



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ URYSOHN UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ERKUL

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342410 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Kübra ERKUL tarafından hazırlanan “**GENELLEŞTİRİLMİŞ URYSOHN UZAYLAR**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 20/01/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Genelleştirilmiş Urysohn Uzayları konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Kübra ERKUL

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını veren, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı annem Ayşe ERKUL, babam Tuncay ERKUL ve kardeşim Kayra Çağan ERKUL'a teşekkür ederim.

Kübra ERKUL
AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	3
2.1. Topolojik Uzaylar	3
2.2. Süreklilik	4
2.3. Ayırma Aksiyomları	5
2.4. Urysohn Uzaylar	5
3. SEMİ TOPOLOJİK KAVRAMLAR	12
3.1. Semi-Açık Ve Semi-Kapalı Kümeler	12
3.2. Semi-Süreklilik	20
4. SEMİ-URYSOHN VE S-URYSOHN UZAYLAR	22
4.1. Semi-Urysohn Uzaylar	22
4.2. S-Urysohn Uzaylar	24
5. PRE TOPOLOJİK KAVRAMLAR	29
5.1. Pre-Açık Ve Pre-Kapalı Kümeler	29
5.2. Pre-Süreklilik	36
6. PRE-URYSOHN VE P-URYSOHN UZAYLAR	39
6.1. Pre-Urysohn Uzaylar	39
6.2. P-Urysohn Uzaylar	43
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

YÜKSEK LİSANS TEZİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ URYSOHN UZAYLAR

Kübra ERKUL

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Genelleştirilmiş Urysohn uzaylar, açık küme kavramı yerine semi-açık ve pre-açık kavramları kullanılarak tanımlanır. (X, τ) topolojik uzayında $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$ olacak şekilde bir U açığı varsa A alt kümesine semi-açıktır ve ayrıca $B \subseteq (\bar{B})^\circ$ ise B ye pre-açıktır denir. Semi-açık (pre-açık) kümelerin tümleyeni semi-kapalı (pre-kapalı) kümelerdir.

Bu tezin ana hedefleri aşağıdaki gibidir:

1. Semi-açık ve pre-açık kavramlarından yararlanılarak elde edilen semi-Urysohn, s-Urysohn, pre-Urysohn ve p-Urysohn olarak adlandırılan uzayları tanımlamak ve özelliklerini incelemek,
2. Genelleştirilmiş Urysohn uzayların kalıtsal ve çarpımsallıklarını belirlemek,
3. Semi-açık ve pre-açık kavramlar kullanarak elde edilen semi-süreklilik, pre-süreklilik, θ -süreklilik, θ -irresolute, θ -pre-irresolute gibi yeni dönüşümler altında genelleştirilmiş Urysohn uzayların özelliklerini araştırmak.

Anahtar Kelimeler: Semi-Açık Küme, Pre-açık Küme, Semi-Urysohn Uzaylar, Pre-Urysohn Uzaylar.

Ocak, 2023; 53 sayfa

M. Sc. THESIS

GENERALIZED URYSOHN SPACES

Kübra ERKUL

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

Generalized Urysohn spaces are defined by using the concepts of semi-open and pre-open set instead of open set. A subset a topological space A of (X, τ) is said to be semi-open if there exists an open set U in X such that $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$ and also B is pre-open if $B \subseteq (B)^\circ$. The complements of semi-open sets (pre-open) are called semi-closed (pre-closed).

The main goals of this thesis are as follows:

1. To define and examine the spaces called semi-Urysohn, s-Urysohn, pre-Urysohn, and p-Urysohn spaces by using the concepts of semi-open sets and pre-open sets,
2. To determine the hereditariness ve productivity of generalized Urysohn spaces,
3. To investigate properties of generalized Urysohn spaces under new mappings such as semi-continuity, pre-continuity, θ -continuity, θ -irresolute, θ -pre-irresolute obtained using semi-open and pre-open concepts.

Keywords: Semi-Open Sets, Pre-Open Sets, Semi-Urysohn Spaces, Pre-Urysohn Spaces.

January, 2023; 53 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Arens kare topolojisi.....	7
Şekil 2.2. İrrasyonel eğim topolojisi.....	7
Şekil 5.1. Açık kümeler arasındaki ilişki	36



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Bir (X, τ) topolojik uzayında kapanış ve iç kavramlarının özellikleri.....	3
Çizelge 3.1. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık kümelerin sınıfı	14
Çizelge 3.2. (X, τ) topolojik uzayındaki alt kümelerin semi-kapanışı.....	15
Çizelge 3.3. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi-kapalılarının sınıfı.....	16
Çizelge 4.1. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi kapalı kümeler	22
Çizelge 4.2. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi kapalı kümeler	25
Çizelge 5.1. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-açık kümeler	33
Çizelge 5.2. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-kapalı kümeler	33
Çizelge 6.1. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-açık ve pre-kapalı kümeler	44
Çizelge 6.2. (X, τ) topolojik uzayındaki tüm alt kümelerin pre-kapanışları	45



SİMGELER VE KISALTMALAR

A^o	A nın İçi
$\overline{A}$	A nın Kapanışı
A^s	A nın Semi-İçi
$\tilde{A}$	A nın Semi-Kapanışı
A^p	A nın Pre-İçi
$\hat{A}$	A nın Pre-Kapanışı
$PCI(X, \tau)$	Pre-Kapalı Kümelerin Sınıfı
$PO(X, \tau)$	Pre-Açık Kümelerin Sınıfı
$SCI(X, \tau)$	Semi-Kapalı Kümelerin Sınıfı
$SO(X, \tau)$	Semi-Açık Kümelerin Sınıfı



1. GİRİŞ

Genel topolojide ayırma aksiyomlarının genelleştirmeleri son yıllarda pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Örneğin *zayıf Frechet-Urysohn* uzaylar [1], *anti-Urysohn* uzaylar [2], *semi-Urysohn* uzaylar, *s-Urysohn* uzaylar [3-6], *pre-Urysohn* uzaylar [7], *p-Urysohn* uzaylar [8], *ultra-Hausdorff* uzaylar [9], *semi-Hausdorff* uzaylar [10], *zayıf-Hausdorff* uzaylar [11], *p-regüler* uzaylar [12], *s-regüler* uzaylar [13] bu genelleştirmelerden bazılarıdır.

1693 yılında Levine [14] *semi-açık* kavramını ortaya atmış ve şu şekilde tanımlamıştır: Bir (X, τ) topolojik uzayındaki U açığı için $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde $A \subseteq X$ varsa A ya *semi-açıktır* denir. 1972 yılında, Crossley ve Hildebrand [15] *semi-homeomorfizm* tanımını vererek *semi-homeomorfizm* altında korunan özelliklerin *semi-topolojik* özellik olduğunu ifade etmişler ve bazı topolojik özelliklerin *semi-topolojik* olduğunu ispatlamışlardır. 1992 yılında Bhamini v.d. [6] topolojik özelliğin *semi-topolojik* özellik olup olmadığını belirlemeye yarayan matematiksel bir tekniği elde etmişlerdir. Bu tekniği *s-Urysohn* uzayı [5], *s-regüler* uzayı [4], *semi-normal* uzayı [16] ve T_D -uzayı [17,18] olmanın *semi-topolojik* olup olmadığını göstermek için kullanmışlardır.

Semi-Urysohn ve *s-Urysohn* olarak adlandırılan Urysohn uzayların farklı iki genelleştirmesi 1983-1992 yılları arasında Arya ve Bhamini [4-6] tarafından verilmiş ve şu şekilde tanımlanmışlardır: Bir topolojik uzaydaki farklı nokta çiftlerinin kapanışları (*semi-kapanışları*) ayrık olan *semi-açık* kümeleri olması uzayın *s-Urysohn* (*semi-Urysohn*) olması demektir. 1982 yılında, Mashhour [19] *pre-açık* kavramının çeşitli özelliklerini vermiş ve şu şekilde tanımlamıştır: Bir topolojik uzayda $B \subseteq X$ için $B \subseteq (\overline{B})^o$ ise B ye *pre-açıktır* denir. Mashhour v.d. [19] *pre-süreklilik* kavramını ortaya atarak *pre-açık* fonksiyonu tanımladılar. 1983 yılında, El-Deeb v.d. [12] *p-regüler* uzaylara giriş yaptı. 1996 yılında, Pal ve Bhattacharyya [8] *pre-Urysohn* uzay tanımını şu şekilde yaptılar: Bir topolojik uzaydaki farklı her nokta çiftinin *pre-kapanışları* ayrık olan *pre-açık* kümeler olması uzayın *pre-Urysohn* olması demektir. 1999 yılında, Paul ve Bhattacharyya [20] *pre-Urysohn* uzayların temel özellikleri üzerine çalışma yaptılar ve bilinen diğer uzaylar ile olan ilişkilerini ifade ve ispat ettiler. 2011 yılında, Navalagi [21] Urysohn uzaylarının farklı bir genellemesi

olan p -Urysohn uzaylarına giriş yaptı ve şu şekilde tanımladı: Bir topolojik uzaydaki farklı her nokta çiftinin kapanışları ayrık olan pre-açık kümeleri olması uzayın p -Urysohn olması demektir.

Bu tez çalışmasında literatürde $T_{2\frac{1}{2}}$ uzayı olarak bilinen Urysohn uzaylarının genelleştirmesi olan s -Urysohn, $semi$ -Urysohn, p -Urysohn, pre -Urysohn uzaylarının eğer varsa hem birbirleri ile hem de Urysohn uzayları ile olan geçişleri belirtilmiş, özellikleri verilmiş ve bu uzayların kalıtsal, çarpımsal ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

Son olarak bu uzaylar arasında semi-açık ve pre-açık kavramlar kullanarak elde edilen semi-süreklilik, pre-süreklilik, θ -süreklilik, θ -irresolute ve θ -pre-irresolute gibi dönüşümler altındaki durumlar incelenmiştir.

Bu çalışma boyunca daha önce yapılan çalışmalarda kullanılan notasyonlar ile çelişmemesi adına ve kavramsal karışıklığa neden olmamak için “yarı” yerine “semi” kelimesi kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Topolojik Uzaylar

Bu bölümde topolojik uzaylar ile ilgili, çalışmanın diğer kısımlarında kullanılacak kavramların tanımları, teoremler, önerme ve lemmalara yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (1) $X \neq \emptyset$ küme ve τ da X in kuvvet kümesi $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine ise topolojik uzay denir [22].

- (i) $\emptyset, X \in \tau$,
- (ii) $U, V \in \tau$ olduğunda $U \cap V \in \tau$,
- (iii) Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(2) (X, τ) topolojik uzayında τ nun elemanlarına açık kümeler denir. Eğer $U \subseteq X$ için U^c açık ise U ya kapalı küme denir [22].

(3) (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ nın kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine A nın içi denir ve A^o şeklinde gösterilir. A yı kapsayan kapalı kümelerin kesişimine ise A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ şeklinde gösterilir [22].

Önerme 2.1.2 ([22,23]) (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

Çizelge 2.1. (X, τ) topolojik uzayında kapanış ve iç kavramlarının özellikleri.

$A^o \subseteq A$	$A \subseteq \bar{A}$
A^o açıktır	$\bar{A}$ kapalıdır
A^o açıktır $\Leftrightarrow A^o = A$	A kapalıdır $\Leftrightarrow A = \bar{A}$
$(A^o)^o = A^o$	$\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$
A^o , A nın kapsadığı en geniş açık kümedir	$\bar{A}$, A yı kapsayan en dar kapalı kümedir
$A \subseteq B$ ise $A^o \subseteq B^o$	$A \subseteq B$ ise $\bar{A} \subseteq \bar{B}$
$A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$	$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
$A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Teorem 2.1.3 (X, τ) topolojik uzay, $U \subseteq A \subseteq X$ olsun. U nun τ_A alt topolojisine göre A daki kapanışı $\overline{U_A}$ olmak üzere $\overline{U_A} = \overline{U} \cap A$ dır.

2.2 Süreklilik

Tanım 2.2.1 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $x \in X$ için $y = f(x)$ olsun.

(1) (Süreklilik) $f(x)$ in her V açık komşuluğu için x in en az bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $f(U) \subset V$ ise f ye x de süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir [22,23].

(2) (Homeomorfizm) f bire bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f ye homeomorfizm denir [22,23].

(3) (Zayıf-süreklilik) $f(x)$ in her V açık komşuluğu için x in en az bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $f(U) \subset \overline{V}$ ise f ye x de zayıf-sürekli denir. f , X in her noktasında zayıf-sürekli ise f ye zayıf-süreklidir denir [24].

(4) (θ -süreklilik) $f(x)$ in her V açık komşuluğu için x in en az bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ ise f ye x noktasında θ -sürekli denir. f , X in her noktasında θ -sürekli ise f ye θ -süreklidir denir [25].

Teorem 2.2.2 ([22,23]) (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon, K ve K' ise τ ve σ deki kapalı kümelerin ailelerini gösterebilir. Aşağıdakiler denktir:

- (i) f süreklidir,
- (ii) $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \tau$,
- (iii) $B \in K'$ için $f^{-1}(B) \in K$,
- (iv) $A \subset X$ için $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,
- (v) $C \subset Y$ için $f^{-1}(C^o) \subset (f^{-1}(C))^o$.

2.3 Ayırma Aksiyomları

Topoloji ile ilgili bazı problemlerin çözümünde karşılaşılan sorunların giderilmesi için topolojik uzaylar üzerine bazı sınırlamalar getirmek gerekir. Değişik yapıları, bazı özelliklere sahip olan sınıflara ayırıp her sınıfın özelliklerini ayrı ayrı incelemek daha kolay ve yararlı olmaktadır. Bu amaçla “Ayırma Aksiyomları” denilen bir sınıflandırma yapılmış ve bu aksiyomlar “Trennungsaxiom” kelimesinin baş harfi alınarak T_0 , T_1 , T_2 , ... şeklinde gösterilmiştir. Temel düşünce, ayırık olan kümelerin veya farklı noktaların birbirinden açık komşuluklara ayrılması ilkesine dayalıdır.

Tanım 2.3.1 ([22]) (X, τ) topolojik uzay olsun.

- (1) (**T_1 uzayı**) $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için $x \in U$, $y \notin U$ ve $y \in V$, $x \notin V$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa (X, τ) ya T_1 uzayı denir.
- (2) (**T_2 uzayı**) $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U$, $y \in V$ açıkları varsa (X, τ) ya T_2 uzay veya Hausdorff uzay denir.
- (3) (**Regüler uzay**) K kapalı küme ve $x \notin K$ ise $K \subseteq U$ ve $x \in V$ olacak şekilde U ve V ayırık açıkları varsa (X, τ) ya regüler uzay denir.
- (4) (**T_3 uzayı**) Regüler olan bir T_1 uzayına bir T_3 uzayı denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayı T_3 ise T_2 ve T_2 ise T_1 olduğu bilinmektedir. Fakat bu ifadelerin tersleri genelde doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ deki tümleyenli sonlu $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} \mid G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi için (X, τ) uzayı T_1 olmasına rağmen T_2 değildir. Eğer T_2 olsaydı $a \neq b$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde a ve b nin sırasıyla U ve V açık komşulukları olurdu. Burada $U^c \cup V^c = \mathbb{R}$ olup bu ise bir çelişkidir.

2.4 Urysohn Uzayları

Tanım 2.4.1 (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $\forall x, y \in X$ nokta çifti için $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V açık komşulukları varsa (X, τ) ya Urysohn uzayı denir.

Örnek 2.4.2 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay Urysohn'dur. Her $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olmak üzere

$$x \in \left(x - \frac{\varepsilon}{5}, x + \frac{\varepsilon}{5}\right) = U, y \in \left(y - \frac{\varepsilon}{5}, y + \frac{\varepsilon}{5}\right) = V$$

olarak seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur.

(2) $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay Urysohn'dur. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ alınırsa $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ dur.

(3) (X, τ) indiskre topolojik uzay Urysohn değildir. Her $x, y \in X$ için $x \in U, y \in V$ olmak üzere $V, U \in \tau$ için $U = X = V$ seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = X \cap X = X \neq \emptyset$ dir.

