

KIRGIZISTAN-TÜRKİYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

Hazırlayan
Arzıgul İMANKULOVA

Daişman
Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022
BİŞKEK/KIRGIZİSTAN

**KIRGIZİSTAN-TÜRKiYE MANAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

**Hazırlayan
Arzıgul İMANKULOVA**

**Daişman
Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ŞUBAT 2022
BİŞKEK/KIRGIZİSTAN**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Arzıgul İMANKULOVA

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Мен бул эмгекте алынган баардык маалыматтарды академиялык жана этикалык эрежелерге ылайык колдондум. Тагыраак айтканда, бул эмгекте колдонулган, бирок мага тиешелүү болгон маалыматтардын баардыгын тиркемеде так көрсөттүм жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетким келет.

Арзыгул Иманкулова

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Elementer esnek topolojik uzaylarda kompaktlık” adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan

Arzıgul İMANKULOVA

Danışman

Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ

Matematik ABD başkanı

Prof.Dr. Anarkül URDALETOVA

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Элементардык ийкем топологиялык мейкиндиктерде компактуулук” аттуу магистирдик иш, Кыргыз-Түрк “Манас” университетинин магистирдик иш мыйзамдарынын жана магистирдик иш жазма куралдарынын чегинде жазылды.

Диссертациялык ишти даярдаган

Арзыгул Иманкулова

Илимий жетекчиси

PhD, доцент Исмeт Алтынташ

Математика бөлүм башчысы

Ф-м.и.д., профессор Анаркүл Урдалетова

KABUL VE ONAY

Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ danışmanlığında Arzıgul İMANKULOVA tarafından hazırlanan “Elemanter esnek topolojik uzaylarda kompaktlık” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

...../...../.....

JÜRİ

Komisyon Başkanı: Prof. Dr. Asılbek ÇEKKEEV

.....

Danışman: Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ

.....

Üye: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV

.....

Üye: Prof.Dr. Muhammet KAMALI

.....

Üye: Prof. Dr. Avıt ASANOV

.....

Üye: Doç. Dr. Kalıskan MATANOVA

.....

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ
Enstitü Müdürü

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

PhD, доцент Исмет Алтынташ жетекчилигинде Иманкулова Арзыгул тарабынан даярдалган “Элементардык ийкем топологиялык мейкиндиктерде компакттуулук” аттуу темада магистрдык иш комиссия тарабынан Кыргыз-Түрк “Манас” Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдык иш болуп кабыл алынды.

...../...../.....

Комиссия:

Төрагасы :	Ф-м.и.д., профессор Чекеев Асылбек Асакеевич
Илимий жетекчи:	PhD, доцент Исмет Алтынташ
Мүчө:	Ф-м.и.д., профессор Өмүралиев Асан
Мүчө:	PhD., профессор Мухаммет Камали
Мүчө:	Ф-м.и.д., профессор Асанов Авыт
Мүчө :	Ф-м.и.к., доцент Матанова Калыскан

ЧЕЧИМ

Бул магистрдык ишти кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин датасында жана санындагы чечими менен бекитилди..

...../...../.....

PhD, доцент Исмет Алтынташ

Институт мүдүрү

TEŞEKKÜR

Bu tezde e-esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, e-esnek dizisel kompaktlık, e-esnek sayılabilir kompaktlık, e-esnek yerel kompaktlık üzerine çalışıldı. e-esnek kompakt uzayların e-esnek Hausdorff uzaylar arasındaki ilişkiler ve bu uzayların kendi aralarındaki ilişkiler incelenerek birçok temel özellikleri ispatlandı.

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a ve Matematik Anabilim Dalı ğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Ayrıca, eğitim süresince varlıkları ve destekleri ile daima yanımda olan ve bu güne gelmede büyük fedakârlıklara katlanan aileme ve sevgili eőime sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Arzıgul İMANKULOVA

Biőek, Şubat 2022

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

Arzıgul İMANKULOVA

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Şubat 2022

Danışman: Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

KISA ÖZET

Bu tezin amacı, elemanter esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve yerel kompaktlık kavramlarını tanımlamak, temel topolojik özelliklerini araştırmak ve birbirleri arasındaki ilişkileri incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki temel çalışmalar yapıldı.

1. Elemanter esnek topolojik uzaylarda örtü ve açık örtü tanımlandı ve örnekler verildi.
2. Kompakt elemanter esnek topolojik uzay ve alt uzaylar tanımlandı, bazı örnekler verildi. Kompakt elemanter esnek uzayın kalıtsal özellikleri ispatlandı.
3. Elemanter esnek Hausdorff uzayda kompaktlık üzerine çalışıldı. Bu bağlamda elemanter esnek kompaktlık Hausdorff uzayın hem esnek regüler hem de esnek normal oldukları ispatlandı.
4. Dizisel elemanter esnek topolojik uzay tanımlandı, dizisel elemanter esnek uzayın her esnek kapalı kümenin dizisel kompakt olduğu ve dizisel elemanter esnek uzayın topolojik özelliğe sahip olduğu ispatlandı.
5. Bir elemanter esnek topolojik uzayın Balzano-Weirstrass özelliğine sahip olması ile onun sayılabilir kompakt olmasının denk olduğu ispatlandı.
6. Lokal elemanter esnek kompakt uzay tanımlandı ve bu uzayın bazı kalıtsal ve topolojik özellikleri ispatlandı.
7. Elemanter esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık sayılabilir kompaktlık ve lokal kompaktlık özelliklerinin birbirleri arasındaki ilişkiler incelendi.

Kompaktlıkla ilgili bazı özellikler hariç bu tezde ispatlanan bütün sonuçlar henüz literatürde olmayan yeni sonuçlardır.

Anahtar kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter işlemler, elemanter esnek topoloji, esnek kompakt uzay, dizisel kompakt uzay, sayılabilir esnek kompakt uzay, lokal esnek kompakt uzay.



COMPACTNESS IN ELEMENTARY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Arzygul IMANKULOVA

Kyrgyz Turkish Manas University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master Dissertation, February 2022

Advisor: Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

ABSTRACT

The aim of this thesis is to the concepts such as compactness, sequentially compactness countably compactness and locally compactness in elementary soft topological spaces and to investigate their basis topological properties and to examine to examine the relationships between them. For this purpose, the following studies has been performed.

1. The cover and open cover in elementary soft topological spaces has been defined and some examples have been given.
2. The compact elementary soft topological spaces and subspaces have been defined, some examples have been given and the hereditary properties of the compact elementary soft topological space have been proven.
3. In the elementary soft Hausdorff space, compactness was studied. n this context, it has been proved that a elementary soft compactness Hausdorff space is both an soft regular and soft normal.
4. Sequentially elementary soft topological space has been defined. it has been proved that sequentially elementary soft spaces have topological properties all soft closed sets of its are sequentially compact.
5. It has been proved that an elementary flexible topological space has the Balzano-Weirstrass property if and only it is countably compact.
6. Locally elementary soft compact space has been defined and its hereditary and topological properties have been proven.

7. In elementary soft topological spaces, the relations between the concepts of compactness, sequentially compactness, countably compactness and locally compactness have been investigated.

Except some results related to compactness, all the results proved in this thesis are new results that are not yet available in the literature.

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, elementary soft topology, compact soft space, sequentially soft space, countably soft space, locally compact soft space.



КОМПАКТНОСТЬ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГИБКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Арзыгуль ИМАНКУЛОВА

Кыргызско-Турецкий университет Манас, Институт естественных наук

Магистерская диссертация, Февраль 2022 г.

Научный руководитель: доц. Доц. доктор Исмет АЛТЫНТАШ

АННОТАЦИЯ

Цель этой диссертации определить компактность в элементарном мягком топологическом пространстве, секвенциальную компактность, счётную компактность и локальную компактность, исследовать основные топологические свойства и связь между ними. Чтобы достичь этой цели сделано следующее.

1. В элементарных мягких топологических пространствах определены покрытия и открытые покрытия и приведены примеры.
2. Определены компактное элементарное гибкое топологическое пространство и подпространства, приведены примеры. Доказаны унаследованные свойства компактного элементарного мягкого пространства.
3. Работали над компактностью в элементарном упругом хаусдорфовом пространстве. В этом контексте доказано, что элементарная мягкая компактность Хаусдорфова пространства является как мягкой регулярной, так и мягкой нормальностью.
4. Определено секвенциально элементарное гибкое топологическое пространство, доказано, что каждое мягкое замкнутое множество секвенциального элементарного мягкого пространства секвенциально компактно, а серийное элементарное мягкое пространство обладает топологическим свойством.
5. Доказано, что элементарное мягкое топологическое пространство обладает свойством Бальцано – Вейрстрасса и счетно компактно.

6. Определена локальная элементарная мягкая компактность и доказаны некоторые наследственные и топологические свойства этого пространства.

7. Исследована связь между компактностью, секвенциальной компактностью, счетной компактностью и локальной компактностью в элементарных мягких топологических пространствах.

За исключением некоторых особенностей, связанных с компактностью, все результаты, данные в этой диссертации, являются новыми результатами, которые еще не доступны в литературе.

Ключевые слова: Мягкое множество, мягкий элемент, элементарные операции, элементарная мягкая топология, мягкое топологическое пространство, секвенциальная компактность, счетная компакность, локальная компактность в мягком пространстве.

ЭЛЕМЕНТАРДЫК ИЙКЕМ ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДЕ КОМПАКТТУУЛУК

Арзыгул ИМАНКУЛОВА

Кыргыз Түрк «Манас» университети, Табигый илимдер институту

Магистрдик диссертация, Февраль 2022

Илимий жетекчи: доц. док. Исмет АЛТЫНТАШ

КЕҢИРИ АННОТАЦИЯ

Инженерия, экономика, экология жана социология сыяктуу так илимдердеги түшүнүктөрдүн жыйынтыгында пайда болгон белгисиздик маселелерин математикалык моделдерин түзүү жана чыгаруу үчүн Аристотельдин логикасы жана классикалык көптүктөр теориясы жетишсиз болуусу мүмкүн. Бул түрдөгү маселелерди чыгаруу үчүн ыктымалдуулуктар теориясы, бүдөмүк көптүктөр теориясы, жакындатылган көптүктөр теориясы, интуитивдик бүдөмүк көптүктөр теориясы, аралык математикасы теориясы жана ийкем көптүктөр теориясы сыяктуу көптөгөн теориялар чыгарылган. Бул теориялардын эң маанилүүлөрүндөн бири Л. А. Задех тарабынан ойлоп табылган жана жетишсиздик түшүнүгүнүн маселелерин чыгара алган бүдөмүк көптүктөр теориясы көптөгөн тармактарда ийгиликтүү колдонулган. Бирок мүчөлүк функциялары колдонулган бул теорияда ар би учур үчүн мүчөлүк функциясын тургузуу оңой эмес. Д. Молодцов бул кыйынчылыктарды жок кылуу үчүн ийкем көптүктөр теориясын ачкан. Ийкем көптүктөр теориясында, бүдөмүк көптүктөр теориясындагы чыныгы мааниге ээ мүчөлүк функцияларынын ордуна мааниси көптүк болгон чагылтуу колдонулат жана бир ийкем көптүк, параметрлер көптүгүн бир универсалдык көптүктөрдүн классына чагылткан чагылтуу деп аныкталат.

Ийкем көптүктөр теориясы башында математика жана көптөгөн тармактарда ийгиликтүү колдонулган. Ийкем көптүктөргө акыркы жылдарда көптөгөн

математикалык түзүлүштөр жасалды. Бул тармактагы изилдөөлөр тездик менен уланууда.

Биринчи жолу 2011 жылында М. Шабир жана М. Наз ийкем көптүктөрдө топологиялык түзүлүштөрдү жасаган. В. К. Мин бул ийкем топологиялык мейкиндиктерде ийкем айырма аксиомалары жөнүндө изилдөөлөрүн сунуштаган. 2012 жылында Х. Хазра жана анын достору Шабир жана Наз аныктаган ийкем топологиядан айырмалуу бир топология аныкташкан. Бул мезгилде А. Айгүноглу, Б. П. Варол жана Х. Айгүн ийкем көптүктөр жана бүдөмүк ийкем көптүктөрдө топологиялык түзүлүштөрдү жасап көптөгөн топологиялык түшүнүктөрдү изилдешкен. И. Зорлутуна жана достору ийкем топологиялык мейкиндиктерде чекит түшүнүгүн колдонуу менен ийкем ички чекит, ийкем аймак, ийкем үзгүлтүксүздүк жана ийкем компактуулук түшүнүктөрдү таанытышкан. Мындан сырткары көптөгөн жазуучулар ийкем чекит түшүнүгүн колдонуу менен ийкем топологиялык мейкиндиктер жөнүндө көп сандагы жаңы изилдөөлөрдү жасашкан. 2012 жылында С. Дас жана С. К. Саманта ийкем чыныгы көптүктөр, ийкем чыныгы сандар жана алардын касиеттерин аныкташкан. Ушул эле авторлор 2013 жылы ийкем элемент менен ийкем көптүктөрдө элементардык ийкем көптүктөр амалдарын аныктап бул амалдарды колдонуу менен ийкем көптүктөрдө метрика түшүнүгүн тургузушкан. С. Дас, С. К. Саманта жана көптөгөн авторлор ийкем элемент түшүнүгүн колдонуу менен ийкем вектордук мейкиндиктери, ийкем нормалдуу мейкиндиктери, ийкем скалярдык көбөйтүү мейкиндиктери сыяктуу түрдүү математикалык түзүлүштөр жөнүндө изилдөө жүргүзүшкөн.

К. Ташкөпрү 2017 жылында докторлук диссертациясында адабиятта белгилүү болгон ийкем топологиялык түзүлүштөрдөн айырмалуу болгон, ийкем элемент негизинде ийкем көптүктөрдө аныкталган элементардык амалдар менен элементардык ийкем топология (э-ийкем топология) түшүнүгүн тургузган, адабияттагы көптөгөн негизги топологиялык түшүнүктөрдү бул жаңы түшүнүккө ылайыктуу боло тургандай аныктап алардын касиеттерин далилдеген. 2020 жылында К. Ташкөпрү жана И. Алтынташ э-ийкем топология жана ийкем функциянын көптөгөн касиеттерин далилдешти жана ийкем көптүктөрдү бир чечимге келүү маселесинде колдонушту. Ошол эле жылы И. Алтынташ, К.

