



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

***J*-TÜMLENMİŞ KAFESLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜNDÜS KAZANCI

SÜNDÜS KAZANCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2023

***J*-TÜMLENMİŞ KAFESLER**

Sündüs KAZANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Sündüs KAZANCI tarafından hazırlanan “*J-TÜMLENMIŞ KAFESLER*” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye: Doç. Dr. Celil NEBİYEY

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 26/1/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sündüs KAZANCI

1/1/2023

J-TÜMLENİMİŞ KAFESLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Sündüs KAZANCI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
OCAK -2023

ÖZET

Bu çalışmada, kafeslerde *J*-küçük elemanlar tanımlanmıştır. *J*-küçük elemanların küçük elemanlar ile ilişkisi ve bazı özellikleri incelenmiştir. *J*-küçük eleman kavramını kullanarak *J*-tümlenmiş kafesler tanımlanmıştır. *L* bir *J*-tümlenmiş kafes ise her $n \in L$ için $1/n$ bölüm alt kafesinin de *J*-tümlenmiş olduğu gösterilmiştir. *J*-tümlenmiş elemanların, bir takım koşullar altında bölüm alt kafeslerinde *J*-tümlenmiş olduğu incelenmiştir. Benzer şekilde, bölüm alt kafeslerinde *J*-tümlenmiş olan elemanların bir takım koşullar altında kapsayan kafeslerde *J*-tümlenmiş olduğu incelenmiştir. *J*-tümlenmiş kafeslerin bazı özellikleri ve karakterizasyonları çalışılmıştır.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

: 25
: kafeslerde küçük elemanlar, tümlenmiş kafesler, radikal, *J*-küçük elemanlar, *J*-tümlenmiş kafesler
: Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

Danışman

J-SUPPLEMENTED LATTICES

(M. Sc. Thesis)

Sündüs KAZANCI

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January-2023

ABSTRACT

In this work, it is defined *J*-small elements in lattices. *J*-small elements with small elements relationship and some of its properties were examined. *J*-supplemented lattices defined using the *J*-small elements. It is shown that if L is a *J*-supplemented lattice, then for every $n \in L$ quotient sublattice $1/n$ is also *J*-supplemented. It is investigated under which conditions *J*-supplemented elements can be *J*-supplemented in quotient sublattices. Similarly, the conditions under which the elements *J*-supplemented in quotient sublattices will be *J*-complemented in the container lattices are investigated. Some properties and characterizations of *J*-supplemented lattices have been studied.

Page Number

: 25

Keywords

: small elements in lattices, supplemented lattices, radical, *J*-small elements, *J*-supplemented lattices

Supervisor

: Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Sıralı Kümeler	3
2.2. Kafesler	5
2.3. Kafes Homomorfizmaları	6
2.4. Modüler Kafesler	6
2.5. Tıkız Üretilmiş Kafesler	8
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. Küçük Elemanlar	10
3.2. Bütünlenmiş Kafesler	11
3.3. Tümlenmiş Kafesler	12
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
4.1. Kafeslerde J -Küçük Elemanlar	15
4.2. J -Tümlenmiş Kafesler	18
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	24

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	Boş Küme
$\subseteq$	Alt küme, Alt kafes
$\leq$	Bir kısmi sıralama bağıntısı
$x \prec y$	y , x 'i örter
$x \parallel y$	x ile y karşılaştırılmaz
$\sup \{x, y\}$	x ve y 'nin en küçük üst sınırı
$x \vee y$	x ve y 'nin en küçük üst sınırı
$\inf \{x, y\}$	x ve y 'nin en büyük alt sınırı
$x \wedge y$	x ve y 'nin en büyük alt sınırı
$\bigvee D$	D kümesinin en küçük üst sınırı
$\bigwedge D$	D kümesinin en büyük alt sınırı
b/a	Bölüm alt kafesi
$\cong$	Kafes izomorfizması
$\ll$	Küçük eleman
$\oplus$	Direkt toplam
$\ll_J$	J -küçük eleman

1. GİRİŞ

Kasch ve Mares (Kasch ve Mares, 1966) yaptıkları çalışmada, tümlenmiş modül kavramını tanımlamışlar bu modüllerin bazı karakterizasyonlarını incelemişlerdir. İlerleyen yıllarda bir çok yazar, tümlenmiş modüller ile ilgili değişik çalışmalar yapmıştır. Călugăreanu (Călugăreanu, 2000), modül teorisinde yer alan; küçük eleman, radikal, tümlenmiş ve bütünlenmiş modüller gibi kavramları kafes teorisi özelinde incelemiş ve sözkonusu kavramların kafes teorisine aktarılabilceğini göstermiştir.

İlerleyen yıllarda bir çok yazar, modül teorisinde tanımlanan kavramların kafes teorisine genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Çetindil (Çetindil, 2005) yüksek lisans tezinde eş sonlu tümlenmiş modüllerin kafes teorisine genellemeleri üzerine çalışmıştır. Toksoy (Toksoy, 2008) doktora tezinde zayıf ve bol tümlenmiş modül kavramlarını ve bunların bazı özelliklerini kafes teorisine genelleştirmiştir. Ökten (Ökten, 2016) tez çalışmasında, β_* bağıntısı vasıtasıyla G_* -tümlenmiş ve G_* -yükseltilebilir kafeslerini tanımlamış ve bu kafeslerin çeşitli özelliklerini incelemiştir. Biçer (Biçer, 2018) tez çalışmasında $\oplus$ -tümlenmiş kafes ve $rad - \oplus$ -tümlenmiş kafesleri tanımlamış ve bu kafeslerin özelliklerini incelemiştir.

Kabban ve Khalid (Kabban ve Khalid, 2019) çalışmalarında, J -küçük, J -oyuk, J -tümlenmiş ve zayıf J -tümlenmiş modül kavramlarını tanımlamışlar ve bu kavramların çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. M bir R -modül ve $N \leq M$ alt modülü için $N + K = M$ ve $Rad(M/K) = M/K$ koşulunu sağlayan her $K \leq M$ için $K = M$ oluyorsa N alt modülüne M 'nin bir J -küçük alt modülü denir (Kabban ve Khalid, 2019). Eğer bir M modülünün kendisinden farklı her alt modülü J -küçük ise M modülüne J -oyuk modül denir (Kabban ve Khalid, 2019). M modülünün N ve K modüllerinin J -küçük olması için gerekli ve yeterli şart $N + K$ alt modülünün J -küçük olmasıdır (Kabban ve Khalid, 2019). M modülünün bir N alt modülü M içinde J -küçük ise N 'nin homomorfik görüntüsü de J -küçük olur (Kabban ve Khalid, 2019).

M modülünün N ve K alt modülleri için $N + K = M$ ve $N \cap K \ll_J N$ ise N alt modülüne K 'nin bir J -tümleyeni denir. Bir modülün tüm elemanları J -tümleyene sahipse bu modüle J -tümlenmiştir denir (Kabban ve Khalid, 2019). Her yarı basit modül J -tümlenmiştir. Her tümlenmiş modül J -tümlenmiştir ama tersi her zaman doğru değildir (Kabban ve Khalid, 2019).

Bu tez çalışmasında, kafeslerde J -küçük elemanlar tanımlanmış ve bu elemanlara ait bazı özellikler incelenmiştir. J -küçük eleman kavramı vasıtasıyla J -tümlenmiş kafesler tanımlanmış ve bu kafeslerin çeşitli özellikleri incelenmiştir. L bir tam modüler kafes olmak üzere, $a \in L$ için $Rad(1/b) = 1$ ve $a \vee b = 1$ koşullarını sağlayan her $b \in L$ için $b = 1$ oluyorsa, a 'ya L içinde J -küçük elemandır denir. Her küçük elemanın J -küçük olduğu açıktır. İki eleman

J -küçük ise bunların supremumları da J -küçük olur. L bir tam modüler kafes ve $a \in L$ olsun. Bir $b \in L$ için $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b \ll_J b/0$ oluyorsa, b elemanına a 'nın L içinde J -tümleyeni denir. L kafesinin tüm elemanlarının L içinde bir J -tümleyeni varsa L 'ye J -tümlemiş kafes denir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Genel Bilgiler bölümünde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Materyal ve Yöntem bölümünde, kafeslerde küçük elemanlar, bütünlenmiş ve tümlemiş kafes kavramları ve bunlara ait çeşitli özelliklere yer verilmiştir. Bulgular ve Tartışma bölümünde, kafeslerde J -küçük elemanlar tanımlanmış ve bu elemanlar bir çok yönden incelenmiştir. Devamında, J -küçük elemanlar vasıtasıyla J -tümleyen eleman tanımı yapılmış ve J -tümleyen elemanların bazı özellikleri incelenmiştir. J -tümleyen eleman tanımının bir sonucu olarak J -tümlemiş kafes kavramı tanımlanmış ve bu kafesler bir çok açıdan incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Sıralı Kümeler

2.1 Tanım Boş kümeden farklı bir T kümesi üzerinde bir $\leq$ bağıntısı, her $d, e, f \in T$ için;

1. $d \leq d$.
2. $d \leq e$ ve $e \leq d$ ise $d = e$.
3. $d \leq e$ ve $e \leq f$ ise $d \leq f$

özellikleri sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısı T üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı*dır denir. T kümesine de *kısmi sıralı küme* denir (Davey ve Priestley, 2002).