(4) X sonlu bir küme olsun. (X, τ) uzayı Urysohn'dur ancak ve ancak $\tau = P(X)$ dir.

Tanım 2.4.3 (Arens Kare Topolojisi) ([26]) A birim karenin bir alt kümesi olmak üzere $A = \{(i, j) : 0 < i < 1, 0 < j < 1, i, j \in \mathbb{Q}\} \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, j\right) : j \in \mathbb{Q}\right\}$ olsun. Yani birim kare içindeki birinci bileşeni $\frac{1}{2}$ dışında olan tüm rasyonel koordinatlı noktaların kümesidir.

$$X = A \cup \{(0,0), (1,0)\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) : r \in \mathbb{Q}, 0 < r\sqrt{2} < 1\right\}$$

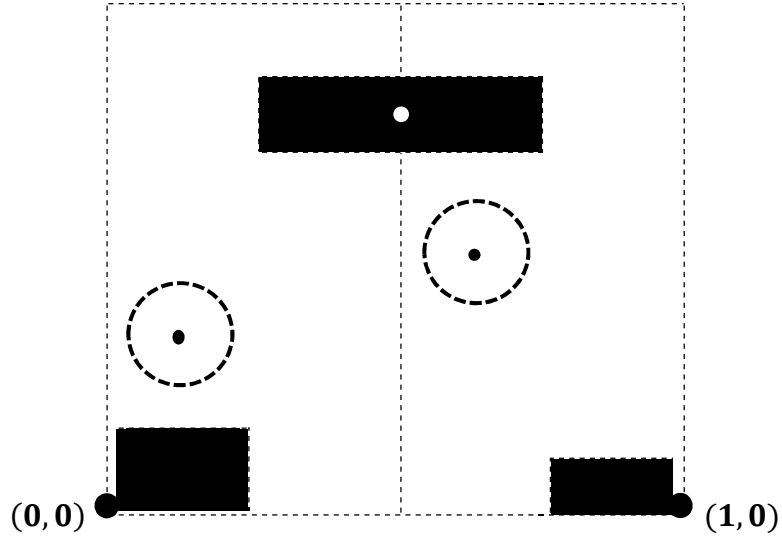
$\mathfrak{B}$, X den elde edilen τ topolojisinin bazı şu şekilde tanımlanır. A nın her noktasına birim karedeki Öklid topolojisinden elde edilen açık kümelerin yerel bazı alınır. A dışında bulunan X deki kalan diğer noktalar için ise aşağıdaki yerel bazlar vardır.

$$U_n(0,0) = \left\{(x, y) : 0 < x < \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{n}\right\} \cup \{(0,0)\}$$

$$U_n(1,0) = \left\{(x, y) : \frac{3}{4} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n}\right\} \cup \{(1,0)\}$$

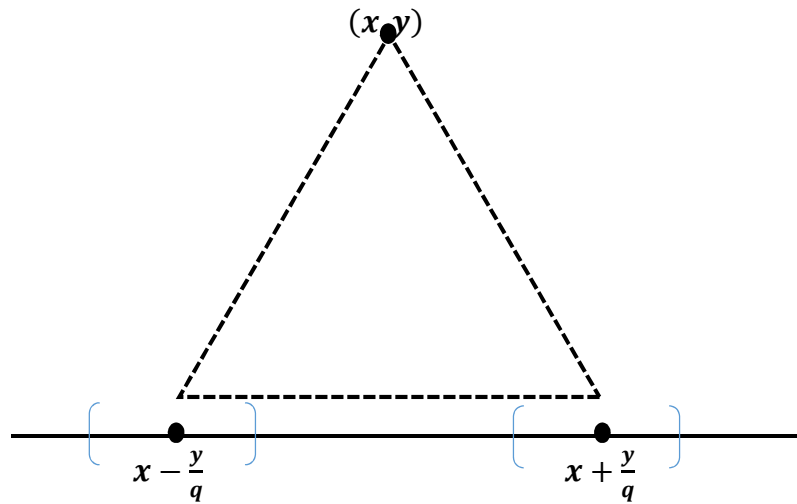
$$U_n\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) = \left\{(x, y) : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, |y - r\sqrt{2}| < \frac{1}{n}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. X in her bir noktasında lokal baz mevcut olduğu için bu lokal bazların birleşimi τ topolojisi için bir baz oluşturur. Bu $\mathfrak{B}$ bazı tarafından üretilen (X, τ) topolojisine Arens kare topolojisi denir.



Şekil 2.1. Arens kare topolojisi.

Tanım 2.4.4 (İrrasyonel Eğim Topoloji) ([26]) $X = \{(x, y) | y \geq 0, x, y \in \mathbb{Q}\}$ ve q irrasyonel bir sabit olsun. $\mathfrak{B}$, $B_\varepsilon(k) = \{r \in \mathbb{Q} : |r - k| < \varepsilon\}$ ise $\mathbb{Q}^2$ deki k merkezli ε yarıçaplı diskler olmak üzere $N_\varepsilon((x, y)) = \{(x, y)\} \cup B_\varepsilon\left(x + \frac{y}{q}\right) \cup B_\varepsilon\left(x - \frac{y}{q}\right)$ şeklindeki (x, y) nin ε komşuluklarının bir sınıfı olsun. Böylece her $N_\varepsilon((x, y))$ kümesi $\{(x, y)\}$ rasyonel bileşenli tek nokta kümesi ve orta noktaları $x \pm \frac{y}{q}$ irrasyonel olan rasyonel sayılar üzerindeki ε uzunluğundaki iki açık aralığın birleşiminden oluşur. Burada $\left(x \pm \frac{y}{q}, \circ\right)$ noktalarını (x, y) aralığına katan doğrular $\pm q$ eğimine sahip doğrulardır. $\mathfrak{B}$ dan elde edilen topolojiye İrrasyonel eğim topolojisi denir.



Şekil 2.2. İrrasyonel eğim topolojisi.

Önerme 2.4.5 (X, τ) topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ açık kümelerin sınıfı olsun. $\mathfrak{B}$ sınıfı bazdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathfrak{B} \mid x \in B\}$ sınıfı $x \in X$ de yerel bazdır.

İspat: Kabul edelim ki $\mathfrak{B}$ sınıfı baz, U da $x \in X$ in açık bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde x in $\mathfrak{B}$ da B açık komşuluğu vardır $x \in B \in \mathfrak{B}$. Böylece $\mathfrak{B}_x$ sınıfı $x \in X$ de yerel bazdır. Tersine olarak $x \in X$ için $\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathfrak{B} \mid x \in B\}$ sınıfı $x \in X$ noktasında yerel baz ve U açık bir küme olsun. Bu durumda her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak şekilde $B_x \in \mathfrak{B}_x$ vardır. Böylece $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ olup $\mathfrak{B}$ sınıfı bir bazdır. Bu önermenin sonucu olarak $\mathfrak{B}_x, x \in X$ noktasında lokal baz ise bu lokal bazların birleşimleri X deki τ için bir $\mathfrak{B}$ bazı oluşturur, yani $\mathfrak{B} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x$.

Teorem 2.4.6 Her Urysohn uzayı Hausdorff'dur.

İspat: (X, τ) uzayı Urysohn olsun. $\forall x, y \in X, x \neq y$ için x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V açık komşulukları vardır. Öyleki $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur. $U \subseteq \overline{U}$ ve $V \subseteq \overline{V}$ şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın kesişimini alırsak $U \cap V \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$. $U \cap V \subseteq \emptyset$ olur bu ise $U \cap V = \emptyset$ olması yani (X, τ) nun Hausdorff olmasıdır. Tersine genelde doğru değildir. Örneğin, (X, τ) Arens kare topolojik uzayı Hausdorff'tur. Çünkü $(0,1)^2 \cap \mathbb{Q}^2$ den alınan noktalar, $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarının hiçbirisi $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right)$ formunda ki bir nokta ile ikinci bileşenleri aynı olmaz. Fakat (X, τ) uzayı Urysohn değildir. Çünkü $f: X \rightarrow [0,1]$, $f((0,0)) = 0$ ve $f((1,0)) = 1$ gibi sürekli bir f fonksiyonu olduğundan $[0,1]$ üzerindeki alışılmış topolojiye göre olan $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ ve $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ açıkklarının ters görüntüleri X de açıktır. Bu ters görüntüler bazı $m, n \in \mathbb{N}$ için $U_n(0,0)$ ve $U_m(1,0)$ i içermesi gerekir. Eğer $r\sqrt{2} < \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$ ise $f\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) \notin \left[0, \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{3}{4}, 1\right] = \emptyset$.

Kabul edelim ki $f\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) \notin \left[0, \frac{1}{4}\right)$ olsun. Bu durumda en az bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $f\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) \in U$ olur ve $\overline{U} \cap \left[0, \frac{1}{4}\right) = \emptyset$ dur.

Fakat bu durumda $f^{-1}(\overline{U})$ ve $f^{-1}\left(\overline{\left[0, \frac{1}{4}\right)}\right)$ ters görüntüleri sırasıyla $\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right)$ ve $(0,0)$ açıklarını içeren ayırık kapalı kümelerdir. $r\sqrt{2} < \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$ olduğundan bazı $k \in \mathbb{N}$ için $U_k\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right)$ ve $U_n(0,0)$ içeren bu kapalı kümeler ayırık olamaz. $f\left(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right) \notin \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ içinde benzer ispat yapılır.

Teorem 2.4.7 Urysohn uzayın her alt uzayı da Urysohn'dur.

İspat: (X, τ) uzayı Urysohn ve $A \subseteq X$ olsun. Farklı $x, y \in A$ noktaları verilsin. X , Urysohn olduğundan $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla G ve H açıkları vardır. Böylece $U = G \cap A$ ve $V = H \cap A$ sırasıyla x ve y nin A da açık komşulukları olup $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{G \cap A} \cap \overline{H \cap A} \subseteq \overline{G} \cap \overline{H} \cap \overline{A} = \emptyset$ dur. Böylece (A, τ_A) alt uzayı Urysohn'dur.

Teorem 2.4.8 Urysohn uzayı olma topolojik bir özelliktir.

İspat: Kabul edelim ki $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir homeomorfizm ve (X, τ) uzayı Urysohn olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ farklı noktaları verilsin. Bu noktalara karşılık $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ farklı noktaları vardır. (X, τ) nun Urysohn olmasından $x_1 \in G$ ve $x_2 \in H$ olmak üzere $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde G ve H ayırık açıkları vardır. Buradan $y_1 \in f(G)$ ve $y_2 \in f(H)$ için $f(G)$ ve $f(H)$ açıkları vardır ki $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. f nin kapalılığından $\overline{f(G)} \subseteq f(\overline{G})$ ve $\overline{f(H)} \subseteq f(\overline{H})$ dir ve $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} \subseteq f(\overline{G}) \cap f(\overline{H})$ olur. $f(\overline{G}) \cap f(\overline{H}) \neq \emptyset$ olsaydı en az $z \in f(\overline{G}), z \in f(\overline{H})$ olurdu. f bire bir ve örtenliğinden $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{G}) = \overline{G}$ ve $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{H}) = \overline{H}$ olur. O halde $f^{-1}(z) \in \overline{G} \cap \overline{H}$ yazabiliriz ki $\overline{G} \cap \overline{H} \neq \emptyset$ dur. Bu da (X, τ) nun Urysohn olması ile çelişir. Böylece $f(\overline{G}) \cap f(\overline{H}) = \emptyset$ olur. Buradan $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} = \emptyset$ yazılır. Sonuç olarak y_1, y_2 nin Y de açık komşulukları vardır, yani (Y, σ) uzayı Urysohn'dur.

Teorem 2.4.9 Her T_3 uzayı Urysohn uzayıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) uzayı T_3 olsun. Her T_3 uzayı T_1 ve regülerdir. (X, τ) uzayı T_1 olduğundan her $\{y\}$ kümesi kapalıdır. Kabul edelim ki $x \neq y$ olsun. Uzay

regüler olduğundan $x \in U$ ve $\{y\} \subseteq V$ olmak üzere $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açıkları vardır. Diğer taraftan $x, y \in X$ ve x, y nin sırasıyla U, V açık komşuluğu için $\overline{G} \subseteq U$ ve $\overline{H} \subseteq V$ olacak şekilde x ve y nin G ve H açıkları vardır öyle ki $\overline{G} \cap \overline{H} \subseteq U \cap V$ den $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olur. Bu ise (X, τ) nin Urysohn olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.10 Her metrik uzay Urysohn'dur.

İspat: (X, d) metrik uzayının $a, b \in X$ için $a \neq b$ ve $d(a, b) = r > 0$ olduğunu kabul edelim. $a \in D\left(a, \frac{r}{4}\right)$ ve $b \in D\left(b, \frac{r}{4}\right)$ olmak üzere $D\left[a, \frac{r}{4}\right] \cap D\left[b, \frac{r}{4}\right] = \emptyset$ dur. Çünkü eğer $D\left[a, \frac{r}{4}\right] \cap D\left[b, \frac{r}{4}\right] \neq \emptyset$ olsaydı en az bir $x \in D\left[a, \frac{r}{4}\right] \cap D\left[b, \frac{r}{4}\right]$ olurdu. Buradan $x \in D\left[a, \frac{r}{4}\right], x \in D\left[b, \frac{r}{4}\right]$ yazılabilir.

$$x \in D\left[a, \frac{r}{4}\right] \text{ ise } d(a, x) \leq \frac{r}{4}$$

$$x \in D\left[b, \frac{r}{4}\right] \text{ ise } d(b, x) \leq \frac{r}{4}$$

$$r = d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$$

$r \leq \frac{r}{2}$ olur. Bu ise $D\left[a, \frac{r}{4}\right] \cap D\left[b, \frac{r}{4}\right] \neq \emptyset$ olması ile çelişir. $D\left[a, \frac{r}{4}\right] \cap D\left[b, \frac{r}{4}\right] = \emptyset$ olmalıdır yani (X, d) uzayı Urysohn'dur.

Teorem 2.4.11 Urysohn uzayında yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki Urysohn uzayında bir (x_n) dizisi a ve b gibi farklı iki değere yakınsak olsun. (X, τ) uzayı Urysohn ve $a \neq b$ olduğundan $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde a ve b nin sırasıyla G ve H açık komşulukları vardır. Diğer yandan $(x_n) \rightarrow a$ olduğundan $n > n_1$ için $x_n \in G$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $(x_n) \rightarrow b$ olduğundan $n > n_2$ için $x_n \in H$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olmak üzere $n > n_0$ için $x_n \in G \cap H \subseteq \overline{G \cap H} \subseteq \overline{G} \cap \overline{H}$ dır. Buradan $x_n \in \overline{G} \cap \overline{H}$ olur. Bu ise $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $a = b$ olmak zorundadır.

Teorem 2.4.12 Urysohn uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır.

İspat: (X, τ) Urysohn uzayı olsun. $a \in X$ için $x \in \{a\}^c$ ise x ve a farklı olup uzay Urysohn olduğundan $x \in G$, $a \in H$ ve $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açıkları vardır. Buradan $G \cap \{a\} \subseteq \overline{G} \cap \{a\} \subseteq \overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ dır. O halde $G \cap \{a\} = \emptyset$ olur ki bu ise $x \in G \subseteq \{a\}^c$ dır. Sonuç olarak $\{a\}^c$ açık yani $\{a\}$ kapalıdır.

Teorem 2.4.13 $\{(X_i, \tau_i) | i \in I\}$ sınıfı ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olsun. (X, τ_*) çarpım uzayı Urysohn'dur ancak ve ancak her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayı Urysohn'dur.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ_*) çarpım uzayı Urysohn olsun. Her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayı (X, τ_*) çarpım uzayının bir alt uzayına homeomorf olduğundan Teorem 2.4.7 den her bir (X_i, τ_i) uzayı Urysohn'dur.