Ташкөпрү жана Б. Селви саналуучу жана айырмалануучу э-ийкем топологиялык мейкиндиктерди аныкташты жана негизги касиеттерин далилдешти.

Бул диссертациянын максаты э-ийкем компакт мейкиндиктерди изилдөө. Бул максатты ишке ашыруу үчүн төмөнкү изилдөөлөр жасалды.

1. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик, $F \in S(\tilde{X})$ бир ийкем көптүк жана $G = \{G_i : i \in I\} \subset S(\tilde{X})$, \tilde{X} ийкем көптүгүнүн ийкем камтылган көптүктөрүнүн бир системасы болсун.

i. Эгерде $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in I} G_i$ болсо G системасы \tilde{X} абсолюттук ийкем көптүгүнүн бир э-ийкем жабуусу деп аталат.

ii. Эгерде $F \cong \bigcirc_{i \in I} G_i$ болсо G системасы F ийкем көптүгүнүн бир э-ийкем жабуусу деп аталат.

Эгерде ар бир $i \in I$ үчүн G_i көптүктөрү ийкем ачык болсо G жабуусу э-ийкем ачык жабуу, G_i көптүктөрү ийкем жабык болсо бул жабуу э-ийкем жабык жабуу деп аталат.

Эгерде $J \subset I$ чектүү болсо $G = \{G_i : i \in J \subset I\}$ э-ийкем жабуусу чектүү жабуу деп аталат.

2. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик болсун. Эгерде \tilde{X} көптүгүнүн ар бир ачык жабуусунан чектүү камтылган жабуу бөлүнүп алынса (\tilde{X}, T) мейкиндиги э-ийкем компакт мейкиндик деп аталат. Башкача айтканда каалагандай $G = \{G_i : i \in I\} \subset T$ ийкем ачык системасы берилсе $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in I} G_i$ болгон учурда $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in J} G_i$ ($J \subset I$ чектүү) болсо (\tilde{X}, T) мейкиндиги э-ийкем компакт мейкиндик деп аталат.

3. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик жана $F \subset S(\tilde{X})$ бир ийкем көптүк болсун. Эгерде (F, T_F, P) э-ийкем камтылган мейкиндиги компакт болсо F ийкем көптүгү (\tilde{X}, T, P) мейкиндигинде э-ийкем компакт

камтылган мейкиндик деп аталат. (F ийкем көптүгүнө компакт камтылган көптүк деп аталат.)

4. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик болсун. $F \in S(\tilde{X})$ ийкем көптүгү T э-ийкем топологиясына карата компакт болуусу үчүн F көптүгүнүн T_F э-ийкем топологиясына карата компакт болуусу керек жата жетиштүү.
5. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем T_2 мейкиндик болсун. Төмөнкүлөр бири бирине эквиваленттүү болот.
 - i. \tilde{X} көптүгүнүн ар бир ачык жабуусунун чектүү бир камтылган ийкем жабуусу бар.
 - ii. $S(\tilde{X})$ системасындагы ар бир чексиз көптүктүн жок дегенде бир ийкем жыйылуу элементи бар.
 - iii. Ийкем бош эмес көптүктөрдөн түзүлгөн $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \in S(\tilde{X})$ сыяктуу бири бирин камтыган азайуучу ийкем көптүктөрүн элементардык кесишүүсү да ийкем бош эмес болот.
6. Бир э-ийкем компакт мейкиндиктин ар бир ийкем жабык камтылган мейкиндиги э-ийкем компакт болот.
7. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик болсун.
 - i. Ар бир $\tilde{x} \neq \tilde{y} \in \tilde{X}$ үчүн $\tilde{x} \in U$ жана $\tilde{y} \notin U$ жана $\tilde{x} \notin V$ жана $\tilde{y} \in V$ боло тургандай ийкем ачык U, V камтылган көптүктөрү бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги T_1 мейкиндиги деп аталат.
 - ii. Ар бир $\tilde{x} \neq \tilde{y} \in \tilde{X}$ үчүн $\tilde{x} \in U$ жана $\tilde{y} \in V$ боло тургандай ийкем ачык жана кесилишпеген U, V камтылган көптүктөрү бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндигине Хаусдорфф (T_2) мейкиндиги деп аталат.

Бул аныктама негизинде ар бир э-ийкем T_2 мейкиндиги бир э-ийкем T_1 мейкиндик болот.

8. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем T_2 мейкиндиги болсун. Бул учурда ар бир э-ийкем компакт $F \in S(\tilde{X})$ камтылган көптүгү ийкем жабык болот.
9. (\tilde{X}, T, P) бир ийкем T_2 мейкиндиги $F \in S(\tilde{X})$ бир ийкем компакт камтылган көптүк жана $\tilde{x} \notin \tilde{F}$ бир ийкем элемент болсун. Бул учурда $\tilde{x} \in U$, $F \subset V$, $U \cap F = \emptyset$ боло тургандай U, V ийкем ачык көптүктөрү бар.
10. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндиги болсун. Ар бир $F \in S(\tilde{X})$ жана $\tilde{x} \notin F$ үчүн $\tilde{x} \in U$ жана $F \subset V$ боло тургандай ийкем ачык жана кесилишпеген U, V камтылган көптүктөрү бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги регулярдуу мейкиндик деп аталат.
- Ар бир э-ийкем компакт T_2 мейкиндиги бир э-ийкем регулярдуу мейкиндик болот.
11. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндиги болсун. Ар бир ийкем кесилишпеген жабык $F, K \in S(\tilde{X})$ үчүн $F \subset U$ жана $K \subset V$ боло тургандай ийкем ачык жана кесилишпеген U, V камтылган көптүктөрү бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги нормалдуу мейкиндик деп аталат.
- (\tilde{X}, T, P) э-ийкем нормалдуу мейкиндик жана ошол эле учурда бир э-ийкем T_1 мейкиндиги болсо бул мейкиндик э-ийкем T_4 мейкиндиги деп аталат.
- Ар бир э-ийкем компакт T_2 мейкиндиги бир э-ийкем нормалдуу мейкиндик болот.
12. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем T_2 мейкиндиги болсун. \tilde{X} ийкем көптүгүнүн каалагандай сандагы э-ийкем компакт камтылган көптүктөрүнүн кесилишүүсү э-ийкем компакт болот.
13. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем T_2 мейкиндиги болсун. Бул учурда $S(\tilde{X})$ нын чектүү сандагы э-ийкем компакт көптүктөрүнүн биригүүсү да э-ийкем компакт болот.

14. (\tilde{X}, T_1, P) жана (\tilde{Y}, T_1, P) эки э-ийкем топологиялык мейкиндик $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ үзгүлтүксүз бир чагылтуу болсун. \tilde{X} көптүгү э-ийкем компакт болсо $\tilde{Z} = f(\tilde{X})$ ийкем көптүгү да э-ийкем компакт болот.

15. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик болсун. \tilde{X} нын ийкем элементтеринен түзүлгөн ар бир $\{\tilde{x}_n\} \subset SE(\tilde{X})$ ийкем катарынын бир жакындаган камтылган катары бар болсо (\tilde{X}, T, P) э-ийкем секвенциалдуу компакт мейкиндик деп аталат.

$F \in S(\tilde{X})$ ийкем көптүгүнүн ийкем элементтеринен түзүлгөн ар бир катардын F көптүгүнүн \tilde{x} ийкем элементине жакындаган бир камтылган катары бар болсо F көптүгүнө секвенциалдуу компакт ийкем көптүк деп аталат.

(\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик $F \in S(\tilde{X})$ бир чектүү ийкем көптүк болсун. Бул учурда F ийкем секвенциалдуу компакт болот.

16. Э-ийкем катарлуу компакт мейкиндиктин ар бир ийкем жабык $F \in S(\tilde{X})$ камтылган көптүгү секвенциалдуу компакт болот.

17. (\tilde{X}, T_1, P) жана (\tilde{Y}, T_2, P) эки э-ийкем топологиялык мейкиндик, $\{\tilde{x}_n\}$ \tilde{X} нын ийкем элементтеринин бир катары жана $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x} \in \tilde{X}$, $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ ийкем үзгүлтүксүз бир чагылтуу болсун. Эгерде $f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(\tilde{x}) = \tilde{y} \in \tilde{Y}$ боло тургандай \tilde{Y} нын ийкем элементтеринин бир $\{\tilde{y}_n\} = \{f(\tilde{x}_n)\}$ катары бар болсо f чагылтуусу ийкем секвенциалдуу үзгүлтүксүз деп аталат.

(\tilde{X}, T_1, P) бир э-ийкем секвенциалдуу компакт мейкиндик, (\tilde{Y}, T_2, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик жана $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ үзгүлтүксүз ийкем функция болсун. Бул учурда $H = SS(f(SE(F)))$ ийкем көптүгү секвенциалдуу компакт болот.

18. (\tilde{X}, T, P) бир э-ийкем топологиялык мейкиндик болсун. Ар бир чексиз ийкем $F \in S(\tilde{X})$ көптүгүнүн жок дегенде бир ийкем жыйылуу элементи бар болсо

(\tilde{X}, T, P) мейкиндиги Больцано — Вейерштрасс касиетин канааттандырат деп айтылат.

Ар бир ε -ийкем компакт топологиялык мейкиндик Больцано — Вейерштрасс касиетин канааттандырат.

19. (\tilde{X}, T, P) ε -ийкем топологиялык мейкиндиктин саналуучу ар бир ийкем ачык жабуусунун чектүү бир ийкем камтылган жабуусу бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги саналуучу ε -ийкем компакт мейкиндик деп аталат.

Ар бир ε -ийкем компакт мейкиндик саналуучу ε -ийкем компакт болот.

20. (\tilde{X}, T, P) ε -ийкем топологиялык мейкиндик болсун. Төмөнкүлөр бири бирине эквиваленттүү болот.

- i. (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги саналуучу ε -ийкем компакт болот.
- ii. (\tilde{X}, T, P) мейкиндиги Больцано — Вейерштрасс касиетин канааттандырат.
- iii. (\tilde{X}, T, P) мейкиндигинде ийкем элементтерден түзүлгөн ар бир катардын бир ийкем предел элементи бар болот.

21. Ар бир ε -ийкем катарлуу компакт мейкиндик, ε -ийкем саналуучу компакт болот.

22. (\tilde{X}, T, P) бир ε -ийкем топологиялык мейкиндик болсун.

- i. Эгерде $\tilde{x} \in \tilde{X}$ чекитинин \tilde{X} мейкиндигинде бир компакт аймагы бар болсо (\tilde{X}, T, P) ийкем топологиялык мейкиндиги жергиликтүү компакт мейкиндик деп аталат.
- ii. Эгерде ар бир $\tilde{x} \in \tilde{X}$ үчүн \tilde{V} ийкем көптүгү компакт боло тургандай бир $V \in N(\tilde{x})$ ийкем ачык аймагы бар болсо (\tilde{X}, T, P) мейкиндигине жергиликтүү компакт мейкиндик деп аталат.

Бир ε -ийкем топологиялык компакт мейкиндикте ар бир ийкем элементтин бир ийкем компакт аймагы бар болгондуктан ар бир ε -ийкем топологиялык компакт мейкиндик жергиликтүү компакт мейкиндик болот.

23. (\tilde{X}, T_1, P) жана (\tilde{Y}, T_2, P) эки э-ийкем топологиялык мейкиндик $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ ийкем үзгүлтүксүз ачык бир функция болсун. Эгерде (\tilde{X}, T_1, P) жергиликтүү компакт болсо (\tilde{Y}, T_2, P) э-ийкем мейкиндиги да жергиликтүү компакт болот.

Ачык сөздөр: Ийкем көптүк, ийкем элемент, элементардык амалдар, элементардык ийкем топология, ийкем топологиялык мейкиндик, ийкем мейкиндикте секвенциалдуу компакттуулук, саналуучу компакттуулук, жергиликтүү компакттуулук.



İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	ii
KABUL VE ONAY.....	iii
КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
RUSÇA ÖZET	x
KIRGIZCA GENİŞ ÖZET	xii
İÇİNDEKİLER	xx
SİMGELER VE KISALTMALAR	xxi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Esnek Kümeler	4
2.2 Esnek Elemanlar	6
2.3 Elemanter Esnek İşlemler	8
2.4 Esnek Reel Sayılar	11
2.5 Elemanter Esnek Topolojik Uzaylar.....	11
3. BÖLÜM	
e- ESNEK KOMPAKT UZAYLAR	20
3.1 e-Esnek kompakt Uzayları	20
3.2 e-Esnek Dizisel Kompakt Uzaylar	28
3.3 e-Esnek Sayılabilir Kompakt Uzaylar	30
3.4 e-Esnek Lokal Kompakt Uzaylar	33
SONUÇ VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

P	: Parametreler kümesi
B	: Esnek baz
\mathcal{B}	: Esnek eleman sınıfı
F^c	: F 'nin esnek tümleyeni
F^\square	: F 'nin e-esnek tümleyeni
F°	: F 'nin esnek içi
\bar{F}	: F 'nin esnek kapanışı
F°	: F 'nin esnek yığılma elemanlarının sınıfı
G	: e-esnek örtü
$P(X)$: X 'in kuvvet kümesi
Φ	: Boş esnek küme
$\square(A)$: Esnek reel sayıların sınıfı
$S_p(X)$: X üzerindeki tüm esnek kümelerin sınıfı
$S(\tilde{X})$	Esnek elemanların kümesi ile boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf
$SE(\tilde{X})$: \tilde{X} 'nin tüm esnek elemanlarının sınıfı
$SS(\mathcal{B})$: \mathcal{B} esnek eleman sınıfının ürettiği esnek küme
S	: Esnek alt baz
$\{\tilde{s}_n\}$: Esnek elemanların dizisi
τ	: Esnek topoloji
\mathcal{T}	: Esnek eleman sınıflarının topolojisi
T	: e-esnek topoloji
X	: Evrensel küme
\tilde{X}	: Mutlak esnek küme
\tilde{x}	: Bir esnek eleman
$\tilde{\subseteq}$: Esnek alt küme

⊃	: Esnek üst küme
⊆	: Esnek birleşim
∩	: Esnek kesişim
, ~	: Esnek fark
ò	: e- esnek birleşim
ó	: e-esnek kesişim
\	: e-esnek fark
ẽ	: Esnek elemanı
ẽ	: Esnek elemanı değil



1. BÖLÜM

GİRİŞ VE AMAÇ

Mühendislik, ekonomi, çevre bilimleri ve sosyal bilimler gibi alanlarda doğruluk değeri göreceli olan kavramlar sonucu ortaya çıkan belirsiz problemleri, matematiksel olarak modellemek ve çözmek için Aristo mantığı ve klasik kümeler teorisi yetersiz kalabilir. Bu tür problemlerle başa çıkabilmek için olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisi, aralık matematiği teorisi ve esnek kümeler teorisi gibi birçok teori geliştirilmiştir. Bu teorilerin en önemlilerinden biri L. A. Zadeh tarafından geliştirilen ve belirsizlik kavramıyla büyük ölçüde başa çıkabilen bulanık kümeler teorisi birçok alana başarıyla uygulanmıştır [1]. Fakat üyelik fonksiyonlarından yararlanılan bu teoride her bir durum için üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi kolay değildir. D.Molodtsov bu zorlukları ortadan kaldırmak için esnek kümeler teorisini ortaya atmıştır [2]. Esnek kümeler teorisinde, bulanık kümeler teorisindeki reel değerli üyelik fonksiyonunun aksine küme değerli bir dönüşüm kullanılmakta ve bir esnek küme, bir parametre kümesinden bir evrensel kümenin kuvvet kümesine bir dönüşüm olarak tanımlanmaktadır.

D. Molodtsov esnek kümeler teorisini oyun teorisi, olasılık teorisi, optimizasyon teorisi, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Peron integrasyonu ve yöneylem araştırması gibi alanlara başarılı bir şekilde uygulamıştır [2,3]. Ayrıca D. Molodtsov ve arkadaşları esnek sayı, esnek türev ve esnek integral gibi kavramları tanıtarak esnek küme teorisi temelinde bir analiz inşa etmeye çalışmışlardır [4]. P. K. Maji ve arkadaşları esnek kümelerin bazı özelliklerini incelemiş, esnek küme teorisini karar verme problemlerinde kullanmış ve bulanık esnek küme kavramını tanıtmışlardır [5-7]. Bunun dışında birçok araştırmacı da esnek kümeleri ve esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak geliştirmeye çalışmıştır [8-17]. D. Pei ve D. Miao esnek kümelerin bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu göstermişlerdir [18]. Son yıllarda esnek kümeler üzerine birçok matematiksel yapı kurulmuştur. Bu bağlamda esnek kümeler

teorisinde grup, halka, ideal vb. cebirsel yapılar üzerine çok sayıda çalışma yapılmış [19-24].

İlk kez 2011 yılında M. Shabir ve M. Naz esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurmuşlardır [25]. W. K. Min bu esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları ile ilgili çalışmalar sunmuştur [26]. 2012 yılında H. Hazra ve arkadaşları Shabir ve Naz'ın tanımladığı esnek topolojiden farklı bir topoloji tanımlamışlardır [27]. Bu süreçte A. Aygünoğlu, B. P. Varol ve H. Aygün esnek kümeler ve bulanık esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurup birçok topolojik kavramı incelemişlerdir [28-31]. İ. Zorlutuna ve arkadaşları esnek topolojik uzaylarda esnek nokta kavramını kullanarak esnek iç nokta, esnek komşuluk, esnek süreklilik ve esnek kompaktlık gibi kavramları tanıtmışlardır [32]. Bunların dışında birçok yazar esnek nokta kavramını kullanarak esnek topolojik uzaylar ile ilgili çok sayıda yeni çalışma yapmışlardır [33-36].

2012 yılında S. Das ve S. K. Samanta, esnek reel küme, esnek reel sayı ve onların özelliklerini [37]. Aynı araştırmacılar 2013 yılında esnek eleman ile esnek kümeler üzerinde elemanter esnek küme işlemlerini tanıtarak bu işlemlere göre esnek kümeler üzerine esnek metrik yapıları kurmuşlardır [38]. S. Das, S. K. Samanta ve birçok yazar esnek eleman kavramını kullanarak esnek vektör uzayları, esnek normlu uzaylar, esnek iç çarpım uzayları gibi çeşitli matematiksel yapılar üzerine çalışmalar yapmışlardır [39-44].

K. Taşköprü [45] 2017 yılında doktora tezinde literatürde bilinen esnek topolojik yapılardan farklı olarak, esnek eleman temelinde esnek kümeler üzerinde tanımlanan elemanter işlemler ile elemanter esnek topolojik (e-esnek topoloji) yapı kurmuş, literatürdeki birçok temel topolojik kavram bu yeni yapıya uygun şekilde tanımlanmış ve onların özellikleri ispatlanmıştır. 2020 yılında K. Taşköprü ve İ. Altıntaş e-esnek topoloji ve esnek fonksiyonun bir çok özelliğini ispatladılar ve esnek kümeleri bir karar verme problemine uyguladılar [46]. Aynı yıl İ. Altıntaş, K. Taşköprü ve B. Selvi sayılabilir ve ayrılabilir e-esnek topolojik uzayları tanımladılar ve temel özelliklerini ispatladılar [47].

Bu tezin amacı e-esnek kompakt uzayları çalışmaktır. Bu amaç doğrultusunda e-esnek kompakt uzaylar, e-esnek kompakt alt uzaylar, e-esnek dizisel kompakt uzaylar, e-esnek sayılabilir uzaylar ve e-esnek lokal kompakt uzaylar tanımlanarak bir çok temel özellikleri ispatlandı.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde ön bilgi ve yöntem olarak kullanılacak temel kavramlar; esnek küme ve temel özellikleri, esnek eleman, esnek kümeler üzerinde işlemler, e-esnek topolojik uzaylar, esnek fonksiyon, esnek ayırma aksiyomları ve esnek sayılabilir uzaylar ile ilgili bazı temel özellikler verildi.

Tez çalışmasında elde edilen bütün bulgular ve sonuçlar üçüncü bölümde verildi. Bu bölümün ilk kısmında, e-esnek örtü, e-esnek kompaktlık tanımlandı, örnekler verildi ve e-esnek kompakt uzay ile e-esnek kompakt küme temel özellikleri ispatlandı. Aynı zamanda e-esnek kompakt uzayların esnek Hausdorff uzayları ile ilişkileri de incelendi.

İkinci kısmında e-esnek dizisel kompakt uzaylar tanımlandı ve temel özellikleri ispatlandı.

Üçüncü kısımda e-esnek sayılabilir kompakt uzaylar tanımlandı ve temel özellikleri ispatlandı. e-esnek sayılabilir kompakt uzaylar ile e-esnek dizisel kompakt uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi.

Dördüncü kısımda e-esnek lokal kompakt uzaylar tanımlandı ve temel özellikleri incelendi.

Tezin tartışmalar ve öneriler bölümünde, bu tez kapsamındaki çalışmaların devamı niteliğinde olan çalışmalar için bazı öneriler verildi. Bu tez, öneriler kısmında verilen konulardaki çalışmalar ve daha ileri çalışmalar için temel teşkil edecek niteliktedir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde esnek küme, esnek küme işlemleri, esnek eleman, esnek sayı, esnek kümeler üzerinde tanımlanan esnek ve elemanter işlemler, e-esnek topolojik uzaylar, e-esnek sayılabilir uzaylar ile ilgili özet bilgiler [2,5,13,37,38,46,47,48] kaynaklarından yararlanılarak verildi.

2.1 Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. [2] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $P \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun.

$F: P \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir *esnek küme* denir ve (F, P) ikilisi ile gösterilir. Başka bir ifade ile X kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir sınıfına X üzerinde bir esnek küme denir. Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda)$ kümesi, (F, P) esnek kümesinin λ -yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önünde bulundurulabilir. Böylece X kümesi üzerinde bir (F, P) esnek kümesi

$$(F, P) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in P \text{ ve } F(\lambda) \subset X\}$$

şeklinde ifade edilir.

P parametre kümesi tarafından parametrelendirilmiş X evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin sınıfı $S_p(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [5,13,16] X üzerinde (F, P) ve (G, Q) esnek kümeleri verilsin.

Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) = \emptyset$ ise (F, P) kümesine *boş esnek küme* denir ve Φ ile gösterilir.

Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) = X$ ise (F, P) kümesine *mutlak esnek küme* denir ve \tilde{X} ile gösterilir.

$P \subset Q$ ve her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) \subset G(\lambda)$ ise (F, P) kümesine (G, Q) esnek kümesinin *esnek alt kümesi* denir ve $(F, P) \check{\subset} (G, Q)$ ile gösterilir. (G, Q) kümesine de (F, P) esnek kümesinin *esnek üst kümesi* denir ve $(G, Q) \check{\supset} (F, P)$ ile gösterilir.

(F, P) kümesi, (G, Q) kümesinin esnek alt kümesi ve (G, Q) kümesi de (F, P) kümesinin esnek alt kümesi ise (F, P) ve (G, Q) kümelerine X üzerinde *eşit esnek kümeler* denir.

Her $\lambda \in P \cup Q = R$ için

$$H(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda) & , \lambda \in P - Q \\ G(\lambda) & , \lambda \in Q - P \\ F(\lambda) \cup G(\lambda) & , \lambda \in P \cap Q \end{cases}$$

olmak üzere (H, R) esnek kümesine (F, P) ve (G, Q) esnek kümelerinin *esnek birleşimi* denir ve $(H, R) = (F, P) \check{\cup} (G, Q)$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in P \cap Q = S$ için $H(\lambda) = F(\lambda) \cap G(\lambda)$ olmak üzere (H, S) esnek kümesine (F, P) ve (G, Q) esnek kümelerinin *esnek kesişimi* denir ve $(H, S) = (F, P) \check{\cap} (G, Q)$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in P$, $Q = T$ için $H(\lambda) = F(\lambda)$, $G(\lambda)$ olmak üzere (H, T) esnek kümesine (F, P) ve (G, Q) esnek kümelerinin *esnek farkı* denir ve $(H, T) = (F, P) \check{\sim} (G, Q)$ ile gösterilir.

$F^c : P \rightarrow P(X)$ dönüşümü her $\lambda \in P$ için $F^c(\lambda) = X - F(\lambda)$ olmak üzere X üzerindeki (F^c, P) esnek kümesine (F, P) esnek kümesinin *esnek tümleyeni* denir ve $(F^c, P) = (F, P)^c$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.1. [13,16] (F, P) , (G, P) ve (H, P) , X üzerinde esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $((F, P) \check{\cup} (G, P))^c = (F, P)^c \check{\cap} (G, P)^c$,

2. $((F, P) \tilde{\cap} (G, P))^c = (F, P)^c \tilde{\cup} (G, P)^c,$
3. $((F, P) \tilde{\cap} (G, P)) \tilde{\cup} (H, P) = ((F, P) \tilde{\cup} (H, P)) \tilde{\cap} ((G, P) \tilde{\cup} (H, P)),$
4. $((F, P) \tilde{\cup} (G, P)) \tilde{\cap} (H, P) = ((F, P) \tilde{\cap} (H, P)) \tilde{\cup} ((G, P) \tilde{\cap} (H, P)).$

2.2 Esnek Elemanlar

Tezin bundan sonraki kısmında bir $P \neq \emptyset$ parametre kümesi ile çalışılacağı için esnek kümenin gösteriminde (F, P) yerine kolaylık için sadece F kullanıldı.

Tanım 2.2.1. [37] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $P \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun. Bir $\varepsilon : P \rightarrow X$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *esnek eleman* denir.

ε , X üzerinde bir esnek eleman ve bir $F \in S_p(X)$ verildiğinde her $\lambda \in P$ için $\varepsilon(\lambda) \in F(\lambda)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir ve $\varepsilon \in F$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) \subset X$ tek elemanlı bir küme ise F kümesine *tek elemanlı esnek küme* denir. Böylece her tek elemanlı esnek küme aynı zamanda bir esnek elemana karşılık gelir.

Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) \neq \emptyset$ olacak şekilde X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf $S(\tilde{X})$ ile gösterilir. $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının sınıfı da $SE(F)$ ile gösterilir.

Tezin bundan sonraki kısmında esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dots$ gösterimi kullanılmıştır.

Önerme 2.2.1. [38] Bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümenin esnek elemanlarının bir sınıfı, bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir. \mathcal{B} , \tilde{X} mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı olmak üzere \mathcal{B} sınıfının ürettiği esnek küme $SS(\mathcal{B})$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.2. [38] Herhangi bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $SS(SE(F)) = F$ olur. Ancak \tilde{X} mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir \mathcal{B} sınıfı için $SE(SS(\mathcal{B})) \supseteq \mathcal{B}$ olur.

Uyarı 2.2.1. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset SE(\tilde{X})$ olmak üzere $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ olsun. Her $\lambda \in P$ için $\mathcal{B}_1(\lambda) = \mathcal{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathcal{B}_1) = SS(\mathcal{B}_2)$ olur.

Örnek 2.2.1. [45] $P = \{\lambda, \mu\}$ ve $X = \{a, b, c\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \{(\lambda, a), (\mu, a)\}, & \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, a), (\mu, b)\}, & \tilde{x}_7 &= \{(\lambda, b), (\mu, c)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, b), (\mu, b)\}, & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda, a), (\mu, c)\}, & \tilde{x}_8 &= \{(\lambda, c), (\mu, a)\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, c), (\mu, c)\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda, b), (\mu, a)\}, & \tilde{x}_9 &= \{(\lambda, c), (\mu, b)\}\end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_9\}$ olur. $\mathcal{B}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5\}$ ve $\mathcal{B}_3 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ esnek eleman sınıfları ele alınırsa

$$F = SS(\mathcal{B}_1) = SS(\mathcal{B}_3) = \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, b\})\},$$

$$G = SS(\mathcal{B}_2) = \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, b, c\})\}$$

olduğu görülür. Buradan $SE(F) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ ve $SE(G) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\}$ olup $\mathcal{B}_1 \subset SE(F)$, $\mathcal{B}_2 \subset SE(G)$ ve $\mathcal{B}_3 = SE(F)$ elde edilir.