2.2 Tanım T kısmi sıralı bir küme olsun. T 'nin a ve b elemanları için, $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise a ve b elemanları *karşılaştırılabilir*dir, tersi durumda ise *karşılaştırılmazdır* denir. a ile b elemanlarının karşılaştırılmaz olması durumu $a \parallel b$ biçiminde ifade edilir.

$\emptyset \neq C \subseteq T$ kümesinin keyfi iki elemanı karşılaştırılabilirse, C kümesine bir *zincir* denir (Călugăreanu, 2000).

Uyarı Bir kısmi sıralı T kümesinin ve j, r elemanları için $j \neq r$ ve $j \leq r$ durumu $j < r$ (veya $r > j$) biçiminde gösterilir (Călugăreanu, 2000).

2.3 Tanım T kısmi sıralı bir küme olsun. $j, r \in T$ için $j < r$ ve $j \leq m < r$ iken $j = m$ ise veya buna eşdeğer olarak, T 'nin $j < m < r$ olacak biçimde hiçbir m elemanı yoksa j, r tarafından *örtülüyor* veya r, j 'yi *örter* denir ve $j \prec r$ biçiminde ifade edilir (Călugăreanu, 2000).

2.4 Tanım T kısmi sıralı bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq T$ olsun. Her $y \in Y$ için $y \leq m$ koşulunu sağlayan bir $m \in Y$ elemanı mevcutsa, m elemanına T içinde Y alt kümesinin *en büyük elemanı* denir (Călugăreanu, 2000).

2.5 Tanım T kısmi sıralı bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq T$ olsun. Her $y \in Y$ için $m \leq y$ koşulunu sağlayan bir $m \in Y$ elemanı mevcutsa, m elemanına T içinde Y alt kümesinin *en küçük elemanı* denir (Călugăreanu, 2000).

2.6 Tanım T kısmi sıralı bir küme, $\emptyset \neq Y \subseteq T$ ve $m \in Y$ olsun. $x \leq m$ ($m \leq x$) koşulunu sağlayan her $x \in Y$ için $m = x$ elde ediliyorsa, m 'ye Y kümesinde bir *minimal* (maksimal) *eleman* denir (Călugăreanu, 2000).

2.7 Tanım T kısmi sıralı bir küme, $\emptyset \neq Y \subseteq T$ ve $x \in T$ olsun. Her $y \in Y$ için $y \leq x$ ise x

elemanına Y kümesinin bir *üst sınırı* adı verilir.

T kısmi sıralı bir küme, $\emptyset \neq Y \subseteq T$ ve $x \in T$ olsun. Her $y \in Y$ için $x \leq y$ ise x elemanına Y kümesinin bir *alt sınırı* adı verilir (Călugăreanu, 2000).

2.8 Tanım T kısmi sıralı bir küme ve Y , T kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $b \in T$ olsun. b elemanı Y için bir üst sınır ve ayrıca Y kümesinin her a üst sınırı için $b \leq a$ oluyorsa, $b \in T$ elemanına Y kümesinin bir *en küçük üst sınırıdır* denir.

Buna benzer olarak, $b \in T$ elemanı Y kümesi için bir alt sınır ve ayrıca Y kümesinin her a alt sınırı için $a \leq b$ oluyorsa, $b \in T$ elemanı Y kümesinin bir *en büyük alt sınırıdır* denir (Călugăreanu, 2000).

Y kümesinin varsa tüm üst sınırlarından oluşan kümenin en küçük elemanı $\bigvee Y$ ile temsil edilir.

Y kümesinin varsa tüm alt sınırlarından oluşan kümenin en büyük elemanı da $\bigwedge Y$ ile temsil edilir. İki (veya sonlu) elemanlı kümeler için, yani $X = \{m, n\}$ ise, $m \vee n$ ve $m \wedge n$ gösterimleri kullanılır.

2.9 Tanım T kısmi sıralı bir küme ve $\emptyset \neq U \subseteq T$ olsun. U nun boştan farklı her sonlu alt kümesi, U içinde bir üst (alt) sınıra sahipse U ya bir *üstten (alttan) yönlü küme* denir (Călugăreanu, 2000).

2.10 Tanım K_1 ve K_2 kısmi sıralı iki küme ve $h : (K_1, \leq) \rightarrow (K_2, \leq)$, $p \leq q$ koşulunu sağlayan her $p, q \in K_1$ için $h(p) \leq h(q)$ olacak biçimde bir dönüşüm ise h 'ye *sıralama morfizması* denir (Călugăreanu, 2000).

2.11 Tanım K_1 ve K_2 kısmi sıralı iki küme ve $h : (K_1, \leq_1) \rightarrow (K_2, \leq_2)$ sıralama morfizması; örten, birebir ve aynı zamanda ters dönüşümü de sıralama morfizması olan bir dönüşüm ise h 'ye *sıralama izomorfizması* denir.

Eğer K_1 kümesinden K_2 kümesine bir sıralama izomorfizması tanımlanabiliyorsa K_1 ve K_2 kümeleri *sıralı izomorfiktir* denir (Călugăreanu, 2000).

2.1 Yardımcı Teorem K_1 ve K_2 kısmi sıralı kümeleri sonlu ve $\omega : K_1 \rightarrow K_2$ örten, birebir bir dönüşüm ve $p, q \in K_1$ olsun. Bu takdirde aşağıda numaralandırılmış iddialar birbirine denktir.

1. ω dönüşümü bir sıralama izomorfizması olur.
2. $\omega(p) < \omega(q)$ ancak ve ancak $p < q$.
3. $\omega(p) \prec \omega(q)$ ancak ve ancak $p \prec q$ (Davey ve Priestley, 2002).

2.2. Kafesler

2.12 Tanım K boş kümeden farklı kısmi sıralı bir küme olsun.

1. Her $p, q \in K$ için $p \vee q$ ve $p \wedge q$ elemanlarını K içeriyorsa K 'ya *kafes*,
2. Her $\emptyset \neq Y \subseteq K$ için $\bigvee Y$ ve $\bigwedge Y$ elemanlarını K içeriyorsa K 'ya *tam kafes*

denir (Roman, 2008).

2.2 Yardımcı Teorem K bir kafes ve $q, y \in K$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denk olur.

1. $q \leq y$.
2. $q \vee y = y$.
3. $q \wedge y = q$ (Davey ve Priestley, 2002).

2.3 Teorem K bir kafes olmak üzere her $a, x, r \in K$ için aşağıda verilen durumlar doğrudur.

1. $(a \vee x) \vee r = a \vee (x \vee r)$, $(a \wedge x) \wedge r = a \wedge (x \wedge r)$.
2. $a \vee x = x \vee a$, $a \wedge x = x \wedge a$.
3. $a \wedge (a \vee x) = a$, $a \vee (a \wedge x) = a$.
4. $r \vee r = r$, $r \wedge r = r$ (Cohn, 2002).

Not Bir K kafesinin a, j, r elemanları için, $(a \vee j) \vee r = a \vee (j \vee r)$ olduğundan $(a \vee j) \vee r$ ve $a \vee (j \vee r)$ ifadeleri yerine çoğu zaman $a \vee j \vee r$ kullanılır. $(a \wedge j) \wedge r = a \wedge (j \wedge r)$ olduğundan $(a \wedge j) \wedge r$ ve $a \wedge (j \wedge r)$ ifadeleri yerine çoğu zaman $a \wedge j \wedge r$ kullanılır.

2.13 Tanım Bir K kafesinin her q elemanı için $q \leq 1$ koşulunu sağlayan varsa $1 \in K$ elemanına, K kafesinin *biri*; aynı şekilde, K kafesinin her q elemanı için $0 \leq q$ koşulunu sağlayan varsa $0 \in K$ elemanına K kafesinin *sıfırı* denir. Bir K kafesi, sıfırı ve biri içeriyorsa K 'ya *sınırlı kafes* denir. K , 1'li bir kafes ise $\emptyset \subseteq K$ kümesinin infimumu $\bigwedge \emptyset = 1$ biçiminde tanımlanır. K , 0'lı bir kafes ise $\emptyset \subseteq K$ kümesinin supremumu $\bigvee \emptyset = 0$ biçiminde tanımlanır.

K bir tam kafes ise $\bigwedge K$, $\bigvee \emptyset$, $\bigvee K$, $\bigwedge \emptyset$ elemanları mevcuttur ve $\bigvee K = \bigwedge \emptyset = 1$ ve $\bigvee \emptyset = \bigwedge K = 0$ olur (Călugăreanu, 2000).

2.14 Tanım Bir K kafesinin boş kümeden farklı olan bir T alt kümesi; K kafesinde tanımlı olan $\vee$, $\wedge$ işlemlerine göre kapalıysa; diğer bir deyişle, her $d, e \in T$ için $d \vee e, d \wedge e \in T$ ise T , K 'nın bir *alt kafesidir* denir. Burada açıktır ki, T alt kafesi de bir kafes yapısına sahiptir (Davey ve Priestley, 2002).

