



**КЫРГЫЗ - ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ ТАБИГЫЙ
ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ**

**ПАРАМЕТРДҮҮ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК
ТЕҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН
ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ**

Даярдаган

Айнура Медербек кызы

Жетекчиси


Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиев

Магистрдик диссертация

**Июнь 2022
КЫРГЫЗСТАН / БИШКЕК**

**КЫРГЫЗ -ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ ТАБИГЫЙ
ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ**

**ПАРАМЕТРДУУ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК
ТЕҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН
ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ**



**Даярдаган
Айнура Медербек кызы**

**Жетекчиси
Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиев**

Магистрдик диссертация

**Июнь 2022
КЫРГЫЗСТАН / БИШКЕК**

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Бул иште бардык илимий маалыматтар академикалык жана этикалык эрежелерге туура келгенин жана техникалык маселесинин көрсөтүлгөнүн билдирем. Темага байланыштуу материалдар каралып жана эч кайсы жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетем жана жыйынтык изилденгенин билдирүү менен сунуштайм.

Аты-жөнү: Айнура Медербек кызы

Колу:



BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Айнура МЕДЕРБЕК КЫЗЫ

İmza:

X X X X

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Параметрдүү кадимки дифференциалдык теңдемени чыгаруу үчүн чектелген элементтер методу” аттуу магистрдик иш, Кыргыз – Түрк “Манас” университетинин магистрдик иш мыйзамдарынын жана магистрдик иш жазма куралдарынын чегинде.

Даярдаган:

Айнура Медербек кызы

Колу:

Илимий жетекчиси:

Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиев

Колу:

Математика багытынын мүдүрү

Ф.-м.и.к., проф. Анаркүл Урдалетова

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLULUK

“ Parametrelili Adı Diferansiyel Denklemleri Çözmek için Sonlu Elemanlar Yöntemi ”
adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez
Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan

Aynura MEDERBEK KIZI

İmza:

Danışman

Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV

İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Anarkül URDALETOVA

İmza:

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

Ф.-м.и.доктору, профессор Асан Өмүралиевдин жетекчилигинде Айнура Медербек кызы тарабынан даярдалган “Параметрдүү кадимки дифференциалдык теңдемени чыгаруу үчүн чектелген элементтер методу” аттуу темада магистрдик иш комиссия тарабынан Кыргыз - Түрк “Манас” Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдик иш болуп кабыл алынды.

..... / /

Комиссия:

Төрагасы:	Ф.-м.и.док., профессор Искандаров Самандар
Мүчө:	PhD., профессор Мухаммет Камали
Мүчө:	Ф.-м.и.док., профессор Өмүралиев Асан
Мүчө:	Ф.-м.и.док., профессор Асанов Авыт
Мүчө:	Ф.-м.и.к., доцент Матанова Калыскан

ЧЕЧИМ :

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин..... датасында жана санындагы чечими менен бекитилди.

..... / /

Доц.Док. Исмет Алтынташ.
Институт мүдүрү

KABUL VE ONAY

Prof.Dr. Asan ÖMÜRALİEV danışmanlığında Aynura MEDERBEK KIZI tarafından hazırlanan“ Parametrelili Adı Diferansiyel Denklemleri Çözmek için Sonlu Elemanlar Yöntemi” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir. Prof.Dr. Asan ÖMÜRALİEV

..... /...../

JÜRİ

Komisyon başkanı: Prof. Dr. Samandar İSKANDAROV

Üye: Prof. Dr. Muhammet KAMALI

Üye: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV

Üye: Prof. Dr. Avıt ASANOV

Üye: Doç.Dr.Kalıskan MATANOVA

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

..... /...../

Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ
Enstitü Müdürü

АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК

Дайыма билим алууда колдоо көрсөткөн, сабырдуулук менен магистрдик ишимдин толугу менен бүтүүсүнө жардам берген жетекчиме, урматтуу агайым Ф.-м.и.д., проф. Асан Өмүралиевге жана дипломдук ишимди жазууда керектүү көрсөтмөлөрдү берген бөлүмдүн башчылыгына жана академикалык курамына терең ыраазычылыгымды билдирем.

Айнура Медербек кызы

Бишкек, 2022



ПАРАМЕТРДУУ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ

Айнура Медербек кызы

Кыргыз - Түрк «Манас» университети, Табигый илимдер институту
Магистрдик иш, Июнь 2022

Илимий жетекчиси: Ф.-м.и.док.проф. Асан Өмүралиев

АННОТАЦИЯ

Чектелген элементтер ыкмасын сингулярдуу козголгон маселелерде колдонуу үчүн алгач маселе регуляриланат, алынган регулярдүү маселеге чектелген элементтер ыкмасы колдонулат. Регулярилоо Ломов ыкмасы менен аткарылат, ал ыкма боюнча кошумча өзгөрмө киргизилип маселе мейкиндикти бир өлчөмгө жогорулатуу менен аткарылат. Статъяда экинчи тартиптеги сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык тендеме үчүн четтик маселенин сандык чыгарылышы тургузулат.

Ачкыч сөздөр: чектелген элементтер методу, сингулярдуу козголгон маселе, базистик функциялар.

**PARAMETRELİ ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ**

Aynura MEDERBEK KIZI

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans

Tezi, Haziran 2022

Danışman: Prof. Dr. Asan ÖMÜRALIEV

GENİŞ ÖZET

Tekil perturbasyon adi diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal yöntemler [1-15]'e ayrılmıştır. Eksik bir inceleme [9]'da yer almaktadır. Bazıları uydurma yöntemini [1, 2] kullanırken, diğerleri sınır tabakası [3-6] civarında kalınlaşan düzgün olmayan ızgaralar kullanır. [7-8]'de bir çözüm ayrıştırma yöntemi önerilmiştir.

Makale [4], ikinci mertebeden doğrusal olmayan, tekil perturbasyon bir adi diferansiyel denklem için bir sınır değer probleminin ele alınmasına ayrılmıştır. A.A.'nın değiştirilmiş şeması kullanılarak Newton ve Picard'ın doğrusallaştırmalarına dayalı olarak bu sorunu çözmek için bir yöntem önerilmiştir. G.I.'nin ızgarasında Samarsky. Şişkin.

Makalede [5], Galerkin izdüşümleri yöntemi, Bakhvalov ızgaralarının kullanılması durumunda, denklemlerin katsayılarının sınır tabaka tipinin fonksiyonlarını içerebileceği, kendine bitişik olmayan tekil olarak bozulan sınır değer problemlerine uygulanır.

[6]'da, parametrelili tekil perturbasyon adi diferansiyel denklemlerin bir sınıfını çözmek için ağırlıklı bir sonlu farklar şeması önerildi. Ağırlık parametresinin seçimine bağlı olarak, şema otomatik olarak ters Euler şemasından monotonik hibrit şemasına dönüştürülür. Üç tür homojen olmayan ızgara dikkate alınır: standart Shishkin ızgarası (S ızgarası), Bakhvalov–Shishkin ızgarası (B–S ızgarası) ve uyarlanabilir ızgara.

Tekil olarak perturbasyon adi diferansiyel reaksiyon-difüzyon denklemi için Dirichlet problemi [7]'de ele alınmıştır. Bu problem için, pertürbing parametresi ε , $\varepsilon \in (0, 1]$ 'e göre düzgün yakınsayan fark şemaları oluşturmak için yeni bir yaklaşım

geliştirilmiştir. Bu yaklaşım, grid çözümünün düzenli ve tekil bileşenlere ayrıştırılmasına dayanmaktadır. üniform gridler üzerindeki grid alt problemlerinin çözümleridir. Teknik asimptotik yapılar kullanarak, tek tip normda ε -düzgün yakınsayan çözüm ayrıştırma yönteminin bir şemasını oluşturuyoruz.

Dirichlet problemi için çözüm ayrıştırma yönteminin fark şemasının koşulluluğu, tekil perturbasyon adi diferansiyel konveksiyon-difüzyon denklemi için incelenmiştir [8]. Bu şema, bir ızgara çözümünün, ızgara alt problemlerinin çözümleri olan düzenli ve tekil bileşenlere ayrıştırılmasını kullanır - tek tip ızgaralar üzerinde düşünülen klasik fark yaklaşımları. Şema, tek biçimli normda ε -tekdüze bir şekilde yakınsar.

Makale, S.A. Lomov düzenleme yönteminin [10] ve bilinen sayısal yöntemlerin (sonlu elemanlar, sonlu farklar, doğrudan doğrular) sentezine dayanan, tekil olarak bozulmuş adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için yeni bir yaklaşım önermektedir. Yöntemin fikri, tekil olarak bozulan bir sorunu düzenli hale getirmektir, ek bir düzenleyici bağımsız değişken ekleyerek, orijinal sorun daha yüksek boyutlu bir alana genişletilir. Bu durumda elde edilen genişletilmiş problem küçük bir parametrede regüler olacaktır, daha sonra elde edilen regüler problem ayrıştırılır, elde edilen bileşenler için elde edilen denklemler uygulanır, bilinen sayısal yöntemlerden biri uygulanır. Daha önce, bu yöntem [11-15]'te çeşitli tekil olarak bozulmuş adi diferansiyel denklemlere ve [16]'da bir parabolik denkleme uygulanmıştı.

[11]'deki doğrular yöntemi, küçük bir birinci dereceden parametrelili bir diferansiyel denklem için başlangıç problemini çözmüştür. Sonlu farklar yöntemine dayalı olarak, bir sınır tabaka fonksiyonu ve iki sınır tabaka fonksiyonu ile tekil pertürbe adi diferansiyel denklemler, sırasıyla [12], [13]'te incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi [14], [15]'te tekil olarak bozulan adi diferansiyel denklemleri çözmek için uygulandı. [16]'da, sonlu farklar yöntemi, tekil olarak bozulan bir ısı denklemini çözmek için kullanılır.

Bu çalışmada önceki çalışmalar genelleştirilmiş, yöntem uygulama için daha uygun bir algoritmaya indirgenmiştir. Ayrıştırma, temel yapıya karşılık gelen bir fonksiyon kullanılarak gerçekleştirilir. Ayrıştırma ile elde edilen denklemler düzgün bir ızgara

üzerinde çözülür.

Sonlu elemanlara dayalı tekil tedirgin denklemin sayısal çözümü.

Bu tez çalışmasında , tekil perturbasyon sınır değer probleminin sayısal çözümü incelenecektir.

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &= \varepsilon^2 u''(x, \varepsilon) - a(x)u(x, \varepsilon) = f(x) , \\ u(0, \varepsilon) &= u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1 \end{aligned} \quad (1)$$

Tekil perturbasyon problemler [1] için regülerizasyon yöntemi kullanılarak ilk olarak problem (1) regüle edilir. Daha sonra, düzenleştirilmiş problem sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yöntemi ile çözülür.

Verilen $a(x)$, $f(x)$ fonksiyonları yeterli mertebeden türevlenebilir.

Böyle bir problem (1), $x=0$ ve $x=1$ boyunca sınır katmanlarına sahiptir. İki düzenleme işlevi sunuyoruz

$$\xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon} = \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \sqrt{a(s)} ds, \quad l=1,2 \quad (2)$$

ve genişletilmiş fonksiyon $\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2, \varepsilon)$ öyle ki

$$\tilde{u}(x, \xi, \varepsilon) \Big|_{\xi = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \equiv u(x, \varepsilon) \quad (3)$$

(3)'ten, (2)'ye dayanarak türevi buluruz. $u''(x, \varepsilon)$

$$u'(x, \varepsilon) = \left(\partial_x \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} \varphi_l'(x) \partial_{\xi_l} \tilde{u} \right) \Big|_{\xi = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}},$$

$$u''(x, \varepsilon) = \partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\varphi_l'(x)}{\varepsilon} \right)^2 \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(2\varphi_l'(x) \partial_{x\xi_l}^2 \tilde{u} + \varphi_l''(x) \partial_{x\xi_l} \tilde{u} \right)$$

sonra, problem (1) yerine, genişletilmiş problemi belirledik

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} = \varepsilon^2 \partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \left[a(x) \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} + \varepsilon a(x) L_{\xi_l} \tilde{u} \right] - a(x) \tilde{u} = f(x) \quad (4)$$

$$\tilde{u} \Big|_{x=0, \xi_1=0} = u^0, \quad \tilde{u} \Big|_{x=1, \xi_2=0} = u^1,$$

$$L_{\xi_l} \equiv 2\varphi_l'(x) \partial_{x\xi_l}^2 + \varphi_l''(x) \partial_{x\xi_l}$$

bir kimlik olduğuna dikkat edin.

$$\left(\tilde{L}\tilde{u} \right)_{\xi = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \equiv L_\varepsilon u \quad (5)$$

(4) numaralı problemin çözümü şu şekilde tanımlana

$$\tilde{u}(x, \xi, \varepsilon) = V_1(x) + V_2(x) + W_1(x)\exp(-\xi) + W_2(x)\exp(-\xi_2), \quad (6)$$

göre $V_l(x), W_l(x)$, $l = 1, 2$ sorunu anlayacağız

$$-a(x)V_1(x) = f(x), \quad L_\varepsilon V_2 = -\varepsilon^2 V_1''(x), \quad V_2|_{x=l-1} = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon W_l''(x) - (-1)^{l-1} [2\varphi_l'(x)W_l'(x) + \varphi_l''(x)W_l(x)] = 0, \quad l = 1, 2. \quad (8)$$

Burada V_2 normal terimin geri kalanıdır.

