GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

2^k FAKTÖRİYEL TASARIMLARDA SAĞA ÇARPIK DAĞILIMLAR İÇİN SENKRONİZE PERMÜTASYON TESTİ

Selda ZENGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Selda ZENGİN

19/01/2024

2^k FAKTÖRİYEL TASARIMLARDA SAĞA ÇARPIK DAĞILIMLAR İÇİN SENKRONİZE PERMÜTASYON TESTİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Selda ZENGİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

2^k faktöriyel tasarımında A, B, C etkileri ve AB, AC, BC, ABC etkileşim etkilerini test etmede F testi kullanılır. F testini kullanabilmek için normal dağılım varsayımının sağlanması gerekir. Eğer veri normal dağılımdan gelmiyorsa, F testi sonuçları anlamlı çıkmayabilir. Bu durumun önüne geçmek için 1935 yılında Fisher tarafından önerilen permütasyon testi kullanılabilir. Permütasyon testi tekrarlanan deney tasarımındaki işlemlerin rastgele atanması anlamına gelir. Bilinen bir hata dağılımına bağlı değildir. Permütasyon testi, örneklerin geldikleri dağılım hakkında herhangi bir bilgi vermez. Permütasyon testi kullanarak 2^k faktöriyel tasarımlarını yapmamız mümkündür. Bu çalışmada 2^k faktöriyel tasarımlarda senkronize permütasyon testini, hadamard matrisi ve kısıtlı permütasyon testi kullanılarak oluşturuldu. Gözönüne alınan permütasyon testi ; $S^*_{u,u+1} = \sum_{i=1}^{n} (y^*_{iu} - y^*_{i(u+1)})$ dir. S^* test istatistiği, F testi dahil birçok test istatistiklerine göre farklı dağılımlarda da uygun yeterli istatistiklere izin verdiği görülmüştür. Bu çalışmada 2^3 faktöriyel tasarım göz önüne alınmıştır. Yapılan çalışmada S^* test istatistiği sağa çarpık bazı dağılımlarda irdelenerek yorumlanmıştır.

Bilim Kodu	:	20507
Anahtar Kelimeler	:	İki yönlü ANOVA, Senkronize permütasyon testi, Permütasyon testi Welch testi, White testi, F testi, Faktöriyel Tasarım, Hadamard Matris
Sayfa Adedi	:	58
Danışman	:	Prof. Dr. Hülya BAYRAK

SYNCHRONIZED PERMUTATION TEST FOR RIGHT-SKEWED DISTRIBUTIONS IN 2^k FACTORIAL DESIGNS
(M. Sc. Thesis)

Selda ZENGİN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

The F-test is used to test the effects of factors A, B, C, as well as their interactions (AB, AC, BC, ABC) in the 2^k factorial design. However, the F-test relies on the assumption of normal distribution in the data. If the data does not follow a normal distribution, the results of the F-test may not be reliable. To address this issue, Fisher proposed the permutation test in 1935. The permutation test involves random reassignment of operations in a repeated experimental design. It does not depend on any known error distribution and does not provide any information about the distribution from which the samples are derived. Using the permutation test allows for the conduct of 2^k factorial designs, overcoming the limitations posed by non-normal data distribution. In this study, the synchronized permutation test, Hadamard matrix, and restricted permutation test were employed for the 2^k factorial designs. The particular permutation test considered here is denoted as ' $S^*_{u,u+1} = \sum_{i=1}^{n} (y^*_{iu} - y^*_{i(u+1)})$ '. The S^* test statistic derived from this method was found to permit appropriate statistics in various distributions, different from several other test statistics including the F-test. For this research, a 2^3 factorial design was taken into consideration. The study focused on interpreting the S^* test statistic when dealing with right-skewed distributions.

Science Code	:	20507
Key Words	:	T wo-way ANOVA, synchronized permutation tests, permutation tests, Welch tests, White tests, F tests, factorial design, Hadamard Matrix
Page Number	:	58
Supervisor	:	Prof. Dr. Hülya BAYRAK

TEŞEKKÜR

Beni her zaman çok seven ve destek veren annem Nermin AYDIN ve babam Kenan AYDIN'a, akademik çalışmalarım sırasında beni her konuda destekleyen ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Hülya BAYRAK'a, tez sunumumda sabırla beni dinleyen tüm komisyon üyelerine teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte yanımda olan ve bana tüm kalbi ile desteklerini sunan çok sevgili eşim Mert ZENGİN'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
ANOVA	Varyans analizi
$\mathbf{CSP_s}$	Kısıtlı senkronize permütasyonlar
F	F testi
S*	Senkronize permütasyon testi
Wh	White testi
W	Welch testi

1. GİRİŞ

Fisher (1935) ve Yates (1937) tarafından önerilen faktöriyel tasarımlar birden fazla faktörün ana etkilerini ve etkileşim etkilerini birlikte araştırmak için kullanılan tasarımlardır. Yapılan araştırmalarda bağımlı değişkeni etkileyen faktör sayısı iki ya da daha fazla olabilir. Bu faktörler ve faktör düzeyleri araştırmayı yapan kişi tarafından belirlenir. Faktör düzeylerinin oluşturduğu tüm deneme kombinasyonlarının üzerine kurulan tasarımlara faktöriyel tasarım denir. Mühendislik, tıp, ilaç sanayi, tarım alanları gibi… yaygın bir kullanıma sahiptirler. Faktöriyel tasarımlar, zaman ve para tasarrufu sağlamak bakımından, her seferinde bir tane faktörün etkisini araştıran geleneksel tasarımlara göre çok daha etkindirler [1]. Bunun yanı sıra, faktörler arasındaki etkileşim veya etkileşimleri araştırmak bakımından bazı avantajlar sağlarlar.

Faktöriyel tasarımlarda herhangi bir faktörün seviyelerinin tamamı diğer faktör ya da faktörlerin her bir seviyesinde farklıdır. Bu aynı zamanda faktörler arasındaki etkileşimin temel sebebidir.

Faktöriyel tasarımlarda ana etkiler ve etkileşim etkilerinin araştırılmasında için genellikle iki yönlü varyans analizi (two-way ANOVA) yöntemi kullanılır. ANOVA’ nın temel çalışma yöntemi varyansların tahminlerinin karşılaştırılmasına dayanır. Parametrik bir analiz olan ANOVA hata bileşenlerinin aynı ve normal dağıldığı, varyansların ise homojen olduğu varsayımlarına dayanır. ANOVA için doğrusal modelde, hata terimleri normal dağılıma sahip olmadığında varyans analizi (ANOVA) parametrik analizler için uygun olmayabilir. F testi simetrik olmayan dağılımlarda güçlü bir test değildir [2,3]. Adams ve Anthony (1996) çalışmalarında elde edilen verilerin, dağılımlarının normal olmaması sebebiyle geleneksel olarak kullanılan parametrik yöntemlerin uygun olmadığını bildirmişlerdir [4]. Bu sebeple parametrik olmayan testler tercih edilir. Parametrik olmayıp, hata bileşenlerinin normal dağıldığı varsayımını dikkate almayan ve testin sonucunun kesin olduğu permütasyon testleri kullanılabilir [5,6].

Permütasyon testi, doğrudan karşılaştırmalı bir deneydeki prosedürü takip eder ve bilinen bir hata dağılımına bağlı değildir. Gerçek etkilere karşılık gelen parametrik testlerden daha duyarlıdır [7].

Tez çalışmasında sürekli yanıtlarla tekrar edilen 2^3 faktöriyel tasarımların sabit etkilerini test etmek için kesin permütasyon çözümleri tartışıldı. Bu çözümü yinelenen 2^k faktöriyel tasarımına genişletildi.

Çalışmada kullanılan Weibull ve Ters Gauss dağılımları sağa çarpık dağılımlardır ve " 2^k Faktöriyel Tasarımlarda Permütasyon Testleri" nin bu dağılımlar üzerindeki karşılaştırılmaları araştırılmıştır.

2. DENEY TASARIMI

Deney, kontrol altındaki bazı durumların deney birimlerinin bilinmeyen özellikleri üzerindeki etkisini test etmek için uygulanan işlemler bütünüdür. Deney tasarımı ise deney birimlerinin maruz kalacağı kontrol altındaki koşulların düzenlenmesiyle ilgilidir [8]. Deney tasarımının amacı homojen birimler oluşturmaktır.

Deney tasarımındaki bazı temel kavramlar aşağıdaki gibidir;

1. Deney Birimi : Denemelere maruz kalan nesnelere denir.
2. Deneme : Araştırmada kullanılan nesnelere denir.
3. Gözlem Birimi : Üzerinde ölçüm yapılan nesnelere denir.
4. Deneysel Hata : Aynı tür birimler üzerinde yapılan denemelerin sonuçları her zaman aynı olmaz. Burada ölçümler arasındaki farklar deneysel hatayı gösterir.
5. Yanıt Değişkeni : Ölçümler veya gözlemlerin tamamına denir.
6. Yanıt : Deney sonucuna denir.
7. Faktör: Yanıt değişkeni üzerinde etkili olan ve araştırmacı tarafından kontrol altında tutulan değişkenlere denir.
8. Düzey : Faktörlerin aldığı değerlere denir.
9. Ortak Değişkenler : Yanıt değişkeni üzerinde etkisi olduğu düşünülen fakat araştırmacı tarafından doğrudan kontrol edilemeyen değişkenlere denir.
10. Etkileşim : Herhangi bir faktörün etkisinin diğer faktörlerin düzeylerine bağlıdır.Fisher deney tasarımının üç temel prensibinin olduğunu belirtmiştir. Bunlar bloklama, tekrarlama ve rastgeleleştirmedir [6].

Deney tasarımının temel ilkeleri;

1. Bloklama : Deney birimlerinin kendi içlerinde homojen gruplar oluşturmasıdır.
2. Rastgeleleştirme : Gözlem biriminin deney kombinasyonlarına rastgele atanmasıdır.
3. Tekrar : Deneyin tamamının veya bir kısmının yinelenmesidir.

2.1. Faktöriyel Tasarımlar

Fisher (1935) ve Yates (1937) tarafından önerilen faktöriyel tasarımlar iki veya daha fazla faktörün ana etkilerini ve etkileşim etkilerini araştırmak için kullanılan popüler tasarımlardır. Özellikle mühendislik, tarım ve daha birçok (tıp, ilaç sanayi, …) alanda kullanımları mevcuttur. Faktöriyel tasarımlar çoğunlukla istatistikte kullanılmasının yanında kimya, biyoloji gibi alanlarda da kullanımı yaygındır. Faktöriyel tasarımlar, geleneksel tasarımlarda olduğu gibi sadece bir tane faktörün etkisini araştırmak yerine faktörler arasındaki etkileşimleri araştırması bakımından geleneksel tasarıma göre daha etkindir. Faktöriyel tasarımlarda faktörler nicel ya da nitel değerler alır. Bu değerlere seviye ya da düzey denir. Çeşitli faktörler bir deneyde gözlendiğinde, onların seviyelerinin olası tüm kombinasyonuna işlem denir. Her faktör bağımsızdır. Faktöriyel tasarımlarda herhangi bir faktörün seviyelerinin tamamı diğer faktörlerin her seviyesinde aynıdır. Bu durum faktörler arasındaki etkileşimin temel sebebidir. Faktöriyel tasarımlarda, denemeler, faktör kombinasyonlarını ifade eder. Örneğin ; A ve B faktörleri sırasıyla 2 ve 3 seviyeye sahip olsun ve bu seviyeler, (A1, A2) ve (B1, B2, B3) sembolleriyle gösterilsin. Bu deneyde, toplam 2×3= 6 tane deneme vardır. Bu tasarım, 2×3 faktöriyel tasarım olarak adlandırılır ve Çizelge 1.1' de verildiği gibidir.

Çizelge 1.1. 2×3 faktöriyel tasarımı

		FAKTÖR B		
		B_1	B_2	B_3
FAKTÖR A	A_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3
	A_2	a_2b1	a_2b_2	a_2b_3

A ve B gibi iki faktörün olduğu ve A faktörünün seviyelerinden a ve B faktörünün Seviyelerinden b özel olarak seçildiği düşünülerek, faktör seviyeleri bir faktöriyel tasarımda düzenlenebilir.

Faktöriyel tasarımlar için yaygın olarak kullanılan üç istatistiksel model vardır. Bunlar sabit etki modeli, rassal etki modeli ve karışık etkili modelidir. Sabit etki modelleri, gözlemlerin varyansının birbirleriyle ilişkili verilerden kaynaklandığını varsaymaktadır [10].

Bir faktöriyel deneyde, gözlemler Eş. 2.1’de verilen bir model yardımıyla tanımlanabilir.

$$\gamma_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,\ldots\ldots,I \quad j = 1,\ldots\ldots,J \ \text{ ve } \ k = 1,\ldots\ldots,n \qquad (2.1)$$

μ genel ortalama etkisi, a_i *A* satır faktörünün *i*. seviyesinin etkisi, b_j B sütun faktörünün j. seviyesinin etkisi, $(ab)_{ij}$ ise a_i ve b_j' nin etkileşim etkisi ve ε_{ijk} değişebilir rastgele hata terimini göstermektedir.

Tüm faktör seviyeleri özel seçimlidir ve işlem etkileri genel ortalamadan sapmalar olarak tanımlanmıştır. Deneyde n adet tekrar olduğundan, toplam gözlem sayısı abn olarak hesaplanır. Böylece , a_i, b_j ve $(ab)_{ij}$ için kısıtlar Eş. 2.2'deki gibi ifade edilir.

$$\sum_i a_i = 0 \quad \sum_i b_j = 0 \quad \sum_i (ab)_{ij} = 0 \forall_j \quad \sum_j (ab)_{ij} = 0 \ \forall_i \qquad (2.2)$$

İki faktörlü faktöriyel düzenlerde, satır ve sütun etkisi eşit ilgi konusuna sahiptir. Bundan dolayı satır faktörünün seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler;

$$H_0 : \{a_i = 0, \forall_i\}$$
$$H_1 : \{\exists_i : a_i \neq 0\} \qquad (2.3)$$

Sütun faktörünün seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler;

$$H_0 : \{b_j = 0, \forall_j\}$$

$$H_1 : \{\exists_i : b_i \neq 0\} \qquad (2.4)$$

Aynı zamanda satır ve sütun faktörlerinin etkileşim etkisinin seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler;

$$H_0 : (ab)_{ij} = 0, \forall i,, j$$
$$H_1 : \exists i,, j : (ab)_{ij} \neq 0 \qquad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu çalışmada sürekli yanıtlarla tekrar edilen 2^2 faktöriyel tasarımda sabit etkileri test etmek için kesin permütasyon çözümlerini ve bu çözümlerin yinelenen 2^k faktöriyel tasarımlara genişleteceğiz. Birkaç faktör içeren deneylerde yaygın olarak faktöriyel tasarımlar kullanılır. 2^2 faktöriyel tasarımı her biri yalnız iki düzeyden oluşan k faktörlerin özel bir durumudur.