Tersine olarak her bir (X_i, τ_i) uzayı Urysohn olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ çarpım uzayının Urysohn olduğunu göstereceğiz. Eğer $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ farklı noktalar ise $\exists i \in I$ için $x_i, y_i \in X_i$ noktaları farklıdır. Fakat her $i \in I$ için (X_i, τ_i) ler Urysohn olduğundan farklı $x_i, y_i \in X_i$ noktalarının sırasıyla $\overline{G_i} \cap \overline{H_i} = \emptyset$ olacak şekilde $x_i \in G_i$ ve $y_i \in H_i$ açık komşulukları vardır. Burada $\pi_i: X \rightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonun sürekliliğinden x ve y nin sırasıyla $\pi_i^{-1}(G_i)$ ve $\pi_i^{-1}(H_i)$ açıkları vardır. O halde

$$\overline{\pi_i^{-1}(G_i)} \cap \overline{\pi_i^{-1}(H_i)} \subseteq \pi_i^{-1}(\overline{G_i}) \cap \pi_i^{-1}(\overline{H_i}) = \pi_i^{-1}(\overline{G_i} \cap \overline{H_i}) = \emptyset$$

dur. Buradan $\overline{\pi_i^{-1}(G_i)} \cap \overline{\pi_i^{-1}(H_i)} = \emptyset$ olur. Sonuç olarak (X, τ_*) çarpım uzayı Urysohn'dur.

3. SEMİ TOPOLOJİK KAVRAMLAR

3.1 Semi-Açık, Semi-Kapalı Kümeler Ve Semi-Süreklilik

1963 yılında Levine [14], açık küme kavramını semi-açık kümeye genelleştirmiştir. 1972 yılında Crossley ve Hildebrand [15], semi-kapalı küme kavramına ilk referans olan isim oldular. Ardından 1987 yılında Bhattacharyya ve Lahiri [27], semi-açıklık yardımıyla semi-kapalı küme kavramını tanımlamışlardır.

Çalışmanın bu kısmında semi-açıklık ve semi-kapalı küme kavramları, teoremler ve uygulamalar verilmiştir.

Tanım 3.1.1 (Semi-açık küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $G \in \tau$ olsun. $G \subseteq A \subseteq \overline{G}$ olacak şekilde en az bir $G \subseteq X$ açığı varsa A ya semi-açık küme denir. (X, τ) daki tüm semi-açıkların sınıfı $SO(X, \tau)$ ile gösterilir [14].

Önerme 3.1.2 (X, τ) topolojik uzayında,

- (1) X ve $\emptyset$ kümeleri semi-açıktır,
- (2) Semi-açık kümelerin keyfi birleşimleri semi-açıktır,
- (3) Semi-açık kümelerin sonlu kesişimleri semi-açık olmayabilir.

İspat: (1) Her açık aynı zamanda semi-açık olduğundan ispat aşikârdır.

(2) $SO(X, \tau) = \{B_i \subseteq X | i \in I\}$ olsun. Böylece $\forall i \in I$ için $U_i \subseteq B_i \subseteq \overline{U_i}$ olacak şekilde U_i açığı vardır. $\forall i \in I$ için U_i ler açık olduğu için $\bigcup_{i \in I} U_i$ açıktır. Dahası $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ dir. $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ göstereceğiz. $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$ olsun. $i_0 \in I$ için $x \in B_{i_0}$ olur ki $U_{i_0} \subseteq B_{i_0} \subseteq \overline{U_{i_0}}$ dan $x \in \overline{U_{i_0}}$ dir. Böylece $x \in \overline{U_{i_0}} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{U_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ dir. Sonuç olarak $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ dir ki $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ dir, yani $\bigcup_{i \in I} B_i$ semi-açıktır.

(3) Semi-açıkların keyfi birleşimleri semi-açıktır fakat sonlu kesişimlerinin semi-açık olmadığını bir örnekle gösterelim. $X = \{a, b, c\}$ deki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ için semi-açıkların sınıf $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere $\{a, c\}, \{b, c\} \in SO(X, \tau)$ dir fakat $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \notin SO(X, \tau)$ dir.

Tanım 3.1.3 (Semi-kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $F^0 \subseteq A \subseteq F$ olacak şekilde en az bir $F \subseteq X$ kapalı kümesi varsa A ya semi-kapalı denir. (X, τ) daki tüm semi-kapalıların sınıfı $SCL(X, \tau)$ ile gösterilir [14].

Önerme 3.1.4 (X, τ) topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) X ve $\emptyset$ semi-kapalıdır.
- (2) Semi-kapalıların keyfi kesişimleri semi-kapalıdır.
- (3) Semi-kapalıların sonlu birleşimleri semi-kapalı olmayabilir.

İspat: (1) Her kapalı aynı zamanda semi-kapalı olduğundan ispat aşikârdır.

(2) $\{B_i \subseteq X | i \in I\}$, X deki semi-kapalı kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda her $i \in I$ için B_i^c semi-açıktır. Semi-açık kümelerin keyfi birleşimleri semi-açık olduğundan $\bigcup_{i \in I} B_i^c$ semi-açıktır. Böylece $(\bigcup_{i \in I} B_i^c)^c$ semi-kapalıdır. $(\bigcup_{i \in I} B_i^c)^c = \bigcap_{i \in I} B_i$ semi-kapalıdır.

(3) Semi-kapalı kümelerin keyfi kesişimleri semi-kapalı olmasına rağmen, sonlu birleşimlerinin semi-kapalı olmadığını bir örnekle gösterelim.

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ için semi-açıkların sınıfı $SCL(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$ olmak üzere $\{a\}, \{b\} \in SCL(X, \tau)$ dir fakat $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin SCL(X, \tau)$ dir.

Tanım 3.1.5 (Bir kümenin semi-içi) (X, σ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ in kapsadığı semi-açık alt kümelerinin birleşimine A nın semi-içi denir. A^s şeklinde gösterilir [14].

Önerme 3.1.6 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- (1) $A^s \subseteq A$,
- (2) A^s semi-açıktır,
- (3) A semi-açıktır ancak ve ancak $A^s = A$,
- (4) $(A^s)^s = A^s$.

İspat: (1) ve (2) tanımdan açıktır.

(3) $A^s = \cup\{G \subseteq A | G \in SO(X, \tau)\}$ olduğundan $G \subseteq A$ olacak şekilde her G semi-açık kümesi için $G \subseteq A^s$ dir. O halde A^s kümesi A nın kapsadığı en büyük semi-açık kümedir. Yani $A \subseteq A^s$ dir. Diğer yandan (1) dan dolayı $A^s \supseteq A$ ve $A = A^s$ dir. Tersine olarak $A^s = A$ ise (2) den A semi-açıktır.

(4) A^s semi-açık olduğundan (3) den $(A^s)^s = A^s$ dir.

Tanım 3.1.7 (Bir kümenin semi-kapanışı) (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ i içeren X in semi-kapalı tüm alt kümelerinin kesişimine A nın semi-kapanışı denir. $\tilde{A}$ şeklinde gösterilir [14].

Önerme 3.1.8 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- (1) $A \subseteq \tilde{A}$,
- (2) $\tilde{A}$ semi-kapalıdır,
- (3) A semi-kapalıdır ancak ve ancak $\tilde{A} = A$,
- (4) $(\tilde{\tilde{A}}) = \tilde{A}$.

Örnek 3.1.9 $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ olsun.

Çizelge 3.1. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık kümelerin sınıfı.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi	Semi-açık kümeler
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	X	$\emptyset$
$\{d\}$	$\{a, b, c\}$	$\overline{\{d\}} = X$	$\emptyset$	$\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X$
$\{c, d\}$	$\{a, b\}$	$\overline{\{c, d\}} = X$	$\emptyset$	$\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X$
$\{a, c, d\}$	$\{b\}$	$\overline{\{a, b, c\}} = X$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}, X$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	$\emptyset$	X

$SO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$ şeklindedir. Semi-açıkların sınıfı τ topolojisinden daha incedir. Her semi-açık küme açık olmayabilir. $\{b, d\}$ semi-açık kümedir fakat açık değildir. Genelde de uzay diskre ve indiskre olmadığı sürece $SO(X, \tau)$ bir topoloji oluşturmaz.

$SCL(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$ şeklindedir. Her semi-kapalı küme kapalı olmayabilir. $\{a, c\}$ semi-kapalı kümedir fakat kapalı değildir. Genelde de uzay diskre ve indiskre olmadığı sürece $SCL(X, \tau)$ topoloji oluşturmaz. X in tüm alt kümelerinin semi-kapanışlarını ve semi-içlerini bulalım.

Çizelge 3.2. (X, τ) topolojik uzayındaki alt kümelerin semi-kapanışı.

• $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$	• $\emptyset^s = \emptyset$
• $\widetilde{X} = X$	• $X^s = X$
• $\widetilde{\{a\}} = \{a\}$	• $\{a\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{b\}} = \{b\}$	• $\{b\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{c\}} = \{c\}$	• $\{c\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{d\}} = X$	• $\{d\}^s = \{d\}$
• $\widetilde{\{a, b\}} = \{a, b\}$	• $\{a, b\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{a, c\}} = \{a, c\}$	• $\{a, c\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{b, c\}} = \{b, c\}$	• $\{b, c\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{b, d\}} = X$	• $\{b, d\}^s = \{b, d\}$
• $\widetilde{\{c, d\}} = X$	• $\{c, d\}^s = \{c, d\}$
• $\widetilde{\{a, d\}} = X$	• $\{a, d\}^s = \{a, d\}$
• $\widetilde{\{a, b, c\}} = \{a, b, c\}$	• $\{a, b, c\}^s = \emptyset$
• $\widetilde{\{a, b, d\}} = X$	• $\{a, b, d\}^s = \{a, b, d\}$
• $\widetilde{\{b, c, d\}} = X$	• $\{b, c, d\}^s = \{b, c, d\}$
• $\widetilde{\{a, c, d\}} = X$	• $\{a, c, d\}^s = \{a, c, d\}$

Örnek 3.1.10 $X = \{a, b, c\}$, $\sigma = \{X, \emptyset, \{b\}\}$ için,

Çizelge 3.3. (X, σ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi-kapalıların sınıfı.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	$X^o = X$
$\{b\}$	$\{a, c\}$	$\overline{\{b\}} = X$	$\{a, c\}^o = \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	$\emptyset^o = \emptyset$

$SO(X, \sigma) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ve $SCL(X, \sigma) = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$ dır.

Lemma 3.1.11 (X, τ) topolojik uzayında $A, B \subset X$ için $\tilde{A} \cup \tilde{B} \subset \widetilde{A \cup B}$ dır.

İspat: $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ olduğundan $\tilde{A} \subset \widetilde{A \cup B}, \tilde{B} \subset \widetilde{A \cup B}$ olur. Buradan $\tilde{A} \cup \tilde{B} \subset \widetilde{A \cup B}$ elde ederiz. Eşitlik olmadığını gösterelim:

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ olsun.

$K = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ kapalı kümelerin sınıfı,

$SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\},$

$SCL(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$

$A = \{a\}, B = \{c\}$ olsun. $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\tilde{a}\} \cup \{\tilde{c}\} = \{a\} \cup \{c\} = \{a, c\}$ ve $A \cup B = \{a, c\}$ ise $\widetilde{A \cup B} = X$ olur. Sonuç olarak $\tilde{A} \cup \tilde{B} \neq \widetilde{A \cup B}$ dir.

Lemma 3.1.12 (X, τ) uzayında $A, B \subset X$ için $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \widetilde{A \cap B}$ dir.

İspat: $B \subseteq \tilde{B}$ ve $A \subseteq \tilde{A}$ olduğundan $A \cap B \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$ dır. $\tilde{A}, \tilde{B} \in SCL(X, \tau)$ olduğundan sonlu kesişimleri semi-kapalı olur öyle ki $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ semi-kapalıdır. $\widetilde{A \cap B}$ kümesi $A \cap B$ yi kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $A \cap B \subseteq \widetilde{A \cap B} \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olur ki $\widetilde{A \cap B} \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$ elde edilir.

Diğer taraftan $x \in \tilde{A} \cap \tilde{B}$ olsun. $x \in \tilde{A}$ ve $x \in \tilde{B}$ olur. $x \in \tilde{A}$ ise her $x \in U$ için $U \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \in SO(X, \tau)$ ve $x \in \tilde{B}$ ise her $x \in U$ için $U \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \in SO(X, \tau)$ vardır öyle ki $(U \cap A) \cap (U \cap B) = U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

olduğundan $x \in \widetilde{A \cap B}$ olur. Böylece $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \subseteq \widetilde{A \cap B}$ olur. Sonuç olarak her iki taraftan da sağlandığı için $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{A \cap B}$ dir.

Örnek 3.1.13 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ve $[a, b]$ aralıkları semi-açıktır.

(2) $(X, P(X))$ olsun. $SO(X, \tau) = P(X)$ dir,

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ olsun. $SO(X, \tau) = \{X, \emptyset\}$ dir,

(4) X üzerinde ki $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c \text{ sonlu} \} \cup \{\emptyset\}$ tümleyeni sonlu topoloji için $SO(X, \tau) = \{H \subseteq X \mid G \subseteq H \subseteq X, G \in \tau\}$ dur.

(5) X deki $\tau_a = \{G \subseteq X \mid a \in G\} \cup \{\emptyset\}$ özel nokta içeren topoloji için $SO(X, \tau) = \{H \subseteq X \mid G \subseteq H \subseteq X, G \in \tau\}$ dur.

(6) X deki $\tau^a = \{G \subseteq X \mid a \notin G\} \cup \{X\}$ özel nokta içermeyen topoloji için $SO(X, \tau) = \{H \subseteq X \mid G \subseteq H \subseteq X, G \in \tau\}$.

Teorem 3.1.14 (X, τ) topolojik uzayında, $B \subseteq X$ olsun.

(1) $(B^o)^c = \overline{(B^c)}$

(2) $\overline{(B)}^c = (B^c)^o$

Teorem 3.1.15 (X, τ) uzayında semi-kapalı bir kümenin tümleyeni semi-açıktır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ semi-kapalı olsun. Bu taktirde $F^o \subseteq A \subseteq F$ olacak şekilde bir $F \subseteq X$ kapalı kümesi vardır. Tümleme özelliğinden $F^c \subseteq A^c \subseteq ((F^o)^c)$ olur. F nin kapalılığından F^c açıktır. Buradan $((F^o)^c) = \overline{(F^c)}$ olur ki $F^c \subseteq A^c \subseteq \overline{(F^c)}$ yazılır bu ise A^c nin semi-açık olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.16 (X, τ) da $A \subseteq X$ semi-açık ve $G \subseteq X$ açık ise $A \cap G$ semi-açıktır.

İspat: A semi-açık ve G açık olsun. Semi-açıklıktan $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde U açığı vardır. G ile kesiştirilirse $U \cap G \subseteq A \cap G \subseteq \overline{U} \cap G$ olur. Böylece $U, G \in \tau$ dan $U \cap G$ açıktır. $A \cap G \subseteq \overline{U \cap G}$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cap G$ olsun. $x \in A$ ve $x \in G$ dir. $U \subseteq A$ dan $x \in A$ veya $x \notin U$ dir.

$x \in U$ olsun. $x \in G$ den $x \in U \cap G$ ve $x \in \overline{U \cap G}$ dir. $x \notin U$ olsun. $x \in A \subseteq \overline{U}$ olur ki $x \in U'$ dir. (Burada U' kümesi U nun yığılma noktalarının kümesidir.) V, x i içeren açık küme olmak üzere $x \in V \cap G$ ve $x \in U'$ dan $V \cap G$ de x den farklı bir $y \in U$ vardır ve $y \in U$ ve $y \in G$ dir. O halde $y \in U \cap G$ dir. Böylece x i içeren bir V açığı için doğru olduğundan $x \in (U \cap G)'$ dir. Buradan $x \in \overline{(U \cap G)}$ dir. Sonuç olarak $U \cap G \subseteq A \cap U \subseteq \overline{U \cap G}$ dir, yani $A \cap U$ semi-açıktır.