Buna göre denklem $W_l(x)$ sonlu elemanlar yöntemiyle çözülecektir:

$$V_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} V_{2i} \omega_i(x), \quad (9)$$

$$W_l(x) = \sum_{i=1}^{n-1} W_{2i}^l \omega_i(x) + (u^0 - V_1(0))\omega_0(x) + (u^1 - V_1(1))\omega_n(x), \quad (10)$$

burada deneme fonksiyonları $\omega_i(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \frac{(x_i - x)}{h} & x \in (x_0 = 0, x_1) \text{ ise} \\ 0 & x \notin (x_0, x_1) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{n-1})}{h} & x \in (x_{n-1}, x_n) \text{ ise} \\ 0 & x \notin (x_{n-1}, x_n) \text{ ise} \end{cases}$$

$$x_i = ih, h = \frac{1}{n}, i = 0, 1, \dots, n$$

Tanım için (7) ve (8)'de sırasıyla (9) ve (10) yer alır. tanımı için V_{2i}, W_{2i}^l

skaleri çarparak $\omega_i(x)$ sistemleri elde ederiz

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_{2i}^l (\varepsilon^2 \omega_i''(x) - (-1)^{l-1} \varepsilon (2\phi_l'(x) \omega_i'(x) + \phi_l''(x) \omega_i(x))), \omega_k(x) =$$

$$-(u^0 - V_1(0))(\omega_0(x), \omega_k(x)) - (u' - V_1(1))(\omega_n(x), \omega_k(x)),$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

$[\omega_i, \omega_k] = -\varepsilon^2 (\omega_i', \omega_k') - (a(x) \omega_i(x) \omega_k(x))$ atama nereye giriliyor

$$b_{ij}^l = \left(\varepsilon^2 \omega_i''(x) - (-1)^{l-1} (2\phi_l'(x) \omega_i'(x) + \phi_l''(x) \omega_i(x)), \omega_j(x) \right),$$

$$f_j = -\varepsilon^2 (a^{-1}(x) f(x))'', \omega_j(x),$$

$$g_j(x) = -(u^0 - V_1(0))(\omega_0(x), \omega_j(x)) - (u' - V_1(1))(\omega_n(x), \omega_j(x)),$$

$$a_{ij} = [\omega_i, \omega_j],$$

V_{2i} ve W_{2i}^l yi belirlemek için cebirsel denklem sistemleri elde ederiz

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} V_{2i} = f_j$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}^l W_{2i}^l = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad l = 1, 2$$

Bu sistemleri tanımlayalım

$$a_{j-1,j} V_{2j-1} + a_{j,j} V_{2j} + a_{j+1,j} V_{2j+1} = f_j,$$

(12)

$$b_{j-1,j}^l W_{2j-1}^l + b_{j,j}^l W_{2j}^l + b_{j+1,j}^l W_{2j+1}^l = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

burada $a_{j-1,j} = -\varepsilon^2 (\omega_{j-1}', \omega_j') - (a(x) \omega_{j-1}(x), \omega_j(x)) = +\varepsilon^2 \frac{1}{h} - a \left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) \frac{h}{6}$

$$a_{j,j} = -\varepsilon^2 (\omega_j', \omega_j') - (a(x) \omega_j, \omega_j) = -\frac{2\varepsilon^2}{h} - a \left(\frac{x_{j-1} + x_{j+1}}{2} \right) \frac{2h}{3}$$

$$a_{j+1,j} = -\varepsilon^2 (\omega_{j+1}', \omega_j') - (a(x) \omega_{j+1}, \omega_j) = \frac{\varepsilon^2}{h} - a \left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) \frac{h}{6}$$

$$f_j = -\frac{\varepsilon^2 h}{2} \left[f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right], \quad f(x) = (a^{-1}(x) f(x)),$$

$$b_{j-1,j}^l = -\varepsilon^2 (\omega_{j-1}^{\cdot}, \omega_j^{\cdot}) - 2(\varphi_l^{\cdot}(x) \omega_{i-1}^{\cdot}, \omega_j) -$$

$$-\left(\varphi_l^{\cdot}(x) \omega_{j-1}, \omega_j = \varepsilon^2 \frac{1}{h} - 2\varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) - \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \frac{h}{2} \right)$$

$$b_{j,j}^l = -\frac{2\varepsilon^2}{h} - \frac{2}{h} \left[\varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right] -$$

$$-\frac{h}{3} \left[\varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right]$$

$$b_{j+1,j}^l = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{h}\right) - 2\frac{1}{2} \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \frac{h}{6}, \quad g_j = 0, j = 2, \dots, n-2$$

$$g_1 = -(u^0 - V(0)) \left[\omega_0^{\cdot}, \omega_1^{\cdot} \varepsilon^2 - 2(\varphi_l^{\cdot} \omega_0^{\cdot}, \omega_1) - (\varphi_l^{\cdot} \omega_0, \omega_1) \right] =$$

$$= -(u' - V(0)) \left[-\varepsilon^2 \frac{1}{2} + \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) - \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \frac{h}{6} \right]$$

$$g_{n-1} = -(u' - V(1)) \left[-\varepsilon^2 (\omega_n^{\cdot}, \omega_{n-1}^{\cdot}) - 2(\varphi_l^{\cdot} \omega_n^{\cdot}, \omega_{n-1}) - (\varphi_l^{\cdot} \omega_n, \omega_{n-1}) \right] =$$

$$= -(u' - V(1)) \left[\frac{\varepsilon^2}{2} - 2\varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi_l^{\cdot}\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \frac{h}{6} \right]$$

Çözüm sistemleri (12) tanımları V_{2i}, W_{2i}^l . (6) daraltarak (1) probleminin yaklaşık bir çözümünü elde ederiz.

Teorem 1.5 ve [6]'yı izleyerek noktasal bir tahmin, yani aşağıdaki teoremin geçerliliği mümkündür.

Teorem. İkinci türev $u''(x)$, sürekli olsun, o zaman tahminler var

$$|u - u''| < ch^2$$

Örnek. MATLAB paketini kullanarak sorunu çözeceğiz

$$\varepsilon^2 u'' - 4u = 1 + x^3, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 2, \quad u|_{x=1} = 1$$

Kesin çözümleri şu şekildedir

x	Kesin çözüm	Yaklaşık Çözüm
0	2.0000	2.0000
0.05	-0.1697	-0.2678
0.1	-0.2473	-0.2500
0.15	-0.2505	-0.2508
0.2	-0.2517	-0.2519
0.25	-0.2536	-0.2538
0.3	-0.2563	-0.2566
0.35	-0.2602	-0.2606
0.4	-0.2655	-0.2658
0.45	-0.2722	-0.2726
0.5	-0.2806	-0.2811
0.55	-0.2909	-0.2914
0.6	-0.3032	-0.3038
0.65	-0.3178	-0.3184
0.7	-0.3348	-0.3355
0.75	-0.3545	-0.3552
0.8	-0.3769	-0.3777
0.85	-0.4025	-0.4033
0.9	-0.4329	-0.4332
0.95	-0.5165	-0.4640
1	-1.0000	-1.0000

Anahtar Kelimeleri: sonlu elemanlar yöntemi, tekil pertürbe problemi, temel fonksiyonlar.

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПАРАМЕТРОМ**

Айнура Медербек кызы

**Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Институт Естественных наук
Магистерская диссертация, Июнь 2022**

Научный руководитель: Проф.Ф.-м.и.докт. Асан Өмүралиев

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена построению численного решения краевой задачи для обыкновенного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка. Для применения метода конечных элементов в сингулярно возмущенных задачах сначала данная задача регуляризуется, далее полученной регулярной задаче применяется метод конечных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, сингулярно-возмущенная задача, базисные функции.

FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE PARAMETER

Ainura Mederbek kyzy

Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2022

Supervisor: Prof. Dr. Asan Omuraliev

ABSTRACT

The work is devoted to the construction of a numerical solution of a boundary value problem for an ordinary singular perturbed second-order differential equation. To apply the finite element method in singular perturbed problems, this problem is first regularized, then the finite element method is applied to the obtained regular problem.

Keywords: finite element method, singularly perturbed problem, basis functions.

МАЗМУНУ

ПАРАМЕТРДҮҮ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ

Плагиат жасалбагандыгы тууралуу билдирүү.....	III
Bilimsel etiğe uygunluk	IV
Эрежеге ылайыктуулук.....	V
Yönergeye uygunluluk	VI
Кабыл алуу жана бекитүү.....	VII
Kabul ve onay	VIII
Алгач сөз / ыраазычылык	XI
Аннотация.....	X
Geniş özet.....	XI
Аннотация.....	XVIII
Abstract.....	XIX
Киришүү.....	1

1-БӨЛҮМ

1.1 Козголуучулук жөнүндө.....	3
1.2 Сингулярдуу козголуучулук.....	6
1.3 Галеркин методу.....	7
1.4 Чектелген элементтер методу.....	10
1.5 Чектелген элементтер методунун негизги концепциясы.....	11
1.6 Чектелген элементтер методу менен чыгаруу.....	16
1.7 Matlab програмдык пакети.....	18

2-БӨЛҮМ

2.1 Маселенин чыгарылышы.....	22
-------------------------------	----

3- БӨЛҮМ

Жыйынтык.....	31
КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР.....	32
ӨМҮР БАЯН.....	34

КИРИШҮҮ

Сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун сандык ыкмалары [1-15] каралган. [9] да толук эмес каралган. Кээ бирлери кубалоо ыкмасын колдонушат [1, 2], ал эми кээ бирлери чек катмарына жакын жерде калыңдаган бир тектүү эмес торчолорду колдонушат [3-6]. [7-8]де декомпозиция ыкмасы сунушталат.

Иш [4] экинчи тартиптеги сингулярдуу козголгон сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселени кароого арналган. Бул маселени чыгаруу ыкмасы Ньютондун жана Пикардын линеаризациясынын негизинде, сызыктуу болгон учурда белгилүү болгон Г. И. Шишкин торунда А.А.Самарскийдин өзгөртүлгөн схемасын колдонуу сунушталды.

Бул иште [5] Галеркиндик проекциялар ыкмасы өз алдынча кошулбаган сингулярдуу козголгон чектик маселелерине колдонулат, мында теңдемелердин коэффициенттери Бахвалов торчолорун колдонгон учурда чектик катмар тибинин функцияларын камтышы мүмкүн.

[6] да параметрлештирилген сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин классын чечүү үчүн **салмакталган** чектелген айырма схемасы сунушталган. Салмактык параметрди тандоого жараша схема автоматтык түрдө тескери Эйлер схемасынан монотондуу гибридик схемага которулат. Бир тектүү эмес торчолордун үч түрү каралат: стандарттык Шишкин торчосу (S-тор), Бахвалов-Шишкин торчо (B-S-тор) жана адаптивдүү торчо.

Сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык диффузия реакциясынын теңдемеси үчүн Дирихле маселеси [7] – иште каралат. Бул маселе үчүн ε , $\varepsilon \in (0, 1)$ козголуучу параметрине карата бирдей жакындаган айырма схемаларын тургузуу үчүн жаңы ыкма иштелип чыккан. Бирдей торчолор боюнча маселенин торчолук чыгарылышы болуп саналган бул ыкма торчолор менен чыгаруу үчүн регулярдуу жана сингулярдуу компоненттерге ажырашына негизделген. Асимптотикалык конструкциялар техникасын колдонуу менен, биз ε -бирдиктүү нормага жакындаган декомпозиция ыкмасынын схемасын түзөбүз.

