x_2(t)V_\infty + v_3 x_3(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (\tau_0 + \mu) (p_1 x_1(t) - p_2 x_2(t)) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= (\tau_0 + \mu) (k_1 x_1(t - 1) - k_3 x_3(t)). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

(4.4.8) sistemi (4.4.9) şeklindeki otonom denklem yapısında ele alınmıştır.

$$\dot{x}(t) = L_\mu(x_t) + f(\mu, x_t). \quad (4.4.9)$$

(4.4.9) denkleminde bileşenler (4.4.10) ve (4.4.11) şeklinde ifade edilir.

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3. \quad (4.4.10)$$

$$\theta \in [-1, 0] \quad \text{için} \quad x_t(\theta) = x(t + \theta). \quad (4.4.11)$$

$L_\mu(\phi)$ sistemin doğrusal terimlere karşılık gelen kısmıdır ve $f(\mu, \phi)$ sistemin doğrusal olmayan terimlere karşılık gelen kısmıdır. İlk önce,

$$\mathcal{C} = \{\phi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \text{ sürekli}\}.$$

fonksiyon kümesi tanımlanır. $L_\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tam tanımları (4.4.12) denkleminde verilmiştir.

$$L_\mu(\phi) = (\tau_0 + \mu)B\phi(0) + (\tau_0 + \mu)C\phi(-1). \quad (4.4.12)$$

(4.4.12) denkleminde $\theta \in [-1, 0]$ için $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta))$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -v_2 V_\infty & v_3 \\ p_1 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 P_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

(4.4.12) ifadesinde, (4.4.13) denkleminde ait B matrisi zaman gecikmesi olmayan terimleri, C matrisi ise zaman gecikmeli terimleri temsil eder. Daha sonra $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ifadesi (4.4.14) şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
f(\mu, \phi) &= (\tau_0 + \mu)(f_1, f_2, f_3)^T \\
&= (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} -v_2 \phi_1(-1) \phi_2(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

4.4.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklem Formu

Riesz Temsil Teoremine göre, $\theta \in [-1, 0]$ için sınırlı varyasyona sahip bir $\rho(\theta, \mu)$ fonksiyonu vardır ve (4.4.15) ifadesindeki gibi tanımlanır. Öyle ki,

$$L_\mu(\phi) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta, \mu) \phi(\theta), \quad \phi \in \mathcal{C}. \tag{4.4.15}$$

Dolayısıyla,

$$\rho(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) B \delta(\theta) - (\tau_0 + \mu) C \delta(\theta + 1). \tag{4.4.16}$$

Burada δ bir Dirac Delta fonksiyonudur. $\phi \in \mathcal{C}^1((-1, 0), \mathbb{R}^3)$ için (4.4.17) ve (4.4.18) ifadeleri tanımlanır.

$$\mathcal{A}(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\rho(s, \mu) \phi(s), & \theta = 0 \end{cases} \tag{4.4.17}$$

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \end{cases} \tag{4.4.18}$$

Bu tanımlarla sistemimizi eşdeğer formda (4.4.19) şeklinde yeniden yazabiliriz.

$$\dot{x}_t = \mathcal{A}(\mu)x_t + R(\mu)x_t \tag{4.4.19}$$

(4.4.19) denkleminde $\theta \in [-1, 0]$ için $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ şeklinde ifade edilir. Bu ifade,

ana denklemlerin (4.4.7) fonksiyonel diferansiyel denklem formundan bilinmektedir.

4.4.2 Eşlenik Operatör

Aşağıdaki gibi tanımlanan merkez katman indirgemesini gerçekleştirmek için A' 'nın eşleniği olan (4.4.20) ifadesine ihtiyacımız var.

$$A = \mathcal{A}(0), \quad A^* = \mathcal{A}^*(0). \quad (4.4.20)$$

Böylece (4.4.21) ifadesi elde edilir.

$$\mathcal{A}^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(\theta)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\rho^T(t, 0) \psi(-t), & s = 0 \end{cases} \quad (4.4.21)$$

(4.4.22) iç çarpımı tanımlanır.

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0) \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\rho(\theta, 0) \phi(\xi) d\xi, \quad (4.4.22)$$

burada $\psi \in \mathcal{C}^1([0, 1], (\mathbb{R}^3)^*)$. O halde A^* , A' 'nın eşlenik operatörüdür. $\mp i\omega\tau_0$ ifadeleri A' 'nın özdeğerleri olduğu bilinmektedir. O halde bunlar aynı zamanda A^* eşlenik ifadesinin de özdeğerleridir.

4.4.3 A' 'nın Özvektörleri

$i\omega\tau_0$ özdeğerine karşılık gelen A' 'nın özvektörü (4.4.23) şeklinde gösterilir.

$$q(\theta) = V_1 e^{i\theta\omega\tau_0}. \quad (4.4.23)$$

Burada

$$V_1 = (1, \beta, \gamma)^T.$$

Böylece (4.4.24) elde edilir.

$$Aq(\theta) = i\omega\tau_0q(\theta), \quad \forall \theta \in [-1, 0]. \quad (4.4.24)$$

$A = A(0)$, (4.4.15) ve (4.4.16) tanımlarından (4.4.25) sonucu çıkar.

$$A(0)q(\theta) = \begin{cases} \frac{dq(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \tau_0 Bq(0) + \tau_0 Cq(-1), & \theta = 0 \end{cases} \quad (4.4.25)$$

$Aq(\theta) = i\omega\tau_0q(\theta)$ ifadesini kullanarak V_1 bileşenleri bulunmak istenilmektedir. (4.4.26) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} q(0) &= V_1, \\ q(-1) &= V_1 e^{-i\omega\tau_0} = q(0)e^{-i\omega\tau_0}, \\ i\omega\tau_0q(0) &= \tau_0 Bq(0) + \tau_0 Cq(0)e^{-i\omega\tau_0}, \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

(4.4.26) ifadesindeki değerler $Aq(\theta) = i\omega\tau_0q(\theta)$ ifadesinde yerine yazıldığında (4.4.27) ifadesi elde edilir.

$$i\omega\tau_0q(0) = \tau_0 \begin{pmatrix} (v_1 - v_2 P_\infty) e^{-i\omega\tau_0} & -v_2 V_\infty & v_3 \\ p_1 & -p_2 & 0 \\ k_1 e^{-i\omega\tau_0} & 0 & -k_3 \end{pmatrix} q(0). \quad (4.4.27)$$