Teorem 3.1.17 (X, τ) da $K \subseteq X$ semi-kapalı ve $F \subseteq X$ kapalı ise $K \cup F$ semi-kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki F kapalı ve $K \subseteq X$ semi-kapalı küme olsun. F^c açık, K^c de semi-açık olduğundan Teorem 3.1.16 den $F^c \cap K^c$ de X de semi-açıktır. Sonuç olarak $F^c \cap K^c = (F \cup K)^c$ semi-açık $F \cup K$ kümesi semi-kapalıdır.

Önerme 3.1.18 (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ açığı için $SO(A, \tau_A) \subseteq SO(X, \tau)$ dur.

İspat: Kabul edelim ki $U \in SO(A, \tau_A)$ olsun. $G \subseteq U \subseteq \overline{G}$ olacak şekilde $G \in \tau_A$ vardır. Alt topoloji tanımından $G = A \cap G_1$ ve $G_1 \in \tau$ şeklindedir. $A, G_1 \in \tau$ olduğundan $A \cap G_1 \in \tau$ olur. Bu ise U nun (X, τ) da semi-açık olduğunu gösterir. Yani $U \in SO(X, \tau)$ dur.

Teorem 3.1.19 (X, τ) uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ semi-kapalıdır ancak ancak $(\overline{A})^o \subseteq A$.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(\overline{A})^o \subseteq A$ olduğunu varsayalım. Biliyoruz ki $A \subseteq \overline{A}$ ve $\overline{A}$ kapalıdır. Buradan $(\overline{A})^o \subseteq A \subseteq \overline{A}$ olduğundan A semi-kapalıdır.

Tersine olarak $(\overline{A})^o \not\subseteq A$ olduğunu kabul edip A nın semi-kapalı olmadığını gösterelim. $A \subseteq C$ olacak şekilde bir C kapalı bulunsun. $\overline{A}, A$ içeren tüm kapalıların kesişimi olduğundan $(\overline{A})^o \subseteq \overline{A} \subseteq C$ dir. Kabulden $(\overline{A})^o \not\subseteq A$ idi. Yani bir $x \in (\overline{A})^o$ vardır ve $x \notin A$ dir. Dahası $x \in (\overline{A})^o$ dan yani iç nokta olduğundan $x \in U \subseteq \overline{A}$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. Böylece $x \in U \subseteq \overline{A} \subseteq C$ olur. Bu ise $x \in C$ demektir. Fakat $x \notin A$ olduğunda $x \in C^o$ dir. Yani $C^o \not\subseteq A$ dir. Bu ise $C^o \subseteq A \subseteq C$ olacak şekilde hiçbir C kapalı kümesi olmadığı anlamına gelir, sonuç olarak A semi-kapalı değildir.

Teorem 3.1.20 (X, τ) uzayında $A \subseteq X$ semi-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq \overline{(A^o)}$ dır.

İspat: A semi-açıktır ancak ve ancak A^c semi-kapalıdır. $A^c = B$ olsun. Teorem 3.1.19 dan B semi-kapalıdır ancak ve ancak $(\overline{B})^o \subseteq B$ dir. Her iki tarafın tümleyeni alınırsa $B^c \subseteq ((\overline{B})^o)^c$ elde edilir. A semi-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq ((\overline{B})^o)^c$ haline gelir. Teorem 3.1.14 den $A \subseteq ((\overline{B})^o)^c = \overline{(\overline{B})^c} = \overline{(B^c)^o} = \overline{(A^o)}$ olur. Böylece $A \subseteq \overline{(A^o)}$ elde edilir.

Teorem 3.1.21 (X, τ) uzayında $A \subseteq X$ için $A \cup (\overline{A})^o$ kümesi semi-kapalıdır.

İspat: (X, τ) uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \cup (\overline{A})^o$ nin semi-kapalı olduğunu göstermek için $(\overline{A \cup (\overline{A})^o})^o \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ eşitliğini göstermeliyiz. Önerme 2.1.2 den dolayı $(\overline{A})^o \subseteq \overline{A}$ ve her iki tarafın kapanışını alırsak $\overline{(\overline{A})^o} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ olur, yani $\overline{(\overline{A})^o} \subseteq \overline{A}$. Buradan $(\overline{A} \cup \overline{(\overline{A})^o})^o \subseteq (\overline{A})^o$. Önerme 2.1.2'den dolayı $(\overline{A} \cup \overline{(\overline{A})^o})^o = (\overline{A \cup (\overline{A})^o})^o$ ve $(\overline{A \cup (\overline{A})^o})^o \subseteq (\overline{A})^o$ dir. Çünkü $(\overline{A})^o \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ olduğundan $(\overline{A \cup (\overline{A})^o})^o \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ olur. Dolayısıyla $A \cup (\overline{A})^o$ semi-kapalıdır.

Teorem 3.1.22 (X, τ) uzayında $A \subseteq X$ için $\tilde{A} = A \cup (\overline{A})^o$ dır.

İspat: (X, τ) uzay ve $A \subseteq X$ olsun. İlk olarak $A \cup (\overline{A})^o \subseteq \tilde{A}$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cup (\overline{A})^o$ olsun. Eğer $x \in A$ ise $A \subseteq \tilde{A}$ olduğundan $x \in \tilde{A}$ dir. Şimdi $x \in (\overline{A})^o$ ve $x \notin A$ olsun. $\tilde{A}$ semi-kapalı olduğundan $(\overline{\tilde{A}})^o \subseteq \tilde{A}$ dir. Buradan $A \subseteq \tilde{A}$ olduğu için $\overline{A} \subseteq \overline{\tilde{A}}$ yazabiliriz. Her tarafın içini alırsak $(\overline{A})^o \subseteq (\overline{\tilde{A}})^o$ olur. O halde $x \in (\overline{A})^o \subseteq (\overline{\tilde{A}})^o \subseteq \tilde{A}$ olduğundan $x \in \tilde{A}$ dir. Dolayısıyla $A \cup (\overline{A})^o \subseteq \tilde{A}$ bulunur.

Tersine olarak Teorem 3.1.21 den dolayı $A \cup (\overline{A})^o$, A yı içeren semi-kapalı kümedir, yani $A \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ dir. $A \subseteq \tilde{A}$ olduğundan $\tilde{A} \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ olur. O halde $A \cup (\overline{A})^o \subseteq \tilde{A}$ ve $\tilde{A} \subseteq A \cup (\overline{A})^o$ olduğundan $\tilde{A} = A \cup (\overline{A})^o$ dir.

Sonuç 3.1.23 (1) Tek nokta kümelerinin semi-açık olması için açık olması gerekir. Çünkü açık olmayan tek nokta kümelerinin içi boşdur.

(2) (X, τ) uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ için $A^0 = \emptyset$ olsun. A semi-açık değildir.

(3) Semi-açık olmayan kümelerin birleşimi semi-açık olabilir. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ da $A=(0,2) \cup \{3\}$, $B=[2,6) \cup \{1\}$ kümeleri semi-açık olmamasına rağmen $A \cup B = (0,6)$ semi-açıktır.

(4) Teorem 3.1.22 den $\tilde{A} \subseteq \bar{A}$ dır.

3.2 Semi-süreklilik

Tanım 3.2.1 (Semi-süreklilik) ([14, 15, 28, 29]) (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) **(SO-1 sürekli fonksiyon)** Eğer $f(x)$ in her açık V komşuluğu için X de x in $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U semi-açığı varsa f ye x de SO-1 sürekli dir denir. f , X in her noktasında SO-1 sürekli ise f ye SO-1 sürekli dir denir.

(2) **(SO-2 sürekli fonksiyon)** $f(x)$ in her semi-açık V komşuluğu için X de x in $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U semi-açığı varsa f ye x de SO-2 sürekli dir denir. f , X in her noktasında SO-2 sürekli ise f ye SO-2 sürekli dir denir.

(3) **(SO-3 sürekli fonksiyon)** $f(x)$ in her semi-açık V komşuluğu için X de x nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U açığı varsa f ye x da SO-3 sürekli dir denir. f , X in her noktasında SO-3 sürekli ise f ye SO-3 sürekli dir denir.

(4) **(Semi-açık ve semi-kapalı fonksiyon)** Her $A \in SO(X, \tau)$ için $f(A) \in SO(Y, \sigma)$ ise f ye semi-açıktır denir. Her $F \in SCl(X, \tau)$ için $f(F) \in SCl(Y, \sigma)$ ise f ye semi-kapalıdır denir.

Tanım 3.2.2 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

(1) **(θ -irresolute süreklilik)** $f(x)$ in her V semi-açık komşuluğu için x in en az bir U semi-açık komşuluğu vardır öyle ki $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$ ise f ye x noktasında θ -irresolute ve her $x \in X$ için f , θ -irresolute ise f ye θ -irresolutedir denir [30].

(2) (θ -zayıf-irresolute süreklilik) $f(x)$ in her V semi-açık komşuluğu için x in en az bir U semi-açık komşuluğu vardır öyle ki $f(U) \subset \overline{V}$ ise f ye x noktasında θ -zayıf-irresolute ve $\forall x \in X$ için f , θ -zayıf-irresolute ise f ye θ -zayıf-irresolutedir denir [31].

(3) (Semi-homeomorfizm) f bire bir, örten, $SO-2$ ve semi-açık ise f ye semi-homeomorfizm denir. Semi-homeomorfizm altında korunan özelliklere semi-topolojik özellik denir. Her homeomorfizm *semi-homeomorfizmdir* [15].



4. SEMİ-URYSOHN VE S-URYSOHN UZAYLAR

4.1 Semi-Urysohn Uzaylar

Tanım 4.1.1 (Semi-Urysohn Uzay) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $x, y \in X$ için $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin en az bir U ve V semi-açıkları varsa (X, τ) ya *semi-Urysohn* denir [3-6].

Örnek 4.1.2 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ da *semi-Urysohn*'dur. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olmak üzere

$$x \in \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right) = U, y \in \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right) = V$$

olarak seçersek $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V semi-açık komşulukları vardır.

(2) $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay *semi-Urysohn*'dur. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ olarak seçersek $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{\overline{x}\} \cap \{\overline{y}\} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V semi-açık komşulukları vardır. $(SO(X, P(X))) = P(X)$

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay *semi-Urysohn* değildir. $\forall x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ olmak üzere $U, V \in SO(X, \tau)$ için $U = V = X$ seçersek $\tilde{U} \cap \tilde{V} = X \cap X = X \neq \emptyset$ bulunur. Bu sebeple *semi-Urysohn* değildir. $(SO(X, \{X, \emptyset\})) = \{X, \emptyset\}$

Örnek 4.1.3 $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ olsun.

Çizelge 4.1 (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi kapalı kümeler.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Semi-açık kümeler	Semi-kapalı kümeler
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	$\emptyset$	X
$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\overline{\{a\}} = \{a, b\}$	$\{a\}, \{a, b\}$	$\{b, c\}, \{c\}$
$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\overline{\{c\}} = \{b, c\}$	$\{c\}, \{b, c\}$	$\{a, b\}, \{a\}$
$\{a, c\}$	$\{b\}$	$\overline{\{a, c\}} = X$	$\{a, c\}, X$	$\{b\}, \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	X	$\emptyset$

$$SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\},$$

$$SCL(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}$$

X in semi-açık kümelerinin semi-kapanışları: $\tilde{\emptyset} = \emptyset$, $\tilde{X} = X$, $\widetilde{\{a\}} = \{a\}$, $\widetilde{\{c\}} = \{c\}$, $\widetilde{\{a, b\}} = \{a, b\}$, $\widetilde{\{b, c\}} = \{b, c\}$, $\widetilde{\{a, c\}} = X$

- $a \neq b$ için $a \in \{a\} = U$, $b \in \{b, c\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$
- $a \neq c$ için $a \in \{a\} = U$, $c \in \{c\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \neq c$ için $b \in \{a, b\} = U$, $c \in \{c\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$

Teorem 4.1.4 *Semi-Urysohn* uzayın açık bir alt uzayı da *semi-Urysohn*'dur.

İspat: (X, τ) uzayı *semi-Urysohn* ve $A \subseteq X$ açık kümesi olsun. Farklı $x, y \in A$ için $x, y \in X$ dan ve (X, τ) uzayı *semi-Urysohn* olduğundan $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin U ve V semi-açıkları vardır. Teorem 3.1.16 dan A açık ve U, V semi-açık olduğundan $G = A \cap U$ ve $H = A \cap V$ da sırasıyla x ve y nin A da semi-açık komşuluklarıdır. $(\widetilde{A \cap U}) \cap (\widetilde{A \cap V}) = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.1.20

$$\begin{aligned} (\widetilde{A \cap U}) \cap (\widetilde{A \cap V}) &= [(A \cap U) \cup (\overline{A \cap U})^o] \cap [(A \cap V) \cup (\overline{A \cap V})^o] \\ &\subseteq [(A \cap U) \cup (\overline{A \cap U})^o] \cap [(A \cap V) \cup (\overline{A \cap V})^o] \\ &\subseteq [(A \cap U) \cup ((\overline{A})^o \cap (\overline{U})^o)] \cap [(A \cap V) \cup ((\overline{A})^o \cap (\overline{V})^o)] \\ &= [[(A \cap U) \cup (\overline{A})^o] \cap [(A \cap U) \cup (\overline{U})^o]] \cap [[(A \cap V) \cup (\overline{A})^o] \cap [(A \cap V) \cup (\overline{V})^o]] \\ &= [(A \cap U) \cup (\overline{A})^o] \cap [(A \cap V) \cup (\overline{A})^o] \cap [(A \cap U) \cup (\overline{U})^o] \cap [(A \cap V) \cup (\overline{V})^o] \\ &= [(\overline{A})^o \cup (A \cap U \cap V)] \cap [(A \cup (\overline{U})^o) \cap (U \cup (\overline{U})^o)] \cap [(A \cup (\overline{V})^o) \cap (V \cup (\overline{V})^o)] \\ &= [(\overline{A})^o \cup (A \cap U \cap V)] \cap (A \cup (\overline{U})^o) \cap (A \cup (\overline{V})^o) \cap (U \cup (\overline{U})^o) \cap (V \cup (\overline{V})^o) \end{aligned}$$

$\tilde{U} \cap \tilde{V} = (U \cup (\overline{U})^o) \cap (V \cup (\overline{V})^o) = \emptyset$ olduğundan $(\widetilde{A \cap U}) \cap (\widetilde{A \cap V}) = \emptyset$ olur. Sonuç olarak (A, τ_A) açık alt uzayı *semi-Urysohn*'dur.

Teorem 4.1.5 Her Urysohn uzayı *semi-Urysohn*'dur.

İspat: (X, τ) topolojik uzayı Urysohn, K kapalı kümelerin sınıfı ve $SCL(X, \tau)$ semi-kapalı kümelerin sınıfı olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için X uzayı Urysohn olduğundan $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla G ve H açık komşulukları vardır. Her açık küme (kapalı küme) semi-açık (semi-kapalı) olduğundan x ve y nin sırasıyla G, H semi-açık ve $\overline{G}, \overline{H}$ semi-kapalı komşulukları vardır. $K \subseteq SCL(X, \tau)$ olduğundan $\tilde{G} \cap \tilde{H} = \emptyset$ dur. Bu ise uzayın *semi-Urysohn* olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.6 $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ *semi-homeomorfizm* olsun. (X, τ) *semi-Urysohn* ise (Y, σ) da *semi-Urysohn*'dur.

İspat: Kabul edelim ki $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ olsun. f bire bir ve örten olduğundan $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ vardır. (X, τ) uzayı *semi-Urysohn* olduğu için x_1 ve x_2 nin sırasıyla en az bir U ve V semi-açık kümeleri vardır öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ dur. $\tilde{U}$ ve $\tilde{V}$ semi-kapalı kümelerdir. f semi-kapalı olduğundan $f(\tilde{U}), f(\tilde{V}) \in SCL(Y, \sigma)$ dir. $U \subset \tilde{U}$ ile $V \subset \tilde{V}$ olduğundan $f(U) \subset f(\tilde{U})$ ve $f(V) \subset f(\tilde{V})$ olur. Buradan $\widetilde{f(U)} \subset \widetilde{f(\tilde{U})} = f(\tilde{U})$ ve $\widetilde{f(V)} \subset \widetilde{f(\tilde{V})} = f(\tilde{V})$ olur. Kesişim uygularsak $\widetilde{f(U)} \cap \widetilde{f(V)} \subset f(\tilde{U}) \cap f(\tilde{V}) = f(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = f(\emptyset) = \emptyset$, $\widetilde{f(U)} \cap \widetilde{f(V)} = \emptyset$ olur bu ise (Y, σ) uzayının *semi-Urysohn* olduğunu gösterir.