Сингулярдуу козголгон кадимки диффузиялык конвекция-диффузия теңдемеси үчүн Дирихле маселеси үчүн чечимди ажыратуу ыкмасынын айырма схемасынын шарттуулугу изилденген [8]. Бул схема торчолук чыгаруу ыкмасы менен регулярдуу жана сингулярдуу компоненттерге ажыратууну колдонот, бул торчолук проблемалардын чыгарылыштары болуп саналат. Схема бирдиктүү нормада ε -бир калыпта жакындайт.

Бул иште С.А.Ломовдун регуляризациялоо ыкмасы [10] жана белгилүү сандык методдор (чектелген элементтер, чектелген айырмалар, түз сызыктар) синтезине негизделген сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелерди сандык чыгаруунун жаңы ыкмасы сунушталат. Ыкманын идеясы кошумча регуляризациялоочу көз карандысыз өзгөрмө киргизүү жолу менен сингулярдуу маселени регуляризациялоо болуп саналат, баштапкы маселе жогорку өлчөмдөгү мейкиндикке кеңейтилет. Бул учурда алынган кеңейтилген маселе кичинекей параметр боюнча регулярдуу болот, андан кийин пайда болгон регулярдуу маселе ажырайт, жана белгилүү сандык ыкмалардын бири колдонулат. Мурда бул ыкма [11-15] ар кандай сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер жана [16] параболикалык теңдеме үчүн колдонулган.

[11]-теги түз сызык ыкмасы аркылуу биринчи даражадагы кичинекей параметрлүү дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселе чыгарылды. Чектелген айырмалар ыкмасына негизделген бир чек катмарлуу жана эки чек катмарлуу функциясы бар сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер изилденген [12], [13] изилденген. Чектелген элементтер ыкмасы [14], [15] сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн колдонулган. [16]-иште чектелген айырмалар ыкмасы сингулярдуу козголгон жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин чыгаруу үчүн колдонулат.

Бул иште мурунку иштер жалпыланган, метод колдонууга ыңгайлуураак алгоритмге келтирилген. Декомпозиция фундаменталдуу түзүлүшкө туура келген функцияны колдонуу менен ишке ашырылат. Бөлүү жолу менен алынган теңдемелер бирдиктүү торчодо чечилет.

1-БӨЛҮМ

1.1 КОЗГОЛУУЧУЛУК ЖӨНҮНДӨ

1846-жылы Француз астроному Леверье Уран планетасынын кыймылынын "туура эместигин" изилдөө менен дагы бир планетанын бар экенин алдынала айткан жана анын ордун жана кыймыл убактысын көрсөткөн. Ушул эсептөөлөр боюнча немис астроному Галле көрсөтүлгөн жерде жаңы планетаны ачкан. Кийинчерээк ачылган планета Нептун деп аталды. Бул ачылыш XIX кылымдагы илимдеги чоң ийгилик болгон.

Леверьенин мындай ачылыш жазашына эмне түрткү болгон? Уран планетасынын туура эмес кыймылын изилдөөдө Леверье белгисиз бир кошуна планета ага тоскоол болуп, козголоң чыгарып жатканын түшүнгөн. Эгерде дүйнө жүзү боюнча эки гана тела, Күн жана Жер болсо, анда алар бири – бирине бүткүл дүйнөлүк тартылуу законунда айтылгандай кыймылда болушмак. Бул жөнөкөй тилде айтканда козголоңсуз кыймыл. Бирок дүйнө жүзүндө дагы бүткүл дүйнөлүк тартылуу законуна баш ийген жана Күндү тегеренген Жердин кыймылын козголткон башка телолор да бар. Мындай козголуу күчү аралыкка байланыштуу а планеталардын бири-бирин козголтуусуна аздык кылат, ошон үчүн алардын кыймылында аябай чоң өзгөрүү жок. Бирок аларды асман телолоруну менен байланыштуу болжолдоолорду эсептөөдө эске алуу зарыл (мисалы, Күндүн чыгыштан жана батыштан тутуулусун болжолдоодо). Негизинен Жердин кыймылын дүүлүккөн кыймыл деп аташат. Бардык ыктымалдуулуктар боюнча “козголуу” термини биринчилерден болуп асман механикасында пайда болгон.

Козголуу математикалык түшүнүктө чоң жана кичине параметрлердин жардамы менен түшүндүрүлөт. Асман механикасындагы кичине параметр, планеталардын массасынын Күндүн массасына болгон катышын берген чоңдук $\varepsilon = \frac{m_1}{m}$ болушу, ал эми тескери чоңдук чоң параметрдин ролун ойношу мүмкүн. Козголуу теңдемесинин чыгарылышындагы тигил же бул түшүнүктөрдөн чыккан кичине параметрдин даражалуу катары негизинен козголуу теориясынын катары деп аталат.

Жогоруда айтылгандардан улам козголуу ар дайым козголуусуз процесстердин маанисиз өзгөрүүгө алып келет деген түшүнүк калыптанат. Бирок бул регулярдуу козголуу үчүн гана туура. Мисал катары жөнөкөй алгебралык теңдемени карайбыз

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (1.2)$$

ε кичине параметрин мүнөздөгөн, $0 < \varepsilon \ll 1$ (\ll -белгиси абдан кичине дегенди түшүндүрөт) пределинде өзгөргөн, кичине козголуудагы теңдеменин тамырынын өзгөрүү кыймылын изилдейбиз. (2.1) теңдемесинин биринчи мүчөсү негизги мүчө болуп саналат, теңдеменин так ушул мүчөсү анын бир же үч эмес эки гана тамыры бар экендигин аныктайт. Экинчи жана үчүнчү мүчөлөрү – теңдеменин карамагындагы мүчөлөр болуп саналат. Мейли карамагындагы мүчөлөрдүн бири козголууга дуушар болсун дейли,

$$ax^2 + \varepsilon bx + c = 0 \quad (1.3)$$

Козголуу жок болгон ($\varepsilon = 0$) учурда биз козголуусуз теңдемеге

$$ay^2 + c = 0, \quad (1.4)$$

төмөнкүдөй тамырлары менен

$y_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ жана $y_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ($c \neq 0$) алабыз. Регулярдуу козголуу болгондугу үчүн (1.3) козголуучу теңдемесинин эки тамыры тең жана тамырларынан бир аз өзгөрүү менен алынат. Экинчи тартиптеги теңдемелердин тамырларын биз таба алабыз жана жогоруда айтылгандардын тууралыгына ишенебиз. (1.3) теңдемесинин тамырларын төмөнкүдөй табабыз.

$$x_1 = \frac{-\varepsilon b + \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} + \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \dots \quad (1.5)$$

$$x_2 = \frac{-\varepsilon b - \sqrt{\varepsilon^2 b^2 - 4ac}}{2a} = -\sqrt{-\frac{c}{a}} - \varepsilon \frac{b}{2a} - \varepsilon^2 \frac{b^2}{8a\sqrt{-ac}} + \dots \quad (1.6)$$

Чындыгында эле (2.3) козголуу жок теңдемесинин тамырынан регулярдуу козголгон теңдеменин тамыры кичинекей кошумчадан (ε жана ε^2 тартиби ж.б.) айырмаланат. (1.5) катарлары кадимки

$$\left| \frac{\varepsilon^2 b^2}{4ac} \right| < 1$$

шартта туура келишет.

Сингулярдуу козголууну карайлы. Ал үчүн төмөнкүдөй козголуу негизги мүчөсү башкы ролду ойногон теңдеме алалы,

$$\varepsilon ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1.7)$$

Мында $\varepsilon = 0$ болгон учурда төмөнкүдөй теңдеме алабыз.

$$by + c = 0, y_1 = -\frac{c}{b}, b \neq 0 \quad (1.8)$$

Бул учурда бир эле тамырга ээ, ал эми дүүлүккөн теңдеме эки тамырга ээ болоорун билебиз. Мындан улам регулярдуу менен сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелердин негизги айырмасын байкайбыз

(1.7) сингулярдуу козголгон теңдемесинин тамырларын табабыз;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{c}{a} - \varepsilon \frac{ac^2}{b^2} + \varepsilon^2 \frac{2a^2 c^3}{b^4} + \dots \quad (1.9)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\varepsilon ac}}{2\varepsilon a} = -\frac{b}{a\varepsilon} - \frac{c}{b} - \varepsilon \frac{ac^2}{b^3} + \dots \quad (1.10)$$

(1.8) менен (1.9) ди салыштыруу менен биз сингулярдуу козголгон теңдеменин биринчи тамыры регулярдуу козголуудай экендигин көрөбүз. (1.8) ден кичине кошумча параметрлери менен гана айырмаланат.

Бирок экинчи (1.10) деп белгиленген тамыр козголуусуз теңдеменин тамыры менен такыр байланышы жок. $\varepsilon \rightarrow 0$ болгон учурда экинчи тамыр чексиз түрдө абсолюттук чоңдукта өсөт жана бул жерде кичинекей кошумча тууралуу сөз кылууга болбойт. Чындыгында сингулярдуу бөлүктүн тамыры “кыскартылган” теңдемеден аныкталаарын байкоого болот,

$$\varepsilon ay^2 + by = 0, y_2 = -\frac{b}{\varepsilon a} \quad (y_1 = 0),$$

жана бул y_2 тамырына карата (1.10) туюнтмасынын калган бөлүгү кичине кошумчанын ролун ойнойт. Ошондуктан регулярдуу болгон учурда козголуу

козголуусуз теңдемени кичинекей өзгөрүүгө дуушар кылат десек болот, ал эми сингулярдуу козголуу учурунда толук окшоштук болбойт, ошон үчүн бул учурда регулярдуу козголгон методдордун өзгөчөлөрү менен изилдөө зарыл.

(1.3) регулярдуу козголгон теңдемесинин тамырын ε дун даражалуу катары

$$x_i = x_0^i + \varepsilon x_1^i + \varepsilon^2 x_2^i + \dots, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

түрдөгү катарды (1.3) кө коюп, коэффициенттерди бирдей даярага тууралап аныктоо керек. Алынган теңдемеден (1.11) катарындагы x_j^i коэффициенттеринин баары аныкталат. (1.5), (1.6) катарлары да ушундай жол менен аныкталат. (1.7) сингулярдуу козголгон теңдемесинин биринчи (1.9) тамырында ушул эле схема менен аныктоого болот (кээ бир учурларда Пуанкаре методу деп да айтышат).

Алгебралык теңдеменин жөнөкөй учурдагы (1.10) тамырын мурунку схема менен деле аныктоого болот, бирок баштаганда эле терс даражалуу ε дун жайылышы, жалпы дифференциалдык теңдеме болгондо баардыгын татаалдаштырат.

1.2 СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛУУЧУЛУК

Маселелерде сингулярдуулук ар түрдүү болот. Биз маселеге жарылуу, тез өтүү, чектик эффекттер сыяктуу физикалык кубулуштарды жакындаштырып баяндоо менен келген сингулярдуулук жөнүндө сөз кылалы. Бул кубулуштардын баардыгы бирдиктүү эмес конвергенциянын жардамы менен математикалык түрдө баяндалат, ал эми операторлор чоң жана кичинекей параметрлерди камтышат.

Мисал катары ийкемдүүлүк теориясынан эң жөнөкөй маселени карайлы. Сызыктуулук теориясынан узуну-туурасынан ийилүү боюнча белгилүү болгондой устундун өлчөмсүз координатада ω ийилүүсү төмөнкү маселени канааттандырат:

$$L_\varepsilon \omega \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} = p(x), \quad \omega(0) = \omega(1) = \frac{d\omega(0)}{dx} = \frac{d\omega(1)}{dx} = 0, \quad (1.21)$$

Бул жакта $p(x)$ -тышкы таасир же жүк. Чектик маселелер устундун четтери бекитилгендигин түшүндүрөт, $\varepsilon^2 = EI(TL^2)^{-1} \ll 1$, E – ийкемдүүлүктүн турактуу модулу, I -устундун нейтралдуу окко карата туурасы боюнча бөлүмдүн инерциялык турактуу моменти, T - турактуу узунунан кеткен күч, L - устундун узундугу. ε кичинелиги болжолдоо менен ийилүү катуулугунун таасири узунунан кеткен күчтүн таасирине салыштырмалуу кичине болот.