(4.4.27) düzenlendiğinde (4.4.28) elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_0 \begin{pmatrix} (v_2 P_\infty - v_1) e^{-i\omega\tau_0} + i\omega & v_2 V_\infty & -v_3 \\ -p_1 & p_2 + i\omega & 0 \\ -k_1 e^{-i\omega\tau_0} & 0 & k_3 + i\omega \end{pmatrix} q(0). \quad (4.4.28)$$

$q(0) = V_1$ olduğundan, (4.4.28) matris denklemi (4.4.29) şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} (v_2 P_\infty - v_1) e^{-i\omega\tau_0} + i\omega + v_2 V_\infty \beta - v_3 \gamma &= 0 \\ -p_1 + (p_2 + i\omega) \beta &= 0 \\ -k_1 e^{-i\omega\tau_0} + (k_3 + i\omega) \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

(4.4.29) sistemi çözüldüğünde V_1 bileşenleri (4.4.30) biçiminde elde edilir.

$$\beta = \left(\frac{p_1}{p_2 + i\omega} \right), \quad \gamma = \left(\frac{k_1}{k_3 + i\omega} \right) e^{-i\omega\tau_0}. \quad (4.4.30)$$

Daha sonrasında $q(0)$ değeri (4.4.31) biçiminde elde edilir.

$$q(0) = \left(1, \quad \frac{p_1}{p_2 + i\omega}, \quad \frac{k_1 e^{-i\omega\tau_0}}{k_3 + i\omega} \right)^T. \quad (4.4.31)$$

4.4.4 Eşlenik Özvektör

$\mathcal{A}^*$ 'ın özvektörü (4.4.32) biçiminde belirtilmiştir.

$$q^*(s) = V_2 e^{is\omega\tau_0}, \quad (4.4.32)$$

burada

$$V_2 = D(1, \beta^*, \gamma^*).$$

Yani $-i\omega\tau_0$ özdeğerine karşılık gelen A^* özvektörüdür. $A^* q^*(s) = -i\omega\tau_0 q^*(s)$ ifadesi kullanılarak A^* tanımından V_2 bileşenleri bulunmak istenir. (4.4.15) ve (4.4.16) tanımından (4.4.33) elde edilir.

$$\begin{aligned} q^*(0) &= V_2 \\ q^*(1) &= V_2 e^{i\omega\tau_0} = q^*(0) e^{i\omega\tau_0} \\ -i\omega\tau_0 q^*(0) &= \tau_0 B^T q^*(0) + \tau_0 C^T q^*(0) e^{i\omega\tau_0}. \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

(4.4.33) değerleri $A^* q^*(s) = -i\omega\tau_0 q^*(s)$ ifadesinde yerine yerleştirildiğinde (4.4.34)

elde edilir.

$$-i\omega\tau_0 q^*(0) = \tau_0 \begin{pmatrix} (v_1 - v_2 P_\infty) e^{i\omega\tau_0} & p_1 & k_1 e^{i\omega\tau_0} \\ -v_2 V_\infty & -p_2 & 0 \\ v_3 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} q^*(0) \quad (4.4.34)$$

elde ederiz. Bu ifade (4.4.35) şeklinde tekrardan düzenlenir.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_0 \begin{pmatrix} (v_2 P_\infty - v_1) e^{i\omega\tau_0} - i\omega & -p_1 & -k_1 e^{i\omega\tau_0} \\ v_2 V_\infty & p_2 - i\omega & 0 \\ -v_3 & 0 & k_3 - i\omega \end{pmatrix} q^*(0). \quad (4.4.35)$$

$q^*(0) = V_2$ olduğundan (4.4.35) matris denklemi (4.4.36) biçiminde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} v_2 V_\infty + (p_2 - i\omega) \beta^* &= 0 \\ -v_3 + (k_3 - i\omega) \gamma^* &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

Bu sistem çözüldüğünde V_2 bileşenleri (4.4.37) biçiminde bulunur.

$$\beta^* = \frac{-v_2 V_\infty}{p_2 - i\omega}, \quad \gamma^* = \frac{v_3}{k_3 - i\omega}. \quad (4.4.37)$$

Daha sonra (4.4.38) eşitliği ile $q^*(0)$ ifadesi hesaplanmıştır.

$$q^*(0) = D \begin{pmatrix} 1 & , & \frac{-v_2 V_\infty}{p_2 - i\omega} & , & \frac{v_3}{k_3 - i\omega} \end{pmatrix}. \quad (4.4.38)$$

4.4.5 Normalizasyon Koşulu

$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ normalleştirme koşulunu karşılamak için, (4.4.38) ifadesinde D değerinin belirlenmesi gerekir. Dolayısıyla (4.4.22) ifadesinden (4.4.39) elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \overline{D}(1, \overline{\beta}^*, \overline{\gamma}^*)(1, \beta, \gamma) \\ &\quad - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{D}(1, \overline{\beta}^*, \overline{\gamma}^*) e^{-i(\xi-\theta)\omega\tau_0} d\rho(\theta, 0)(1, \beta, \gamma)^T e^{i\xi\omega\tau_0} d\xi \\ &= \overline{D} \left[1 + \beta \overline{\beta}^* + \gamma \overline{\gamma}^* - \underbrace{(1, \overline{\beta}^*, \overline{\gamma}^*) \int_{-1}^0 d\rho(\theta, 0) \theta e^{i\theta\omega\tau_0} (1, \beta, \gamma)^T}_{(I_1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

I_1 integrali (4.4.40) biçiminde çözümlenir.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^0 \underbrace{\theta e^{i\theta\omega\tau_0}}_{f(\theta)} d\rho(\theta, 0)(1, \beta, \gamma)^T \\ &= \int_{-1}^0 f(\theta) d\rho(\theta, 0)(1, \beta, \gamma)^T \\ &= \left(\underbrace{(\tau_0 f(0)B - \tau_0 f(-1)C)}_0 \right) (1, \beta, \gamma)^T \\ &= \tau_0 e^{-i\omega\tau_0} \begin{pmatrix} v_1 - v_2 P_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \tau_0 e^{-i\omega\tau_0} \begin{pmatrix} v_1 - v_2 P_\infty \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

Bu sonuç (4.4.39) ifadesinde yerine yazıldığında (4.4.41) denklemini verir.

$$(1, \overline{\beta}^*, \overline{\gamma}^*) \int_{-1}^0 \theta e^{i\theta\omega\tau_0} d\rho(\theta, 0)(1, \beta, \gamma)^T = \tau_0 e^{-i\omega\tau_0} [v_1 - v_2 P_\infty + k_1 \overline{\gamma}^*]. \quad (4.4.41)$$