Araştırma yaparken deneysel çalışmaların ilk aşamalarında 2^k faktöriyel tasarımlar özellikle faydalı olur.

2.1.1. 2^2 faktöriyel tasarımı

A ve B her biri iki düzeyli olduğunda bu tasarıma 2^2 faktöriyel tasarımı denir. Faktörlerin düşük ve yüksek faktör seviyeleri bulunabilir. Herhangi bir faktörün yüksek seviyesi karşılık gelen harfle gösterilir ve bir faktörün düşük seviyesi karşılık gelen harfin yokluğu ile ifade edilir.

Ana Etkiler Ve Etkileşimler ;

Bir faktörün etkisi, o faktörün seviyesindeki değişiklik olarak tanımlanır.

$$A = \frac{1}{2n} \{[ab - b] + [a - (-1)]\}$$

$$= \frac{1}{2n} [ab + a - b - (1)] \tag{2.6}$$

Benzer şekilde,

$$B = \frac{1}{2n} [ab + b - a - 1] \tag{2.7}$$

$$AB = \frac{1}{2n} [ab + 1 - a - b] \tag{2.8}$$

2.1.2. 2^3 faktöriyel tasarımı

A, B ve C olmak üzere iki düzeyli üç faktörün olduğunu varsayalım. Standart sırayla yazılmış sekiz farklı kombinasyon vardır : (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc. Yedi serbestlik derecesi vardır; her ana etki ve etkileşimle ilişkili bir serbestlik dereceli: A, B, C, AB, AC, BC, ABC vardır. 2^k tasarımı, k ana etkiyi, $\binom{k}{2}$ iki faktörlü etkileşimi, $\binom{k}{3}$ üçlü faktörlü etkileşim,.... ve bir faktörlü etkileşimi içerir.

2.1.3. 2^k faktöriyel tasarımı

2^k faktöriyel tasarımında, ana etkiler ve etkileşim etkileri için bağıntılar

$$Bağıntı_{\chi} = (a \pm 1)(b \pm 1)\ldots\ldots\ldots\ldots(n \pm 1) \tag{2.9}$$

olarak ifade edilir. Ana etkiler ve etkileşim etkileri,

$$X = \frac{1}{2^{k-1}\, n} Bağıntı_{\chi} \tag{2.10}$$

kareler toplamı ise,

$$SS_{\chi} = \frac{1}{2^{k-1}\, n} [Bağıntı_{\chi}]^2 \tag{2.11}$$

formülleri yardımıyla hesaplanır.

Ana etkiler ve etkileşim etkilerinin serbestlik derecesi 1 olduğundan $SS\chi$ kareler toplamı $MS\chi$ kareler ortalamasına eşittir. Burada X , 2^k faktöriyel tasarımda kullanılan faktörleri veya faktör etkileşimlerini göstermektedir. Ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlı olup olmadığını sınamak için,

$$F_{\chi} = \frac{MS_{\chi}}{MS_{hata}} \tag{2.12}$$

test istatistiği kullanılır. Hata kareler toplamı ve hata kareler ortalaması sırasıyla,

$$SS_{hatax} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{p=1}^{2} \sum_{l=1}^{n} (\gamma_{ij \ldots\ldots\ldots\ldots pl} - \overline{\gamma_{ij \ldots pl}})^2 \tag{2.13}$$

$$MS_{hata} = \frac{SS_{hatax}}{ab(n-1)} \tag{2.14}$$

formülleri yardımıyla hesaplanır.

3. PERMÜTASYON TESTİ

Fisher (1935) permütasyon testi fikrini ilk olarak randomizasyon testi altında incelemiştir. Bir test istatistiğinin gerçek değerinin, herhangi bir istatistik dağılımıyla karşılaştırmak yerine veriden elde edilen dağılım ile karşılaştırılabileceğini göstermiştir [11].

Permütasyonun anlamı deneydeki tekrarların deney tasarımındaki işlemlerin rastgele atanması anlamına gelir. Permütasyon testleri, verilere randomizasyon ilkesinin uygulandığı bir teknik olarak bilinir. Literatürde randomizasyon testi ifadesi aynı anlamda kullanılır.

Permütasyon testi, doğrudan karşılaştırmalı bir deneydeki prosedürü takip eder, bilinen bir hata dağılımına bağlı değildir ve bazen gerçek etkilere karşılık gelen parametrik testlerden daha duyarlıdır [7].

Permütasyon testi, örneklerin geldikleri dağılım hakkında herhangi bir varsayımı gerektirmez. Permütasyon testini elde etmek için tek gereksinim yokluk hipotezi altında değişebilirliktir. Değişebilirlik yokluk hipotez altında, gözlemlerin ortak dağılımının alt simgelerinin permütasyonları altında değişmezdir [12]. Değişebilirlik, yokluk hipotezi permütasyon tekniği kullanılarak test edilecek ise gereklidir.

<u>Tanım 3.1:</u>

Rastgele değişkenler $X_1, X_2, \dots, X_n$ olmak üzere, eğer rastgele vektör $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ‘ nin dağılımı herhangi bir permütasyon $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ ile elde edilen $(X_{\pi 1}, X_{\pi 2}, \dots, X_{\pi n})$ vektörünün dağılımı ile aynı ise değişebilir olarak adlandırılır. Kısaca değişebilirlik Eş. 3.1 şeklinde ifade edilir.

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{\text{def}}{=} (X_{\pi 1}, X_{\pi 2}, \dots, X_{\pi n}) \quad (3.1)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olarak tanımlandığında X_i‘ nin değişebilir olması, $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_{X_{\pi 1}, X_{\pi 2}, \dots, X_{\pi n}}(X_{\pi 1}, X_{\pi 2}, \dots, X_{\pi n})$ olması ile aynıdır.

Örneğin eğer gözlem sayısı n = 4 ise ve bu n = 4 gözleme (3;1;2;4) permütasyonu uygulandığında değişebilirlik altında $f_{x_1,x_2,x_3,x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_{x_3,x_1,x_2,x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ olması istenir.

X_i kesikli ise bu durum

$$P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; X_3 = x_3; X_4 = x_4) = P(X_3 = x_1; X_1 = x_2; X_2 = x_3; X_4 = x_4)$$

şekilinde ifade edilebilir.

Tanım 3.2:

Eğer sonlu yığın $X_1, X_2, \ldots, X_n$ herhangi bir n > 1 için değişebilir ise sonsuz bir dizide $X_1, X_2, \ldots$ rastgele değişkenler değişebilir olarak adlandırılır. Örneğin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağıldığında $X_1, X_2, \ldots, X_n$ değişebilirdir denir.

X_i herhangi bir rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu *f(x)* olarak tanımlasın. Eğer tüm X_i' ler aynı dağılımlı ise olasılık yoğunluk fonksiyonuna ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \overset{iid}{=} f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{3.2}$$

olarak ifade edilir. Sağ taraftaki terimler herhangi bir sırayla çarpılabileceğinden, sol taraftaki değerlerde kendi içinde simetriktir denilir. Sonuç olarak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ değişebilirdir.

Bir permütasyon testinin adımları şöyle açıklanabilir; öncelikle $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rastgele değişkenlerin dağılımı $X \sim P$ olduğu ve test edilmek istenilen yokluk hipotezinin $H_0 : P \in P_0$ olduğu düşünülsün. Herhangi bir $P \in P_0$ altında π permütasyon seti için $\pi(X) \sim P$ olduğu varsayılsın. Test istatistiği olarak $T = t(X)$ olarak ifade edildiğinde, H_0 yokluk hipotezi altında T 'nın dağılımının hesaplanması istensin. Bu durumda permütasyon testi için aşağıdaki yollar izlenir:

1. $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ permütasyon oluşturulur.
2. Her bir n için $X_{\pi_n} = \pi_n(X)$ permute edilmiş yeni veri setleri oluşturulur.
3. Her bir n için permütasyon sonrası test istatistiği T_{π_n} hesaplanır.

T 'nin yokluk dağılımını yaklaşık olarak belirlemek için T_{π_n} 'nin deneysel dağılımı kullanılır ve bu dağılımın miktarına dayanarak bir p-değeri hesaplanır. p-değeri elde edilen gözlemlerin gözlem birimlerine olan tüm mümkün atamaları için hesaplanan test istatistiğinin gözlem birimlerine verilen yanıtlar için hesaplanan test istatistiğinden büyük yada eşit olduğu durumların, tüm mümkün durumlara oranıdır. H_0 hipotezi için elde edilen p değeri;

$$p = \frac{\left| T_{\pi_n} \geq T_{obs} \right|}{M} \tag{3.3}$$

burada "M" permütasyon testi için uygulanan toplam permütasyon sayısını göstermektedir.

Permütasyon testinin avantajı dağılım varsayımından bağımsız olmasıdır; yokluk hipotezi altında sadece değişebilirlik gerekir. Ayrıca, yokluk dağılımının bilinip bilinmediğine bakılmaksızın, herhangi bir test istatistiği için bir permütasyon testi vardır.

Faktöriyel tasarımlarda, farklı işlemler altında farklı beklenen değerlere sahip ve yanıtlar genellikle birbirleriyle değiştirilemezdir. Böylelikle değişebilirlik varsayımı sağlanmaz. Ana faktör ve etkileşim etkileri hakkında farklı çıkarımlar elde etmek için ya sınırlı permütasyon testine ya da yaklaşık çözümlere bakılır [13].

Sınırlı türde bir permütasyon yaklaşımı ile Salmaso (2003), faktöriyel tasarımlarda Eş. 2.3, Eş. 2.4 ve Eş. 2.5'te ilgilenilen yokluk hipotezlerinin her biri için ayrı ve ilişkisiz üç test bulunabileceğini göstermiştir [14].

Permütasyon testi kullanılarak elde edilen permütasyon çerçevesi, $\{H_{0B}, H_{0A}, H_{0AB}\}$ hipotezleri altında yeterlidir [13]. Yeterli istatistik kümesi 2^2 gözeye dağıtılmış gözlenen yanıtların vektörü $y = [y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{IJ}]'$ olarak ifade edilsin. Yeterli istatistiğin tanımından, Eş. 3.4'te verilen yeterlilik oranı a_i, b_j, $(ab)_{ij}$' den bağımsız ise örnek uzayından iki nokta *y'* ve *y* yeterli istatistik ile aynı yörüngededir denir [15]. Bu durum *y'*, *y*'nin "blokları içinde" birimlerin rasgele permütasyonu ise sağlanabilir [13].

Bir permütasyon testinde sınırlı rasgelelik sağlanırsa, etkiler ve etkileşim etkilerinin her biri için birbirinden bağımsız kesin testler elde edilir [15]. Sınırlı permütasyon testi altındaki "senkronize permütasyon testleri" etkiler ve etkileşim etkilerinin her biri için birbirinden bağımsız kesin testleri elde eden bir permütasyon stratejidir [15,16].

$$\frac{L(a,b,ab;y)}{L(a,b,ab;y')} = \frac{\Pi_{ijk} L\left(a_i, b_j, (ab)_{ij}; y_{ijk}\right)}{\Pi_{ijk} L\left(a_i, b_j, (ab)_{ij}; y'_{ijk}\right)} = h\left(y, y'\right) \tag{3.4}$$

3.1. Sınırlı Permütasyon (Restricted Permutation) ve Senkronize Permütasyonlar

ANOVA tasarımlarındaki bağımsız terimlerin testleri için birkaç permütasyon stratejisi mümkündür. Sınırlı permütasyonlar, tüm birim gruplarının permütasyonu, bazı artıkların permütasyonu veya bunların bazı kombinasyonlarını içerir [17].

Sınırlı permütasyon, test altında olmayan faktörün seviyeleri içinde gözlemlerin permütasyonu ile test istatistiğinin dağılımını hesaplar. Sınırlı permütasyon kullanan bir test kesin test olarak adlandırılır. Kısıtlamalar olmadan gözlemleri permüte eden testler yaklaşık permütasyon testleri olarak adlandırılır [18].

Faktöriyel tasarımlarda yanıtın öğeleri değişebilir olmadığında, diğer permütasyon testlerine göre sınırlı permütasyon testine ihtiyaç vardır. İki yönlü ANOVA' da etkilerin test edilmesi için permütasyon testi için Edgington (1996), gözlemlerin permütasyonuna yalnızca test edilmeyen faktör seviyeleri dahilinde izin verilen sınırlı permütasyon testiyle olağan F-istatistiğinin kullanılmasını önermiştir [18,19]. Bu yaklaşım etkileri birbirinden bağımsız test ederken, etkileşim etkisinin testi etkilerden bağımsız değildir. 2^k faktöriyel tasarımlarda sabit etkileri test etmek için senkronize permütasyonlar [14], etkiler ve etkileşim etkilerinin birbirlerinden bağımsız olarak test edilebilmesini sağlayan bir sınırlı permütasyon prosedürüdür [15].

Bir 2^2 faktöriyel tasarımında iki temel etkiyi ve etkileşim etkisini birbirinden bağımsız test etmek istenilen bir sonuçtur. Bu amaç doğrultusunda Eş. 2.3, Eş. 2.4 ve Eş. 2.5'te belirtilen yokluk hipotezleri için üç adet problem vardır [15];

- H_{0B} ve H_{0AB} hipotezlerinin doğruluğundan bağımsız olarak $H_{0\text{A}} : \{a = 0\}$ hipotezini test etmek,
- $H_{0A} \cup H_{0AB}$ hipotezlerinin doğruluğundan bağımsız olarak H_{0B}'ı test etmek.
- $H_{0A} \cup H_{0B}$ hipotezlerinin doğruluğundan bağımsız olarak H_{0AB}'ı test etmek.

Senkronize permütasyonlar aynı zamanda sınırlı permütasyon prosedürü olduğundan permütasyonlar test edilmeyen faktörlerin seviyeleri içinde gerçekleşir. Senkronize permütasyonlar, her bir blok çiftinin içinde "aynı ν sayıda" gözlem birimin rastgele yer değiştirmesidir. Böylelikle senkronize permütasyon testi iki ana etki ve etkileşim etkisi için ayrı ve kesin test sağlar. Bu testlerin hepsi karşılıklı olarak ilişkisizdir [14].