Мисал карай кетсек: (1.21) ны квадратура менен жазсак болот, бирок бул жол татаалдашып кеткендиктен структурасын $\varepsilon = 0$ деп алабыз, анда төмөнкүдөй болот;

$$\omega(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + c_2(\varepsilon)e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} + \omega_0(x, \varepsilon), \quad (1.22)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_1(\varepsilon) = c_1^0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_2(\varepsilon) = c_2^0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_0(x, \varepsilon) = \omega_0(x)$$

$\varepsilon = 0$ болгон учурда $\omega_0(x)$ функциясы (1.21) дан алынган пределдик теңдеменин чыгарылышы болуп эсептелет;

$$L_0\omega_0 \equiv -\frac{d^2\omega_0}{dx^2} = p(x) \quad (1.23)$$

Бул биринчи эки чектик шартты канааттандырат; c_1^0 жана c_2^0 –каалагандай константалар.

Берилген (1.21) маселеси эгерде $\varepsilon \rightarrow 0$ деп каралса анда сингулярдуу козголгон маселе болуп эсептелет. Терминологияда “сингулярдуу” сөзү “регулярдуу эмес” сөзүнүн синоними болот. Чындыгында $\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ (же $\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right)$) функциясы $\varepsilon = 0$ чекитинин айланасындагы ε дун терс эмес даражалуу катарына ажырашы мүмкүн эмес. Мындай функция ε боюнча сингулярдуу деп айтылат. Ушул жактан (1.22) жана (1.21) маселери ε дон сингулярдуу көз каранды. Ошондуктан (1.21) маселесин сингулярдуу козголуучу дейбиз.

1.3 ГАЛЕРКИН МЕТОДУ

Ритц методунун өзүнө –өзү тутумдаш жана оң аныкталган операторлуу теңдемелер үчүн гана колдонулушу негизги кемчилик болгон. Бул көйгөйдөн кутулуу үчүн биз Галёркин методун колдонобуз. Бул метод Бубнов-Галёркиндин проекциялык методу деп да аталат. Бул методду оператордук теңдемеге колдонуп көрөлү

$$Lu = f$$

$F(\Phi(L)F)$ гильберттик мейкиндиги, $L = L_0 + K$, L_0 -симметриялык жана оң аныкталган оператор $\Phi(L_0) \subseteq \Phi(L)$. Чектелген өлчөмдөгү удаалаштыкты $F_h \subseteq$

F_{L_0} ($h = h_1, h_2, \dots$) $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ базиси менен кошо киргизебиз. Анда Галёркин боюнча жакындoo төмөнкүдөй болот

$$u^h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \varphi_i^h, \quad (1.30)$$

a_i коэффициенттери $Lu^h - f$ бардык F_h элементтерге ортогоналдык болушу үчүн

$$(Lu^h - f, \varphi_s^h) = \int_D \left\{ \sum_{i,j=1}^2 A_{ij(x)} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_s^h}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^2 B_i \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \varphi_s^h - f \varphi_s^h \right\} dD = 0$$

Эми төмөнкү системага келебиз

$$Aa = g, \quad (1.31)$$

$$a_{ij} = (L\varphi_j^h, \varphi_i^h), g = (f, \varphi_i^h), \quad i, j = 1, \dots, N_h \quad (1.32)$$

$\{a_i\}$ коэффициенттерин (1.30) формуласы менен жакындаштырып эсептөөдө оной табабыз. Эгерде $Lu = f$ маселесинде u чыгарылышы жашаса жана F де жалгыз болсо, анда $\{F_h\}$ удаалаштыгы жана $L_0^{-1}K$ оператору F де үзгүлүксүз, Галеркин методунда алынган u^h

удаалаш жакындаштыруу F де u нун так чыгарылышына умтулат.

Эми Галеркин методунун бир модификациясын карасак L_0 симметриялык эмес жана оң аныкталган эмес дейли жана F де L_0^{-1} чектелген оператор болсун, анда төмөнкү теңдемеге ээ болобуз.

$$u + L_0^{-1}Ku = f', \quad f' = L_0^{-1}f \quad (1.33)$$

F_1 Гильберт мейкиндигинде $(u, v)_1 =$

(L_0u, L_0v) скалярдык көбөйтүү менен жана $\|u\|_1 = \|L_0u\|$ нормасы менен туюнтабыз. Анда F_h -чектелген өлчөмдүү $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ базиси менен F_1

мейкиндигинен алынат, Бул жакта жакындатылган чыгарылыш $u^h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \varphi_i^h$,

түрүндө изделет. Белгисиз болгон $\{a_i\}_{i=1}^{N_h}$, белгисиздери сызыктуу теңдемелер системасынан аныкталат.

$$(u^h, \varphi_j^h) + (L_0^{-1}Ku^h, \psi_i^h)_1 = (f', \varphi_i^h)_1, \quad i = 1, \dots, N_h \quad (1.34)$$

Эскертүү: (1.34) тү төмөнкүдөй эквиваленттүү түрдө жазып алсак болот:

$$(L_0 u^h, L_0 \varphi_j^h) + (K u^h, L_0 \varphi_j^h) = (f, L_0 \varphi_j^h), \quad i = 1, \dots, N_h. \quad (1.35)$$

Бул каралып жаткан методдо эң татаал деп эсептелген суроо базистик функцияны тандоо болуп эсептелет. Эгерде $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ функциясын белгилүү аппроксималык касиеттери кымтылган түрдө. $\varphi_i^h = L_0 \varphi_i^h$ болгондо $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ системасынын касиеттерин изилдөө кыйындыкты туудурат.

Аталган метод менен базистик функцияны түзүү алгоритмин карап көрөлү.

К операторунун аймактык мааниси жана f функциясы $F(K, f) \subset F$ мейкиндигине тиешелүү. Эми h ты $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ ($h = h_1, h_2, \dots$) удаалаштыгы $F(K, f)$ га толгондой кылып аламы.

$$\varphi_i^h = L_0^{-1} \psi_j^h \text{ деп } \{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h} \text{ функциясын түзөбүз. Бул}$$

функциялар ар бир h та сызыктуу көз карандай эмес. Базистик чыгаруу үчүн Галёркин методу колдонобуз.

Базистик функцияны түзүүдө каралып жаткан алгоритминни кээ бир касиеттерин белгилей кетсек. $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ функциясын тургузууда L_0 өздүк оператору өзгөчө u чыгарылыштарын камтыйт. $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ системасын тандалгандыгы үчүн $\omega = f - Ku$ функциясы өзгөчүлүктөргө ээ. Бул аракет координаталык функциялардын азайусуна биаз женилдетет.

Кээ бир учурларда ω эң жакшы касиеттерге ээ болот. Ошондуктан кичине баштапкы сан аркылуу эффективдүү аппроксимация жүргүзө алабыз. Эгерде теңдемени чыгарылышы x_i ($i = 1, \dots, n$), дан көз каранды болсо анда $F(K, f)$ x_i $i = 1, \dots, m < n$, тан көз каранды болгон функциялардан турат. Анда $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ координаталык функциялары x_i ($i = 1, \dots, n < m$) ден көз каранды болуп $\omega \in F(K, f)$ ны аппроксималоого болот.

Эгерде (2.4) эквиваленттик түрдө төмөнкүдөй жазып алсак :

$$\sum_{i=1}^{N_h} a_i (\psi_i^h, \psi_j^h) + (f, \psi_j^h), \quad j = 1, \dots, N_h, \quad (1.36)$$

Сол жагынын финиттиктин күчү менен ленталык матрица пайда болот, бул итерациялык методдун жардамы менен системанын чыгарылышы жеңилдейт.

1.4 ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ

Чектелген элементтер методу – физикада жана технологияда кездешүүчү дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун сандык методу. Бул методдун пайда болушу космосту изилдөө маселелерин чечүү менен байланышкан (1950). Бул метод биринчи жолу Тернер, Клуж, Мартин жана Топпун эмгектеринде басылып чыккан. Бул эмгек дагы башка көптөгөн эмгектердин пайда болушуна салым кошкон. Чектелген элементтер методун структуралык механикадагы жана континуумдук механикадагы маселелерге колдонуу менен бир катар макалалар жарыяланган. Методдун теориялык өнүгүшүнө маанилүү салымды 1963-жылы Меллош кошкон, ал чектелген элементтер методун белгилүү Рэйли-Риц методунун варианттарынын бири катары кароого боло тургандыгын көрсөттү. Структуралык механикада минималдаштыруу жолу менен чектелген элементтер ыкмасы потенциалдык энергия маселени сызыктуу тең салмактуулук теңдемелер системасына чейин кыскартууга мүмкүндүк берет.

Чектелген элементтер методу менен минимизациялоо процедурасынын ортосундагы байланыш техниканын башка тармактарындагы маселелерди чечүүдө кеңири колдонулуп келет. Метод Лаплас же Пуассон теңдемелери менен сүрөттөлгөн маселелерге колдонулган. Бул теңдемелерди чыгаруу кээ бир функционалдарды минимизациялоо менен да байланыштуу.

Алгачкы басылмаларда жылуулуктун таралуу маселелери чектелген элементтер методу менен чыгарылган. Андан кийин метод гидромеханиканын маселелерине, атап айтканда, тешиктүү (пористый) чөйрөдөгү суюктуктун агымынын изилдеген маселелерде колдонулду.

Курулуш механика, жылуулуктун таралуусу, гидромеханика маселелеринде элементтерди табуу үчүн салмактуу калдык методунун мындай варианттарын колдонуу менен оңой эле Галеркин методу же эң кичине квадраттар методу сыяктуу методдорду колдонуп бат алууга мүмкүн болгондуну анык болгондо, чектелген элементтер методунун колдонулуш чөйрөсү кыйла кеңейди. Мындай

факты орнотуу акыркы элементтердин методун теориялык жактан негиздөөдө маанилүү роль ойногон, анткени ал каалагандай дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда колдонууга мүмкүндүк берген. Жалпы теориялык негиздемелер физикалык маселелердин вариациялык формулировкасынын зарылдыгын жокко чыгара тургандыгын белгилей кетүү керек.

Курулуш механикасынын маселелерин сандык чыгаруу процедурасынан чектелген элементтер методу дифференциалдык теңдемени же дифференциалдык теңдемелер системасын сандык чыгаруунун жалпы методуна айланган. Тездетилген сандык эсептөө машиналары, жогорку тактыкты талап кылган учуучу аппараттардын конструкцияларын эсептөөдө жана ошондой эле космос мейкиндигин изилдөө боюнча улуттук комитеттин жардамы менен бул прогрес он беш жылдык прогреске жетишти.

Эсептөө машинасы көптөгөн татаал сандык эсептөөлөрдү тез аткарууга мүмкүндүк берди. Космос мейкиндигин изилдөөдө фундаменталдуу изилдөөлөр үчүн атайын каражаттарды бөлүүнү талап кылды жана универсалдуу эсептөөчү программалардын өркүндөтүлүшүн стимулдаштырды. Чектелген элементтер методу учактарды, ракеталарды жана ар кандай космоско учуучу кемелерди проектирлөөдө колдонула

1.5 ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУНУН НЕГИЗГИ КОНЦЕПЦИЯСЫ

Чектелген элементтер методунун негизги идеясы бул температура, басым жана ордуан жылуу сыяктуу ар кандай үзгүлтүксүз чоңдукту чектелген сандагы подобласттар менен аныкталган үзгүлтүксүз функциялардын көптүгүнөн түзүлгөн дискреттик модель менен апроксималоого болот. Үзгүлтүксүз функциялар каралып жаткан аймактагы чектелген сандагы үзгүлтүксүз чоңдуктун маанилерин колдонуу менен аныкталат.

Жалпы учурда үзгүлтүксүз чоңдук алдын ала белгилүү эмес болгондуктан аны аймактын кээ бир ички чекиттеринде сандын маанилерин аныктоо зарыл. Эгерде

бул чоңдуктун сандык маанилери аймактагы ар бир ички чекитинде белгилүү болсо дискреттик моделди түзүү абдан оңой.

Ошентип, үзгүлтүксүз маанинин конкреттүү моделин бөлүштүрүүнү курууда төмөнкүдөй иш-аракет кылабыз:

1. Каралып жаткан аймакта чекитердин чектелген саны табылат. Бул чекиттер түйүндүк чекиттер же жөн эле түйүндөр деп аталат.

2. Үзгүлтүксүз чоңдуктун мааниси аныктала турган өзгөрмө болуп эсептелет.