4.2 S-Urysohn Uzaylar

Tanım 4.2.1 (S-Urysohn uzaylar) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V semi-açıkları varsa X uzayına *s-Urysohn* denir, yani uzayın farklı noktalarının kapanışları ayrık, semi-açık komşulukları vardır [3-6].

Örnek 4.2.2 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay *s-Urysohn*'dur. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olmak üzere

$$x \in \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right) = U, y = \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right) = V$$

olarak seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V semi-açık komşulukları vardır.

(2) $(X, P(X))$ diskre uzayı s -Urysohn'dur. $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in \{x\} = U$ ve $y = \{y\} = V$ alırsak $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V semi-açık komşulukları vardır.

(3) (X, τ) indiskre topolojik uzay s -Urysohn değildir. $\forall x, y \in X$ için $x \in U, y \in V$ olmak üzere $U, V \in SO(X, \tau)$ için $U = V = X$ seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = X \cap X = X \neq \emptyset$ bulunur. Bu sebeple s -Urysohn değildir.

(4) X sonlu bir küme olsun. (X, τ) uzayı s -Urysohn'dur ancak ve ancak $\tau = P(X)$ dir.

Not: (X, τ) topolojik uzay, K kapalı kümeler sınıfı ve $SCL(X, \tau)$ semi-kapalı kümelerin sınıfı olmak üzere her kapalı küme semi-kapalı olduğunda $K \subseteq SCL(X, \tau)$ olur ki buradan (X, τ) uzayı s -Urysohn ise *semi-Urysohn*'dur. Fakat genelde tersi doğru değildir.

Örnek 4.2.3 $X = \{a, b, c\}, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun.

Çizelge 4.2. (X, τ) topolojik uzayındaki semi-açık ve semi kapalı kümeler.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Semi-açık kümeler	Semi-kapalı kümeler
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	$\emptyset$	X
$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\overline{\{a\}} = \{a, c\}$	$\{a\}, \{a, c\}$	$\{b, c\}, \{b\}$
$\{b\}$	$\{a, c\}$	$\overline{\{b\}} = \{b, c\}$	$\{b\}, \{b, c\}$	$\{a, c\}, \{a\}$
$\{a, b\}$	$\{c\}$	$\overline{\{a, b\}} = X$	$\{a, b\}, X$	$\{c\}, \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	X	$\emptyset$

$$SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\},$$

$$SCL(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

X in semi-açık kümelerinin semi-kapanışları: $\tilde{\emptyset} = \emptyset$, $\tilde{X} = X$, $\{\widetilde{a}\} = \{a\}$, $\{\widetilde{b}\} = \{b\}$,
 $\{\widetilde{a, b}\} = X$, $\{\widetilde{a, c}\} = \{a, c\}$, $\{\widetilde{b, c}\} = \{b, c\}$

X in semi-açık kümelerinin kapanışları: $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$, $\overline{\{a\}} = \{a, c\}$, $\overline{\{b\}} = \{b, c\}$,
 $\overline{\{a, b\}} = X$, $\overline{\{a, c\}} = \{a, c\}$, $\overline{\{b, c\}} = \{b, c\}$

Şimdi ise (X, τ) uzayının s -Urysohn olmadığını gösterelim.

$a \neq b$ olmak üzere $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde $a \in U, b \in V$ semi-açıkları yoktur.

Daha sonra (X, τ) uzayının $semi$ -Urysohn olduğunu gösterelim.

- $a \neq b$ için $a \in \{a\} = U, b \in \{b\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \neq c$ için $a \in \{a\} = U, c \in \{b, c\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$
- $b \neq c$ için $b \in \{b\} = U, c \in \{a, c\} = V$ semi-açıkları vardır, öyle ki $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{b\} \cap \{a, c\} = \emptyset$ olur ki (X, τ) uzayı $semi$ -Urysohn olmasına rağmen s -Urysohn değildir.

Teorem 4.2.4 S -Urysohn uzayın her açık alt uzayı da s -Urysohn'dur.

İspat: (X, τ) uzayı s -Urysohn ve $A \subseteq X$ açık olsun. Farklı $x, y \in A$ için $x, y \in X$ den ve (X, τ) uzayı s -Urysohn olduğundan $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla $U, V \in SO(X, \tau)$ vardır. A açık, $U, V \in SO(X, \tau)$ olduğundan Teorem 3.1.16 den dolayı $x \in A \cap U, y \in A \cap V \in SO(A, \tau_A)$ olur. Buradan $(\overline{A \cap U}) \cap (\overline{A \cap V}) = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. $(\overline{A \cap U}) \subseteq \overline{A} \cap \overline{U}$ ve $(\overline{A \cap V}) \subseteq \overline{A} \cap \overline{V}$ ifadelerini taraf tarafa kesiştirirsek,

$$(\overline{A \cap U}) \cap (\overline{A \cap V}) \subseteq \overline{A} \cap \overline{U} \cap \overline{A} \cap \overline{V} = \overline{A} \cap (\overline{U} \cap \overline{V}) = \emptyset$$

olduğundan $(\overline{A \cap U}) \cap (\overline{A \cap V}) = \emptyset$ olur. Bu ise (A, τ_A) uzayının s -Urysohn olmasıdır.

Teorem 4.2.5 S -Urysohn uzayı olma topolojik bir özelliktir.

İspat: Kabul edelim ki $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ olsun. f , bire bir ve örten olduğundan dolayı $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır ve $x_1 \neq x_2$ dir. (X, τ) s -Urysohn olduğundan x_1 ve x_2 nin $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde $x_1 \in \overline{G}, x_2 \in \overline{H}$ semi-açık komşulukları vardır. $y_1 \in f(G), y_2 \in f(H)$ olmak üzere $f(G)$ ve $f(H)$ semi-açıkları vardır öyle ki $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. f kapalı olduğundan $\overline{f(G)} \subseteq f(\overline{G})$ ve $\overline{f(H)} \subseteq f(\overline{H})$ dir. $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} \subseteq f(\overline{G}) \cap f(\overline{H})$ olur. Kabul edelim ki $f(\overline{G}) \cap f(\overline{H}) \neq \emptyset$ olsun. $z \in f(\overline{G})$ ve $z \in f(\overline{H})$ dir. f in bire bir ve örtenliğinden $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{G}) = \overline{G}$ ve $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{H}) = \overline{H}$ olur ki $f^{-1}(z) \in \overline{G} \cap \overline{H}$ yazabiliriz. O halde $\overline{G} \cap \overline{H} \neq \emptyset$ dır. Bu da (X, τ) nun s -Urysohn olması ile çelişir. Böylece $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} = \emptyset$ olacak şekilde y_1 ve y_2 nin Y de semi-açık komşulukları vardır, yani (Y, σ) uzayı s -Urysohn'dur.

Sonuç 4.2.6 S -Urysohn uzayı olma semi-topolojik bir özelliktir.

Tanım 4.2.7 (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun.

(1) $A = (\overline{A})^o$ ise A ya regüler-açık küme denir.

(2) $A = \overline{(A^o)}$ ise A ya regüler-kapalı küme denir.

Tanım 4.2.8 $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyon olsun. $F, (X, \tau)$ da regüler-kapalı (regüler-açık) olduğunda $f(F)$ de (Y, σ) da regüler kapalı (regüler açık) ise f ye regüler kapalı fonksiyon (regüler-açık fonksiyon) denir.

Teorem 4.2.9 (X, τ) uzayı s -Urysohn olsun. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ regüler kapalı, bire bir ve örten ise (Y, σ) da s -Urysohn'dur.

İspat: Her homeomorfizm bire bir, örten ve regüler-kapalı olduğundan ispat Teorem 4.2.5 a benzerdir.

Teorem 4.2.10 $\{X_i | i \in I\}$ topolojik uzayların bir sınıfı olmak üzere $X = \prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımı, $\pi_i: X \rightarrow X_i$ irrelative (SO_2 -sürekli) izdüşüm fonksiyonları olsun. Her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayları s -Urysohn ise (X, τ_*) çarpım uzayı da s -Urysohn'dur.

İspat: Kabul edelim ki her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayları s -Urysohn olsun. Bu durumda her $x, y \in X_i$, $x \neq y$ için $\exists U \ni x$ ve $\exists V \ni y$ semi-açık komşulukları vardır öyle ki $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur. π_i izdüşüm fonksiyonları irresolute seçildiğinde $\pi_i^{-1}(U), \pi_i^{-1}(V)$ kümeleri (X, τ) da semi-açık ve $\pi_i^{-1}(\overline{U}), \pi_i^{-1}(\overline{V})$ kümeleri (X, τ) uzayında kapalıdır. $\overline{\pi_i^{-1}(\overline{U})} \cap \overline{\pi_i^{-1}(\overline{V})} = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$\overline{\pi_i^{-1}(\overline{U})} \cap \overline{\pi_i^{-1}(\overline{V})} = \pi_i^{-1}(\overline{U}) \cap \pi_i^{-1}(\overline{V}) = \emptyset$ olur. Eğer $\pi_i^{-1}(\overline{U}) \cap \pi_i^{-1}(\overline{V}) \neq \emptyset$ olsaydı en az bir $z \in \pi_i^{-1}(\overline{U}) \cap \pi_i^{-1}(\overline{V})$ olurdu. Buradan $z \in \pi_i^{-1}(\overline{U})$ ve $z \in \pi_i^{-1}(\overline{V})$ olur ki $f(z) \in \overline{U}, f(z) \in \overline{V}$ yazabiliriz. Bu ise $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $\pi_i^{-1}(\overline{U}) \cap \pi_i^{-1}(\overline{V}) = \emptyset$ olmalıdır. Sonuç olarak (X, τ_*) çarpım uzayı s -Urysohn'dur.

Not: S -Urysohn uzay ile Hausdorff uzay birbirinden bağımsızdır. S -Urysohn ve Hausdorff uzay olup Urysohn uzay olmayan örnekler de mevcuttur.

5. PRE TOPOLOJİK KAVRAMLAR

5.1 Pre-Açık, Pre-Kapalı Kümeler

Pre-açık küme kavramı 1982 yılında Mashhour tarafından ortaya atıldı. Bu bölümde pre-açık, pre-kapalı ve pre-süreklilik kavramı incelenmiştir.

Tanım 5.1.1 (Pre-açık küme) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subset (\bar{A})^\circ$ ise A ya pre-açık küme denir ve (X, τ) daki pre-açıkların sınıfı $PO(X, \tau)$ şeklinde gösterilir [19].

Önerme 5.1.2 (X, τ) topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) $\emptyset$ ve X kümeleri pre-açıktır.
- (2) Pre-açık kümelerin keyfi birleşimleri pre-açıktır.
- (3) Pre-açık kümelerin sonlu kesişimleri pre-açık olmayabilir.

İspat: (1) Her açık aynı zamanda pre-açık olduğundan ispat aşikârdır.

(2) (X, τ) topolojik uzay ve $\{B_i | i \in I\}$ pre-açık kümelerin sınıfı olsun. Her $i \in I$ için $B_i \subset (\bar{B}_i)^\circ$ dir. $\bigcup_{i \in I} (B_i) \subset \bigcup_{i \in I} (\bar{B}_i)^\circ$ dir. $\bigcup_{i \in I} (\bar{B}_i)^\circ \subset \left(\bigcup_{i \in I} (\bar{B}_i) \right)^\circ = \left(\overline{\bigcup_{i \in I} (B_i)} \right)^\circ$ dir. Sonuç olarak $\bigcup_{i \in I} (B_i) \subset \left(\overline{\bigcup_{i \in I} (B_i)} \right)^\circ$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} (B_i)$ pre-açıktır.

(3) Pre-açıkların keyfi birleşimleri pre-açıktır fakat sonlu kesişimleri pre-açık olmayabilir. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$ için

$$PO(X, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \\ \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \end{array} \right\}$$

$\{a, b, d\}, \{a, c, d\} \in PO(X, \tau)$ dir fakat $\{a, b, d\} \cap \{a, c, d\} = \{a, d\} \notin PO(X, \tau)$.

Tanım 5.1.3 (Pre-kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A^c kümesi pre-açık, yani $\overline{(A^c)} \subset A$ ise A ya pre-kapalı küme denir [19].

Önerme 5.1.4 Bir (X, τ) topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) $\emptyset$ ve X pre-kapalıdır.
- (2) Pre-kapalıların keyfi kesişimleri pre-kapalıdır.
- (3) Pre-kapalıların sonlu birleşimleri pre-kapalı olmayabilir.

İspat: (1) Her kapalı aynı zamanda pre-kapalı olduğundan ispat aşikârdır.

(2) (X, τ) da pre-açıkların sınıfı $\{B_i^c \mid i \in I\}$ olsun. Her $i \in I$ için $B_i^c \subset (\overline{B_i^c})^o$ dır.

Teorem 3.1.14 den $B_i^c \subset ((B_i^o)^c)^o = (\overline{(B_i^o)})^c$ ve $B_i^c \subset (\overline{(B_i^o)})^c$ dir. Tümleme ve

kesişme işleminden $\overline{(B_i^o)} \subset B_i$ ve $\bigcap_{i \in I} \overline{(B_i^o)} \subset \bigcap_{i \in I} B_i$ olur.

$\overline{\bigcap_{i \in I} (B_i^o)} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{(B_i^o)} \subset \bigcap_{i \in I} B_i$ dir. Buradan $\overline{(\bigcap_{i \in I} B_i)^o} = \overline{\bigcap_{i \in I} (B_i^o)} \subset \bigcap_{i \in I} B_i$

olur. Bu ise $\overline{(\bigcap_{i \in I} B_i)^o} \subset \bigcap_{i \in I} B_i$ ve bu da $\bigcap_{i \in I} B_i$ nin pre-kapalı olması demektir.

(3) Pre-kapalıların keyfi kesişimleri pre-kapalıdır ancak pre-kapalı kümelerin sonlu birleşimleri pre-kapalı olmayabilir.

Örneğin, $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$ için pre-kapalı kümelerin sınıfı

$$PCL(X, \tau) = \left\{ X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\} \right\}$$

olmak üzere $\{a, b\}, \{a, c\} \in PCL(X, \tau)$ dır fakat $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \notin PCL(X, \tau)$

Tanım 5.1.5 (Bir kümenin pre-içi) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapsadığı X in pre-açık tüm alt kümelerinin birleşimine A nın pre-içi denir ve A^p şeklinde gösterilir [19].

Önerme 5.1.6 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) $A^p \subseteq A$,
- (2) A^p pre-açıktır,
- (3) A pre-açıktır ancak ve ancak $A^p = A$,
- (4) $(A^p)^p = A^p$.

İspat: (1) ve (2) tanımdan açıktır.

(3) $A^p = \cup\{G \subseteq A | G \in PO(X, \tau)\}$ olduğundan $G \subseteq A$ olacak şekilde her G pre-açık kümesi için $G \subseteq A^p$ dir. O halde A^p kümesi A nın kapsadığı en büyük pre-açık kümedir. Yani $A \subseteq A^p$ dir. Diğer yandan (1) den dolayı $A^p \subseteq A$ olduğundan $A^p = A$ dır. Tersine $A^p = A$ ise (2) den A pre-açıktır.

(4) A^p pre-açık olduğundan (c) den $(A^p)^p = A^p$ dir.

Tanım 5.1.7 (Bir kümenin pre-kapanışı) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A yı kapsayan X in pre-kapalı tüm alt kümelerinin kesişimine A nın pre-kapanışı denir ve $\hat{A}$ şeklinde gösterilir [19].