Benzer biçimde, bir K tam kafesinin boş kümeden farklı olan bir N alt kümesi, her $Y \subseteq N$ için $\inf_K Y \in N$ ve $\sup_K Y \in N$ koşullarını gerçekleştiriyorsa N 'ye K 'nın bir *tam alt kafesidir* denir (Călugăreanu, 2000).

2.15 Tanım K bir kafes $a, x \in K$ ve $a \leq x$ olsun. $\{y \in K \mid a \leq y \leq x\} \subseteq K$ kümesinin K 'nın bir alt kafesi olduğu açıktır. K kafesinin bu biçimde olan alt kafeslerine *bölüm alt kafesi* denir ve x/a biçiminde ifade edilir. $a \prec x$ durumu için x/a alt kafesine *basittir* denir (Călugăreanu, 2000).

2.3. Kafes Homomorfizmaları

2.16 Tanım L ve N kafesleri ve $\omega : L \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Her $d, e \in L$ için,

1. $\omega(d \vee e) = \omega(d) \vee \omega(e)$.
2. $\omega(d \wedge e) = \omega(d) \wedge \omega(e)$.

eşitlikleri doğruysa ω bir *kafes homomorfizmasıdır* denir (Călugăreanu, 2000).

Bir kafes homomorfizması biyektif ise *kafes izomorfizması* adını alır. L ve N kafesleri arasında bir kafes izomorfizması tanımlanabiliyorsa, L ile N kafesleri *izomorfiktir* denir. L ve N kafesleri izomorfik ise $L \cong N$ gösterimi kullanılır (Călugăreanu, 2000).

2.4 Teorem Bir dönüşümün kafes izomorfizması olması için gerekli ve yeterli şart sıralama izomorfizması olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

2.4. Modüler Kafesler

2.17 Tanım K bir kafes olsun. Her $a, q, r \in K$ için

$$r \leq a \Rightarrow a \wedge (q \vee r) \leq (a \wedge q) \vee r$$

gerektirmesi sağlanıyorsa, K 'ya bir *modüler kafes* denir. Yukarıdaki koşula *modüler kural* adı verilir (Călugăreanu, 2000).

2.5 Yardımcı Teorem K bir kafes, $a, q, f \in K$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar doğrudur:

1. $(a \wedge q) \vee (a \wedge f) \leq a \wedge (q \vee f)$
2. $a \leq f$ ise $(f \wedge q) \vee a \leq f \wedge (q \vee a)$
3. $(q \wedge f) \vee (f \wedge a) \vee (a \wedge q) \leq (q \vee f) \wedge (f \vee a) \wedge (a \vee q)$ (Davey ve Priestley, 2002).

2.6 Teorem K kafesi modülerdir ancak ve ancak her $a, q, r \in K$ için $r \leq a$ iken

$$a \wedge (q \vee r) = (a \wedge q) \vee r$$

olur (Călugăreanu, 2000).

2.7 Yardımcı Teorem K bir modüler kafes olsun. Her $x, f, j \in K$ için

$$(f \vee j) \wedge x \leq [f \wedge (x \vee j)] \vee [j \wedge (x \vee f)]$$

sağlanır (Călugăreanu, 2000).

2.8 Teorem K modüler bir kafes ve $m, n \in K$ olsun. K 'nın $(m \vee n)/n$ ve $m/(m \wedge n)$ kafesleri izomorfiktir (Călugăreanu, 2000).

Kanıt Her $x \in (m \vee n)/n$ için $m \wedge n \leq n \leq x$ ve $m \wedge n \leq m$ olduğu dikkate alınır $m \wedge n \leq x \wedge m$ bulunur ve $f : (m \vee n)/n \rightarrow m/(m \wedge n)$, $f(x) = x \wedge m$ dönüşümü tanımlansın. Her $x, y \in (m \vee n)/n$ için $f(x \vee y) = (x \vee y) \wedge m = ((x \wedge (m \vee n)) \vee (y \wedge (m \vee n))) \wedge m = ((x \wedge m) \vee n \vee (y \wedge m) \vee n) \wedge m = ((x \wedge m) \vee (y \wedge m) \vee n) \wedge m = (x \wedge m) \vee (y \wedge m) \vee (m \wedge n) = (x \wedge m) \vee (y \wedge m) = f(x) \vee f(y)$ ve $f(x \wedge y) = x \wedge y \wedge m = (x \wedge m) \wedge (y \wedge m) = f(x) \wedge f(y)$ bulunur ve dolayısıyla f bir kafes homomorfizması olur. $x, y \in (m \vee n)/n$ ve $f(x) = x \wedge m = y \wedge m = f(y)$ olsun. K modüler olduğundan;

$$x = x \wedge (m \vee n) = (x \wedge m) \vee n = (y \wedge m) \vee n = y \wedge (m \vee n) = y$$

bulunur. O halde f birebir olur.

$k \in m/(m \wedge n)$ keyfi bir eleman olsun. $k \leq m$ ve modüler kural gereği;

$$k = (m \wedge n) \vee k = m \wedge (n \vee k) = f(n \vee k)$$

bulunur. O halde f örten olur. Böylece f bir kafes izomorfizması olup $(m \vee n)/n \cong m/(m \wedge n)$ olur. □

2.9 Yardımcı Teorem K bir modüler kafes olmak üzere K 'nın f, y ve p elemanları için $p \wedge f = p \wedge y = 0$ ve $(p \vee f) \wedge (p \vee y) = p$ ise $p \wedge (f \vee y) = 0$ olur (Călugăreanu, 2000).

2.18 Tanım K bir kafes olmak üzere, her $x, y, z \in K$ için

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

eşitliği mevcutsa, K 'ya *dağılımlı kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

2.10 Önerme K bir dağılımlı kafes ise modüler olur (Călugăreanu, 2000).

2.5. Tıkız Üretilmiş Kafesler

2.19 Tanım K tam kafesinin bir $j \in K$ elemanı verilsin. 0 elemanı j elemanı tarafından örtülüyorsa ($0 \prec j$) j elemanına bir *atom* denir. K 'nın tüm atom elemanlarının oluşturduğu küme $A(K)$ ile ifade edilir (Davey ve Priestley, 2002).

2.20 Tanım Bir K tam kafesinin 1 elemanı, atomların supremumu biçiminde ifade edilebiliyorsa K 'ya *yarıatomik kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

2.21 Tanım K bir tam kafes olsun. Her $m \in K$ ve K kafesinin her U üst yönlü alt kümesi için

$$m \wedge (\bigvee U) = \bigvee_{n \in U} (m \wedge n)$$

şartı sağlanıyorsa K 'ya *üst sürekli kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

2.22 Tanım Bir K tam kafesinin $z \leq \bigvee Z$ şartını gerçekleyen her Z alt kümesinin $z \leq \bigvee H$ olacak biçimde sonlu bir H alt kümesi mevcutsa $z \in K$ elemanına *tıkız eleman* denir (Călugăreanu, 2000).

2.23 Tanım Bir K tam kafesinin $z \leq \bigvee H$ şartını gerçekleyen her H üst yönlü alt kümesi için, $z \leq e_0$ olacak biçimde bir $e_0 \in H$ mevcutsa $z \in K$ elemanına *S-tıkız eleman* denir (Călugăreanu, 2000).

2.11 Teorem Bir tam kafeste bir elemanın S-tıkızdır ancak ve ancak tıkızdır. (Călugăreanu, 2000).

2.24 Tanım $1 \in K$ elemanı tıkız olan bir K tam kafesine *tıkız kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

2.25 Tanım K bir tam kafes $b \in K$ için $1/b$ tıkız bir kafes olsun. Bu durumda b elemanına *eş sonlu* bir eleman denir (Toksoy, 2008).

2.26 Tanım K bir tam kafes olmak üzere, K kafesinin her elemanı K 'nın tıkız elemanların supremumu biçiminde ifade edilebiliyorsa K 'ya *tıkız üretilmiş kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

2.12 Yardımcı Teorem K bir tam kafes ve $s_1, s_2 \in K$ tıkız elemanlar olsun. Bu takdirde $s_1 \vee s_2$ elemanı tıkız olur (Dilworth ve Crawley, 1960).

2.13 Sonuç K tam kafesinin sonlu sayıda tıkız elemanlarının supremumu tıkız olur (Dilworth ve Crawley, 1960).

2.14 Yardımcı Teorem K tıkız ve tıkız üretilmiş bir kafes olmak üzere, $e, f \in K$ için $e \vee f = 1$ ise $e' \leq e, f' \leq f$ ve $e' \vee f' = 1$ olacak biçimde $e', f' \in K$ tıkız elemanları mevcuttur (Călugăreanu, 2000).