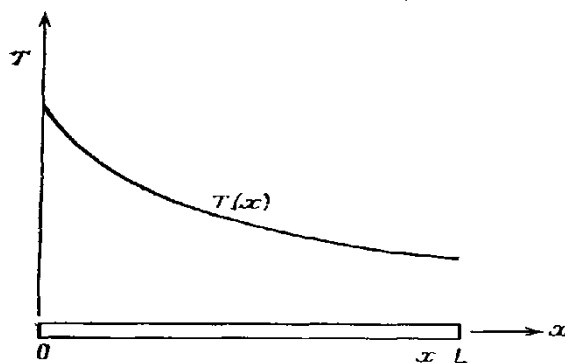
3. Үзгүлтүксүз чоңдуктун аныкталуу областы элементтер деп аталган чектелген сандагы подобласттарга бөлүнөт. Бул элементтер жалпы түйүндүк чекитке ээ болушат жана жалпы аймактын форманы апроксималайт.

Ар бир элементте үзгүлтүксүз маани болжолдонот түйүн маанилери аркылуу аныкталуучу көп мүчө менен бул баалуулуктар. Ар бир элементтин өзүнүн көп мүчөсү бар, бирок көп мүчөлөр сактай тургандай тандалат элементтин чектериндеги чоңдуктун үзгүлтүксүздүгү.

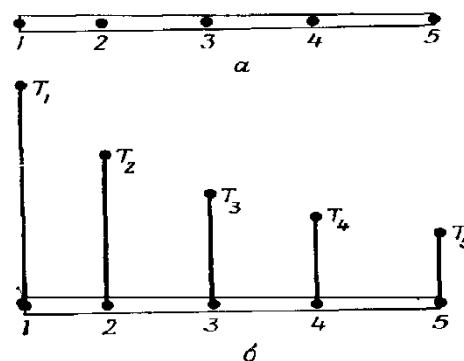
4. Үзгүлтүксүз чоңдук ар бир элементте бул чоңдуктун түйүндүк мааниси аркылуу аныкталуучу полином катары апроксималанат. Ар бир элементтин өзүнүн көп мүчөсү бар, бирок көп мүчөлөр элементтин чектериндеги чоңдуктун үзгүлтүксүздүгү сактала тургандай кылып тандалат.

Чектелген элементтер методунун негизги түшүнүгү берилген бир өлчөмдүү мисал менен ачык-айкын сүрөттөлгөн. 1-сүрөттө стержендеги температуранын таралышы көрсөтүлгөн.

$T(x)$ - үзгүлтүксүз чоңдугу, x огу боюнча кеткен OL кесиндисинин аныкталуу областы каралат. 2-сүрөттө x огуна 5 чекитке бөлүнүп жана номерленген, аларды бири-биринен бирдей аралыкта коюуну унутпаңыз. Албетте, бештен ашык



1-сүрөт. Стержендеги температуранын таралышы



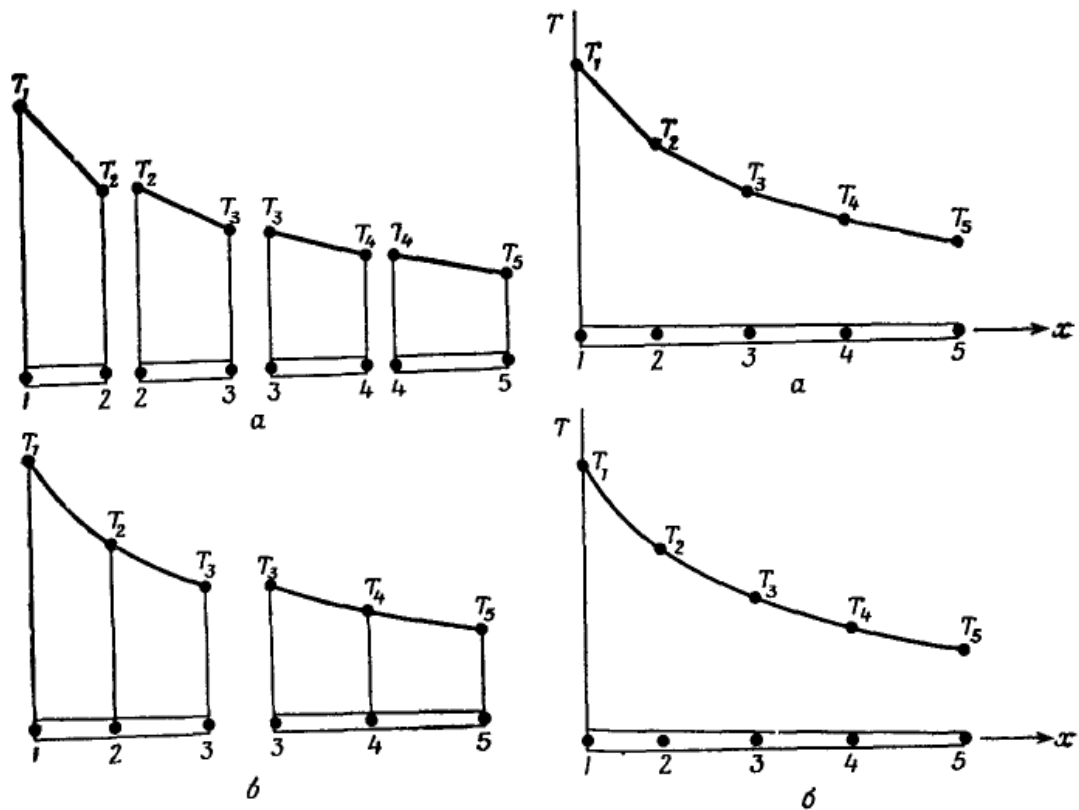
2-сүрөт. Түйүндүк чекиттер жана болжолдонгон $T(x)$ -маанилери

Бирок бул түйүндөрдү бири-биринен сөзсүз түрдө бирдей алыстыкта жайгаштыруу шарт эмес. Мындан жыш аралыктарга бөлүүгө болот, бирок методдун негизги идеясын түшүнүү үчүн 5 түйүн жетиштүү.

Бул учурда $T(x)$ маанилери ар бир түйүндүк чекитте белгилүү. Бул табылган маанилер 2-сүрөттө графикалык түрдө берилген. 2-сүрөттө түйүндүк чекиттер менен ылайык T_1, T_2, \dots, T_5 деп белгиленет.

Аймакты элементтерге бөлүү эки ар кандай жол менен жүргүзүлүшү мүмкүн. Мисалы, ар бир элементти эки чектеш түйүндүк чекиттери аркылуу төрт элемент болгудай кылып 3-сүрөттөгүдөй чектесек болот, же аймакты үч түйүн камтыгыдай кылып экиге бөлсөк болот (3-сүрөт). Элементке тиешелүү полином түйүн чекиттериндеги $T(x)$ маанилери менен аныкталат. Аймакты ар бир элементке эки түйүн туура келгидей кылып төрт элементке бөлгөн учурда, элементтин функциясы x боюнча (эки чекит аркылуу түз сызык түзүлсө) сызыктуу болот. $T(x)$ ты соңку аппроксималоо төрт бөлүкчөдөн турган, ар бири өзүнчө элементте аныкталган сызыктуу функциялардан түзүлөт (4-сүрөт).

Аймакты үч түйүндүк чекитти камтыган эки элементке бөлсөк, экинчи даражадан полином түрүндөгү функцияны элестетет.



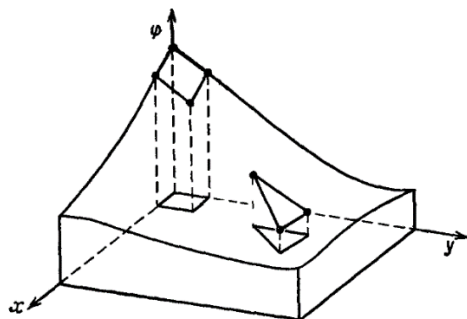
Бул учурда соңку $T(x)$ апроксималоо эки бөлүнгөн- үзгүлтүксүз квадраттык функциялардын жыйындысы болот. Белгилей кетсек, бул эки функциянын тең графиктеринин жантайуулары үчүнчү түйүндө ар кандай мааниге ээ болушу мүмкүн болгондуктан, бул жакындoo бөлүнгөн- үзгүлтүксүз болот.

Жалпысынан алганда, температуранын таралуусу белгисиз жана биз кээ бир чекиттерде бул чоңдугун маанилерин аныктоону каалайбыз. Дискреттик моделдин методикасын түзүү бир гана кошумча кадам кошулуу менен гана айырмаланбаса, жогоруда көрсөтүлгөндөй бойдон калууда. Белгисиз өзгөрмө болуп эсептелген түйүндөрдүн көптүгү жана бул T_1, T_2, \dots , түйүндөрдөгү температуранын маанилери аныкталат. Аймак тиешелүү элементтин функциялары аныкталган бир нече элементтерге бөлүнөт. $T(x)$ түйүн маанилери эми чыныгы температуранын бөлүштүрүлүшүнө "эң жакшы" жакындooну камсыз кылуу үчүн "түзөтүлүшү же регулирленүүсү" керек.

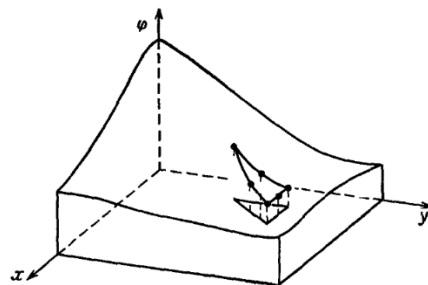
Бул "жөнгө салуу" белгилүү бир маанини минималдаштыруу жолу менен ишке ашырылат.

Тапшырманын физикалык маңызы менен байланышкан даража. Эгерде жылуулуктун таралуу маселеси каралса, анда тиешелүү дифференциалдык теңдеме менен байланышкан функционалдык минимумга келтирилет. Миминизациялоо процесси $T(x)$ түйүндүү маанилерине карата сызыктуу алгебралык теңдемелердин системаларын чечүүгө кыскарат.

Эгерде жылуулуктун таралуу маселеси каралса, анда тиешелүү дифференциалдык теңдеме менен байланышкан функционалдык минимумга келтирилет. Миминизациялоо процесси $T(x)$ түйүндүү маанилерине карата сызыктуу алгебралык теңдемелердин системаларын чыгарууга алып келет.



5-сүрөт. Үчбурчтуу жана төрт бурчтуу элементтердин жардамы менен эки өлчөмдүү скалярдык функцияны моделдөө.



6-сүрөт. Квадраттык үчбурчтуу элементтин жардамы менен эки өлчөмдүү скалярдык функцияны моделдөө.

Үзгүлтүксүз чондуктун дискреттик моделин түзүүдө, эки же үч өлчөмдүү аймакта аныкталган, чектелген элементтер методунун негизги түшүнүгү ушундай эле колдонулат. Эки өлчөмдүү учурда элементтер x , y , менен функциялары менен сүрөттөлөт. Бул көбүнчө үч бурчтук же төрт бурчтуу формадагы элементтер деп эсептелет. Элементтин функциялары жалпак (1.5-сүрөт) же ийри (1.6-сүрөт) болуп сүрөттөлөт. Эгерде бул элемент үчүн түйүн чекиттеринин минималдуу үч бурчтуу элемент үчүн үч, төрт бурчтуу элемент үчүн төрт саны алынса, элементтин функциясы тегиздик менен көрсөтүлөт.

Эгерде колдонулган түйүндөрдүн саны минимумдан көп болсо, анда элементтин

функциясы ийри бетине туура келет. Мындан тышкары түйүндөрдүн ашыкча саны ийри сызыктуу чектелген элементтерди кароого мүмкүндүк берет. $\varphi(x, y)$ эки өлчөмдүү үзгүлтүксүз чоңдуктун соңку жакындоосу тиешелүү түйүн чекиттеринде $\varphi(x, y)$ маанилерин колдонуу менен ар бири өзүнчө элементте бөлүнгөн үзгүлтүксүз беттердин жыйындысы болот.