Önerme 2.2.3. [39] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için F kümesinin her esnek elemanı G kümesinin de bir esnek elemanı ise $F \tilde{\subset} G$ olur.

Uyarı 2.2.2. [39] $F, G \in S(\tilde{X})$ verilsin.

1. $\tilde{x} \tilde{\in} F \tilde{\cup} G$ ise $\tilde{x} \tilde{\in} F$ veya $\tilde{x} \tilde{\in} G$ olması gerekmez.
2. F, G esnek kümelerinin esnek kesişiminin veya esnek tümleyeninin $S(\tilde{X})$ sınıfına ait olması gerekmez.

Örnek 2.2.2. Örnek 2.2.1. üzerinden $H = \{(\lambda, \{a, c\}), (\mu, \{c\})\} \in S(\tilde{X})$ ve $K = \{(\lambda, \{a, b, c\}), (\mu, \{b, c\})\} \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Buradan

$K^c = \{(\lambda, \emptyset), (\mu, \{a\})\} \notin S(\tilde{X})$ olur ve $F \tilde{\cup} H = \{(\lambda, \{a, b, c\}), (\mu, \{a, b, c\})\}$ olup $\tilde{x}_7 \in F \tilde{\cup} H$ olmasına rağmen $\tilde{x}_7 \notin F$ ve $\tilde{x}_7 \notin H$ olur. Ayrıca $F \tilde{\cap} H = \{(\lambda, \{a\}), (\mu, \emptyset)\} \notin S(\tilde{X})$ olur.

2.3 Elemanter Esnek İşlemler

Bu kısımda esnek kümeler üzerinde esnek elemanlar kullanılarak yapılan elemanter esnek birleşim, elemanter esnek kesişim ve elemanter esnek tümleyen olarak adlandırılan elemanter esnek işlemler ve bu işlemlerin bazı yeni özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.3.1. [38] $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F \text{ veya } \tilde{x} \in G\}$ olmak üzere $F \tilde{\cup} G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter birleşimi* denir. Diğer bir ifadeyle $F \tilde{\cup} G = SS(SE(F) \cup SE(G))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F \text{ ve } \tilde{x} \in G\}$ olmak üzere $F \tilde{\cap} G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter kesişimi* denir. Diğer bir ifadeyle $F \tilde{\cap} G = SS(SE(F) \cap SE(G))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F^c\}$ olmak üzere $F^\square = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F esnek kümesinin *elemanter tümleyeni* denir. Diğer bir ifadeyle $F^\square = SS(SE(F^c))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F, \tilde{\sim} G\}$ olmak üzere $F \tilde{\setminus} G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter farkı* denir. Diğer bir ifadeyle $F \tilde{\setminus} G = SS(SE(F, \tilde{\sim} G))$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.1. [38, 45] $F, G \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \tilde{\cup} G = F \tilde{\cup} G,$
2. $F \tilde{\cap} F^\square = \Phi,$
3. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathcal{B}_i)$ ise $\tilde{\bigcap}_{i \in I} F_i = SS\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i\right),$

4. $F \acute{O} G \underline{\simeq} F \tilde{\wedge} G,$
5. $F^{\square} \underline{\simeq} F^c,$
6. $F \setminus G \underline{\simeq} F, \tilde{\sim} G,$
7. $F \acute{O} F^{\square} \underline{\simeq} \tilde{X},$
8. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathcal{B}_i)$ ise $\acute{O}_{i \in I} F_i \underline{\simeq} SS\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i\right).$

Uyarı 2.3.1. [45] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \acute{O} G = \Phi$ olması $F \underline{\simeq} G^{\square}$ ve $G \underline{\simeq} F^{\square}$ olmasını gerektirmez. Örneğin $X = \{a, b, c, d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F &= \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, c\})\}, \\ G &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{b, c\})\}, \\ H &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b, d\})\} \end{aligned}$$

esnek kümelerini ve onların elemanter tümleyenlerini ele alalım. $F \acute{O} G = \Phi$ ve $F \acute{O} H = \Phi$ olmasına rağmen $F \not\underline{\simeq} G^{\square}$ veya $G \not\underline{\simeq} F^{\square}$ ve $F \not\underline{\simeq} H^{\square}$ veya $H \not\underline{\simeq} F^{\square}$ elde edilir. Fakat $H^{\square} \underline{\simeq} F$ ve $F^{\square} \underline{\simeq} H$ olur. Ayrıca $G \acute{O} H \neq \Phi$ olmasına rağmen $G^{\square} \acute{O} H^{\square} = \Phi$ olur.

Önerme 2.3.2. [45] $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. $F \acute{O} G = \Phi$ ve $F \tilde{\wedge} G \in S(\tilde{X})$ ise $F \underline{\simeq} G^{\square}$ ve $G \underline{\simeq} F^{\square}$ olur.

Önerme 2.3.3. [45] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE(F \acute{O} G) = SE(F) \cap SE(G),$
2. $SE(F \acute{O} G) \supset SE(F) \cup SE(G),$
3. $(F \acute{O} G) \acute{O} H \underline{\simeq} (F \acute{O} H) \acute{O} (G \acute{O} H),$
4. $(F \acute{O} G) \acute{O} H \underline{\simeq} (F \acute{O} H) \acute{O} (G \acute{O} H).$

Uyarı 2.3.2. Yukarıdaki önermeye göre elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri $S(\tilde{X})$ üzerinde dağılma özelliğine sahip değildir. Örneğin; Uyarı 2.3.1.'deki F, G ve H esnek kümeleri için $(F \acute{O} G) \grave{O} H = H$ olmasına rağmen

$$(F \grave{O} H) \acute{O} (G \grave{O} H) = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b, c, d\})\}$$

olur. Ayrıca $(F \acute{O} G) \acute{O} H = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b\})\}$ olmasına rağmen

$$(F \acute{O} H) \grave{O} (G \acute{O} H) = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{b\})\}$$

olur.

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S(\tilde{X})$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.3.4. [45] Herhangi $F, G, H \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ ise $(F \acute{O} G) \grave{O} H = (F \grave{O} H) \acute{O} (G \grave{O} H)$,
2. $F \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ve $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ise $(F \grave{O} G) \acute{O} H = (F \acute{O} H) \grave{O} (G \acute{O} H)$.

Önerme 2.3.5. [45] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F^c \acute{O} G^c \neq \Phi$ ise $(F \grave{O} G)^c = F^c \acute{O} G^c$,
2. $(F \acute{O} G)^c \neq \Phi$ ise $(F \acute{O} G)^c = F^c \grave{O} G^c$,
3. $F^c \acute{O} G^c \neq \Phi$, $F^\square \neq \Phi$ ve $G^\square \neq \Phi$ ise $(F \grave{O} G)^\square = F^\square \acute{O} G^\square$,
4. $F \acute{O} G \neq \Phi$, $F^\square \neq \Phi$ ve $G^\square \neq \Phi$ ise $(F \acute{O} G)^\square = F^\square \grave{O} G^\square$.

Uyarı 2.3.3. Yukarıdaki önermelerde görüldüğü gibi esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler dağılma özelliğini ve De Morgan kurallarını genelde sağlamaz. Eğer verilen esnek kümelerin esnek kesişimleri, esnek tümleyenleri ve esnek tümleyenlerinin esnek

kesişimleri $S(\tilde{X})$ sınıfına ait ise dağılma özelliği ve De Morgan kuralları elemanter işlemler için de sağlanır.

2.4 Esnek Reel Sayılar

Tanım 2.4.1. [37] $H(\square)$, \square reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı olsun. $F : P \rightarrow H(\square)$ dönüşümü ile birlikte F esnek kümesine *esnek reel küme* denir. Eğer F esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise F kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye *esnek reel sayı* denir. Tüm esnek reel kümelerin sınıfı $R(P)$, tüm esnek reel sayıların sınıfı $\square(P)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların sınıfı $\square(P)^*$ ile gösterilir. $\square(P) = SE(\tilde{\square})$ olduğu açıktır. Esnek sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \dots$ ile ve özel olarak her $\lambda \in P$ için $\tilde{r}(\lambda) = r$ ise \bar{r} ile gösterilir. $\tilde{r}, \tilde{s} \in \square(P)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu *esnek reel sayıların sıralaması*, her $\lambda \in P$ için $\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \lesssim \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \gtrsim \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \lessdot \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \gtrdot \tilde{s}$ şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.4.1. [37] $\square(P)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $R(P)$ üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r}, \tilde{s} \in \square(P)$ verildiğinde bu *iki esnek reel sayının toplamı* her $\lambda \in P$ için $(\tilde{r} + \tilde{s})(\lambda) = \{a + b : a = \tilde{r}(\lambda), b = \tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r} + \tilde{s}$ biçiminde ve bu *iki esnek reel sayının çarpımı* her $\lambda \in P$ için $(\tilde{r} \cdot \tilde{s})(\lambda) = \{a \cdot b : a = \tilde{r}(\lambda), b = \tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r} \cdot \tilde{s}$ biçiminde tanımlanır.

2.5 Elemanter Esnek Topolojik Uzaylar

Bu kısımda elemanter esnek topolojik (e-esnek topolojik) uzayın tanımı ve bu uzayın bazı kavramlar verildi.

Tanım 2.5.1. [25] $\tau \subseteq S_p(X)$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$,

$$2. \quad \{F_i\}_{i \in I} \subset \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} F_i \in \tau,$$

$$3. \quad \{F_i\}_{i=1}^n \subset \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^n F_i \in \tau,$$

şartları sağlanırsa τ sınıfı X üzerinde bir *esnek topoloji* ve (X, τ, P) üçlüsüne *esnek topolojik uzay* denir.

Örnek 2.5.1. [25,28] (X, τ, P) bir esnek topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in P$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : (F, P) \in \tau\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji λ -*parametre topolojisi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.2. [27] τ , X üzerinde P ile parametrelendirilmiş esnek kümelerin bir sınıfı ve her $\lambda \in P$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : F \in \tau\}$ olsun. Eğer τ_λ sınıfı her $\lambda \in P$ için X üzerinde bir topoloji ise τ sınıfına \tilde{X} üzerinde *esnek kümelerin bir topolojisi* denir.

Tanım 2.5.3. [45] $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(SE(\tilde{X}))$, esnek elemanların sınıflarının bir koleksiyonu olmak üzere

$$1. \quad \emptyset, SE(\tilde{X}) \in \mathcal{T},$$

$$2. \quad \{\mathcal{B}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \text{ için } \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathcal{T},$$

$$3. \quad \{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T} \text{ için } \bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i \in \mathcal{T}$$

şartları sağlanırsa \mathcal{T} koleksiyonu \tilde{X} üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji *esnek elemanların sınıflarının oluşturduğu topoloji* (EES topoloji) olarak adlandırılır ve $(\tilde{X}, \mathcal{T}, P)$ üçlüsüne de *EES topolojik uzay* adı verilir.

Örnek 2.5.2. [45] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, P)$, EES topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in P$ için

$$\mathcal{T}_\lambda = \{\mathcal{B}_\lambda \subset X : \tilde{x}(\lambda) \in \mathcal{B}_\lambda, \forall \tilde{x} \in \mathcal{B} \in \mathcal{T}\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.5.4. [45,47] $T \subset S(\tilde{X})$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in T$,
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$ için $\bigcap_{i \in I} U_i \in T$,
3. $\{U_i\}_{i=1}^n \subset T$ için $\bigcap_{i=1}^n U_i \in T$

şartları sağlanırsa T sınıfı \tilde{X} üzerinde bir esnek topolojidir. Bu *topolojiye elementer esnek topoloji* (e-esnek topoloji) ve (\tilde{X}, T, P) üçlüsüne de *e-esnek topolojik uzay* adı verilir.

Örnek 2.5.3. [45] $X = \{x, y, z\}$ ve $P = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$F_1 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, z\})\},$$

$$F_2 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y\})\},$$

$$F_3 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y, z\})\}$$

esnek kümeler olsun. Bu durumda $T_1 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2\}$ sınıfı \tilde{X} üzerinde hem bir elementer esnek topoloji hem de Tanım 2.5.1. ve 2.5.2.'e göre bir esnek topolojidir. $T_2 = \{\Phi, \tilde{X}, F_2, F_3\}$ sınıfı \tilde{X} üzerinde ne bir elementer esnek topoloji ne de bir esnek topolojidir. $T_3 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_3\}$ sınıfı \tilde{X} üzerinde bir elementer esnek topolojidir. Ancak, \tilde{X} üzerinde Tanım 2.5.1. ve 2.5.3.'e göre bir esnek topoloji değildir. Gerçekten, $F_1 \cap F_3 = \{(\mu, \{z\})\} \notin T_3$ olur ve $\tau_\mu = \{\emptyset, X, \{x, z\}, \{y, z\}\}$ sınıfı X üzerinde bir topoloji değildir. Son olarak $T_4 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3\}$ sınıfı \tilde{X} üzerinde bir elementer esnek topoloji ve Tanım 2.5.1.'e göre bir esnek topoloji olmasına rağmen Tanım 2.5.2.'e göre bir esnek topoloji değildir.

Aşağıdaki önermeler ve teoremler, e-esnek topoloji ile diğer topolojiler arasındaki ilişkileri verir.

Önerme 2.5.1. [45] 1. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Eğer boştan farklı her $U, V \in T$ esnek kümeleri için $U \acute{O} V \neq \Phi$ ise T sınıfı aynı zamanda \tilde{X} üzerinde bir esnek topolojidir.