2.15 Teorem 1. Bir K tam kafesinin c elemanı K içinde tıkız ise $a \vee c$ elemanı da $1/a$ kafesinin tıkız elemanı olur.
 2. K tıkız bir kafes ise her $j \in K$ için $1/j$ kafesi de tıkız olur.
 3. K tıkız üretilmiş bir kafes ise her $j \in K$ için $1/j$ kafesi de tıkız üretilmiş olur (Toksoy, 2008).

2.16 Teorem K tıkız bir kafes ve $1 \neq j \in K$ olsun. $1/j$ kafesinin 1'den farklı bir maksimal elemanı mevcuttur.

2.17 Yardımcı Teorem K tıkız üretilmiş bir kafes olsun. $b/a \subseteq K$ kafesinin bir k elemanının tıkız olması için gerekli ve yeterli şart $k = a \vee c \leq b$ eşitliğini sağlayan K içinde tıkız bir c elemanının var olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

2.18 Yardımcı Teorem K tıkız üretilmiş bir kafes ve $m, n \in K$ olsun. $c \leq m$ koşulunu sağlayan her c tıkız elemanı için $c \leq n$ ise $m \leq n$ olur (Călugăreanu, 2000).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Küçük Elemanlar

Bu kısımdan başlayarak çalışmanın sonuna kadar kafes ile tam modüler kafesleri kastedeceğiz.

3.1 Tanım K bir kafes ve $q \in K$ olsun. Eğer $y \neq 1$ olan her $y \in K$ için $q \vee y \neq 1$ koşulu sağlanıyorsa (buna eşdeğer olarak $q \vee y = 1$ olan her $y \in K$ için $y = 1$ oluyorsa), q 'ya, K 'nın bir *küçük elemanı* denir ve $q \ll K$ biçiminde ifade edilir (Călugăreanu, 2000).

3.2 Tanım Bir K kafesinin 1'den farklı tüm maksimal elemanlarının en büyük alt sınırına K 'nın *radikali* denir ve $Rad(K)$ ile temsil edilir. K 'nın aşikar maksimal elemanı olan 1'den başka maksimal elemanı mevcut değilse $Rad(K) = 1$ kabul edilir (Călugăreanu, 2000).

3.1 Yardımcı Teorem K bir kafes, $m, n \in K$ ve $m \leq n$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler doğrudur.

1. $m \ll n/0$ ise her $c \in K$ için $m \vee c \ll (n \vee c)/c$ olur.
2. $n \ll K$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \ll K$ ve $n \ll 1/m$ durumlarının sağlanmasıdır.
3. $m \ll n/0$ ise $m \ll K$ dir (Călugăreanu, 2000).

Kanıt 1. $c \in K$ ve $t \in (n \vee c)/c$ için $(m \vee c) \vee t = 1_{(n \vee c)/c} = n \vee c$ olsun. $t \in (n \vee c)/c$ olduğu düşünülürse $c \leq t$ bulunur. $m \vee t = m \vee (c \vee t) = (m \vee c) \vee t = n \vee c$ elde edilir. $m \vee t = n \vee c$ eşitliğinin her iki tarafına n ile $\wedge$ işlemi uygulanırsa $(m \vee t) \wedge n = (n \vee c) \wedge n = n$ elde edilir. $m \leq n$ olduğu ve modüler kural düşünüldüğünde $m \vee (t \wedge n) = (m \vee t) \wedge n = n$ bulunur. $t \wedge n \leq n$ gereği $t \wedge n \in n/0$ olur. Bu durumda $m \ll n/0$ ve $m \vee (t \wedge n) = n = 1_{n/0}$ olduğu dikkate alınır $n \wedge t = 1_{n/0} = n$ bulunur. Bu ise $n \leq t$ olmasını gerektirecektir. O halde $n \vee c \leq t \vee c = t$ olur. Ayrıca, $t \in (n \vee c)/c$ olduğundan $t \leq n \vee c$ elde edilir. Buradan $t = n \vee c$ bulunur ve böylece $m \vee c \ll (n \vee c)/c$ olur.

2. $(\Rightarrow)$: $n \ll K$, $t \in K$ ve $m \vee t = 1$ olsun. Buradan $n \vee m \vee t = n \vee 1 = 1$ yazılabilir. $m \leq n$ olduğu dikkate alınır $n \vee t = n \vee m \vee t = 1$ elde edilir. $n \ll K$ olduğundan $t = 1$ dir. O halde $m \ll K$ dir. $s \in 1/m$ ve $n \vee s = 1$ olsun. Burada $n \ll K$ olduğundan $s = 1$ olur. O halde $n \ll 1/m$ dir.

$(\Leftarrow)$: $m \ll K$, $n \ll 1/m$ ve $t \in K$ için $n \vee t = 1$ olsun. Burada eşitliğin her iki yanına sağdan m elemanı ile $\vee$ işlemi uygulandığı takdirde $n \vee t \vee m = 1 \vee m = 1$ bulunur. $t \vee m \in 1/m$ ve $n \ll 1/m$ olduğundan $t \vee m = 1$ dir. $m \ll K$ olduğunu da dikkate alırsak $t = 1$ bulunur. O halde $n \ll K$ olur.

3. $m \ll n/0$ ve $t \in K$ için $m \vee t = 1$ olsun. Eşitliğin her iki yanına sağdan n ile $\wedge$ işlemi

uygulandığında $(m \vee t) \wedge n = 1 \wedge n = n$ eşitliği elde edilir. $m \leq n$ olduğundan modüler kural gereği $m \vee (t \wedge n) = (m \vee t) \wedge n = n$ bulunur. O halde $m \ll n/0$ olduğundan $t \wedge n = n$ yani $n \leq t$ dir. Buradan $t = n \vee t = m \vee n \vee t = m \vee t = 1$ bulunur. O halde $m \ll K$ olur.

□

3.2 Teorem K bir kafes ve $m, n \in K$ olsun. $m' \ll m/0$ ve $n' \ll n/0$ ise $m' \vee n' \ll (m \vee n)/0$ olur (Călugăreanu, 2000).

Kanıt $m/0$ kafesi $(m \vee n)/0$ kafesinin bir bölüm alt kafesidir. $m' \leq m$ ve $m' \ll m/0$ olduğundan, Yardımcı Teorem 3.1 (iii) gereği $m' \ll (m \vee n)/0$ bulunur. Benzer olarak $n' \ll (m \vee n)/0$ olduğu açıktır. $m' \vee n' \vee t = m \vee n$ eşitliğini sağlayan keyfi bir $t \in (m \vee n)/0$ alalım. $m' \vee n' \vee t = m \vee n$ ve $m' \ll (m \vee n)/0$ olduğundan $n' \vee t = m \vee n$ bulunur ve $n' \ll (m \vee n)/0$ olduğu düşünülürse $t = m \vee n$ olur. O halde $m' \vee n' \ll (m \vee n)/0$ elde edilir. □

3.3 Önerme K bir tıkız üretilmiş kafes ve $a \ll K$ olmak üzere K 'nın tıkız olması için gerekli ve yeterli şart $1/a$ bölüm alt kafesinin tıkız olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

3.4 Yardımcı Teorem K bir kafes ve $x \in K$ olsun. $x \ll K$ olması durumunda $x \leq \text{Rad}(K)$ olur. x , K kafesinin tıkız elemanı ise tersi de doğru olur (Călugăreanu, 2000).

3.3 Tanım K kafesi 1 elemanına sahip olsun. Her $1 \neq y \in K$ elemanı için $y \ll K$ ise K 'ya *oyuk kafes* denir.

3.2. Bütünlenmiş Kafesler

3.4 Tanım K bir kafes ve $c, d \in K$ elemanları için $c \wedge d = 0$ ve $c \vee d = 1$ oluyorsa c elemanına d 'nin K içinde bir *bütünleyeni* denir. Açık ki, c elemanı d 'nin bütünleyeni ise d de c elemanının K içinde bir bütünleyeni olur. c elemanı d 'nin K içinde bir bütünleyeni ise $c \oplus d = 1$ gösterimi kullanılır. Bu gösterime, c ile d 'nin K içinde bir *direkt toplamı*, c ve d elemanlarına da K kafesinin *direkt toplam terimleri* adı verilir (Davey ve Priestley, 2002).

1 ve 0, K kafesinin aşıkâr direkt toplam terimleridir. K 'nın aşıkâr direkt toplam terimleri olan 1 ve 0 elemanlarından başka direkt toplam terimleri mevcut değilse K 'ya *ayrıştırılmaz kafes* denir (Davey ve Priestley, 2002).

K 'nın her elemanı K içinde bir bütünleyene sahipse K 'ye *bütünlenmiş kafes* adı verilir (Davey ve Priestley, 2002).

K 'nın her elemanı içerildiği tüm bölüm alt kafesleri içinde bir bütünleyen elemana sahipse K 'ya *kısmi bütünlenmiş kafes* denir (Davey ve Priestley, 2002).

Modüler bir kafeste birden fazla bütünleyene sahip bir elemanın bütünleyenleri karşılaştırılabilir iseler birbirlerine eşit olurlar.

Ayrıca, K bir dağılımlı kafes ve $a \in K$ elemanının K içinde bütünleyeni varsa tektir (Călugăreanu, 2000).