Чектелген элементтер методунун маанилүү аспектиси элементтин функциясын аныктоодо элементтердин жыйындысынан типтүү элементти тандап алуу болуп саналат. Бул элементтин функциясын жалпы туташкан моделдеги элементтин салыштырмалуу абалына жана башка элемент функцияларынан көз карандысыз аныктоого мүмкүндүк берет. Түйүн маанилеринин жана координаттарынын ыктыярдуу топтому аркылуу элементтин функциясын коюу элементтин функцияларын аймактын геометриясынын аппроксималоо үчүн колдонууга мүмкүндүк берет

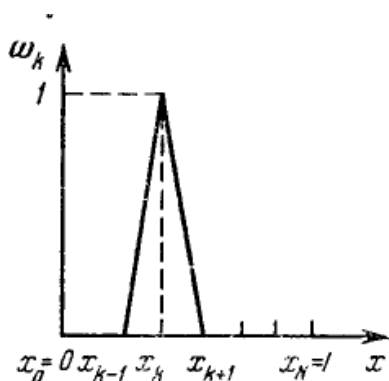
1.6 ЧЕКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТТЕР МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

$$(f, g) = \int_D f(x)g(x)dx \quad (1.60)$$

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} \quad (1.61)$$

Төмөнкү (1.60), (1.61) маселесин $0 \leq x \leq 1$ аныкталуу областында карайлы. Анда ар бир $k \geq 1$ үчүн $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ интервалдар системасынан W_2^1 функциясын киргизебиз.

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{k-1}, \\ \omega_1(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \omega_2(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0, & x_{k+1} \leq x \leq x_N = 1 \end{cases} \quad (1.62)$$



7-сүрөт.

(1-сүрөт) көрүп тургандай $\omega_k(x)$ ($k = 1, \dots, N - 1$) функциясынын аныкталуу област катары $0 \leq x \leq 1$ аралыгын камтыйт. Алар үзгүлтүксүз жана $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ интервалында гана нөлдөн айырмаланат, мында алар эки сызыктуу бөлүктөн турат жана бирге барабар $x = x_k$ максимумуна жетет. $\varphi(x) \in W_2^1$ үзгүлтүксүз бөлүнгөн сызыктуу функцияны алабыз. Бул функция мүмкүн болгон түйүндүк чекиттердеги сынуу катары эсептесек болот.

$$\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \omega_k(x), \quad (1.63)$$

$\omega_k(x)$ функциясы ортогоналдык касиетке ээ. Скалярдык көбөйтүү $\omega_k(x)$

функциясы үчүн төмөнкү формула менен аныкталат,

$(f, g) = \int_0^1 g h dx$, анда

$$\int_0^1 \omega_k(x) \omega_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \leq k-2, \\ \frac{1}{6} \Delta x_{k-\frac{1}{2}}, & n = k-1, \\ \frac{1}{3} \Delta x_{k-\frac{1}{2}} + \Delta x_{k+\frac{1}{2}}, & n = k, \\ \frac{1}{6} \Delta x_{k+\frac{1}{2}}, & n = k+1, \\ 0, & n \geq k+2, \end{cases} \quad (1.64)$$

(1.64) төн $\omega_k(x)$ функциялары $\omega_{k-1}(x)$ $\omega_k(x)$ $\omega_{k+1}(x)$ эске албаганда бардык $\omega_n(x)$ да ортогоналдуу. Тандалган базистик функциянын өзгөчөлүгү ушунда демекчибиз. Аныкталган функциялардын жардамы менен диффузия теңдемесин карайлы

$$-\frac{d}{dx} p \frac{d\varphi}{dx} + q\varphi = f \quad (1.65)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 0,$$

Галёркин методу менен туура келгендей кылып ω_k ты (1.65) теңдемеге скалярдуу көбөйтөбүз.

$$\int_0^1 \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d\varphi}{dx} + q\varphi - f \right) \omega_k(x) dx = 0 \quad (1.66)$$

(3.5) ти төмөнкүдөй түргө келтиребиз

$$\int_0^1 \left[p \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q\varphi - f) \omega_k \right] dx = 0 \quad (1.67)$$

Интегралдоодо биз $\omega_k(0) = \omega_k(1) = 0$ колдондук. $\omega_k(x)$ функциясынын мааниси (x_{k-1}, x_{k+1}) интервалынан тышкары нөлгө ээ.

$$\sum_l \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left[p \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q\varphi - f) \omega_k \right] dx = 0 \quad (1.68)$$

$\omega_k(x)$ функциянын түрүн эске алып төмөнкү формулаларды алабыз

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx = \frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} (\varphi_k - \varphi_{k-1}),$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx = \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} (\varphi_{k+1} - \varphi_k),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} q\varphi\varphi_k dx = (q_k^{1.2} - 1/2\varphi_{k-1} + q_k^{1.1} + 1/2\varphi_k),$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} q\varphi\varphi_k dx = (q_k^{2.2} - 1/2\varphi_k + q_k^{1.2} + 1/2\varphi_{k+1}).$$

Алынган (1.69)(1.70) теңдемелерин (1.68) коюп айырма теңдеме алабыз.

$$\frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + q_k^{1.2} - \frac{1}{2\varphi_{k-1}}$$

$$+ \left(q_{k-1/2}^{1.1} + q_{k+1/2}^{1.1} \right) \varphi_k + q_{k+1/2}^{1.2} \varphi_k = F_k$$

$$F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\varphi_1 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\varphi_2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\varphi_k dx$$

$$\varphi_0 = 0, \varphi_N = 0,$$

Четтик шарттары коюлуп маселе толугу менен коюлду.

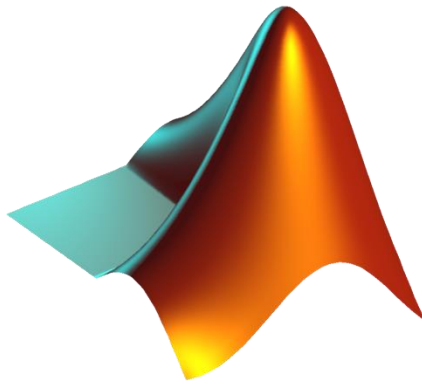
(1.72) жана (1.73) айырма теңдемелери салыштырылып алар бирдей экендиги көрсөтүлүп турат. Бул Риц менен Галердин методдору өз алдынча кошулган учурда чектелген функцияларга негизделген

Теңдемелер маселелердин окшош айырмачылыктарына алып келет. Бирок, Галеркин ыкмасы өзүн-өзү тутумдаш жана өзүн-өзү тутумдаш эмес маселелерди чечүү үчүн колдонулушу мүмкүн экендигин баса белгилей кетүү керек.

Теңдемелердин коэффициенттери жылмакай функциялар болгон учурда, вариациялык методдордун негизинде жакындаштыруунун жогорку даражадагы айырмачылык схемаларын түзүүгө болот.

1.7 MATLAB ПРОГРАМДЫК ПАКЕТИ

MatLab – бул жогорку деңгээлдеги интерпретацияланган программалоо тили, тиркемелер пакети жана иштеп чыгуу, инженердик жана математикалык эсептөөлөр, матрицалык маалымат базалары менен иштөө жана визуализация үчүн интеграцияланган чөйрө.



7-сүрөт. MatLab продукциясынын логотиби

MatLab программалоо тили катары 1970-жылдары Нью-Мексико университетинин информатика бөлүмүнүн деканы Клайв Молер тарабынан түзүлгөн. Бул иштеп чыгуу Fortran программалоосу менен тааныш эмес студенттерге Linpack жана EISPACK китепканаларын колдонууну жеңилдетти. MatLab бат эле АКШнын башка университеттерине тарады. Стэнфорд университетинде продукцияны баяндап чыккандан кийин Клайв Молер инженер Жон Литтл менен байланышып, MathWorkсти программалоо тилин жана чөйрөсүн өнүктүрүү үчүн коммерциялык компания катары түзүүнү сунуштады.

MatLab матрицалык маалыматтар структураларын, математикалык функциялардын жыйындысын, объектиге багытталган функцияларды жана башка программалоо тилдеринде жазылган программаларга интерфейсдерди камтыйт. Эң көп колдонулган MatLab функцияларынын арасында:

- математикалык эсептөөлөр жана маалыматтарды талдоо;
- эки жана үч өлчөмдүү графиктер түрүндөгү маалыматтарды визуализациялоо, динамикалык анимациялоо;
- программалоо жана алгоритмдерди иштеп чыгуу.

MatLab негизинен илимий изилдөөдө жана инженерияда колдонулат. Мисалы, кадимки кир жуугуч машиналардан баштап аэрокосмостук комплекстерге чейин ар турдуу механизмдерди башкаруунун автоматташтырылган системаларын иштеп чыгууда керектелет;

- ✓ ар кандай финансылык маалыматтарды (биржа котировкалары, баалар, пайыздар, кирешелер ж.б.) чогултуу жана талдоо, ошондой эле фондулук

биржалардагы кырдаалды болжолдоо, инвестициялык портфельдерди оптималдаштыруу боюнча инвестициялык иш-аракеттер;

- ✓ фундаменталдык изилдөөлөрдүн алкагында да, прикладдык маселелерди чечүү үчүн да нейрон тармактарын долбоорлоо жана талдоо: моделди таануу, сызыктуу эмес системаларды башкаруу, болжолдоо ж.б.;
- ✓ аудио жана видео жабдуулар, телекоммуникациялык системалар, медициналык диагностика (УЗИ, МРТ, КТ), ошондой эле астрофизика, астрономия, геология, геофизика ж.б. сигналдарды иштетүү жана иштеп чыгуу сапатын жогорулатуу;

Биологияда, биоинформатикада, генетикада, эпидемиологияда ар кандай биологиялык процесстердин жана организмдердин математикалык моделдерин курууда колдонулат.

Артыкчылыктары

Өнүктүрүүнүн жөнөкөйлүгү. C/C++, Fortran ж.б. менен салыштырганда. Тилди үйрөнүү бир топ жеңил. Анын жөнөкөй жана интуитивдик синтаксиси, ошондой эле иштеп чыгуучулардын көптөгөн колдоочу документтери бар. Аны колдонуу үчүн оператор кесипкөй программист болуунун кажети жок.

Кеңири функция. MatLab тили графиктерди иштеп чыгуу жана түзүү үчүн өркүндөтүлгөн китепкананы, сызыктуу алгебранын интегралдык функцияларын (LAPACK, BLAS), Фурьени тез трансформациялоону (FFTW), көп мүчөлөр менен иштөөнү, негизги теңдемелерди, дифференциалдык теңдемелерди жана башкаларды чечүүнү камтыйт.

Жаңыртуу. Тилге жана бүт программалоо чөйрөсүнө негизги жаңыртуулар жылына эки жолу болуп турат.

Кодду "тез" өзгөртүү. MatLabда жазылган программаларды MatLab Coder аркылуу C/C++ тилине которууга болот.

Интеграция. Расмий жана үчүнчү тараптын иштеп чыгуучуларынын тиркемелеринин чоң тандоосу тилдин мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет.

Чоң илимий коомчулук. MatLab тили көптөгөн университеттерде жана илимий институттарда колдонулат.

Кемчиликтери

- Көптөгөн командалар жана операторлор MatLabда жазылган программалардын ишин кыйла жайлатат (бул кемчилик акыркы версияларда иш жүзүндө жоюлган). Маалыматтар оперативдүү эстутумда векторлор түрүндө сакталат, ошондуктан өндүрүмдүүлүккө векторизациянын ылдамдыгы да катуу таасир этет - маалыматтарды векторлорго айландыруу жана тескерисинче, алар менен операциялар.
- Сиз MatLabды анын жабык экосистемасында гана колдоно аласыз; бул тил башка программалык платформаларда эффективдүү эмес.
- Программалык камсыздоо чөйрөсү акы үчүн бөлүштүрүлөт. минималдуу наркы боюнча сатып алуу үчүн, сиз билим берүү мекемесинин студенти болушу керек. Ошондой эле, алгоритмдер менчик болуп саналат, ошондуктан алардын көпчүлүгүнүн кодун көрүү мүмкүн эмес.
- Тар адистештирүүнүн жана жогорку баанын айкалышы MatLab программалык пакетинин кеңири жайылтылышынын негизги себеби болуп саналат.

2-БӨЛҮМ

2.1 МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Жогорку туундусунун алдында кичине параметр камтылса, анда теңдеме сингулярдуу козголгон класска кирет. Мындай теңдемени кадимки, кеңири белгилүү болгон ыкмалар менен чыгарууга болбойт, же болсо дагы туура эмес жыйынтыкка алып келет. Ушундай теңдемелерди чыгаруу үчүн өзүнчө ыкмалар иштелип чыгууда. Алардын бири Ломов жана чектелген элементтер методунун синтези аркылуу сунуш кылынган ыкманы коюлган маселеге колдонуу.