2. (\tilde{X}, τ, P) , Tanım 2.6.2.'e göre bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $T = \{U \in S(\tilde{X}) : U(\lambda) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in P\}$ sınıfı ile \tilde{X} üzerinde bir e-esnek topolojidir.

3. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, P)$ bir e-esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $T = \{U \in S(\tilde{X}) : SE(U) \in \mathcal{T}\}$ sınıfı \tilde{X} üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

Önerme 2.5.2. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Eğer $U, V \in T$ için $U \tilde{\cap} V \in S(\tilde{X})$ ise her $\lambda \in P$ için $T_\lambda = \{U(\lambda) : U \in T\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.5.5. [46] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olmak üzere T sınıfının her bir üyesine *esnek açık küme* denir.

Bir $K \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi verildiğinde $K^c \in S(\tilde{X})$ ve $K^\square \in T$ ise K esnek kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Önerme 2.5.3. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun.

1. Φ ve \tilde{X} esnek kapalıdır.

2. $\{K_i : i \in I\}$, (\tilde{X}, T, P) uzayında esnek kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $K = \acute{O}\{K_i : i \in I\}$ esnek kapalıdır.

3. $K_1^\square \acute{O} K_2^\square \neq \Phi$ ile K_1 ve K_2 , (\tilde{X}, T, P) uzayında iki esnek kapalı küme olsun. Bu durumda $K_1 \acute{O} K_2$ esnek kapalıdır.

Tanım 2.5.6. [46] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bir $N \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $\tilde{x} \tilde{\in} U \subseteq N$ olacak şekilde $U \in T$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine \tilde{x} esnek elemanının *esnek komşuluğu* denir. \tilde{x} esnek elemanının tüm esnek komşuluklarının sınıfı $N_T(\tilde{x})$ veya T anlaşılıyor ise $N(\tilde{x})$ ile gösterilir.

$F, N \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \tilde{c} U \tilde{c} N$ olacak şekilde $N \in T$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine F esnek kümesinin *esnek komşuluğu* denir.

Tanım 2.5.7. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bir $\tilde{x} \in F$ için $\tilde{x} \in U \tilde{c} F$ olacak şekilde bir $U \in T$ var ise \tilde{x} elemanına F kümesinin bir *esnek iç elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfı $intF$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin *esnek içi* denir ve $F^\circ = SS(intF)$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.1. [45,47] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $F, G \in S(\tilde{X})$ olsun.

Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. F°, F kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimine eşittir,
2. F°, F kümesinin en büyük esnek açık alt kümesidir,
3. F esnek açıktır $\Leftrightarrow F^\circ = F$,
4. $\tilde{X}^\circ = \tilde{X}$ ve $\Phi^\circ = \Phi$,
5. $F \tilde{c} G$ ise $F^\circ \tilde{c} G^\circ$,
6. $(F^\circ)^\circ = F^\circ$,
7. $F^\circ \acute{O} G^\circ = (F \acute{O} G)^\circ$,
8. $F^\circ \grave{O} G^\circ \tilde{c} (F \grave{O} G)^\circ$.

Tanım 2.5.8. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_T(\tilde{x})$ için $F \acute{O} N \neq \Phi$ ise \tilde{x} elemanına F kümesinin *esnek kapanış elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfı clF ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin *esnek kapanışı* denir ve $\overline{F} = SS(clF)$ ile gösterilir.

Eğer $F \acute{O} N = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} N \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N \in N_T(\tilde{x})$ var ise $\tilde{x} \in \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek kapanış elemanı değildir.

Teorem 2.5.2. [46] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. \bar{F} , F kümesini kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimine eşittir.
2. \bar{F} , F kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.
3. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow \bar{F} = F$.
4. $\tilde{\bar{X}} = \tilde{X}$ ve $\bar{\Phi} = \Phi$,
5. $F \subset G$ ise $\bar{F} \subset \bar{G}$,
6. $\overline{(\bar{F})} = \bar{F}$,
7. $\bar{F} \circ \bar{G} \neq \Phi$ ise $\bar{F} \circ \bar{G} = \overline{(F \circ G)}$,
8. $\overline{(F \circ G)} \subset \bar{F} \circ \bar{G}$.

Önerme 2.5.4. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \in S(\tilde{X})$ ise $(\bar{F})^\square = (F^\square)^\circ$,
2. $F, F^c \in S(\tilde{X})$ ise $(F^\circ)^\square = \overline{(F^\square)}$.

Tanım 2.5.9. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_T(\tilde{x})$ için $F \circ (N \setminus \{\tilde{x}\}) \neq \Phi$ ise \tilde{x} elemanına F kümesinin *esnek yığılma elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfı $\lim F$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye F kümesinin *esnek yığılma elemanlarının kümesi* denir ve $F^\circ = SS(\lim F)$ ile gösterilir.

Eğer $F \circ (N \setminus \{\tilde{x}\}) = \Phi$ ve $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N \in N(\tilde{x})$ var ise $\tilde{x} \in \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek yığılma elemanı değildir. Ayrıca $F^\circ \subset \bar{F}$ olduğu açıktır.

Teorem 2.5.3. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \dot{\cup} F^\circ$ esnek kümesi esnek kapalıdır,
2. $\bar{F} = F \dot{\cup} F^\circ$,
3. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow F^\circ \tilde{\subset} F$.

Tanım 2.5.10. [45,47] $B \subset S(\tilde{X})$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. Eğer B sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa bu sınıfa, \tilde{X} üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için *esnek baz* denir.

- B1. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \in B$ olacak şekilde en az bir $B \in B$ esnek kümesi vardır.
- B2. $B_1, B_2 \in B$ için $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{x} \in B_1 \dot{\cup} B_2$ ise $\tilde{x} \in B_3 \tilde{\subset} B_1 \dot{\cup} B_2$ olacak şekilde $B_3 \in B$ esnek kümesi vardır.

Uyarı 2.5.1. [45] B , \tilde{X} üzerindeki bir e-esnek topoloji için esnek baz ise $B_1, B_2 \in B$ için $B_1 \dot{\cup} B_2$ kümesinin B sınıfına ait olması gerekmez.

Önerme 2.5.5. [45] $B \subset S(\tilde{X})$, \tilde{X} üzerindeki bir e-esnek topoloji için bir esnek baz olsun.

$$T_B = \{U \in S(\tilde{X}) : \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ için } \exists B \in B \ni \tilde{x} \in B \tilde{\subset} U\}$$

sınıfı \tilde{X} üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

Tanım 2.5.11. [45] Önerme 2.5.5.'de verilen T_B sınıfına B *esnek bazı tarafından üretilen elemanter esnek topoloji* denir.

Bu tanıma göre $B \subset T_B$ olduğundan B sınıfının elemanları esnek açık kümelerdir.

Önerme 2.5.6. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve B , T topolojisi için bir esnek baz olsun ($T = T_B$). Bu durumda her esnek açık küme, B sınıfının bazı elemanlarının elemanter birleşimi olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.5.4. [45] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $B \subset T$ olsun. Aşağıdaki (B_*) şartı sağlanırsa B sınıfı T için bir esnek baz olur.

B_* . Her $U \in T$ ve her $\tilde{x} \in U$ için $\tilde{x} \in B \subset U$ olacak şekilde $B \in B$ vardır.

Tanım 2.5.12. [45] (\tilde{X}, T, P) e-esnek topolojik uzay ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ bir esnek eleman olsun. \tilde{x} elemanını içeren esnek açık kümelerin bir sınıfı $B_{\tilde{x}}$ olmak üzere \tilde{x} elemanını içeren her U esnek açık kümesi için $\tilde{x} \in B_{\tilde{x}} \subset U$ olacak şekilde $B_{\tilde{x}} \in B_{\tilde{x}}$ var ise $B_{\tilde{x}}$ sınıfına \tilde{x} elemanının *esnek lokal (komşuluk) bazı* denir.

Önerme 2.5.7. [45] B, \tilde{X} üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. B esnek bazının \tilde{x} elemanını içeren elemanları \tilde{x} esnek elemanı için bir esnek lokal baz oluşturur.

Tanım.2.5.13 [45] (\tilde{X}, T, P) elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Her $U \in T$ için $F \cap U \in S(\tilde{X})$ ise $T_F = \{F \cap U : U \in T\}$ sınıfı F üzerinde bir elemanter esnek topolojidir. Bu topolojiye e-esnek alt uzay topolojisi ve (F, T_F, P) uzayına da (\tilde{X}, T, P) uzayının elemanter esnek alt uzayı denir.

Tanım.2.5.14 [47] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Eğer her $\tilde{x} \in SE(\tilde{X})$ esnek elemanının bir sayılabilir esnek lokal bazı varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına birinci sayılabilir e-esnek topolojik uzay veya kısaca e-esnek C_1 -uzayı denir.

E-esnek C_1 olma özelliği hem kalıtsal hem de topolojik özelliktir.

Tanım 2.5.15 [47] (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Eğer T için bir sayılabilir esnek baz varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına ikinci sayılabilir e-esnek uzay veya kısaca e-esnek C_2 uzayı denir.

E-esnek C_2 olma özelliği hem kalıtsal hem de topolojik özelliktir.

Teorem.2.5.5. [47] Her e-esnek C_2 uzayı bir e-esnek C_1 uzayıdır.

Teorem.2.5.6. [47] $(\tilde{X}, \mathbf{T}, \mathbf{P})$ bir e-esnek C_2 topolojik uzayı ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda F esnek kümesinin her esnek açık örtüsünün bir sayılabilir esnek alt örtüsü vardır.



3. BÖLÜM

e-ESNEK KOMPAKT UZAYLAR

Bu bölüm tezin esas çalışmalarını kapsar. Bu bölümde e-esnek kompakt uzaylar, e-esnek dizisel uzaylar, e-esnek sayılabilir uzaylar ve e-esnek lokal uzaylar tanımlandı. Temel özellikleri ispatlandı ve uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi.

3.1. e-Esnek kompakt Uzayları

Tanım 3.1.1 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay, $F \in S(\tilde{X})$ bir esnek küme ve $G = \{G_i : i \in I\} \subset S(\tilde{X})$, \tilde{X} esnek kümesinin esnek alt kümelerinin bir sınıfı olsun.

iii. Eğer $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in I} G_i$ ise G sınıfına \tilde{X} mutlak esnek kümesinin bir e-esnek örtüsü denir.

iv. Eğer $F \subseteq \bigcirc_{i \in I} G_i$ ise G sınıfına F esnek kümesinin bir e-esnek örtüsü denir.

Eğer her $i \in I$ için G_i kümeleri esnek açık ise G örtüsüne e-esnek açık örtü, G_i kümeleri esnek kapalı ise bu örtüye e-esnek kapalı örtü denir.

Eğer $J \subset I$ sonlu ise $G = \{G_i : i \in J \subset I\}$ e-esnek örtüsüne sonlu örtü denir.

Tanım 3.1.2 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Eğer \tilde{X} kümesinin her e-esnek açık örtüsünün bir sonlu alt e-esnek örtüsü varsa (\tilde{X}, T) uzayına e-esnek kompakt uzay denir. Yani, herhangi bir $G = \{G_i : i \in I\} \subset T$ esnek açık sınıfı verildiğinde $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in I} G_i$

iken $\tilde{X} = \bigcirc_{i \in J} G_i$ ($J \subset I$ sonlu) ise (\tilde{X}, T) uzayına e-esnek kompakt uzay denir.

Örnek 3.1.1 Sonlu bir \tilde{X} kümesi üzerinde tanımlanan her topolojiye göre e-esnek kompakttır.

Örnek 3.1.2 P sonlu parametreler kümesi olsun. $(\tilde{\square}, T, P)$ e-esnek reel topolojik uzayı kompakt değildir. Gerçekten $G_n = \{(-\bar{n}, \bar{n}) : \bar{n}(\lambda) = n, n \in \square, \forall \lambda \in P\} \subset T$ esnek açık kümelerinin sınıfı $\tilde{\square}$ nin bir e-esnek açık örtüsüdür, yani $\tilde{\square} = \bigcup_{n \in \square} G_n$ olur. Ancak G örtüsünün \tilde{R} yi örten sonlu bir e-esnek açık alt örtüsü yoktur.

Benzer şekilde $(\tilde{\square}^2, T, P), \dots, (\tilde{\square}^n, T, P)$ uzayları da e-esnek kompakt değildir.

Örnek 3.1.3 \tilde{X} bir sonsuz esnek küme olsun. Bu durumda (\tilde{X}, T, P) e-esnek ayrık uzayı e-esnek kompakt değildir. Gerçekten $G = \{\{\tilde{x}\} \in T\}$ açık sınıfı \tilde{X} nin bir e-esnek açık örtüsüdür. Ancak bu örtünün \tilde{X} yi örten bir e-esnek alt örtüsü yoktur.

Tanım 3.1.3 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $F \subset S(\tilde{X})$ bir esnek küme olsun. Eğer (F, T_F, P) e-esnek alt uzayı kompakt ise F esnek kümesine (\tilde{X}, T, P) uzayında e-esnek kompakt alt uzay denir. (F esnek kümesine kompakt alt küme denir.)

Teorem 3.1.1 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi T e-esnek topolojisine göre kompakt olması için gerek ve yeter şart F kümesinin T_F e-esnek topolojisine göre kompakt olmasıdır.

İspat $\Rightarrow G = \{G_i : i \in I\}$ F kümesinin T_F ye göre bir e-esnek açık örtüsü olsun. Bu durumda $G_i = F \acute{O} H_i \tilde{c} H_i$ olacak şekilde $H_i \in T$ esnek açık kümeleri vardır. Böylece

$$F \tilde{c} \bigcup_{i \in I} G_i \tilde{c} \bigcup_{i \in I} H_i$$

olduğundan $\{H_i : i \in I\}$ sınıfı F esnek kümesinin T ya göre bir e-esnek açık örtüsüdür.