Satır faktörü *A*'nın etkisinin testi için senkronize permütasyon *B* faktörünün tüm seviyelerinin sabit tutulup, permütasyonların *A* faktörünün seviyeleri arasında görülmesini sağlar. Bu duruma ilişkin gösterim Şekil 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Sütun içi permütasyon gösterimi

		Faktör B				
		$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_h	$\cdots$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$
	A_i	$\cdots$	$y_{ij1}\ y_{ij2}\ \cdots\ y_{ijn}$	$\cdots$	$y_{ih1}\ y_{ih2}\ \cdots\ y_{ihn}$	$\cdots$
Faktör A	$\vdots$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow\ \nu_{is}^{*}$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow\ \nu_{is}^{*}$	$\Updownarrow$
	A_s	$\cdots$	$y_{sj1}\ y_{sj2}\ \cdots\ y_{sjn}$	$\cdots$	$y_{sh1}\ y_{sh2}\ \cdots\ y_{shn}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$

Burada ν^{*}_{is} gözlemi A_sB_j ve A_iB_j blokları arasında rasgele yer değiştiren birim sayısıdır. “*” sembolü A_sB_j ve A_iB_j bloklarındaki birimler arasında rasgele senkronize permütasyon uygulandığını ifade etmektedir. ν^{*}_{is} *B'* faktörünün seviyeleri bakımından değişmediği için senkronize ifadesi kullanılır $1 \leq \nu^{*}_{is} \leq n$ [18].

Sütun faktörü *B* 'nin etkisinin testi için senkronize permütasyon *A* faktörünün tüm seviyelerinin sabit tutulup permütasyonların *B* faktörünün seviyeleri arasında görülmesini sağlar. Bu duruma ilişkin gösterim Şekil 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Satır içi permütasyon gösterimi

	Faktör B				
	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_h	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\Longleftrightarrow$	$\vdots$	$\ddots$
A_i	$\cdots$	$y_{ij1}\ y_{ij2}\ \cdots\ y_{ijn}$	$\Longleftrightarrow$ ν^{*}_{jh}	$y_{ih1}\ y_{ih2}\ \cdots\ y_{ihn}$	$\cdots$
Faktör A $\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\Longleftrightarrow$	$\vdots$	$\ddots$
A_s	$\cdots$	$y_{sj1}\ y_{sj2}\ \cdots\ y_{sjn}$	$\Longleftrightarrow$ ν^{*}_{jh}	$y_{sh1}\ y_{sh2}\ \cdots\ y_{shn}$	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\Longleftrightarrow$	$\vdots$	$\ddots$

Burada ν^{*}_{jh}, A_iB_j ve A_iB_h blokları arasında rasgele yer değiştiren birim sayısıdır. “*” sembolü A_iB_j ve A_iB_h bloklarındaki birimler arasında rasgele senkronize permütasyon uygulandığını gösterir. ν^{*}_{jh} , *A* faktörünün seviyeleri bakımından değişmediği için senkronize ifadesi kullanılır $1 \leq \nu^{*}_{jh} \leq n$ [20].

3.2. Kısıtlı Senkronize Permütasyonlar (Constrained Synchronized Permutations)

Kısıtlı senkronize permütasyonlar (CSP_s) bloklar içinde birimleri aynı pozisyonda yer değiştirmesine dayanır. CSP_s için toplam permütasyon sayısı;

$$M^{CSP_s} = \binom{2n}{n} \tag{3.5}$$

olarak hesaplanır ve sadece her bir A_iB_j blok içindeki *n* tekrar sayısına bağlıdır [15]. Faktör A ' yı test ettiğimiz düşünüldüğünde tekrar sayısı n=2 ile bir 2^2 tasarımında tüm mümkün CSP_s sayısı $M^{CSP_s} = \binom{4}{2}$ olacak şekilde tüm mümkün CSP_s listesi Çizelge 3.1'de verildiği gibidir.

Örneğin $n = 2$ yineleme sayısına sahip 2^2 tamamlanmış faktöriyel tasarım göz önüne alınsın. Aşağıdaki çizelgede bu yapı gösterilmektedir.

Çizelge 3.3. 2^2 tamamlanmış faktöriyel tasarım

Faktör *B* / Faktör *A*	B_1	B_2
A_1	y_{111} , y_{112}	y_{121} , y_{122}
A_2	y_{211} , y_{212}	y_{221} , y_{222}

A faktörünün etkisini test etmek istendiğinde test istatistiğinin senkronize permütasyon dağılımını elde etmek için CSP_s kullanılsın. CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında yer değiştirecektir.

A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarına bakıldığında $\binom{4}{2} = 6$ farklı permütasyon vardır.

Bunlar;

1. Herhangi bir yer değiştirmenin olmadığı durum. Bu durumda hesaplanan test istatistiği gözlenen değerlerden elde edilen test istatistiği ile aynı değerdedir.
2. A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarında y_{111} ve y_{211} gözlemleri ile CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler, test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında değiş tokuş edileceğinden A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarında y_{121} ve y_{221} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum.

Çizelge 3.4. y_{121} ve y_{221} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum

Faktör *A* \ Faktör *B*	B_1	B_2
A_1	$\underline{y_{211}}, y_{112}$	$\underline{y_{221}}, y_{122}$
A_2	$\underline{y_{111}}, y_{212}$	$\underline{y_{121}}, y_{222}$

3. A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarında y_{111} ve y_{212} gözlemleri ile CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler, test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında değiş tokuş edileceğinden A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarında y_{121} ve y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum.

Çizelge 3.5. y_{121} ve y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum

Faktör *A* \ Faktör *B*	B_1	B_2
A_1	$\underline{y_{212}}, y_{112}$	$\underline{y_{222}}, y_{122}$
A_2	$y_{211}, \underline{y_{111}}$	$y_{221}, \underline{y_{121}}$

4. A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarında y_{112} ve y_{211} gözlemleri ile CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler, test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında değiş tokuş edileceğinden A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarında y_{122} ve y_{221} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum.

Çizelge 3.6. y_{122} ve y_{221} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum

Faktör A \ Faktör B	B_1	B_2
A_1	y_{111} , $\underline{y_{211}}$	y_{121} , $\underline{y_{221}}$
A_2	$\underline{y_{112}}$, y_{212}	$\underline{y_{122}}$, y_{222}

5. A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarında y_{112} ve y_{212} gözlemleri ile CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler, test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında değiş tokuş edileceğinden A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarında y_{122} ve y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum.

Çizelge 3.7. y_{122} ve y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum

Faktör A \ Faktör B	B_1	B_2
A_1	y_{111} , $\underline{y_{212}}$	y_{121} , $\underline{y_{222}}$
A_2	y_{211} , $\underline{y_{112}}$	y_{221} , $\underline{y_{122}}$

6. A_1B_1 ve A_2B_1 bloklarında y_{112}, y_{111} ile y_{211}, y_{212} gözlemleri ile CSP_s kullanıldığında her bir blok çiftinde birimler, test edilmeyen faktörün blokları içindeki aynı pozisyonlarında değiş tokuş edileceğinden A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarında y_{121}, y_{122} ile y_{221}, y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum. Bu durumda hesaplanan test istatistiği gözlenen değerlerden elde edilen test istatistiği ile aynı değerdedir.

Çizelge 3.8. y_{121}, y_{122} ile y_{221}, y_{222} gözlemlerinin karşılıklı yer değiştirdiği durum

Faktör *B* / Faktör *A*	B_1	B_2
A_1	$\underline{y_{211}}$, $\underline{y_{212}}$	$\underline{y_{221}}$, $\underline{y_{222}}$
A_2	$\underline{y_{111}}$, $\underline{y_{112}}$	$\underline{y_{121}}$, $\underline{y_{122}}$

Bir 2^2 faktöriyel tasarımı için gözlemler içindeki tüm değişimler tek tek gösterilmiştir. Toplamda 6 farklı permütasyon vardır [20].

4. SENKONİZE PERMÜTASYON TESTİNDE 2^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Birkaç faktör içeren deneylerde yaygın olarak faktöriyel tasarımlar kullanılır.2^k faktöriyel tasarım, her biri yalnız iki düzeyden oluşan k faktörlerin çok özel bir durumudur. Birçok faktör ile araştırma yaparken deneysel çalışmaların ilk aşamalarında 2^k tasarımlar özellikle faydalı olur. 2^2 faktöriyel tasarımında kesin permütasyon çözümlerinin 2^3 faktöriyel tasarımlarına genişletilmesi ile ilgileneceğiz. k' nın ana faktör sayısını gösterdiği bir 2^k tam faktöriyel tasarımının model matrisi X =[1_N D P_D] dir.

- ✓ 1_N**:** μ genel ortalamadan oluşan (N x 1) boyutlu sütun vektörünün elemanlarını gösterir. (Nx1) +1'dir.

Tüm N değeri ile "1" 'in çarpımı, matrise "+1" olarak yazılır. "+1" elemanlarından oluşan genel ortalamalara ise sütun vektörü denir.

- ✓ D : k ana faktörün iki farklı seviyesinin (±1) tüm kombinasyonlarını içeren bir (N x K) matrisidir.
- ✓ P_D: P_D sütunlarına karşılık gelen bir (N x [N - k - 1]) matrisidir. P_D sütunlarına karşılık gelen matris daha sonra kullanacağımız t faktörünün etkileşimlerine de karşılık geldiği bilinir.
- ✓ t : t faktörü etkileşimlerine karşılık gelen bu sütunlar, *D* satırlarında , $2 \leq t \leq k$ 'deki t faktörlerine karşılık gelen sütunlarının Hadamard çarpımı ile oluşturulmasıdır.

4.1. 2^2 Tasarımında Senkronize Permütasyon Testleri

Tekrarlanan 2^2 tam faktöriyel tasarımının matrisi (M x N)' dir. Burada M = n x N, n > 1 (n tekrar sayısıdır) ve N = 2^2 ' dir. Buradaki seviyelerin her biri için farklı kombinasyonlar vardır. Bir bloğu tanımlayan n tekrarlar dikkate alınır. Çalışmada doğrusal model kullanılmıştır. Çünkü model matrisi normal formda varsayılmıştır.

Model Matrisi : X =[1_N M N] olarak verilir.

İlgili doğrusal lineer yanıt modelinin parametreleri aşağıdaki gibidir;

y_{ij}: lineer yanıt değişkenidir,

a : ana etki,

b : ana etki,

ab : etkileşim Etkisi,

X_{1ij} : 1-inci sütunun , j-inci bloğundaki , i-inci öğedir,

X_{2ij}: 2-inci sütunun , j-inci bloğundaki , i-inci öğedir,

μ : Ortalama,

ε : Deneysel Hata dır.

X_{pij} : ± 1, p-inci sütunun j-inci bloğundaki i-inci öğedir.

İlgili doğrusal yanıt modeli,

$$y_{ij} = \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} + (ab)_{3ij} + \varepsilon_{ij} \tag{4.1}$$

i =1, ... , M, j = 1, ... , 2^2, M = n x 2^2 , p =0 , 1, 2, ..., n dir. Faktör seviyelerinin her bir kombinasyonu tekrarlanır ve ε_{ij}, sıfır ortalama ve bilinmeyen sürekli dağılım ile değiştirilebilir deneysel hatalardır.

4.2. Senkronize Permütasyon Testleri

Faktöriyel tasarımlarda yanıtın öğeleri değişebilir olmadığında, diğer permütasyon testlerine kıyasla sınırlı bir tür permütasyona ihtiyaç vardır. İki yönlü ANOVA' da ana etkilerin test edilmesi için permütasyon testi çerçevesinde Edgington (1996), gözlemlerin permütasyonuna yalnızca test edilmeyen faktör seviyeleri dahilinde izin verilen sınırlı permütasyon stratejisiyle olağan F-istatistiğinin kullanılmasını önermiştir [18,19]. Ancak bu yaklaşım sadece ana etkileri birbirinden bağımsız test ederken etkileşim etkisinin testi ana etkilerden bağımsız değildir. 2^k faktöriyel tasarımlarda sabit etkileri test etmek için senkronize permütasyonlar [14], ana etkiler ve etkileşim etkisini birbirlerinden bağımsız olarak test edilebilmesini sağlayan bir sınırlı permütasyon prosedürüdür [15].

Hipotezler;

H_0: {(a=0) ∩(b=0) ∩(ab=0)},
H_1 : {H_0 doğru değil}' dir, (4.2)
şeklinde kurulur.

Genellikle deneycinin ilgisi, iki ana etki ve etkileşim için ayrı ayrı test etmektir. Dolayısıyla, üç kısmi sıfır hipotezi vardır: H_{0A}: {a = 0}, H_{0B}: {b = 0} ve H_{0AB}: {ab =0} ve üç ayrı test bulmaktır. Bu nedenle, örneğinH_{0A}: {a =0}' ı , H_{1A}: {a ≠0}' a karşı test edilir. Bu amaca bir permütasyon çerçevesinde ulaşmak için, üç test alt probleminin tümü için uygun bir ortak yeterli istatistik seti bulunur.

$H_{0A} \cup H_{0B}$ bağımsız olarak H_{0AB} ve H_{0B}' den bağımsız olarak $H_{0A} \cup H_{0AB}$, H_{0A}' dan bağımsız olarak $H_{0B} \cup H_{0AB}$. Diğer bir deyişle, $\{H_{0A}, H_{0B}, H_{0AB}\}$ altında bir dizi yeterli istatistik bulunması gerekir. $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ bu dört vektör elimizdeki veri bloğuna aittir. y' nin verileri sürekli bir dağılımdan geldiğinde etkilerinin ayrı ayrı test edilmesi için boş hipotez altında ortak ve yeterli minimum istatistikler kümesi olmalıdır.

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ veri bloğundaki *t* faktörü etkileşimlerine karşılık gelen bu sütunlar, D satırlarında, $2 \leq t \leq k$ ' deki *t* faktörlerine karşılık gelen sütunlarının Hadamard çarpımı ile oluşturulmasıdır.

2^2 faktöriyel tasarımında, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ ' nin $\{H_{0A}, H_{0B}, H_{0AB}\}$ ortak sıfır hipotezi altında yeterli istatistikler kümesi olduğundan, yalnızca her blok içindeki verileri değiştirmeye izin verir. Bu nedenle, kesin bir permütasyon testi mümkün görünmemektedir. Yani bir tür özel kısıtlı permütasyon gereklidir. Önce faktör A' yı, faktör B' nin 1. ve 2. seviyelerinde ayrı ayrı karşılaştırmak için iki kısmi istatistiği ele alınsın:

$$T_{A/1} = \sum_i y_{i1} - \sum_i y_{i3}, \quad (4.3)$$

$$T_{A/2} = \sum_i y_{i2} - \sum_i y_{i4} \quad (4.4)$$

A_1B_1 bloğundan bir verinin rastgele seçildiğini ve A_2B_1 bloğundan rastgele seçilen diğer veri ile değiş tokuş edildiğini varsayılsın. Ayrıca, A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarından rastgele iki verinin değiş tokuş edilir.