Бул эмгекте кичине параметрлүү экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн четтик маселенин жакындатылган сандык чыгарылышын тургузуу каралат. Ал үчүн берилген теңдеме

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^2 u''(x, \varepsilon) - a(x)u(x, \varepsilon) = f(x), \quad x \in (0,1] \quad (2.1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0$$

Бул маселеде берилген $a(x)$, $f(x)$ -жетиштүү санда дифференцирленүүчү функциялар. (2.1) маселе $x=0$ жана $x=1$ карата четтик катмарга ээ.

Ломовдун ыкмасын колдонуу менен регулярдуу теңдемеге алып келинет. Бул аракетти аткаруу үчүн регулярлоочу көз каранды эмес өзгөрмө жана кеңейтилген функция киргизилет. Кеңейтилген функция үчүн алынган маселе кичине параметрге карата регулярланган болуп калат. Андан кийин алынган регулярланган маселеге чектелген элементтер ыкмасы колдонулат.

Мында

1. $\forall x \in [0,1] a(x) > 0$;
2. $a(x), f(x)$ жылмакай функциялар

$$\xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon} = \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \sqrt{a(s)} ds, \quad l = 1,2 \quad (2.2)$$

өзгөрмө киргизебиз жана

$$\tilde{u}(x, \xi_1, \xi_2, \varepsilon)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon} \equiv u(x, \varepsilon), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad (2.3)$$

кеңейтилген функция киргизилет. Бул жакта ε козголтуучу $(0, 1)$ аралыгында

кичине параметр. Теңдеменин тамырларынын ε параметр таасиринде козголгучтуулугун изилдейбиз.

Эми (2.3) төн , (2.2) нин негизинде , $u''(x, \varepsilon)$ экинчи даражадагы туундусун табабыз.

Табуу үчүн төмөнкү формуланы колдонобуз

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_x + f'(x)u_{\xi_l} \\
 u_{xx} &= u''_{xx} + u'_{x\xi}f'(x) + f''(x)u_\xi + f'(x)u_{x\xi} + f'(x)u_{\xi\xi\xi} \\
 \text{анда, } u'(x, \varepsilon) &= \left(\partial_x \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} \varphi'_l(x) \partial_{\xi_l} \tilde{u} \right)_{\xi = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \\
 u''(x, \varepsilon) &= \partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{\varphi'_l(x)^2}{\varepsilon} \tilde{u} \partial_x \partial_{\xi_l} + \sum_{l=1}^2 \frac{\varphi''_l(x)}{\varepsilon} \partial_{\xi_l} \tilde{u} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^2 \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \partial_{x\xi_l} \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \\
 u''(x, \varepsilon) &= \partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \right)^2 \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} (2\varphi'_l(x) \partial_{x\xi_l}^2 \tilde{u} + \varphi''_l(x) \partial_{x\xi_l} \tilde{u}). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Табылган маанини (2.1) формулага коебуз;

$$\begin{aligned}
 L_\varepsilon u &= \varepsilon^2 (\partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\varphi'_l(x)}{\varepsilon} \right)^2 \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} (2\varphi'_l(x) \partial_{x\xi_l}^2 \tilde{u} + \varphi''_l(x) \partial_{x\xi_l} \tilde{u})) - a(x) \tilde{u}(x, \varepsilon) \\
 &= f(x) ,
 \end{aligned}$$

Бул жактан $\frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon} = \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \sqrt{a(s)} ds$ эске алсак ,

$$\varphi_l(x) = (-1)^{l-1} \int_{l-1}^x \sqrt{a(s)} ds$$

$$\varphi'_l(x) = \pm \sqrt{a(s)}, \text{ анда } a(s) = (\varphi'_l(x))^2$$

$$L_{\xi,l} \equiv 2\varphi'_l(x) \partial_{x\xi_l}^2 + \varphi''_l(x) \partial_{x\xi_l}$$

төмөнкүдөй кеңейтилген регулярдуу козголгон маселени алдык, $\varepsilon \rightarrow 0$
учурда тендеменин түрү өзгөрбөйт

$$\begin{cases} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} = \varepsilon^2 \partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 [a(x) \partial_{\xi_l}^2 \tilde{u} + \varepsilon a(x) L_{\xi, l} \tilde{u}] - a(x) \tilde{u} = f(x) \\ \tilde{u}|_{x=0, \xi_1=0} = u^0, \quad \tilde{u}|_{x=1, \xi_2=0} = u^1, \end{cases} \quad (2.5)$$

Төмөнкү белгилөөнү эске алалы

$$(\tilde{L}\tilde{u})_{\xi=\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} \equiv L_\varepsilon u \quad (2.6)$$

(2.5) маселенин чыгарылышы төмөнкүдөй изделет.

$$\tilde{u}(x, \xi, \varepsilon) = V_1(x) + V_2(x) + W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2). \quad (2.7)$$

(2.7) белгилөө жүргүзүп алып (2.5) кеңейтилген маселеге коебуз. $V_l(x)$, $W_l(x)$ – изделүүчү функциялар.

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} &= \varepsilon^2 \partial_x^2 (V_1(x) + V_2(x) + W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2)) \\ &+ \sum_{l=1}^2 [a(x) \partial_{\xi_l}^2 (V_1(x) + V_2(x) + W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2)) \\ &+ \varepsilon a(x) L_{\xi, l} (V_1(x) + V_2(x) + W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2))] \\ &- a(x) (V_1(x) + V_2(x) + W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2)) = f(x) \end{aligned}$$

Кашааларды ачып, топтоштурабыз,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} &= \varepsilon^2 V_1''(x) + \varepsilon^2 V_2''(x) + \varepsilon^2 W_1''(x) \exp(-\xi_1) + \varepsilon^2 W_2''(x) \exp(-\xi_2) \\ &+ \sum_{l=1}^2 [a W_1(x) \exp(-\xi_1) + W_2(x) \exp(-\xi_2) \\ &+ \varepsilon a(x) L_{\xi, l} W_1(x) \exp(-\xi_1) + \varepsilon a(x) L_{\xi, l} W_2(x) \exp(-\xi_2)] \\ &- a(x) V_1(x) + a(x) V_2(x) + a(x) W_1(x) \exp(-\xi_1) \\ &+ a(x) W_2(x) \exp(-\xi_2) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} = & \varepsilon^2 V_1''(x) + \varepsilon^2 V_2''(x) + \varepsilon^2 W_1''(x) \exp(-\xi_1) + \varepsilon^2 W_2''(x) \exp(-\xi_2) \\ & + [\varepsilon a(x) L_{\xi,l} W_1(x) \exp(-\xi_1) + \varepsilon a(x) L_{\xi,l} W_2(x) \exp(-\xi_2)] \\ & - a(x) V_1(x) + a(x) V_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

$V_l(x), W_l(x), l = 1, 2$ катышкан төмөнкүдөй маселелерди алабыз

$$-a(x)V_1(x) = f(x), \quad L_\varepsilon V_2 = -\varepsilon^2 V_1''(x), \quad V_2|_{x=l-1} = 0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon W_l''(x) - (-1)^{l-1} [2\varphi_l'(x)W_l'(x) + \varphi_l''(x)W_l(x)] = 0, \quad l = 1, 2. \quad (2.9)$$

V_2 бул жакта кадимки мүчөнүн калдыгы.

Теңдеме $W_l(x)$ жана $V_l(x)$ га карата чектелген элементтер методу менен чыгарылат:

$$V_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} V_{2,i} \omega_i(x), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} W_i(x) = & \sum_{i=1}^{n-1} W_{2,i}^l \omega_i(x) + (u^0 - V_1(0))\omega_0(x) + (u^1 - \\ & V_1(1))\omega_n(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\omega_i(x)$ – функциясы чектелген элемент болуп эсептелинет.

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{башка учурларда,} \end{cases}$$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \frac{(x_i - x)}{h} & \text{if } x \in (x_0 = 0, x_1), \\ 0 & \text{if } x \notin (x_0, x_1), \end{cases}$$

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{n-1})}{h} & \text{if } x \in (x_{n-1}, x_n), \\ 0 & \text{if } x \notin (x_{n-1}, x_n), \end{cases}$$

шарттарын эсептөөдө эске алабыз,

$$x_i = ih, h = \frac{1}{n}, i=0, 1, \dots, n$$

(2.10) жана (2.11) ди (2.8) жана (2.9) ке коюп, $V_{2,i}, W_{2,i}^l$ аныктоо үчүн $\omega_i(x)$ ны скаляр түрүндө көбөйтүп, төмөнкү системаны алабыз;

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_{2,i}^l (\varepsilon^2 \omega_i''(x) - (-1)^{l-1} \varepsilon (2\varphi_l'(x)\omega_i'(x) + \varphi_l''(x)\omega_i(x)), \omega_k(x)) =$$

$$-(u^0 - V_1(0))(\omega_0(x), \omega_k(x)) - (u' - V_1(1))(\omega_n(x), \omega_k(x)),$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.12)$$

$[\omega_i, \omega_k] = -\varepsilon^2(\omega'_i, \omega'_k) - (a(x)\omega_i(x)\omega_k(x))$ эске алып төмөнкүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз

$$b_{ij}^l = \left(\varepsilon^2 \omega_i''(x) - (-1)^{l-1} (2\varphi_i'(x)\omega_i'(x) + \varphi_i''(x)\omega_i(x)), \omega_j(x) \right),$$

$$f_j = -\varepsilon^2 (a^{-1}(x)f(x))'', \omega_j(x), \quad g_j(x) = -(u^0 - V_1(0))(\omega_0(x), \omega_j(x)) -$$

$$(u' - V_1(1))(\omega_n(x), \omega_j(x)), \quad a_{ij} = [\omega_i, \omega_j],$$

V_{2i} жана W_{2i}^l аныктап, биз төмөнкү алгебралык теңдемени алабыз

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} V_{2i} = f_j$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}^l W_{2i}^l = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad l = 1, 2$$

Алынган системаны

$$a_{j-1,j} V_{2j-1} + a_{j,j} V_{2j} + a_{j+1,j} V_{2j+1} = f_j,$$

$$b_{j-1,j}^l W_{2j-1}^l + b_{j,j}^l W_{2j}^l + b_{j+1,j}^l W_{2j+1}^l = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.13)$$

$\omega_k = \frac{(x-x_{k-1})}{h}$; $\omega_{k-1} = \frac{(x_k-x)}{h}$; $\omega_{k+1} = \frac{(x-x_k)}{h}$ функцияларын колдонуп төмөнкүдөй чыгарылыштарды алабыз.

$$1) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega'_{k-1} \omega'_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} -\frac{1}{h} dx = -\frac{x}{h^2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = -\frac{1}{h^2} (x_k - x_{k-1}) = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h}$$

$$2) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_{k-1} \omega_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_k-x)}{h} \frac{(x-x_{k-1})}{h} dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (xx_k - x^2 - x_k x_{k-1} + x x_{k-1}) dx = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x^2 x_k}{2} - \frac{x^3}{3} - x x_k x_{k-1} + \frac{x^2 x_{k-1}}{2} \right) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x_k^2 x_k}{2} - \frac{x_k^3}{3} - x_k^2 x_{k-1} + \frac{x_k^2 x_{k-1}}{2} - \frac{x_{k-1}^2 x_k}{2} + \frac{x_{k-1}^3}{3} + x_{k-1}^2 x_k - \frac{x_{k-1}^2 x_k}{2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x_k^3 - 3x_k^2 x_{k-1} + 3x_{k-1}^2 x_k - x_{k-1}^3}{6} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{(x_k^3 - x_{k-1}^3)}{6} \right) = \frac{h^3}{6h^2} = \frac{h}{6}$$

$$3) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega'_k \omega'_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{h^2} dx = \frac{x}{h^2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{1}{h^2} (x_k - x_{k-1}) = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$$