3.5 Teorem K kafesinin kısmi bütünlenmiş olması için gerekli ve yeterli şart bütünlenmiş olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

3.6 Teorem K bütünlenmiş bir kafes ise her $b \in K$ için $b/0$ bölüm alt kafesi de bütünlenmiş olur (Toksoy, 2008).

3.5 Tanım K kafesinin, 1'den farklı olan bütün elemanlarıyla oluşturulan küme bir en büyük elamana sahipse, K kafesine *yerel* veya *lokal kafes* denir.

K kafesinin bir y elemanı için, $y/0$ kafesi yerel oluyorsa, y elemanına K 'nın bir *yerel elemanı* denir (Călugăreanu, 2000).

3.6 Tanım K bir kafes olmak üzere $1/Rad(K)$ bütünlenmiş kafes ise K 'ya *yarı yerel kafes* adı verilir (Toksoy, 2008).

3.7 Yardımcı Teorem K bütünlenmiş modüler bir kafes ve $a \in K$ olsun. a 'nın atom olması için gerekli ve yeterli şart a 'nın K içinde bütünleyeninin K 'da maksimal olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

3.8 Teorem Üstten sürekli yarıatomik modüler kafes bütünlenmiştir (Călugăreanu, 2000).

3.3. Tümlenmiş Kafesler

3.7 Tanım K bir kafes ve $m, p \in K$ olsun. $p \vee m = 1$ ve m bu şartları sağlayan tüm elemanların oluşturduğu kümenin bir minimal elemanı ise m 'ye p 'nin K içinde bir *tümleyeni* denir.

K 'nın tüm elemanlarının K içinde bir tümleyeni mevcutsa K 'ya *tümlenmiş kafes* denir (Călugăreanu, 2000).

3.9 Önerme K bir kafes ve $p \in K$ olsun. Bir $m \in K$ elemanının p 'nin K içinde bir tümleyeni olması için gerekli ve yeterli şart $p \vee m = 1$ ve $p \wedge m \ll m/0$ koşullarını sağlamasıdır (Toksoy, 2008).

3.10 Önerme K tıkHz üretilmiş bir kafes, $p, r, m \in K$ ve m elemanı r 'nin K içinde bir tümleyeni olsun. Bu koşullarda,

1. $p \leq r$ ve $p \vee m = 1$ ise m, p 'nin de K içinde bir tümleyeni olur.

2. K tıkız bir kafes ise m elemanı tıkızdır.
3. r, K' 'nin bir maksimal elemanı ise $r \wedge m = \text{Rad}(m/0)$ elemanı $m/0$ kafesinin tek maksimal($\neq m$) elemanı olur.
4. $p \ll K$ ise $m, p \vee r$ elemanının K içinde bir tümleyenidir.
5. $p \ll K$ ise $p \wedge m \ll m/0$ ve $\text{Rad}(m/0) = m \wedge \text{Rad}(K)$ olur.
6. $p \leq r$ ise $p \vee m, r$ 'nin $1/p$ içinde bir tümleyenidir (Călugăreanu, 2000).

3.11 Sonuç K tümlenmiş ve tıkız üretilmiş bir kafes ise K kafesinin her j elemanı için $1/j$ kafesi tümlenmiş olur (Călugăreanu, 2000).

3.12 Önerme K tıkız üretilmiş bir kafes olsun.

1. $j, r \in K, j/0$ kafesi tümlenmiş ve $j \vee r$ elemanı K içinde bir tümleyeni varsa r elemanı da K içinde bir tümleyene sahip olur.
2. $1 = j \vee r$ ve $j/0, r/0$ alt kafesleri tümlenmiş ise K kafesi de tümlenmiş olur (Călugăreanu, 2000).

3.13 Önerme K tıkız üretilmiş bir kafes olsun.

1. $K, 1$ 'den farklı en büyük elemanı j olan bir yerel kafes ise $\text{Rad}(K) = j \ll K$ olur.
2. q, K kafesinin maksimal elemanı olan bir j elemanının K içinde bir tümleyeni ise $q/0$ bir yerel kafes olur.
3. $\text{Rad}(K) = 1$ olur ancak ve ancak K 'nin her tıkız elemanı K içinde küçüktür.
4. Yerel kafesler tümlenmiştir (Călugăreanu, 2000).

3.14 Önerme K sıfırdan farklı bir tıkız üretilmiş kafes olsun. K kafesinin oyuk olması için gerekli ve yeterli şart K 'nin 1 'den farklı her j elemanı için $1/j$ kafesinin ayrıştırılamaz olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

3.15 Önerme K sıfırdan farklı bir tıkız üretilmiş kafes olsun. Aşağıdaki iddialar doğrudur;

1. $\text{Rad}(K) \neq 1$ ve K oyuk bir kafestir.
2. K oyuk ve tıkız kafestir.
3. K yerel kafestir (Călugăreanu, 2000).

3.8 Tanım K bir kafes ve $y, q \in K$ olsun. $y \vee q = 1$ ve $y \wedge q \ll K$ oluyorsa q elemanına y elemanının K içinde bir *zayıf tümleyeni* denir.

K kafesinin her bir elemanı, K içinde bir zayıf tümleyen elemana sahipse K 'ye bir *zayıf tümlenmiş kafes* denir (Toksoy, 2008).

3.16 Önerme K zayıf tümlenmiş bir kafes ise K kafesinin her q elemanı için oluşturulan $q/0$ kafesi de zayıf tümlenmiş olur (Toksoy, 2008).

3.17 Önerme K bir kafes ve K 'nın bir $q \ll K$ elemanı için $1/q$ kafesi zayıf tümlenmiş ise K kafesi de zayıf tümlenmiş olur (Toksoy, 2008).

3.18 Önerme K zayıf tümlenmiş bir kafes ve q elemanı K 'nın bir elemanının K içinde tümleyeni ise $q/0$ kafesi de zayıf tümlenmiş olur (Toksoy, 2008).

3.9 Tanım Bir K kafesinin her elemanının, K kafesinin direkt toplam terimi olan bir tümleyeni bulunabiliyorsa K kafesine $\oplus$ -*tümlenmiş kafes* denir (Biçer, 2018).

3.10 Tanım Her tümleyen elemanı direkt toplam terimi olan tümlenmiş bir K kafesine *güçlü $\oplus$ -tümlenmiş kafes* denir (Biçer, 2018).

3.11 Tanım K bir kafes ve $p \in K$ olsun. Bir $t \in K$ elemanı için $p \vee t = 1$ ve $p \wedge t \leq \text{Rad}(K)$ koşulları sağlanıyorsa, t 'ye p nin K içinde bir *radikal tümleyeni* kısaca *Rad-tümleyeni* denir (Biçer, 2018).

3.12 Tanım Bir K kafesinin her elemanı K içinde bir Rad-tümleyene sahip ise K ya *Rad-tümlenmiş kafes* denir (Biçer, 2018).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Kafeslerde J -Küçük Elemanlar

4.1 Tanım L bir kafes olsun. $a \in L$ için $Rad(1/b) = 1$ ve $a \vee b = 1$ koşullarını sağlayan her $b \in L$ için $b = 1$ oluyorsa a 'ya L içinde J -küçük elemandır denir ve $a \ll_J L$ ile gösterilir.

4.1 Önerme L bir kafes ve $v, u \in L$ elemanları için $v \leq u$ olsun. Bu durumda $Rad(1/v) = 1$ ise $Rad(1/u) = 1$ olur.

Kanıt $Rad(1/v) = 1$ olsun. $1 \neq m \in 1/u$, $1/u$ bölüm alt kafesinin bir maksimal elemanı olsun. O halde $u \leq m < 1$ olur. $v \leq u \leq m < 1$ olduğundan $m \in 1/v$ bulunur. $x \in 1/v$ ve $m \leq x \leq 1$ olsun. $x \in 1/u$ ve m , $1/u$ kafesinin maksimal elemanı olduğundan $x = m$ veya $x = 1$ olur. $1 \neq m$ elemanı $1/v$ kafesinin bir maksimal elemanı ($\neq 1$) olur. Bu ise $Rad(1/v) = 1$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Yani $1/u$ kafesinin $1 \neq m$ olacak şekilde maksimal bir elemanı yoktur. Buradan $Rad(1/u) = 1$ elde edilir. $\square$

4.2 Yardımcı Teorem L bir kafes ve $a \in L$ olsun. $Rad(L) = 1$ ise $Rad(1/a) = 1$ olur.

Kanıt $1 \neq a \in L$, $Rad(L) = 1$ ve $1 \neq m \in 1/a$ bölüm alt kafesinin bir maksimal elemanı olsun. Bir $y \in L$ için $m \leq y$ olsun. $a \leq m \leq y \leq 1$ olduğundan $y \in 1/a$ olur. m , $1/a$ kafesinin bir maksimal ($\neq 1$) elemanı ve $y \in 1/a$ ve $m \leq y$ olduğundan $y = m$ veya $y = 1$ bulunur. O halde $1 \neq m$ elemanı, L kafesinin bir maksimal elemanıdır. Bu ise $Rad(L) = 1$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Yani $1/a$ kafesinin bir maksimal elemanı yoktur. Dolayısıyla $Rad(1/a) = 1$ olur. $\square$

4.3 Sonuç L bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. $Rad(1/a) = 1$ ise $Rad(1/(a \vee b)) = 1$ olur.

Kanıt $a \leq a \vee b$ ve $Rad(1/a) = 1$ olduğu dikkate alınırsa, Önerme 4.1 gereği $Rad(1/(a \vee b)) = 1$ elde edilir. $\square$

4.4 Önerme L bir kafes ve $x \leq q$ olacak biçimde $x, q \in L$ elemanları için $x \ll_J q/0$ olsun. Bu takdirde bir $b \in L$ için $x \vee b \ll_J (q \vee b)/b$ olur.