Önerme 5.1.8 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- (1) $A \subseteq \hat{A}$,
- (2) $\hat{A}$ pre-kapalıdır,
- (3) A pre-kapalıdır ancak ve ancak $\hat{A} = A$,
- (4) $(\hat{A}) = \hat{A}$ dır.

İspat: (1) ve (2) tanımdan açıktır.

(3) Eğer A pre-kapalı ise $\hat{A}$, A yı içeren en küçük pre-kapalı olduğundan $\hat{A} \subseteq A$ dır. (1) den $A \subseteq \hat{A}$ olduğundan $A = \hat{A}$ dır. Tersine $\hat{A} = A$ ise (2) den A pre-kapalıdır.

(4) $\hat{A}$ pre-kapalı olduğundan (3) den dolayı $(\hat{A}) = \hat{A}$ dır.

kapalı küme
(açık küme)



semi – kapalı küme
(semi – açık küme)

pre – kapalı küme
(pre – açık küme)

Şekil 5.1 Kapalı kümeler arasındaki ilişkiler.

Lemma 5.1.9 (X, τ) topolojik uzayında $A, B \subset X$ için $\widehat{A} \cup \widehat{B} \subset \widehat{A \cup B}$ dır.

İspat: $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ olduğundan $\widehat{A} \subset \widehat{A \cup B}, \widehat{B} \subset \widehat{A \cup B}$ olur. Buradan

$\widehat{A} \cup \widehat{B} \subset \widehat{A \cup B}$ elde ederiz. Eşitlik olmadığını gösterelim:

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$ olsun.

$$PO(X, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \\ \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \end{array} \right\}$$

$$PCL(X, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \\ \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\} \end{array} \right\}$$

$A = \{a, b\}, B = \{a, c\}$ olsun. Bu durumda $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$ ve $A \cup B = \{a, b, c\}$ ise $\widehat{A \cup B} = X$ olur. Sonuç olarak $\widehat{A} \cup \widehat{B} \neq \widehat{A \cup B}$ dir.

Lemma 5.1.10 (X, τ) uzayında $A, B \subset X$ için $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$ dır.

İspat: $A \subseteq \widehat{A}$ ve $B \subseteq \widehat{B}$ olduğundan $A \cap B \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$ olur. $\widehat{A}, \widehat{B} \in PCL(X, \tau)$ olduğundan sonlu kesişimleri pre-kapalı olur öyle ki $\widehat{A} \cap \widehat{B}$ pre-kapalıdır. $\widehat{A \cap B}$, $A \cap B$ yi kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $A \cap B \subseteq \widehat{A \cap B} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$ olur ki $\widehat{A \cap B} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$ elde edilir.

Diğer taraftan $x \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ olsun. $x \in \widehat{A}$ ve $x \in \widehat{B}$ olur. $x \in \widehat{A}$ ise her $x \in U$ için $U \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \in PO(X, \tau)$ ve $x \in \widehat{B}$ ise her $x \in U$ için $U \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \in PO(X, \tau)$ vardır öyle ki $(U \cap A) \cap (U \cap B) = U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \widehat{A \cap B}$ olur. Böylece $\widehat{A} \cap \widehat{B} \subseteq \widehat{A \cap B}$ olur. Sonuç olarak her iki taraftan da sağlandığı için $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$ dır.

Örnek 5.1.11 $X = \{a, b, c\}, \tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$ olsun.

(X, τ) daki pre-açıkların sınıfını $PO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ dir. Pre-açıkların sınıfı τ topolojisinden daha incedir. Örnekte de görüldüğü gibi her pre-açık küme açık olmayabilir. $\{a, b\}$ pre-açıktır fakat açık değildir. Genelde uzay diskre ve indiskre olmadığı durumda pre-açıkların sınıfı olan $PO(X, \tau)$ topoloji olamaz.

Çizelge 5.1. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-açık kümeler.

A	$\bar{A}$	$(\bar{A})^\circ$	$A \subset (\bar{A})^\circ$	Pre-açık küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	✗	✗
$\{b\}$	X	X	✓	✓
$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\emptyset$	✗	✗
$\{a, b\}$	X	X	✓	✓
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\emptyset$	✗	✗
$\{b, c\}$	X	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

Çizelge 5.2. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-kapalı kümeler.

A	A°	(A°)	$\overline{(A^\circ)} \subset A$	Pre-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{b\}$	$\{b\}$	X	✗	✗
$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a, b\}$	$\{b\}$	X	✗	✗
$\{a, c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	X	✗	✗
X	X	X	✓	✓

(X, τ) uzayındaki pre-kapalıların sınıfı $Pcl(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ dir. Her pre-kapalı küme kapalı olmayabilir. $\{c\}$ pre-kapalı olmasına rağmen kapalı değildir.

Örnek 5.1.12 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ de (a, b) pre-açık ve sonlu kümeler pre-kapalı kümelerdir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bu uzaya göre pre-açık olmasına rağmen açık değildir.

(2) $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay olsun. $PO(X, \tau) = P(X)$ dir.

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay olsun. $PO(X, \tau) = P(X)$ dir.

(4) X üzerinde ki $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c \text{ sonlu} \} \cup \{\emptyset\}$ tümleyeni sonlu topoloji için $PO(X, \tau) = \{U \subseteq X \mid U \text{ sonsuz} \} \cup \{\emptyset\}$ dur. Örneğin $X = \mathbb{R}$ için $A = \{2\}^c$ sonsuz kümesi hem açık hem de pre-açıktır. Fakat $A = \mathbb{Z}$ sonsuz kümesi pre-açık olmasına rağmen açık değildir.

(5) X üzerinde ki $\tau_a = \{U \subseteq X \mid a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ özel nokta içeren topoloji için $PO(X, \tau) = \tau_a$ dur.

(6) X üzerinde ki $\tau^a = \{U \subseteq X \mid a \notin U\} \cup \{X\}$ özel nokta içermeyen topoloji için $PO(X, \tau) = \tau^a$ dur.

Teorem 5.1.13 (X, τ) topolojik uzayında pre-açık kümenin tümleyeni pre-kapalıdır.

İspat: $A \subseteq X$ pre-açık olsun. $A \subset (\bar{A})^\circ$ olur. Tümleyen alınırsa $((\bar{A})^\circ)^c \subset A^c$ olur. $(\overline{B^c}) = (B^\circ)^c$ dan $B = \bar{A}$ alırsak $((\bar{A})^\circ)^c = (B^\circ)^c = (\overline{B^c}) = \overline{(\bar{A})^c}$ olur ki bu ise $\overline{(\bar{A})^c} \subset A^c$ olur. $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ dan $\overline{(\bar{A})^c} \subset A^c$ olur. Böylece A^c nin pre-kapalıdır.

Teorem 5.1.14 (X, τ) uzayında $A \subseteq X$ pre-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ olacak şekilde $B \in \tau$ vardır.

Teorem 5.1.15 (X, τ) uzayında açık ile pre-açık bir kümenin kesişimi pre-açıktır.

İspat: $A \in \tau$ ve $B \in PO(X, \tau)$ olsun. $B \subseteq G \subseteq \bar{B}$ olacak şekilde $G \in \tau$ vardır. $A \cap B \subseteq A \cap G \subseteq A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ dir. $A \cap G$ nin açıklığından $A \cap B$ pre-açıktır.

Sonuç 5.1.16 (X, τ) topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. A pre-açık ise $A \cap \widehat{B} = \widehat{(A \cap B)}$.

Teorem 5.1.17 $i \in I$ için (X_i, τ_i) ler topolojik uzaylar, U_i ler ise X_i lerin boştan farklı alt kümeleri ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $U = \prod_{j=1}^n U_{i_j} \times \prod_{i \neq i_j} X_i$ olsun. U pre-açıktır ancak ve ancak her $1 \leq j \leq n$ için U_{i_j} kümeleri X_{i_j} de pre-açıktır.

İspat: U pre-açık olsun. $\pi_i: X \rightarrow X_i$ izdüşüm fonksiyonları sürekli ve açık olduğundan pre-açık kümelerin görüntüsü pre-açık olur ki $1 \leq j \leq n$ için U_{i_j} kümeleri X_{i_j} de pre-açıktır. Tersine her $1 \leq j \leq n$ için U_{i_j} ler X_{i_j} de pre-açık olsun. U nun X de pre-açık olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
U &= \prod_{j=1}^n U_{i_j} \times \prod_{i \neq i_j} X_i \subseteq \prod_{j=1}^n (\overline{U_{i_j}})^o \times \prod_{i \neq i_j} X_i = \prod_{j=1}^n (\overline{U_{i_j}})^o \times \prod_{i \neq i_j} (\overline{X_i})^o \\
&= \left(\overline{\prod_{j=1}^n U_{i_j} \times \prod_{i \neq i_j} X_i} \right)^o \\
&= (\overline{U})^o
\end{aligned}$$

$U \subseteq (\overline{U})^o$ olur ki bu ise U nun X de pre-açık olduğunu gösterir.

Teorem 5.1.18 (X, τ) uzayında, $A \in PO(X, \tau)$ ve $B \subset (\overline{B^o})^o$ ise $A \cap B \in PO(X, \tau)$.

İspat: A pre-açık olduğundan $A \subseteq (\overline{A})^o$ olur.

$$\begin{aligned}
A \cap B &\subset (\overline{A})^o \cap (\overline{B^o})^o \\
&= ((\overline{A})^o)^o \cap (\overline{B^o})^o \\
&= ((\overline{A})^o \cap (\overline{B^o}))^o \subset (B^o \cap (\overline{A})^o)^o \\
&\subset (\overline{B^o \cap \overline{A}})^o \subset (\overline{((A \cap B^o))})^o \\
&= (\overline{(A \cap B^o)})^o \subset (\overline{A \cap B})^o
\end{aligned}$$

olduğundan $A \cap B \in PO(X, \tau)$ dir.

Teorem 5.1.19 (X, τ) topolojik uzay $A \subset B \subset X$ ve $B \in PO(X, \tau)$ ise $A \in PO(X, \tau)$ dur ancak ve ancak $A \in PO(B, \tau_B)$ dir.

Teorem 5.1.20 (X, τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in \hat{A}$ dir ancak ve ancak x i içeren her $V \in PO(X, \tau)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ dir.

Teorem 5.1.21 (X, τ) topolojik uzay $A \subset B \subset X$ ve $B \subset (\overline{(B^o)})^o$ ise $\widehat{A}_B = \widehat{A} \cap B$ dir.

İspat: $y \in B, y \in \widehat{A}_B$ olsun ve y yi içeren her $V \in PO(X, \tau)$ olsun. Teorem 5.1.18 den y yi içeren her $V \cap B \in PO(X, \tau)$ dur. $B \subset (\overline{(B^o)})^o$ olduğundan $V \cap B \subset B \subset X$, Teorem 5.1.19 dan y yi içeren her $V \cap B \in PO(B, \sigma)$ dır.

Dolayısıyla $(V \cap B) \cap A \neq \emptyset$ ise $V \cap A \neq \emptyset$ dır. Bu yüzden Teorem 5.1.20 den $y \in \widehat{A}$ olduğundan $y \in \widehat{A} \cap B$. O halde $\widehat{A}_B \subset \widehat{A} \cap B$ olur.

Tersine $y \in \widehat{A} \cap B$ olsun. $y \in \widehat{A}$ ve $y \in B$ olur. y yi içeren her $U \in PO(B, \sigma)$ dır. Yukarıdaki düşünceye benzer olarak y yi içeren her $U \in PO(X, \tau)$ dur. Dolayısıyla Teorem 5.1.20 den $U \cap A \neq \emptyset$ dır. O halde $y \in \widehat{A}_B$ olur ve $\widehat{A} \cap B \subset \widehat{A}_B$ dir.

Şimdi ise semi-açık küme ile pre-açık küme ilişkisini gösterelim:

Lemma 5.1.22 A kümesi semi-açık küme ise $\widehat{A} = \overline{A}$ dır.

İspat: Her zaman $\widehat{A} \subset \overline{A}$ dır. $\overline{A} \subset \widehat{A}$ gösterelim. $x \in \overline{A}$ ve $x \in V \in PO(X, \tau)$ olsun. Bu durumda $x \in V \subset (\overline{V})^o$ olur. $(\overline{V})^o$ açık ve $x \in \overline{A}$ olduğundan $A \cap (\overline{V})^o \neq \emptyset$ dır. $A \in SO(X, \tau)$ den $A \cap (\overline{V})^o \subset \overline{(A^o)} \cap (\overline{V})^o \subset \overline{A} \cap \overline{V} = \overline{A \cap V}$ ve $A \cap V \neq \emptyset$ olur. Bu Teorem 5.1.20 den $x \in \widehat{A}$ olması demektir. O halde $\overline{A} \subset \widehat{A}$ olur ki sonuç olarak $\widehat{A} = \overline{A}$ dır.

5.2 Pre-Süreklilik

Tanım 5.2.1 (Pre-süreklilik) ([19]) $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) **(PO-1 süreklilik)** $f(x)$ nin her V açığı için X de x nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U pre-açığı varsa f ye x de PO-1 süreklidir denir. f, X in her noktasında PO-1 sürekli ise f ye PO-1 süreklidir denir, yani her $U \in \sigma$ için $f^{-1}(U) \in PO(X, \tau)$ ise f ye PO-1 süreklidir denir.

(2) **(PO-2 süreklilik)** $f(x)$ nin her V pre-açığı için X de x nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U pre-açığı varsa f ye x de PO-2 süreklidir denir. f, X in her noktasında

$PO-2$ sürekli ise f ye $PO-2$ sürekli dir denir, yani her $U \in PO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(U) \in PO(X, \tau)$ ise f ye $PO-2$ sürekli dir denir.

(3) ($PO-3$ süreklilik) $f(x)$ nin her V pre-açığı için X de x nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U açığı varsa f ye x de $PO-3$ sürekli dir denir. f , X in her noktasında $PO-3$ sürekli ise f ye $PO-3$ sürekli dir denir, yani her $U \in PO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(U) \in \tau$ ise f ye $PO-3$ sürekli dir denir.

(4) (Pre-açık ve pre-kapalı fonksiyon) X den her $A \in PO(X, \tau)$ için Y de $f(A) \in PO(Y, \sigma)$ ise f ye pre-açıktır denir. Eğer X den her $F \in PCl(X, \tau)$ için Y de $f(F) \in PCl(Y, \sigma)$ ise f ye pre-kapalıdır denir.

Tanım 5.2.2 ([7-19]) $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

(1) (θ -pre-süreklilik) $f(x)$ in her V açığı için x in en az bir U pre-açık komşuluğu vardır öyle ki $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ ise f , x noktasında θ -pre-sürekli denir. Her $x \in X$ için f , θ -pre-sürekli ise f ye θ -pre-sürekli dir denir.

(2) (θ -pre-irresolute) $f(x)$ in her V pre-açığı için x in en az bir U pre-açığı vardır öyle ki $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ ise f , x de θ -pre-irresolute denir. Her $x \in X$ için f , θ -pre-irresolute ise f ye θ -pre-irresolutedir denir.

(3) (p -zayıf-süreklilik) $f(x)$ in her V açığı için x in en az bir U pre-açığı vardır öyle ki $f(U) \subset \overline{V}$ ise f ye x de p -zayıf-sürekli dir ve her $x \in X$ için f , p -zayıf-sürekli ise f ye p -zayıf-sürekli dir denir.

(4) (pre-homeomorfizm) f bire bir, örten, $PO-2$ ve pre-açık ise f ye pre-homeomorfizm denir. Pre-homeomorfizm altında korunan özelliklere pre-topolojik özellik denir. (X, τ) ve (Y, σ) ye pre-homeomorftir ve her homeomorfizm pre-homeomorfizmdir.

Teorem 5.2.3 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyon ve (Y, σ) regüler uzay olsun. f , p -zayıf-sürekli ise f ye $PO-1$ sürekli dir.