F e-esnek kompakt olduğundan bu örtüden sonlu bir örtü seçilebilir. Yani, $F \tilde{c} \bigcup_{i \in J} H_i$, ($J \subset I$ sonlu) olur. Böylece

$$F \tilde{c} F \acute{O} \left(\bigcup_{i \in J} H_i \right) \tilde{c} \bigcup_{i \in J} (F \acute{O} H_i) = \bigcup_{i \in J} G_i$$

olur. O halde F , T_F ye göre e-esnek kompaktır.

$\Leftarrow \{H_i : i \in I\}$ F esnek kümesinin bir T esnek açık örtüsü olsun. $F \acute{O} H_i = G_i$ diyelim.

Bu durumda

$$F \tilde{c} \bigcirc_{i \in I} H_i \Rightarrow F \tilde{c} F \acute{O} (\bigcirc_{i \in I} H_i) = \bigcirc_{i \in I} (F \acute{O} H_i) = \bigcirc_{i \in I} G_i \in T_F$$

olur. O zaman $\{G_i : i \in I\}$ sınıfı F nin bir esnek örtüsüdür. F , T_F ye göre kompakt olduğundan bu örtüden sonlu bir açık örtü seçilebilir. Yani $F \tilde{c} \bigcirc_{i \in J} G_i$, ($J \subset I$ sonlu)

$$\bigcirc_{i \in J} G_i = \bigcirc_{i \in J} (F \acute{O} H_i) = F \acute{O} (\bigcirc_{i \in J} H_i) \tilde{c} \bigcirc_{i \in J} H_i \text{ olur.}$$

O halde F , T topolojisine göre kompaktır.

Sonuç 3.1.1 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek top uzay $F, H \in S(\tilde{X})$ ve $H \tilde{c} F$ olsun. H , T_F e-esnek topolojisine göre kompakt olması için gerek ve yeter şart H esnek kümesinin T e-esnek topolojisine göre kompakt olmasıdır.

Teorem 3.1.2 (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. \tilde{X} kümesinin her esnek açık örtüsünün sonlu bir alt esnek örtüsü vardır.
2. $S(\tilde{X})$ sınıfındaki her sonsuz kümenin en az bir esnek yığılma elemanı vardır.
3. Esnek boş olmayan kapalı kümelerden oluşan $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \in S(\tilde{X})$ gibi iç içe geçmiş azalan esnek kümelerin elemanter kesişimi esnek boş değildir.

İspat $1 \Rightarrow 2$ $S(\tilde{X})$ nın bir sonsuz esnek F kümesi verilsin. F esnek kümesinin hiç bir yığılma esnek elemanının olmadığını kabul edelim. F esnek kümesinin farklı esnek elemanlarının ürettiği sayılabilir bir $G_n = SS(\{\tilde{x}_n : n \in \mathbb{N}\}) \in S(F)$ esnek alt kümesini alalım. Bu durumda G kümesinin hiç bir esnek elemanı olmayacaktır. Ayrıca her bir \tilde{x}_n esnek elemanı bir sınıf elemanıdır. Yani $G = \partial G$ olur. ∂G esnek kapalı olduğundan G esnek kapalıdır. O halde $G^\square = \tilde{X} \setminus G$ esnek açık kümedir. Her $\tilde{x}_n \in G$ esnek elemanı için $V \acute{O} G = SS(\{\tilde{x}\})$ olacak şekilde bir $V \in N(\tilde{x}_n)$ esnek açık komşuluğu vardır. Buradan $\{G^\square, V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı \tilde{X} in sayılabilir bir e-esnek örtüsü olur. Ancak bu örtünün sonlu

bir e-esnek alt örtüsü yoktur. Bu hipotez ile çelişir. O halde her sonsuz $F \in S(\tilde{X})$ alt kümesinin en az bir yığılma elemanı vardır.

$2 \Rightarrow 3$ $S(\tilde{X})$ in sonsuz bir F esnek kümesinin en az bir yığılma elemanı olsun. Bir $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ esnek kümelerinin dizisini alalım. Eğer dizinin belli bir teriminden sonraki esnek kümeleri F_n kümesine eşit ise verilen dizinin esnek kesişimi F_n kümesidir. Dolayısıyla $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \Phi$ olur. Eğer böyle değilse verilen esnek kümeler dizisinin bir alt dizisini seçersek, her $i \in \mathbb{N}$ için $F_i \neq F_{i+1}$ kabul edebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a}_n \in F_n \setminus F_{n+1}$ elemanını seçerek esnek elemanlardan oluşan bir $\{\tilde{a}_n\}$ dizisi oluşturalım. 2 önermesinde $\{\tilde{a}_n\}$ dizisinin bir yığılma elemanı vardır. Bu elemanı \bar{a} ile gösterelim. Her $i \in \mathbb{N}$ için $n \geq i$ olduğundan $\bar{a} \in F_i$ elde edilir. $\bar{a} \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ olur. Böylece verilen esnek kümeler dizisinin esnek kesişimi boş değildir.

$3 \Rightarrow 1$ $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı \tilde{X} nin bir sayılabilir esnek açık örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \tilde{X} \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n)$ şeklinde esnek kapalı kümelerden oluşan iç içe geçmiş azalan bir $\{F_n\}$ dizisini oluşturalım. Buradan $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \Phi$ olur. 3 önermesinden bir $F_{n_0} = \Phi$ esnek kümesi vardır. Yani,

$$F_{n_0} = \tilde{X} - (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n_0}) = \Phi.$$

Her iki tarafın esnek tümleyenini alırsak $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n_0} = \tilde{X}$ olur. O halde \tilde{X} in sayılabilir her esnek açık örtüsünün sonlu bir esnek alt örtüsü vardır.

Sonuç 3.1.2. (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzayın her sonsuz esnek alt kümesinin en az bir yığılma elemanı vardır.

Teorem 3.1.3. Bir e-esnek kompakt uzayın her esnek kapalı alt uzayı e-esnek kompaktır.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek kompakt uzay, $F \in S(\tilde{X})$ kapalı esnek alt küme ve $\{G_i : i \in I\}$, F kümesinin esnek açık örtüsü olsun. F esnek kapalı olduğundan $\tilde{X} \setminus F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{X} \setminus F \in T$ olur. Buradan $\tilde{X} = F \cup (\tilde{X} \setminus F)$ olur. $F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ olduğundan

$\{\tilde{X} \setminus F, G_i : i \in I\}$ sınıfı \tilde{X} nin bir esnek açık örtüsü olur. \tilde{X} e-esnek kompakt olduğundan $\{\tilde{X} \setminus F, G_i : i \in I\}$ örtüsünün sonlu esnek alt örtüsü vardır. Yani, $\{\tilde{X} \setminus F, G_i : i \in J, J \text{ sonlu}\}$ \tilde{X} nin bir sonlu esnek örtüsüdür. Dolayısıyla $\{G_i : i \in J, J \subset I \text{ sonlu}\}, F$ esnek kümesinin bir sonlu esnek örtüsüdür. O halde F e-esnek kompaktır.

Tanım 3.1.4. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzayı olsun.

1. Her $\tilde{x} \neq \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \in U$ ve $\tilde{y} \notin U$ ve $\tilde{x} \notin V$ ve $\tilde{y} \in V$ olacak şekilde esnek açık U, V alt kümeleri varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına T_1 uzayı denir.
2. Her $\tilde{x} \neq \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \in U$ ve $\tilde{y} \in V$ olacak şekilde esnek açık ve ayrık U, V alt kümeleri varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına Hausdorff (T_2) uzayı denir.

Bu tanıma göre her e-esnek T_2 uzayı bir e-esnek T_1 uzayıdır.

Teorem 3.1.4. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı olsun. Bu durumda her e-esnek kompakt $F \in S(\tilde{X})$ alt kümesi esnek kapalıdır.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı ve $F \in S(\tilde{X})$ herhangi bir e-esnek kompakt alt küme olsun. $\bar{x} \in \tilde{X} \setminus F$ esnek elemanını alalım. Buradan $\bar{x} \notin F$ olur. O zaman her $\bar{y} \in F$ elemanı için $\bar{x} \neq \bar{y}$ ve \tilde{X} e-esnek T_2 uzayı olduğundan $U_{\bar{y}} \acute{O} V_{\bar{y}} = \Phi$ olacak şekilde bir $U_{\bar{y}} \in N(\bar{x})$ ve bir $V_{\bar{y}} \in N(\bar{y})$ esnek açık komşulukları vardır. Böylece $\{V_{\bar{y}} \in N(\bar{y}), \bar{y} \in F\}$ sınıfı F esnek kümesinin bir esnek açık örtüsü olur. F esnek kompakt olduğundan $F \tilde{\subset} \bigcirc_{i=1}^q V_{\bar{y}_i}$ olur. Her $\bar{y}_i \in \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$ için $U_{\bar{y}_i} \acute{O} V_{\bar{y}_i} = \Phi$ olduğundan

$$\left(\bigcirc_{i=1}^q U_{\bar{y}_i} \right) \acute{O} V_{\bar{y}_i} = \Phi$$

olur. $U = \bigcirc_{i=1}^q U_{\bar{y}_i}$ diyelim. Buradan $U \acute{O} F = \Phi$ olur. Böylece $\bar{x} \in U \subset \tilde{X} \setminus F$ olur. O halde $\tilde{X} \setminus F$ kümesi esnek açıktır. Dolayısıyla F esnek kapalıdır.

Sonuç 3.1.3. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek kompakt T_2 uzayı olsun. Bu durumda her sonlu $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi e-esnek kompakttır. F esnek kompakt olduğundan $F \tilde{\subset} \bigcirc_{i \in I} V_{\tilde{y}_i}$ olur.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek kompakt T_2 uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $F \in S(\tilde{X})$ sonlu esnek alt kümesi esnek kapalıdır. Önceki teoremden F e-esnek kompakttır.

Sonuç 3.1.4. Bir e-esnek T_2 uzayının her e-esnek kompakt $F \in S(\tilde{X})$ alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart F kümesinin esnek kapalı olmasıdır.

Örnek 3.1.4. P parametreler kümesi sonlu ve $(\tilde{\square}, T, P)$ standart esnek uzay olsun. Bu durumda $F \in S(\tilde{\square})$ kümesinin e-esnek olması için gerek ve yeter şart F kümesinin esnek kapalı ve sınırlı olmasıdır.

$\Rightarrow F \in S(\tilde{\square})$ e-esnek kompakt olsun. Bu durumda F esnek kümesinin $\{(-\bar{n}, \bar{n}) : -\bar{n}(\lambda) = -n, \bar{n}(\lambda) = n, n \in \square, \forall \lambda \in P\}$ esnek açık örtüsünü alalım. F esnek kompakt olduğundan $F \tilde{\subset} (-\bar{n}, \bar{n})$ olacak şekilde bir $\bar{n}_0(\lambda) = n_0 \in \square$ vardır. O halde F esnek kümesi sınırlıdır. Diğer taraftan $(\tilde{\square}, T, P)$ bir e-esnek T_2 uzayı olduğundan F esnek kapalıdır.

$\Leftarrow F \in S(\tilde{\square})$ esnek kapalı ve sınırlı olsun. Bu durumda $F \tilde{\subset} [\tilde{x}, \tilde{y}]$ esnek kapalı aralığı vardır. $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ esnek kapalı ve sınırlı aralığı e-esnek kompakt olduğundan $F \tilde{\subset} [\tilde{x}, \tilde{y}]$ esnek kapalı kümesi de e-esnek kompakttır.

Teorem 3.1.5. (\tilde{X}, T, P) bir esnek T_2 uzayı $F \in S(\tilde{X})$ bir esnek kompakt alt küme ve $\tilde{x} \notin \tilde{F}$ bir esnek eleman olsun. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\in} U, F \tilde{\subset} V, U \acute{O} F = \Phi$ olacak şekilde U, V esnek açık kümeleri vardır.

İspat $\tilde{y} \notin F$ alalım. Bu durumda $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ olur. (\tilde{X}, T, P) e-esnek T_2 uzayı olduğundan $U_{\tilde{x}} \acute{O} V_{\tilde{y}} = \Phi$ olacak şekilde $U_{\tilde{x}} \in \square(\tilde{x})$ ve $V_{\tilde{y}} \in \square(\tilde{y})$ esnek açık komşulukları vardır. Aynı zamanda $\{V_{\tilde{y}} : \tilde{y} \tilde{\in} F\}$ sınıfı F esnek kümesinin bir esnek açık örtüsüdür. F kümesi

e-esnek kompakt olduğundan $F \tilde{\subset} \bigcap_{i \in I} V_{\tilde{y}_i}$ olur. Diğer taraftan $V = \bigcap_{i=1}^n U_{\tilde{x}_i} \tilde{\subset} \square(\tilde{x})$ olur.

Böylece her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $U_{\tilde{x}_i} \acute{O} V_{\tilde{y}_i} = \Phi$ olduğundan $U \acute{O} V_{\tilde{y}} = \Phi$ elde edilir. O

zaman $V = \bigcap_{i \in I} V_{\tilde{y}_i}$ olmak üzere $U \acute{O} V = \Phi$ olur.

Tanım 3.1.5. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzayı olsun. Her $F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x} \notin F$ için $\tilde{x} \in U$ ve $F \tilde{\subset} V$ olacak şekilde esnek açık ve ayrık U, V alt kümeleri varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına regüler uzayı denir.

Sonuç 3.1.5. Her e-esnek kompakt T_2 uzayı bir e-esnek regüler uzayıdır.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek kompakt T_2 uzayı olsun. Bir esnek kapalı $F \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı kümesi ve bir $\tilde{x} \notin F$ esnek elemanı verilsin. F esnek kümesi kapalı küme olduğuna göre kompaktır. Bir önceki teorem ve e-esnek regüler uzayı tanımından (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek regüler uzayıdır.

Tanım 3.1.6. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzayı olsun. Her esnek ayrık kapalı $F, K \in S(\tilde{X})$ için $F \tilde{\subset} U$ ve $K \tilde{\subset} V$ olacak şekilde esnek açık ve ayrık U, V alt kümeleri varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına normal uzayı denir.

(\tilde{X}, T, P) e-esnek normal uzayı ve aynı zamanda bir e-esnek T_1 uzayı ise bu uzaya e-esnek T_4 uzayı denir.