$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ olduğundan (4.4.42) elde edilir.

$$\Rightarrow \overline{D} \left[1 + \beta \overline{\beta}^* + \gamma \overline{\gamma}^* - \tau_0 e^{-i\omega\tau_0} (v_1 - v_2 P_\infty + k_1 \overline{\gamma}^*) \right] = 1$$

$$\overline{D} = \frac{1}{\left[1 + \beta \overline{\beta}^* + \gamma \overline{\gamma}^* - \tau_0 e^{-i\omega\tau_0} (v_1 - v_2 P_\infty + k_1 \overline{\gamma}^*) \right]}. \quad (4.4.42)$$

4.4.6 Merkez Katman Analizi

Bu makalenin geri kalanında Hassard'ın [18] çalışmasında olduğu gibi notasyonlar kullanılacaktır. $\mu = 0$ olduğunda x_t (4.4.19) ifadesinin çözümü olsun.

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle, \quad (4.4.43)$$

şeklinde tanımlanır.

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re}\{z(t), q(\theta)\}. \quad (4.4.44)$$

C_0 merkez katmanında $W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ elimizde var. Buradan (4.4.44) ifadesi (4.4.45) şeklinde tanımlanır.

$$W(z, \bar{z}, \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z \bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.4.45)$$

Burada z ve $\bar{z}$ merkez katman C_0 için q^* ve $\bar{q}^*$ yönünde yerel koordinatlardır. x_t gerçelse W ifadesinin de gerçel olduğunu unutmayın. Sadece gerçel çözümler düşünülmektedir. (4.4.9) $x_t \in C_0$ çözümü için, $\mu = 0$ olduğundan (4.4.46) elde edilir.

$$\begin{aligned}
z(t) &= \langle q^*, x_t \rangle \\
\dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle \\
&= \langle q^*, A(0)x_t + R(0)x_t \rangle \\
&= \langle q^*, A(0)x_t \rangle + \langle q^*, R(0)x_t \rangle \\
&= \langle A^* q^*, x_t \rangle + \langle q^*, R(0)x_t \rangle, \quad ((A^* q^*(s) = -i\omega\tau_0 q^*(s)) \text{ eşitliğinden}) \\
&= \langle -i\omega\tau_0 q^*, x_t \rangle + \langle q^*, R(0)x_t \rangle \\
&= i\omega\tau_0 \underbrace{\langle q^*, x_t \rangle}_z + \langle q^*, R(0)x_t \rangle \\
&= i\omega\tau_0 z + \langle q^*, R x_t \rangle, \quad ((4.4.18) \text{ ifadesinden}) \\
&= i\omega\tau_0 z + \bar{q}^*(0) f(0, x_t) \quad ((4.4.44) \text{ ifadesinden}) \\
&= i\omega\tau_0 z + \bar{q}^*(0) f(0, w(z, \bar{z}, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{zq(\theta)\}).
\end{aligned} \tag{4.4.46}$$

kısaltılmış haliyle (4.4.47) şeklinde ifade edilir.

$$\dot{z}(t) = i\omega\tau_0 z + \underbrace{\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})}_{g(z, \bar{z})} \tag{4.4.47}$$

burada,

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3) \tag{4.4.48}$$

olduğundan

$$x_t(\theta) = (x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta), x_{3t}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$$

ve

$$q(\theta) = V_1 e^{i\theta\omega\tau_0}, \quad (V_1 = (1, \beta, \gamma)^T).$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
zq(\theta) + \overline{zq(\theta)} &= z(1, \beta, \gamma)^T e^{i\theta\omega\tau_0} + \bar{z}(1, \bar{\beta}, \bar{\gamma})^T e^{-i\theta\omega\tau_0} \\
zq(0) + \overline{zq(0)} &= z(1, \beta, \gamma)^T + \bar{z}(1, \bar{\beta}, \bar{\gamma})^T = (z, z\beta, z\gamma)^T + (\bar{z}, \bar{z}\bar{\beta}, \bar{z}\bar{\gamma})^T \\
x_{1t}(0) &= z + \bar{z} + W_{20}^{(1)} \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)} z\bar{z} + W_{02}^{(1)} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\
x_{2t}(0) &= z\beta + \bar{z}\bar{\beta} + W_{20}^{(2)} \frac{z^2}{2} + \dots \\
x_{3t}(0) &= z\gamma + \bar{z}\bar{\gamma} + W_{20}^{(3)} \frac{z^2}{2} + \dots \\
x_{1t}(-1) &= ze^{-i\omega\tau_0} + \bar{z}e^{i\omega\tau_0} + W_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (4.4.48) eşitliğinden (4.4.49) elde edilir.

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = \bar{D}(1, \bar{\beta}, \bar{\gamma})\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2 x_{1t}(-1)x_{2t}(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\tau_0 \bar{D}v_2 \left[ze^{-i\omega\tau_0} + \bar{z}e^{i\omega\tau_0} + W_{20}^{(1)}(-1) \frac{z^2}{2} + \dots \right] \left[z\beta + \bar{z}\bar{\beta} + W_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.4.49}$$

Katsayılar (4.4.48) ile karşılaştırarak (4.4.50) elde edilir.

$$\begin{aligned}
g_{20} \frac{z^2}{2} &= -\tau_0 \bar{D}v_2 \beta e^{-i\omega\tau_0} z^2 \implies g_{20} = -2\tau_0 v_2 \bar{D} \beta e^{-i\omega\tau_0} \\
g_{11} z\bar{z} &= -\tau_0 v_2 \bar{D} (z\bar{z}\bar{\beta} e^{-i\omega\tau_0} + \bar{z}z\beta e^{i\omega\tau_0}) \implies g_{11} = -\tau_0 v_2 \bar{D} (\bar{\beta} e^{-i\omega\tau_0} + \beta e^{i\omega\tau_0}) \\
g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} &= -\tau_0 v_2 \bar{D} \beta e^{i\omega\tau_0} \bar{z}^2 \implies g_{02} = -2\tau_0 v_2 \bar{D} \beta e^{i\omega\tau_0} \\
g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} &= -\tau_0 v_2 \bar{D} \left(W_{20}^{(1)}(-1)\beta + W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_0} + 2W_{11}^{(1)}(-1)\beta + 2W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_0} \right) \frac{z^2 \bar{z}}{2} \\
g_{21} &= -\tau_0 v_2 \bar{D} \left(W_{20}^{(1)}(-1)\beta + W_{20}^{(2)}(0)e^{i\omega\tau_0} + 2W_{11}^{(1)}(-1)\beta + 2W_{11}^{(2)}(0)e^{-i\omega\tau_0} \right).
\end{aligned} \tag{4.4.50}$$

$W_{20}(\theta)$ ve $W_{11}(\theta)$ ifadelerinin g_{21} cinsinden hesaplanması gerekmektedir.