Çizelge 4.1. 2^2 faktöriyelde seviye kombinasyonlarının etkileri

	A_1	A_2
B_1	$a,\quad b,\quad ab$	$-a,\quad b,\quad -ab$
B_2	$a,\ -b,\ -ab$	$-a,\ -b,\quad ab$

Temel hesaplamalardan sonra permütasyon testinin;

İki kısmi istatistikleri şunlardır;

A için;

$$T^*_{A/1} = 2(n - 2v^*_1)(a + ab) + n(\bar{\varepsilon}^*_1 - \bar{\varepsilon}^*_3)\ , \tag{4.5}$$

$$T^*_{A/2} = 2(n - 2v^*_2)(a - ab) + n(\bar{\varepsilon}^*_2 - \bar{\varepsilon}^*_4) \tag{4.6}$$

Burada,

$$\bar{\varepsilon}^*_j = \sum_i \varepsilon^*_{ij} / n \tag{4.7}$$

göz önüne alnan bloktaki permütasyon hatasıdır.

Burada v^*; yer değiştiren gözlemlerin birim sayısıdır. Göz önüne alınan her bir blok çftinin içinde aynı v sayıda gözlem biriminin rastgele yer değiştirmesidir ($1 \leq v^* \leq$ n).

a etkisinin hem $T^*_{A/1}$ hem de $T^*_{A/2}$ üzerinde karıştırıldığını belirtmekte fayda vardır. Eğer $v^*_1 = v^*_2 = v^*$ ise , yani iki istatistik üzerinde de permütasyonlar senkronize edilirse,

$$T^*_A = T^*_{A/1} + T^*_{A/2} \tag{4.8}$$

tarafından verilen permütasyon yapısına sahiptir. T^*_A aşağıda verildiği gibidir;

$$T^*_A = 4(n - 2v^*) * a + n(\bar{\varepsilon}^*_1 + \bar{\varepsilon}^*_2 - \bar{\varepsilon}^*_3 - \bar{\varepsilon}^*_4) \tag{4.9}$$

İspat ;

$T_A^* = T_{A/1}^* + T_{A/2}^*$, $v_1^* = v_2^* = v^*$ ise,

$$= 2(n-2v_1^*)(a+ab) + n(\bar{\varepsilon}_1^* - \bar{\varepsilon}_3^*) + 2(n-2v_2^*)(a-ab) + n(\bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= 2(n-2v_1^*)(a+ab) + 2(n-2v_2^*)(a-ab) + n(\bar{\varepsilon}_1^* - \bar{\varepsilon}_3^*) + n(\bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= (2n-4v_1^*)(a+ab) + (2n-4v_2^*)(a-ab) + (n\bar{\varepsilon}_1^* - n\bar{\varepsilon}_3^*) + (\overline{n\varepsilon}_2^* - n\bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= (2na - 2nab - 4av_1^* - 4abv_1^*) + (2na - 2nab - 4av_2^* - 4abv_2^*) + (n\bar{\varepsilon}_1^* - n\bar{\varepsilon}_3^* + \overline{n\varepsilon}_2^* - n\bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= 4na + 2nab - 4av^* - 4abv^* - 2abn - 4av^* + 4abv^* + n(\bar{\varepsilon}_1^* + \bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_3^* - \bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= 4a(n - v^* - 4abv^* - v^* + 4abv^*) + n(\bar{\varepsilon}_1^* + \bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_3^* - \bar{\varepsilon}_4^*)$$

$$= 4(n-2v^*) * a + n(\bar{\varepsilon}_1^* + \bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_3^* - \bar{\varepsilon}_4^*)$$

olur.

Böylece T_A^* , yalnızca a etkisine ve değiştirilebilir hataların lineer bir kombinasyonuna bağlı olduğundan, H_{0B} veya H_{0AB}' nin doğru olup olmadığından bağımsız olarak H_{0A} için ayrı bir permütasyon testi verir.

B için;

Test analizini tamamlamak için, faktör B'yi, faktör A'nın 1. ve 2. seviyeleri için ayrı ayrı karşılaştırmak için kısmi istatistikleri dikkate alınır;

$$T_{B/1} = \textstyle\sum_i y_{i1} - \sum_i y_{i2} \, , \qquad (4.10)$$

$$T_{B/2} = \textstyle\sum_i y_{i3} - \sum_i y_{i4} \qquad (4.11)$$

v* ‘ın rastgele veri alışverişi olduğunu varsayarak;

(A_1B_1 , A_1B_2) ve (A_2B_1 , A_2B_2) eşleştirilmiş blokları arasındaki senkronize permütasyonları tekrar ele alalım. Böylece, permütasyon yapısı;

$T_B^* = T_{B/1}^* + T_{B/2}^*$

$$= 4(n - 2v^*) * b + n(\bar{\varepsilon}_1^* - \bar{\varepsilon}_2^* + \bar{\varepsilon}_3^* - \bar{\varepsilon}_4^*) \quad (4.12)$$

AB için;

Yalnızca etkileşim etkisi (ab)' ye ve değiştirilebilir hataların doğrusal bir kombinasyonuna bağlı olan T_{AB}^*' nin H_{0A} veya H_{0B}' nin doğru olup olmadığından bağımsız olarak H_{0AB} için ayrı bir permütasyon testi verir.

$${}^{a}T_{AB}^* = T_{A/1}^* - T_{A/2}^*$$

$$= 4(n - 2v^*) * ab + n(\bar{\varepsilon}_1^* - \bar{\varepsilon}_2^* - \bar{\varepsilon}_3^* + \bar{\varepsilon}_4^*) \quad (4.13)$$

$${}^{b}T_{AB}^* = T_{B/1}^* - T_{B/2}^*$$

$$= 4(n - 2v^*) * ab + n(\bar{\varepsilon}_1^* - \bar{\varepsilon}_2^* + \bar{\varepsilon}_3^* - \bar{\varepsilon}_4^*) \quad (4.14)$$

$T_{AB}^* = {}^{a}T_{AB}^*$ ve $T_{AB}^* = {}^{b}T_{AB}^*$ ise, (4.15)

${}^{a}T_{AB}^*$ ve ${}^{b}T_{AB}^*$ 'nin permütasyon dağılımları neredeyse çakıştığından, (ab) etkisinin test edilmesi açısından tam olarak aynı çıkarımı ürettiklerine dikkat edilmelidir.

Üç testin yansızlığı ve tutarlılığı desteklenebilir. Yansızlıklar ilgili olarak, örneğin,

$H_{0A} = \{a = 0\}$

$H_{1A} = \{a > 0\}$ ‘ ına karşı permütasyon yapısı, Eş 4.9 deki gibi olan ve Eş 4.8’ i ele alınsın. Gözlemlenen değeri,

$$T_{0A} = 4na + n(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_4) \quad (4.16)$$

dir

İspat;

Eş 4.8 ‘den daha önce ispat yoluyla elde edilen sonucun Eş 4.9’ daki gibi olduğu görülmüştür. $v^* = 0$ olduğunda yansız ve tutarlı olduğu bilinmektedir.

$T_{0A}^{*} = 4(n - 2.0) * a + n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )$

$= 4na +\ n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )$

olur.

Buna göre,

Pr $\{T_A^{*} \geq\ T_{0A}\}$

$=\ \Pr\{\ 4(n - 2v^{*})a + n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ ) \geq\ 4na +\ n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )\}$

$=\ \Pr\{\ 4na - 8v^{*}a + n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ ) \geq\ 4na +\ n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )\}$

$=\ \Pr\{ - 8v^{*}a + n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ ) \geq\ \ n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )\}$

$a = 0$,

$$=\ \Pr\{n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} - \bar{\varepsilon}_4^{*}\ ) \geq\ n(\ \bar{\varepsilon}_1^{*}\ +\ \bar{\varepsilon}_2^{*} - \bar{\varepsilon}_3^{*} -\ \bar{\varepsilon}_4^{*}\ )\} \tag{4.17}$$

böylece a > 0 olduğunda p değerleri, a=0 olan p değerlerinden stokastik olarak daha küçüktür. Benzer analiz, kısıtlanmamış alternatifler ve diğer tüm ayrı testler için de yapılabilir. Ayrıca, farklı bloklar üzerindeki toplamların doğrusal kombinasyonlarına dayanan bu tür yansız testler tutarlıdır.

4.3. Tekrarlanan 2^k Faktöriyellerin Senkronize Permütasyon Testleri

Senkronize permütasyonlar, etkileri analiz edilmekte olan faktörlerin seviyelerine göre verileri yeniden düzenledikten sonra yeterli istatistiklerin uygun vektörünü karıştırarak tüm etkileri ayrı ayrı test etmeye izin verir.

Tekrarlanmış 2^k tam faktöriyel tasarım, (M x N) matrisidir, M = n x 2^k , N = 2^k dir. Burada her farklı düzey kombinasyonu için bir bloğu tanımlayan n tekrarlar dikkate alınır. Sabit etkilerle tekrarlanmış 2^k tam faktöriyel tasarımın varyans analizi için doğrusal model:

$$y_{ij} =\ \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} +\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(ab)X_{1ij}X_{2ij} + \dots\dots\dots..+(abc)X_{1ij}X_{2ij}X_{3ij} +\ \dots\dots\dots.+\varepsilon_{ij} \tag{4.18}$$

Model Matrisi : X = [1N D PD] dir.

i =1, ... , M, j = 1, ... , 2^2, M = n x 2^2 , p = 0 , 1, 2, ..., n dir. Faktör seviyelerinin her bir kombinasyonu tekrarlanır ve εij , sıfır ortalama ve bilinmeyen sürekli dağılım ile değiştirilebilir deneysel hatalardır.Amaç, ana etkiler ve etkileşim etkileri için ayrı ayrı test etmektir. Dolayısıyla, 2^k - 1 sıfır hipotezi vardır:k ana etkileri üzerinde H_{0A}: {a = 0} , H_{0B}: {b = 0}, ... , iki faktör etkileşiminin $\binom{k}{2}$ etkileri üzerinde, üç faktör etkileşiminin $\binom{k}{3}$ etkileri üzerinde k faktör etkileşiminin etkisi ve 2^k - 1 sıfır hipotezi sayısı kadar ayrı test bulmaktır.

A, B, C ana faktörlerine karşılık gelen a, b, c etkileri ve AB, AC, BC, ABC etkileşimlerine karşılık gelen (ab), (ac), (bc), (abc) etkileşim etkileri vardır. Bu nedenle örneğin ,

H_{0A}: {a = 0}' yi , H_{1A}: {a ≠ 0}' ye karşı test etmek,
H_{0B}, ..., H_{0ABC}' nin doğru olup olmadığına bakılmaksızın ihtiyaç duyulan şeydir.

Yukarıdaki amaca ulaşabilmek için permütasyon yöntemine başvurulur. Tüm test problemleri için orijinal gözlemlerden uygun veri setleri bulunmalıdır. H_{0B}' den bağımsız olarak $H_{0A} \cup H_{0AB} \cup \ldots. \cup H_{0ABC}$, H_{0A}' dan bağımsız olarak $H_{0B} \cup H_{0AB} \cup \ldots\ldots\ldots \cup H_{0ABC} \ldots..$ vb. tek tek bakılarak test edilmelidir.

4.4. 2^3 Tam Faktöriyel Tasarım İçin Tasarım Matrisi

2^3 faktöriyel tasarımını oluşturmak için Hadamard matrisi kullanılmıştır. Kısaca Hadamard matrisinden bahsedecek olursak özellikle matematikte ve bilgisayar bilimlerinin kuantum hesaplama gibi alanlarında kullanılan bir matristir. Fransız matematikçi Jaques Hadamard tarafından tasarlanmış ve adıyla anılmıştır. Matrisin en belirgin özelliği, matrisin kare matris olması ve elemanlarının -1 veya +1 değerlerinde olmasıdır. Ayrıca matrisin satırları birbirinden bağımsız olarak diktir (ortogonal). Bunun anlamı, matrisin herhangi iki satırından oluşturulabilecek iki vektörün birbirine dik vektörler olmasıdır (ortogonal vectors) [21].

Tanım 4.1. (Hadamard Matris)

n. mertebeden bir Hadamard matris, elemanları -1 ve +1’ lerden oluşan n×n tipinde bir karesel matristir. H_n ile gösterilir. I_n n. mertebeden birim matris olmak üzere;

$$HH^T = nI_n$$

n. mertebeden ve elemanları -1 ile +1’lerden oluşan her matris Hadamard matris değildir. Bunun için mertebenin ve elemanların dizilişinin bazı özel koşullara sahip olması gerekir. Bu koşullardan ileride bahsedilecektir. Hadamard matrisler başta iletişim (özellikle mobil iletişim) ve kodlar teorisi olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır [22].

Tanım 4.2. (Denk Hadamard Matrisler ve Standart Form)

- $HH^T = nI_n$ bağıntısının sonucu, H_n ’ nin herhangi iki satırının (aynı zamanda iki sütununun) ortogonal (dik) olmasıdır.
- Herhangi iki satır veya sütun yer değiştirilirse,
- Bir satır veya sütunun her elemanı -1 ile çarpılırsa,
- H’nin transpozesi alınırsa, yukarıdaki özellikler değişmez.
- Yukarıdaki üç işleme göre sadece bazı farklı kombinasyonlardan oluşan iki Hadamard matrisin denk oldukları söylenebilir.
- Bir Hadamard matriste, en üst satırı ve en sol sütunu tamamen +1’ lerden oluşan denk bir matris oluşturabiliyorsa bu Hadamard matrise Standart form denir.
- Arta kalan satırlar +1’lerden ve -1’lerden oluşur. Eğer $n > 1$ ise *n*, çift olmak zorundadır [23].

n. mertebeden bir Hadamard matrisin derecesi 1’ in, 2’ nin ya da 4’ ün katı olmak zorundadır. Bu yüzden 3. , 5. , 7. ,…vs. mertebeden Hadamard matrisler mevcut değildir. 4’ ün katı olan her n için, n.mertebeden Hadamard matrislerin varlığı henüz kesinleşmemiştir [22].

Tüm olası kombinasyonlardan oluşan [(2^k - 1) x k] matrisi, R_{2^k}; iki seviyeli bir faktöriyel tasarımın, k faktörünün iki farklı seviyesinin (±1) ' lerden, tüm (+1) ' leri kombinasyonun dışında tutarak oluşturulan matrise *yeniden tasarlanan matris* denir.

Model Matrisi (Tasarım Matrisi) : X =[1N   D PD] gibidir.

D : *k ana faktörün iki farklı seviyesinin (±1) tüm kombinasyonlarını içeren bir (N x K) matrisidir.*

D' deki tüm + 1' leri içeren satır silindiğinde, oluşturulan yeni R_{2^k} ' nin, yeniden tasarlanan matrisinin içinde bulunan D tasarım matrisi ile çakıştığı bilinmektedir.