- 4) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega'_k \omega'_k dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{x}{h^2} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{h^2} (x_{k+1} - x_k) = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$
- 5) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k \omega_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})^2}{h^2} dx = \frac{(x-x_{k-1})^3}{3h^2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{(x_k-x_{k-1})^3}{3h^2} - \frac{(x_{k-1}-x_{k-1})^3}{3h^2} = \frac{h^3}{3h^2} = \frac{h}{3}$
- 6) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k \omega_k dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-x)^2}{h^2} dx = \frac{(x_{k+1}-x)^3}{3h^2} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_k-x_{k+1})^3}{3h^2} - \frac{(x_{k+1}-x_{k+1})^3}{3h^2} = -\frac{h^3}{3h^2} = -\frac{h}{3}$
- 7) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_{k+1} \omega_k dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x-x_k)}{h} \frac{x_{k+1}-x}{h} dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (xx_{k+1} - x^2 - x_k x_{k+1} + xx_k) dx = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x^2 x_{k+1}}{2} + \frac{x^3}{3} - xx_k x_{k+1} + \frac{x^2 x_k}{2} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x_{k+1}^3}{2} - \frac{x_{k+1}^3}{3} - x_{k+1}^2 x_k + \frac{x_{k+1}^2 x_k}{2} - \frac{x_k^2 x_{k+1}}{2} + \frac{x_k^3}{3} + x_k^2 x_{k+1} - \frac{x_k^2}{2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{x_{k+1}^3 - 3x_k^2 x_{k+1} + 3x_k^2 x_{k+1} - x_k^3}{6} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{(x_{k+1}^3 - x_k^3)}{6} \right) = \frac{h^3}{6h^2} = \frac{h}{6}$
- 8) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega'_{k-1} \omega_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} -\frac{1}{h} \frac{(x-x_{k-1})}{h} dx = \frac{(x-x_{k-1})^2}{2h^2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = -\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2h^2} - \frac{(x_{k-1}-x_{k-1})^2}{2h^2} = -\frac{h^2}{2h^2} = -\frac{1}{2}$
- 9) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega'_k \omega_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{h} \frac{(x-x_{k-1})}{h} dx = \frac{(x-x_{k-1})^2}{2h^2} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2h^2} - \frac{(x_{k-1}-x_{k-1})^2}{2h^2} = \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2}$
- 10) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega'_{k+1} \omega_k dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{h} \frac{(x_{k+1}-x)}{h} dx = \frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h^2} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1}-x_{k+1})^2}{2h^2} - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2h^2} = -\frac{h^2}{2h^2} = -\frac{1}{2}$
- 11) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})}{h} dx = \frac{(x-x_{k-1})^2}{2h} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2h} - \frac{(x_{k-1}-x_{k-1})^2}{2h} = \frac{h^2}{2h} = \frac{h}{2}$
- 12) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-x)}{h} dx = \frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1}-x_{k+1})^2}{2h} - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2h} = -\frac{h^2}{2h} = -\frac{h}{2}$

Жогорку алынган маанилерди (2,13) теңдемесине коёбуз

$$a_{j-1,j} = -\varepsilon^2 (\omega'_{j-1}, \omega'_j) - (a(x)\omega_{j-1}(x), \omega_j(x)) = +\varepsilon^2 \frac{1}{h} - a\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \frac{h}{6}$$

$$a_{j,j} = -\varepsilon^2 (\omega'_j \omega'_j) - (a(x)\omega_j, \omega_j) = -\frac{2\varepsilon^2}{h} - a\left(\frac{x_{j-1} + x_{j+1}}{2}\right) \frac{2h}{3}$$

$$a_{j+1,j} = -\varepsilon^2(\omega'_{j+1}\omega'_j) - (a(x)\omega_{j+1}, \omega_j) = \frac{\varepsilon^2}{h} - a\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)\frac{h}{6}$$

(б)-теңдемелерден сумманы ажыратып, алардын ичинен $k-1, k, k+1$ мүчөлөрүн сактап калып

$$f_j = -\frac{\varepsilon^2 h}{2} \left[f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right], \quad f(x) = (a^{-1}(x)f(x)),$$

$$b_{j-1,j}^l = -\varepsilon^2(\omega'_{j-1}, \omega'_j) - 2(\varphi_l'(x)\omega'_{j-1}, \omega_j) - \left(\varphi_l''(x)\omega_{j-1}, \omega_j = \varepsilon^2 \frac{1}{h} - 2\varphi_l'\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \varphi_l''\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)\frac{h}{2} \right)$$

$$b_{j,j}^l = -\frac{2\varepsilon^2}{h} - \frac{2}{h} \left[\varphi_l'\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + \varphi_l'\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right] - \frac{h}{3} \left[\varphi_l''\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + \varphi_l''\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right]$$

$$b_{j+1,j}^l = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{h} \right) - 2\frac{1}{2}\varphi_l'\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)\frac{h}{6}, \quad g_j = 0, j = 2, \dots, n-2$$

$$g_1 = -(u^0 - V(0))[\omega'_0, \omega'_1\varepsilon^2 - 2(\varphi_l'\omega'_0, \omega_1) - (\varphi_l''\omega_0, \omega_1)]$$

$$= -(u' - V(0)) \left[-\varepsilon^2 \frac{1}{2} + \varphi_l'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) - \varphi_l''\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\frac{h}{6} \right]$$

$$g_{n-1} = -(u' - V(1))[-\varepsilon^2(\omega'_n, \omega'_{n-1}) - 2(\varphi_l'\omega'_n, \omega_{n-1}) - (\varphi_l''\omega_n, \omega_{n-1})]$$

$$= -(u' - V(1)) \left[\frac{\varepsilon^2}{2} - 2\varphi_l'\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi_l''\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\frac{h}{6} \right]$$

(2,12) теңдемелер системасын чыгарып V_{2i}, W_{2i}^l аныктайбыз. By narrowing (2.6) кыскартуу менен маселенин (2.1) болжолдуу чыгарылышын алабыз.

1.5 жана [] теоремасынан кийин чекиттик баалоо, башкача айтканда, төмөнкү теореманын негиздүүлүгүн түзүүгө болот.

Теорема. Экинчи туунду $u''(x)$, үзгүлтүксүз болсо төмөнкүдөй болжолдойбуз

$$|u - u''| < ch^2$$

Каралган методко салып чыгарып көрүү үчүн мисал катары төмөнкү маселени карап көрөлү. Кол менен чыгарып жообун алуу кыйын жана узун иш болгондуктан биз берилген маселени MATLAB програмдык пакети менен чыгаралы:

$$\varepsilon^2 u'' - 4u = 1 + x^3$$

$$u|_{x=0} = 2, \quad u|_{x=1} = 1$$

```

function konech_13
%eps^2 u"-4u=1+x^3
h=0.05;n=1/h;a=zeros(n); u0=2;u1=-1;b=zeros(n);c=zeros(n);
f2=zeros(n,1);f1=zeros(n,1);f3=zeros(n,1);
e=0.03;f1(1)=-u0*(e/h+1);
f2(9)=-u1*(e/h+1);
for i=1:n
    f3(i)=-h*e^2*((i-1)*h+i*h+(i+1)*h)/2;
    a(i,i)=-2*e/h;
    b(i,i)=-2*e/h;
    c(i,i)=-2*e^2/h-8*h/3;
    if i<n-1
        a(i,i+1)=e/h+1;
        b(i,i+1)=e/h-1;
        c(i,i+1)=e^2/h-4*h/6;
    end
    if i>1
        a(i,i-1)=e/h-1;
        b(i,i-1)=e/h+1;
        c(i,i-1)=+e^2/h-4*h/6;
    end
end
end
for i=1:n+1
v1(i)=-((1+((i-1)*h)^3)/4);
end
%v1(n+1)=-0.5;
    c1=inv(a)*f1;
c2=inv(b)*f2;
v=inv(c)*f3;
u(1)=u0;u(n)=u1;
ut(1)=u0;ut(n)=u1;ut1(1)=u0;ut1(n)=u1;
q1=u1-0.25*(2-6*e^2);q2=0.25+u0;q3=exp(-2/e)-exp(2/e);

```

```

for i=2:n-1
u(i)=v1(i)+v(i)+c1(i)*exp(-2*(i-1)*h/e)+c2(i)*exp(-2*(1-(i-1)*h)/e);
ut(i)=v1(i)+(u0-v1(1))*exp(-2*(i-1)*h/e)+(u1-v1(11))*exp(-2*(1-(i-1)*h)/e);
ut1(i)=(q1-q2*exp(2/e))*exp(-2*(i-1)*h/e)/q3-(q1-q2*exp(-2/e))*exp(2*(i-1)*h/e)/q3-
0.25*(((i-1)*h)^3-6*e^2*(i-1)*h+1);
end
ut1
ut;
u
end

```

```

u = 2.0000 -0.2678 -0.2500 -0.2508 -0.2519 -0.2538 -0.2566 -0.2606 -
0.2658 -0.2726 -0.2811 -0.2914 -0.3038 -0.3184 -0.3355 -0.3552 -0.3777 -
0.4033 -0.4332 -1.0000

```

x	Так чыгарылыш	Болжолдуу чыгарылыш
0		
0.05	2.0000	2.0000
0.1	-0.1697	-0.2678
0.15	-0.2473	-0.2500
0.2	-0.2505	-0.2508
0.25	-0.2517	-0.2519
0.3	-0.2536	-0.2538
0.35	-0.2563	-0.2566
0.4	-0.2602	-0.2606
0.45	-0.2655	-0.2658
0.5	-0.2722	-0.2726
0.55	-0.2806	-0.2811
0.6	-0.2909	-0.2914
0.65	-0.3032	-0.3038
0.7	-0.3178	-0.3184
0.75	-0.3348	-0.3355
0.8	-0.3545	-0.3552
0.85	-0.3769	-0.3777
0.9	-0.4025	-0.4033
0.95	-0.4329	-0.4332
1	-1.0000	-1.0000

ЖЫЙЫНТЫК

Сингулярдуу козголгон маселелерди чыгарууда колдонулуп келген методдор же бир калыпта болбогон кадам менен чыгарышат, же тар чөйрөдөгү маселелерди чыгаруу менен чектелет. Биз колдонгон метод кесиндини бир калыптагы кадам менен бөлүү жана кең чөйрөдөгү маселелерди чыгарууга колдонууга багытталган. Бул метод менен физика жана башка технологияда жөнөкөй эсептөөгө кыйын болгон ошондой козголгуч күчтөр таасир эткендеги моделди түзүүгө болот. Аны кол менен чыгарбастан эсептөө машиналарында оңой эсептейбиз. Ушундай сыяктуу методдор азыркы инновациялык доордо абдан актуалдуу деп ойлойм.



КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

- [1] Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, Матем.заметки 1969,т.6.№ 2, с.237-248.
- [2] Дулан Э.,Миллер Дж., Шилднрс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. Мир, 1983.
- [3] Бахвалов Н.С.К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя, Ж.вычисл.матем. и матем.физ.,1969,т.9,№ 4, с.841-859.
- [4] А. И. Задорин, С. В. Тиховская, Решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка на основе схемы Самарского, Сиб. журн. вычисл. матем., 2013, том 16, номер 1, 11–25
- [5] И. А. Блатов, Е. В. Китаева, Сходимость метода адаптации сеток Н. С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач, Сиб. журн. вычисл. матем., 2016, том 19, номер 1, 47–59/ .
- [6] Д. Шапти, Д. Мохапатра, Численные методы, равномерно сходящиеся относительно параметра для одного класса параметризованных сингулярно возмущенных задач, Сиб. журн. вычисл. матем., 2019, том 22, номер 2, 213–228
- [7] Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии Тр. инстит. математ и механ УрО РАН Том 16 № 1 2010.
- [8] Г. И. Шишкин Обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии, Тр. инстит. математ и механ УрО РАН Том 18 № 2 2012.
- [9] Hradyesk Kumar Mishra, Sonali saini Various Numerical Methods for Singularly Perturbed Boundary Value Problems, American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2014, Vol. 2, No. 3, 129-142.
- [10] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.М.:Наука, 1981.
- [11] Омуралиев А.С. Численное решение сингулярно возмущенной начальной задачи, Метод малого параметра. Тезисы докладов Всесоюзного совещания.Нальчик, 26-28 мая 1987. Нальчик 1987.

- [12] Омуралиев А.С. Численная регуляризация краевой задачи с пограничным слоем, возникающемся на одном конце, Вестник ОшГУ, сер.физмат.наук 4, 2001.
- [13] Омуралиев А.С. Численная регуляризация сингулярно возмущенной краевой задачи, Кыргыз-Турк Манас универ. Табигый илимдер журналы, №2,2002.
- [14] Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенной краевой задачи для обыкновенного дифференц. уравнения на основе конечных элементов// Табигый илимдер журналы, 2003,№ 4.
- [15] Омуралиев А.С. Об одном конечно элементном подходе решения сингулярно возмущенной задачи, Тезисы докладов Междунар. Конфер. по вычисл. Матем. МКВМ-2004 21-25 июня 2004 г. Академгородок, Новосибирск, Россия.
- [16] Омуралиев А.С. Numerical regularization of Cauchy problem for singularly perturbed parabolic equation, Кыргыз-Турк Манас универ. Табигый илимдер журналы, 2004,№ 5.