İspat: Kabul edelim ki f , p -zayıf-sürekli olsun. Her $x \in X$ için $f(x)$ in her V açığı için x in en az bir U pre-açığı vardır öyle ki $f(U) \subset \overline{V}$ dir. (Y, σ) regüler uzay

olduğundan V^c kapalı ve $y \notin V^c$ olsun. Bu durumda $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde $y \in V$ ve $V^c \subset W$ açıkları vardır. $V \cap W = \emptyset$ den $W \subset V^c$ dir. Böylece $V^c = W$ olur. V nin hem kapalı hem de açık olduğunu gösterir ki $\overline{V} = V$ dir. $f(U) \subset \overline{V} = V$ den $f(U) \subset V$ olur. Bu ise f nin *PO-1* sürekli olduğunu gösterir.



6. PRE-URYSOHN VE P-URYSOHN UZAYLAR

6.1 Pre-Urysohn Uzaylar

Tanım 6.1.1 (Pre-Urysohn uzay) (X, τ) topolojik uzayındaki farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V pre-açıkları varsa (X, τ) uzayına *pre-Urysohn*'dur denir, yani uzayın farklı noktalarının pre-kapanışları ayrık, pre-açık komşulukları vardır [7].

Örnek 6.1.2 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay *pre-Urysohn*'dur. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olmak üzere

$$x \in \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right) = U, y \in \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right) = V$$

olarak seçersek $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır.

(2) $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay *pre-Urysohn*'dur. Her farklı $x, y \in X$ için $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ olarak seçersek $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{\{x\}} \cap \widehat{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır. $(PO(X, P(X))) = P(X)$

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay *pre-Urysohn*'dur. Her farklı $x, y \in X$ için $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ olarak seçersek $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{\{x\}} \cap \widehat{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır. $(PO(X, \{X, \emptyset\})) = P(X)$

Teorem 6.1.3 *pre-Urysohn* uzayı olma *pre-topolojik* bir özelliktir.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ *pre-homeomorfizm* ve $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ olsun. f in bire bir ve örtenliğinden $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ vardır. (X, τ) uzayı *pre-Urysohn* olduğu için x_1 ve x_2 nin en az bir sırasıyla U ve V pre-açık komşulukları vardır öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ dur. $\widehat{U}$ ve $\widehat{V}$ pre-kapalı kümelerdir. f pre-kapalı olduğundan $f(\widehat{U}), f(\widehat{V}) \in PCl(Y, \sigma)$ dir. $U \subseteq \widehat{U}$ ile $V \subseteq \widehat{V}$ olduğundan $f(U) \subseteq f(\widehat{U})$ ve $f(V) \subseteq f(\widehat{V})$ olur. Her tarafın pre-kapanışı alınırsa $\widehat{f(U)} \subseteq \widehat{f(\widehat{U})} = f(\widehat{U})$ ve $\widehat{f(V)} \subseteq \widehat{f(\widehat{V})} = f(\widehat{V})$ dir. Kesişim uygularsak $\widehat{f(U)} \cap \widehat{f(V)} \subseteq f(\widehat{U}) \cap f(\widehat{V}) =$

$f(\widehat{U} \cap \widehat{V}) = f(\emptyset) = \emptyset$, $\widehat{f(U)} \cap \widehat{f(V)} = \emptyset$ olur ki bu ise (Y, σ) nin *pre-Urysohn* olduğunu gösterir.

Teorem 6.1.4 (X, τ) topolojik uzayı *pre-Urysohn* ve $A \subseteq X$ için $A \subseteq (\overline{(A^o)})^o$ olsun. (A, τ_A) alt uzayı *pre-Urysohn*'dur.

İspat: Kabul edelim ki $A \subseteq X$ ve $A \subseteq (\overline{(A^o)})^o$ olsun. $x, y \in A$, $x \neq y$ olsun. (X, τ) nun *pre-Urysohn* olduğundan $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ olacak şekilde $x \in \widehat{U}$ ve $y \in \widehat{V}$ $U, V \in PO(X, \tau)$ vardır $A \subseteq (\overline{(A^o)})^o$ den Teorem 5.1.18 den $x \in U \cap A \in PO(X, \tau)$, $x \in V \cap A \in PO(X, \tau)$ vardır. Ayrıca Teorem 5.1.21 den

$$\begin{aligned} (\widehat{U \cap A})_A \cap (\widehat{V \cap A})_A &= ((\widehat{U \cap A}) \cap A) \cap ((\widehat{V \cap A}) \cap A) \\ &= (\widehat{U \cap A}) \cap (\widehat{V \cap A}) \cap A \\ &\subseteq (\widehat{U \cap A}) \cap (\widehat{V \cap A}) \\ &\subseteq \widehat{U} \cap \widehat{V} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Böylece $(\widehat{U \cap A}) \cap (\widehat{V \cap A}) = \emptyset$ olur. (A, τ_A) *pre-Urysohn*'dur

Lemma 6.1.5 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in \widehat{A}$ ancak ve ancak x i içeren her U pre-açığı için $U \cap A \neq \emptyset$ dır.

Teorem 6.1.6 (X, τ) topolojik uzay ve $i \in I$ için $A_i \subset X$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{\prod_{i \in I} A_i} \subset \prod_{i \in I} \widehat{A_i}$$

İspat: $x = (x_1, x_2, \dots) \in \widehat{\prod_{i \in I} A_i}$ olsun. Her $i \in I$ için $x_i \in \widehat{A_i}$ olduğunu göstereceğiz. Keyfi bir $i_0 \in I$ için $x_{i_0} \in U_{i_0} \in PO(X_{i_0}, \tau_{i_0})$ ve $U = U_{i_0} \times \prod_{i \in I, i \neq i_0} X_i$ olsun. Teorem

5.1.17 den $x \in U \in PO(X, \tau)$ vardır. $x \in \widehat{\prod_{i \in I} A_i}$ olduğundan Teorem 5.1.20 den

$$\begin{aligned}
U \cap \prod_{i \in I} A_i &= \left(U_{i_0} \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} X_i \right) \cap \prod_{i \in I} A_i \\
&= \left(U_{i_0} \cap \prod_{i \in I} A_i \right) \times \left(\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} X_i \cap \prod_{i \in I} A_i \right) \\
&= \left(U_{i_0} \cap \prod_{i \in I} A_i \right) \times \left(\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} (X_i \cap A_i) \right) \\
&= \left(U_{i_0} \cap \prod_{i \in I} A_i \right) \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} A_i \\
&= (U_{i_0} \cap A_{i_0}) \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} A_i \\
&\neq \emptyset
\end{aligned}$$

dır. Böylece $U_{i_0} \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ elde ederiz. Bu ise $x_{i_0} \in \widehat{A_{i_0}}$ olur. Sonuç olarak her $i \in I$ için $x \in \prod_{i \in I} \widehat{A_i}$ olur.

Teorem 6.1.7 *Pre-Urysohn uzayların keyfi çarpımı pre-Urysohn'dur.*

İspat: Kabul edelim ki her $i \in I$ için (X_i, τ_i) ler *pre-Urysohn* uzaylar ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olsun. (X, τ_*) çarpım uzayının *pre-Urysohn* olduğunu göstereceğiz. $x \neq y$ için $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ olduğundan en az bir $i_0 \in I$ için $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ olur. (X_{i_0}, τ_{i_0}) *pre-Urysohn* olduğundan $\widehat{U_{i_0}} \cap \widehat{V_{i_0}} = \emptyset$ olacak şekilde x_{i_0} ve y_{i_0} ın sırasıyla en az bir U_{i_0} ve V_{i_0} pre-açık komşulukları vardır. Bu durumda Teorem 5.1.17 den U ve V pre-açık kümelerdir. Teorem 5.1.21 den $\widehat{U} \subset \widehat{U_{i_0}} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$, $\widehat{V} \subset \widehat{V_{i_0}} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$ dir. $\widehat{U} \cap \widehat{V} \subset (\prod_{i \neq i_0} X_i) \times (\widehat{U_{i_0}} \cap \widehat{V_{i_0}}) = \emptyset$ olur. Buradan $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ dir. Bu ise (X, τ) nun *pre-Urysohn* olduğunu gösterir.

Şimde ise bir *pre-Urysohn* uzayın hangi şartlar altında Urysohn olduğunu gösterelim.

Tanım 6.1.8 (Alt-maksimal uzay) (X, τ) topolojik uzay olsun. X in yoğun her alt kümesi açık ise uzaya alt-maksimal denir. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur ama açık değildir. Bu sebeple alışılmış topolojik uzay alt-maksimal değildir.

Teorem 6.1.9 ([20]) (X, τ) uzayı alt-maksimaldır ancak ve ancak $PO(X, \tau) = \tau$.

Teorem 6.1.10 (X, τ) uzayında $A \in PO(X, \tau)$ dır ancak ve ancak D yoğun bir küme ve $G \in \tau$ olmak üzere $A = D \cap G$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $A \in PO(X, \tau)$ olsun. $A \subseteq (\overline{A})^o$ dır. $G = (\overline{A})^o$ ve $D = A \cup G^c$ olsun. $\overline{D} = \overline{A \cup G^c} = \overline{A} \cup \overline{G^c} = \overline{A} \cup G^c = \overline{A} \cup ((\overline{A})^o)^c = X$ den D yoğun kümedir.

$$D \cap G = (A \cup G^c) \cap G = (A \cap G) \cup (G^c \cap G) = (A \cap G) \cup \emptyset = (A \cap G) = A.$$

Tersine olarak $A = D \cap G$ olsun. Burada D yoğun ve G açık bir kümedir. D yoğun bir küme olduğu için $D \subseteq (\overline{D})^o$ sağlar ki $D \in PO(X, \tau)$ olur. Teorem 5.1.15 den açık bir küme ile pre-açık bir kümenin kesişimi pre-açık olduğundan $A \in PO(X, \tau)$.

Teorem 6.1.11 (X, τ) uzayı *pre-Urysohn* olsun. (X, τ) uzayı Urysohn'dur ancak ve ancak (X, τ) uzayı alt-maksimaldır.

İspat: Her Urysohn uzayı *pre-Urysohn* olduğu ve kabulden dolayı açık ile pre-açık kavramlar denktir. O halde $PO(X, \tau) = \tau$ olur. Teorem 6.1.9'dan dolayı (X, τ) uzayı alt-maksimaldır.

Tersine olarak (X, τ) uzayı *pre-Urysohn* ve alt-maksimal olsun. (X, τ) nun Urysohn olduğunu göstereceğiz. (X, τ) *pre-Urysohn* olduğundan her $x, y \in X, x \neq y$ için $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V pre-açık komşulukları vardır. (X, τ) alt-maksimal olduğundan Teorem 6.1.9 dan $PO(X, \tau) = \tau$ olur ki $U, V \in \tau$ yazılır. Lemma 5.1.22 den dolayı $\widehat{U} = \overline{U}, \widehat{V} = \overline{V}$ olduğundan $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur. Bu ise (X, τ) uzayının Urysohn olduğunu gösterir.

6.2 P-Urysohn Uzaylar

Tanım 6.2.1 (*P-Urysohn* uzay) (X, τ) topolojik uzaydaki farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla en az bir U ve V pre-açıkları varsa (X, τ) uzayına *p-Urysohn* denir, yani uzayın farklı noktalarının kapanışları ayrık, pre-açık komşulukları vardır [8].

Örnek 6.2.2 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay *p-Urysohn*'dur. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olmak üzere

$$x \in \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right) = U, y \in \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right) = V$$

olarak seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır.

(2) $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay *p-Urysohn*'dur. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ olarak seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır. $(PO(X, P(X)) = P(X))$

(3) $(X, \{X, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay *p-Urysohn*'dur. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in \{x\} = U$ ve $y \in \{y\} = V$ olarak seçersek $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde U ve V pre-açık komşulukları vardır. $(PO(X, \{X, \emptyset\}) = P(X))$

Not: (X, τ) topolojik uzay, K kapalı kümeler sınıfı ve $Pcl(X, \tau)$ pre-kapalı kümelerin sınıfı olmak üzere her kapalı küme pre-kapalı olduğunda $K \subseteq Pcl(X, \tau)$ olur ki buradan (X, τ) uzayı *p-Urysohn* ise *pre-Urysohn*'dur. Tersisi genelde doğru değildir.

Örnek 6.2.3 $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$ olsun.

Çizelge 6.1. (X, τ) topolojik uzayındaki pre-açık ve pre-kapalı kümeler.

A	$\overline{A}$	$(\overline{A})^o$	$A \subseteq (\overline{A})^o$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓
X	X	X	✓
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	✗
$\{b\}$	X	X	✓
$\{c\}$	X	X	✓
$\{d\}$	$\{a, d\}$	$\emptyset$	✗
$\{a, b\}$	X	X	✓
$\{a, c\}$	X	X	✓
$\{a, d\}$	$\{a, d\}$	$\emptyset$	✗
$\{b, c\}$	X	X	✓
$\{b, d\}$	X	X	✓
$\{c, d\}$	X	X	✓
$\{a, b, c\}$	X	X	✓
$\{a, b, d\}$	X	X	✓
$\{a, c, d\}$	X	X	✓
$\{b, c, d\}$	X	X	✓

$$PO(X, \tau) = \left\{ \emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \right\},$$

$$PCL(X, \tau) = \left\{ \emptyset, X, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}, \{a\} \right\}$$

Çizelge 6.2. (X, τ) topolojik uzayındaki tüm alt kümelerin kapanış ve pre-kapanışlarının sınıfı.

• $\widehat{\emptyset} = \emptyset$	▪ $\overline{\emptyset} = \emptyset$
• $\widehat{X} = X$	▪ $\overline{X} = X$
• $\widehat{\{b\}} = \{b\}$	▪ $\overline{\{b\}} = X$
• $\widehat{\{c\}} = \{c\}$	▪ $\overline{\{c\}} = X$
• $\widehat{\{a, b\}} = \{a, b\}$	▪ $\overline{\{a, b\}} = X$
• $\widehat{\{a, c\}} = \{a, c\}$	▪ $\overline{\{a, c\}} = X$
• $\widehat{\{b, c\}} = X$	▪ $\overline{\{b, c\}} = X$
• $\widehat{\{b, d\}} = \{b, d\}$	▪ $\overline{\{b, d\}} = X$
• $\widehat{\{c, d\}} = \{c, d\}$	▪ $\overline{\{c, d\}} = X$
• $\widehat{\{a, b, c\}} = X$	▪ $\overline{\{a, b, c\}} = X$
• $\widehat{\{a, b, d\}} = \{a, b, d\}$	▪ $\overline{\{a, b, d\}} = X$
• $\widehat{\{a, c, d\}} = \{a, c, d\}$	▪ $\overline{\{a, c, d\}} = X$
• $\widehat{\{b, c, d\}} = X$	▪ $\overline{\{b, c, d\}} = X$

Şimdi (X, τ) uzayının p -Urysohn olmadığını gösterelim. $a \neq b$ olmak üzere $a \in U$ ve $b \in V$ için $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde pre-açıkları yoktur. Şimdi ise (X, τ) uzayının pre -Urysohn olduğunu gösterelim.

- $a \neq b$ için $a \in \{a, c\} = U, b \in \{b\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$
- $a \neq c$ için $a \in \{a, b\} = U, c \in \{c\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $a \neq d$ için $a \in \{a, c\} = U, d \in \{b, d\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, c\} \cap \{b, d\} = \emptyset$
- $b \neq c$ için $b \in \{a, b\} = U, c \in \{c\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset$
- $b \neq d$ için $b \in \{a, b\} = U, d \in \{c, d\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$

- $c \neq d$ için $c \in \{a, c\} = U, d \in \{b, d\} = V$ pre-açıkları vardır, öyle ki $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \{a, c\} \cap \{b, d\} = \emptyset$

olur ki (X, τ) uzayı *pre-Urysohn* olmasına rağmen *p-Urysohn* değildir.

Teorem 6.2.4 *p-Urysohn* uzayı olma topolojik bir özelliktir.