2^k tam faktöriyel tasarım matrisi; yeniden tasarım için prosedür aşağıdaki adımlardan oluşur;

1. Model matrisini normal biçimde yazın.
2. Tasarım matrisindeki satırları, ikinci satırda olacak şekilde değiştirin, k faktöre karşılık gelen sütunlar aynı değerlere sahiptir ve yeniden tasarlanan matrisin r-inci satırı olarak ± 1'ler, 1 ≤ r ≤ N - 1. Yeniden tasarlanan matrisde böyle bir satıra r-inci yeniden tasarlanan matrisin satırı denir. Şimdi tasarım matrisinin ikinci satırında bulunan +1 ' ler kadar k - 1 tane faktör vardır deriz.
3. Tasarım matrisindeki satırları, ikinci satırda bulunan ve +1 olan k - 1 faktörlerinin her birinin iki bitişik satırındaki j_1 , j_2 eleman çiftlerinin her çifti aynı işarete sahip olacak, yani j_1 = j_2 = +1 veya j_1 = j_2 = -1 olacak şekilde değiştirin.

Yeniden tasarlanan matriste, her seferinde farklı bir yeniden tasarlanmış bir satırı kullanılarak 2^k - 1 kez tekrarlanabilir. 2^3 tam faktöriyel tasarım için tasarım matrisi normal formda ele alınır [14].

2^3 tam faktöriyel tasarım için hadamard matrisi aşağıdaki gibidir;

$X_8 = \{A, B, AB, C, AC, BC, ABC\}$;

$$= \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & + & - & - & - \\ + & - & + & - & + & - & - \\ + & - & - & - & - & + & + \\ - & + & + & - & - & + & - \\ - & + & - & - & + & - & + \\ - & - & + & + & - & - & + \\ - & - & - & + & + & + & - \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

+1 için " + " , – 1 için " – " yazıyoruz. Karşılık gelen yeniden üretilen matrisi (normal formda X_8' den türetilmiştir);

$$R_8 = \begin{bmatrix} + & + & - \\ + & - & + \\ + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & - \\ - & - & + \\ - & - & - \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

R_8' deki ilk satırı için gözlemleri yeniden düzenleyelim ve elde edilen tasarım matrisini X_8^1 ile gösterelim. Bu yeniden düzenlenen X_8' de herhangi bir satırı değiştirmediğinden $X_8^1 = X_8$ elde edilir.

4.5. Test İstatistiklerinin Oluşturulması

Her bir model matrisindeki farklı bitişik satır çiftlerine karşılık gelen, tekrarlanmış model matrisinin her farklı blok çiftine senkronize permütasyonlar uygulanabilir.

Hata terimlerinin, tekrarlanan 2^k tam faktöriyel tasarım için doğrusal modelde değiştirilebilir olduğu varsayıldığında, o zaman her bir bitişik blok çifti için aşağıdaki permütasyon istatistiğini dikkate alınır;

Test İstatistiği

$$S^*_{u,u+1} = \sum_{i=1}^{n} (y^*_{iu} - y^*_{i(u+1)}), \ \varepsilon_{ij} \sim N(0,1) \text{ dir.} \qquad (4.21)$$

farklı indeks çifti için tanımlanmış (u, u + 1), burada u yeniden düzenlenmiş model matrisindeki tek satır indisidir, u =1, 3, ... , (2^k - 1) ve y^*_{iu} , y_{iu}' nun aşağıdakine göre permütasyon değeridir.

İlgili lineer yanıt modeli:

$$Y_{ij} = \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} + cX_{3ij} + (ab)X_{1ij}X_{2ij} + (ac)X_{1ij}X_{3ij} + (bc)X_{2ij}X_{3ij} + (abc)X_{1ij}X_{2ij}X_{3ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (4.22)$$

olarak yazılır.

- Yanıt modeli, c, (ac), (bc) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir;

$$S_{1,2}^{*} = 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{3,4}^{*} = 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) - n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{5,6}^{*} = 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) - n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{7,8}^{*} = 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*} \qquad (4.23)$$

İspat;

$$X_c = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ - & - & - & - \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \end{bmatrix}$$

Bu matriste C ana etkisinin seviyesi + olanlar, yani yüksek olanlar alınmıştır.

$\mu = 0$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0,1)$, $n^{*} = (n - 2v^{*})$ yazılır;

Buradaki ifadeler,

n : Tekrar sayısı,

v^{*} **:** Senkronize permütasyonlarla her bir bitişik blok çifti içinde rastgele değiştirilen eleman sayısıdır.

$$Y_{ij} = \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} + cX_{3ij} + (ab)X_{1ij}X_{2ij} + (ac)X_{1ij}X_{3ij} + (bc)X_{2ij}X_{3ij} + (abc)X_{1ij}X_{2ij}X_{3ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\begin{aligned} Y_{1,2} &= 2(n-2v^{*})c + 2(n-2v^{*})(ac) + 2(n-2v^{*})(abc) \\ &= 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) \end{aligned}$$

Burada + ve – ler katsayı önündeki işaretler olduğu görülmektedir. Yukarıda yapılan işlemleri AC , BC, ABC etkileşim etkileri için hadamard matrisi yardımı ile oluşturulmuş test istatistikleridir. X_{Ac} , X_{Bc} , X_{ABc} , hadamard matrisleri aşağıdaki gibidir;

- a, (c), (ac) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir;

$$X_{Ac} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & - \\ + & + & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & - \end{bmatrix}$$

$$S_{1,2}^{*} = 2n^{*}a + 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{3,4}^{*} = 2n^{*}a - 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{5,6}^{*} = 2n^{*}a + 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{7,8}^{*} = 2n^{*}a - 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

Toplam doğrusal kombinasyon;

$$S_{AC,1}^{*} = S_{1,2}^{*} + S_{3,4}^{*} + S_{5,6}^{*} + S_{7,8}^{*}$$

- b, (c), (bc) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir:

$$X_{Bc} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & - \\ - & + & - & - \\ - & - & + & + \\ + & + & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & - \end{bmatrix}$$

$$S_{1,2}^{*} = 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{3,4}^{*} = 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(bc) - 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{5,6}^{*} = 2n^{*}c + 2n^{*}(ac) + 2n^{*}(bc) - 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

$$S_{7,8}^{*} = 2n^{*}c - 2n^{*}(ac) - 2n^{*}(bc) + 2n^{*}(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}_{1,2}^{*}$$

<u>Toplam doğrusal kombinasyon;</u>

$$S^*_{BC,1} = S^*_{1,2} + S^*_{3,4} + S^*_{5,6} + S^*_{7,8}$$

• b, (c), (bc) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir,:

$$X_{ABc} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$S^*_{1,2} = 2n^*c + 2n^*(ac) + 2n^*(bc) + 2n^*(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}^*_{1,2}$$

$$S^*_{3,4} = 2n^*c + 2n^*(ac) - 2n^*(bc) - 2n^*(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}^*_{1,2}$$

$$S^*_{5,6} = 2n^*c - 2n^*(ac) + 2n^*(bc) - 2n^*(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}^*_{1,2}$$

$$S^*_{7,8} = 2n^*c - 2n^*(ac) - 2n^*(bc) + 2n^*(abc) + n\bar{\bar{\varepsilon}}^*_{1,2}$$

<u>Toplam doğrusal kombinasyon;</u>

$$S^*_{C,1} = S^*_{1,2} + S^*_{3,4} + S^*_{5,6} + S^*_{7,8}$$

<u>Çalışmada Hadamard matrsi kullanmamızın sebebi;</u>

i. Ortogonal olan 2^3 faktöriyel tasarımlar için oluşturulan 8. mertebeden hadamard matrisinin satır ve sütunları ortogonaldir.

ii. Hadamard matrisi mertebesi 2 ve üzeri katları olmak zorunda olduğu için 2^k faktöriyel tasarımlar için hadamard matrisinin 2 ve üzeri katları koşulunu sağlamaktadır.

iii. Hadamard matrisi aynı zamanda katsayılar önündeki işaretleride temsil ettiği ve ilgili lineer modeldeki uzun işlemleri kısaltmada işe yaradığı için kullanıma uygundur.

Burada;

$\overline{\overline{\varepsilon}}^*_{u,u+1}, u = 1 , 3 , 5 , 7$, permütasyon hatalarının lineer bir kombinasyonudur;

$\overline{\overline{\varepsilon}}^*_{u,u+1} = \overline{\varepsilon}^*_u - \overline{\varepsilon}^*_{u+1}$, $\overline{\varepsilon}^*_j = \sum_i \varepsilon_{ij} /n$ j = 1,…….2^3 , j-inci bloktaki permütasyon hatalarıdır.

Düzenlenmiş faktörlerin etkileri için ayrı testler elde etmek, $S^*_{u,u+1}$istatistikleri, normal formda $2^k - 1$ mertebesinde bir Hadamard matrisinin sütunları tarafından verilen lineer kombinasyonlar kullanılarak birleştirilir. Dolayısıyla, dört istatistik $S^*_{1,2}$,……,$S^*_{7.8}$ dördüncü dereceden bir Hadamard matrisinin sütunlarıyla birleştirilir.

<u>Doğrusal Kombinasyon;</u>

$$S^*_{C,1} = S^*_{1,2} + S^*_{3,4} + S^*_{5,6} + S^*_{7,8} \tag{4.24}$$

Her blok çiftinde aynı sayıda gözlemi değiş tokuş ettiğinden, her $S^*_{C,1}$ permütasyon testi kesindir, çünkü yokluk dağılımı denenmemiş etkilere göre değişmezdir ve yalnızca değiştirilebilir hatalara bağlıdır. Ayrıca, bu tür testler yansız, tutarlı ve yeterlidir. Son olarak 2^k -1 ayrı hipotezler için 2^k - 1 ayrı testler mevcuttur.
Test istatistiklerinin permütasyon dağılımı, gözlemlenen verinin, tekrar sayısından ve tasarım boyutundan etkilenir. Tasarım boyutu ve/veya tekrarların, elde edilen minimum boyut üzerindeki etkilerinin artması durumunda, boyutların azaldığı görülmektedir.

CSP_s için permütasyon dağılımlarının simetrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, farklı düzenlemeler için test altında aynı etkiye sahip permütasyon dağılımları aynı tür simetriye sahiptir.

CSP_s için, her test istatistiğinin sadece $\binom{2n}{n}$ farklı permütasyon değerine sahipken, ne teste ne tasarım boyutuna ne de yapılandırılmış veriye bağlı değildir.

5. KARŞILAŞTIRMALI SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde 2^3 tekrarlı faktöriyel tasarım için S^* testi , F testi, Welch Testi ve White testini sağa çarpık dağılımlarda, deneysel tip 1 hata ve güç değerleri bakımından, farklı dağılımlarda gösterdiği davranışları karşılaştırmalı simülasyon yoluyla sonuçları aşağıdaki gibi gözlemlenmiştir.

Tüm simülasyon çalışmasında α = 0.05 kullanılmıştır. Hata terimlerinin dağılımlarından tüm rastgele değişkenlerinin beklenen değeri sıfır olarak standartlaştırılmıştır.

Yapılan simülasyon çalışmasında R 4.3.1 versiyonlu RStudio programı kullanıldı. R programı ücretsiz ve herkesin kullanımına açık bir programdır. R programlama dilinde Normal dağılımdan veri çekmek için “ *library(dplyr)* ” paketi kullanılarak, deney tasarımını “ *expand.grid()* ” fonksiyonu, dağılım ise “ *rnorm()* ” fonksiyonu ile oluşturuldu. Normal dağılım için istenilen sonuçları $n_{sim} = 5000$ de elde edildi. F testi için “ *aov()* ” fonksiyonu, Welch testi için “ *calculate_welch_test()* ” fonksiyonu, White testi için “ *lm()* “ fonksiyonu kullanılmıştır. Cauchy dağılımı için veriyi “ *library(dplyr)* ” paketi kullanılarak, deney tasarımını “ *expand.grid()* ” fonksiyonu, dağılım ise “ *rcauchy()* “ fonksiyonu ile oluşturuldu. Cauchy dağılımı için istenilen sonuçlar $n_{sim} = 5000$ de elde edildi. Weibull dağılımı için “ *library(dplyr)* ” paketi kullanılarak, deney tasarımını “ *expand.grid()* ” fonksiyonu, dağılım ise “ *rweibull()* ” fonksiyonu ile oluşturuldu. Ters Gauss dağılımı için “ *library(MASS)* ” paketi kullanılarak, deney tasarımını “ *expand.grid()* ” fonksiyonu, “ *rinvgauss ()* “ dağılım fonksiyonu ile oluşturuldu. Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı için istenilen sonuçlar $n_{sim} = 3000$ elde edildi. Son olarak S^* test istatistiği için $S^*_{u,u+1} = \sum_{i=1}^{n} (y^*_{iu} - y^*_{i(u+1)})$ formülü kullanılmıştır. Tüm dağılımlarda S^* test istatistiği için $n_{sim} = 1000$ ve n = 5 tekrarlı yapıldı. Normal dağılım, Cauchy dağılımı, Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımında n = 7 tekrarlı olacak şekilde yapıldı.

Simülasyon çalışmasında F Testini, W^* (Welch Tetini), Wh^* (White Testi) ve S^* (Üzerinde çalıştığımız test istatistiği) ifade etmektedir. Normal dağılım N(0,1) parametreli, Cauchy dağılımı (0,1) parametreli, Weibull dağılımı için (λ =1 , k =0.25) ve (λ =1 , k =0.50) olmak üzere iki farklı parametre kullanılmıştır. Ters Gauss dağılımı için (μ = 1 , λ = 0.05) ve (μ = 1, λ = 0.01) olmak üzere iki farklı parametre kullanılmıştır.

Normal dağılım, Cauchy dağılımı ,Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı tabloları aşağıdaki gibidir. Bu tablolarda sarı renkli işaretli olan p- değerleri $\alpha = 0.05$ değerine göre red edilen yani anlamlı olan değerler işaretlenmiştir. Bu tablolarda “ I “ ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlılıklarını ve testin gücünü göstermektedir. Tablo da A,B ve C ana etkileri, AB, AC, BC ve ABC etkileşim etkilerinin p- değerleri ve güç değerleri gösterilmektedir.

Çizelge 5.1. Normal Dağılımda (μ =0 ve σ =1) farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , μ =0 ve σ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.000	.084	.099	.044	.571	.092	.064
	2	.000	.000	.060	.023	.065	.003	.008
	3	.000	.000	.079	.043	.217	.097	.041
	4	.021	.014	.061	.040	.084	.093	.007
	5	.044	.039	.084	.038	.065	.048	.021
	6	.093	.012	.059	.053	.062	.031	.050
	7	.086	.038	.050	.050	.068	.041	.033
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.020	.078	.043	.081	.057	.045	.037
	7	.029	.045	.026	.052	.070	.079	.068
Wh*	*1*	.320	.261	.221	.481	.362	.781	.251
	2	.530	.322	.503	.736	.159	.768	.558
	3	.847	.822	.620	.565	.800	.647	.795
	4	.246	.993	.108	.303	.296	.458	.950
	5	.104	.699	.599	.548	.475	.296	.563
	6	.137	.585	.288	.340	.213	.608	.997
	7	.232	.889	.560	.766	.675	.833	.907
S*	*1*	.050	.099	.044	.043	.061	.035	.057
	2	.046	.090	.034	.035	.041	.057	.042
	3	.035	.088	.027	.028	.073	.066	.024
	4	.029	.075	.014	.024	.082	.067	.067
	5	.017	.019	.009	.015	.078	.073	.005
	6	.008	.065	005	.011	.086	.085	.006
	7	.006	.053	.004	.008	090	.082	010

Çizelge 5.2. Normal Dağılımda (μ =0 ve σ =1) farklı testlerin güç değerleri

		α = 0.05 , μ =0 ve σ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.6	.6	.6	.4	.4	.6	.6
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.470	.332	.098	.147	.094	.076	.007
	2	.672	.516	.236	.300	.207	.258	.037
	3	.766	.664	.201	.392	.195	.154	.066
	4	.835	.713	.357	.494	.357	.293	.115
	5	.827	.705	.373	.490	.373	.437	.149
	6	.683	.890	.410	.686	.561	.319	.185
	7	.525	.822	.607	.589	.607	.509	.124
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.500	.417	.172	.295	.193	.166	.059
	7	.713	.626	.319	.460	.368	.317	.162
Wh*	*1*	.742	.465	.200	.487	.299	.439	.125
	2	.845	.518	.388	.632	.153	.432	.279
	3	.926	.791	.455	.539	.552	.369	.397
	4	.686	.847	.110	.361	.254	.268	.475
	5	.507	.742	.444	.529	.371	.178	.281
	6	.562	.688	.249	.389	.194	.349	.498
	7	.673	.815	.421	.646	.486	.466	.453
S*	*1*	.248	.181	.090	.088	.098	.056	.083
	2	.523	.479	.100	.204	.101	.109	.065
	3	.601	.569	.285	.327	.224	.211	.041
	4	.756	.607	.387	.419	304	.304	.122
	5	.759	.620	.315	.457	.315	.329	.123
	6	.812	.790	.304	.414	.331	.375	.135
	7	.834	.763	.370	.372	.339	.369	.175

Çizelge 5.3. Cauchy Dağılımda (0,1) farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , μ =0 ve σ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.008	.003	.007	.000	.002	.004	.008
	2	.003	.007	.009	.007	.007	.007	.000
	3	.014	.011	.014	.014	.015	.012	.013
	4	.010	.019	.014	.013	.019	.016	.012
	5	.020	.023	.025	.022	.023	.029	.021
	6	.032	.039	.034	.033	.034	.035	.035
	7	.049	.046	.046	.049	.045	.045	.040
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.038	.037	.033	.038	.039	.059	.033
	7	.046	.057	.052	.044	.053	.055	.045
Wh*	*1*	.008	.005	.004	.008	.001	.007	.005
	2	.017	.058	.013	.015	.016	.019	.012
	3	.053	.054	.029	.027	.051	.052	.053
	4	.059	.054	.035	.051	.053	.057	.053
	5	.054	.057	.059	.054	.057	.052	.054
	6	.054	.055	.054	.051	.059	.055	.052
	7	.053	.058	.059	.059	.054	.052	.060
S*	*1*	.006	.005	.001	.006	.009	.006	.009
	2	.009	.055	.013	.016	.018	.017	.012
	3	.012	.062	.021	.023	.027	.023	.016
	4	.060	.074	.034	.029	.029	.028	.018
	5	.042	.047	.037	.040	.042	.029	027
	6	.065	.049	.042	.048	.048	.040	.042
	7	.029	.074	.044	.050	.050	.050	.048

Çizelge 5.4. Cauchy Dağılımda (0,1) farklı testlerin güç değerleri

		α = 0.05 , μ =0 ve σ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.80	.70	.50	.40	.40	.50	.0
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.004	.009	.014	.014	.016	.014	.018
	2	.055	.057	.034	.028	.029	.026	.025
	3	.077	.069	.040	.039	.049	.037	.023
	4	.124	.115	.089	.072	.098	.065	.069
	5	.167	.132	.119	.134	.132	.115	.084
	6	.175	.169	.198	.162	.181	.147	.124
	7	.155	.158	.214	.101	.132	.175	.162
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.129	.091	.085	.064	.072	.070	.055
	7	.142	.176	.158	.144	.156	.180	.176
Wh*	*1*	.028	.029	.046	.002	.016	.011	.010
	2	.115	.091	.065	.046	.076	.049	.036
	3	.124	.113	.088	.076	.084	.079	.065
	4	.176	.155	.124	.113	.115	.089	.091
	5	.238	.189	.178	.176	.175	.174	.172
	6	.113	.124	.115	.155	.172	.175	.178
	7	.172	.176	.185	.189	.185	.180	.174
S*	*1*	.029	.023	.012	.013	.010	.011	.009
	2	.086	.083	.053	.076	.065	.068	.046
	3	.119	.113	.076	.086	.083	.079	.068
	4	.170	.151	.119	.133	.147	.101	.106
	5	.193	.170	.147	.147	.165	.147	.119
	6	.187	.181	.170	.151	.193	.151	.133
	7	.181	.193	.187	.165	.238	.247	.187

Çizelge 5.5. Weibull Dağılımda (k =0.25 ve λ =1)farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , k =0.25 ve λ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.04	.02	.02	.0	.04	.02	.01
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.097	.022	.000	.064	.085	.034	.008
	2	.195	.064	.002	.150	.077	.080	.104
	3	.029	.280	.130	.218	.295	.213	.015
	4	.308	.322	.343	.382	.368	.328	.329
	5	.434	.044	.618	.406	.410	.441	.051
	6	.210	.659	.770	.635	.697	.524	.162
	7	.577	.452	.729	.503	.414	.604	.554
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.085	.049	.104	.041	.051	.079	.028
	7	.016	.027	.094	.111	.098	.026	.095
Wh*	*1*	.071	.293	.023	.035	.026	.042	.065
	2	.126	.101	.134	.082	.001	.176	.003
	3	.001	.154	.171	.242	.125	.115	.048
	4	.003	.288	.275	.044	.291	.164	.252
	5	.280	.218	.257	.345	.399	.181	.169
	6	.193	.165	.111	.292	.236	.368	.390
	7	.130	.360	.310	.328	.323	.287	.299
S*	*1*	.001	.010	.052	.011	.004	.039	.035
	2	.016	.006	.102	.025	.062	.054	.007
	3	.022	.056	.001	.036	.108	.088	.026
	4	.082	.066	.050	.046	.130	.091	.012
	5	.048	.040	.037	.134	.048	.063	.039
	6	.063	.129	.043	.094	.036	.023	.064
	7	.111	.045	.080	.120	.091	.076	.075

Çizelge 5.6. Weibull Dağılımda (k =0.25 ve λ =1) farklı testlerin güç değerleri

		α = 0.05 , k =0.25 ve λ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.6	.5	.5	.4	.6	.4	.4
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.580	.871	.927	.871	.733	.893	.646
	2	.553	.758	.945	.758	.762	.749	.450
	3	.779	.580	.882	.608	.680	.532	.636
	4	.273	.676	.607	.525	.609	.415	.146
	5	.199	.770	.353	.461	.591	.385	.533
	6	.438	.199	.425	.337	.353	.268	.080
	7	.097	.337	.465	.362	.568	.117	.028
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.675	.771	.482	.780	.326	.708	.708
	7	.830	.817	.635	.293	.463	.898	.596
Wh*	*1*	.718	.548	.797	.793	.748	.734	.633
	2	.683	.676	.594	.679	.896	.551	.829
	3	.896	.652	.528	.602	.686	.701	.753
	4	.829	.594	.627	.743	.159	.627	.676
	5	.602	.607	.633	.098	.007	.566	.607
	6	.633	.627	.705	.151	.156	.024	.011
	7	.677	.036	.058	.165	.045	.587	.292
S*	*1*	.919	.888	.693	.873	.895	.716	.789
	2	.858	.898	.558	.841	.602	.676	.890
	3	.846	.668	.919	.775	.509	.642	.813
	4	.652	.656	.716	.692	.501	.621	.871
	5	.699	.795	.736	.495	.732	.672	.741
	6	.686	.548	.732	.621	.791	.842	.686
	7	.553	.786	.668	.615	.652	.548	.656

Çizelge 5.7. Weibull Dağılımda (k =0.5 ve λ =1)farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , k =0.5 ve λ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.04	.0	.04	.01	.02	.05	.05
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.057	.062	.053	.008	.053	.013	.004
	2	.038	.178	.045	.147	.230	.066	.158
	3	.298	.225	.179	.144	.132	.188	.232
	4	.192	.177	.089	.067	.036	.058	.275
	5	.294	.075	.221	.163	.257	.242	.027
	6	.028	.011	.042	.008	.045	.019	.136
	7	.260	.077	.015	.025	.171	.111	.215
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.051	.047	.073	.035	.010	.145	.066
	7	.052	.020	.112	.034	.134	.078	.082
Wh*	*1*	.032	.032	.037	.032	.037	.037	.037
	2	.110	.099	.090	.109	.100	.090	.100
	3	.169	.192	.168	.161	.189	.181	.160
	4	.210	.209	.207	.213	.211	.211	.215
	5	.348	.365	.413	.325	.371	.388	.347
	6	.427	.430	.427	.412	.407	.413	.393
	7	.559	.554	.494	.576	.514	.509	.530
S*	*1*	.043	.035	.083	.076	.001	.018	.077
	2	.005	.037	.045	.068	.047	.047	.085
	3	.001	.100	.033	.085	.050	.046	.089
	4	.042	.039	.052	.050	.036	.036	.120
	5	.050	.104	.028	.087	.024	.001	.065
	6	.031	.013	.123	.059	.015	.023	.053
	7	.090	.067	.117	.051	.006	.008	.051

Çizelge 5.8. Weibull Dağılımda (k =0.50 ve λ =1) farklı testlerin güç değerleri

		α = 0.05 , k =0.5 ve λ =1						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.73	.68	.63	.66	.48	.68	.73
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.543	.775	.736	.939	.816	.908	.904
	2	.911	.602	.856	.748	.689	.727	.536
	3	.370	.521	.621	.727	.736	.657	.436
	4	.404	.636	.713	.775	.871	.745	.416
	5	.354	.727	.554	.709	.656	.541	.896
	6	.895	.895	.871	.939	.840	.877	.694
	7	.333	.705	.932	.938	.713	.697	.505
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.652	.916	.692	.810	.922	.518	.776
	7	.648	.917	.469	.813	.501	.706	.745
Wh*	*1*	.815	.814	.803	.815	.819	.814	.819
	2	.467	.605	.462	.601	.606	.468	.449
	3	.382	.529	.428	.571	.585	.444	.404
	4	.268	.415	.266	.413	.413	.266	.270
	5	.212	.352	.242	.387	.377	.234	.211
	6	.152	.277	.142	.263	.246	.130	.142
	7	.054	.127	.061	.139	.139	.061	.061
S*	*1*	.866	.784	.705	.613	.919	.911	.479
	2	.901	.781	.894	.705	.844	.842	.421
	3	.938	.609	.857	.609	.816	.844	.412
	4	.889	.765	.771	.850	.850	.871	.394
	5	.850	.589	.919	.589	.886	.933	.561
	6	.899	.939	.595	.708	.893	.890	.617
	7	.781	.613	.696	.729	.894	.919	.672

Çizelge 5.9. Ters Gauss Dağılımda (μ =1 ve λ =0.05) farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , μ =1 ve λ =0.05						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.03	.04	.01	.03	.05	.05	.07
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.034	.098	.046	.100	.097	.055	.037
	2	.074	.006	.072	.081	.053	.175	126
	3	.095	.086	.062	.029	.136	.125	.177
	4	.012	.064	.076	.043	.054	.043	.107
	5	.075	.016	.071	.063	.114	.122	.065
	6	.017	.092	.083	.069	.048	.068	.056
	7	.147	.053	.034	.115	.059	.050	.104
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-		-		-
	6	.046	.033	.019	.066	.089	.055	.014
	7	.022	.045	.029	.074	.090	.096	.166
Wh*	*1*	.148	.031	.132	.137	.001	.054	.073
	2	.072	.087	.054	.002	.067	.000	.036
	3	.139	.188	.085	.063	.060	.118	.173
	4	.056	.104	.198	.076	.000	.139	.064
	5	.064	.046	.139	.010	.101	.138	.118
	6	.006	.196	.094	.153	.103	.130	.153
	7	.081	.139	.127	.061	.165	.004	.063
S*	*1*	.000	.037	.002	.070	.029	.058	.055
	2	.005	.056	.017	.057	.064	.069	.081
	3	.010	.076	.103	.043	.043	.104	.069
	4	.049	.041	.075	.069	.036	.025	.092
	5	.060	.114	.054	.049	.111	.034	.103
	6	.104	.194	.050	.034	.128	.049	.038
	7	.145	.175	.040	.050	.173	.050	.100

Çizelge 5.10. Ters Gauss Dağılımda (μ =1 ve λ =0.05) farklı testlerin güç değerleri

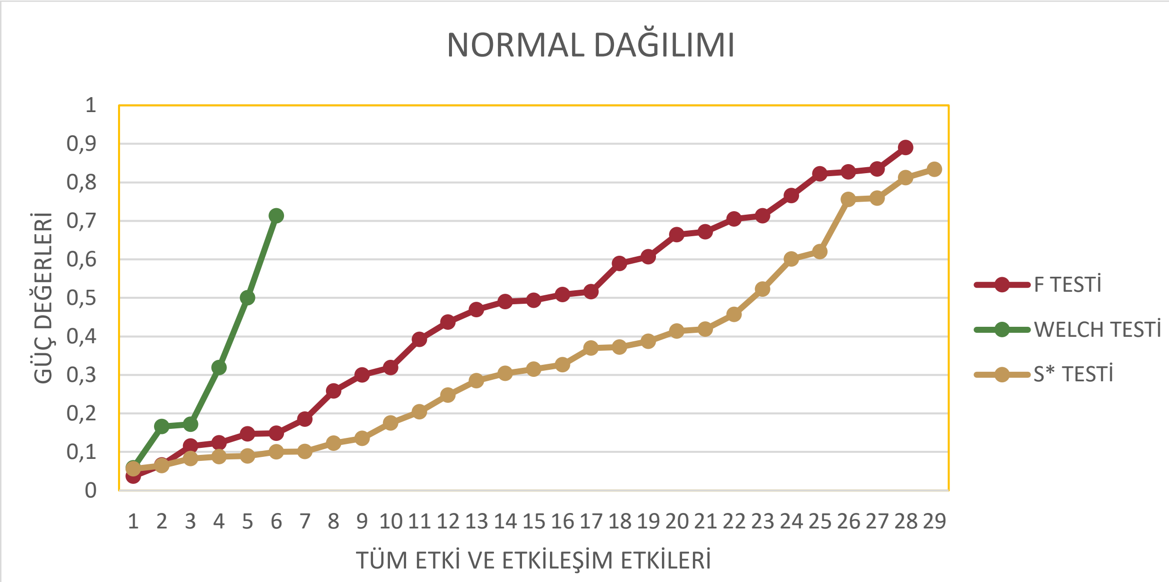
		α = 0.05 , μ =1 ve λ =0.05						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.0	.6	.6	.8	.8	.6	.6
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.822	.427	.799	.443	.662	.750	.829
	2	.624	.905	.662	.556	.799	.297	.535
	3	.490	.664	.792	.835	.349	.490	.465
	4	.895	.774	.633	.799	.729	.750	.646
	5	.739	.881	.694	.683	.468	.569	.722
	6	.873	.556	.509	.624	.729	.719	.743
	7	.208	.752	.822	.403	.713	.719	.660
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.619	.762	.789	.584	.423	.631	.851
	7	.887	.745	.787	.564	.421	.532	.072
Wh*	*1*	.392	.889	.644	.464	.886	.698	.669
	2	.696	.734	.760	.934	.582	.924	.760
	3	.354	.277	.748	.716	.729	.669	.362
	4	.765	.469	.448	.529	.913	.475	.716
	5	.739	.765	.582	.913	.566	.495	.582
	6	.934	.282	.732	.352	.547	.529	.475
	7	.589	.392	.640	.739	.546	.858	.738
S*	*1*	.916	.754	.905	.516	.835	.705	.792
	2	.882	.724	.874	.574	.657	.702	.774
	3	.881	.683	.247	.754	.738	.602	.752
	4	.850	.752	.461	.538	.816	.881	.719
	5	.683	.648	.683	.724	.558	.865	.638
	6	.572	.378	.741	.810	.427	.850	.943
	7	.490	.452	.792	.705	.362	.848	.644