Kanıt $Rad((q \vee b)/k) = q \vee b$ şartını sağlayan bir $k \in (q \vee b)/b$ için $(x \vee b) \vee k = x \vee k = q \vee b$ olsun. $k \in (q \vee b)/b$ gereği $b \leq k \leq q \vee b$ olur ve

$$q \vee b = (q \vee b) \vee k = q \vee (b \vee k) = q \vee k$$

bulunur. Bu gerçek gereği,

$$(q \vee b)/k = (q \vee k)/k \cong q/(q \wedge k)$$

elde edilir. Üstteki izomorfizma ve $Rad((q \vee b)/k) = q \vee b$ olduğu dikkate alınırsa $Rad(q/(q \wedge k)) = q$ bulunur. Ayrıca, $x \leq q$ olduğundan modüler kural gereği,

$$x \vee (q \wedge k) = (x \vee k) \wedge q = (q \vee b) \wedge q = q$$

bulunur. O halde $x \ll_J q/0$ olduğundan $q \wedge k = q$ bulunur. Yani $q \leq k$ olur. $b \leq k$ olduğu dikkate alınırsa $q \vee b \leq k$ bulunur. O halde $q \vee b = k$ yani, $x \vee b \ll_J (q \vee b)/b$ bulunur. $\square$

4.5 Önerme L bir kafes, $a \in L$ ve $Rad(L) = 1$ olsun. Bu durumda $a \ll_J L$ olması için gerekli ve yeterli şart $a \ll L$ olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $a \ll_J L$ ve bir $t \in L$ için $a \vee t = 1$ olsun. $Rad(L) = 1$ ise Yardımcı Teorem 4.2 gereği $Rad(1/t) = 1$ olur. Buradan, $a \ll_J L$ olduğu dikkate alınırsa $t = 1$ bulunur. O halde $a \ll L$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $a \ll L$ ve bir $t \in L$ için $Rad(1/t) = 1$ ve $a \vee t = 1$ olsun. $a \ll L$ ve $a \vee t = 1$ olduğundan $t = 1$ bulunur. O halde $a \ll_J L$ elde edilir. $\square$

4.6 Önerme L bir kafes $a, b \in L$ için $a \leq b$ olsun. Bu durumda $b \ll_J L$ olması için gerek ve yeter şart $b \ll_J 1/a$ ve $a \ll_J L$ olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $a \leq b$ ve $b \ll_J L$ olsun. Bir $t \in L$ için $Rad(1/t) = 1$ ve $a \vee t = 1$ olsun. $a \vee t = 1$ olduğundan $b \vee (a \vee t) = b \vee 1 = 1$ bulunur. $a \leq b$ olduğundan $b \vee t = (b \vee a) \vee t = b \vee (a \vee t) = 1$ elde edilir. $b \vee t = 1$, $Rad(1/t) = 1$ olduğundan, $b \ll_J L$ gereği $t = 1$ bulunur. O halde $a \ll_J L$ olur.

$x \in 1/a$, $Rad(1/x) = 1$ ve $b \vee x = 1$ olsun. $x \in 1/a \subseteq L$ olduğundan $x \in L$ olur. O halde $Rad(1/x) = 1$, $b \vee x = 1$ eşitlikleri ve $b \ll_J L$ olduğu dikkate alınırsa $x = 1$ bulunur. Buradan $b \ll_J 1/a$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $b \ll_J 1/a$ ve $a \ll_J L$ olsun. $t \in L$, $Rad(1/t) = 1$ ve $b \vee t = 1$ olsun. $a \vee t \in 1/a$ ve $t \leq a \vee t$ ve $Rad(1/t) = 1$ olduğundan Önerme 4.1 gereği $Rad(1/(a \vee t)) = 1$ olur. Ayrıca $b \vee (a \vee t) = b \vee t = 1$ bulunur. $b \ll_J 1/a$ olduğu dikkate alınırsa $a \vee t = 1$ bulunur. Ayrıca, $Rad(1/t) = 1$, $a \vee t = 1$ ve $a \ll_J L$ olduğu dikkate alınırsa $t = 1$ bulunur. O halde $b \ll_J L$ olur. $\square$

4.7 Önerme L bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. $a \vee b \ll_J L$ olması için gerekli ve yeterli şart $a \ll_J L$ ve $b \ll_J L$ olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $a \vee b \ll_J L$ ve bir $t \in L$ için $Rad(1/t) = 1$ ve $a \vee t = 1$ olsun. Buradan $a \vee b \vee t = 1$ olur. O halde $Rad(1/t) = 1$, $(a \vee b) \vee t = 1$ eşitlikleri ve $a \vee b \ll_J L$ olduğu dikkate alınır $t = 1$ bulunur. Sonuç olarak $a \ll_J L$ elde edilir. $b \ll_J L$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. $\Leftarrow$: $a \ll_J L$ ve $b \ll_J L$ olsun. Bir $t \in L$ için $Rad(1/t) = 1$ ve $(a \vee b) \vee t = 1$ olsun. Buradan $a \vee (b \vee t) = 1$ bulunur. Aynı zamanda $t \leq b \vee t$ ve $Rad(1/t) = 1$ olduğundan Önerme 4.1 gereği $Rad(1/(b \vee t)) = 1$ elde edilir. $Rad(1/(b \vee t)) = 1$, $a \vee (b \vee t) = 1$ ve $a \ll_J L$ olduğundan $b \vee t = 1$ bulunur. $Rad(1/t) = 1$, $b \vee t = 1$ ve $b \ll_J L$ olduğundan $t = 1$ bulunur. O halde $a \vee b \ll_J L$ olur. $\square$

4.8 Sonuç L bir kafes ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ olsun. $\bigvee_{i=1}^n a_i \ll_J L$ olması için gerekli ve yeterli şart her $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \ll_J L$ olmasıdır.

Kanıt Önerme 4.7 gereği açıktır. $\square$

4.9 Önerme L bir kafes, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun. $a \ll_J b/0$ ise $a \ll_J L$ olur.

Kanıt $x \in L$ için $Rad(1/x) = 1$ ve $a \vee x = 1$ olsun. $a \leq b$ olduğu için modüler kural gereği $a \vee (b \wedge x) = (a \vee x) \wedge b = 1 \wedge b = b = 1_{b/0}$ bulunur. $Rad(1/x) = 1$ ve $b/(b \wedge x) \cong (b \vee x)/x = 1/x$ izomorfizması dikkate alınır $Rad(b/(b \wedge x)) = b$ bulunur. $Rad(b/(b \wedge x)) = b$, $a \vee (b \wedge x) = 1_{b/0}$ eşitlikleri ve $a \ll_J b/0$ gereği $b \wedge x = b$ elde edilir. $b \wedge x = b$ ise $b \leq x$ ve buradan $a \leq b \leq x$ yani $a \leq x$ bulunur. $a \vee x = 1$ ve $a \leq x$ birlikte düşünüldüğünde $x = a \vee x = 1$ bulunur. O halde $a \ll_J L$ elde edilir. $\square$

4.10 Önerme L bir kafes, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun. b elemanı L kafesinin bir direkt toplam terimi ve $a \ll_J L$ ise $a \ll_J b/0$ olur.