(4.4.19), (4.4.43) ve (4.4.44) ifadeleri kullanıldığında (4.4.51) elde edilir.

$$\begin{aligned}
W &= x_t - zq - \bar{z}\bar{q} \Rightarrow \dot{W} = \dot{x}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q}, \quad \dot{x}_t = Ax_t + Rx_t \\
\dot{W} &= Ax_t + Rx_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q} \\
&= Ax_t + Rx_t - i\tau_0\omega zq - \bar{q}^*(0)f_0q - i\tau_0\omega \bar{z}\bar{q} - q^*(0)f_0\bar{q} \\
&= A \underbrace{(x_t - zq - \bar{z}\bar{q})}_W + Rx_t - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q\} \\
&= AW + Rx_t - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z})q\}.
\end{aligned} \tag{4.4.51}$$

Ardından (4.4.51), (4.4.52) şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}\{q^*(0)f_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \\
&= AW + H(z, \bar{z}, \theta),
\end{aligned} \tag{4.4.52}$$

burada,

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} \dots$$

şeklindedir. Yukarıdaki seriyi genişleterek ve karşılıklı gelen katsayıları karşılaştırarak (4.4.53) bulunur.

$$\begin{aligned}
W &= W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta)\bar{z}^2 + \dots \\
\dot{W} &= \frac{2z\dot{z}}{2}W_{20} + (\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}})W_{11} + \dots \\
&= z(i\tau_0\omega z + \dots)W_{20} + (i\tau_0\omega z\bar{z} - i\tau_0\omega \bar{z}z + \dots)W_{11} \\
&\Rightarrow i\tau_0\omega z^2W_{20} = A\frac{z^2}{2}W_{20} + H_{20}\frac{z^2}{2} \\
&\Rightarrow 0 = AW_{11}(\theta)\bar{z}\bar{z} + H_{11}(\theta)z\bar{z}.
\end{aligned} \tag{4.4.53}$$

$H_{20}(\theta)$ ve $H_{11}(\theta)$ için (4.4.53) denklemleri çözüldüğünde (4.4.54) ve (4.4.55) elde

edilir.

$$(A - 2i\omega\tau_0) W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta) \quad (4.4.54)$$

$$A W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta). \quad (4.4.55)$$

$\theta \in [-1, 0)$ için (4.4.52) ifadesinden (4.4.56) ve (4.4.57) bilinmektedir.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -\underbrace{\bar{q}^*(0)f_0}_{g} q(\theta) - \underbrace{q^*(0)\bar{f}_0}_{\bar{g}} \bar{q}(\theta) = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta)$$

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{20}\bar{q}(\theta) \quad (4.4.56)$$

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \quad (4.4.57)$$

(4.4.54), (4.4.56) ve A tanımından (4.4.58) çıkar.

$$(A - 2i\omega\tau_0) W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{20}\bar{q}(\theta)$$

$$A W_{20}(\theta) = \frac{dW_{20}(\theta)}{d\theta} = 2i\omega\tau_0 W_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{20}\bar{q}(\theta). \quad (4.4.58)$$

Bilindiği üzere,

$$q(\theta) = V_1 e^{i\theta\omega\tau_0} = q(0) e^{i\theta\omega\tau_0}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, (4.4.58) denklemi çözüldüğünde (4.4.59) bulunur.

$$\dot{W} = 2i\omega\tau_0 W + g_{20}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0} + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\theta\omega\tau_0}. \quad (4.4.59)$$

Bulunan diferansiyel denklemi çözmek için (4.4.60) integrasyon çarpanı hesaplanır.

$$I(\theta) = e^{-\int 2i\omega\tau_0 d\theta} = e^{-2i\omega\tau_0\theta}. \quad (4.4.60)$$

(4.4.59) denklemi (4.4.60) integral faktörüyle çarpıldığında (4.4.61), (4.4.62) ve (4.4.63)

elde edilir.

$$\dot{W}e^{-2i\omega\tau_0\theta} - 2i\omega\tau_0 W e^{-2i\omega\tau_0\theta} = g_{20}q(0)e^{-i\theta\omega\tau_0} + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-3i\theta\omega\tau_0} \quad (4.4.61)$$

$$\left(W e^{-2i\omega\tau_0\theta}\right)' = g_{20}q(0)e^{-i\theta\omega\tau_0} + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-3i\theta\omega\tau_0} \quad (4.4.62)$$

$$W e^{-2i\omega\tau_0\theta} = \frac{g_{20}}{-i\omega\tau_0}q(0)e^{-i\theta\omega\tau_0} + \frac{\bar{g}_{02}}{-3i\omega\tau_0}\bar{q}(0)e^{-3i\theta\omega\tau_0} + C_1. \quad (4.4.63)$$

ve buradan $W_{20}(\theta)$ (4.4.64) ifadesinde gösterildiği gibidir.

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega\tau_0}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\theta\omega\tau_0} + C_1 e^{2i\theta\omega\tau_0}. \quad (4.4.64)$$

Burada $C_1 = \left(C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}\right) \in \mathbb{R}^3$ sabit bir vektördür.

(4.4.55), (4.4.57) ve A 'nın tanımından (4.4.65) yani (4.4.66) sonucu çıkar.

$$AW_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta), \quad H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta) \quad (4.4.65)$$

$$AW_{11}(\theta) = \frac{dW_{11}(\theta)}{d\theta} = g_{11}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0} + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)e^{-i\theta\omega\tau_0}. \quad (4.4.66)$$

Benzer şekilde buradan $W_{11}(\theta)$ (4.4.67) elde edilir.

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\omega\tau_0}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\theta\omega\tau_0} + C_2. \quad (4.4.67)$$

Burada $C_2 = \left(C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\right) \in \mathbb{R}^3$ sabit bir vektördür. Aşağıda uygun C_1 ve C_2 'yi arayacağız. A , (4.4.56) ve (4.4.57) tanımından $\theta = 0$ için (4.4.68) ve (4.4.69) elde edilir.

$$AW_{20}(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_0 W_{20}(\theta) - H_{20}(\theta) \quad (4.4.68)$$

$$AW_{11}(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta). \quad (4.4.69)$$

$\theta = 0$ için $H_{20}(0)$ ve $H_{11}(0)$ ifadeleri yerine yazıldığında, (4.4.70) ve (4.4.71) elde

edilir.

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{20}\bar{q}(0) + 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.70)$$

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\bar{\beta}e^{-i\omega\tau_0} - v_2\beta e^{i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.71)$$

Sonraki adımlarda amacımız C_1 ve C_2 için uygun değerleri belirlemektir. Önce C_1 ile başlanır. (4.4.64), (4.4.68) ve (4.4.70) denklemleri kullanılarak (4.4.72) denklemi elde edilir.

$$\int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_0 W_{20}(0) + g_{20}q(0) + \bar{g}_{20}\bar{q}(0) - 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.72)$$

$$\begin{bmatrix} Aq(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)q(\theta) = \int_{-1}^0 e^{i\theta\omega\tau_0}q(\theta)d\rho(\theta) = i\omega\tau_0 q(0) \\ A\bar{q}(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)\bar{q}(\theta) = \int_{-1}^0 e^{-i\theta\omega\tau_0}\bar{q}(\theta)d\rho(\theta) = -i\omega\tau_0 \bar{q}(0) \end{bmatrix}.$$

Böylece (4.4.73) elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{20}(\theta) &= \int_{-1}^0 \frac{ig_{20}}{\omega\tau_0}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta) + \int_{-1}^0 \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta) \\ &\quad + \int_{-1}^0 C_1 e^{2i\theta\omega\tau_0}dg(\theta) \\ &= \frac{ig_{20}}{\omega\tau_0}i\omega\tau_0 q(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega\tau_0}(-i\omega\tau_0 \bar{q}(0)) + \int_{-1}^0 C_1 e^{2i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta) \\ &= -g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 C_1 e^{2i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta). \end{aligned} \quad (4.4.73)$$

(4.4.72) denkleminin sağ tarafından (4.4.74) elde edilir.

$$\begin{aligned}
&= 2i\tau_0\omega \left(\frac{ig_{20}}{\omega\tau_0}q(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega\tau_0}\bar{q}(0) + C_1 \right) + g_{20}q(0) + \bar{g}_{02}\bar{q}(0) - 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -g_{20}q(0) + \frac{\bar{g}_{02}\bar{q}(0)}{3} + 2i\tau_0\omega C_1 - 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.74}
\end{aligned}$$

(4.4.73)=(4.4.74) olduğundan (4.4.75) elde edilmektedir.

$$\left[2i\tau_0\omega I - \int_{-1}^0 e^{2i\theta\omega\tau_0} d\rho(\theta) \right] C_1 = 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.75}$$

A ifadesinin tanımını kullanılarak (4.4.76) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2i\tau_0\omega - \tau_0(v_1 - v_2P_\infty)e^{-2i\omega\tau_0} & \tau_0v_2V_\infty & -\tau_0v_3 \\ -\tau_0p_1 & 2i\tau_0\omega + \tau_0p_2 & 0 \\ -\tau_0k_1e^{-2i\omega\tau_0} & 0 & 2i\tau_0\omega + \tau_0k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_1^{(2)} \\ C_1^{(3)} \end{pmatrix} \\
&= 2\tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\beta e^{-i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.76}
\end{aligned}$$

(4.4.76) ifadesindeki C_1 sabit vektörünün bileşenleri (4.4.77) olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= \frac{-2v_2\beta e^{-i\omega\tau_0}}{(2i\omega - v_1 + v_2P_\infty)e^{-2i\omega\tau_0} - \frac{v_2p_1V_\infty}{2i\omega + p_2} - \frac{v_3k_1}{k_3}} \\
C_1^{(2)} &= \frac{-p_1}{(2i\omega + p_2)} C_1^{(1)} \\
C_1^{(3)} &= \frac{k_1e^{-2i\omega\tau_0}}{2i\tau_0\omega + \tau_0k_3} C_1^{(1)}. \tag{4.4.77}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde C_2 sabit vektörü de bulunur. (4.4.67), (4.4.69) ve (4.4.71) denklemleri

kullanılarak (4.4.78) elde edilir.

$$AW_{11}(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{11}(\theta) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_0 \begin{pmatrix} -v_2\bar{\beta}e^{-i\omega\tau_0} + v_2\beta e^{i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.78)$$

$$\begin{bmatrix} Aq(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)q(\theta) = \int_{-1}^0 e^{i\theta\omega\tau_0}q(0)d\rho(\theta) = i\omega\tau_0q(0) \\ A\bar{q}(\theta) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta)\bar{q}(\theta) = \int_{-1}^0 e^{-i\theta\omega\tau_0}\bar{q}(0)d\rho(\theta) = -i\omega\tau_0\bar{q}(0) \end{bmatrix}.$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\rho(\theta)W_{11}(\theta) &= - \int_{-1}^0 \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega\tau_0}q(0)e^{i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta) + \int_{-1}^0 \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\theta\omega\tau_0}d\rho(\theta) \\ &\quad + \int_{-1}^0 C_2d\rho(\theta) \\ &= \frac{-i\bar{g}_{11}}{\omega\tau_0}i\omega\tau_0q(0) - \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega\tau_0}i\omega\tau_0\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 C_2d\rho(\theta) \\ &= g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \int_{-1}^0 C_2d\rho(\theta). \end{aligned} \quad (4.4.79)$$

(4.4.78) denkleminin sağ tarafı, (4.4.79) denklemine eşittir. Dolayısıyla (4.4.80) bulunur.

$$\int_{-1}^0 C_2d\rho(\theta) = \tau_0 \begin{pmatrix} v_2\bar{\beta}e^{-i\omega\tau_0} + v_2\beta e^{i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.80)$$

Benzer şekilde A 'nın tanımı tekrar kullanıldığında (4.4.81) hesaplanır.

$$\begin{pmatrix} v_1 - v_2P_\infty & -v_2V_\infty & v_3 \\ p_1 & -p_2 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^{(1)} \\ C_2^{(2)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2\bar{\beta}e^{-i\omega\tau_0} + v_2\beta e^{i\omega\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.81)$$

(4.4.81) ifadesindeki C_2 sabit vektörünün bileşenleri (4.4.82) olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} C_2^{(1)} &= \frac{v_2 \bar{\beta} e^{-i\omega\tau_0} + v_2 \beta e^{i\omega\tau_0}}{\left((v_1 - v_2 P_\infty) - \frac{v_2 p_1 V_\infty}{p_2} + \frac{v_3 k_1}{k_3} \right)} \\ C_2^{(2)} &= \frac{p_1}{p_2} C_2^{(1)} \\ C_2^{(3)} &= \frac{k_1}{k_3} C_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.4.82}$$

Artık verilen sabit vektörlerin bileşenleri hesaplanmıştır. Dolayısıyla artık istenilen $W_{20}^{(1)}(-1), W_{20}^{(2)}(0), W_{11}^{(1)}(-1), W_{11}^{(2)}(0)$ değerleri yani g_{21} değeri hesaplanabilir. Bu akış ispatı tamamlamaktadır.