Teorem 3.1.6. Her e-esnek kompakt T_2 uzayı bir e-esnek normal uzayıdır.

İspat (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt T_2 uzayı ve $F \acute{O} H = \Phi$ ile $F, H \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı alt kümeleri verilsin. E-esnek kompakt T_2 uzayının esnek kapalı alt kümeleri e-esnek kompakt olduğundan F, H esnek kümeleri kompaktır. $\tilde{x} \in H$ alalım. $F \acute{O} H = \Phi$ olduğundan $\tilde{x} \in F$ olur. Bir önceki teoremden $\tilde{x} \in U_{\tilde{x}}, F \tilde{\subset} V_{\tilde{x}}$ ve $U_{\tilde{x}} \acute{O} V_{\tilde{x}} = \Phi$ olacak şekilde $U_{\tilde{x}}, V_{\tilde{x}}$ esnek açık kümeleri vardır. $\{U_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in H\}, H$ esnek kümesinin bir esnek

açık örtüsüdür. H esnek kompakt olduğundan $H \tilde{\subset} \bigcap_{i \in I} U_{\tilde{x}_i}$ olur. $U = \bigcap_{i \in I} U_{\tilde{x}_i}$ ve

$V = \bigcirc_{i=1}^n V_{\tilde{x}_i}$ kümeleri esnek açıktır. Böylece $F \tilde{c} V$ ve $H \tilde{c} U$, $U \dot{O} V = \Phi$ olur. O halde

(\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzaydır.

Sonuç 3.1.6. Her e-esnek kompakt T_2 uzayı bir e-esnek T_4 uzaydır.

İspat Her e-esnek T_2 uzayı bir e-esnek T_1 uzayı ve her e-esnek kompakt T_2 uzayı bir e-esnek normal uzaydır.

Teorem 3.1.7. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı olsun. \tilde{X} esnek kümesinin herhangi sayıda e-esnek kompakt alt kümelerinin kesişimi e-esnek kompaktır.

İspat $\{F_i\}_{i \in I} \in S(\tilde{X})$ \tilde{X} nin e-esnek kompakt alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $F = \bigcirc_{i \in I} F_i$

diyelim. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı olduğundan her $i \in I$ için $F_i \in S(\tilde{X})$ e-esnek kompakt alt kümeleri kapalıdır. E-esnek kapalılık aksiyomlarından F kümesi esnek kapalıdır. Her $i \in I$ için $F \tilde{c} F_i$ olduğundan F kümesi e-esnek kompaktır. Çünkü e-esnek kompakt uzayın esnek kapalı alt kümeleri e-esnek kompaktır.

Teorem 3.1.8. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı olsun. Bu durumda $S(\tilde{X})$ nin sonlu sayıda e-esnek kompakt kümelerinin birleşimi de e-esnek kompaktır.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek T_2 uzayı $F, H \in S(\tilde{X})$ iki e-esnek kompakt alt küme olsun. Bu durumda F, H esnek kapalıdır. E-esnek kapalılar aksiyomundan $F \dot{O} H$ kapalıdır. $\{G_i : i \in I\}$, $F \dot{O} H$ esnek kümesinin bir esnek açık örtüsü olsun. $F \tilde{c} F \dot{O} H$ ve $H \tilde{c} F \dot{O} H$ olduğundan $\{G_i : i \in I\}$, F ve H kümelerinin de esnek açık örtüsüdür. F

e-esnek kompakt olduğundan $F \tilde{c} \bigcirc_{i=1}^n G_i$ ve H e-esnek kompakt olduğundan $H \tilde{c} \bigcirc_{i=1}^n G_i$

olur. O halde $F \dot{O} H$ kümesi e-esnek kompaktır.

Teorem 3.1.9. (\tilde{X}, T_1, P) ve (\tilde{Y}, T_1, P) iki e-esnek topolojik uzay $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ ye bir esnek sürekli dönüşüm olsun. \tilde{X} kümesi e-esnek kompakt ise $\tilde{Z} = f(\tilde{X})$ esnek kümesi de e-esnek kompaktır.

İspat $\{G_i : i \in I\}$, $f(SE(\tilde{X})) = f(\tilde{X}) \subseteq \tilde{Y}$ esnek kümesinin bir e-esnek açık örtüsü olsun.

f esnek sürekli olduğundan her $i \in I$ için $SS(f^{-1}(SE(G_i))) = U_i \subseteq \tilde{X}$ esnek açıktır.

Ayrıca $SE(X) \subseteq f^{-1}(SE f(X))$ olduğundan

$$\tilde{X} \subseteq f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

\tilde{X} esnek kümesinin bir açık örtüsüdür. \tilde{X} e-esnek kompakt olduğundan

$$\tilde{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^q U_i = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^q G_i\right)$$

ve buradan

$$f(X) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^q G_i\right)\right) = \bigcup_{i=1}^q G_i$$

olur. O halde $f(\tilde{X})$ e-esnek kompakttır.

3.2. e-Esnek Dizisel Kompakt Uzaylar

Tanım 3.2.1. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. \tilde{X} nin esnek elemanlarından oluşan her $\{\tilde{s}_n\} \subset SE(\tilde{X})$ esnek dizisinin bir yakınsak alt dizisi varsa (\tilde{X}, T, P) ye e-esnek dizisel kompakt uzay denir.

$F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan her dizinin F kümesinin \tilde{x} esnek elemanına yakınsayan bir alt dizisi varsa F kümesine esnek dizisel kompakt küme denir.

Örnek 3.2.1. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay $F \in S(\tilde{X})$ bir sonlu esnek küme olsun. Bu durumda F dizisel kompakttır. Gerçekten F nin esnek elemanlarından bir $\{\tilde{s}_n\} = \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots\} \subset SE(F)$ dizisinin en az bir esnek elemanı sonsuz kere tekrar edecektir. Diyelim ki \tilde{s}_k sonsuz kez tekrar edilen esnek bir eleman olsun. Bu durumda $\{\tilde{s}_k\}$, $\{\tilde{s}_n\}$ dizisinin bir alt dizidir ve $\tilde{s}_n \in SE(F)$ esnek elemanına yakınsar.

Örnek 3.2.2. P parametreler kümesi sonlu olmak üzere $(\tilde{\square}, T, P)$ standart e-esnek topolojik uzay $F = (\bar{0}, \bar{1}) \in S(\tilde{\square})$ esnek kümesi dizisel kompakt değildir. Gerçekten esnek elemanlardan oluşan $(\bar{s}) = \left\{ \frac{\bar{1}}{n} : n \in \square \right\}$ esnek dizisi $\bar{0}$ esnek elemanına yakınsar.

Dolayısıyla dizinin her esnek alt dizisi $\bar{0}$ esnek elemanına yakınsar. Ancak $\bar{0}$, F nin bir esnek elemanı değildir.

Teorem 3.2.1. E-esnek dizisel kompakt uzayın her esnek kapalı $F \in S(\tilde{X})$ alt kümesi dizisel kompaktır.

İspat (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek dizisel kompakt uzay $F \in S(\tilde{X})$ bir esnek kapalı alt küme olsun. F nin esnek elemanlarından oluşan bir $\{\tilde{s}_n\} \in SE(F)$ dizisi alalım. Bu durumda $\{\tilde{s}_n\} \subset SE(\tilde{X})$ olur. \tilde{X} esnek kümesi dizisel kompakt olduğundan $\{\tilde{s}_n\}$ dizisinin her alt dizisi bir \bar{x} esnek elemanına yakınsaktır. F esnek kapalı olduğundan $\bar{x} \in SE(F)$ dir. O halde F esnek kümesi dizisel kompaktır.

Tanım 3.2.2. (\tilde{X}, T_1, P) ve (\tilde{Y}, T_2, P) iki e-esnek topolojik uzay, $\{\tilde{x}_n\}$ \tilde{X} nin esnek elemanlarının bir dizisi ve $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x} \in \tilde{X}$, $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(\tilde{x}) = \tilde{y} \in \tilde{Y}$ olacak şekilde \tilde{Y} nin esnek elemanlarının bir $\{\tilde{y}_n\} = \{f(\tilde{x}_n)\}$ dizisi varsa f dönüşümüne esnek dizisel süreklidir denir.

Teorem 3.2.2. (\tilde{X}, T_1, P) bir e esnek dizisel kompakt uzay, (\tilde{Y}, T_2, P) bir e-esnek topolojik uzay ve $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ sürekli esnek fonksiyonu olsun. Bu durumda $H = SS(f(SE(F)))$ esnek kümesi dizisel kompaktır.

İspat H esnek kümesinin esnek elemanlarından oluşan $\{\tilde{r}_n\} \subset SE(H)$ dizisini alalım. Bu durumda her $n \in \square$ için $f(\tilde{s}_n) = \tilde{r}_n$ olacak şekilde bir $\{\tilde{s}_n\} \subset SE(\tilde{X})$ dizisi vardır. \tilde{X} esnek kümesi dizisel kompakt olduğundan $\{\tilde{s}_n\}$ dizisinin $\tilde{s}_0 \in SE(\tilde{X})$ esnek elemanına yakınsayan bir $\{\tilde{s}_{n_k}\}$ yakınsak alt dizisi vardır. Yani, $\tilde{s}_{n_k} \rightarrow \tilde{s}_0$ olur. f fonksiyonu esnek sürekli olduğundan $\tilde{r}_{n_k} = f(\tilde{s}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{s}_0) = \tilde{r}_0$ olur.

3.3. e-Esnek Sayılabilir Kompakt Uzaylar

Tanım 3.3.1. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun. Her sonsuz esnek $F \in S(\tilde{X})$ kümesinin en az bir esnek yığılma elemanı varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlıyor denir.

Teorem 3.3.1. Her e-esnek kompakt topolojik uzay Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlar.

İspat (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ bir sonsuz esnek küme olsun. Kabul edelim ki F kümesinin hiç bir esnek yığılma elemanı olmasın. Başka bir ifade ile $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ için $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) \neq \Phi$ ve $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N_{\tilde{x}} \in N(\tilde{X})$ esnek açık komşuluğu var olsun. Bu durumda $\tilde{X} = \bigcap_{\tilde{x} \in \tilde{X}} N_{\tilde{x}}$ kompakt uzay olduğundan $\tilde{X} = \bigcap_{i=1}^q N_{\tilde{x}_i}$ olacak şekilde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \in \tilde{X}$ esnek elemanları F kümesinin yığılma elemanları değildir. Böylece, $i=1, 2, \dots, n$ için $F \cap (N_{\tilde{x}_i} \setminus \{\tilde{x}_i\}) \neq \Phi$ ve $F \cap (N_{\tilde{x}_i} \setminus \{\tilde{x}_i\}) \in S(\tilde{X})$ olur. Buradan F esnek kümesinin sonlu olduğu çıkar. Bu F esnek kümesinin sonsuz oluşuyla çelişir. O halde (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzayı Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlar.

Tanım 3.3.2. (\tilde{X}, T, P) e-esnek topolojik uzayın sayılabilir her esnek açık örtüsünün sonlu bir esnek alt örtüsü varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına sayılabilir e-esnek kompakt uzay denir.

Örnek 3.3.1. Her e-esnek kompakt uzay sayılabilir e-esnek kompaktır. Çünkü e-esnek kompakt uzayın her esnek açık örtüsünün sonlu bir esnek alt örtüsü vardır. Onlar içinden sayılabilir olanlarının da bir esnek alt örtüsü vardır.

Teorem 3.3.2. (\tilde{X}, T, P) e-esnek topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- iv. (\tilde{X}, T, P) uzayı sayılabilir kompaktır.
- v. (\tilde{X}, T, P) uzayı Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlar.
- vi. (\tilde{X}, T, P) uzayında esnek elemanlardan oluşan her dizinin bir esnek limit elemanı vardır.

İspat $i \Rightarrow ii$ (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ bir sayılabilir sonsuz esnek küme olsun. Kabul edelim ki F esnek kümesinin hiç bir yığılma elemanı olmasın. Bu durumda $\bar{F} = F \dot{\cup} F'$ eşitliğinden $\bar{F} = F$ olur. Böylece her bir $\tilde{x}_i \in F$ esnek elemanı için $N_{\tilde{x}_i} \dot{\cup} F = \{x_i\}$ ve $N_{\tilde{x}_i} \cap F \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N_{\tilde{x}_i} \in \mathcal{N}(\tilde{x})$ esnek açık komşuluğu vardır. F esnek kapalı, $F = \bigcup_{\tilde{x}_i \in F} N_{\tilde{x}_i}$ ve $F \dot{\cup} F' = \Phi$ olduğundan $\tilde{X} = N_{\tilde{x}_i} \dot{\cup} F'$ olur. O halde $\{N_{\tilde{x}_i} : i \in \mathbb{N}\} \cup F'$ \tilde{X} nın bir sayılabilir esnek açık örtüsüdür. Bu örtü için de \tilde{X} yı örten hiç bir esnek alt açık örtü yoktur. Bu (\tilde{X}, T, P) uzayının e-esnek kompakt olmasıyla çelişir. O halde F esnek kümesinin en az bir esnek yığılma elemanı vardır.

$ii \Rightarrow iii$ (\tilde{X}, T, P) e-esnek topolojik uzayı Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlasın. \tilde{X} nın esnek elemanlarının bir $\{\tilde{x}_n\} \subset SE(\tilde{X})$ dizisini alalım. Tanım gereği $\{\tilde{x}_n\}$ \tilde{X} için de sayılabilir sonsuz bir esnek kümedir. Hipotezden $\{\tilde{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en az bir yığılma elemanı vardır. Bu demektir ki $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ elemanına yakınsaktır. Yani $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin bir esnek limit elemanı vardır.