İspat: Kabul edelim ki $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon ve $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ olsun. f in bire bir ve örtenliğinden $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ vardır. (X, τ) nun *p-Urysohn* olmasından $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ olacak şekilde $x_1 \in G, x_2 \in H$ pre-açık komşulukları vardır öyle ki $y_1 \in f(G)$ ve $y_2 \in f(H)$ dir. G ve H pre-açık olduğundan $G \subseteq (\overline{G})^o$ ve $H \subseteq (\overline{H})^o$ yazılır. $f(G) \subseteq f((\overline{G})^o)$ ve $f(H) \subseteq f((\overline{H})^o)$ dir. f nin homeomorfizm olmasından $f(G) \subseteq f((\overline{G})^o) = (f(\overline{G}))^o = (\overline{f(G)})^o$ ve $f(H) \subseteq f((\overline{H})^o) = (f(\overline{H}))^o = (\overline{f(H)})^o$ dir. Buradan $f(G) \subseteq (\overline{f(G)})^o$ ve $f(H) \subseteq (\overline{f(H)})^o$ olur bu ise $f(G)$ ve $f(H)$ nin (Y, σ) nin pre-açık olduğunu gösterir.

f homeomorfizm olduğundan $\overline{f(G)} \subseteq f(\overline{G})$ ve $\overline{f(H)} \subseteq f(\overline{H})$ dir. Buradan $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} \subseteq f(\overline{G}) \cap f(\overline{H})$ olur. Kabul edelim ki $f(\overline{G}) \cap f(\overline{H}) \neq \emptyset$ olsun. $z \in f(\overline{G})$ ve $z \in f(\overline{H})$ vardır. f , bire bir olduğundan $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{G}) = \overline{G}$ ve $f^{-1}(z) \in f^{-1}f(\overline{H}) = \overline{H}$ olur ki $f^{-1}(z) \in \overline{G} \cap \overline{H}$ yazabiliriz. O halde $\overline{G} \cap \overline{H} \neq \emptyset$ dur. Bu ise (X, τ) uzayının *p-Urysohn* olması ile çelişir. Böylece $\overline{f(G)} \cap \overline{f(H)} = \emptyset$ olacak şekilde y_1 ve y_2 nin Y de pre-açık komşulukları vardır, yani (Y, σ) uzayı *p-Urysohn*'dur.

Sonuç 6.2.5 *p-Urysohn* uzayı olma pre-topolojik bir özelliktir.

Teorem 6.2.6 (X, τ) uzayı *p-Urysohn*, $A \subseteq X$ için $A \subseteq (\overline{(A^o)})^o$ olsun. Bu durumda (A, τ_A) alt uzayı *p-Urysohn*'dur.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) uzayı *p-Urysohn* olsun. $\forall x, y \in A, x \neq y$ için x, y nin sırasıyla en az bir U ve V pre-açık komşulukları vardır öyle ki $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur.

$A \subseteq (\overline{(A^o)})^o$ ve U, V pre-açık olduğundan $A \cap U, A \cap V \in PO(X, \tau)$ dır. Alt uzay topolojisine göre Teorem 2.1.3 den

$$\begin{aligned}\overline{(U \cap A)_A} \cap \overline{(V \cap A)_A} &= ((\overline{U \cap A}) \cap A) \cap ((\overline{V \cap A}) \cap A) \\ &\subset (\overline{U \cap A}) \cap (\overline{V \cap A}) \cap A \\ &\subset (\overline{U \cap A}) \cap (\overline{V \cap A}) \\ &\subset \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\end{aligned}$$

den $\overline{(U \cap A)_A} \cap \overline{(V \cap A)_A} = \emptyset$ olur. Tanım 6.2.1 den (A, τ_A) alt uzayı p -Urysohn'dur.

Teorem 6.2.7 P -Urysohn uzayların keyfi çarpımı p -Urysohn'dur.

İspat: Kabul edelim ki her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayları p -Urysohn ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olsun. (X, τ_*) çarpım uzayının p -Urysohn olduğunu göstereceğiz. $x \neq y$ için $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ olduğundan en az bir $i_0 \in I$ için $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ olur. (X_{i_0}, τ_{i_0}) uzayı p -Urysohn olduğundan $\overline{U_{i_0}} \cap \overline{V_{i_0}} = \emptyset$ olacak şekilde x_{i_0} ve y_{i_0} nin en az bir U_{i_0} ve V_{i_0} pre-açıkları vardır. Bu durumda Teorem 5.1.17 de sözü geçen $U = U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$ ve $V = V_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$ pre-açık kümelerdir.

$$\begin{aligned}\overline{U} \cap \overline{V} &= \overline{\left(U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \right)} \cap \overline{\left(V_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \right)} \\ &= \left(\overline{U_{i_0}} \times \overline{\prod_{i \neq i_0} X_i} \right) \cap \left(\overline{V_{i_0}} \times \overline{\prod_{i \neq i_0} X_i} \right) \\ &= (\overline{U_{i_0}} \cap \overline{V_{i_0}}) \times \overline{\prod_{i \neq i_0} X_i} \\ &= \emptyset \times \overline{\prod_{i \neq i_0} X_i} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

olur bu ise Tanım 6.2.1'den (X, τ_*) çarpım uzayı p -Urysohn olması demektir.

Teorem 6.2.8 Her p -Urysohn uzayı T_1 dir.

İspat: (X, τ) uzayı p -Urysohn ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin en az bir U ve V pre-açık komşulukları vardır. U, V pre-açık olduğundan $U \subseteq (\overline{U})^o$ ve $V \subseteq (\overline{V})^o$ dir. $U \cap V \subseteq (\overline{U})^o \cap (\overline{V})^o = (\overline{U} \cap \overline{V})^o = (\emptyset)^o = \emptyset$ olur ki $x \in (\overline{U})^o$ olduğundan $x \notin (\overline{V})^o$ ve $y \in (\overline{V})^o$ olduğundan $y \notin (\overline{U})^o$ olur. Böylece (X, τ) uzayı T_1 dir.

Teorem 6.2.9 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bire bir ve θ -pre-sürekli fonksiyon olsun. (Y, σ) uzayı Urysohn ise (X, τ) uzayı da p -Urysohn'dur.

İspat: Kabul edelim ki $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ olsun. f fonksiyonu bire bir olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. (Y, σ) uzayı Urysohn olduğundan $V_1, V_2 \in \sigma$ vardır öyle ki $f(x_1) \in V_1, f(x_2) \in V_2$ için $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ olur. f , θ -pre-sürekliliğinden X de $x_1 \in U_1$ ve $x_2 \in U_2$ olacak şekilde U_1, U_2 pre-açıkları vardır ve $f(\overline{U_1}) \subset \overline{V_1}$, $f(\overline{U_2}) \subset \overline{V_2}$ dir.

$\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \subset f^{-1}(\overline{V_1}) \cap f^{-1}(\overline{V_2}) = f^{-1}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \emptyset$ olur bu (X, τ) nin p -Urysohn olduğunu gösterir.

Teorem 6.2.10 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bire bir ve θ -pre-irresolute fonksiyon olsun. (Y, σ) uzayı p -Urysohn ise (X, τ) uzayı da p -Urysohn'dur.

İspat: Kabul edelim ki $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ olsun. f bire bir olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. (Y, σ) uzayı p -Urysohn olduğundan V_1 ve V_2 pre-açık komşulukları vardır öyle ki $f(x_1) \in V_1, f(x_2) \in V_2$ için $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ olur. f , θ -pre-irresolute olduğundan X de $x_1 \in U_1$ ve $x_2 \in U_2$ olacak şekilde U_1, U_2 pre-açıkları vardır ve $f(\overline{U_1}) \subset \overline{V_1}, f(\overline{U_2}) \subset \overline{V_2}$ dir. Buradan

$$\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \subset f^{-1}(\overline{V_1}) \cap f^{-1}(\overline{V_2}) = f^{-1}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \emptyset$$

olur bu ise (X, τ) nun p -Urysohn olduğunu gösterir.

Lemma 6.2.11 [1] $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ zayıf sürekli ise Y nin her V pre-açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(\overline{V}))^o$ dir.

Teorem 6.2.12 (Y, σ) uzayı p -Urysohn, $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bire bir ve zayıf sürekli ise (X, τ) uzayı da Hausdorff dur.

İspat: Kabul edelim ki x_1 ve x_2 , X in herhangi iki farklı noktası olsun. f bire bir olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. (Y, σ) uzayı p -Urysohn olduğundan V_1 ve V_2 pre-açık kümeleri vardır öyle ki $f(x_1) \in V_1, f(x_2) \in V_2$ için $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ olur. f , zayıf sürekli olduğundan X de $x_1 \in U_1$ ve $x_2 \in U_2$ olacak şekilde U_1, U_2 açıkları vardır ve $f(U_1) \subset \overline{V_1}, f(U_2) \subset \overline{V_2}$ dir. Buradan

$$U_1 \cap U_2 \subset f^{-1}(\overline{V_1}) \cap f^{-1}(\overline{V_2}) = f^{-1}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \emptyset$$

oldüğundan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olur bu ise (X, τ) nun Hausdorff olduğunu gösterir.

Teorem 6.2.13 (Y, σ) uzayı p -Urysohn uzay, $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ zayıf sürekli ise $A(f, g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ kümesi de (X, τ) uzayı da kapalıdır.

İspat: $x \in A^c$ ise $f(x) \neq g(x)$ dir. (Y, σ) uzayı p -Urysohn olduğundan U ve V pre-açık kümeleri vardır, öyle ki $f(x) \in U$ ve $g(x) \in V$ için $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ olur. f , zayıf-sürekli olduğundan Lemma 6.2.11 den $x \in f^{-1}(U) \subset (f^{-1}(\overline{U}))^o$ ve $x \in g^{-1}(V) \subset (g^{-1}(\overline{V}))^o$ dir. $W = (f^{-1}(\overline{U}) \cap g^{-1}(\overline{V}))^o$ olsun. W , X te açık kümedir öyle ki $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ dan $x \in W \setminus A$ dir. $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset (f^{-1}(\overline{U}) \cap g^{-1}(\overline{V}))^o = W \subset A^c$ olur ki A^c , (X, τ) da açıktır dolayısıyla A kümesi kapalıdır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Urysohn uzaylar olarak tanımlanan *semi-Urysohn*, *s-Urysohn*, *pre-Urysohn* ve *p-Urysohn* uzayların tanımları verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu uzayların hangi şartlar altında kalıtsal, çarpımsal oldukları belirlenmiştir. Ardından semi-açık ve pre-açık kavramlar kullanarak elde edilen semi-süreklilik, pre-süreklilik, θ -süreklilik, θ -pre-irresolute gibi yeni dönüşümler altında genelleştirilmiş Urysohn uzayların durumları araştırılmıştır.

Bu çalışma sonucunda elde edilen bilgiler ile aşağıdaki sorular araştırmacılara öneri niteliğinde sorulabilir.

1. Özellikle *semi-Urysohn* uzayların çarpımları, bölümleri de *semi-Urysohn* uzayı mı?
2. *s-pre-Urysohn*, *pre-s-Urysohn*, *gs-Urysohn* (genelleştirilmiş *semi Urysohn*) ve *sg-Urysohn* (semi genelleştirilmiş *Urysohn*) uzaylar tanımlanabilir mi?
3. Semi-açıklık, pre-açıklık kavramları ile *semi* – $T_{1/4}$ veya *pre* – $T_{1/4}$ uzaylar oluşturulabilir mi?
4. *Semi-Urysohn* (veya *s-Urysohn*) uzaylar ile *pre-Urysohn* veya *p-Urysohn* uzaylar arasındaki ilişki hangi şartlar altında kurulabilir?

KAYNAKLAR

1. Malykhin, V.I. ve Tironi, G., 1996. Weakly FU-spaces, Università Degli Studi Di Trieste, Quaderni Matematici, 386, 1-9.
2. Tzannes, T., 1997. Connected Hausdorff topologies weaker than the Euclidean topology of the rationals, Publicationes Mathematicae Debrecen, 50, 189-196.
3. Noiri T. ve Umehara, J., 1996. Properties of θ -irreducible spaces, Acta Mathematica Hungarica, 72, 61-66.
4. Arya, S. P. ve Bhamini, M. P., 1984. P -closed spaces, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 15, 89-98.
5. Arya, S. P. ve Bhamini, M. P., 1987. Some generalizations of pairwise Urysohn spaces, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 18, 1088-1093.
6. Arya, S. P. ve Bhamini, M. P., 1992. Semi-topological properties, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 15, 267-272.
7. Malghan S. R. ve Navalagi, G.B., 1990. Almost p -regular, p -completely regular and almost p -completely regular spaces Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 34 (82), 317-326.
8. Pal M. ve Bhattacharyya, P., 1996. Feeble and strong forms of pre-irresolute function, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 19, 63-75.
9. Staum, R., 1974. The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field, Pacific Journal of Mathematics, 50, 169-185.
10. Maheshwari, S. N. ve Prasad, R., 1975. Some new separation axioms, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 89, 395-402.
11. Soundararajan, T., 1968. Weakly Hausdorff spaces and the cardinality of topological spaces, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, 301-306.
12. El-Deeb, N., Hasanein, A., Mashhour A. S. ve Noiri, T., 1983. On p -regular spaces, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie, 27 (4), 311-315.
13. Maheshwari, S. N. ve Prasad, R., 1975. On s -regular spaces, Glasnik Matematicki, 10 (30), 347-350.
14. Levine, N., 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, The American Mathematical Monthly, 70 (1), 36-41.
15. Crossley, S. ve Hildebrand, S., 1972. Semi-topological properties, Fundamenta Mathematicae, 74 (3), 233-254.

16. Maheswary, S. N. ve Prasad, R., 1978. On s -normal spaces, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie, 22 (10), 27-29.
17. Arya, S. P. ve Bhamini, P., 1982. Some generalizations of T_D spaces, Matematički Vesnik, 19 (34), 221-230.
18. Aull, C.E. ve Thron, W.J., 1963. Separation axioms between T_0 and T_1 , Indian Journal Mathematics, 2 (1), 26-37.
19. Mashhour, A. S., Abd El-Monsey, M.E. ve El- Deeb, S. N., 1982. On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proceedings of the Mathematical and Physical Society of Egypt, 53, 47-53.
20. Paul, R. ve Bhattacharyya, P., 1999. On pre-Urysohn spaces, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 22, 23-34.
21. Navalagi, G., 2011. Some more properties of Pre Urysohn space, International Journal of Engineering, Computer Science and Mathematical, 2 (1), 43-47.
22. Koçak, M., 2015. Genel topolojiye giriş ve problem çözümleri, İkinci Baskı, Nisan Kitabevi Yayınları, Eskişehir.
23. Munkreas, J. R., 1975. A first course, Prentice Hall Inc., New Jersey, ABD.
24. Levine, N., 1961. A decomposition of continuity in topological spaces, American Mathematical Monthly, 68, 44-46.
25. Fomin, S. V., 1943. Extensions of topological spaces, Annals of Mathematics, 44, 471-480.
26. Steen L.A. ve Seebach, J.A., 1970. Jr., Counterexamples in topology, Holt, Rinerhart and Winston, Inc., New York-Montreal-London.
27. Bhattacharyya, P. ve Lahiri, B. K., 1987. Semi generalized closed set in topology, Indian Journal Mathematics, 29, 376-382.
28. Erciyes, A., Aytekin, A. ve Şahan, T., 2016. Semi-homotopy and semi-fundamental groups, Konuralp Journal of Mathematics, 4(1), 155-163.
29. Şahan, N., 2019. Yarı ayırma aksiyomları üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
30. Khedr, F. H. ve Noiri, T., 1986. On θ -irresolute functions, Indian Journal Mathematics, 28, 211-217.
31. Ganster, M., Noiri T. ve Reilly, I. L., 1988. Weak and strong forms of θ -irresolute functions, Journal of Institute of Mathematics and Computer Sciences. Mathematics Series, 1 (1), 19-29.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Kübra ERKUL

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016-2020.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2020-2022.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Hatay, Antakya, Sihirli Matematik Kursu, 2022-.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Erkul, K. ve Erciyes, A., 2022. Generalized Urysohn spaces, 8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, Bildiriler Kitabı, 125-126.