4.5 Nümerik Simölasyonlar

Senaryo 1

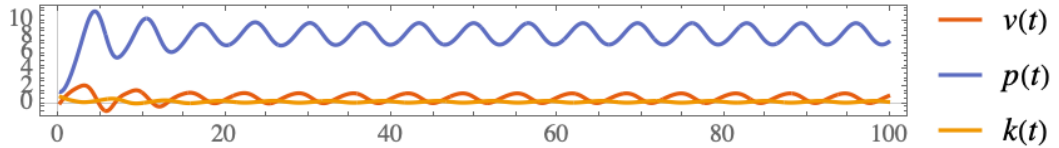
Sistemimizdeki parametrelere sırasıyla (4.5.1) değeri verilir.

$$v_1 = 2 \quad v_2 = 0.3 \quad v_3 = 1.5 \quad p_1 = 2.2 \quad p_2 = 0.2 \quad k_1 = 0.2 \quad k_3 = 0.5 \quad (4.5.1)$$

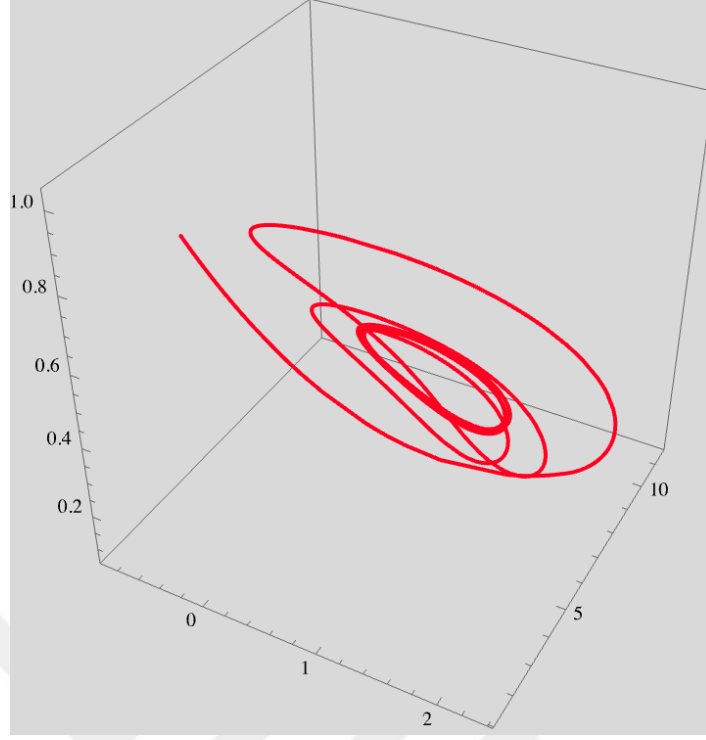
Verilen değeri **Koşul 3** ve dolayısıyla **Teorem** (4.3.1) teoremini karşılar. (1.1.2) sisteminin sabit noktası $F = (0.78, 8.66, 0.31)$. Karakteristik (4.3.17) denklemi çözüldüğünde, iki pozitif kök bulunur ($z = 0.2909$ ve $z = 1.0419$). Minimum τ_0 değeri uygun olan $z_0 = 1.0419$ değeri tercih edilir. Buna göre elde edilen kritik gecikme parametresi τ_0 değeri 2.1607'dır. İstenilen (4.5.2) değeri hesaplanır.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{c_1(0)\} &= 0.9394 \\ \operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_0)\} &= 0.1436 \quad (\mu_2 = -6.5409) \\ \kappa_2 &= 1.8789 \\ \chi_2 &= 0.0869 \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Bu sistemin $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ ve $V - P - K$ faz portrelerinin $\tau = 2.5 > \tau_0$ değeri göre simölasyonları aşağıdaki grafiklerdeki gibidir.



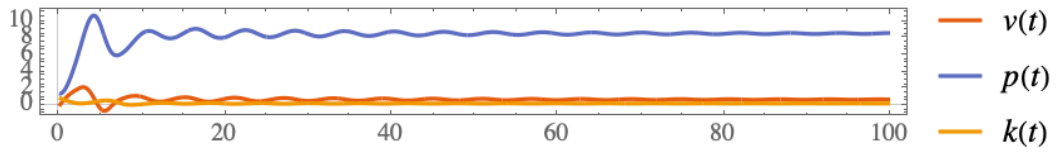
Şekil 8: (4.5.1) değeri için $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ çözümleri.



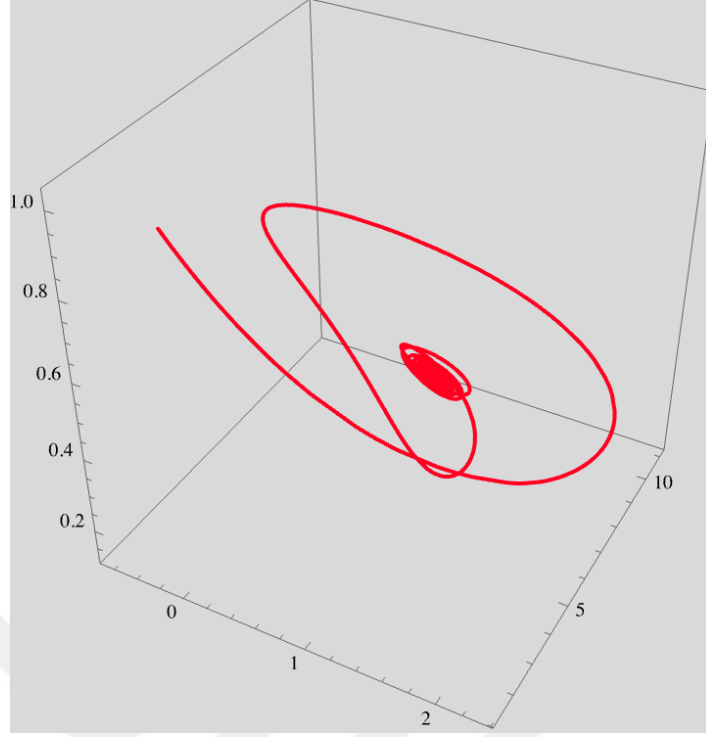
Şekil 9: (4.5.1) değerleri için V-P-K Faz Portresi

Senaryo 2

Senaryo 1'deki simülasyona göre $\tau = 2 < \tau_0$ değerini seçilir. Daha sonra çözüm ve faz portreleri aşağıdaki gibi gözlemlenecektir.



Şekil 10: (4.5.1) değerleri için $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ çözümleri.



Şekil 11: (4.5.1) değerleri için V-P-K Faz Portresi

Senaryo 3

Sistemimizdeki parametrelere sırasıyla (4.5.3) değerleri verilir.

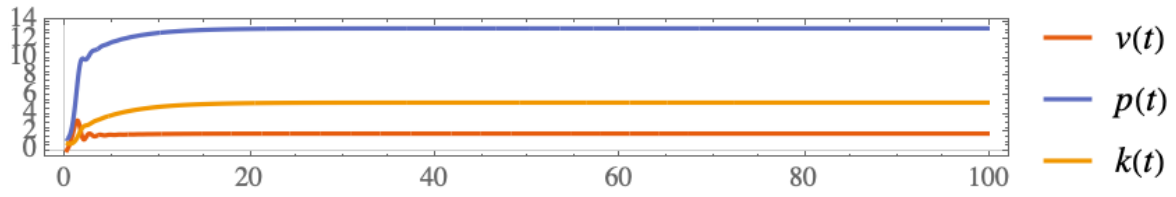
$$v_1 = 4 \quad v_2 = 0.7 \quad v_3 = 2 \quad p_1 = 4 \quad p_2 = 0.6 \quad k_1 = 0.8 \quad k_3 = 0.3 \quad (4.5.3)$$

Verilen değerler **Koşul 3** ve dolayısıyla **Teorem** (4.3.1)'i karşılar. (1.1.2) sisteminin sabit noktası $F = (2, 13.3333, 5.3333)$. Karakteristik (4.3.17) denklemi çözüldüğünde, iki pozitif kök bulunur ($z = 0.6373$ ve $z = 38.6716$). Minimum τ_0 değerine uygun olan $z_0 = 38.6716$ değeri tercih edilir. Buna göre elde edilen kritik gecikme parametresi τ_0 değeri 0.2629. Daha sonra Hassard ve diğerleri[18] tarafından kullanılan

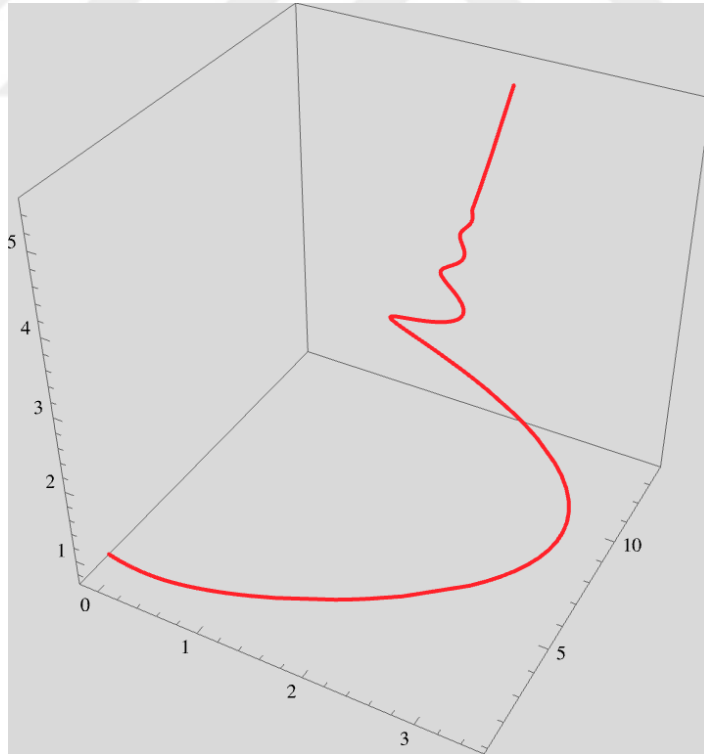
merkez katman analizine göre istenilen (4.5.4) değerleri hesaplanır.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{c_1(0)\} &= 1.0752 \\
 \operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_0)\} &= 10.7451 \quad (\mu_2 = -0.1006) \\
 \kappa_2 &= 2.1504 \\
 \chi_2 &= -0.7158
 \end{aligned}
 \tag{4.5.4}$$

Bu sistemin $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ ve $V - P - K$ faz portrelerinin $\tau = 0.24 < \tau_0$ değerine göre simülasyonları aşağıdaki grafiklerdeki gibidir;



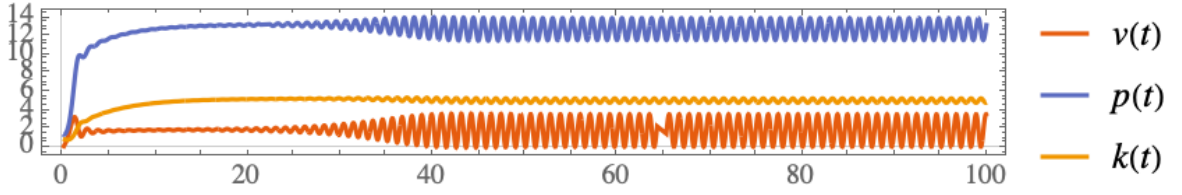
Şekil 12: (4.5.3) değerleri için $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ çözümleri.



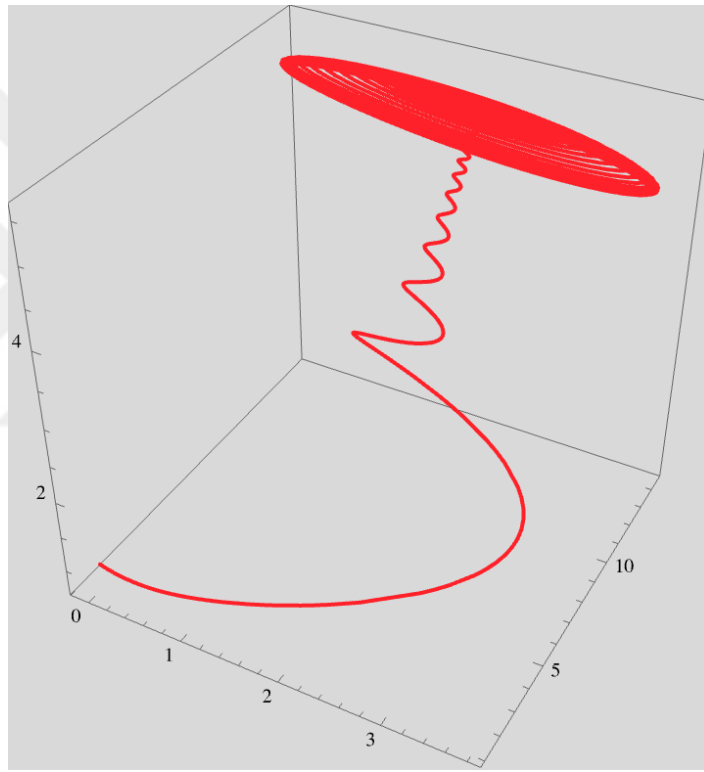
Şekil 13: (4.5.3) değerleri için V-P-K Faz Portresi

Senaryo 4

Senaryo 3'teki simülasyona göre $\tau = 0.26 < \tau_0$ değeri seçilir. Daha sonra çözüm ve faz portreleri aşağıdaki gibi gözlemlenecektir.



Şekil 14: (4.5.3) değerleri için $V(t)$, $P(t)$, $K(t)$ çözümleri.



Şekil 15: (4.5.3) değerleri için V-P-K Faz Portresi

5 SONUÇ

Bu çalışmada zaman gecikmeli sürdürülebilir bir turizm modeli inceledik. Önerdiğimiz model, literatürde incelenen önceki modellerin geliştirilmesi ve modifikasyonudur. Önceki modellerin ortam kalitesi değişkeni açısından önemli bir dezavantajı olduğunu tartışıyoruz. Şöyle ki, sürdürülebilir turizm modelleri ile ilgili daha önceki çalışmalarda model, gerçekçi olmadığına inandığımız, tolere edilebilir maksimum kirlilik düzeyine dayanmaktadır. Bu sorunu çözmek için çevre kalitesi yerine kirliliği bağımlı değişken olarak alan yeni bir model öneriyoruz.

Öncelikle modelimizin iyi kurulmuş olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra gecikmesiz sistemin pozitif dengesinin varlığını ve kararlılığını tartışıyoruz. Daha sonra bir zaman gecikmesini dikkate alarak sistemin τ_0 kritik gecikme eşiğinde bir Hopf çatallanması sergilediğini kanıtıyoruz.

Daha sonra, bu Hopf çatallanmasının kararlılığını bir merkez katman indirgemesi kullanarak inceliyoruz. Son olarak analizimizin teorik bulgularının gerçekleştirilebileceğini göstermek için bazı sayısal simülasyonlar sergiliyoruz.

Bulduğumuz sonuçlar ziyaretçi sayısının ziyaretçi sayısındaki değişimi ve kapital stoktaki değişimi bir $\tau > 0$ gecikmesi ile etkilediği durumda kritik bir τ_0 değerinin var olduğunu gösteriyor. Eğer $\tau < \tau_0$ ise, ziyaretçi sayısının, kirliliğin ve kapital stoğun belli bir dengeye doğru yaklaştığını gösterdik. Öte yandan $\tau > \tau_0$ iken bu değişkenlerin zaman için periyodik bir döngüye yaklaştığını görüyoruz.

Kaynakça

- [1] Watson, JEM., Dudley, N., Segan, D.B., Hockings, M. (2014) The performance and potential of protected areas. *Nature*, 515:67-73.
- [2] Russu, P. (2009) Hopf bifurcation in a environmental defensive expenditures model with time delay. *Chaos Solitons and Fractals*, 42.
- [3] Caraballo, T. Colucci, R. Guerrini, L., (2019) Some remarks on an environmental defensive expenditures model. *Discrete Cont Dyn B*, 24:1079-1093.
- [4] El-Morshedy, H.A., Ruiz-Herrera, A.(2020) Criteria of global attraction in systems of delay differential equations with mixed monotonicity. *J Differ Equations*, 268:5945-5968.
- [5] Arafa, A.A., Hamdallah, S.A.A., Tang, S., Xu, Y., Mahmoud, G.M. (2021) Dynamics analysis of a Filippov pest control model with time delay. 101:105865.
- [6] Liz, E., Ruiz-Herrera, A. (2016) Global dynamics of delay equations for populations with competition among immature individuals. *J. Differ. Equ.*, 260:5926-5955.
- [7] Nicholson, A.J. (1954) An outline of the dynamics of animal populations. *Aust. J. Zool.*, 2:9-65
- [8] Ruiz-Herrera, A. (2019) Attraction to Equilibria in Stage-Structured Predator Prey Models and Bio-Control Problems. *J. Dyn. Differ. Equ.*, 31:-435-450

- [9] Smith, H.L. (2011) An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. Texts in Applied Mathematics.
- [10] Liz, E., Ruiz-Herrera, A. (2013) Attractivity, multistability, and bifurcation in delayed Hopfield's model with non-monotonic feedback. *J. Differ. Equ.* 255:4244-4266.
- [11] Ruan, S., Wei, J. (2003). On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays. *Dynam Cont Dis Ser*, 10.
- [12] Beretta, E., Kuang, Y. (2002) Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM J. Math. Anal.* 33, 1144-1165
- [13] He, J., Yang, P., Cao, J., Dai, Y. (2022) Stability crossing curves and Hopf bifurcation in an environmental protection expenses model with two delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46:6177-6190
- [14] Kuznetsov, Y.A. (1995) Elements of applied bifurcation theory. *Applied Mathematical Science*, 112.
- [15] Strogatz, S. (2018) Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC Press.
- [16] Wiggins, S. (2003). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer.
- [17] Efendiev, M. (2013) Evolution equations arising in the modelling of life sciences. Springer Science & Business Media, 163.
- [18] Hassard, B., Kazarinoff, D., Wan, Y. (1981). Theory and applications of hopf bifurcation. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- [19] Hale, J.K., Koçak, H. (1991) Dynamics and Bifurcations. Springer-Texts in Applied Mathematics, 3.
- [20] Hale, J.K., Lunel, S.M.V. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. New York, US: Springer-Verlag