Çizelge 5.11. Ters Gauss Dağılımda (μ =1 ve λ =0.01) farklı testlerin p – değerleri

		α = 0.05 , μ =1 ve λ =0.01						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		.03	.05	.04	.01	.06	.03	.02
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.017	.000	.051	.296	.001	.321	.000
	2	.094	.170	.059	.040	.072	.003	.079
	3	.157	.057	.136	.061	.188	.186	.017
	4	.039	.051	.108	.123	.088	.109	.009
	5	.072	.223	.083	.021	.064	.058	.071
	6	.063	.152	.008	.146	.002	.087	.026
	7	.081	.181	.049	.051	.177	.025	.015
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.022	.016	.083	.053	.051	.064	.073
	7	.025	.015	.031	.086	.190	.040	.004
Wh*	*1*	.213	.077	.219	.037	.003	.154	.146
	2	.192	.032	.144	.155	.004	.042	.117
	3	.080	.080	.260	.079	.273	.089	.258
	4	.075	.025	.194	.221	.118	.067	.022
	5	.208	.059	.156	.024	.208	.052	.188
	6	.033	.113	.028	.246	.007	.284	.001
	7	.039	.271	.056	.295	.071	.012	.007
S*	*1*	.000	.106	.027	.116	.009	.007	.172
	2	.007	.146	.208	.015	.012	.014	.025
	3	.015	.043	.197	.020	.023	.151	.020
	4	.025	.045	.157	.035	.025	.023	.032
	5	.032	.026	.053	.039	.033	031	.107
	6	.036	.124	.030	.040	.048	.131	.156
	7	.040	.096	.008	.100	.051	.048	.040

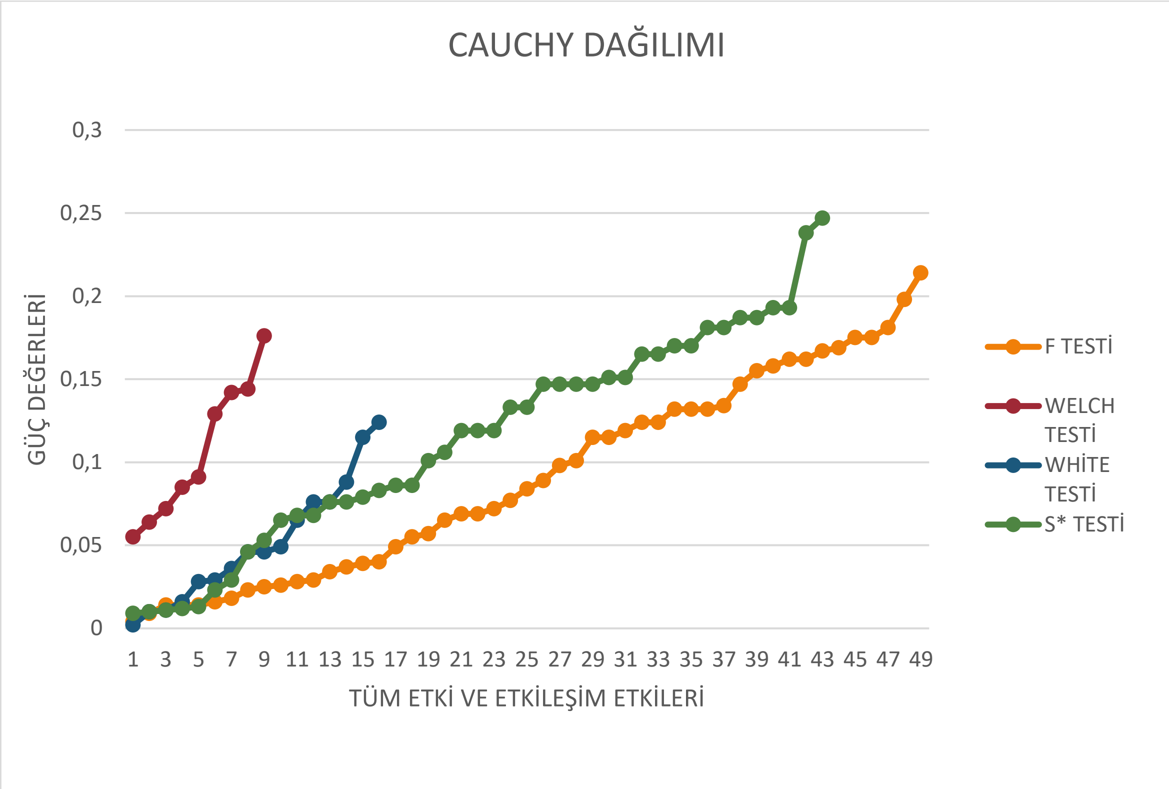
Çizelge 5.12. Ters Gauss Dağılımda (μ =1 ve λ =0.01) farklı testlerin güç değerleri

		α = 0.05 , μ =1 ve λ =0.01						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
	n =7	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	*1*	.883	.927	.881	.484	.902	.346	.971
	2	.707	.519	.874	.827	.753	.953	.727
	3	.550	.830	.575	.827	.558	.541	.880
	4	.852	.831	.659	.676	.741	.654	.901
	5	.734	.478	.742	.870	.758	.784	.702
	6	.755	.576	.874	.672	.886	.700	.815
	7	.708	.502	.786	.831	.561	.945	.895
W*	*1*	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	.900	.941	.708	.783	.755	.741	.760
	7	.856	.962	.852	.713	.577	.874	.947
Wh*	*1*	.501	.771	.661	.859	.924	.566	.474
	2	.596	.893	.825	.612	.919	.824	.667
	3	.660	.660	.598	.718	.475	.670	.241
	4	.781	.899	.756	.465	.849	.787	.707
	5	.532	.800	.771	.909	.732	.838	.421
	6	.893	.636	.892	.451	.883	.486	.761
	7	.830	.424	.702	.399	.732	.858	.753
S*	*1*	.941	.672	.852	.668	.939	.903	.775
	2	.925	.638	.495	.917	.917	.890	.879
	3	.917	.749	.589	.912	.895	.589	.895
	4	.879	.714	.643	.825	.890	.851	.871
	5	.827	.857	.766	.813	.838	.846	.737
	6	.823	.665	.846	.803	.812	.766	.749
	7	.803	.568	.957	.652	.775	.856	.860



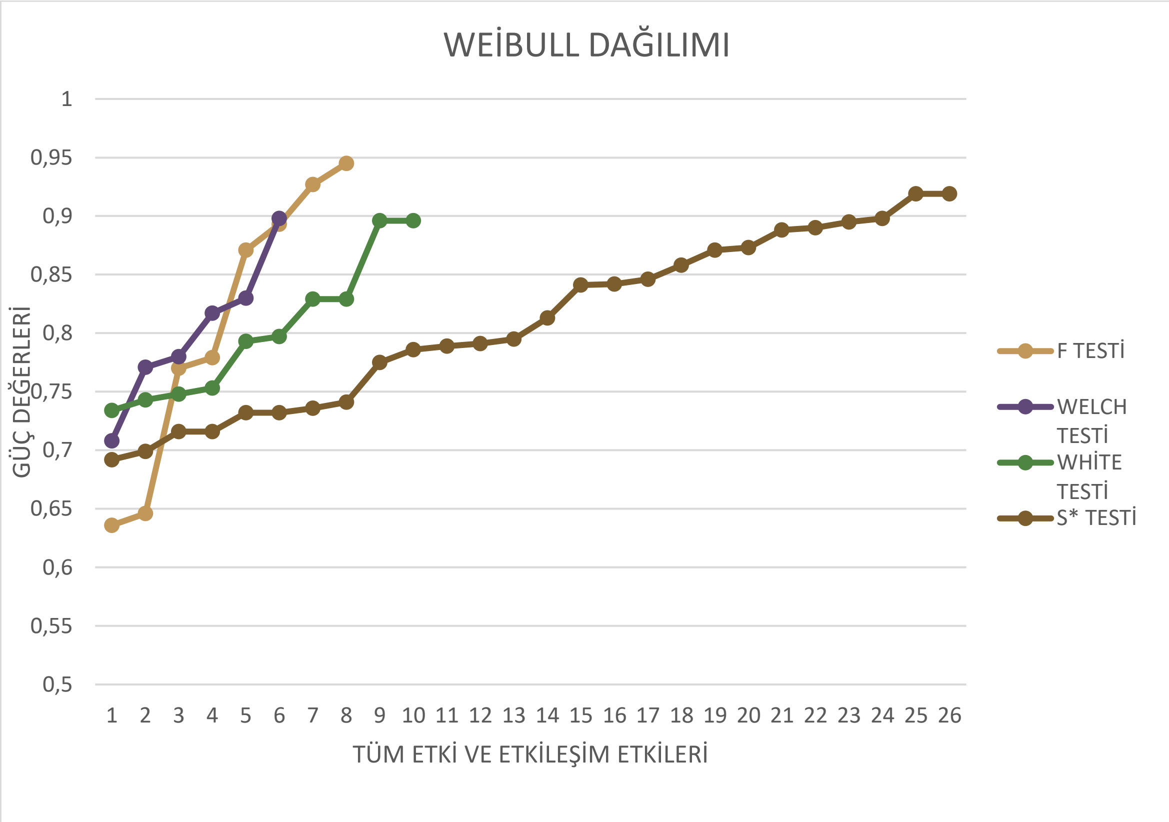
Şekil 5.1. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Normal Dağılım (0,1) grafiği

Normal dağılım grafiği incelendiğinde bilindiği üzere F testi anlamlı ve değerleri güçlü çıkmıştır. White testi (Wh) için anlamlı hiçbir p-değeri çıkmamıştır. Welch testinin sonuçları ise anlamlı çıkan yani red edilen p-değerleri sayısı az, gücü düşüktür. Üzerinde çalıştığımız S^* testi ise F testi benzeri davranış gösterdiği grafikte görülmektedir.



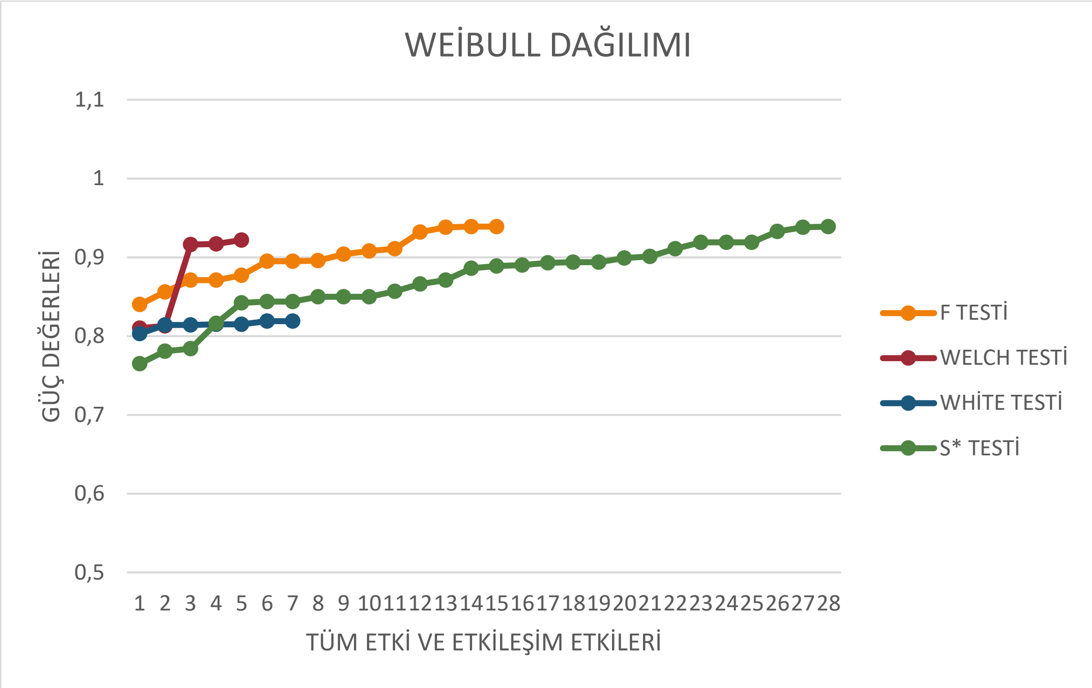
Şekil 5.2. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Cauchy Dağılım (0,1) grafiği

Cauchy dağılımı grafiği incelendiğinde ise F testi ve S^* testi yine benzer karakter göstermektedir. Red edilen p-değerlerinin sayısı fazla (yani anlamlı çıkan p-değerleri) ve elde edilen güç değerleri yüksektir. Welch testi ve White testi veriyi açıklamada S^* testi ve F testine göre daha geride kalmaktadır.



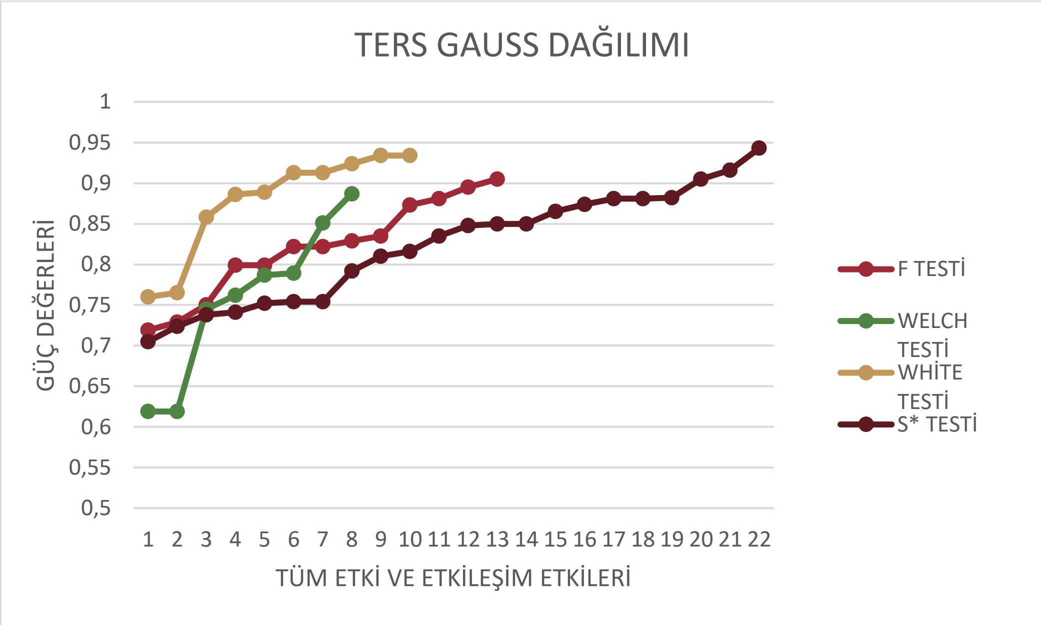
Şekil 5.3. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Weibull Dağılım (k =0.25 ve λ =1) grafiği

Weibull dağılımı sağa çarpık bir dağılımdır. Weibull dağılımı k =0.25 ve λ =1 parametrelerine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testinin normal dağılım dışında anlamlı sonuçlar ve güçlü değerler veremeyeceğini biliyorduk. Grafiktede görüldüğü gibi veri açıklmada F testi üzerinde çalıştığımız S^* testine göre geride kalmaktadır. F testi için grafiğe bakıldığında bazı güç değerleri yüksek red oranı bakımından veri açıklamada geri kalmaktadır. S^* testine bakıldığında α =0.05 e göre red oranı ve güç değerleri yüksektir. Veriyi açıklamada yeterlidir. White ve Welch testi ise hem red oranı hemde güç değerleri bakımından , S^* testine göre geri kalmaktadır.



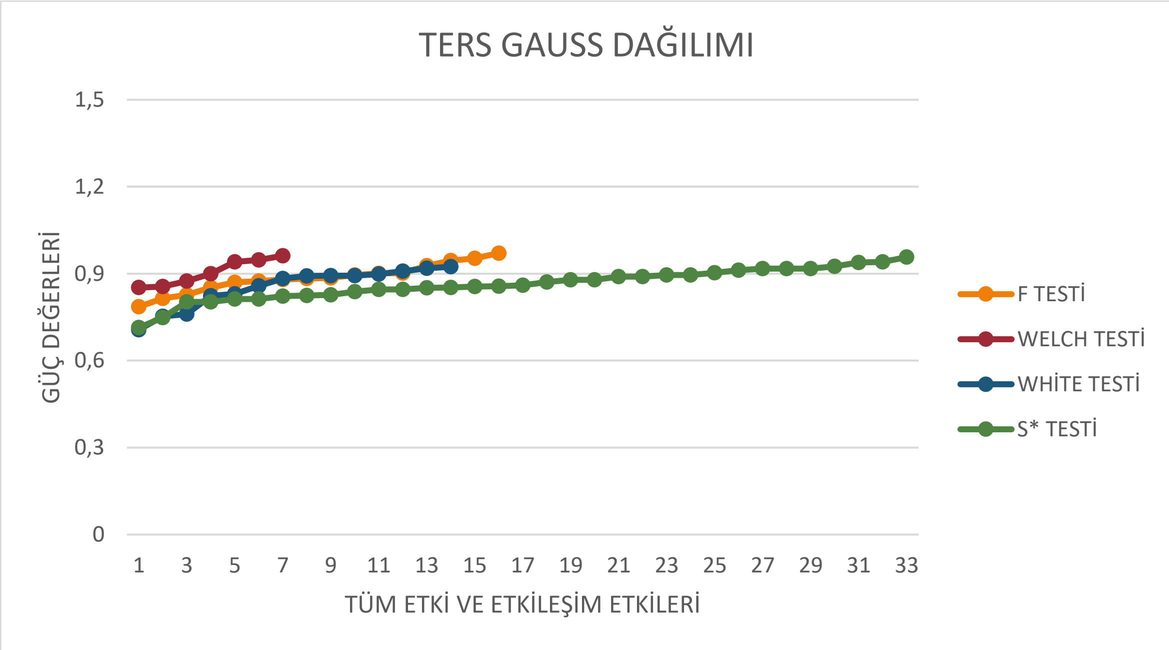
Şekil 5.4. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Weibull Dağılım (k =0.5 ve λ =1) grafiği

Weibull dağılımı k =0.5 ve λ =1 parametrelerine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testi S^* testi benzeri bir karakter göstermektedir. Fakat p-değeri red sayısı bakımından F testi S^* testine göre geride kalmaktadır. S^* testi karakterine bakıldığında ise güç değerleri yüksektir. Veriyi açıklamada etkin olan test istatistiği . S^* testidir. White ve Welch testi ise hem red oranı hemde güç değerleri bakımından grafiğe bakıldığında geri kalmaktadır.



Şekil 5.5.Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Ters Gauss Dağılım (μ =1 ve λ =0.05) grafiği

Ters Gauss dağılımı μ=1 ve λ=0.05 parametresine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testi ve S^* testi karakter olarak benzer özellikler göstermektedir. Fakat yine grafiktende görüldüğü üzere etkin olan test istatistiği S^* testidir. Welch ve White testinin veriyi açıklamada etkin olmadığı görülmektedir.



Şekil 5.6.Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Ters Gauss Dağılım (μ =1 ve λ =0.01) grafiği

Ters Gauss dağılımı μ=1 ve λ=0.01 parametresine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde karakteristik olarak benzer özellikler gösteriyor gibi görünebilir. Fakat p-değeri red oranı sayısı ve testin gücü bakımından S^* test istatistiği diğer tüm test istatistiklerine göre veri açıklamada etkin ve güçlüdür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

2^3 faktöriyel tasarımı; iki faktörlü, üç düzeyli tasarımdır. Mühendislik, tıp, ilaç sanayi, tarım alanları gibi… alanlarda yaygın olarak kullanılan bu tasarımın en önemli avantajı, araştrma yapılan test istatistiklerini etkileyeceği düşünülen faktörlerin ana etkileri ve etkileşim etkilerinin en küçük hatayla tahmin edebilmesidir. Tekrarlı 2^3 faktöriyel tasarımlarında Salmaso (2003) tarafından geliştirilen iki yönlü ANOVA F testine alternatif olan senkronize permütasyon testleri ve farklı test istatistikleri kullanılarak çalışmalar yapılmıştır.

Hadamard matrisi ortogonal bir matristir. Bu matris yardımıyla Salmaso (2003) senkronize permütasyon test istatistiklerini oluşturmuştur. Bu test istatistiğini F testine alternatif olarak sunmuştur. Senkronize permütasyon testi ile welch testi, white testi ve F testi karşılaştırmaları yapılmıştır.

Senkronize permütasyon test istatistiği, S^* ile gösterilmiştir. S^* test istatistiği oluşturulurken, hadamard matrisinin elemanları kullanılmıştır. Hadamard matrisinin satır ve sütunları ortogonal olduğu için 2^3 faktöriyel tasarımlarına uygundur.

Bu tez çalışmasında sürekli yanıtlarla tekrar edilen 2^3 faktöriyel tasarımda sabit etkileri test etmek için kesin permütasyon çözümleri verilmiştir. Tekrarlanan 2^3 tam faktöriyel tasarımda temel etkiler ve etkileşim etkileri için testlerin sonuçları yorumlanmıştır.

Koşullu kurallar çerçevesinde permütasyon testlerini yorumlayarak boş hipotez altında yeterli istatistikle, ana etkiler ve 2^3 faktöriyel tasarımlardaki etkileşimler için testler elde ettik. Mevcut çözümün özelliği, testlerin ilişkisiz olması ve eğer hata terimleri normal dağılmışsa, bu tür testlerin bağımsız olmasıdır. Standart parametrik F testlerinin bağımsız olmadığı iyi bilinmektedir. Bu şekilde, permütasyon testi doğal bir gereksinimi karşılar; ayrıca parametrik olmadıkları için dağılım varsayımlarından etkilenmezler.

Bu tezde simülasyon çalışmasında Normal dağılım (0,1) ve Cauchy dağılım (0,1) için n_{sim} = 5000 olarak alınmıştır. Welch testi, White testi, F testi ve S^* testi sonuçları karşılaştırıldığında S^* testi diğerlerine karşın yığını açıklamada F testi kadar etkin olduğu görülmüştür. Çalışmada farklı olarak sağa çarpık dağılımlar olan Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı kullanılmıştır. Weilbull dağılımının parametreleri (k =0.25 ve λ =1, k =0.50

ve λ =1) dir.Ters Gauss dağılımının parametreleri (μ =1 ve λ =0.05, μ =1 ve λ =0.01) dir. Tüm parametrelerde Welch testi, White testi, F testi ve S^* testi uygulanmıştır. Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı için n_{sim} = 3000 alınmıştır. S^* testi için yığınlardan 1000 örnek çekilerek hesaplamalar yapılmıştır.

S^* testi, Welch testi, White testi ve F testleri parametrik karşılıklarına göre asimptotik olarak eşdeğerdirler. Bu durum permütasyon çözümlerini parametrik varsayımlar içinde bile rekabetçi olarak düşünmemizi sağlar.

Yeterli istatistikler altında elde edilen S^* test istatistiği, F testi gibi normal dağılımda da etkin olan testlere göre yeterli, tutarlı ve etkindir. Normal dağılım dışında diğer dağılımlarda etkileri ve etkileşim etkilerini açıklamada testin gücü yüksektir ve yansız olduğu için sonuçları kesindir.

F testi; normal dağılım (0,1) ve cauchy dağılımında (0,1) anlamlı sonuçlar vemiştir. Cauchy dağılımı ağır kuyruklu bir yapıya sahiptir. Buna rağmen p-değerleri red sayısı ve testin gücü yüksek çıkmıştır. Ama S^* testi weibull ve ters gauss dağılımı gibi sağa çarpık dağılımlarda bile p-değeri red sayısı ve testin güç değerleri bakımından F testine göre daha iyi sonuçlar verilmiştir.

Weibull ve Ters Gauss dağılımında F testi sonuçları, etkileri ve etkileşim etkilerini açıklamada testin gücü yer yer yüksek olsa bile p-değeri red oranına bakıldığında S^* testine göre geride kalmaktadır.

Tüm bunlar göz önüne alındığında S^* testi, F tstine göre daha güçlü bir testtir. F testi her dağılımda kullanılamayacağı için S^* testi**,** F testine alternatif olarak sunulabilir ve sonuçları F testi kadar güçlüdür.

KAYNAKLAR

1. İnternet : Şenoğlu B. ve Acıtaş Ş., *Faktöriyel Tasarımlar- Istatistiksel DeneyTasarımı* Cipec.URL: https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=6392–SonErişim Tarihi : 14.02.2024

2. Arnold, H. J. (1964). Permutation support for multivariate techniques. *Biometrika*, 51(12), 65-70.

3. Mansouri, H., and Chang, G. H. (1995). A comparative study of some rank tests forinteraction. *Computational Statistics & Data Analysis*, 19(1), 85-96.

4. Adams, D. C., and Anthony, C. D. (1996). Using randomization techniques to analysebehavioural data. Animal Behaviour, 51(4), 733-738.

5. Pitman, E. J. (1937). Significance tests which may be applied to samples from any populations. III. The analysis of variance test. *Biometrika*, 29, 322–335.

6. Fisher, R. A. (1966). *The Design of Experiments*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1-248.

7. Mewhort D. J. K., Johns B. T., and Kelly M (2010). / *Applying the permutation test to factorial designs* / Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 42 (2), 366-372

8. Lee, W. (1975). *Experimental design and analysis*. San Francisco: W. H. Freeman, 5525.

9. Sutton, A. J., Abrams, K. R., Jones, D. R., Jones, D. R., Sheldon, T. A., and Song, F. (2000). *Methods for meta-analysis in medical research*, (Vol. 348). Chichester: Wiley, 1317.Fisher, R. A. (1935). The design of experiments. UK, London: Oliver and Boyd Ltd

10. Good, P. I. (2006). *Permutation, parametric, and bootstrap tests of hypotheses*. Berlin: Springer Science & Business Media, 85-115.

11. Basso, D., Pesarin, F., Salmaso, L., and Solari, A. (2009). *Permutation tests for stochastic ordering and ANOVA: theory and applications with R* (Vol. 194). Berlin: Springer Science & Business Media, 133-146.

12. Salmaso, L. (2003). Synchronized permutation tests in 2^k factorial designs. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(7), 1419-1437.

13. Basso, D., Chiarandini, M., and Salmaso, L. (2007). Synchronized permutation tests in replicated I×J designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(8), 2564 2578.

14. Pesarin, F. (2001). *Multivariate permutation tests: with applications in biostatistics* (Vol. 240). Chichester: Wiley, 1-432.

15. Anderson, M., and Braak, C. T. (2003). Permutation tests for multi-factorial analysis of variance. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 73(2), 85-113.

16. Corain, L., and Salmaso, L. (2007). A critical review and a comparative study on conditional permutation tests for two-way ANOVA. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 36(4), 791-805.

17. Edgington, E. S. (1996). Randomized single-subject experimental designs. *Behaviour Research and Therapy*, 34(7), 567-574.

18. Yıldız Kaçar, D., Gökpınar, F., Bayrak, H. (2020). Comparative Study on Synchronized Permutation Tests in Balanced I xJ Designs in Case of Non-Normally Distributed Error Terms. Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 5(2) , 125-137.

19. İnternet: Şeker Ş. E., Hadamard Matrisi (2010), Cipec.URL: https://bilgisayarkavramlari.com/2010/10/14/hadamard-matrisi/Son Erişim Tarihi : 14.02.2024

20. Ustacık A. Y. (2007), Hadamard Matrisler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans tezi, Sakarya Üniversitesi

21. Song Y. H., (2002), Examples and Constructions of Hadamard Matrices. Master's Thesis, Department of Electrical and Electronics Engineering Yonsei University, 120-749 Seoul, Korea.

Gazili olmak ayrıcalıktır