Kanıt $x \in b/0$ için $a \vee x = b$ ve $Rad(b/x) = b$ olsun. b , L kafesinin bir direkt toplam terimi olduğu için, öyle bir $b_1 \in L$ elemanı vardır ki $b \oplus b_1 = 1$ olur. Dolayısıyla $b \vee b_1 = 1$, $b \wedge b_1 = 0$ elde edilir. $Rad(b/x) = b$ ve Önerme 4.1 gereği $Rad(b/(a \vee x)) = b$ bulunur.

$$1/(x \vee b_1) = (x \vee b_1 \vee b)/(x \vee b_1) \cong b/(x \vee b_1) \wedge b = b/(x \vee (b_1 \wedge b)) = b/x$$

olduğundan $b/x \cong 1/(x \vee b_1)$ bulunur. O halde $Rad(b/x) = b$ olduğundan $Rad(1/(x \vee b_1)) = 1$ olur. $a \vee x = b$ olduğu dikkate alınır $a \vee (x \vee b_1) = (a \vee x) \vee b_1 = b \vee b_1 = 1$ bulunur. $Rad(1/(x \vee b_1)) = 1$ ve $a \vee (x \vee b_1) = 1$ eşitlikleri düşünüldüğünde $a \ll_J L$ gereği $x \vee b_1 = 1$ elde edilir. Buradan, $(x \vee b_1) \wedge b = b$ ve $x \leq b$ olduğundan modüler kural gereği $x = x \vee (b_1 \wedge b) = (x \vee b_1) \wedge b = b$ bulunur. Yani $a \ll_J b/0$ olur. $\square$

4.11 Önerme L bir kafes, $a_1, a_2, m_1, m_2 \in L$, $a_1 \leq m_1, a_2 \leq m_2$ ve $m_1 \oplus m_2 = 1$ olsun. Bu durumda $a_1 \vee a_2 \ll_J L$ olması için gerekli ve yeterli şart $a_1 \ll_J m_1/0$ ve $a_2 \ll_J m_2/0$ olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $m_1 \oplus m_2 = 1$ gereği $m_1 \vee m_2 = 1$ ve $m_1 \wedge m_2 = 0$ olur. $x \in m_1/0$ için $Rad(m_1/x) = m_1$ ve $a_1 \vee x = m_1$ olsun. Buradan $a_1 \vee a_2 \vee x = m_1 \vee a_2$ ve dolayısıyla

$$(a_1 \vee a_2) \vee (x \vee m_2) = (m_1 \vee m_2) \vee a_2 = 1$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} 1/(x \vee m_2) &= (m_1 \vee m_2)/(x \vee m_2) = [(x \vee m_2) \vee m_1]/(x \vee m_2) \\ &\cong m_1/[(x \vee m_2) \wedge m_1] \\ &= m_1/[x \vee (m_1 \wedge m_2)] \\ &= m_1/x \end{aligned}$$

olduğundan $Rad(1/(x \vee m_2)) = 1$ olur. $(a_1 \vee a_2) \vee (x \vee m_2) = 1$ olduğu da dikkate alınırsa $a_1 \vee a_2 \ll_J L$ gereği $x \vee m_2 = 1$ bulunur. Buradan $(x \vee m_2) \wedge m_1 = 1 \wedge m_1 = m_1$ olur. $x \leq m_1$ olduğundan modüler kural gereği $x \vee (m_1 \wedge m_2) = m_1$ yani $x = m_1$ bulunur. O halde $a_1 \ll_J L$ olur. Benzer adımlarla, $a_2 \ll_J L$ olduğu görülebilir.

$\Leftarrow$: $a_1 \ll_J m_1/0$ ve $a_2 \ll_J m_2/0$ olsun. Önerme 4.9 gereği $a_1 \ll_J L$ ve $a_2 \ll_J L$ bulunur. Önerme 4.7 dikkate alındığında $a_1 \vee a_2 \ll_J L$ elde edilir. $\square$

4.2. J -Tümlemiş Kafesler

4.2 Tanım L bir kafes ve $a \in L$ olsun. Bir $b \in L$ için $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b \ll_J b/0$ oluyorsa b elemanına a 'nın L içinde J -tümleyeni denir. L kafesinin tüm elemanlarının L içinde bir J -tümleyeni varsa L 'ye J -tümlemiş kafes denir.

4.12 Yardımcı Teorem L bir kafes, $q, y \in L$ ve y, q 'nın J -tümleyeni ise $Rad(y/x) = y$ olacak biçimde her $y \geq x \in L$ için $x \vee q = 1$ iken $x = y$ olur.

Kanıt $q, y \in L$ ve y, q 'nın J -tümleyeni olduğundan $y \vee q = 1$ ve $y \wedge q \ll_J y/0$ bulunur. $Rad(y/x) = y$ olacak biçimde bir $y \geq x \in L$ için $x \vee q = 1$ olsun. $x \leq y$ olduğundan modüler kural gereği $(y \wedge q) \vee x = y \wedge (q \vee x) = y \wedge 1 = y$ elde edilir. $(y \wedge q) \vee x = y$, $Rad(y/x) = y$ olduğu ve $y \wedge q \ll_J y/0$ gerçeği dikkate alınırsa $x = y$ bulunur. $\square$

4.13 Önerme L bir J -tümlemiş kafes ve $n \in L$ ise $1/n$ bölüm alt kafesi de J -tümlemiştir.

Kanıt $k \in 1/n$ olsun. $k \in 1/n \subseteq L$ ve L J -tümlemiş olduğundan, öyle bir $l \in L$ vardır ki

$k \vee l = 1$ ve $k \wedge l \ll_J l/0$ olur. $l \vee n \in 1/n$ elemanının, k 'nın $1/n$ içinde bir J -tümleyeni olduğunu, yani $k \vee (l \vee n) = 1_{1/n} = 1$ ve $k \wedge (l \vee n) \ll_J (l \vee n)/n$ olduğunu gösterelim. $k \vee l = 1$ olduğundan $k \vee (l \vee n) = 1$ bulunur. $Rad((l \vee n)/x) = l \vee n$ ve $[k \wedge (l \vee n)] \vee x = 1_{(l \vee n)/n} = l \vee n$ olacak şekilde bir $x \in (l \vee n)/n$ alalım. $k \in 1/n$ yani $n \leq k$ olduğundan modüler kural gereği

$$[(k \wedge l) \vee n] \vee x = [k \wedge (l \vee n)] \vee x = l \vee n$$

elde edilir. $x \in (l \vee n)/n$ olduğundan $n \leq x$ yani $n \vee x = x$ bulunur. Buradan,

$$(k \wedge l) \vee x = [(k \wedge l) \vee n] \vee x = l \vee n$$

bulunur. $k \wedge x \ll_J l/0$ ve $l/0 \subseteq (l \vee n)/0$ olduğundan Önerme 4.9 gereği $k \wedge x \ll_J (l \vee n)/0$ elde edilir. $(k \wedge l) \vee x = l \vee n$, $Rad((l \vee n)/x) = l \vee n$ ve $k \wedge x \ll_J (l \vee n)/0$ olduğundan $x = l \vee n$ bulunur. O halde $k \wedge (l \vee n) \ll_J (l \vee n)/n$ elde edilir. Yani $(l \vee n) \in 1/n$, k 'nın $1/n$ içinde bir J -tümleyenidir. O halde $1/n$ kafesi J -tümlenmiştir. $\square$

4.14 Önerme L bir kafes, $n, u \in L$ ve $n/0$ J -tümlenmiş kafes olsun. $n \vee u$ elemanının L içinde bir J -tümleyeni varsa u elemanının da L içinde bir J -tümleyeni vardır.

Kanıt $n \vee u$ elemanının L içinde bir J -tümleyeni olduğundan, öyle bir $x \in L$ vardır ki,

$$(n \vee u) \vee x = 1 \tag{4.1}$$

ve

$$(n \vee u) \wedge x \ll_J x/0 \tag{4.2}$$

olur. $(x \vee u) \wedge n \in n/0$ ve $n/0$ kafesi J -tümlenmiş olduğundan, öyle bir $y \in n/0$ vardır ki,

$$[(x \vee u) \wedge n] \vee y = n \tag{4.3}$$

ve $[(x \vee u) \wedge n] \wedge y \ll_J y/0$ olur. $y \in n/0$ gereği $y \leq n$ olur ve dolayısıyla $(x \vee u) \wedge y \ll_J y/0$ bulunur. 4.3 denklemi 4.1 denkleminde yerine yazılırsa, $[(x \vee u) \wedge n] \vee y \vee u \vee x = u \vee x \vee y = 1$ elde edilir. $(x \vee u) \vee y = 1$ ve

$$(x \vee u) \wedge y \ll_J y/0 \tag{4.4}$$

olduğundan y elemanı $x \vee u$ elemanının L içinde bir J -tümleyenidir. $x \vee y$ elemanının L içinde u elemanının bir J -tümleyeni olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $u \vee (x \vee y) = 1$ ve $u \wedge (x \vee y) \ll_J (x \vee y)/0$ olmalıdır. $u \wedge (x \vee y) \ll_J (x \vee y)/0$ olduğunu görmek için, $y \in n/0$ olduğundan $y \leq n$ olur. Buradan $y \vee u \leq n \vee u$ ve dolayısıyla $x \wedge (y \vee u) \leq x \wedge (n \vee u)$ bulunur. $x \wedge (n \vee u) \ll_J x/0$ ve Önerme 4.6 gereği

$$x \wedge (y \vee u) \ll_J x/0 \quad (4.5)$$

bulunur. 4.4, 4.5 ve Önerme 4.9 dikkate alınırse $(x \vee u) \wedge y \ll_J (x \vee y)/0$ ve $x \wedge (y \vee u) \ll_J (x \vee y)/0$ elde edilir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 2.7 gereği

$$(x \vee y) \wedge u \leq [x \wedge (y \vee u)] \vee [y \wedge (x \vee u)]$$

olur. $x \wedge (y \vee u) \ll_J (x \vee y)/0$ ve $y \wedge (x \vee u) \ll_J (x \vee y)/0$ dikkate alındığından Önerme 4.7 gereğince

$$(x \vee y) \wedge u \leq [x \wedge (y \vee u)] \vee [y \wedge (x \vee u)] \ll_J (x \vee y)/0$$

elde edilir. O halde Önerme 4.6 gereği $(x \vee y) \wedge u \ll_J (x \vee y)/0$ bulunur. $u \vee (x \vee y) = 1$ ve $u \wedge (x \vee y) \ll_J (x \vee y)/0$ olduğundan $x \vee y$, u 'nun L içinde bir J -tümleyenidir. $\square$