$iii \Rightarrow i$ (\tilde{X}, T, P) topolojik uzayındaki esnek elemanların her dizisinin bir limit elemanı olsun. Kabul edelim ki (\tilde{X}, T, P) sayılabilir kompakt olmasın. Bu durumda \tilde{X} nın bir sayılabilir $\{N_i : i \in \mathbb{N}\}$ esnek açık örtüsü vardır, öyle ki bu örtünün sonlu bir esnek alt örtüsü yoktur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{x}_n \in \tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i$ seçersek esnek elemanların $\{\tilde{x}_n\}$ dizisini oluşturabiliriz. Bu şekilde oluşan dizinin \tilde{X} içinde hiç bir limit elemanı yoktur. Çünkü her bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $N_n \dot{\cup} \tilde{X} = \Phi$ olacak şekilde bir $N_n \in \mathcal{N}(\tilde{x})$ açık komşulukları vardır. O halde (\tilde{X}, T, P) sayılabilir kompakt değildir.

Teorem 3.3.3. Her e-esnek dizisel kompakt uzay, e-esnek sayılabilir kompaktır.

İspat (\tilde{X}, T, P) e-esnek dizisel kompakt uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ bir sonsuz esnek küme olsun. Bu durumda F kümesinin farklı esnek elemanlarından oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi vardır. (\tilde{X}, T, P) dizisel kompakt olduğundan $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanına

yakınsayan bir $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Yakınsaklığın tanımından \tilde{x} elemanının her esnek komşuluğu $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ dizisinin F esnek kümesinin sonsuz elemanını içerir. Yani \tilde{x} , F kümesinin esnek yığılma noktasıdır. O halde (\tilde{X}, T, P) Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlar. Yani (\tilde{X}, T, P) uzayı sayılabilir kompattır.

Uyarı 3.3.1. Sayılabilir e-esnek kompakt uzayın dizisel kompakt olması gerekmez.

E-esnek kompakt uzay \Rightarrow Sayılabilir e-esnek kompakt uzay \Leftrightarrow Bolzano-Weirstrass özelliği \Leftarrow E-esnek dizisel kompakt uzay

Teorem 3.3.4. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek C_1 uzayı olsun. Eğer (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzay ise e-esnek dizisel kompattır.

İspat (\tilde{X}, T, P) uzayında esnek elemanların bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisini alalım. \tilde{X} uzayı e-esnek kompakt olduğundan bu dizinin terimlerinin kümesinin (sonsuz küme) bir $\tilde{x}_0 \in SE(\tilde{X})$ gibi bir esnek yığılma elemanı vardır. (\tilde{X}, T, P) e-esnek C_1 uzayı (Tanım 2.5.14) olduğundan \tilde{x}_0 elemanının iç içe azalan $N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_n \supset \dots$ şeklinde esnek açık kümelerden oluşan $\{N_n : n \in \mathbb{N}\}$ esnek komşuluk bazı vardır. \tilde{x}_0 elemanı $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin esnek limit elemanı olduğundan her $p \in \mathbb{N}$ için N_p esnek kümesine bir (\tilde{x}_{n_p}) esnek elemanını alabiliriz. Böylece elde ettiğimiz $\{\tilde{x}_{n_p}\} = \{\tilde{x}_{n_1}, \tilde{x}_{n_2}, \dots\}$ esnek dizisi $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin bir alt dizisidir ve \tilde{x}_0 esnek elemanına yakınsar. Çünkü her $N \in \mathcal{N}(x_0)$ için $N_k \subset N$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $\{\tilde{x}_{n_p}\}$ dizisinin n_k inci teoreminden sonraki bütün esnek elemanları N nin içinde kalır. Yani (\tilde{X}, T, P) esnek dizisel kompattır.

Sonuç 3.3.1. Teorem 2.5.5 e göre (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek sayılabilir kompakt uzayı ise (\tilde{X}, T, P) e-esnek kompakt uzaydır.

3.4. e-Esnek Lokal Kompakt Uzaylar

Tanım 3.4.1. (\tilde{X}, T, P) bir e-esnek topolojik uzay olsun.

1. Eğer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktasının \tilde{X} uzayında bir kompakt komşuluğu varsa (\tilde{X}, T, P) esnek topolojik uzayına lokal kompakt uzay denir.

2. Eğer her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için \tilde{V} esnek kümesi kompakt olacak şekilde bir $V \in N(\tilde{x})$ esnek açık komşuluğu varsa (\tilde{X}, T, P) uzayına lokal kompakt uzaydır denir.

Örnek 3.4.1. Bir e-esnek topolojik kompakt uzay her esnek elemanın bir esnek kompakt komşuluğu olduğundan her e-esnek topolojik kompakt uzay lokal kompakttır.

Örnek 3.4.2. \tilde{X} sonsuz esnek küme ve P sonlu parametreler kümesi olsun. Bu durumda (\tilde{X}, T, P) e-esnek topolojik uzayı lokal kompakttır. Ancak kompakt değildir. Gerçekten her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı için $\{\tilde{x}\} \subset \tilde{X}$ tek esnek elemanlı küme kompakt olduğundan (\tilde{X}, T, P) lokal kompakttır. Fakat \tilde{X} sonsuz olduğundan $\{\{\tilde{x}\} : \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ \tilde{X} in bir esnek açık örtüsünden \tilde{X} yı örten bir alt örtü seçilemez. Yani, (\tilde{X}, T, P) kompakt değildir.

Örnek 3.4.3. (\tilde{X}, T, P) bir sayılabilir e-esnek kompakt uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı bir küme olsun. Bu durumda F sayılabilir kompakttır.

Çözüm. (\tilde{X}, T, P) sayılabilir e-esnek topolojik kompakt uzay $F \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı bir küme olsun. $G \in S(\tilde{X})$ ile bir sonsuz esnek küme olsun. $G \subset F$. \tilde{X} sayılabilir kompakt olduğundan G esnek kümesinin bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek yığılma elemanı vardır. $G \subset F$ ve F esnek kapalı olduğu için bütün yığılma elemanlarını içerir. Yani $\tilde{x} \in F$ olur. O halde F Bolzano-Weirstrass özelliğini sağlar. Yani, F sayılabilir kompakttır.

Teorem 3.4.1. (\tilde{X}, T_1, P) ve (\tilde{Y}, T_2, P) iki e-esnek topolojik uzay $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek örtü sürekli açık bir fonksiyon olsun. Eğer (\tilde{X}, T_1, P) lokal kompakt ise (\tilde{Y}, T_2, P) e-esnek uzayı da lokal kompakttır.

İspat. $\tilde{y} \in SE(\tilde{Y})$ olsun. $\tilde{x} = f^{-1}(\tilde{y}) \in f^{-1}(SE(\tilde{Y})) = SE(\tilde{X})$ esnek elemanını seçelim. (\tilde{X}, T_1, P) lokal kompakt olduğundan \tilde{x} esnek elemanının bir F esnek kompakt komşuluğu vardır. $F \in N(\tilde{x})$ olduğundan $\tilde{x} \in V_{\tilde{x}} \subset F$ olacak şekilde bir $V_{\tilde{x}}$ esnek açık komşuluğu vardır. Buradan $f(\tilde{x}) = \tilde{y} \in f(SE(V_{\tilde{x}})) \subset f(SE(F)) \subset SE(\tilde{Y})$ olur. f esnek açık fonksiyon olduğundan $f(SE(F))$ esnek açıktır. O halde $f(SE(F))$ esnek kümesi \tilde{y} esnek elemanının bir kompakt komşuluğudur. O halde (\tilde{Y}, T_2, P) e-esnek uzayı da lokal kompakttır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde e-esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, e-esnek dizisel kompaktlık, e-esnek sayılabilir kompaktlık, e-esnek yerel kompaktlık üzerine çalışıldı. e-esnek kompakt uzayların e-esnek Hausdorff uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca bu uzayların kendi aralarındaki ilişkiler de incelenerek bir çok temel özellikleri ispatlandı.

E-esnek kompaktlık ile ilgili bu çalışmaların tamamı orijinal çalışmalar olup, bu konularda çalışacak araştırmalar için kaynak niteliğindedir.

Bu uzayların daha ileri özellikleri üzerine ve bu uzaylar ile başka uzaylar (örneğin e-esnek metrik uzaylar) arasındaki ilişkiler incelenebilir.

Bu konularda ve genel olarak e-esnek topolojik uzaylarda çalışılabilecek çok konu vardır. e-esnek parakompakt uzaylar ve e-esnek quazikompakt uzaylar gibi kavramlar tanımlanıp bunların temel özellikleri ortaya çıkarılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets. Inform. Control, 8(3): 338-353, 1965.
- [2] Molodtsov, D., Soft sets theory-First results. Comput. Math. Appl., 37(4-5): 19-31, 1999.
- [3] Molodtsov, D., The theory of soft sets (in Russian), URSS Publishers, 2004.
- [4] Molodtsov, D. A., Leonov, V. Y., Kovkov, D. V., Soft sets technique and its application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1): 8-39, 2006.
- [5] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Soft set theory. Comput. Math. Appl, 45(4-5): 555-562, 2003.
- [6] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem. Comput. Math. Appl., 44(8-9): 1077-1083, 2002.
- [7] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 589-602, 2001.
- [8] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Intuitionistic fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 677-692, 2001.
- [9] Xu, W., Ma, J., Wang, S., Hao, G., Vague soft sets and their properties. Comput. Math. Appl., 59(2): 787-794, 2010.
- [10] Ali, M. I., A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets. Appl. Soft Comput., 11(4): 3329-3332, 2011.
- [11] Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., Soft sets and soft rough sets. Inform. Sci., 181(6): 1125-1137, 2011.
- [12] Yang, C. F., A note on: Soft set theory. Comput. Math. Appl., 56(7): 1899-1900, 2008.

- [13] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. On some new operations in soft set theory. *Comput. Math. Appl.*, 57(9): 1547-1553, 2009.
- [14] Sezgin, A., Atagün, A. O., On operations of soft sets. *Comput. Math. Appl.*, 61(5): 1457-1467, 2011.
- [15] Zhu, P., Wen, Q., Operations on soft sets revisited. *J. Appl. Math.*, Article ID 105752, 2013.
- [16] Babitha, K. V., Sunil, J. J., Soft set relations and functions. *Comput. Math. Appl.*, 60(7): 1840-1849, 2010.
- [17] Majumdar, P., Samanta, S. K., Similarity measure of soft sets. *New Math. Nat. Comput.*, 4(01): 1-12, 2008.
- [18] Pei, D., Miao, D., From soft sets to information systems. 2005 IEEE International Conference on Granular Computing, Vol. 2 . IEEE, 617-621, 2005.
- [19] Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras. *Comput. Math. Appl.*, 56(5): 1408-1413, 2008.
- [20] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. *Inform. Sci.*, 178(11): 2466-2475, 2008.
- [21] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings. *Comput. Math. Appl.*, 56(10): 2621-2628, 2008.
- [22] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Introduction to fuzzy soft groups. *Comput. Math. Appl.*, 58(6): 1279-1286, 2009.
- [23] Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings. *Comput. Math. Appl.*, 59(11): 3458-3463, 2010.
- [24] Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M., Algebraic structures of soft sets associated with new operations. *Comput. Math. Appl.*, 61(9): 2647-2654, 2011.
- [25] Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 61(7): 1786-1799, 2011.
- [26] Min, W. K., A note on soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 62(9): 3524-3528, 2011.

- [27] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S. K., Soft topology. *Fuzzy Inf. Eng.*, 4(1): 105-115, 2012.
- [28] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces. *Neural Comput. Appl.*, 21(1): 113-119, 2012.
- [29] Varol, B. P., Aygün, H., A new approach to soft topology. *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(5): 731-741, 2012.
- [30] Varol, B. P., Aygün, H., Fuzzy soft topology. *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(3): 407-419, 2012.
- [31] Varol, B. P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5(1): 15-24, 2013.
- [32] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 3(2): 171-185, 2012.
- [33] Hussain, S., Ahmad, B., Some properties of soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 62(11): 4058-4067, 2011.
- [34] Ahmad, B., Hussain, S., On some structures of soft topology. *Math. Sci.*, 6: 64, 2012.
- [35] Nazmul, S., Samanta, S. K., Neighbourhood properties of soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(1): 1-15, 2013.
- [36] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C., Soft set theory and topology. *Appl. Gen. Topol.*, 15(1): 93-109, 2014.
- [37] Das, S., Samanta, S. K., Soft real sets, soft real numbers and their properties. *J. Fuzzy Math.*, 20(3): 551-576, 2012.
- [38] Das, S., Samanta, S. K., On soft metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, 21(3): 707-734, 2013.
- [39] Das, S., Samanta, S. K., On soft inner product spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(1): 151-170, 2013.
- [40] Das, S., Samanta, S. K., Soft linear operators in soft normed linear spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(2): 295-314, 2013.

- [41] Nazmul, S., Samanta, S. K., Some properties of soft topologies and group soft topologies. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 8(4): 645-661, 2014.
- [42] Das, S., Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft linear spaces and soft normed linear spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 9(1): 91-109, 2015.
- [43] Chiney, M., Samanta, S. K., Vector soft topology. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 10(1): 45-64, 2015.
- [44] Chiney, M., Samanta, S. K., Soft topological vector space. *Ann. of Fuzzy Math. Inform.*, 13(2): 153-174, 2017.
- [45] Taşköprü, K., Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş. Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bil. Ens., 2017.
- [46] Taşköprü, K., Altıntaş, İ., A new approach for soft topology and soft function via soft element. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Early Access, 2020.
- [47] Altıntaş, İ., Taşköprü, K and Selvi, B., Countable and separable elementary soft topological space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Early Access, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Arzıgul İmankulova

Uyruğu: Kırgız

Doğum Tarihi ve Yeri: 30.12.1996 Kırgızistan, Osh bölgesi

Durumu: Evli

Tel: +996 (703) 301 296

email: arzygultemirbek@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi	2018
Lise	№12 M. Kadırov okulu	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2019-2021	UVKG №23 im I.V.Goethe	Öğretmen

YABANCI DİL

Türkçe, Rusça, İngilizce

YAYINLAR

1. Altıntaş, İ., İmankulova, A., On Elementary Soft Compact Spaces, MADEA 9, Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21-25, 2021.
2. Altıntaş, İ., İmankulova, A., On elementary soft compact topological spaces, MANAS Journal of Engineering, Volume 9, Issue 2, (2021) Pages 199-206.