4.15 Önerme L bir kafes $m_1, m_2 \in L$ ve $m_1 \oplus m_2 = 1$ olsun. $m_1/0$ ve $m_2/0$ kafeslerinin J -tümlenmiş olmaları için gerek ve yeter şart L 'nin J -tümlenmiş olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $u \in L$ olsun. $0, 1$ 'in L içinde bir J -tümleyenidir. Gerçekten her $k \in 1/0 = L$ için $(1 \wedge 0) \vee k = 1$ ise $k = 0 \vee k = 1$ olur. O halde $1 \vee 0 = 1$ ve $1 \wedge 0 \ll_J L$ olduğundan $0, 1$ 'in L içinde bir J -tümleyenidir. Diğer taraftan, $m_1 \oplus m_2 = 1$ olduğundan $m_1 \vee m_2 = 1$ ve $m_1 \wedge m_2 = 0$ olur. Bu durumda $1 = m_1 \vee m_2 \vee u$ elemanı L içinde bir J -tümleyene sahip ve $m_1/0$ J -tümlenmiş olduğundan Önerme 4.14 gereği $m_2 \vee u$ elemanının da L içinde bir J -tümleyeni vardır. Benzer şekilde $m_2 \vee u$ L içinde bir J -tümleyene sahip ve $m_2/0$ J -tümlenmiş olduğundan yine Önerme 4.14 gereği u , L içinde bir J -tümleyene sahiptir.

$\Leftarrow$: L , J -tümlenmiş bir kafes olsun. Bu durumda Önerme 4.13 gereği $1/m_2$ kafesi de J -tümlenmiş olur. Ayrıca,

$$m_1/0 = m_1/(m_1 \wedge m_2) \cong (m_1 \vee m_2)/m_2 = 1/m_2$$

olduğu dikkate alınırse, $m_1/0$ kafesi de J -tümlenmiş bulunur. Benzer adımlarla, $m_2/0$ kafesinin de J -tümlenmiş olduğu görülebilir. $\square$

4.16 Önerme L bir kafes ve $q, y \in L$ ve y, q 'nun L içinde bir J -tümleyeni olsun. Bu takdirde her $q \geq b \in L$ için $y \vee b$ elemanı q 'nun $1/b$ içinde J -tümleyeni olur.

Kanıt y, q 'nun L içinde bir J -tümleyeni olsun. O halde $y \vee q = 1$ ve $y \wedge q \ll_J y/0$ olur. $b \in L$ için, Önerme 4.4 gereği, $(y \wedge q) \vee b \ll_J (y \vee b)/b$ elde edilir. $b \leq q$ olduğundan modüler kural gereği, $(y \wedge q) \vee b = (y \vee b) \wedge q$ bulunur. Buradan, $(y \vee b) \wedge q \ll_J (y \vee b)/b$ bulunur

ve $(y \vee b) \vee q = y \vee (b \vee q) = y \vee q = 1$ olduğu dikkate alınırsa, $y \vee b$ elemanının q 'nın $1/b$ içinde J -tümleyeni olduğu görülür. $\square$

4.17 Önerme L bir kafes ve $y \in L$, L içinde bir J -tümleyen eleman olsun. Bu takdirde, $y \geq s \in L$ için, y elemanı $1/s$ kafesi içinde de J -tümleyen elemanı olur.

Kanıt y , L içinde J -tümleyen olduğundan, öyle bir $y' \in L$ vardır ki $y \vee y' = 1$ ve $y \wedge y' \ll_J y/0$ olur. $y' \vee s \in 1/s$ için $y \vee (y' \vee s) = 1$ olduğu açıktır. $y \wedge (y' \vee s) \ll_J y/s$ olduğunu görebilmek için, $Rad(y/k) = y$ ve $[y \wedge (y' \vee s)] \vee k = y$ olacak biçimde bir $k \in y/s$ alalım. $s \leq k$ ve $s \leq y$ olduğundan modüler kural gereği,

$$y = [y \wedge (y' \vee s)] \vee k = [(y \wedge y') \vee s] \vee k = (y \wedge y') \vee (s \vee k) = (y \wedge y') \vee k$$

bulunur. O halde, $(y \wedge y') \vee k = y$, $Rad(y/k) = y$ olduğu ve $y \wedge y' \ll_J y/0$ durumu dikkate alınırsa $k = y$ elde edilir. Sonuç itibariyle, $y \wedge (y' \vee s) \ll_J y/s$ bulunur. O halde y , $y' \vee s \in 1/s$ elemanının $1/s$ içinde J -tümleyeni olup y , $1/s$ içinde J -tümleyen elemandır. $\square$

4.18 Önerme L bir kafes, $q, y \in L$ ve y , q 'nın L içinde bir J -tümleyeni olsun. Bu takdirde $k \ll_J L$ ise y , $q \vee k$ 'nın da L içinde bir J -tümleyeni olur.

Kanıt y , q 'nın L içinde bir J -tümleyeni olduğundan $y \vee q = 1$ ve $y \wedge q \ll_J y/0$ bulunur. $y \vee (q \vee k) = 1$ olduğu açıktır. $y \wedge (q \vee k) \ll_J y/0$ olduğunu görebilmek için, $Rad(y/x) = y$ ve $[y \wedge (q \vee k)] \vee x = y$ olacak biçimde $x \in y/0$ alalım. Buradan,

$$1 = y \vee (q \vee k) = [y \wedge (q \vee k)] \vee x \vee (q \vee k) = k \vee (q \vee x)$$

bulunur. Ayrıca,

$$1/(q \vee x) = (y \vee q \vee x)/(q \vee x) = y \vee (q \vee x)/(q \vee x) \cong y/(q \vee x) \wedge y = y/(x \vee (q \wedge y))$$

bulunur. $Rad(y/x) = y$ olduğundan Önerme 4.1 gereği $Rad(y/(x \vee (q \wedge y))) = y$ olur. $1/(q \vee x) \cong y/(x \vee (q \wedge y))$ izomorfizması gereği $Rad(1/(q \vee x)) = 1$ bulunur. $k \ll_J L$ olduğundan $q \vee x = 1$ elde edilir. y , q 'nın bir J -tümleyeni, $x \leq y$ ve $Rad(y/x) = y$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.12 gereği $q \vee x = 1$ olması $x = y$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $y \wedge (q \vee k) \ll_J y/0$ olduğu bulunur. y , $q \vee k$ 'nın da L içinde bir J -tümleyeni olur. $\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında J -küçük elemanlar ve J -tümlenmiş kafesler tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Yapılan çalışmalar kullanılarak, J -oyuk kafesler tanımlanabilir. Benzer şekilde, J -tümlenmiş kafesin tanımını zayıflatılarak, zayıf J -tümlenmiş kafesler tanımlanabilir ve bu kafeslerin J -tümlenmiş kafesler ile ilişkileri incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Biçer, Ç. (2018). $\oplus$ -tümlemiş kafes ve rad - $\oplus$ -tümlemiş kafesler (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Cohn, P. M. (2002). *Basic algebra: Groups, rings and field*. London: Springer-Verlag. ISBN: 978-0-85729-428-9.
- Călugăreanu, G. (2000). *Lattice concepts of module theory*. London: Kluwer Academic Publisher. ISBN: 978-0-7923-6488-7.
- Davey, B. A., ve Priestley, H. A. (2002). *Introduction to lattice and order* (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 780521784511.
- Dilworth, R. P., ve Crawley, P. (1960). Decomposition theory for lattices without chain conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 96(1), 1–22.
- Kabban, A., ve Khalid, W. (2019). On jacobson-small submodules. *Iraqi Journal of science*, 60(7), 1584–1591. doi: 10.24996/ij.s.2019.60.7.18
- Kasch, F., ve Mares, E. A. (1966). Eine Kennzeichnung semi-perfekter Moduln. *Nagoya Mathematical Journal*, 27(P2), 525–529. doi: 10.1017/S0027763000026350
- Roman, S. (2008). *Lattices and ordered sets* (2009th ed.). New York: Springer. ISBN: 978-0-387-78900-2.
- Toksoy, S. E. (2008). *Kafeslerde tümleyenler* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Çetindil, Y. (2005). *Generalization of cofinitely supplemented modules to lattices* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Ökten, H. H. (2016). *g_* -tümlemiş ve g_* -yükseltilebilir kafesler* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Sündüs KAZANCI

Eğitim Derecesi **Okul/Program** **Mezuniyet Yılı**

Lisans Gaziosmanpaşa Üniversitesi 2006

Matematik Bölümü

İş Deneyimi/Yıl **Çalıştığı Yer** **Görevi**

2012-... Milli Eğitim Bakanlığı Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce