

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**DEĞİŞİM NOKTALARI TAHMİNLERİ KULLANILARAK STOKASTİK
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE MODELLEME**

DOKTORA TEZİ

Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU
Danışman: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV

VAN – 2023

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**DEĞİŞİM NOKTALARI TAHMİNLERİ KULLANILARAK STOKASTİK
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE MODELLEME**

DOKTORA TEZİ

Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU

VAN – 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Fevzi Erdoğan danışmanlığında, Sevda Özdemir Çalkıuşu tarafından sunulan “Değişim Noktaları Tahminleri Kullanılarak Stokastik Diferansiyel Denklemler ile Modelleme” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 18/05/2023 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından oy birliğı / oy çokluğı ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sinan ÇALIK

İmza:

Üye: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İmza:

Üye: Prof. Dr. Mahmut KARA

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hamit MİRİTAGİOĞLU

İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hatice TAŞKESEN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.../.../2023

Prof. Dr. Harun AKKUŞ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU



ÖZET

DEĞİŞİM NOKTALARI TAHMİNLERİ KULLANILARAK STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE MODELLEME

ÖZDEMİR ÇALIKUŞU, Sevda
Doktora Tezi, İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV
Mayıs 2023, 142 sayfa

Bu tez çalışmasında, 01.03.2019 ile 13.03.2023 tarihleri arasındaki WTI (West Texas Intermediate (Batı Teksas petrolü)) ham petrol kapanış verileri, standart Wiener süreci şeklinde bir yörünge takip ettikleri için stokastik diferansiyel denklem (SDD) modellenmesi ile ele alınmıştır. Çünkü bir ekonominin can damarı olarak anılan ham petrol, dolayısıyla da petrol fiyatlarındaki dalgalanmalar, özellikle son birkaç yılda, çeşitli küresel etkiler sebebiyle ani değişimler gösterdiğinden dünya çapında birçok ülkeyi önemli ölçüde etkilemiştir. Bu sebeple bu çalışmada, değişim noktası tahmini (change point estimation (CP)) dikkate alınarak WTI verilerine en uygun hibrit SDD modelini elde etmek amaçlanmaktadır. Bunun için ilk olarak WTI veri seti, CP tahmini dikkate alınmadan finansta çok sık kullanılan geometrik Brownian hareketi (GBM) ve Cox-Ingersoll-Ross (CIR) SDD'leri ile modellenmiştir. Daha sonra CP tahmini dikkate alınarak GBM SDD ve CIR SDD modelleri yeniden kurulmuştur. Son olarak yine CP dikkate alınarak WTI verileri ile uyumlu olan bir hibrit SDD modeli önerilmiştir. Hibrit SDD modelini kurabilmek için GBM SDD ve CIR SDD modelleri kullanılmıştır. Her bir model için parametreler ve CP'ler, yarı (quasi) en çok olabilirlik tahmin yöntemi (QMLE) ile tahmin edilmiştir. Elde edilen CP'lerin Covid-19 salgını ve Rusya-Ukrayna savaşı ile bağlantılı olduğu görülmüştür. Kurulan modeller ile veri seti arasında uyumsuzluk olup olmadığı, literatürde SDD'ler için özel olarak geliştirilen, ki-kare testi ile irdelenmiştir. Her bir SDD modelinin yaklaşık çözümü, Euler-Maruyama (EM) nümerik çözümü ile elde edilmiştir. Kurulan modeller arasından veri seti için en iyi olan modeli belirlemek amacıyla MAPE, RMSE, AIC ve BIC kriterleri kullanılmıştır. Buna göre, MAPE ve RMSE kriterine göre WTI seti için en uygun modelin önerilen hibrit SDD modeli olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu model, veri setindeki ani iniş ve çıkışları diğer modellerden daha iyi açıklamıştır. Ani değişimlerin olduğu veri kümeleriyle çalışırken CP'yi dikkate almanın, oluşturulan modelin performansı üzerinde olumlu bir etkisi olduğu görülmüştür. Sonuçlar, hibrit SDD modelinin veri setine uyduğunu grafiklerle desteklemektedir.

Anahtar kelimeler: CIR SDD, Değişim noktası tahmini, EM yaklaşım yöntemi, GBM SDD, Itô stokastik diferansiyel denklemler, QMLE tahmin yöntemi, WTI ham petrol veri seti.

ABSTRACT

MODELING WITH STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE CHANGE POINTS ESTIMATIONS

ÖZDEMİR ÇALIKUŞU, Sevda

Ph.D. Thesis, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

Second Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMILOV

May 2023, 142 pages

In this thesis, WTI (West Texas Intermediate) crude oil closing data between 01.03.2019 and 13.03.2023 were handled with stochastic differential equation (SDE) modeling as they follow a trajectory in the form of a standard Wiener process. Because crude oil, known as the lifeblood of an economy, and the reason of fluctuations in oil prices, affected many countries around the world, especially in the last few years, as it has shown sudden changes due to various global effects. Therefore, in this study, it was aimed to obtain the most suitable hybrid SDE model for WTI data, taking into account change point estimation (CP). For this, the WTI dataset was first modeled with geometric Brownian motion (GBM) and Cox-Ingersoll-Ross (CIR) SDEs, frequently used in finance, without considering the CP estimation. Then, GBM SDE and CIR SDE models were reconstructed considering the CP estimation. Finally, a hybrid SDE model was proposed, which is compatible with WTI data, again considering CP. GBM SDE and CIR SDE models were used to establish the hybrid SDE model. Parameters and CPs for each model were estimated by quasi-maximum likelihood estimation method (QMLE). Obtained CPs were found to be linked to the Covid-19 outbreak and the Russia-Ukraine war. Whether there is lack of fit between the established models and the data set was examined with the chi-square test was developed specifically for SDEs in the literature. The approximate solution of each SDE model was obtained with the Euler-Maruyama (EM) numerical solution. Among the established models, MAPE, RMSE, AIC, and BIC criteria were used to determine the best model for the data set. Accordingly, it was concluded that the most suitable model for the WTI dataset according to the MAPE and the RMSE criteria is the proposed hybrid SDE model. This model explained the sudden ups and downs in the data set better than the other models. It was observed that considering the CP when working with datasets with sudden changes has a positive effect on the performance of the model created. The results graphically support that the hybrid SDE model fits the dataset.

Keywords: CIR SDE, Change point estimation, EM approximation method, GBM SDE, Itô stochastic differential equations, QMLE estimation method, WTI crude oil dataset.



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, değerli vaktini bana ayıran, deneyimlerini paylaşan, çalışmanın planlanmasında ve sonuçlanmasında yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Fevzi Erdoğan'a teşekkür ederim. Ayrıca, tez konusunun belirlenmesinde emeği geçen, karşılaştığım güçlüklerle baş etmemi sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Aladdin Şamilov'a teşekkürü bir borç bilirim. Değerli TİK üyelerim Prof. Dr. Mahmut Kara ve Dr. Öğr. Üyesi Hatice Taşkesen'e teşekkürlerimi sunarım. Çeşitli konularda bana yardımcı olan, usanmadan her sorunuma çözüm arayan sevgili arkadaşım Dr. Nihal İnce'ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin uygulama aşamasında yönelttiği doğru sorularla daha iyi sonuçlar elde etmemi sağlayan sayın Dr. Akbar Barati'ye ve tezin uygulama kısmında veri seçimi aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen Doç. Dr. Önder Büberkökü'ne teşekkürlerimi sunarım. Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, beni yetiştiren, bu günlere emin adımlarla ulaşmamı sağlayan anne ve babama, bana emek verdikleri ve güvendikleri için teşekkür ederim. Tezimi yazarken bana her konuda destek olan, varlığını her daim hissettiren hayat arkadaşım Veli Can Çalığı ve zaman ayıramadığım gözümün ışığı, biricik oğlum Çağan Ege'ye, en içten teşekkürlerimi sunarım.

2023

Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	7
3. TEMEL KAVRAMLAR	13
3.1 Olasılık Uzayı.....	14
3.2 Beklenti	18
3.3 Hilbert Uzayı	21
3.4 Rassal Değişkenlerin Hilbert Uzayı	24
3.5 Rassal Değişken Dizilerinin Yakınsaması	26
3.6 Monte Carlo Yöntemi.....	32
3.7 Stokastik Süreçler.....	35
3.7.1 Kesikli Parametrelili Stokastik Süreçler	38
3.7.2 Sürekli Parametrelili Stokastik Süreçler	39
3.7.3 Wiener Süreci (Brownian Hareketi)	39
3.8 Stokastik Süreçlerin Hilbert Uzayı.....	42
3.9 Stokastik İntegraller	43
3.9.1 $\int_a^b f(s, \omega) ds$ Tipindeki Stokastik İntegraller	44
3.9.2 Itô Stokastik İntegralleri.....	47
3.9.3 Stokastik Diferansiyeller ve Itô Formülü.....	51
4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ	55
4.1 Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	58
4.2 Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Özellikleri	65
4.3 Itô Formülü ve Kesin Çözümler.....	66
4.4 Stokastik Diferansiyel Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri	67
4.4.1 Euler – Maruyama Yaklaşım Yöntemi	68
4.5 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Parametre Tahmini.....	70
4.5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi	70
4.5.2 Yarı (Quasi) En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi	72
4.6 Değişim Noktası Tahmini (Change Point Estimation).....	73

4.6.1	Volatilitenin Değişim Noktası Tahmincisi	74
4.7	Stokastik Diferansiyel Denklemler için Ki-Kare Uyum İyiliği Testi.....	76
4.8	Model Performans Değerlendirmesi	81
4.8.1	Akaike Bilgi Kriteri Model Seçimi.....	81
4.8.2	Bayes Bilgi Kriteri Model Seçimi.....	82
4.8.3	Model Performans Değerlendirmesi için MAPE.....	83
4.8.4	Model Performans Değerlendirmesi için RMSE	84
4.9	Bazı Önemli SDD Modelleri	84
4.9.1	Geometrik Brownian Hareketi Süreci.....	84
4.9.2	Cox-Ingersoll-Ross Süreci	86
5.	WTI HAM PETROL VERİLERİ İÇİN SDD MODELLEMESİ	89
5.1	WTI Veri Seti için Wiener Süreci Varsayımlarının Kontrolü.....	90
5.1.1	Normallik Varsayımının Kontrolü	91
5.1.2	Durağanlık Varsayımının Kontrolü	92
5.1.3	Bağımsızlık varsayımının kontrolü.....	93
5.2	WTI Veri Seti için SDD Modellemesi	93
5.3	WTI Veri Seti için Değişim Noktası (CP) Tahmini	99
5.4	WTI Veri Seti için CP Tahmini Dikkate Alınarak Yapılan SDD Modellemesi	101
5.4.1	τ_1 ve τ_2 Dikkate Alınarak Kurulan GBM SDD Modeli	102
5.4.1.1	$[0, \tau_1)$ Aralığında Kurulan GBM SDD'nin EM Nümerik Çözümü	105
5.4.1.2	$[\tau_1, \tau_2)$ Aralığında Kurulan GBM SDD'nin EM Nümerik Çözümü	106
5.4.1.3	$[\tau_2, T]$ Aralığında Kurulan GBM SDD'nin EM Nümerik Çözümü	107
5.4.2	τ_1 ve τ_2 Dikkate Alınarak Kurulan CIR SDD Modeli.....	109
5.4.2.1	$[0, \tau_1)$ Aralığında Kurulan CIR SDD'nin EM Nümerik Çözümü	112
5.4.2.2	$[\tau_1, \tau_2)$ Aralığında Kurulan CIR SDD'nin EM Nümerik Çözümü	113
5.4.2.3	$[\tau_2, T]$ Aralığında Kurulan CIR SDD'nin EM Nümerik Çözümü	115
5.5	WTI Veri Seti için Model Seçimi.....	116
5.6	WTI Veri Seti için CP Tahmini Dikkate Alınarak Kurulan Hibrit SDD	117
5.7	WTI Veri Seti için Model Performans Değerlendirmesi.....	118
5.8	WTI Veri Seti için Hibrit SDD Modelinin Yörüngelerinden Elde Edilen Rassal Değişkenlerin Dağılımlarını Belirleme	119
6.	TARTIŞMA VE SONUÇ	123
	KAYNAKLAR.....	127

EKLER	133
ÖZ GEÇMİŞ	143



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 3.1 M adet Monte Carlo tekrar sayısı için elde edilen tahmini beklenti ve güven aralıkları	34
Çizelge 4.1 MAPE değerlerinin yorumlanması.....	83
Çizelge 5.1 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları.....	94
Çizelge 5.2 $[0, \tau_1)$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları.....	101
Çizelge 5.3 $[\tau_1, \tau_2)$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları.....	101
Çizelge 5.4 $[\tau_2, T]$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları.....	102
Çizelge 5.5 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.3) ve Eşitlik (5.4)'ün AIC ve BIC değerleri	117
Çizelge 5.6 CP değerleri dikkate alınarak bölünen aralıklardaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.9) ve Eşitlik (5.16)'nın AIC ve BIC değerleri.....	117
Çizelge 5.7 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.3), Eşitlik (5.4), Eşitlik (5.9), Eşitlik (5.16) ve Eşitlik (5.23) denklemlerinin RMSE ve MAPE değerleri	118

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 ADD'nin yörüngesi	1
Şekil 1.2 SDD'nin yörüngesi.....	2
Şekil 3.1 $E[Y]$ hedef gerçek değeri ile \hat{g}_n Monte Carlo tahmininin sırasıyla 10^3 , 10^4 , 10^5 ve 10^6 tekrar sayıları için ayrı ayrı yakınsaması	35
Şekil 3.2 $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin durumları	37
Şekil 3.3 Euro ile ABD Doları arasındaki döviz kuru dalgalanması.....	37
Şekil 3.4 $[0, 1]$ zaman aralığında $N = 1000$ adımlı Wiener Sürecinin bir simülasyonu	41
Şekil 4.1 GBM'nin gerçek çözümleri ile sırasıyla $L = 8$ ve $L = 128$ adımları için EM çözümlerinin karşılaştırılması	69
Şekil 4.2 Değişim noktası istatistiği Φ_n	76
Şekil 4.3 $\tau^* = 4$ civarında değişim noktası olan iki boyutlu yörünge.....	76
Şekil 4.4 Önerilen herhangi bir SDD için $K = 4$ ve $M = 5$ olmak üzere $[1,2]$ aralığındaki yörüngeler ve simüle edilen Monte Carlo değerleri.....	78
Şekil 4.5 $M \leq 5$ olacak şekilde herhangi bir SDD için her bir gözlem verisine karşılık gelen Monte Carlo simülasyon değerleri	80
Şekil 5.1 Varil başına Dolar cinsinden ele alınan WTI ham petrol verileri	90
Şekil 5.2 WTI ham petrol verileri için aykırı değerler	91
Şekil 5.3 Aykırı değerlerden arındırılan WTI ham petrol verileri.....	91
Şekil 5.4 WTI verisinin histogramı, yoğunluk fonksiyonu ve Q-Q plot'ı.....	92
Şekil 5.5 WTI veri setinin artışları	93
Şekil 5.6 Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları .	95
Şekil 5.7 Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları....	96
Şekil 5.8 Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	97
Şekil 5.9 Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi	97
Şekil 5.10 Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	98
Şekil 5.11 Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	99

Şekil 5.12 WTI veri setinde sırasıyla GBM SDD için τ_1 değişim noktası istatistikleri, CIR SDD için τ_1 değişim noktası istatistikleri ve her iki SDD için artımlara göre τ_1 değişim noktası	100
Şekil 5.13 $[\tau_1, T]$ aralığındaki WTI veri setinde sırasıyla GBM SDD için τ_2 değişim noktası istatistikleri, CIR SDD için τ_2 değişim noktası istatistikleri ve her iki SDD için artımlara göre τ_2 değişim noktası	100
Şekil 5.14 WTI veri setinde τ_1 ve τ_2 değişim noktası istatistikleri ve $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıkları.....	101
Şekil 5.15 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	103
Şekil 5.16 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	104
Şekil 5.17 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	104
Şekil 5.18 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	105
Şekil 5.19 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	106
Şekil 5.20 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	107
Şekil 5.21 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	107
Şekil 5.22 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	108
Şekil 5.23 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	108
Şekil 5.24 $t \in [0, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi.....	109
Şekil 5.25 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	110
Şekil 5.26 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	111

Şekil 5.27 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları	112
Şekil 5.28 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	113
Şekil 5.29 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	113
Şekil 5.30 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	114
Şekil 5.31 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için (5.16) CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi	114
Şekil 5.32 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı	115
Şekil 5.33 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	116
Şekil 5.34 $t \in [0, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi.....	116
Şekil 5.35 Eşitlik (5.23) Hibrit SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi.....	118
Şekil 5.36 WTI veri seti için kurulan Eşitlik (5.24) EM şemasının yörüngeleri.....	119
Şekil 5.37 $t = 0.75$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu	120
Şekil 5.38 $t = 2.00$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu	121
Şekil 5.39 $t = 3.8016$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu	122



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
\emptyset	Boş küme
\forall	Her
\exists	Vardır
\in	Elemanıdır
A^c	A kümesinin tümleyeni
\mathcal{B}^d	d boyutlu Borel cebir
\mathbb{C}^n	n – boyutlu Kompleks sayılar uzayı
$\text{Cov}(X, Y)$	X ve Y rassal değişkenlerinin kovaryansı
$d(x, y)$	x ve y vektörlerinin metriği
$E(X)$	X rassal değişkeninin beklentisi
$f(x)$	X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_X(x)$	X rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu
H_{RV}	Rassal değişkenlerin Hilbert uzayı
\mathcal{I}	İç çarpım uzayı
$I_A(\omega)$	A kümesinin İndikatör fonksiyonu
$N(\mu, \sigma^2)$	Beklentisi μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılım
ω	Rassal bir deneyin sonucu, olay
Ω	Elementer sonuçlar uzayı
P	Olasılık ölçümü
$p(x)$	X rassal değişkeninin olasılık kütle fonksiyonu
$p_{X_1 X_2}$	X_1 ve X_2 rassal değişkenlerinin ortak olasılık kütle fonksiyonu
\mathbb{R}	Reel sayılar uzayı
\mathbb{R}^n	n – boyutlu Reel sayılar uzayı
$\rho(x)$ veya $\ x\ $	x vektörünün normu
\mathfrak{F}	Olayların σ – cebiri

S_{RV}	Sade rassal değişkenlerin bir kümesi
\mathcal{V}	Vektör uzayı
$\text{Var}(X)$	X rassal değişkeninin varyansı
$V_t(X)$	X sürecinin basit varyasyonu
w. p. 1	1 olasılık ile yakınsama
X veya $X(\omega)$	Rassal değişken
\mathbf{X}	Bir vektör ; örneğin $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	Beklentisi μ ve varyansı σ^2 olan Gauss rassal değişkeni
$[X, X]_t$	X_t ile ilişkili ikinci dereceden varyasyon süreci
$\{X_i\}_{i=1}^\infty$	Rassal değişkenler dizisi
(\mathcal{N}, ρ)	Normlu uzay
(\mathcal{M}, d)	Metrik uzay
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	Olasılık uzayı
(x, y)	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\ \cdot\ _{RV}$	H_{RV} 'de tanımlanmış norm
\rightarrow	Yakınsama
$\xrightarrow{a.s.}$	Hemen hemen kesin yakınsama
\xrightarrow{d}	Dağılıma göre yakınsama
\xrightarrow{p}	Olasılığa göre yakınsama

Kısaltmalar

Açıklama

ADD	Adi Diferansiyel Denklemler
AIC	Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criterion)
BM	Brownian Hareketi (Brownian Motion)
BIC	Bayes Bilgi Kriteri (Bayesian Information Criterion)
CIR	Cox-Ingersoll-Ross Süreci
CP	Değişim noktası (Change Point)
GBM	Geometrik Brownian Hareketi (Geometric Brownian Motion)
MAPE	Ortalama Mutlak Hata Yüzdesi (Mean Absolute Percentage Error)
SDD	Stokastik Diferansiyel Denklemler

RMSE

Ortalama Karekök Hatası (Root Mean Square Error)

WTI

Batı Teksas Ham Petrolü (West Texas Intermediate)





EKLER DİZİNİ

Ek 1. Örnek 3.1 için RStudio Program Kodları.....	133
Ek 2. Şekil 3.3 için RStudio Program Kodları	134
Ek 3. Örnek 4.1 için MATLAB Program Kodları.....	135
Ek 4. Bölüm 5 için RStudio Program Kodları.....	136



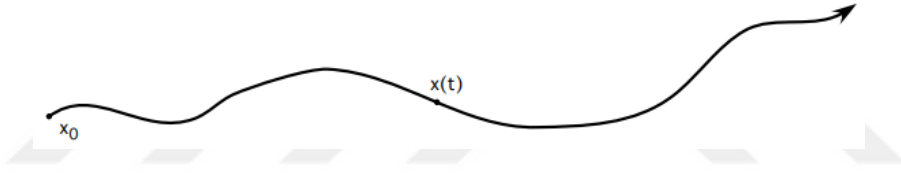


1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler teorisi sürekli dinamik sistemlerin modellenmesinde çoğu zaman başvurulan bir alandır. Bu alanda geniş bir uygulamaya sahip olan adi diferansiyel denklemler (ADD)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)), & (t > 0) \\ \mathbf{x}(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklindedir, burada $x_0 \in \mathbb{R}^p$ ve $\mathbf{b} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ şeklinde verilen bir düzgün vektör alanıdır. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, t zamanının bir fonksiyonu olmak üzere $\mathbf{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ yörüngesi Eşitlik (1.1)'in çözümüdür.



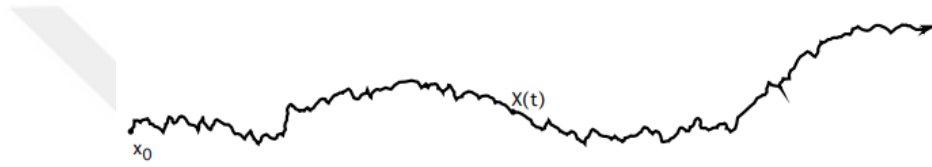
Şekil 1.1 ADD'nin yörüngesi

$X(t)$, sistemin $t \geq 0$ anındaki durumu olarak adlandırılır. Vektör alanı \mathbf{b} üzerindeki makul varsayımlar altında, ADD'nin, x_0 başlangıç koşulu ile tek bir şekilde belirlenen bir çözümü vardır. Bu durum Şekil 1.1'de (Evans, 2013) gösterilmiştir.

ADD'ler stokastik etkileri göz ardı ederek fiziksel sistemleri modeller. Birçok uygulamada, ADD tarafından modellenen sistemlerin deneysel olarak ölçülen yörüngeleri, aslında tahmin edildiği gibi davranmaz. Gözlemlenen durum, ADD tarafından tahmin edilen yörüngeyi aşağı yukarı takip ediyor gibi görünür, ancak aynı zamanda göze çarpan rastgele bozulmalara da uğrar (Evans, 2013). Bu durum Şekil 1.2'de (Evans, 2013) gösterilmiştir. Bu nedenle, bir şekilde sistemi rahatsız eden ve “çevresel gürültü” olarak adlandırılan rastgele etkilerin olasılığını sisteme dâhil etmek için ADD üzerinde değişiklik yapmak makul bir işlemdir. Bu işlem sonucunda Eşitlik (1.1)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t), & (t > 0) \\ \mathbf{X}(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

olacak şekilde değiştirilir, burada $\mathbb{M}^{p \times q}$, $p \times q$ matrislerinin uzayını göstermek üzere $\mathbf{B} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{M}^{p \times q}$ şeklindedir ve $\xi(\cdot) := q$ boyutlu “beyaz gürültü (*white noise*)” olarak tanımlanır (Evans, 2013). Buradan hareketle, diferansiyel denklemin katsayılarında rassallığa izin vererek elde edilen denkleme stokastik diferansiyel denklem (SDD) denir (Øksendal, 2000).



Şekil 1.2 SDD'nin yörüngesi

Bilim ve endüstri dalındaki birçok sistem çeşitli çevresel gürültü türlerinden etkilenir. Örneğin, basit nüfus artış modeli ele alınsın;

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \quad (1.3)$$

burada $N(0)$, başlangıç değeri; $N(t)$, t anındaki nüfus büyüklüğü ve $\alpha(t)$, t anındaki görece büyüme oranıdır. Böyle bir durumda $\alpha(t)$ tam olarak bilinmeyebilir, ancak bazı rassal çevresel etkilere maruz kalabilir. Bir başka ifade ile

$$\alpha(t) = \beta(t) + \sigma(t) \cdot \text{"noise"} \quad (1.4)$$

şeklindedir. O halde $\alpha(t)$ ifadesi Eşitlik (1.3)'te yerine yazılırsa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta(t)N(t) + \sigma(t)N(t) \cdot \text{"noise"} \quad (1.5)$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$N(t) = N_0 + \int_0^t \beta(s)N(s)ds + \int_0^t \sigma(s)N(s) \cdot "noise" ds \quad (1.6)$$

Eşitlik (1.6)'ya ulaşılır. Burada ilk akla gelen “noise” teriminin matematiksel yorumunun nasıl olduğu ve “noise” terimini içeren integralin ne olduğudur. Rassallık sebebi ile “noise” teriminin kesin davranışı bilinmemekle birlikte, sadece olasılık dağılımı bilinmektedir. $\beta(t)$ fonksiyonunun ise rassal olmadığı varsayılır. Bir başka ifadeyle, rassallık içermesi bakımından Eşitlik (1.6)'nın nasıl çözüleceği merak konusudur. (Øksendal, 2000; Mao, 2007). Tipik olarak, SDD'ler Wiener süreci¹ olarak da bilinen Brownian hareketinin türevi olarak düşünülebilecek beyaz gürültüyü içerir. O halde $B(t)$ Brownian hareketini göstermek üzere; $\dot{B}(t) = dB(t)/dt$ olacak şekilde “noise” dt terimi, $\dot{B}(t)dt = dB(t)$ olarak ifade edilebilir ve Eşitlik (1.6)'nın sağ tarafının üçüncü terimi

$$\int_0^t \sigma(s)N(s) \cdot "noise" ds = \int_0^t \sigma(s)N(s)dB(s) \quad (1.7)$$

$$N(t) = N_0 + \int_0^t \beta(s)N(s)ds + \int_0^t \sigma(s)N(s)dB(s) \quad (1.8)$$

şeklinde elde edilir. $B(t)$ türevlenebilir olsaydı, “noise” ds terimini içeren integralin çözümü için herhangi bir problem ortaya çıkmazdı. Ancak, $B(t)$ 'nin hiçbir yerde türevlenebilir olmadığı, bu nedenle söz konusu integralin bilinen integraller şeklinde tanımlanamayacağı bilinmektedir (Allen, 2007). Kısaca değinmek gerekirse, bu integrali tanımlamak için Brownian hareketinin stokastik doğasının kullanılması gerekir. Böyle bir integral ilk olarak 1949'da Kiyosi Itô tarafından tanımlanmıştır ve şimdi Itô stokastik integrali olarak bilinmektedir (Mao, 2007). Gerçek hayatta bir sistemin davranışı modellenmek istendiğinde ya sistemin nasıl davranacağını belirlemek için yeterli ve

¹ Bölüm 3.7.3'te detaylı olarak ele alınmıştır.

detaylı bilgi elde edilemez ya da söz konusu sistemin davranışı o kadar kompleksdir ki sistemin tam olarak betimlenmesi olanaksızdır. Bu gibi durumlarda stokastik modellerin kullanımı, araştırmacılar için son derece yararlıdır (Onalan, 2010). SDD teorisi yaklaşık yetmiş beş yıldır varlığını sürdürmektedir (Kloeden vd., 2000). Stokastik modelleme, giderek daha fazla insanın SDD ile karşılaştığı birçok bilim ve endüstri dalında önemli bir rol oynamaya başlamıştır (Mao, 2007). Bu modelleme türü birçok disiplinde çeşitli uygulamalara sahiptir ve birçok olgunun incelenmesinde doğal olarak ortaya çıkar. Bu uygulamalara örnek olarak fizik, astronomi, mekanik, ekonomi, matematiksel finans, jeoloji, genetik analiz, ekoloji, bilişsel psikoloji, nöroloji, biyoloji, biyomedikal bilimler, epidemiyoloji, siyasi analiz ve sosyal süreçler ve diğer birçok bilim ve mühendislik alanı verilebilir (Iacus, 2008).

Böyle bir diferansiyel denklemin analizi için sadece Newton kalkülüsü ile işlem yapmak mümkün değildir. Bu nedenle öncelikle bu tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde bu tür bir diferansiyel denklemin analizi için gerekli olan matematiksel araç ve yaklaşımlar ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, literatürde konu ile ilgili yapılan özellikle finans alanındaki çalışmalara yer verilmiştir. Bu çalışmaların ışığında SDD teorisinin, SDD'nin çözülmesi ve çeşitli alanlara uygulanmasının yaygınlaştırılması bu tez çalışmasının temel amacıdır. SDD'nin teori ve uygulamasındaki temel öğeler rassal değişkenler, stokastik süreçler, stokastik integrasyon, stokastik diferansiyel denklem ve modelleridir. Tüm bu temel öğeler bu tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde detaylı bir şekilde incelenmiştir.

SDD'ler, olasılık teorisi ile adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çok daha eski ve daha gelişmiş alanları arasında bir bağlantı kurar (Kostrista ve Çibuku, 2018). Bu nedenle, olasılık teorisi terimleri stokastik hesapta oldukça önemlidir. Bir SDD, bir veya daha fazla terimin stokastik süreç olduğu ve kendisi de stokastik süreç olan bir çözümle sonuçlanan bir diferansiyel denklemdir (Rezaeyan ve Farnoosh, 2010). Bu sebeple tezin üçüncü bölümünde, belirli bir zaman aralığında çalışılan SDD'nin bir çözümü olan stokastik süreçlerin, aslında bir rassal değişken olması sebebiyle olasılık teorisindeki önemli bazı tanım ve kavramlara, kesikli parametrelili ve sürekli parametrelili stokastik süreçlere yer verilmiştir.

Ayrıca Hilbert uzayının tamlık özelliğinin, SDD'nin sunumunu basitleştirmesinden dolayı fonksiyonel analizin temel kavramlarından olan normlu uzaylar ve metrik uzaylar üzerinde tanımlanan kavramlardan ve devamında Hilbert uzayından bahsedilmiştir. Hilbert uzayında tanımlanan *metrik* ve olasılık teorisinde tanımlanan *beklenti* kavramları arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Daha sonra rassal değişkenlerin yakınsamasının önemli kavramları ele alınmış ve bu kavramlar arasındaki ilişki verilmiştir. Sonrasında, SDD teorisinde çok sık kullanılan bir yöntem olan Monte Carlo yöntemi kısaca ele alınmıştır. Önemli bir stokastik süreç olan Wiener süreci ise ayrıca bu bölümde dikkate alınmıştır. Yine bu bölümde stokastik integraller ve takibinde Itô stokastik integralleri tanımlanmış ve bu integrallerin bazı önemli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu bölümde stokastik diferansiyellere ve SDD teorisi için oldukça önemli olan Itô formülüne değinilmiştir. Son olarak, yaygın olarak kullanılan başka bir stokastik integral, bir Stratonovich stokastik integralinden kısaca bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Itô stokastik diferansiyel denklemler teorisi ele alınmıştır. Bu amaçla ilk olarak, Hilbert uzayında kesin koşullar altında, SDD'nin tek bir çözümünün var olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra, SDD'nin birkaç özelliği üzerinde durulmuştur. SDD'nin kesin çözümlerini bulabilmek için verilen Itô formülünün yanı sıra, SDD'nin yaklaşık çözümlerini bulmak için birkaç nümerik yöntemden bahsedilmiş ve bu yöntemler arasından Euler-Maruyama (EM) yöntemi detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca bu bölümde, SDD'nin parametrelerini tahmin etmek için yarı (quasi) en çok olabilirlik (QMLE) yöntemi anlatılmıştır. Tez çalışmasının en önemli unsuru olan ve tezin özgünlüğüne katkıda bulunan, verilen bir fiziksel sistemin ani değişim gösterdiği zamanların tespiti için kullanılan değişim noktası (CP) tahmini bu bölümde dikkate alınmıştır. Sonrasında, literatürde özellikle SDD'ler için geliştirilen ki-kare uyum iyiliği testi verilmiş ve model performans değerlendirmesi için kullanılan ortalama mutlak hata yüzdesi (mean absolute percentage error (MAPE)), ortalama karekök hatası (root mean square error (RMSE)), Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Bayes bilgi kriteri (BIC) kavramlarından bahsedilmiştir. Son olarak literatürde, özellikle finansta, sıklıkla kullanılan geometrik Brownian hareketi (GBM) ve Cox-Ingersoll-Ross (CIR) SDD modellerine ve bu iki modelin bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, önceki bölümlerde ele alınan yöntemlerin gerçek veri seti üzerindeki uygulaması ve bu uygulamaların sonuçları detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Son zamanlarda petrol fiyatlarındaki dalgalanmalar ve istikrarsız ürün taleplerinin tedarik, üretim ve envanter aşamalarında aksamalara yol açması; belirsizliği, yöneticilerin ve karar vericilerin planlarına dahil etme konusundaki farkındalığının artmasını sağlamıştır. Belirsizlik altında optimizasyonu ele almada en iyi yaklaşımlardan biri stokastik modellemedir (Mohd Noh vd., 2023). Bir başka ifadeyle, hammadde tedarik tahmininde yapılabilecek herhangi bir yanlışlığın üstesinden gelmek için stokastik modelleme uygun bir tahmin yöntemidir. Dolayısıyla bu çalışmanın amacı, dalgalı ham petrol fiyatını GBM ve CIR sürecine dayalı olarak modellemektir. Ham petrol fiyatlarındaki ani dalgalanmalar, özellikle son bir kaç yılda, çeşitli küresel etkiler sebebiyle dünya çapında birçok ülkeyi önemli ölçüde etkilemiştir. Bu sebeple, bu tez çalışmasında 01.03.2019 ile 13.03.2023 tarihleri arasındaki WTI (West Texas Intermediate (Batı Teksas petrolü)) ham petrol kapanış fiyatları, standart Wiener süreci şeklinde bir yörünge takip ettikleri için SDD modellemesi ile ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında WTI ham petrol verileri, ilk defa değişim noktası analizi dikkate alınarak hibrit bir stokastik diferansiyel denklem ile modellenmiştir. MAPE ve RMSE kriterlerine göre, söz konusu veri setini en iyi açıklayan model iki değişim noktalı hibrit SDD modelidir. Bu model dikkate alındığında, EM nümerik yaklaşım yöntemi yardımıyla hesaplanan 100 adet yörünge rastgele seçilen üç adet t anındaki rassal değişkenlerinin oluşturduğu kümelerin dağılımının ne olduğu tahmin edilmiştir. Elde edilen sonuçlar çizelgeler ile verilmiş ve şekiller ile görselleştirilmiştir. Tez çalışmasının tamamındaki uygulamalar ve örnekler, R programlama diline entegre çalışan RStudio yazılımının çeşitli kütüphaneleri ile yapılmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

1827'de İskoç botanikçi Robert Brown, sıvı içinde asılı duran polen tanelerinin düzensiz bir hareket gerçekleştirdiğini gözlemlemiştir. Daha sonra 1900'de Louis Bachelier ve bağımsız olarak 1905'te Albert Einstein, detayları matematiksel bakış açısıyla incelemiş ve bu hareketin, sıvının molekülleri ile rastgele çarpışmalar yaptığını açıklamışlardır. Bu sebeple, hareketi matematiksel olarak tanımlamak için, polen tanesi ω 'nın t zamanındaki konumu olarak yorumlanan, stokastik bir süreç kavramı kullanılmıştır. Bu süreç, Robert Brown'ın onuruna *Brownian hareketi* olarak anılmaktadır (Øksendal, 2000; Iacus, 2008). Brownian hareketinin matematiksel özellikleri sibernetik ve sinyal işlemenin kurucusu olarak bilinen Norbert Wiener tarafından 1920 yılında elde edildiği için söz konusu süreç aynı zamanda *Wiener süreci* olarak da bilinmektedir (Özel Kadılar, 2020).

Brownian hareketinin hiçbir yerde türevlenebilir olmadığı, bu nedenle integralinin bilinen integraller şeklinde tanımlanamayacağı bilinmektedir. Bu integrali tanımlamak için Brownian hareketinin stokastik doğasının kullanılması gerekir. Böyle bir integral ilk olarak 1949'da Kiyosi Itô tarafından tanımlanmıştır ve şimdi Itô stokastik integrali olarak bilinmektedir (Mao, 2007). Stokastik integraller yardımıyla oluşturulan denklem, SDD'nin bir çözümüdür.

Yukarıdaki önemli bilgiler ışığında aşağıda literatürde, özellikle finans alanında, SDD'ler yardımıyla yapılan çeşitli uygulamalara yer verilmiştir.

Bozdağ (2010), yüksek lisans tezinde SDD'lerin iki alt denklem sınıfını ele almıştır. Bu amaçla öncelikle SDD teorisi için gerekli olan matematiksel temellere değinmiş daha sonra iki somut problem için SDD modelleri önermiştir. İlk olarak, bu çalışmada, bir radyoaktif bozunma problemi bir rassal diferansiyel denklem ile modellenmiş ve bu modelin çözümü elde edilmiştir. İkinci olarak, hisse senetleri fiyatları için Samuelson modeli tanıtıldıktan sonra fiyatlar için bir SDD modeli kurulmuştur. İki modeli fiyat tahminleri bazında karşılaştırabilmek için Motorola hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti ele alınmıştır. Daha sonra, elde edilen modeller nümerik olarak çözülmüş ve her iki model Euclid metriğine göre karşılaştırılmış, Samuelson modelinin çalışmada verilen yöntemle elde edilen modelden daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Ergişi (2019), yüksek lisans tezinde Brownian hareketi ile temsil edilen SDD'ler ile modelleme yaparken iki parametre tahmin yöntemi önermiştir. Bunlar en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve genelleştirilmiş moment teknikleri yöntemidir. Çalışmasında, Brownian hareketi için yapılan varsayımlar yerine getirildiğinde, her iki tekniğin de aynı sonucu verdiğini elde etmiştir.

Özdemir (2019), yüksek lisans tezinde bilinen sıçramalı modellerden biri olan Merton sıçramalı difüzyon modeli ile Dolar/TL verisini modellemeye çalışmıştır. Bu çalışmada, parametre tahmini için oluşturulan algoritmayı doğru bir şekilde kurabilmek için Merton yapısına göre bir veri simülasyonu yapılmıştır. Simüle verideki parametre başlangıç değerleriyle en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile bulunan parametre tahminleri karşılaştırılarak algoritmanın doğruluğuna karar verilmiştir. Ayrıca, EM yöntemi ile numerik yaklaşım ve analitik çözümün birbirlerine ne kadar yakınsadıkları kontrol edilmiştir. Parametre tahmini için elde edilen algoritma kullanılarak hem Merton difüzyon modeli hem de Black-Scholes modeli için 01.02.2019-21.06.2019 tarihleri arasındaki Dolar/TL döviz kuru verisi ile parametre tahmini; 23.05.2019-02.07.2019 tarihleri arası için ise öngörü tahmini yapılmıştır. Son olarak, bu iki model tahmin ve veriye uyumluluk açısından karşılaştırılmıştır.

İnce (2021), doktora tezinde bir probleme uygulanabilmesi için SDD'lerin çözümünün varlık ve tekliğini Banach sabit nokta prensibinin genelleştirilmesi yardımıyla ele almıştır. SDD'lerin çözümünün bir stokastik süreç olması, dolayısıyla bir rassal değişken ifade etmesi ve bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunmasının önemli bir problem olduğuna değinmiştir. Bu çalışmada, söz konusu problemin çözümü için genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılarak SDD'lerin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek amacıyla bir yöntem geliştirilmiş ve teorik olarak da ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri, bu yöntemlerden elde edilen dağılımların diğer istatistiksel dağılımlardan daha esnek olması sebebiyle tercih edilmiştir. Geliştirilen bu yöntemin performansını göstermek amacıyla üç gerçek veri seti üzerinde uygulama yapılmış ve simülasyon çalışması ile elde edilen sonuçlar desteklenmiştir.

Chen vd. (2005), çalışmalarında regresyon ve volatilité (oynaklık) fonksiyonlarının bilinmediği, parametrik olmayan bir modelin volatilitésindeki değişim noktalarını saymak için bir teori oluşturmuşlardır.

Lee vd. (2006), çalışmalarında difüzyon süreçlerinde tek adımlı tahmin edicilere dayalı CUSUM testini kullanarak bir parametre değişikliğini test etme problemini değerlendirmişlerdir. Parametre değişikliği, söz konusu süreçte bir değişim noktası varlığından kaynaklanmaktadır.

Gregorio ve Iacus (2008), çalışmalarında ayrık zamanlarda gözlemlenen bir difüzyon sürecinin volatilitesi için bir değişim noktası problemi ile ilgilenmişlerdir.

Iacus ve Yoshida (2012), çalışmalarında gözlemlerin ayrık zamanlarda toplandığı bir SDD'ye yönelik bir süreç çözümünün volatilitesi için bir değişim noktası problemi ile ilgilenmişlerdir. Volatilitate rejimindeki değişim anı, yaklaşık olasılık üzerinden QMLE yöntemi ile geriye dönük olarak belirlenmiştir. Difüzyon süreçlerinin sürekli zamanlı gözlemleri ve sürüklenme için değişim noktası tahmin problemini dikkate almışlardır.

Bahar vd. (2017), çalışmalarında dalgalanan ham petrol fiyatının hammadde tedarikini tahmin etmede zorluklara yol açmasından dolayı dalgalı ham petrol fiyatını GBM ve ortalamaya dönüşlü Ornstein-Uhlenbeck (OU) süreçlerine dayalı olarak modellemeyi ve aynı zamanda yapısal kırılmalı dalgalı ham petrol fiyatını tahmin etmeyi amaçlamışlardır. Bunun için, ham petrol fiyatının modellenmesinde yapısal kırılmanın olup olmadığı bilgisi oldukça önemli olduğundan ve uzun hafıza özelliğinin yapısal kırılmanın varlığını kamufle edebileceğinden öncelikle, Geweke ve Porter-Hudak'ın log periodogram regresyonunu kullanarak 2 Ocak 1986'dan 31 Ağustos 2016'ya kadar WTI günlük verilerine uzun bellek testi uygulamış ve kırılma tarihini bulmak için Bai ve Perron testini kullanmışlar ve WTI ham petrol fiyatında kırılma noktaları olarak 11 Kasım 1999, 18 Şubat 2005 ve 13 Ekim 2009 tarihlerini bulmuşlardır. Elde ettikleri sonuçlar, ham petrol fiyatının yapısal kırılmalarla karakterize edildiğini göstermektedir. Böylece söz konusu zaman serisinin üç yapısal kırılmasının, yani serinin veri üretme sürecinde üç süreksizliğinin olduğu elde edilmiştir. Bu sebeple Bahar ve arkadaşları, WTI veri setini GBM ve OU süreçlerine dayalı modellemek için son yapısal kırılma olan 2009'dan sonraki verileri seçmiştir. Gelecekteki fiyatın bugünün fiyatından etkilendiği varsayımı ile ham petrol fiyatını 14 gün, 30 gün ve 6 ay için GBM ve OU sürecini ortalamaya döndürerek modelleyip tahmin etmiştir. Sonuçta, kullandıkları modeller MAPE ile karşılaştırıldığında ham petrol fiyatı tahmininin, kısa dönem için OU sürecine kıyasla, GBM ile daha doğru olduğunu, bir başka ifadeyle, GBM'nin, WTI ham petrol fiyatını tahmin etmek için OU sürecinden daha iyi bir model olduğunu elde etmişlerdir. Ayrıca

ham petrol fiyatının yapısal kırılma ile tahmin edilmesinin, yapısal kırılma dikkate alınmadan tahmin edilmesinden daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir. Bu çalışmada, parametre tahmin yöntemi olarak en çok olabilirlik tahmin yöntemi (maximum likelihood estimation method (MLE) dikkate alınmıştır.

Chen vd. (2018), çeşitli zaman serisi verilerinde rejim ve yapısal değişikliklerin ne zaman meydana geldiğini doğru bir şekilde belirlemenin çoğu sosyal ve doğa bilimlerinde kritik bir öneme sahip olduğuna dikkat çekerek tek boyutlu OU sürecinin genelleştirilmiş bir versiyonu çerçevesinde değişim noktasının yerini belirlemede iki tutarlı tahmin tekniğinin eşdeğerliğini araştırmışlardır. Yöntemleri, en küçük hata kareler toplamı (least sum of squared errors (LSSE)) ve maksimum log-olabilirlik (maximum log-likelihood (MLL)) yaklaşımlarına dayanmaktadır. Araştırmacılar değişim noktasının hem varlığının hem de konumunun bilinmediği durumu araştırmışlar ve sorun olarak gördükleri bu durumu çözmek için bilgilendirici bir yöntem kullanmışlardır. Makalelerinde, hem simüle edilmiş hem de gözlemlenmiş verileri içeren teorik sonuçları ve açıklayıcı örnekleri, değişim noktası tespitinin pratik hususlarına ve dikkat çekici yönlerine değinerek vermişlerdir. Çalışmalarının literatüre sunduğu katkıyı ise bir değişim noktasının varlığını veya yokluğunu göstermede ve böyle bir değişim noktası olduğunda, bilinmeyen konumu belirlemede MLL ve LSSE tabanlı yöntemleri, geliştirdikleri şekilde değerlendirmektedirler. Ayrıca, tahmin edicilerin değişim noktası için eşdeğerliğini iki yöntem altında kurmuşlardır. Değişim noktası konumu için tahmincilerin asimptotik olarak tutarlı olması koşullarını sınınamışlar ve bu sayede verimli bir uygulama algoritmasının tasarımına yardımcı olmuşlardır. Çalışmaları, uygulamada sıklıkla karşılaşılan çoklu değişim noktası probleminin üstesinden gelmede uygun yöntemlerin araştırılması ve geliştirilmesi için teşvik edicidir.

Oliveira vd. (2019), makalelerinde üç amacı gerçekleştirmeyi amaçlamışlardır. Bunlar: (i) Brezilya enerji spot fiyatlarının zaman serilerindeki değişim noktalarının (rejim değiştirme) oluşumunun belirlenmesi; (ii) Brezilya enerji spot fiyatlarının modellenmesi için en iyi SDD'nin belirlenmesi ve (iii) Brezilya'da elektrik fiyat riskini yönetmek için kullanılan beş tür seçeneğin fiyatlandırılmasıdır. Bu sayede değişim noktasını dikkate alarak elde ettikleri SDD modeli ile Brezilya enerji spot fiyatlarını modellemişlerdir.

Yaobin ve Oyuna (2021), makalelerinde WTI ve Brent piyasalarından alınan verileri kullanarak ham petrol oynaklığını tahmin etmek için Heston stokastik volatilité

modelini önermişlerdir. Heston modeline yaklaşmak için EM şemasını uygulamışlardır. Ayrıca genelleştirilmiş otoregresif koşullu değişen varyans (GARCH) tipi modellere (simetrik ve asimetrik) yaklaşmak için RMSE ve ortalama hata (MAE)'yi kullanmıştır. Sonrasında Heston modelinin simülasyon sonuçlarını, geliştirilmiş genelleştirilmiş GARCH tipi modellerinin yaklaşık sonuçları ile karşılaştırmıştır. Elde ettikleri yaklaşık sonuçlar, Heston stokastik oynaklık modelinin ham petrol oynaklığını geliştirilmiş GARCH modellerinden daha iyi tahmin edebildiğini ortaya koymuştur. Gelecekteki çalışmalar için, ham petrol fiyat oynaklığının davranışını modellemek adına atlama difüzyon modellerinin performansının stokastik oynaklık modelleriyle karşılaştırılmasını önermişlerdir.

Lahmuddin ve Shabri (2022), çalışmalarında son yıllardaki ham petrol fiyatlarındaki önemli dalgalanmaların, dünya çapında ekonomik dengeleri önemli ölçüde etkilediğinden, bu etkileri hafifletmek için gelecekteki ham petrol fiyatlarını tahmin etmek amacıyla GBM'yi kullanmışlardır. GBM'nin sürekli zamanlı bir stokastik süreç olması ve kısa vadeli fiyat tahmini potansiyeli nedeniyle araştırmacılar tarafından söz konusu süreç tercih edilmiştir. Bu çalışmada, Dünya Bankası'ndan alınan aylık ham petrol fiyatlarından (Nisan 2002–Mart 2022) oluşan ham petrol fiyatı verileri kullanılmıştır. Drift (sürüklenme) ve volatilité parametreleri tahmin edilmiştir. Araştırmacılar, Malezya'daki ham petrol fiyat verilerini tahmin etmek için en iyi GBM modelini önermeyi, en iyi modeli kullanarak öngörülen verilerin modelini belirlemeyi ve tahmin edilen modelin GBM doğruluğunu değerlendirmeyi amaçlamışlardır. Sonuç olarak, ham petrol fiyatlarının günlük getirisinin normal dağıldığını ve GBM modellerinin ham petrol fiyatlarını tahmin etmek için uygun olduğunu elde etmişlerdir. Ayrıca söz konusu veri seti için lineer regresyon modellemesi de yapılmış ve MAPE yardımıyla GBM'nin, tahminde lineer regresyondan daha doğru olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Noh vd. (2023), çalışmalarında petrol fiyatlarındaki dalgalanmaların genel ekonomi üzerinde büyük bir etkiye sahip olması ve sonunda enflasyon oranında bir artışa yol açacağı düşüncesiyle petrol fiyatı dalgalanmalarını matematiksel olarak açıklamayı önemli bulmuşlardır. Bu sebeple araştırmalarında, GBM modeli kullanılarak 2000 yılından 2015 yılına kadar olan günlük petrol fiyatı verileri baz alınmış, WTI ve Brent isimli iki ham petrol fiyatı analiz edilmiştir. Model değerlendirmesi ve model belirleme

yöntemiyle yapılan analizlerde 2000 yılı sonrası ham petrol fiyatının GBM sürecini izlediği sonucuna varılmıştır.

Tonaki vd. (2023), ergodik difüzyon süreçlerindeki değişim noktası problemini ayırık gözlemlerden ele almışlardır. İki durumda parametrenin değişim noktasını tahmin etmek için yöntem önermişlerdir: bunlar, difüzyon parametresinde bir değişikliğin olduğu durum ve difüzyon parametresinde herhangi bir değişiklik olmadığı, ancak sürüklenme parametresinde bir değişikliğin olduğu durumdur. Ayrıca, değişim noktası tahmincilerinin yakınsama oranlarını ve dağılım sonuçlarını sunmuşlardır.

Chen ve arkadaşlarının yukarıda dikkat çektiği çoklu değişim noktası problemi (Chen vd., 2018), WTI ham petrol verilerini modelleme aşamasında ortaya çıktığından, bu tez çalışmasının odak noktası olmuştur. 2019-2023 yılları arasındaki güvenilir olmayan ekonomik ortam, petrol arıtma şirketlerini istikrarsız kâr marjına neden olan dalgalı ham petrol fiyatıyla karşı karşıya bırakmıştır. Bu durum, ham petrol verilerinin belirsizliğinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple, belirsizlik içeren teorik bir yaklaşım olan SDD modelleri bu tez çalışmasında detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca WTI veri setindeki fiyat dalgalanmalarının ani değişimler içermesi, kullanılmak istenen SDD modelinde belirsizliğin yanında değişim noktası tahminini de dikkate almanın gerekliliğini doğurmuştur. Bu bağlamda eldeki veri setini modellemek için GBM ve CIR SDD'leri ele alınmıştır. Literatürde SDD'ler için Iacus ve Yoshida'nın (2012) çeşitli çalışmalarında ele aldıkları değişim noktası analizi yukarıda belirtilen iki denklem için ayrı ayrı dikkate alınmıştır. Buradan hareketle hesaplanan iki adet değişim noktasının, WTI ham petrol fiyatlarının dalgalanma sürecinde küresel olarak son derece önemli olan olayların yaşandığı tarihlere denk düşmesi hiç de şaşırtıcı değildir. Bu durum, yapılan analizin ne kadar yerinde olduğunun bir kanıtı niteliğindedir. Bu nedenle değişim noktası analizi SDD modellemesinde modelin performansına kayda değer anlamda katkı sunmaktadır. Bu katkının ele alınan veri seti üzerinde dünya çapında nasıl bir etkisi olduğu, bu tez çalışmasının uygulama kısmında detaylı bir şekilde değerlendirilmiştir. Ayrıca sadece WTI veri seti için değil aynı zamanda farklı bilim alanlarındaki uygulamalarda da böylesi bir dalgalanmayı modelleyebilmek ve elde edilen model ile geçmiş veriler yardımıyla gelecek verilerin nasıl bir davranış sergileyeceğini tahmin edebilmek büyük ölçüde önem arz etmektedir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

SDD teorisinin arkasında ölçüm teorisine dayanan güçlü bir matematiksel yapı vardır. Olasılık ve istatistik teorisinde ele alınan rassal değişken kavramı, stokastik integral ve SDD için oldukça önemlidir. Belirli bir zaman aralığında çalışılan SDD'nin bir çözümü olan stokastik süreçler, aslında bir rassal değişkendir. Rassal değişkenlerin Hilbert uzayı (H_{RV} uzayı) üzerinde bir metrik tanımlamak için rassal değişkenlerin *beklentisi* ifadesine gerek duyulmaktadır. Dolayısıyla, bu bölümde rassal değişkenler ve rassal değişkenlerin beklentisi kavramlarının yanında başlıca olasılık, istatistik ve ölçüm teorisini kavramları tanımlarıyla birlikte ifade edilmiş ve bu bölümün esas amaçlarından biri olan H_{RV} uzayı tanımlanmıştır. Bu sebeple, kısaca fonksiyonel analizin temel kavramlarından olan normlu uzaylar ve metrik uzaylar üzerinde tanımlanan kavramlardan bahsedilmiştir. Sonrasında rassal değişkenlerin yakınsamasının önemli kavramları ele alınmış, bu kavramlar arasındaki ilişki verilmiştir. Burada, H_{RV} uzayı kullanımının bir avantajı, Hilbert uzayındaki rassal değişkenlerin herhangi bir Cauchy dizisinin yine bu uzayda tek bir rassal değişkene yakınsamasıdır. Hilbert uzayının bu tamlık özelliği, SDD'nin sunumunu basitleştirmektedir (Allen, 2007). Daha sonra, SDD teorisinde çok sık kullanılan bir yöntem olan Monte Carlo yöntemi kısaca ele alınmıştır. Ayrıca bu bölümde SDD ve SDD'nin modellenmesinin tanımlanmasında kullanılan stokastik süreçlere değinilmiştir. Bu sebeple, kesikli parametrelili ve sürekli parametrelili stokastik süreçler kısaca ele alınmıştır. Daha sonra, yukarıda değinilen sebeplerden ötürü stokastik süreçlerin Hilbert uzayı (H_{SP} uzayı) tanımlanmıştır. H_{RV} uzayına benzer şekilde H_{SP} uzayı da, stokastik integraller ve SDD'nin sunumunu birleştirir ve basitleştirir (Allen, 2007). Önemli bir stokastik süreç olan Wiener süreci ise ayrıca bu bölümde ele alınmıştır.

Yine bu bölümde stokastik integraller ve takibinde Itô stokastik integralleri tanımlanmış ve bu integrallerin bazı önemli özellikleri incelenmiştir. SDD'nin nümerik çözümünün kolay bir şekilde bulunabilmesini sağlamak adına stokastik integrallere yaklaşmak için bir yöntem açıklanmıştır. Ayrıca, bu bölümde stokastik diferansiyellere ve SDD teorisini için oldukça önemli olan Itô formülüne değinilmiştir. Itô formülünün uygulanması, belirli bir SDD'nin tam olarak çözülmesini sağlar. Üstelik Itô formülü, SDD'ler için ek önemli sonuçlar elde etmek için de kullanılabilir. Son olarak, yaygın

olarak kullanılan başka bir stokastik integral, bir Stratonovich stokastik integralinden kısaca bahsedilmiştir.

3.1 Olasılık Uzayı

Olasılık teorisi, sonuçları şansa bağlı olan denemelerin matematiksel modelleriyle ilgilenir. Tüm olası sonuçlar (elementer olaylar), karakteristik elemanı $\omega \in \Omega$ olan bir Ω kümesi oluşturmak için gruplandırılır (Mao, 2007). Burada Ω , elementer sonuçlar uzayı, bir başka ifadeyle, kompleks koşullar sabit tutulduğunda ortaya çıkabilecek tüm deney sonuçlarının oluşturduğu küme olmak üzere; \mathfrak{F} , Ω üzerinde kurulmuş bir σ -cebiri ve P ise \mathfrak{F} üzerinde tanımlanmış bir ölçüm fonksiyonu olsun. O halde $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsünün oluşturduğu uzaya *olasılık uzayı* denir (Şamilov, 2014). Bu tezde, olasılık teorisinde ifade edilen tüm kavramlar $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında ele alınmıştır.

Tanım 3.1. Sonlu sayıda karşılıklı ayrıklı dikdörtgenlerin herhangi bir toplamı şeklinde gösterilebilen kümeye *elementer küme* denir. Bir başka ifadeyle; P_n , kenarları koordinat eksenine paralel olan dikdörtgenler

$$P_n = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (3.1)$$

olmak üzere $A = \bigcup_n P_n$ şeklindeki kümeye *elementer küme* denir (Şamilov, 2007).

Tanım 3.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında Ω elementer sonuçlar uzayının belli koşulları sağlayan \mathfrak{F} alt kümeler sistemi ele alınsın. Eğer \mathfrak{F} sistemi

- i. $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{F}$, burada \emptyset simgesi boş kümeyi temsil etmektedir,
- ii. $A \in \mathfrak{F}$ iken $A^c \in \mathfrak{F}$, burada $A^c = \Omega - A$, bir başka ifadeyle A^c , Ω üzerinde A kümesinin tümleyenini temsil etmektedir,
- iii. $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathfrak{F}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

koşullarını sağlıyor ise, o zaman \mathfrak{F} ailesine Ω üzerinde kurulan, *olayların σ -cebiri* denir (Şamilov, 2014). Burada, (Ω, \mathfrak{F}) çiftine *ölçülebilir uzay* denir ve \mathfrak{F} 'nin elemanları, \mathfrak{F} – *ölçülebilir kümeler* olarak adlandırılır (Mao, 2007).

Eğer \mathcal{C} , Ω 'nın alt kümelerinin bir ailesi ise, o zaman Ω üzerinde \mathcal{C} 'yi içeren en küçük bir σ – cebiri, $\sigma(\mathcal{C})$ vardır. Bu $\sigma(\mathcal{C})$, \mathcal{C} tarafından üretilen σ – cebiri olarak adlandırılır (Mao, 2007).

Tanım 3.3. (Borel Cebiri). \mathbb{R} reel sayılar kümesi olmak üzere, eğer $\Omega = \mathbb{R}^d$ ve \mathcal{C} , \mathbb{R}^d 'deki tüm açık kümelerin ailesi ise, o zaman $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{C})$ σ – cebiri, *Borel σ – cebiri* olarak, \mathcal{B} 'nin elemanları ise *Borel kümeleri* olarak adlandırılır (Mao, 2007).

O halde, $[0,1]$ aralığına ait olan $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ aralıkları üzerinde kurulmuş σ –cebire \mathcal{B}^1 *Borel σ – cebiri* denir.

$$\Pi^2 = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\} \quad (3.2)$$

elementer kümesi üzerinde kurulmuş σ – cebire *iki boyutlu \mathcal{B}^2 Borel σ – cebiri*, benzer şekilde.

$$\Pi^n = \{x \in \mathbb{R}^d: 0 \leq x \leq 1\} \quad (3.3)$$

elementer kümesi üzerinde kurulmuş σ – cebire ise *d boyutlu \mathcal{B}^d Borel σ – cebiri* denir (Şamilov, 2014)

Tanım 3.4. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ele alınsın. $(-\infty, c) \in \mathcal{B}^1 \subset \mathbb{R}$ iken $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$X^{-1}\{(-\infty, c)\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < c\} \in \mathfrak{F} \quad (3.4)$$

oluyorsa X fonksiyonuna *\mathfrak{F} – ölçülebilir fonksiyon* denir; burada \mathcal{B}^1 , Borel σ – cebiridir (Şamilov, 2014).

Tanım 3.5. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ele alınsın. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyona $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış *rassal değişken* denir.

Rassal değişken reel değerli (*\mathfrak{F} – ölçülebilir*), tanım bölgesi elementer sonuçlar uzayı olan bir fonksiyondur, rassallık Ω 'dan gelmektedir (Şamilov, 2014).

Tanım 3.6. $X: \Omega \rightarrow R^d$ herhangi bir fonksiyon olsun. X tarafından üretilen σ – cebir $\sigma(X)$, tüm $\{\omega: X(\omega) \in U\}$, $U \subset R^d$ açık kümelerini içeren Ω üzerindeki en küçük σ – cebirdir. Bir başka ifadeyle,

$$\sigma(X) = \sigma(\{\omega: X(\omega) \in U\}: U \subset R^d \text{ açık küme}) \quad (3.5)$$

O zaman X , $\sigma(X)$ – ölçülebilir olacaktır ve $\sigma(X)$ bu özelliğe sahip en küçük σ – cebirdir. X , \mathfrak{F} – ölçülebilir ise, o zaman $\sigma(X) \subset \mathfrak{F}$ 'dir, bir başka ifadeyle X , \mathfrak{F} 'nin bir alt- σ – cebirini üretir (Mao, 2007).

Olasılık Aksiyomları. $A, B \in \mathfrak{F}$ olmak üzere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan P olasılık ölçümü

- i. $P(A) \geq 0$ 'dır,
- ii. $P(\Omega) = 1$ 'dir,
- iii. $A \cap B = \emptyset$ iken $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 'dir,
- iv. $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \dots$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ durumunda $\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = 0$ 'dir

şeklinde ifade edilen Kolmogorov'un olasılık aksiyomlarını sağlar (Şamilov, 2014).

Tanım 3.7. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ele alınsın ve $A, B \in \mathfrak{F}$ olsun. B olayını oluşturan elementer sonuçlar sayısı m , A ve B olaylarını oluşturan ortak elementer sonuçlar sayısı m_{AB} olsun. O halde, B koşulu altında A olayının gerçekleşmesi olayının olasılık ölçümü

$$P(A|B) = \frac{m_{AB}}{m} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Ω eşit olasılıklı elementer sonuçlar uzayının elemanları sayısının n olduğu varsayıldığında $P(AB) = m_{AB}/n$ ve $P(B) = m/n$ olduğu dikkate alınırsa Eşitlik (3.6)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir (Şamilov, 2014).

Tanım 3.8. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlanmış X rassal değişkeni ele alınsın. $x \in (-\infty, +\infty)$ olmak üzere

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \quad (3.8)$$

fonksiyonuna X rassal değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir (Şamilov, 2014).

Dağılım fonksiyonun özellikleri aşağıdaki gibidir.

- i. $F(x)$, $0 \leq F(x) \leq 1$ eşitsizliğini sağlar.
- ii. $x_1 < x_2$ ise $F(x_1) \leq F(x_2)$ eşitsizliği sağlanır. Bir başka ifadeyle, $F(x)$ azalmayan fonksiyondur.
- iii. $F(x)$, x noktasında soldan süreklidir.
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ eşitlikleri sağlanır (Şamilov, 2014).

Tanım 3.9. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlanmış X rassal değişkeni ele alınsın.

- i. Ω elementer sonuçlar uzayı, sonlu veya sayılabilir sonsuz elemanlardan oluştuğunda X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu parçalı, sabit, azalmayan bir fonksiyon ifade eder. Bu tür rassal değişkenlere *kesikli rassal değişken* denir (Şamilov, 2014).
- ii. Ω elementer sonuçlar uzayı, sayılamayan sonsuz olaylardan oluşmuş ise ve X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ise X rassal değişkenine *mutlak sürekli rassal değişken* denir (Şamilov, 2014).
- iii. Ω elementer sonuçlar uzayı, sayılamayan sonsuz olaylardan oluşmuş ise ve X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$, her yerde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise X rassal değişkenine *sürekli rassal değişken* denir.
- iv. $F'(x) = f(x)$ koşulunu sağlayan sürekli $f(x)$ fonksiyonuna da $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip rassal değişkenin *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. O halde;

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanır (Şamilov, 2014).

- v. X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(X)$ sürekli ise ancak mutlak sürekli değil ise bu tür rassal değişkenlere *singular (tekil) rassal değişken* denir (Şamilov, 2014).

Tanım 3.10. $F(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığında keyfi şekilde karşılıklı ayrık $[a_i, b_i]$ alt aralıkları ele alınsın. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $[a_i, b_i]$ alt aralıkları için $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulu sağlandığında $\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$ koşulu sağlanır. Bu durumda, $F(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında *mutlak süreklidir* denir (Şamilov, 2014).

3.2 Beklenti

Tanım 3.11. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı verilsin. $\omega \in \Omega$ için $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$ olmak üzere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı kesikli bir X rassal değişkeni ele alınsın. $p(x), X$ 'in olasılık kütle fonksiyonu olsun, bir başka ifadeyle; $p(x) = P\{X = x\}$ olsun. O halde E beklenti operatörü olmak üzere X rassal değişkeninin beklentisi

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i X(\omega_i) P\{\omega_i\} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır. Bu toplam her zaman yakınsaktır (Allen, 2007).

Lemma 3.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı verilsin. $\omega \in \Omega$ için $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$ olmak üzere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı kesikli bir X rassal değişkeni ele alınsın. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, X kesikli rassal değişkeninin bir fonksiyonu olsun. O halde $Y = g(X)$ fonksiyonu da kesikli bir rassal değişkendir ve beklentisi aşağıdaki gibidir (Allen, 2007).

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p(x_i) \quad (3.11)$$

Tanım 3.12. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı kesikli X rassal değişkeni ele alınsın.

i. X kesikli rassal değişkeninin k . Momenti

$$E[X^k] = \sum_i x_i^k p(x_i) \quad (3.12)$$

ii. X kesikli rassal değişkeninin k . merkezi momenti

$$E[(X - \mu)^k] = \sum_i (x_i - \mu)^k p(x_i) \quad (3.13)$$

iii. X kesikli rassal değişkeninin varyansı

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] \quad (3.14)$$

şeklinde olup ikinci merkezi moment olarak tanımlanır (Allen, 2007).

Beklenti ile ilgili olarak, $E[ag(x) + bh(x)] = aE[g(x)] + bE[h(x)]$ 'dir, burada a ve b keyfi sabitlerdir. O halde, $\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ olarak elde edilir.

Sürekli rassal değişkenler için beklentiler, kesikli rassal değişkenlerde olduğu gibi paralel bir yol ile tanımlanır.

Tanım 3.13. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı verilsin. $X(\omega) = x$ olmak üzere $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı sürekli bir X rassal değişkeni ele alınsın. $f(x)$, X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun, O halde X rassal değişkeninin beklentisi

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır (Allen, 2007).

Lemma 3.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı verilsin. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı X sürekli rassal değişkeninin bir fonksiyonu olsun $Y = g(X)$ fonksiyonunun beklentisi aşağıdaki gibidir (Allen, 2007).

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \quad (3.16)$$

Tanım 3.14. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı sürekli X rassal değişkeni ele alınsın.

i. X sürekli rassal değişkeninin k . Momenti

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \quad (3.17)$$

ii. X sürekli rassal değişkeninin k . merkezi momenti

$$E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x)dx \quad (3.18)$$

iii. $E(X) = \mu$ olmak üzere, X sürekli rassal değişkeninin varyansı

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] \quad (3.19)$$

şeklinde olup ikinci merkezi moment olarak tanımlanır (Allen, 2007).

Tanım 3.15. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı gerçekteğerli X ve Y rassal değişkenleri ele alınsın.

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (3.20)$$

ifadesi X ve Y 'nin kovaryansı olarak adlandırılır (Mao, 2007).

3.3 Hilbert Uzayı

Rassal değişkenlerin Hilbert uzayının inşasına geçmeden önce ilk olarak fonksiyonel analizde tanımlanan Hilbert uzayı kavramına değinilmiştir. Bunun için yararlanılan temel kavramlar aşağıdaki tanımlar ile sırasıyla ele alınmıştır. Burada, normlu bir uzayın, aynı zamanda bir vektör uzayı olmasına karşın bir metrik uzayının, üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmış bir küme olduğunu, bir başka ifadeyle metrik kavramının, uzaklık kavramı olduğunu vurgulamak gerekir.

Tanım 3.16. Boş olmayan bir \mathcal{V} kümesi verilsin. $(K, +, \cdot)$ kümesi de reel ya da kompleks sayılar cismi olsun. (\mathcal{V}, \oplus) değişmeli grup olmak üzere $\otimes: K \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ fonksiyonu, $\forall a, b \in K$ ve $\forall x, y \in \mathcal{V}$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa, \mathcal{V} kümesine *vektör uzayı* (*lineer uzay* ya da *lineer vektör uzayı*) denir (Yüksel, 2006).

- v1. $a \otimes x \in \mathcal{V}$
- v2. $a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$
- v3. $(a + b) \otimes x = (a \otimes x) \oplus (b \otimes x)$
- v4. $(a \cdot b) \otimes x = a \otimes (b \otimes x)$
- v5. $e \in K$ birim eleman ise, $e \otimes x = x$.

Tanım 3.17. Boş olmayan bir \mathcal{N} kümesi, reel ya da kompleks sayıların K cismi üzerinde, bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna \mathcal{N} vektör uzayı üzerinde tanımlanmış bir *norm* ve (\mathcal{N}, ρ) ikilisine de *normlu uzay* (*normlu lineer vektör uzayı*) denir (Yüksel, 2006).

- n1. $\forall x \in \mathcal{N}$ için, $\rho(x) \geq 0$
- n2. $\forall x \in \mathcal{N}$ için, $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- n3. $\forall a \in K$ ve $\forall x \in \mathcal{N}$ için, $\rho(ax) = |a|\rho(x)$ (*pozitif homojenlik*)
- n4. $\forall x, y \in \mathcal{N}$ için, $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ (*alt toplamsallık*)

Eğer yalnızca n1, n3 ve n4 özellikleri sağlanıyorsa, $\rho: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, \mathcal{N} vektör uzayı üzerinde tanımlanmış bir *yarı norm* denir (Yüksel, 2006).

x vektörünün normu $\rho(x) = \|x\|$ şeklinde de gösterilir,

Tanım 3.18. \mathbb{R}^n ya da \mathbb{C}^n Öklid uzayları verilsin. Bu uzaylara ait bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün Öklid uzunluğu,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma *Öklid normu* denir (Yüksel, 2006).

Tanım 3.19. Boş olmayan bir \mathcal{M} kümesi verilsin. $x, y \in \mathcal{M}$ olduğunda, x ve y noktaları arasındaki mesafeyi ifade eden bir $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. $\forall x, y, z \in \mathcal{M}$ için söz konusu fonksiyon aşağıdaki

m1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*Pozitiflik özelliği*)

m2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*Simetriklik özelliği*)

m3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyor ve sonlu değerler alıyorsa; başka bir deyişle, \mathcal{M} metrik kümesinde dizi limiti kavramı tanımlanmış ise, d fonksiyonuna \mathcal{M} kümesi üzerinde bir *metrik* ve (\mathcal{M}, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir (Yüksel, 2006; Şamilov, 2012).

x, y, z, \dots elemanlarından oluşan \mathcal{M} kümesinin elemanları noktalar olarak adlandırılır. Söz konusu noktalar genel anlamda sayılar, fonksiyonlar, vektör fonksiyonlar, operatörler vs. olabilir (Şamilov, 2012).

Tanım 3.20. (\mathcal{M}, d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\} \in \mathcal{M}$ dizisi ve herhangi bir x elemanı verildiğinde, $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ için $d(x_n, x) \rightarrow 0$ oluyorsa, bir başka ifade ile $\forall \epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\exists N(\epsilon) > 0$ vardır ki $n > N$ için $d(x_n, x) < \epsilon$ koşulu sağlanıyorsa x 'e, $\{x_n\}$ dizisinin *limiti* denir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir (Şamilov, 2014).

Tanım 3.21 (Cauchy Dizisi). (\mathcal{M}, d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\} \in \mathcal{M}$ dizisi verilsin. Eğer $\forall \epsilon > 0$ sayısı için

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon \quad (3.22)$$

koşulunu sağlayan $\exists N(\epsilon) > 0$ sayısı varsa bu durumda $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* (*fundamental dizi*) denir (Nesin, 2012).

Teorem 3.1. Bir (\mathcal{M}, d) metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Nesin, 2012).

Tanım 3.22 (Tam Metrik Uzay). (\mathcal{M}, d) metrik uzayında her bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, diğer bir deyişle, $d(x_n, x) \rightarrow 0$, $x \in \mathcal{M}$ ise (\mathcal{M}, d) metrik uzayına *tam metrik uzayı* denir (Nesin, 2012).

Tanım 3.23. Boş olmayan bir \mathcal{J} vektör uzayı ele alınsın, Bir (x, y) iç çarpımı, $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ 'den \mathcal{J} 'nin bir k skaler cisimi içine yapılan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in \mathcal{J}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlayan \mathcal{J} vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir (Çakar, 2007).

- i1. $(x, x) \geq 0$, ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*Pozitiflik özelliği*)
- i2. $(x, y) = (y, x)$ (*Simetriklik özelliği*)
- i3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- i4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

\mathcal{J} üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, Eşitlik (3.23) ile verilen bir norm ve Eşitlik (3.24) ile verilen bir metrik tanımlar (Çakar, 2007).

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = (x, x)^{1/2} \quad (3.23)$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} \quad (3.24)$$

Tanım 3.24 (Hilbert Uzayı). Tam normlanmış lineer uzayda norm, iç çarpım ile tanımlanmış ise, bir başka ifadeyle tam bir iç çarpım uzayında $\|f\|$ normu, uzaydaki herhangi bir f için bir (f, f) iç çarpım yardımı ile $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ şeklinde tanımlanıyorsa bu uzaya *Hilbert uzayı* denir (Allen, 2007).

3.4 Rassal Değişkenlerin Hilbert Uzayı

Rassal değişkenlerin Hilbert uzayı ve stokastik süreçler, Bölüm 3 ve 4'te sunulan stokastik integral ve SDD'nin inşasını birleştirir ve basitleştirir (Allen, 2007). Bu sebeple, bu bölümde rassal değişkenlerin Hilbert uzayı ele alınmıştır.

$f, g \in H$ olmak üzere H , $(f, g) \in \mathbb{R}$ iç çarpımına ve $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ normuna sahip bir Hilbert uzayı olsun. Hilbert uzayları için iki önemli özellik, Eşitlik (3.25) ile verilen üçgen eşitsizliği ve Eşitlik (3.26) ile verilen Cauchy-Schwartz eşitsizliğidir:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (3.25)$$

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (3.26)$$

Her iki eşitsizlik de konu kapsamında yapılan ispat ve işlemlerde kullanılmaktadır.

Tanım 3.25. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı düşünölsün. $A \in \mathfrak{F}$ olmak üzere;

i. $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

şeklinde ele alınan rassal değişkene A için bir *indikatör fonksiyon* denir (Allen, 2007).

ii. İndikatör fonksiyonların sonlu lineer kombinasyonları *sade (basit) rassal değişkenler* olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle, eğer X sade bir rassal değişken ise o zaman X aşağıda ifade edilen Eşitlik (3.27) formuna sahiptir ve $E(X)$ kolayca aşağıdaki Eşitlik (3.28) yardımıyla elde edilir (Allen, 2007).

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(\omega) \quad (3.27)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n c_i P(A_i). \quad (3.28)$$

Sade rassal değişkenler yardımıyla rassal değişkenlerin Hilbert uzayı tanımlanmıştır. Bunun için S_{RV} , $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan sade rassal değişken-

lerin bir kümesi olsun. S_{RV} , rassal değişkenlerin bir vektör uzayıdır. $X, Y \in S_{RV}$ olduğu düşünülürken S_{RV} üzerinde tanımlanan (X, Y) iç çarpımı

$$(X, Y) = E(XY) = E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i I_{A_i}(\omega) d_j I_{B_j}(\omega) \right] \quad (3.29)$$

buradan

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j E \left(I_{A_i}(\omega) I_{B_j}(\omega) \right) \quad (3.30)$$

eşitliğini sağladığından

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j P(A_i \cap B_j) \quad (3.31)$$

şeklindedir, burada $I_{A_i}(\omega) I_{B_j}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \cap B_j, \quad i \neq j \\ 0, & \omega \notin A_i \cap B_j, \quad i \neq j \end{cases}$, $X(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(\omega)$ ve $Y(\omega) = \sum_{j=1}^n d_j I_{B_j}(\omega)$ olduğu dikkate alınır. S_{RV} üzerinde tanımlanan norm ise

$$\|X\|_{RV} = (X, X)^{1/2} = (E(XX))^{1/2} = (E|X|^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 P(A_i) \right)^{1/2}$$

kısaca,

$$\|X\|_{RV} = (E|X|^2)^{1/2} \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. Sade rassal değişkenlerin iç çarpım uzayları genelde tam değildir ancak, bir H_{RV} Hilbert uzayına tamamlanabilir. O halde S_{RV} 'nin H_{RV} 'de yoğun olduğu söylenir. Bunun için, S_{RV} uzayına pek çok rassal değişken eklenebilir. O halde, herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin H_{RV} 'de bir rassal değişkenler dizisi olması için $n, m > N$

olacak şekilde öyle bir N tamsayısı vardır ki $\|X_n - X\|_{RV} < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. O zaman H_{RV} uzayı tam iken $n \rightarrow \infty$ olduğunda $\|X_n - X\|_{RV} \rightarrow 0$ olacak şekilde H_{RV} 'nin bir X rassal değişkeni vardır. Ayrıca $S_{RV} \subset H_{RV}$, H_{RV} 'de yoğun iken herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $\|X - Y\|_{RV} < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir Y sade rassal değişkeni vardır (Allen, 2007).

Özetlemek gerekirse; özellikle H_{RV} üzerindeki iç çarpımın $(X, Y) = E(XY)$ eşitliğini, normun $\|X\|_{RV} = (E|X|^2)^{1/2}$ eşitliğini sağladığına, S_{RV} sade fonksiyonlar kümesinin H_{RV} 'de yoğun olduğuna ve H_{RV} 'nin E beklentisi vasıtasıyla olasılık dağılımına bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. O halde H_{RV} , Eşitlik (3.32) ile verilen norma sahip rassal değişkenlerin bir Hilbert uzayıdır (Allen, 2007).

3.5 Rassal Değişken Dizilerinin Yakınsaması

Rassal değişken dizilerinin yakınsaması, SDD teorisinde oldukça önemlidir. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ rassal değişkenler dizisi düşünülün. $n \rightarrow \infty$ iken söz konusu dizinin yaklaştığı bir X rassal değişkeninin var olması ilgi çekici bir durumdur. Dahası, $n \rightarrow \infty$ iken X_n 'nin X 'e yaklaşma şeklini açıkça karakterize etmek önemlidir (Allen, 2007). Bu tür yakınsaklığın tanımlanabileceği birkaç farklı yol vardır. Genel olarak ifade edilirse, bahsedilen yakınsaklık iki farklı sınıfa ayrılır. İlki, X_n 'nin gerçekleşmelerinin bir şekilde X 'inkilere yakın olması gereken daha güçlü bir sınıf, diğeri ise X_n ve X 'in yalnızca olasılık dağılımlarının yakın olması gereken daha zayıf bir sınıftır (Kloeden vd., 2000). Bu sebeple, bu bölümde rassal değişkenleri anlamak için yararlı olan ve yukarıda bahsi geçen farklı yakınsama kriterleri ele alınmıştır.

Tanım 3.26. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ rassal değişkenler dizisi ve X rassal değişkeni düşünülün. F_X , X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu ve E beklenti operatörü olsun.

$$\text{i.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0 \quad (3.33)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e güçlü yakınsıyor denir.

ii. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $E(X_n^2) < \infty$ ve $E(X^2) < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0 \quad (3.34)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e *ortalama kare anlamında yakınsıyor* denir.

iii.
$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\}\right) = 1 \quad (3.35)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e *1 (bir) olasılık ile yakınsıyor* veya *hemen hemen kesin yakınsıyor* denir ve $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ olarak gösterilir.

iv. $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0 \quad (3.36)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e *olasılığa göre yakınsıyor* denir ve $X_n \xrightarrow{p} X$ olarak gösterilir. Olasılıkta yakınsama, *stokastik yakınsama* olarak da adlandırılır.

v. Tüm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün (smooth) fonksiyonları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dF_{X_n}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dF_X(y) \quad (3.37)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e *zayıf yakınsıyor* denir.

vi. F_X dağılımının tüm x süreklilik noktalarında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad (3.38)$$

oluyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e *dağılıma göre yakınsıyor* denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ olarak gösterilir. Dağılımda yakınsama, *zayıf yakınsama* anlamına da gelmektedir (Kloeden vd., 2000; Allen, 2007; Şamilov, 2007).

Bu tanımlardan hareketle, yakınsama türlerinin birbirleri ile olan ilişkilerine değinilmiş ve ilişkilerin kurulmasında kullanılan bazı eşitsizlikler verilmiştir.

SDD teorisinde en önemli yakınsama türü ortalama kare yakınsamasıdır (Allen, 2007). Bu yakınsama; $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_{RV}$ verildiğinde $n \rightarrow \infty$ iken $\|X_n - X\|_{RV} \rightarrow 0$ ifadesine eşit olur. Dahası, H_{RV} bir Hilbert uzayı olduğundan $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi H_{RV} 'de bir Cauchy dizisi ise $X \in H_{RV}$ 'nin bir rassal değişken olması garantilenmiş olur. Bir başka ifadeyle; $\forall \epsilon > 0$ için $\exists N(\epsilon)$ pozitif tamsayısı vardır ki $n, m > N$ iken $\|X_n - X_m\|_{RV} < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Ortalama kare yakınsamasının bir diğer ilginç noktası ise güçlü yakınsama anlamına gelmesidir. Bu sonuç, $X \in H_{RV}$ için Eşitlik (3.40) ile verilen Lyapunov eşitsizliğinden elde edilebilir (Allen, 2007). Burada $p = 1$ ve $r = 2$ olarak alınırsa eşitsizlik, $E(|X_n - X|) \leq (E(|X_n - X|^2))^{1/2}$ eşitsizliğine indirgenir. Burada $n \rightarrow \infty$ iken her iki tarafa limit alma işlemi uygulanır ve ortalama kare yakınsaması tanımı kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (E(|X_n - X|^2))^{1/2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) \right)^{1/2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) \leq 0 \quad (3.39)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da, güçlü yakınsamanın tanımını verir. Dolayısıyla, ortalama kare yakınsaması aynı zamanda güçlü yakınsama koşulunu sağlar.

Lyapunov Eşitsizliği. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir X rassal değişkeni düşünölsün. $0 < p < r < \infty$ için

$$(E(|X|^p))^{1/p} \leq (E(|X|^r))^{1/r} \quad (3.40)$$

şeklindeki eşitsizliğe *Lyapunov Eşitsizliği* denir (Allen, 2007).

Ortalama kare yakınsaması, olasılıkta yakınsama anlamına da gelir. Bu sonuç, Eşitlik (3.44) ile belirtilen Chebyshev–Markov eşitsizliğinden elde edilir. Bunun için, $p = 2$ olarak alınırsa söz konusu eşitsizlik, $P(\{\omega \in \Omega: |X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E(|X|^2)$

eşitsizliğine indirgenir. Burada $|X(\omega)|$ yerine $|X_n(\omega) - X(\omega)|$ yazılır ve $n \rightarrow \infty$ iken her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon^2} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^2) \quad (3.41)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^2) \quad (3.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade ortalama kare yakınsamasını ifade eder ve $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 0 = 0$ ortaya çıkar. P olasılık ölçümü olduğundan $P > 0$ şartını sağlar. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) = 0 \quad (3.43)$$

eşitsizliği elde edilir ve bu da ortalama kare yakınsamasının olasılıkta yakınsamayı ifade ettiğini gösterir.

Chebyshev – Markov Eşitsizliği. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir X rassal değişkeni düşünülün. $\exists p, \epsilon > 0$ için

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E(|X|^p) \quad (3.44)$$

şeklindeki eşitsizliğe *Chebyshev – Markov eşitsizliği* denir (Allen, 2007; Mao, 2007)

Her ne kadar ortalama kare yakınsaması, olasılıkta yakınsamanın yanı sıra güçlü yakınsamayı ifade etse de olasılıkta yakınsama veya güçlü yakınsama, mutlaka ortalama kare yakınsamasını gerektirmez (Kloeden vd., 2000; Allen, 2007; Mao, 2007). Ayrıca hemen hemen kesin yakınsama, olasılıkta yakınsamaya işaret eder. Bununla birlikte, ortalama kare yakınsaması, hemen hemen kesin yakınsama anlamına gelmez ve hemen hemen kesin yakınsama, ortalama kare yakınsamayı ifade etmez (Kloeden vd., 2000; Allen, 2007).

Hemen hemen kesin yakınsama hakkında aşağıdaki Lemma 3.3 verilebilir.

Lemma 3.3. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ rassal değişkenler dizisi ve X rassal değişkeni düşünölsün. $\exists \epsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_n - X| \geq \epsilon\}) < \infty \quad (3.45)$$

koşulu sağlanıyorsa $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi X 'e hemen hemen kesin yakınsar.

Tanım (3.25)'ın iv. maddesinde, olasılıkta yakınsamanın, stokastik yakınsama olarak da adlandırıldığından bahsedilmiştir. Bu durum aşağıdaki Eşitlik (3.46) şeklinde ifade edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0 \quad (3.46)$$

burada belirtilen E beklentisi H_{RV} Hilbert uzayında bir metrik tanımladığı için rassal değişkenler arasında bazen daha kullanışlı olabilir (Kloeden vd., 2000).

Daha zayıf yakınsaklıklar sınıfı için gerçek rassal değişkenlerin veya altta yatan olasılık uzay(lar)ının bilinmesi gerekmez, bunun yerine sadece dağılım fonksiyonlarını bilmek yeterlidir. Bu sebeple bazen, diğer yakınsama türlerine göre zayıf yakınsamanın dikkate alınması daha kullanışlı olur. Ayrıca olasılıkta yakınsama, dağılımda yakınsama anlamına gelir, ancak tersi bir durum geçerli değildir. Bir dizi ancak ve ancak dağılımda yakınsarsa zayıf bir şekilde yakınsar. Dağılımda yakınsama ve zayıf yakınsama biçimlerinden herhangi biri, hemen hemen kesin yakınsama veya ortalama kare yakınsaması ile ifade edilebilir (Kloeden vd., 2000; Allen, 2007).

Rassal değişken dizilerinin yakınsamasını içeren iki önemli sonuç, olasılık ve istatistik teorisinin temel teoremlerinden olan *büyük sayılar kanunu* ve *merkezi limit teoremi*dir. Bunlardan ilki beklenti içerdiğinden güçlü yakınsaklığı, ikincisi ise dağılım fonksiyonları ile çalışıldığından zayıf yakınsaklığı ifade eder.

Büyük Sayılar Kanunu. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılımlı X_1, X_2, \dots rassal değişkenleri ele alınsın. $\mu = E(X_n)$ ve $\sigma^2 = Var(X_n)$ olsun,

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ olarak tanımlansın. O halde S_n/n oranı, hemen hemen kesin ve ortalama kare anlamında μ 'ye yakınsar ve $S_n/n \rightarrow \mu$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right|^2 \right) = 0 \quad (3.47)$$

eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu \quad (3.48)$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$S_n/n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad (3.49)$$

yakınsaması sağlanır (Allen, 2007).

Merkezi Limit Teoremi. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılımlı X_1, X_2, \dots rassal değişkenleri ele alınsın. $\mu = E(X_n)$ ve $\sigma^2 = Var(X_n)$ olsun, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ olarak tanımlansın. $E(Z_n) = 0$ ve $Var(Z_n) = 1$ olmak üzere normalleştirilmiş rassal değişken

$$Z_n = \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \quad (3.50)$$

dağılımda standartlaştırılmış bir Z Gauss rassal değişkenine (yani $Z \sim N(0,1)$ 'e) yakınsar. Bir başka ifadeyle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x) \quad (3.51)$$

eşitliği sağlanır, burada F_{Z_n}, Z_n 'nin dağılım fonksiyonu, F_Z ise standart normal dağılım fonksiyonudur.

Tanım 3.27. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış X rassal değişkeni ele alınsın. O halde X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (3.52)$$

eşitliğini sağlıyorsa X rassal değişkenine, beklentisi μ ve varyansı σ^2 olan *normal dağılıma sahip rassal değişken* veya *Gauss rassal değişkeni* denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir (Şamilov, 2014).

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken $Z = (X - \mu)/\sigma$ rassal değişkenine beklentisi 0 ve varyansı 1 olan *standart normal dağılıma sahip rassal değişken* denir ve $Z \sim N(0,1)$ ile gösterilir. Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in (-\infty, +\infty) \quad (3.53)$$

şeklindedir (Akdi, 2014).

3.6 Monte Carlo Yöntemi

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir X rassal değişkeni ele alınsın. $g(\cdot)$ bilinen herhangi bir fonksiyon olmak üzere $E[g(X)]$ 'in değeri tahmin edilmek istensin. Eğer X 'in dağılımından n tane rassal x_1, x_2, \dots, x_n sayısı üretilebilirse, o zaman $g(x_i)$ 'nin örneklem ortalaması ile $E[g(X)]$ 'e yaklaşılabılır:

$$E[g(X)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \bar{g}_n \quad (3.54)$$

Eşitlik (3.54), sadece sembolik değil, aynı zamanda $E|g(X)| < \infty$ olduğunda büyük sayılar kanunu anlamında da geçerlidir. Ayrıca, merkezi limit teoremi yardımıyla

$$\bar{g}_n \xrightarrow{d} N\left(E[g(X)], \frac{1}{n} \text{Var}[g(X)]\right)$$

yakınsaması elde edilir, burada $N(\mu, \sigma^2)$ beklentisi μ , varyansı σ^2 olan bir Gauss rassal değişkeninin dağılımını gösterir. Yakınsama sonrasında, simülasyonlar ile tahmin edilen \bar{g}_n değeri, $1/\sqrt{n}$ düzeyindeki gerçek $E[g(X)]$ beklentisinden bir sapmaya uğrayacaktır. Bunu görebilmek için, standart normal dağılıma sahip bir Z rassal değişkeni düşünölsün, başka bir ifadeyle $Z \sim N(0,1)$ olsun. $P(|Z| < 1.96) \approx 0.95$ olarak verildiğinde \bar{g}_n tahmini için

$$\left(E[g(X)] - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, E[g(X)] + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

şeklinde bir güven aralığı oluşturulabilir, burada $\sigma = \sqrt{\text{Var}g(X)}$ 'dir. Bu durum, $E[g(X)]$ değerinin Monte Carlo tahmini anlamına gelir ve zamanın %95'inin üzerindeki gerçek değerlerin, aralığa dâhil olduğu şeklinde yorumlanır. Güven aralığı $\text{Var}[g(X)]$ 'e bağlıdır ve genellikle $\text{Var}[g(X)]$ değerinin de örneklem üzerinden tahmin edilmesi gerekir. Aslında, Monte Carlo tekrarlarının örnek varyansı

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - \bar{g}_n)^2 \quad (3.55)$$

olarak tahmin edilebilir ve $E[g(X)]$ için %95 güven düzeyinde Monte Carlo güven aralığı aşağıdaki gibi kullanılabilir:

$$\left(\bar{g}_n - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{g}_n + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

buradaki $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$ oranı *standart hata* olarak adlandırılır. Standart hatanın kendisi rassal bir niceliktir, başka bir deyişle değişkenliğe tabidir; dolayısıyla bu değer “niteliksel” bir doğruluk ölçüsü olarak yorumlanmalıdır.

Burada \sqrt{n} yakınsama hızının özellikle hızlı olmadığı, ancak en azından $g(\cdot)$ 'nin düzgünlüğünden bağımsız olduğuna dikkat etmek gerekir (Iacus, 2008).

Örnek 3.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış bir $X \sim N(0, 1)$ rassal değişkeni ele alınsın ve $Y = g(X) = e^{\beta x}$ olsun (Iacus, 2008). $\beta = 3$ olmak üzere Y rassal değişkeninin beklentisi $E[Y]$ ve varyansı $Var[Y]$ 'nin analitik olarak formülize edilen gerçek değerleri hesaplınsın. Buradan

$$E[Y] = e^{\beta^2/2} = 90.01713 \quad (3.56)$$

ve

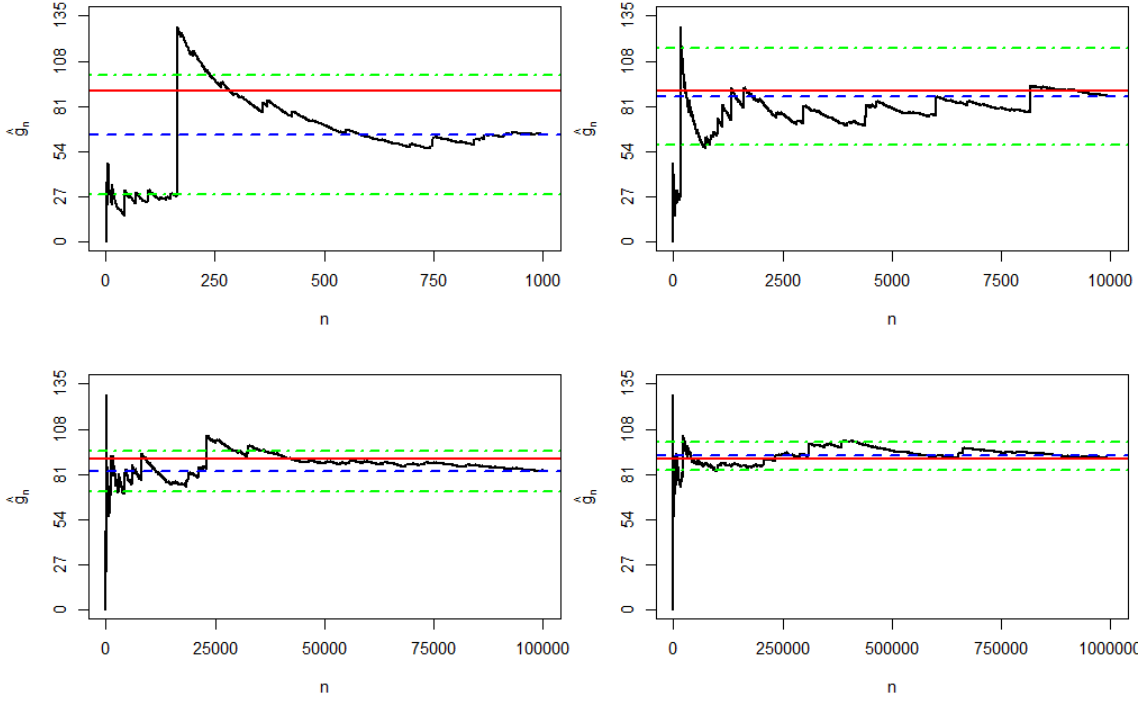
$$Var[Y] = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2} = 65651866 \quad (3.57)$$

olarak elde edilir. M , Monte Carlo metodunun tekrar sayısını göstermek üzere, sırasıyla $10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ tekrar ile, $E[Y]$ değeri Monte Carlo yöntemiyle tahmin edilmiş ve tahmini standart hata $\hat{\sigma}$ kullanılarak $E[Y]$ için %95 güven düzeyinde Monte Carlo güven aralıkları oluşturulmuştur. Sonuçlar RStudio programı yardımıyla elde edilmiş ve Çizelge 3.1'de özetlenmiş, Şekil 3.1 ile gösterilmiştir. Burada kırmızı çizgi hedef değer $E[Y]$ 'yi, noktalı yeşil çizgiler Monte Carlo %95 güven aralığının üst ve alt sınırlarını ve kesikli mavi çizgi ise tahmini \hat{g}_n 'yi göstermektedir. Monte Carlo yöntemi kullanılarak M tekrar sayısı arttıkça %95 güven aralıklarının daraldığına ve $E[Y]$ değerinin daha yakın tahmin edildiğine dikkat edilmelidir.

Çizelge 3.1 M adet Monte Carlo tekrar sayısı için elde edilen tahmini beklenti ve güven aralıkları

Tekrar sayısı	$E[Y]$ 'nin tahmini \hat{g}_n	%95 güven aralığı
$M = 10^3$	63.9997	(28.15337, 99.84603)
$M = 10^4$	86.83346	(58.06145, 115.6055)
$M = 10^5$	83.05988	(70.99106, 95.1287)
$M = 10^6$	92.10061	(83.73191, 100.4693)

Literatürde her zaman böyle örnekleri bulmak kolay değildir. Bu duruma Iacus (2008)'de değinilmiş ve aynı Y fonksiyonu için $\beta = 5$ alındığında $Var(Y)$ değerinin çok çok büyük olduğuna, bu sebeple %95 güven aralıklarının çok geniş bulunduğuna dikkat çekilmiştir. Böyle bir sorunun giderilmesi için literatürde varyans indirgeme yöntemi gibi çeşitli yöntemler mevcuttur (Lapeyre vd., 2003; Iacus, 2008).



Şekil 3.1 $E[Y]$ hedef gerçek değeri ile \hat{g}_n Monte Carlo tahmininin sırasıyla 10^3 , 10^4 , 10^5 ve 10^6 tekrar sayıları için ayrı ayrı yakınsaması

3.7 Stokastik Süreçler

Olayların bir zaman aralığında gözlenmesine *süreç* adı verilir. *Stokastik süreçler* ise rassal sonuçlar doğuran bir olaylar serisi olup olayların zamana göre değerlendirildiği süreçlerdir (Özel Kadılar, 2020).

Stokastik süreçler teorisinin tarihi 20. yüzyıla kadar uzanmakta olup hâlâ üzerinde çalışılarak gelişmesine katkı sunulmaktadır. İlk kez Bernolli tarafından kullanılan kavram, Bienayme, Quetelet, Bortkiewicz, Bachelier, Gibbs, Guttorp, Einstein, Rutherford ve Gieger, Bateman, Wiener, Khinchin, Kolmogorov, Dobb ve Feller gibi pek çok ünlü bilim insanları tarafından ele alınmıştır. Biyolojik ve fiziksel problemlerin incelenmesinden ortaya çıkan ve belirsizlik içeren stokastik süreç kavramı artık biyoloji, fizik, kimya, finans, ekonomi ve mühendislik dâhil olmak üzere çeşitli bilim alanlarından birçok farklı türde fenomeni modellemek için kullanılmaktadır (Allen, 2010).

Tanım 3.28. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ele alınsın. \mathfrak{F} 'nin artan alt σ – cebirlerinin bir $\{F_t\}_{t \geq 0}$ ailesi $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ olmak üzere tüm $0 \leq t < s < \infty$ için $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ koşulunu sağlanıyorsa o zaman $\{F_t\}_{t \geq 0}$ ailesine *filtrasyon* denir (Mao, 2007).

Tanım 3.29. Bir *stokastik süreç*, $\{F_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonu ile verilen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X(t, \omega) : t \in \tau, \omega \in \Omega\}$ şeklinde tanımlanan rassal değişkenlerin bir kümesidir, burada τ bir parametre kümesidir ve genelde “*zaman*”ı temsil eder (Allen, 2010).

$X : \tau \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olan iki değişkenli bir fonksiyondur ve

- i. sabitlenen $\forall t \in \tau$ için $X(t, \cdot)$ bir rassal değişkendir,
- ii. sabitlenen $\forall \omega \in \Omega$ için $X(\cdot, \omega) : \tau \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu stokastik sürecin bir *gerçekleşmesi (realization)*, bir *örneklem yolu (sample path)* veya *yörüngesi (trajectory)* olarak adlandırılır (Kloeden vd., 2000). Bu tezin geri kalan kısmında bu durum için *yörünge* ifadesi kullanılmıştır.

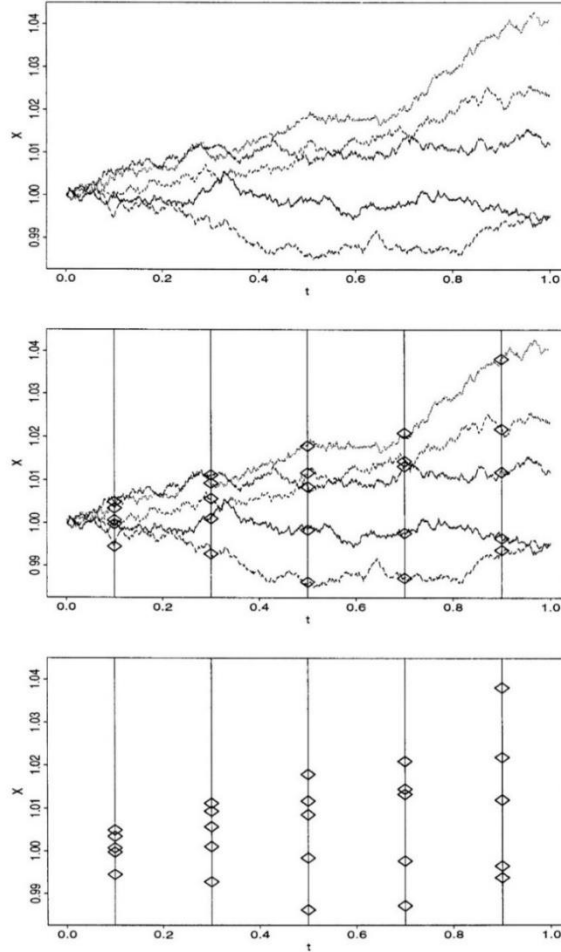
$X(t, \omega)$ stokastik süreci için yukarıda bahsedilen iki durum Şekil 3.2’de özetlenmiştir (Mikosch, 1998). Burada, ilk grafik değişen her t anı için $X(\cdot, \omega)$ sürecinin farklı yörüngelerini, ikinci grafik ise sabitlenen her t anı için $X(t, \cdot)$ rassal değişkenlerini göstermektedir. Şekildeki üçüncü grafik de söz konusu rassal değişkenleri özetlemektedir.

Genelde, gösterimde ω yer almaz ama bu durum onun önemli olmadığı anlamına gelmez. Çünkü her $\omega \in \Omega$, farklı bir yörünge ile sonuçlanır. Stokastik süreçler ele alınırken bazen bu ω değişkeni ihmal edildiğinden bir stokastik süreç $X(t)$ veya X_t olarak gösterilir. Bu tanıma ek olarak, bir stokastik süreç, $\{(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) : t \in \tau\}$ şeklinde bir rassal vektörün koleksiyonu da olabilir (Allen, 2010).

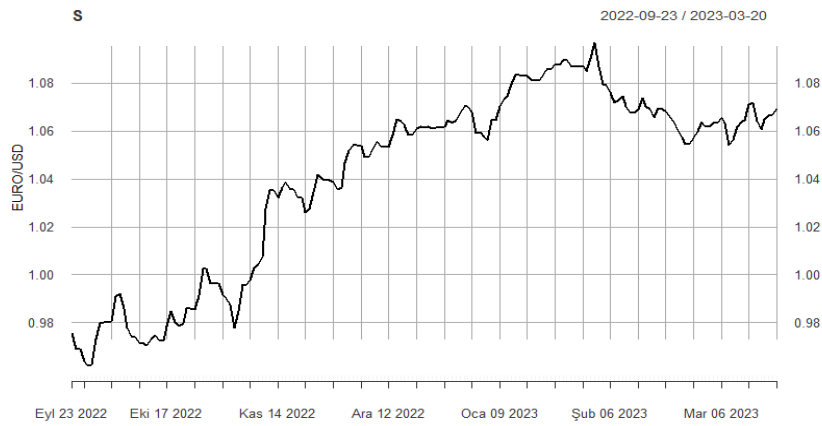
Bir stokastik süreç örneği olarak Şekil 3.3’te 23.09.2022 ile 20.03.2023 tarihleri arasındaki ABD Dolarına karşın Euro’nun döviz kuru dalgalanmasının grafiği verilmiştir.

Rassal değişkenlerin ve τ parametre kümesinin kesikli mi yoksa sürekli mi olduğuna bağlı olarak, stokastik süreçleri formüle etmek ve analiz etmek için farklı yöntemler ve teknikler vardır. Kesikli ve sürekli rassal değişkenler ve kesikli ve sürekli parametre kümesi arasındaki bu ayrımlar, stokastik modelin türünü ve yöntemin özelliklerini incelemek için kullanılacak teknikleri belirler (Allen, 2010). Bu bağlamda stokastik süreçler, parametre kümesine göre ele alındığında kesikli parametrelili stokastik

süreçler ve sürekli parametrelili stokastik süreçler olmak üzere ikiye ayrılırlar ancak rassal değişkenlerin durumlarına göre farklı isimlerle anılırlar.



Şekil 3.2 $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin durumları



Şekil 3.3 Euro ile ABD Doları arasındaki döviz kuru dalgalanması

3.7.1 Kesikli Parametrelili Stokastik Süreçler

$\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ kesikli zamanların bir kümesi olsun. Stokastik sürecin tanımına göre; $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots, \{F_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonu ile verilen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış rassal değişkenler dizisi olur ve bu stokastik süreç için her rassal deneme arasında geçen zaman kesiklidir. Söz konusu süreçte, X rassal değişkeni kesikli değerli veya sürekli değerli olabilir. O halde,

- i. *kesikli parametrelili ve kesikli durum uzayına sahip süreç* olarak, Markov zinciri örnek verilebilir. Bunun için beş odalı bir labirente bir deney hayvanının bırakıldığı, odalar arasındaki kapıların her on dakikada bir açıldığı ve deney hayvanının odalardan birine girdiğinde diğer odaların kapısının kapandığı bir deney düşünülebilir. Burada durum uzayı $\{1.\text{oda}, 2.\text{oda}, 3.\text{oda}, 4.\text{oda}, 5.\text{oda}\}$ ve parametre kümesi $\{0,1,2, \dots\}$ şeklinde olup her ikisi de kesiklidir,
- ii. *kesikli parametrelili ve sürekli durum uzayına sahip süreç* olarak, zaman serisi örnek verilebilir. Bunun için bir hisse senedinin kapanış fiyatları düşünülün, burada durum uzayı $\{x : 0 < x < \infty\}$ ve parametre uzayı ise $\{0,1,2, \dots\}$ şeklinde olup parametre kümesi kesikli, durum uzayı ise sürekli (Özel Kadılar, 2020).

Tanım 3.30. $X(t_n) = X_n$ rassal değişkeninin şimdiki değeri ilerideki X_{n+1} değerini belirliorsa o zaman $\{X_n\}$ dizisine *Markov süreci* denir. Kesikli değerli bir Markov sürecine ise *Markov zinciri* denir (Allen, 2007).

Bir Markov zinciri için tek adımlı geçiş olasılıkları $P\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\}$ olarak tanımlansın. O halde

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\} = \frac{P\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \cap P\{X_n = x_n\}}{P\{X_n = x_n\}} \quad (3.58)$$

ve buradan

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \cap P\{X_n = x_n\} = P\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\} \cdot P\{X_n = x_n\} \quad (3.59)$$

eşitliği sağlanır. Eğer geçiş olasılıkları t_n zamanından bağımsız ise, Markov zincirinin durağan geçiş olasılıklarına sahip olduğu söylenir ve Markov zincirine *homojen Markov zinciri* denir (Allen, 2007).

Bir Markov stokastik süreci, ortalaması μ ve standart sapması σ olan $N(\mu, \sigma)$ normal dağılımına sahiptir. Markov özelliği taşıyan ve $N(0,1)$ dağılımına sahip olan bir değişken, Bölüm 3.7.3'te ayrıntılı bir şekilde verilen Wiener süreci izler. Wiener süreci; Markov stokastik sürecinin özel bir durumudur (İnce, 2021).

3.7.2 Sürekli Parametrelili Stokastik Süreçler

$\{F_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonu ile verilen (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayında tanımlanmış stokastik süreç $\{X(t): t \in \tau\}$ ele alınsın, burada $\tau = [0, T]$ olan zaman aralığıdır ve verilen süreç, bu aralıktaki zamanların her anında tanımlıdır. Başka bir ifadeyle, sürekli parametrelili bir stokastik süreçte olaylar, farklı zaman noktalarında değil; zamanın herhangi bir anında sürekli olarak meydana gelebilmektedir. Söz konusu süreçte X rassal değişkeni, kesikli değerli veya sürekli değerli olabilir. O halde,

- i. *sürekli parametrelili ve kesikli durum uzayına sahip süreç* olarak, sürekli Markov zinciri modelleri olarak adlandırılan stokastik modeller örnek verilebilir. Bunlar; biyolojik uygulamalar açısından en çok ilgiyi çeken rekabet, avlanma ve salgın süreçleridir. Bunlar için parametre kümesi $\{t : t \geq 0\}$ ve durum uzayı $\{0, 1, 2, \dots\}$ şeklindedir,
- ii. *sürekli parametrelili ve sürekli durum uzayına sahip süreç* olarak difüzyon süreçleri olarak adlandırılan modeller örnek verilebilir, burada $X(t)$ stokastik süreci, bir SDD'ye karşılık gelir. Bunlar için parametre kümesi $\{t : t \geq 0\}$ ve durum uzayı $\{x : -\infty < x < \infty\}$ şeklindedir (Allen, 2010).

3.7.3 Wiener Süreci (Brownian Hareketi)

İskoç botanikçi Robert Brown 1827'de sıvı içinde asılı duran polen tanelerini mikroskop ile incelerken polenin boşlukları içinde rastlantısal olarak hareket eden ufak parçacıklar olduğunu gözlemlemiştir. Aynı deneyi tozla tekrarlayarak bu düzensiz

hareketin polenin canlı olması ile alakalı olmadığını doğrulamış olsa da söz konusu hareketin sebebini açıklayamamıştır. Daha sonra 1900'de Louis Bachelier ve bağımsız olarak 1905'te Albert Einstein, detayları matematiksel bakış açısıyla incelemişlerdir. Bachelier, "Spekülasyonların Teorisi" adlı kitabında böyle bir rastlantısal süreci finansal verilere uygulamıştır. Einstein, bu rastlantısal hareketin sınının molekülleri gibi mikroskop altında görülmeyen çok küçük parçacıkların *bombardmanı* nedeniyle oluştuğunu, bir başka deyişle polenlerin sıvı molekülleri ile rastgele çarpışmalar yaptığını kanıtlamıştır. Bu sebeple, hareketi matematiksel olarak tanımlamak için, polen tanesi ω 'nın t zamanındaki konumu olarak yorumlanan, *stokastik bir süreç* kavramı kullanılmıştır. Bu süreç, Robert Brown'ın onuruna *Brownian hareketi* olarak anılmaktadır. Brownian hareketinin matematiksel özellikleri sibernetik ve sinyal işlemenin kurucusu olarak bilinen Norbert Wiener tarafından 1920 yılında elde edildiği için aynı zamanda *Wiener süreci* olarak da bilinmektedir (Øksendal, 2000; Iacus, 2008; Özel Kadılar, 2020).

Tanım 3.31. $\{F_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonu ile verilen (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{W(t), t \geq 0\}$ Wiener süreci durağan (stationary), bağımsız artışlara sahip, sürekli parametrelili bir stokastik süreçtir, öyle ki:

- i. $W : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $t \rightarrow W(t)$ 'ye resmeder ve 1 olasılık ile başlangıç değeri $W(0) = 0$ 'dir.
- ii. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ için $W(t_N) - W(t_{N-1}), \dots, W(t_1) - W(t_0)$ artışları bağımsızdır.
- iii. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ için $W(t_N) - W(t_{N-1}), \dots, W(t_1) - W(t_0)$ artışları durağandır.
- iv. $\forall 0 \leq s \leq t$ için $[W(t) - W(s)] \sim N(0, t - s)$ olan bir Gauss dağılımına sahiptir (Iacus, 2008).

Yukarıdaki tanımdan yola çıkarak $0 \leq s \leq t$ olmak üzere $E(W(t)) = 0$ ve $\text{Var}(W(t) - W(s)) = t - s$ olduğu söylenebilir. Yani, $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ için $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$ ve $W(t_4) - W(t_3) \sim N(0, t_4 - t_3)$ olan bağımsız Gauss rassal değişkenleridir. Ayrıca genellikle, $W(t, \omega) = W(t) = W_t$ olarak alınır ve burada Bölüm 3.7'de de belirtildiği gibi, ω gösterimsel olarak yazılmaz. Bu nedenle, W_t , t 'nin her değerinde rassal bir değişkeni temsil eder (Allen, 2007).

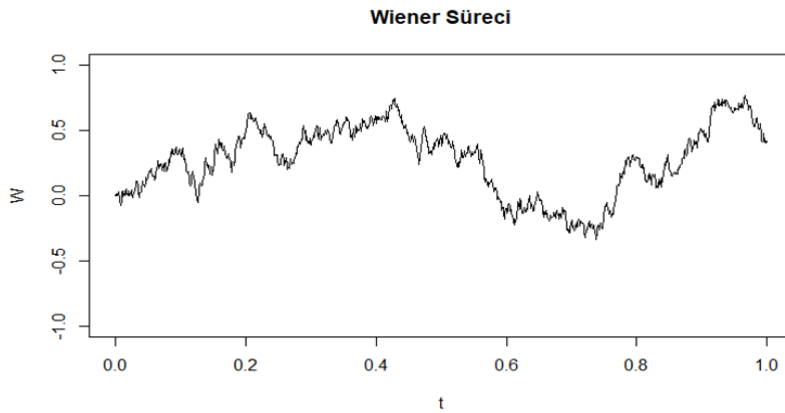
Burada, Wiener sürecinin bir yörüngesinin nasıl elde edileceği ve bu sürecin sonlu sayıda nokta için nasıl türetilceğini öngörebilmek önemlidir. Bunun için $t_0 = 0$ olarak alındığında, $[t_0, t_N]$ aralığında olması istenen bir Wiener süreci yörüngesinin, $\{t_i\}_{i=0}^N$ noktalarında türetilmek istenildiği düşünölsün. O zaman, $W(t_0) = 0$ ve $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ noktalarında bir Wiener süreci yörüngesinin değerlerini veren tekrar ilişkisi

$$W(t_i) = W(t_{i-1}) + \eta_{i-1}\sqrt{t_i - t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.60)$$

şeklindedir, burada $i = 1, 2, \dots, N$ için η_{i-1} , bağımsız standart normal dağılımlı sayılardır, başka bir deyişle, $\eta_{i-1} \sim N(0, 1)$ 'dir. Eşitlik (3.60)'taki $\eta_{i-1}\sqrt{t_i - t_{i-1}}$ ifadesi, $[W(t) - W(s)] \sim (\sqrt{t - s}) \cdot N(0, 1)$ olması ile alakalıdır. Literatürde Wiener sürecinin yörüngelerini hesaplamak adına, Fourier serisi açılımından türetilen Karhunen-Loève genişlemesi gibi çeşitli yöntemler de mevcuttur (Allen, 2007).

şekil 3.4'te $[0, 1]$ zaman aralığında $N = 1000$ adımlı bir Wiener süreci yörüngesinin simölasyonu verilmiştir. Söz konusu simölasyon, Eşitlik (3.60) dikkate alınarak yapılmıştır.

Brownian hareketinin $\text{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s, t)$ olacak şekilde kovaryans fonksiyonu ve sonsuz basit varyasyonu ($V_t(W) = \infty$) vardır. Yörüngeleri süreklidir ancak hiçbir yerde diferansiyellenemez. Brownian hareketinin bu özelliğinin sebebi, ikinci dereceden varyasyonunun sonlu olmasıdır. Tüm $t \geq 0$ için $[W, W]_t = t$ 'dir (Kloeden vd., 2000; Iacus, 2008).



şekil 3.4 $[0, 1]$ zaman aralığında $N = 1000$ adımlı Wiener Sürecinin bir simölasyonu

3.8 Stokastik Süreçlerin Hilbert Uzayı

Bölüm 3.4'tekine benzer olarak, bu bölümde ilk olarak temel stokastik süreçlerden oluşan bir metrik uzay tanımlanmış, bu uzay daha sonra bir Hilbert uzayına tamamlanmış ve temel stokastik süreçlerin kümesinin bu uzayda yoğun olduğu söylenmiştir.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan ve $[0, T]$ aralığında bulunan sürekli parametrel bir stokastik süreç ele alınsın. $f(t) = f(t, \omega)$, $[0, T] \times \Omega$ üzerinde tanımlanan rassal bir adım fonksiyonu olsun. Bir başka ifadeyle $f(t, \omega)$,

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, \omega) I_i(t) \quad (3.61)$$

formundadır, burada $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, $[0, T]$ aralığının bir parçalanışıdır ve $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ olmak üzere $I_i(t)$,

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.62)$$

formundaki karakteristik fonksiyondur. Bölüm 3.4'ten rassal değişkenlerin Hilbert uzayının H_{RV} olduğu dikkate alındığında $\forall t_i$ için rassal değişkenin $f(t_i, \cdot) \in H_{RV}$ olduğu, ve $\forall i$ için $E[f^2(t_i)] < \infty$ olduğu varsayılınsın. O halde $[0, T] \times \Omega$ üzerinde tanımlanan rassal adım fonksiyonu $f(t, \omega)$ olmak üzere, S_{SP} metrik uzayı

$$S_{SP} = \left\{ f(t, \omega) : \int_0^T E[f^2(t)] dt = \sum_{i=0}^{N-1} E[f^2(t_i)](t_{i+1} - t_i) < \infty \right\} \quad (3.63)$$

olarak tanımlanır. S_{SP} üzerinde bir iç çarpım ve norm da sırasıyla

$$(f, g)_{SP} = \int_0^T E[f(t)g(t)] dt \quad (3.64)$$

$$\|f\|_{SP} = (f, f)_{SP}^{1/2} = \left(\int_0^T E|f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.65)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. S_{SP} , $\|\cdot\|_{SP}$ metriklili bir metrik uzayıdır ancak tam değildir. Bu uzay, ona ek stokastik süreçler eklenerek tam uzaya tamamlanabilir. O halde, söz konusu tam uzay H_{SP} olarak gösterilir. Bir başka ifadeyle, verilen bir $f \in H_{SP}$ ve $\forall \epsilon > 0$ için öyle bir $g \in H_{SP}$ vardır ki $\|f - g\|_{SP} < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Buradan, S_{SP} 'nin H_{SP} üzerinde yoğun olduğu sonucuna varılır. O halde H_{SP} , Eşitlik (3.65) ile verilen norma sahip stokastik süreçlerin bir *Hilbert uzayıdır* (Allen, 2007).

3.9 Stokastik İntegraller

SDD'ler, stokastik integraller şeklinde yazıldığından ve stokastik integrallerin özellikleri SDD'lerin özelliklerini belirlediğinden stokastik integraller, SDD'lerin çözümü için en önemli kavramlardan biridir. Wiener sürecinin diferansiyellenemezlik ve sonsuz varyasyona sahip olma özelliklerinden dolayı SDD'ler, integral denklemler olarak ele alınmaktadır. Ancak burada ortaya çıkan integrallerden bazıları, Riemann-Stieltjes ya da Lebesgue integralleri gibi bilinen integraller şeklinde tanımlanamamaktadır (Allen, 2007). Ancak, stokastik integrallerin tanımlanmasına yardımcı olması açısından bu bölümde ilk olarak Riemann-Stieltjes integralinin tanımı ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında tanımlanan integrallerin, H_{SP} Hilbert uzayının elemanları olduğu varsayılmaktadır.

Tanım 3.32. (Riemann-Stieltjes integrali). $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $\forall t \in [a, b]$ için $|f(t)|, |\phi(t)| < \infty$ olsun. $\tau_N: a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, $[a, b]$ aralığının keyfi parçalanışı olsun ve $\|\tau\| = \max_{i=1,2,\dots,N} |t_i - t_{i-1}|$ olarak tanımlansın. $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ keyfi nokta olmak üzere

$$S_\tau = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \quad (3.66)$$

toplamaına τ için Riemann-Stieltjes toplamı denir. Eğer $n \rightarrow \infty$ ve $\|\tau\| \rightarrow 0$ iken S_τ toplamı bir sayıya yakınsıyor ise o zaman bu sayıya f fonksiyonunun ϕ fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(t)d\phi(t) \quad (3.67)$$

ile gösterilir (Şamilov, 2007).

3.9.1 $\int_a^b f(s, \omega)ds$ Tipindeki Stokastik İntegraller

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan f bir stokastik süreç ve $a \leq t \leq b$ olmak üzere $J(f)$ ve $J(f)(t)$ sırasıyla

$$J(f) = J(f)(\omega) = \int_a^b f(s, \omega)ds \quad (3.68)$$

ve

$$J(f)(t) = J(f)(t, \omega) = \int_a^t f(s, \omega)ds \quad (3.69)$$

olsun. Eğer f , H_{SP} Hilbert uzayında belirli koşulları sağlıyor ise o zaman bu integral-lerden ilki, $f \in H_{SP}$ için H_{RV} Hilbert uzayında rassal değişken, ikincisi ise H_{SP} Hilbert uzayında bir stokastik süreçtir. Söz konusu koşullar aşağıda verilmiştir ².

k1. $f(a) \in H_{RV}$ 'dir. O halde,

$$\|f(a)\|_{RV}^2 = E|f(a)|^2 \leq k_1$$

olacak şekilde öyle bir $k_1 > 0$ sabiti vardır. Bu koşul sınırlılık koşuludur.

k2. $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ için

² k1, k2 ve k3 koşulu Bölüm 3.9.2'de verilen Itô stokastik integralleri için de geçerlidir.

$$\|f(t_2) - f(t_1)\|_{RV}^2 = E|f(t_2) - f(t_1)|^2 \leq k_2|t_2 - t_1|$$

olacak şekilde öyle bir $k_2 > 0$ sabiti vardır.

k3. f , $[a, b]$ aralığı üzerinde *nonanticipating* (öngörülemeyen) bir fonksiyondur, yani f 'nin t anındaki durumu, sonraki durumlara bağlı değildir; bir başka ifade ile $f(t)$ rassal değişkeni, t anından sonra gelen rassal değişkenlerden bağımsızdır (Allen, 2007).

Bu koşulların ne anlama geldiğine kısaca değinilmiştir. $f \in H_{SP}$, k_1 ve k_2 koşulunu sağlıyor ise o zaman $\forall t \in [a, b]$ için

$$\|f(t)\|_{RV} \leq k_2^{1/2}(b-a)^{1/2} + \|f(a)\|_{RV} \quad (3.70)$$

sınırlılık koşulu sağlanır. Bu eşitsizliğe üçgen eşitsizliği kullanılarak ulaşılır. k_3 için ise $\forall a \leq t \leq t' \leq b$ olmak üzere

$$E(f(t)(W(t') - W(t))) = E(f(t))E(W(t') - W(t)) = 0 \quad (3.71)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $f(t)$ ile $(W(t') - W(t))$ farkının bağımsız olduğu sonucuna varılır (Kloeden vd., 2000; Allen, 2007).

Tanım 3.33. $f_m(t, \omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)I_i(t)$ şeklinde bir adım fonksiyonu olmak üzere $f_m(t, \omega)$, S_{SP} 'nin bir elemanı olsun. O zaman $\int_a^b f_m(s)ds$ integrali $J(f_m)$ olarak gösterilir,

$$J(f_m) = \int_a^b f_m(s)ds = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i) \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanır; burada $f_i^{(m)} \in H_{RV}$, $\forall i$ ve m için S_{SP} 'de f fonksiyonuna yakınsayan bir adım fonksiyonları dizisidir (Allen, 2007).

$\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ 'nin H_{RV} 'de bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla H_{RV} 'de bir limite sahiptir. Bunu göstermek için Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve Fubini Teoremi (Kolmogorov ve Fomin, 1970) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\|J(f_m)\|_{RV}^2 &= E|J(f_m)|^2 = E\left|\int_a^b f_m(t)dt\right|^2 = E\left|\int_a^b 1 \cdot f_m(t)dt\right|^2 \leq \\
&\leq E\left(\int_a^b 1^2 dt \cdot \int_a^b f_m^2(t)dt\right) = E\left((b-a) \int_a^b f_m^2(t)dt\right) = \\
&= (b-a)E\left(\int_a^b f_m^2(t)dt\right) = (b-a) \int_a^b E|f_m^2(t)|dt = \\
&= (b-a) \cdot \|f_m(t)\|_{SP}^2
\end{aligned}$$

elde edilir, buradan

$$\|J(f_m)\|_{RV}^2 \leq (b-a) \cdot \|f_m(t)\|_{SP}^2 \quad (3.73)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\|J(f_m) - J(f_n)\|_{RV}^2 \leq (b-a) \|f_m - f_n\|_{SP}^2 \quad (3.74)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlik (3.73) ve Eşitsizlik (3.74) ile $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin H_{SP} 'de bir Cauchy dizisi olduğuna ulaşılır. Bir başka ifadeyle, $\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi H_{RV} 'de bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla söz konusu dizi, H_{RV} 'de yakınsaktır. Bu durum aşağıdaki tanım ile özetlenmiştir (Allen, 2007).

Tanım 3.34. $f \in H_{SP}$ olsun. $m \rightarrow \infty$ iken $\|f - f_m\|_{SP} \rightarrow 0$ olacak şekilde S_{SP} 'de bir $\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $\int_a^b f(s)ds$ integrali $J(f)$ olarak gösterilir ve

$$J(f) = \int_a^b f(s)ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(s)ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i) \quad (3.75)$$

şeklinde tanımlanır (Allen, 2007).

Lemma 3.4. $J(f)$ integrali, $J(f_m)$ basamaklı fonksiyonlarının limiti şeklinde yazılabilir. Bir başka ifadeyle, söz konusu integral H_{RV} 'de yakınsaktır.

Benzer şekilde, $f \in H_{SP}$ verildiğinde $[a, b]$ aralığında bulunan her bir t için $J(f)(t) = \int_a^t f(s, \omega) ds$ integrali, Tanım 3.34'teki gibi tanımlanır. Ancak burada söz konusu integral H_{SP} 'deki bir stokastik süreci, H_{SP} 'deki başka bir stokastik sürece götürür. Yukarıdaki işlemlere benzer işlemler yapılarak Eşitsizlik (3.73)'te olduğu gibi

$$\|J(f)\|_{SP} \leq \frac{(b-a)\|f\|_{SP}}{\sqrt{2}} \quad (3.76)$$

ifadesine ulaşılır. Ek olarak bu integral de $[a, b]$ üzerindeki t 'ye göre H_{RV} 'de süreklidir. Bunu görmek için

$$\|J(f)(t_1) - J(f)(t_2)\|_{RV}^2 = E \left(\int_{t_1}^{t_2} f(s) ds \right)^2 \leq |t_2 - t_1| \|f\|_{SP}^2 \quad (3.77)$$

eşitsizliği kullanılır (Allen, 2007).

3.9.2 Itô Stokastik İntegralleri

Itô stokastik hesabı, Kiyosi Itô'nun Markov sürecinin yerel özelliklerinin, bu süreci karakterize etmek için kullanılabileceği koşulları araştırmasıyla ortaya çıkmıştır. Burada yerel özellikler ile, bir difüzyon işleminin drift ve difüzyon katsayısı gibi miktarları kastedilmektedir. Bu terimler, Kolmogorov tarafından bir difüzyon sürecinin geçiş olasılıkları için Kolmogorov'un adını taşıyan kısmi diferansiyel denklemleri türetmek amacıyla kullanılmıştı. Buna karşılık Itô'nun yaklaşımı, sürecin kendisinin işlevsel biçimine odaklandı ve o zamana kadar sezgisel olan fakat matematiksel anlamda yetersiz kalan SDD'nin, matematiksel olarak anlamlı bir formülasyonu ile sonuçlandı. Benzer bir teori, Gikhman tarafından yaklaşık olarak aynı zamanda bağımsız olarak geliştirilmiştir (Kloeden vd., 2000).

Bu bölümde, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan bir stokastik süreç f olmak üzere $a \leq t \leq b$ için

$$I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s, \omega) dW(s, \omega) \quad (3.78)$$

ve

$$I(f)(t) = I(f)(t, \omega) = \int_a^t f(s, \omega) dW(s, \omega) \quad (3.79)$$

şeklinde tanımlanan integraller ile çalışılmıştır. Bölüm 3.9.1’de olduğu gibi bu integral-lerden ilki, $f \in H_{SP}$ için H_{RV} Hilbert uzayında rassal değişken, ikincisi ise H_{SP} Hilbert uzayında bir stokastik süreçtir. Ayrıca f ’nin k_1 , k_2 ve k_3 koşullarını sağladığı kabul edilmektedir (Allen, 2007). Ancak Bölüm 3.9.1’de sunulan stokastik integrallerin aksine buradaki problem, Bölüm 3.7.3’te daha önce değinilen ve Teorem 3.2’de açıkça belirtilen bir $W(t)$ Wiener sürecinin hiçbir yerde türevlenebilir olmamasıdır. Bu nedenle yukarıdaki integraller sıradan bir Riemann integrali, Lebesgue integrali (Şamilov, 2007) veya bir Riemann-Stieltjes integrali olamaz. (Kloeden vd., 2000). $W(t)$ Wiener sürecini içeren $\int_c^d dW(t)$ integrali, $a \leq c \leq d \leq b$ için $W(d) - W(c)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.2. f deterministik bir fonksiyon ya da bir stokastik sürecin gerçekleşmesi olmak üzere; eğer f , $[a, b]$ üzerinde diferansiyellenebilir ve sınırlı türeve sahip ise o zaman

$$\int_a^b f(t) dW(t, \omega)$$

integrali her Wiener süreci gerçekleşmesi için vardır (Bozdağ, 2010).

Tanım 3.35. $f_m \in S_{SP}$ nonanticipating fonksiyon olsun. Her bir i ve m için $f_i^{(m)} \in H_{RV}$ adım fonksiyonları dizisi iken $f_m(t, \omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)$ olmak üzere $I(f_m)$, $\int_a^b f_m(s) dW(s)$ integrali olarak gösterilir ve

$$I(f_m) = \int_a^b f_m(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \Delta W_i \quad (3.80)$$

şeklinde tanımlanır, burada $i = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ 'dir (Allen, 2007).

$f_m \in S_{SP}$ için $I(f_m) \in H_{RV}$ olduğuna Bölüm 3.9.1'dekine benzer işlemler yapılarak elde edilen $\|I(f_m)\|_{RV} = \|f_m\|_{SP}$ eşitliği kullanılarak ulaşılır.

$f \in H_{SP}$ 'nin k1, k2, k3 koşullarını sağladığı düşünölsün. $i = 0, 1, \dots, m$ için $t_i^{(m)} = i\Delta t + a$ ve $\Delta t = (b-a)/m$ olmak üzere $a = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \dots < t_m^{(m)} = b$ olacak şekilde $[a, b]$ 'nin parçalanışlarının bir ailesi tanımlansın.

$$I_i^{(m)}(t) = \begin{cases} 1, & t_i^{(m)} \leq t < t_{i+1}^{(m)} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (3.81)$$

olmak üzere

$$f_m(t, \omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}, \omega) I_i^{(m)}(t) \quad (3.82)$$

eşitliğini sağlayan bir $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \subset S_{SP}$ dizisi tanımlansın. k2 koşulundan

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_{SP}^2 &= \int_a^b E|f(t) - f_m(t)|^2 dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i^{(m)}}^{t_{i+1}^{(m)}} E|f(t) - f_m(t)|^2 dt \leq \\ &\leq k_2 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i^{(m)}}^{t_{i+1}^{(m)}} (t - t_i^{(m)}) dt = \frac{k_2}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{b-a}{m}\right)^2 = \frac{k_2(b-a)^2}{2m} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, bir başka ifadeyle

$$\|f - f_m\|_{SP}^2 \leq \frac{k_2(b-a)^2}{2m} \quad (3.83)$$

şeklindedir. O halde, H_{SP} 'de $m \rightarrow \infty$ iken $f_m \rightarrow f$ olur. Böylece $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi f 'ye yakınsayan bir Cauchy dizisidir. Benzer şekilde; $I(f_m) \in H_{RV}$ olduğu düşünülün. H_{RV} 'de tanımlı norm tanımı kullanılarak $\{I(f_m)\}_{m=0}^{\infty}$ dizisinin H_{RV} 'de tanımlı bir Cauchy dizisi olduğu, böylece H_{RV} 'de bir limite sahip olduğu elde edilir (Allen, 2007). Bu durum aşağıdaki Tanım 3.36 ile özetlenmiştir.

Tanım 3.36. $f \in H_{SP}$ 'nin k1, k2 ve k3 koşullarını sağladığı varsayılın. $[a, b]$ aralığı üzerinde $t_i^{(m)} = a + i \left(\frac{b-a}{m}\right)$ olmak üzere $\int_a^b f(t)dW(t)$ Itô stokastik integrali

$$I(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(t)dW(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}) (W(t_{i+1}^{(m)}) - W(t_i^{(m)})) \quad (3.84)$$

şeklinde tanımlanır ve H_{RV} 'de yakınsaktır (Allen, 2007).

Tanım 3.37. $f \in H_{SP}$ 'nin k1, k2 ve k3 koşullarını sağladığı varsayılın. $[a, b]$ aralığı üzerinde $t_i^{(m)} = a + i \left(\frac{t-a}{m}\right)$ olmak üzere $\int_a^t f(s)dW(s)$ Itô stokastik integrali

$$I(f)(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^t f_m(s)dW(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}) (W(t_{i+1}^{(m)}) - W(t_i^{(m)})) \quad (3.85)$$

şeklinde tanımlanır ve H_{RV} 'de yakınsaktır (Allen, 2007).

Tanım 3.36 ve Tanım 3.37'de sunulan integrallerin yakınsaklığı, Tanım 3.34 ile verilen $J(f_m)$ integralinin yakınsaklığını görmek için yapılan işlemlerin benzerleri yapılarak gösterilebilir.

c keyfi bir sabit olmak üzere ve k1, k2 ve k3 koşullarını sağlayan $f, g \in H_{SP}$ için $J(f) = \int_a^b f(s, \omega)ds$ ve $I(f) = \int_a^b f(s, \omega)dW(s, \omega)$ integrallerinin bazı önemli ve kullanışlı özellikleri

- i. $I(f + g) = I(f) + I(g)$
- ii. $I(cf) = cI(f)$
- iii. $E(I(f)) = 0$

$$\text{iv. } E|I(f)|^2 = \int_a^b E|f(t)|^2 dt$$

şeklindedir. Burada $I(f)$ integrali i–iv arasındaki özelliklerinin tümünü sağlarken $J(f)$ integrali sadece i ve ii özelliklerini sağlar, iii ve iv özelliklerini sağlamaz (Allen, 2007).

Stokastik integralleri tanımlamanın farklı alternatif yolları vardır. Itô stokastik integralinin yanı sıra, en yaygın stokastik integral, Stratonovich stokastik integralidir. Stratonovich integrali

$$\int_a^b f(t) \circ dW(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (f(t_i^{(m)}) + f(t_{i+1}^{(m)})) (W(t_{i+1}^{(m)}) - W(t_i^{(m)})) \quad (3.86)$$

şeklinde tanımlanır, burada “o” sembolü bu integrali Stratonovich integrali olarak belirtmek için kullanılır. (Allen, 2007).

3.9.3 Stokastik Diferansiyeller ve Itô Formülü

Bu bölümde SDD'nin tanımında kullanılan stokastik diferansiyellerden bahsedilmiş ve SDD'nin kesin çözümlerini bulmada yararlanan Itô formülü verilmiştir. Bunun için $f, g \in H_{SP}$ ve $X(a) \in H_{RV}$ olmak üzere f ve g 'nin k1–k3 koşullarını sağladığı varsayalım. $a \leq t \leq b$ için

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s) ds + \int_a^t g(s) dW(s) \quad (3.87)$$

stokastik süreci ele alalım, burada $\int_a^t f(s) ds$ ve $\int_a^t g(s) dW(s) \in H_{SP}$ ise o zaman $X(t) \in H_{SP}$ 'dir. $a \leq t \leq b$ için

$$\|f(t)\|_{RV} \leq \|f(t) - f(a)\|_{RV} + \|f(a)\|_{RV} \leq k_2^{1/2} (b - a)^{1/2} + \|f(a)\|_{RV}$$

eşitsizliği sağlanır ve buradan $\forall t \in [a, b]$ için

$$E|f^2(t)| \leq 2k_2(b-a) + 2 \|f(a)\|_{RV}^2 \quad (3.88)$$

elde edilir. Ayrıca $a \leq t \leq b$ için $X(t)$ 'nin H_{RV} 'de sürekli parametrelili bir stokastik süreç olduğuna dikkat etmek gerekir. Bir başka ifadeyle, $t_1, t_2 \in [a, b]$ olmak üzere verilen bir $\epsilon > 0$ için $\|X(t_1) - X(t_2)\|_{RV} < \epsilon$ olacak şekilde $|t_1 - t_2| < \delta$ koşulunu sağlayan öyle bir $\delta > 0$ vardır.

$X(t)$ stokastik süreci Eşitsizlik (3.55)'i sağlıyorsa o zaman $a < t < b$ için $X(t)$,

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(t) \quad (3.89)$$

stokastik diferansiyelini sağlar.

k1–k3 koşulları göz önüne alındığında; herhangi bir $G : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerindeki aşağıdaki iki koşul, söz konusu Itô formülünü belirtmek ve kanıtlamak için oldukça önemlidir.

k4. $G : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, herhangi bir $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve herhangi bir $X(t) \in H_{SP}$ olmak üzere

$$E|G(t_2, X(t_2)) - G(t_1, X(t_1))|^2 \leq k_3(|t_2 - t_1| + E|X(t_2) - X(t_1)|^2) \quad (3.90)$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan bir k_3 sabiti vardır.

k5. $G : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $X(a) \in H_{RV}$ iken $G(a, X(a)) \in H_{RV}$ 'dir (Allen, 2007).

Teorem 3.3 (Itô Formülü). $t \in [a, b]$ için $X \in H_{SP}$ 'nin Eşitsizlik (3.87)'yi sağladığı varsayalım, burada f ve g , k1–k3 koşullarının yanı sıra $t \in [a, b]$ için $\|f^2(t)\|_{RV} \leq k_4$ ve $\|g^2(t)\|_{RV} \leq k_4$ eşitsizliklerini de sağlasın. F , t ve x 'in bir fonksiyonu olsun. $x \in \mathbb{R}$ ve $t \in [a, b]$ için F 'nin

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x \partial t}$$

sürekli türevlerine sahip olduğu ve söz konusu türevlerin, F 'nin ve $f(t) \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$, $\frac{1}{2}g^2(t) \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}$ ve $g(t) \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$ fonksiyonlarının k4 ve k5 koşullarını sağladığı varsayalım.

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + f(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2(t) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \quad (3.91)$$

$$\tilde{g}(t, x) = g(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \quad (3.92)$$

olsun. O zaman F ,

$$dF(t, X(t)) = \tilde{f}(t, X(t))dt + \tilde{g}(t, X(t))dW(t) \quad (3.93)$$

stokastik diferansiyelini sağlar (Allen, 2007).



4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ

Bu bölümde Itô stokastik diferansiyel denklemler teorisi ele alınmıştır. Bu tez çalışması boyunca Itô stokastik diferansiyel denklemler teorisi yerine sadece stokastik diferansiyel denklemler teorisi ifadesi, Itô stokastik diferansiyel denkleminin yerine ise stokastik diferansiyel denklem (SDD) ifadesi kullanılmıştır. H_{RV} ve H_{SP} Hilbert uzayları bu bölüm boyunca SDD'lerin sunumunu basitleştirmek ve tez bütünlüğünü sağlamak amacıyla ele alınmıştır. Burada ilk olarak, H_{SP} Hilbert uzayında kesin koşullar altında, SDD'nin tek bir çözümünün var olduğu ispatlanmış ve SDD'nin birkaç özelliği üzerinde durulmuştur. SDD modellerinin uygulandığı bütün alanlar hem teorik açıdan hem de uygulama açısından çok büyük önem taşıdığından ele alınan stokastik veriler için SDD'lerin nümerik çözümü olan stokastik süreçler ve bu süreçlere ait parametre tahminlerinin yapılması sağlanmıştır. Bu sebeple, SDD'nin kesin çözümlerini bulabilmek için verilen Itô formülünün yanı sıra, SDD'nin yaklaşık çözümlerini bulmak için birkaç nümerik yöntemden bahsedilmiş ve bu yöntemler arasından Euler-Maruyama (EM) yöntemi detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Yine bu bölümde, zamanın kesikli bir kümesinde olduğu varsayılan veriler için önerilen bir SDD'nin parametrelerini tahmin etmek için iki farklı en çok olabilirlik tahmin yöntemi anlatılmıştır. Ayrıca, verilen bir fiziksel sistemin ani değişim gösterdiği zamanların tespiti için değişim noktası tahmini (change point estimation (CP)) sunulmuştur. Sonrasında, literatürde özellikle SDD'ler için geliştirilen ki-kare uyum iyiliği testi ele alınmış ve model performans değerlendirmesi için kullanılacak olan ortalama mutlak hata yüzdesi (MAPE), ortalama karekök hatası (RMSE), Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Bayes bilgi kriteri (BIC)'den bahsedilmiştir. Son olarak literatürde bulunan, özellikle finansa sıklıkla kullanılan, geometrik Brownian süreci ve Cox-Ingersoll-Ross SDD modellerine yer verilmiştir.

$[0, T]$ aralığı üzerindeki bir Itô stokastik diferansiyel denklemi, $0 \leq t \leq T$ için

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t f(s, X(s, \omega)) ds + \int_0^t g(s, X(s, \omega)) dW(s, \omega) \quad (4.1)$$

formuna sahiptir, burada $X(0, \omega) \in H_{RV}$ 'dir ve ilk integral her yörünge için bir Riemann (veya Lebesgue) integrali, ikinci integral ise bir Itô integralidir. Söz konusu denklemin diferansiyel formu, $0 \leq t \leq T$ için

$$dX(t, \omega) = f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega) \quad (4.2)$$

şeklindedir. g fonksiyonu difüzyon sabiti olarak, f fonksiyonu da drift sabiti olarak adlandırılır. f ve g fonksiyonlarının *nonanticipating* olduğu ve her $k \geq 0$ sabiti için aşağıdaki k6 ve k7 koşullarını sağladığı varsayılır:

k6. $0 \leq s, t \leq T$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, x) - f(s, y)|^2 \leq k(|t - s| + |x - y|^2)$$

k7. $0 \leq t \leq T$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2).$$

k6 ve k7 koşullarını sağlayan f ve g fonksiyonlarının bazı özellikleri ele alınsın. Bunun için ilk olarak, $u(t) = f(t, X(t))$ olduğunda k7 koşulunun $X(t) \in H_{SP}$ iken $u \in H_{SP}$ 'yi sağladığına dikkat edilsin, aynı koşul g için de geçerli olsun. Öyleyse, $X \in H_{SP}$ için k7 özelliği, beklenti ve norm tanımını dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \|u\|_{SP}^2 &= \int_0^T E |f(t, X(t))|^2 dt \\ &\leq \int_0^T k(1 + E|X(t)|^2) dt \leq kT + k \|X\|_{SP}^2 \\ \|u\|_{SP}^2 &\leq kT + k \|X\|_{SP}^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlik (4.3) yardımıyla, $X \in H_{SP}$ iken $u(t)$ sürecinin sınırlı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi $X, Y \in H_{SP}$ için $t_1, t_2 \in [0, T]$ ve $\forall \epsilon > 0$ verildiğinde beklenti tanımı, norm tanımı ve k6 özelliği kullanıldığında ilk olarak,

$$\|f(t_1, X) - f(t_1, Y)\|_{SP}^2 = \int_0^T E |f(t_1, X(t)) - f(t_1, Y(t))|^2 dt$$

$$\|f(t_1, X) - f(t_1, Y)\|_{SP}^2 \leq \int_0^T kE |X(t) - Y(t)|^2 dt = k\|X - Y\|_{SP}^2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\|X - Y\|_{SP} \leq \epsilon/\sqrt{k}$ olduğu dikkate alınır

$$\|f(t_1, X) - f(t_1, Y)\|_{SP} \leq \epsilon \quad (4.4)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bir başka ifadeyle; $X(t) \rightarrow Y(t)$ iken $f(t_1, X)$ stokastik süreci ile $f(t_1, Y)$ stokastik süreçleri normca birbirine yakınsar. İkinci olarak. $f(t, X)$ stokastik sürecinin t değişkenine göre sürekliliğinin görülebilmesi amacıyla, $t_1, t_2 \in [0, T]$ için

$$\begin{aligned} \|f(t_1, X) - f(t_2, X)\|_{SP}^2 &= \int_0^T E |f(t_1, X(t)) - f(t_2, X(t))|^2 dt \\ &\leq \int_0^T kE |t_2 - t_1| dt = kT|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $|t_2 - t_1| < \epsilon^2/kT$ olduğu dikkate alınır

$$\|f(t_1, X) - f(t_2, X)\|_{SP} < \epsilon \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Bir başka ifadeyle, $t_2 \rightarrow t_1$ iken $f(t_2, X) \rightarrow f(t_1, X)$ stokastik süreçleri normca birbirine yakınsar, yani; $f(t, X)$ stokastik süreci t değişkenine göre H_{SP} normunda süreklidir (Allen, 2007). Benzer işlemler yapılarak $|t_2 - t_1| < \epsilon_1^2/kT$ ve $\|X - Y\|_{SP} \leq \epsilon_2/\sqrt{k}$ olarak alındığında

$$\|f(t_2, X) - f(t_1, Y)\|_{SP} \leq \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (4.6)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

4.1 Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde f ve g , k6 ve k7 koşullarını sağladığında Eşitlik (4.1)'in $X \in H_{SP}$ çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Bu çözüm, tek bir yörüngeye sahip ve güçlü bir çözüm olarak adlandırılır. Bunun aksine çözümler, yörüngeleri farklı olabilseler de aynı olasılık dağılımına sahiplerse zayıf anlamda, tektirler. Varlık ve tekliği göstermek için H_{SP} 'deki fonksiyonların bir Cauchy dizisi kurulmuş ve bu dizinin limitinin Eşitlik (4.1)'in çözümü olduğu, bir Picard iteratif (tekrarlı) dizileri yardımıyla ispatlanmıştır.

Teorem 4.1 (Itô SDD için varlık ve teklik teoremi). k6 ve k7 koşulları altında Eşitlik (4.1)'in H_{SP} 'de tek bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

İspat. Varlık ve teklik teoreminin ispatı, ardışık yaklaşımlar yöntemi ile yapılmıştır. Bu sebeple Eşitlik (4.1)'in ardışık yaklaşımlar dizisi oluşturulmuştur. $X(0) \in H_{RV}$ olmak üzere verilen başlangıç koşulu ile bu dizinin ilk elemanı $X_0(t) = X(0)$ olsun. Dizinin sonraki elemanları ise $n = 0,1,2, \dots$ için sırasıyla

$$X_1(t) = X_0(t) + \int_0^t f(s, X_0(s))ds + \int_0^t g(s, X_0(s))dW(s) \quad (4.7)$$

$$X_2(t) = X_0(t) + \int_0^t f(s, X_1(s))ds + \int_0^t g(s, X_1(s))dW(s) \quad (4.8)$$

⋮

$$X_{n+1}(t) = X_0(t) + \int_0^t f(s, X_n(s))ds + \int_0^t g(s, X_n(s))dW(s) \quad (4.9)$$

eşitlikleri yardımı ile tanımlansın. Söz konusu teoremin ispatı, aşağıda belirtilen beş aşamada yapılmıştır:

- İlk aşamada $\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2$,
- İkinci aşamada $\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\|_{SP}^2$ normları ele alınmış,

- Üçüncü aşamada, ikinci aşamada elde edilen sonuçtan yola çıkılarak $m > n$ için $\|X_m(t) - X_n(t)\|_{SP}^2$ değerlendirilmiştir.
- Dördüncü aşamada bir Cauchy dizisi olan $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, Eşitlik (4.1)'in çözümü olduğu gösterilmiştir.
- Sonuncu aşamada ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, Eşitlik (4.1)'in keyfi çözümüne yakınsadığına ait çözümü gösterilmiş ve buradan hareketle çözümün tekliği ispatlanmıştır.

Bu aşamalar tek tek ele alınsın:

Birinci aşama:

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 = \int_0^T E |X_1(t) - X_0(t)|^2 dt \quad (4.10)$$

buradan

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 = E \left\{ \int_0^t f(s, X_0(s)) ds + \int_0^t g(s, X_0(s)) dW(s) \right\} \quad (4.11)$$

ifadesinde $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ eşitsizliği ve beklenen değer lineerliği kullanılarak

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 \leq 2 \left\{ E \left| \int_0^t f(s, X_0(s)) ds \right|^2 + E \left| \int_0^t g(s, X_0(s)) dW(s) \right|^2 \right\} \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve Itô integralinin vi. özelliği kullanılarak

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 \leq 2 \left\{ E \int_0^t 1^2 ds \int_0^t f^2(s, X_0(s)) + \int_0^t E |g(s, X_0(s))|^2 ds \right\} \quad (4.13)$$

eşitsizliğine ulaşılır. k7 koşulu dikkate alındığında

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 \leq 2 \left\{ T \int_0^t E [k_2(1 + |X_0(s)|^2)] ds + \int_0^t E [k_2(1 + |X_0(s)|^2)] ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left\{ T k_2 T + k_2 T \int_0^t E |X_0(s)|^2 ds + k_2 T + k_2 \int_0^t E |X_0(s)|^2 ds \right\} \\
&\leq 2 \left\{ (k_2 T^2 + k_2 T) + (k_2 T + k_2) \int_0^t E |X_0(s)|^2 ds \right\} = \\
&= 2 \{ (k_2 T^2 + k_2 T) + (k_2 T + k_2) \|X_0(t)\|_{SP}^2 \}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir, burada $X_0(t)$ 'nin sabit olduğu dikkate alınırsa

$$\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2 \leq 2(T + 1)[T + \|X_0(t)\|_{RV}^2] \quad (4.14)$$

eşitsizliğine ulaşılır. O halde $\|X_1(t) - X_0(t)\|_{SP}^2$ normu sonludur.

İkinci aşama: Yukarıda tanımlanan ardışık yaklaşımlar dizisinden

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(t) - X_n(t) &= \int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))] ds + \\
&\quad + \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan birinci aşamada yapılan işlemlere benzer işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\|_{SP}^2 &= \int_0^t E |X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 \leq \\
&\leq 2 \left\{ E \left(\int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))] ds \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + E \left(\int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy-Schwartz ve Itô integralinin vi. özelliği kullanılarak

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\|_{SP}^2 \leq 2 \left\{ tE \int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))]^2 ds + \right. \\ \left. + E \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))]^2 ds \right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada k4 koşulu dikkate alınırsa

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\|_{SP}^2 \leq 2 \left\{ t \int_0^t E[k_1 |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds + \right. \\ \left. + \int_0^t E[k_1 |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds \right\} = \\ = (2tk_1 + 2k_1) \int_0^t E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 = a_{n-1}(s)$ ve $(2tk_1 + 2k_1) = L$ olduğu dikkate alınırsa

$$a_n(t) \leq L \int_0^t a_{n-1}(s) ds \quad (4.15)$$

olur. Buradan

$$a_n(t) \leq L \int_0^t a_{n-1}(s_1) ds_1 \leq L \int_0^t L \int_0^{s_1} a_{n-2}(s_2) ds_2$$

$$a_n(t) \leq L^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} a_0(s_n) ds_n \dots ds_2 ds_1$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integral $n - \text{katlı}$ integraldir. Bu integralin tek katlı parametre ile ifadesi dikkate alınırsa

$$a_n(t) \leq L^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^t a_0(s) ds \quad (4.16)$$

olur. Her iki tarafın $[0, T]$ aralığında integrali alınır, beklenti ve norm tanımı kullanılırsa

$$\|X_{n+1} - X_n\|_{SP}^2 = \int_0^T E|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 dt = \int_0^T a_n(t) dt \leq \int_0^T \left[L^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^t a_0(s) ds \right] dt$$

elde edilir. $\int_0^t a_0(s) ds = \|X_1 - X_0\|_{SP}^2$ olduğu dikkate alındığında

$$\|X_{n+1} - X_n\|_{SP} \leq \left(\frac{L^n t^n}{n!} \right)^{1/2} \|X_1 - X_0\|_{SP} \quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

Üçüncü aşama: $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için Eşitsizlik (4.17)'den yararlanılmıştır. Bunun için $n < m$ olsun.

$$\begin{aligned} \|X_m - X_n\|_{SP} &\leq \|X_m - X_{m-1}\|_{SP} + \|X_{m-1} - X_n\|_{SP} \\ &\leq \|X_m - X_{m-1}\|_{SP} + \|X_{m-1} - X_{m-2}\|_{SP} + \dots + \|X_{n+1} - X_n\|_{SP} \\ &\leq \left\{ \left(\frac{L^{m-1} T^{m-1}}{(m-1)!} \right)^{1/2} + \left(\frac{L^{m-2} T^{m-2}}{(m-2)!} \right)^{1/2} + \dots + \left(\frac{L^n T^n}{n!} \right)^{1/2} \right\} \|X_1 - X_0\|_{SP} \\ &\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{LT}{n+1} \right)^{1/2} + \dots + \left(\frac{L^{n-m+1} T^{n-m+1}}{(n+1)(n+2)\dots(m)} \right)^{1/2} \right\} \|X_1 - X_0\|_{SP} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $m, n \geq 4LT$ olduğu varsayılırsa

$$\begin{aligned}
\|X_m - X_n\|_{SP} &\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{m}} \frac{1}{(n+1) \dots m}\right) \|X_1 - X_0\|_{SP} \\
&\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \dots + \frac{1}{(2\sqrt{m})^{m-n-1}}\right) \|X_1 - X_0\|_{SP} \\
&\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \dots\right) \|X_1 - X_0\|_{SP} \\
&\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{m}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{m}}}\right) \|X_1 - X_0\|_{SP} \\
&\leq \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{m} - 1}\right) \|X_1 - X_0\|_{SP}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $1/2\sqrt{m} - 1 < 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\|X_m - X_n\|_{SP} \leq 2 \left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \|X_1 - X_0\|_{SP} \quad (4.18)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada, birinci aşamada yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuca göre $\|X_1 - X_0\|_{SP}$ normunun sınırlı olduğu bilinmektedir. Öyleyse Eşitsizlik (4.18)'in sağ tarafındaki ilk çarpanın da sınırlı olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $n \rightarrow \infty$ iken $\left(\frac{L^n T^n}{n!}\right)^{1/2} \rightarrow 0$ olduğu ve böylece $\|X_m - X_n\|_{SP}$ dizisinin yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. Bir başka ifadeyle, verilen $\forall \epsilon > 0$ için $\exists N > 0$ sayısı vardır ki $m, n \geq N$ iken $\|X_m - X_n\|_{SP} < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi H_{SP} 'de bir Cauchy dizisidir.

Dördüncü aşama: $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardışık yaklaşımlar dizisi H_{SP} 'de bir Cauchy dizisi olduğundan bu dizinin H_{SP} 'de tek bir limiti vardır. Bu limitin $X(t)$ olduğu varsayalım.

Bu aşamada, $X(t)$ 'nin Eşitlik (4.1)'in çözümü olduğu gösterilmiştir. Bu amaçla, aşağıdaki denklemi sağlayan $Y(t)$ 'nin H_{SP} uzayının bir elemanı olduğu düşünölsün:

$$Y(t) = -X(t) + X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (4.19)$$

Ayrıca ardışık yaklaşımlar dizisi için

$$0 = -X_n(t) + X(0) + \int_0^t f(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t g(s, X_{n-1}(s))dW(s) \quad (4.20)$$

düzenlensin. Eşitlik (4.19) ile Eşitlik (4.20)'nin farkı ele alınsın. O halde,

$$\begin{aligned} Y(t) = X_n(t) - X(t) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) - \\ - \int_0^t f(s, X_{n-1}(s))ds - \int_0^t g(s, X_{n-1}(s))dW(s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. Burada ikinci ve üçüncü aşamadaki benzer işlemler yapılarak $\|Y(t)\|_{SP}^2 = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda Cauchy dizisinin limiti olan $X(t)$, Eşitlik (4.1)'in çözümü olur.

Beşinci aşama: Cauchy dizisinin limiti olan $X(t)$ çözümünün tek bir çözüm olduğunu göstermek için $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardışık yaklaşımlar dizisinin limitinin, Eşitlik (4.1)'in keyfi çözümüne yakınsadığını göstermek gerekir. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} |X_n(t) - X(t)| = \int_0^t |f(s, X_{n-1}(s)) - f(s, X(s))|ds \\ + \int_0^t |g(s, X_{n-1}(s)) - g(s, X(s))|dW(s) \end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. Her iki taraftan beklenen değeri alınır ve ikinci ve üçüncü aşamadaki benzer işlemler yapılsa

$$\int_a^t E|X_n(t) - X(t)|^2 ds \leq 2 \left\{ t \int_0^t E[k_2|X_{n-1}(s) - X(s)|^2] ds + \int_a^t E[k_2|X_{n-1}(s) - X(s)|^2] ds \right\}$$

$$\|X_n - X\|_{SP}^2 \leq (2tk_2 + 2k_2)\|X_{n-1} - X\|_{SP}^2 \quad (4.23)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $\|X_{n-1} - X\|_{SP}^2 = \int_0^T a_{n-1}(s) ds$ olarak alınır ve diğer aşamalarda olduğu gibi benzer işlemler yapılırsa

$$\|X_n - X\|_{SP}^2 \leq \frac{L^n T^n}{n!} \|X_1 - X\|_{SP}^2 \quad (4.24)$$

ifadesi elde edilir. O halde $n \rightarrow \infty$ iken $\|X_n - X\|_{SP}^2 \rightarrow 0$ sonucuna ulaşılır. Öyleyse $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardışık yaklaşımlar dizisinin limiti keyfi bir $X(t)$ 'ye yakınsar. Söz konusu dizi keyfi çözüme yakınsıyor ise $X(t)$, Eşitlik (4.1)'in H_{SP} 'deki tek çözümüdür. ■

4.2 Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Özellikleri

Teorem 4.2 (Çözümlerin sınırlılığı). f ve g , k6 ve k7 koşullarını sağlasın ve $X \in H_{SP}$, (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. O halde, $0 \leq t \leq T$ için

$$E|X(t)|^2 \leq 3(E|X(0)|^2 + kT^2 + kT)\exp(3k(T + T^2)) \quad (4.25)$$

eşitsizliği sağlanır (Allen, 2007).

Teorem 4.3 (Çözümlerin $[0, T]$ üzerinde sürekliliği). f ve g , k6 ve k7 koşullarını sağlasın ve $X \in H_{SP}$, (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. O halde, $0 \leq r, t \leq T$ için

$$E|X(t) - X(r)|^2 \leq c|t - r| \quad (4.26)$$

eşitsizliğini sağlayan öyle bir $c \geq 0$ sabiti vardır (Allen, 2007).

4.3 Itô Formülü ve Kesin Çözümler

Itô SDD'nin kesin çözümlerini bulmak kimi zaman oldukça zordur, ancak Itô formülünün uygun şekilde uygulanmasıyla söz konusu çözümü bulmak kolaylaştırılır. Bir başka ifadeyle Itô formülü, belirli bir SDD'nin kesin çözümlerini bulmak için kullanılır. Ayrıca, kesin çözüm bilinmese bile, belirli problemler için çözümün kesin momentlerini belirlemede Itô formülü kullanılabilir. Bu momentleri bulmak için, Itô integralinin iii. özelliğinden yararlanılır (Allen, 2007).

$0 \leq t \leq T$ ve $X(0) \in H_{RV}$ için diferansiyel formdaki Eşitlik (4.2) Itô SDD ele alınsın. F , Teorem 4.1'in koşullarını sağlayan pürüzsüz (smooth) bir fonksiyon olsun. O zaman Itô formülü $F(t, X)$ 'e uygulanabilir, burada X , Eşitlik (4.2) stokastik diferansiyelini sağlar. O halde F için stokastik diferansiyel

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} + f(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X) \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial x^2} \right) dt + g(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} dW(t) \quad (4.27)$$

formundadır, burada $\frac{\partial F(t, X)}{\partial x} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=X}$ 'dir (Allen, 2007).

Örnek 4.1. Itô formülü ile finansal matematikte bir varlık fiyat modeli olarak çok sık kullanılan ve Bölüm 4.9.1'de detaylı bir şekilde ele alınan

$$dX(t) = \theta_1 X(t) dt + \theta_2 X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0 \quad (4.28)$$

ile verilen GBM SDD'nin kesin çözümü bulunmak istensin. Bunun için Eşitlik (4.28)'de Eşitlik (4.2) dikkate alındığında $f(t, X(t)) = \theta_1 X(t)$ ve $g(t, X(t)) = \theta_2 X(t)$ olduğu görülür. Eşitlik (4.27) ile verilen Itô formülünde $F(t, X(t)) = \ln X(t)$ olarak ele alınsın. O halde, söz konusu denklemdaki kısmi türevler sırasıyla

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} = \frac{1}{X(t)}, \quad \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial x^2} = -\frac{1}{X^2(t)}$$

şeklindedir. Bu değerler Eşitlik (4.27)'de yerine yazıldığında

$$dF(t, X(t)) = \left(\theta_1 X(t) \cdot \frac{1}{X(t)} - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} \cdot \theta_2^2 X^2(t) \right) dt + \theta_2 X(t) \cdot \frac{1}{X(t)} dW(t)$$

$$d \ln X(t) = \left(\theta_1 - \frac{\theta_2^2}{2} \right) dt + \theta_2 dW(t)$$

eşitliğine ulaşılır. Her iki tarafın $[0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^t d \ln X(s) = \int_0^t \left(\theta_1 - \frac{\theta_2^2}{2} \right) ds + \int_0^t \theta_2 dW(s)$$

$$\ln X(t) - \ln X(0) = \left(\theta_1 - \frac{\theta_2^2}{2} \right) t + \theta_2 W(s)$$

$$X(t) = X(0) \exp \left(\left(\theta_1 - \frac{\theta_2^2}{2} \right) t + \theta_2 W(s) \right) \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir. Bu değer, Eşitlik (4.28) ile verilen GBM SDD'nin kesin çözümüdür.

4.4 Stokastik Diferansiyel Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri

SDD'nin kesin çözümlerini elde etmek, özellikle denklem rassal değişkenler içerdiğinden, bir hayli zordur. Dahası kesin çözümleri bulunabilen SDD sınıfı çok dar bir sınıftır. Bu sebeple, SDD'nin çözümünün yaklaşık olarak tahmin edilebilmesi, bir başka ifadeyle nümerik çözümü, sağladığı kolaylık açısından oldukça önemli bir konu haline gelmiştir. Literatürde bu amaç için kullanılan çeşitli yöntemler mevcuttur. Euler-Maruyama (EM) yöntemi, Runge-Kutta yöntemi ve Milstein yöntemi bunlardan bazılarıdır. Bu tez çalışması için yapılan uygulamalarda kurulan Itô SDD modelinin yaklaşık çözümünü belirlemek için literatürde en geniş uygulama alanına sahip olan EM yöntemi kullanılmıştır. Bu sebeple, bu bölümde EM yöntemi ele alınacaktır.

4.4.1 Euler – Maruyama Yaklaşım Yöntemi

Bir Itô sürecinin en basit ayrık zamanlı yaklaşımlarından biri, Euler-Maruyama yaklaşımıdır. Literatürde bu yaklaşım sadece Euler yaklaşımı olarak da ele alınmaktadır. X_j , $X(t, \omega)$ 'nin nümerik yaklaşımlarını göstermek üzere Eşitlik (4.2)'ye EM metodu uygulanırsa

$$X_j = X_{j-1} + f(\tau_{j-1}, X_{j-1})\Delta t + g(\tau_{j-1}, X_{j-1})\left(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})\right) \quad (4.30)$$

şeması elde edilir, burada $X_0(\omega) = X(0, \omega)$ 'dir ve $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j = T$, $[0, T]$ aralığının bir parçalanışı ve $L > 0$ iken $j = 1, 2, \dots, L$ için $\tau_j = j\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{L}$, olmak üzere $X_j \approx X(\tau_j, \omega)$ ve $W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) \sim N(0, \Delta t)$ 'dir. Ayrıca burada L 'nin EM yaklaşımının adım sayısı ve ω 'nın bir yörünge gösterdiğine dikkat etmek gerekir. Eşitlik (4.30)'un nereden geldiğini anlamak için Eşitlik (4.1)'de sırasıyla $t = \tau_j$ ve $t = \tau_{j-1}$ olarak dikkate alınır

$$X(\tau_j, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^{\tau_j} f(s, X(s, \omega))ds + \int_0^{\tau_j} g(s, X(s, \omega))dW(s, \omega) \quad (4.31)$$

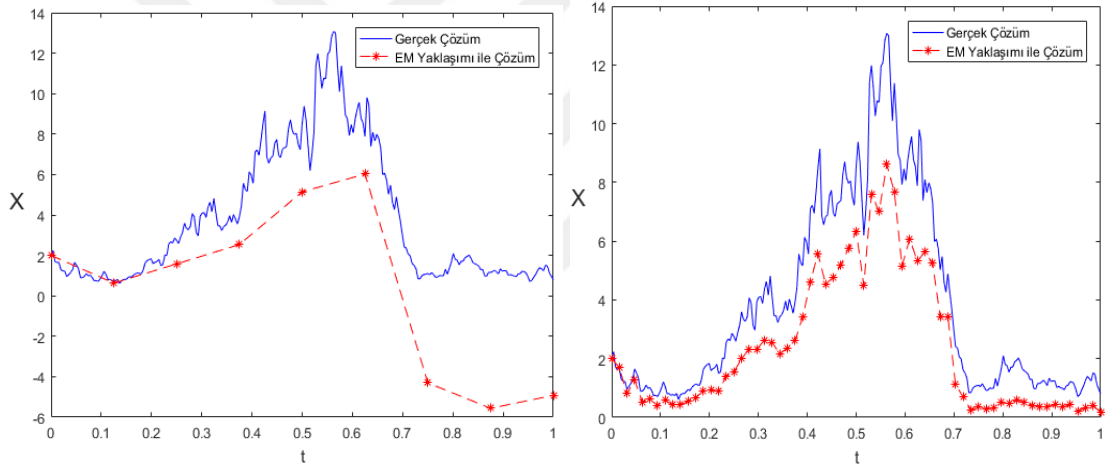
$$X(\tau_{j-1}, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^{\tau_{j-1}} f(s, X(s, \omega))ds + \int_0^{\tau_{j-1}} g(s, X(s, \omega))dW(s, \omega) \quad (4.32)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (4.31) ile Eşitlik (4.32)'nin farkından

$$X(\tau_j, \omega) = X(\tau_{j-1}, \omega) + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(s, X(s, \omega))ds + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} g(s, X(s, \omega))dW(s, \omega) \quad (4.33)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (4.30)'un sağ tarafındaki üç terimin her biri, sırasıyla Eşitlik (4.33)'ün sağ tarafında karşılık gelen terimlere yaklaşır. Ayrıca $X(\tau_j)$, $X(t)$ yaklaşık çözümünün τ_j anındaki değeridir (Higham, 2001).

Örnek 4.2. $[0, 1]$ aralığı üzerinde $N = 2^8$ parçalanışı ile Örnek 4.1’de kesin çözümü hesaplanan bir GBM yörüngesi ele alınsın. EM yaklaşım yöntemi, (4.28) ile verilen GBM SDD’ye uygulansın. Burada, $X(0) = 2$, $\theta_1 = 2$ ve $\theta_2 = 2$ olarak ele alınsın. O halde, Eşitlik (4.29) ile verilen kesin çözüm, “gerçek çözüm” olarak gösterilsin. Ayrıca $[0,1]$ aralığı üzerinde iki farklı adım boyutu $L = 8$ ve $L = 128$ adımları için GBM’nin EM yaklaşık çözümleri “EM yaklaşımı ile çözüm” olarak ifade edilsin. Burada, her iki durum için kesin çözüm ile EM yaklaşık çözümü arasındaki mutlak hata, $L = 8$ için 5.7254 ve $L = 128$ için 0.2230 olarak hesaplanmıştır. O halde, adım sayısı L arttıkça EM çözümleri ile gerçek çözümlerin arasındaki mutlak hatanın düştüğü; bir başka ifadeyle EM çözümünün gerçek çözüme yaklaştığı görülmektedir. Sonuçları veren MATLAB program çıktısı Şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1 GBM’nin gerçek çözümleri ile sırasıyla $L = 8$ ve $L = 128$ adımları için EM çözümlerinin karşılaştırılması

EM yaklaşım yöntemi kullanılarak elde edilen ve Eşitlik (4.1) ile ele alınan SDD modelinin yaklaşık çözümü olan stokastik sürecin x_0, x_1, \dots, x_{N-1} gözlemleri için N adet yörünge elde etmek mümkündür. Bahsi geçen yörüngelerin her biri, τ_j zamanında Eşitlik (4.1)’in çözümü olan ve $X(t)$ stokastik sürecini oluşturan rassal değişkenlerin yaklaşık değerleridir. Bu durum, $i = 0, 1, \dots, N$ ve $j = 0, 1, \dots, L$ için $\tau_j = j\Delta t$ ve $\Delta t = \frac{T}{L}$ olmak üzere, matematiksel olarak

$$\hat{X}(\tau_j) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_L^{(i)}) \quad (4.34)$$

şeklinde belirtilir (Allen, 2007; Iacus, 2008; İnce, 2021). Bu tez çalışmasındaki uygulamalarda EM yaklaşım yöntemi ile elde edilen yörüngelerin adım sayısı, verilen verinin gözlem sayısına eşit olarak, bir başka ifadeyle $L = N$ olarak seçilmiştir.

4.5 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Parametre Tahmini

Fiziksel bir problem, SDD ile modellenmek istendiğinde hangi SDD modelinin kullanılacağına karar verildikten sonra, söz konusu SDD'nin çözümünü bulmadan önce denklemde yer alan parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu durum için literatürde en çok olabilirlik tahmin (MLE) yöntemi, yarı (quasi) en çok olabilirlik tahmin yöntemi (QMLE), sözde en çok olabilirlik tahmin yöntemi, yaklaşık olabilirlik tahmin yöntemi, genelleştirilmiş momentler yöntemi, Bayes tahmini, parametrik olmayan tahmin yöntemi gibi pek çok yöntem vardır. Bu tez kapsamında yapılan uygulamalarda ele alınan veriler için kurulan SDD modellerinin parametre tahmini için yarı en çok olabilirlik tahmin yöntemi kullanılmıştır.

4.5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

$$dX(t) = f(t, X(t); \theta)dt + g(t, X(t); \theta)dW(t) \quad (4.35)$$

İtô SDD ele alınsın, burada $\theta \in \mathbb{R}^m$ bilinmeyen parametrelerin bir vektörüdür. $\Delta t = T/N$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, N$ için $t_i = i\Delta t$ düzgün dağılmış zaman aralığında Eşitlik (4.35)'in çözümü olan $X(t)$ 'nin gözlem verisinin

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$$

olduğu varsayılınsın. O halde buradaki problem, söz konusu $N + 1$ gözlem verisi verildiğinde Eşitlik (4.35)'te bulunan θ parametre vektörünün bir tahminini bulmaktır. Bu sebeple, verilen bir θ vektörü için (t_{k-1}, x_{k-1}) 'den başlayarak (t_k, x_k) noktasının geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonunun $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ olduğu varsayılınsın.

Başlangıç durumundaki olasılık yoğunluğunun ise $p_0(x_0 | \theta)$ olduğu düşünölsün. O zaman, θ vektörünün en çok olabilirlik tahminindeki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$D(\theta) = p_0(x_0 | \theta) \prod_{k=1}^N p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \quad (4.36)$$

olarak ifade edilir. θ vektörünün tahmin edilebilmesi için Eşitlik (4.36)'nın θ üzerinde maksimize edilmesi veya bilgisayar uygulamalarında küçük sayılardan kaçınmak için Eşitlik (4.36)'nın logaritmik ifadesi olan $L(\theta) = -\ln(D(\theta))$ fonksiyonunun minimize edilmesi gerekmektedir. Bir başka ifadeyle,

$$L(\theta) = -\ln(p_0(x_0 | \theta)) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)) \quad (4.37)$$

eşitliği en aza indirilmelidir. $L(\theta)$ 'yı minimize eden θ değeri θ^* olmak üzere; Eşitlik (4.37), geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu içerdiğinden ve söz konusu geçiş yoğunlukları, difüzyon süreçleri için genel olarak bilinemediğinden optimal θ^* değerini bulmak bir hayli zordur. Bu sorunu ortadan kaldırmak için söz konusu geçiş olasılıkları tahmin edilmelidir. Bunun için Eşitlik (4.37)'ye Euler yaklaşımı uygulandığında $t = t_{k-1}$ anındaki $X(t)$ sürecinin gözlem değerleri olarak $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$ olduğu dikkate alınırsa

$$X(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k \quad (4.38)$$

ifadesine ulaşılır, burada $\eta_k \sim N(0,1)$ dağılımına sahiptir. $X(t_i, \omega) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ olmak üzere geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(\frac{-(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right) \quad (4.39)$$

olarak elde edilir, burada

$$\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta t \quad (4.40)$$

$$\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \boldsymbol{\theta})\sqrt{\Delta t} \quad (4.41)$$

şeklindedir. Bu prosedürde geçiş olasılık yoğunluklarının, Euler formülü kullanılarak yaklaşık olarak normal dağılıma yakınsadığı kabul edilmiş olur. Buradan hareketle, Eşitlik (4.37) minimize edilerek $\boldsymbol{\theta}^*$ tahmincisi elde edilir, bir başka ifadeyle $\boldsymbol{\theta}^*$,

$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} L(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.42)$$

eşitliğini sağlar (Allen, 2007; İnce, 2021).

4.5.2 Yarı (Quasi) En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

En çok olabilirlik tahmin yöntemindeki prosedür, geçiş olasılıklarına dayanmaktadır. Ancak bir SDD modelinin difüzyon teriminin geçiş olasılıkları genellikle bilinmemektedir. Bu nedenle, difüzyon teriminin geçiş olasılıkları hakkında ön bilgi gerektirmeyen denklem parametreleri için bir tahmin yöntemi geliştirmek önemli bir konudur. Bu sebeple aşağıda tanıtılan yarı en çok olabilirlik tahmin yöntemi (QMLE), bu amaca ulaşmak için tasarlanmıştır (Su ve Chan, 2015).

$$dX(t) = \mathbf{f}(t, X(t); \boldsymbol{\theta}_1)dt + g(t, X(t); \boldsymbol{\theta}_2)d\mathbf{W}(t), \quad X_0 = x_0 \quad (4.43)$$

SDD ele alınsın, burada \mathbf{W} , X_0 başlangıç değişkeninden bağımsız, m – boyutlu standart bir Wiener sürecidir. Ayrıca, $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1 \subset \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta_2 \subset \mathbb{R}^q$, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^d \times \Theta_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ve $g: \mathbb{R}^d \times \Theta_1 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ şeklindedir. $t_i = i\Delta_n$ olmak üzere $\mathbf{X}_n = (X(t_i))_{i=0, \dots, n}$ verilen örneklem verileri olsun, burada $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta_n \rightarrow 0$ olur. O halde QMLE yöntemi, çok boyutlu difüzyon süreçleri için gerçek log-olasılığının aşağıdaki yaklaşıklığını kullanır:

$$\ln(\mathbf{X}_n; \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log \det(S_{i-1}(\boldsymbol{\theta}_1)) + \frac{1}{\Delta_n} S_{i-1}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_1) \left[(\Delta X_i - \Delta_n \mathbf{f}_{i-1}(\boldsymbol{\theta}_2))^{\otimes 2} \right] \right\} \quad (4.44)$$

burada A^{-1} , A matrisinin tersi, $A^{\otimes 2} = AA^T$, $S = g^{\otimes 2}$, $A[B] = \text{tr}(AB)$ ve $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ olmak üzere $\Delta X_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$, $S_i(\boldsymbol{\theta}_1) = S(\boldsymbol{\theta}_1; X(t_i))$ ve $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\theta}_2) = \mathbf{f}(X(t_i); \boldsymbol{\theta}_2)$ şeklindedir. O halde $\ln(\mathbf{X}_n; \boldsymbol{\theta})$ 'yı maksimize eden $\boldsymbol{\theta}$ değeri $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ olmak üzere $\boldsymbol{\theta}$ 'nin QMLE tahmincisi,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\text{argmax}} \ln(\mathbf{X}_n; \boldsymbol{\theta}) \quad (4.45)$$

eşitliğini tam veya yaklaşık olarak sağlayan bir tahmin edicidir (Iacus ve Yoshida, 2018).

4.6 Değişim Noktası Tahmini (Change Point Estimation)

Değişim noktası (CP) tahmini, bir modelin parametresinde bir değişimin meydana geldiği “an”ın tanımlanmasından oluşan bir problemdir (Iacus, 2008). Bu problem, başlangıçta birçok yazar tarafından bağımsız ve özdeş olarak dağılmış veriler çerçevesinde ele alınmıştır. Son zamanlarda, doğal olarak zaman serisi analizi bağlamına taşınmıştır. Aslında, değişim noktası problemleri başlangıçta, kalite kontrol bağlamında ortaya çıkmış olsa da genel olarak ani değişim problemleri, epidemiyoloji, elektrokardiyogramlarda ritim analizi, sismik sinyal işleme, arkeolojik alanların incelenmesi, finansal piyasalar, ekonomi, psikoloji, jeoloji, edebiyat gibi birçok alanda ortaya çıkmakta ve hatta günlük hayatımızda bile değişen nokta problemleriyle karşılaşılabilir. Özellikle finansal zaman serilerinin analizinde, söz konusu sürecin volatilité yapısındaki değişimin ne zaman gerçekleştiğinin bilinmesi oldukça ilgi çekicidir. Bu sebeple son zamanlarda, değişim noktası tespiti ve tahmininin istatistiksel analizine yoğun bir ilgi vardır. İstatistiksel terimlerle, bir değişim noktası, gözlemlerin o noktaya kadar bir dağılımı ve bu noktadan sonra başka bir dağılımı takip ettiği zamandaki bir yer veya noktadır.

Bu bağlamda, piyasalardaki değişimler göz önünde bulundurulduğunda, değişim noktası tahmini dikkate alınmalıdır. Bu durum, stokastik modelin parametrelerinin dışsal faktörlerden dolayı değiştiği tarihi belirlemeyi içerir. Burada en önemli parametre, daha genel olarak finansal piyasalarda olduğu gibi, volatilité sürecindeki, yani bir SDD modelindeki difüzyon terimindeki değişikliklerdir. Söz konusu probleminin çözümüne yönelik birkaç yaklaşım vardır. En küçük kareler çözümü, yarı-maksimum olabilirlik

değişim noktası tahmini bunlardan bazılarıdır (Iacus, 2008; Iacus ve Yoshida, 2012; Chen ve Gupta, 2014; de Oliveira vd., 2019). Bu tezde, gözlemler ayrık zamanlarda toplandığında, bir SDD ile bir süreç çözümünün parametreleri için bir değişim noktası problemi ele alınmıştır. Parametrelerdeki değişim anı, yaklaşık olabilirlik üzerinden QMLE yöntemi ile geriye dönük olarak belirlenmiştir.

4.6.1 Volatilitenin Değişim Noktası Tahmincisi

Tek boyutlu bir Itô süreci

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t); \theta)dW(t) \quad (4.46)$$

ele alınsın, burada f ve g bilinen fonksiyonlar ve $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, değişim noktası tahmini için ilgilenilen parametredir.

Şimdi, θ parametresinin değerinde bir değişimin meydana gelip gelmediği ve bu değişimin ne zaman meydana geldiği, söz konusu değişim noktası $\tau^* \in [0, T]$ olmak üzere, geriye dönük olarak belirlenmek ve değişim noktasından önce ve sonra θ parametresinin tutarlı bir şekilde tahmin edilmesi istenmektedir. Burada $n\Delta_n = T$ sabiti için $n \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak $\Delta_n \rightarrow 0$ olur. O halde, volatilitenin için değişim noktası problemi aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$X(t) = \begin{cases} X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s); \theta_0^*)dW(s), & t \in [0, \tau^*] \\ X(\tau^*) + \int_{\tau^*}^t f(s, X(s))ds + \int_{\tau^*}^t g(s, X(s); \theta_1^*)dW(s), & t \in [\tau^*, T] \end{cases} \quad (4.47)$$

Burada, anlık değişim noktası τ^* bilinmemektedir. θ , X yolundan örneklenen gözlemler yardımıyla değişim noktasından önce θ_0^* ve değişim noktasından sonra θ_1^* olarak tahmin edilmek üzere τ^* , θ ile birlikte tahmin edilmektedir. Bu durum, finans uygulamalarında sıklıkla ortaya çıkan bir volatilitenin için değişim noktası tahmini problemidir (Iacus, 2008). Söz konusu tahmin işlemi için bu tez çalışmasında, Iacus ve Yoshida (2012)'de açıklandığı gibi QMLE yaklaşımı uygulanmıştır. Bunun için $\Delta_i X = X(t_i) - X(t_{i-1})$, $S = g^{\otimes 2}$ ve

$$G_i(\boldsymbol{\theta}) = \log \det S(X(t_{i-1}); \boldsymbol{\theta}) + \Delta_n^{-1}(\Delta_i X)' S(X(t_{i-1}); \boldsymbol{\theta})^{-1}(\Delta_i X) \quad (4.48)$$

olmak üzere

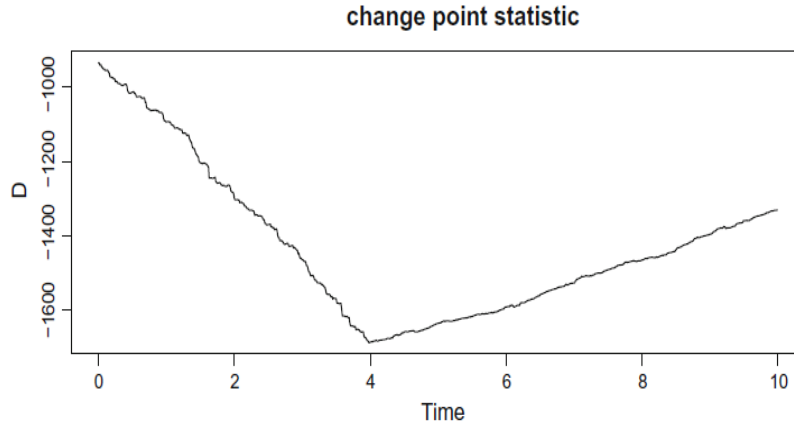
$$\Phi_n(t; \theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt/T \rfloor} G_i(\theta_0) + \sum_{i=\lfloor nt/T \rfloor + 1}^n G_i(\theta_1) \quad (4.49)$$

eşitliği tanımlansın. Eşitlik (4.49), değişim noktası istatistiğidir. $k = 0, 1$ olacak şekilde her θ_k için bir $\hat{\theta}_k$ tahmincisi olduğu varsayılınsın. θ_k^* biliniyorsa $\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_k = \theta_k^*$ olarak tanımlanır. O halde $\hat{\tau}, \tau^*$ 'ın değişim noktası tahmincisi olmak üzere

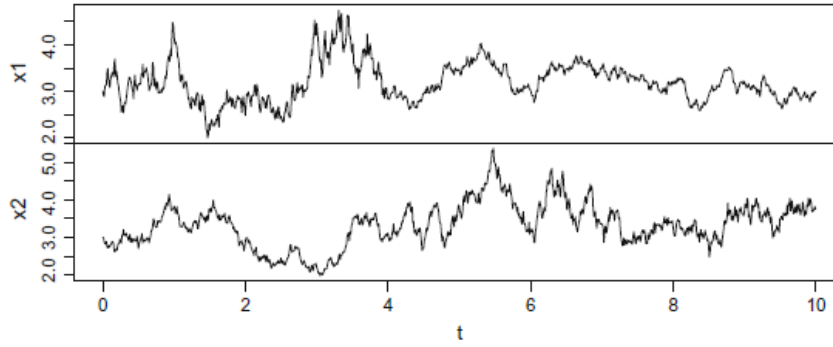
$$\hat{\tau} = \arg \min_{t \in [0, T]} \Phi_n(t; \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) \quad (4.50)$$

şeklinde bulunur. Bir başka ifadeyle, değişim noktası istatistiği Φ_n , değişim noktası tarihinde en küçük değerine ulaşır (Iacus ve Yoshida, 2018).

Pratik durumlarda, parametrelerin başlangıç değerleri bilinmez ve bunlara ilişkin bazı ön tahmin edicilerin sağlanması gerekir. Bunun için faydalı bir yaklaşım, iki aşamalı değişim noktası tahmini yaklaşımıdır (Iacus ve Yoshida, 2012; 2018). Buradaki amaç, $\boldsymbol{\theta}$ parametrelerinin ilk tahminini elde etmek için zaman serisinin en başından ve en sonundan küçük bir gözlem alt kümesi olarak bir değişim noktası tahmin etmek ve ardından değişim noktası hakkındaki bilgileri kullanarak $\boldsymbol{\theta}$ tahminini iyileştirmektir. Bunun için, gözlemlerin yaklaşık ilk $\%m$ 'i ile son $\%m$ 'i, alınarak seçilen model için parametreler tahmin edilir ve böylece bir değişim noktası, yarı maksimum olabilirlik yaklaşımıyla tahmin edilmiş olur, burada $\%m$ genellikle $\%20$ olarak alınır. Tahmin edilen değişim noktasından önce ve sonra seçilen model için parametreler tahmin edilir. Yukarıdaki işlemde elde edilen tahminleri kullanarak yarı-maksimum olabilirlik yaklaşımıyla değişim noktası tekrar tahmin edilir. Bu işleme, yakınsayana kadar devam edilir (Guidotti vd., 2017).



Şekil 4.2 Değişim noktası istatistiği Φ_n



Şekil 4.3 $\tau^* = 4$ civarında değişim noktası olan iki boyutlu yörünge

4.7 Stokastik Diferansiyel Denklemler için Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Verilen bir veri seti için önerilen bir stokastik diferansiyel denklemin drift ve difüzyonunun parametrik veya parametrik olmayan tahmininden sonra, elde edilen modelin geçerliliğine uyumsuzluk testi kullanılarak erişmek oldukça önemli bir konudur. Bu amaçla, tez çalışmasının bu bölümünde SDD modelleri için özel olarak geliştirilen ve uygulaması kolay olan ki-kare uyum iyiliği testi ele alınmıştır. Bir stokastik süreç olduğu düşünülen bir veri seti incelenmek istensin. Söz konusu süreç için bir SDD modelinin geliştirildiği varsayalım. Geliştirilen bu SDD modeli ile veriler arasında bir uyumsuzluk olup olmadığını test etmek için yukarıda bahsedilen ki-kare uyum iyiliği testinden yararlanılır. Bu test için temel fikir, ardışık gözlemler arasındaki yörüngelerin Monte-Carlo simülasyonlarını elde etmek ve bu gözlemleri her noktada orijinal verilerle

karşılaştırmaktır. Her noktada orijinal veriler ve simüle edilmiş gözlemlerin karşılaştırılmasıyla ranklar elde edilir ve bu ranklara bağlı olarak test istatistikleri hesaplanır. $\Delta t = \frac{T}{N} > 0$ sabiti ve $i = 0, 1, \dots, N - 1$ için $t_i = i\Delta t$ olmak üzere t_0, t_1, \dots, t_{N-1} anlarında gözlemlenen stokastik sürecin gözlem verisinin

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$$

olduğu, ayrıca bu süreç için önerilen SDD'nin Eşitlik (4.2)'yi sağladığı varsayalım. O halde ki-kare prosedürünü kullanabilmek için ilk olarak, x_{i-1} gözleminde başlayarak t_{i-1} anından t_i anına kadar Eşitlik (4.2)'nin M adet Monte-Carlo simülasyonu hesaplanmalıdır. Bu nedenle, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $j = 0, 1, \dots, K - 1$ ve $m = 1, 2, \dots, M$ için $X_{0,i}^{(m)} = x_{i-1}$ olmak üzere Eşitlik (4.2)'ye K adımlı Euler yöntemi uygulayarak

$$\begin{aligned} X_{j+1,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + (j+1) \frac{\Delta t}{K} \right) &= X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) + f \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K}, X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) \right) \frac{\Delta t}{K} + \\ &+ g \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K}, X_{j,i}^{(m)} \left(t_{i-1} + j \frac{\Delta t}{K} \right) \right) \sqrt{\frac{\Delta t}{K}} \eta_{j,i}^{(m)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

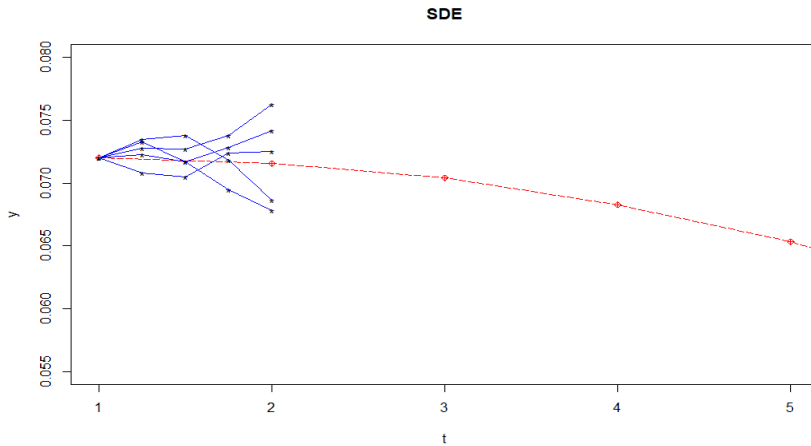
denklemine ulaşılır, burada her bir gözlem sayısı i , adım sayısı j ve simülasyon sayısı m için $\eta_{j,i}^{(m)} \sim N(0,1)$ 'dir ve ayrıca $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{\Delta t}{K}$ için $\Delta W(t, \omega) \sim \sqrt{\frac{\Delta t}{K}} N(0,1)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bir başka ifadeyle, $[t_{i-1}, t_i]$ örneklem aralığı K adet alt aralığa bölünerek t_{i-1} 'den t_i 'ye $t_{i-1}, t_{i-1} + \frac{\Delta t}{K}, t_{i-1} + 2\frac{\Delta t}{K}, \dots, t_{i-1} + (K-1)\frac{\Delta t}{K}$ noktalarına karşılık gelen Euler yaklaşık değerleri hesaplanır. Bu hesaplama alt aralığın her bir noktası için Monte-Carlo simülasyonu ile M adet gerçekleştirilir ve böylece $[t_{i-1}, t_i]$ aralığında M adet yörünge çizilmiş olur. Bu da nihayetinde, her bir t_i için M adet $X_{j,i}^{(m)}$ simülasyon değerlerinin bulunmasını sağlar. O halde, t_i anındaki m . simülasyon değeri $X_i^{(m)} = X_{K,i}^{(m)}$ olmak üzere $m = 1, 2, \dots, M$ için

$$s_i^{(m)} = \begin{cases} 1, & x_i \geq X_i^{(m)} \\ 0, & x_i < X_i^{(m)} \end{cases} \quad (4.52)$$

olarak ve

$$r_i = 1 + \sum_{m=1}^M s_i^{(m)} \quad (4.53)$$

olarak tanımlansın, burada $i = 1, 2, \dots, N - 1$ 'dir. Öyleyse r_i , M kez simüle edilmiş yörüngelerin uç noktaları olan $X_i^{(m)}$ değerleri ile karşılaştırıldığında x_i değerinin rankı olarak ele alınır. Eşitlik (4.53)'ten r_i rankı için $1 \leq r_i \leq M + 1$ eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Burada anlatılan matematiksel işlemler, Şekil 4.4 yardımı ile ifade edilsin. Şekil 4.4'te, $[1,2]$ aralığı $K = 4$ olacak şekilde alt aralıklara bölünmüş ve alt aralıktaki her bir değere karşılık $M = 5$ adet Monte Carlo simülasyonu hesaplanmıştır. Mavi çizgiler söz konusu simülasyonun yörüngelerini “*” ile işaret edilen değerler ise her bir Monte Carlo simülasyonunu göstermektedir, Örneğin, $t = 2$ anındaki x_2 gözlem değeri için rank hesaplanmak istensin. Rank denkleminde belirtilen $s_i^{(m)}$ için $s_2^{(5)}$ değerine bakıldığında x_2 gözlemi, Monte Carlo simülasyonlarının 2'sinden büyüktür, dolayısıyla $s_2^{(5)} = 2$ olarak ve $r_2 = 2 + 1 = 3$ olarak bulunur.



Şekil 4.4 Önerilen herhangi bir SDD için $K = 4$ ve $M = 5$ olmak üzere $[1,2]$ aralığındaki yörüngeler ve simüle edilmiş Monte Carlo değerleri

Artık uyum iyiliği hesaplamasına geçmek için sıfır hipotezi olarak SDD modelinin çözümünün Eşitlik (4.51) ile verilen stokastik süreci sağladığı kabul edilir. Sıfır hipotezi altında, r_i ranklarının, 1 ile $M + 1$ arasında eşit olasılık değerlerine sahip olması yapılacak olan uyum iyiliği testinin temel kabulüdür. Bir başka ifadeyle,

$$P\{r_i = q\} = p_{iq} = \frac{1}{M + 1}; \quad q = 1, \dots, M + 1; \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.54)$$

eşitliği sağlanır. Genellikle, p_{iq} 'nin i ve q 'ya bağlı olduğu ancak, her i için yalnızca bir gözlem değeri mevcut olduğundan zamana bağlı olmadığı varsayılır. Böylece sıfır hipotezini test etmek için ki-kare uyum iyiliği testi kullanılır. Bu testi gerçekleştirmek için gözlenen ve beklenen frekanslara ihtiyaç vardır. Bu sebeple, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$PI_{i,q} = \begin{cases} 1, & r_i = q \\ 0, & r_i \neq q \end{cases} \quad (4.55)$$

olarak ve $q = 1, 2, \dots, M + 1$ için

$$\Omega(q) = \sum_{i=1}^{N-1} I_{i,q} \quad (4.56)$$

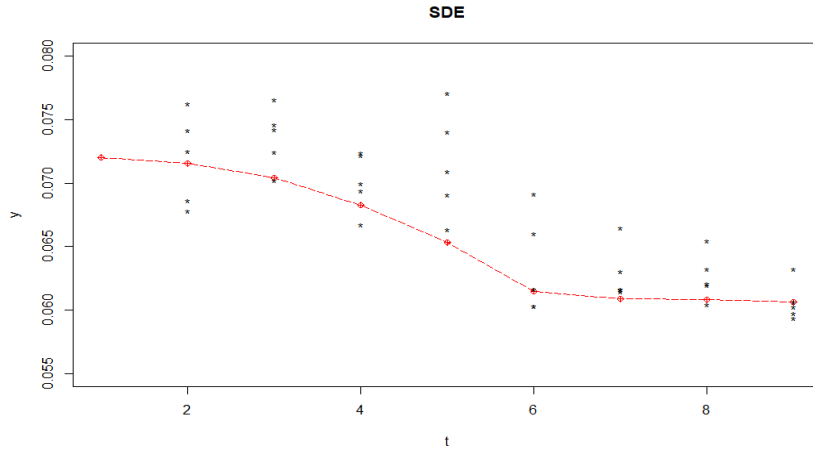
olarak tanımlansın. Burada $\Omega(q)$, rankı q değerine eşit olan gözlenen frekanstır ve en fazla $M + 1$ frekans gözlenebileceğinden

$$\sum_{q=1}^{M+1} \Omega(q) = N - 1 \quad (4.57)$$

toplamı elde edilir. Eşitlik (4.57)'den her q 'ya karşılık gelen birkaç r_i değerinin olduğu, ve böylece r_i ranklarının $\Omega(q)$ şeklinde gruplara bölüldüğü sonucuna ulaşılır. Sıfır hipotezi altındaki beklenen frekansın da $\frac{N-1}{M+1}$ olduğu göz önünde bulundurulursa Pearson teoremine (Neyman ve Pearson, 1933) göre elde edilen test istatistiği

$$\phi_M = \sum_{q=1}^{M+1} \frac{\left(\Omega(q) - \frac{N-1}{M+1}\right)^2}{\left(\frac{N-1}{M+1}\right)} \quad (4.58)$$

şeklindedir. Ayrıca ϕ_M yaklaşık olarak, M serbestlik dereceli χ^2 rassal değişkeni olarak dağılır. O halde, ϕ_M 'nin büyük bir değeri, önerilen SDD modeli ile veriler arasında bir uyum eksikliğine işaret eder. Bir başka ifadeyle $P(\chi^2(M) \geq \phi_M)$, önceden belirlenmiş bir anlamlılık seviyesinden küçükse, o zaman sıfır hipotezi reddedilir ve bu durum, önerilen SDD modelinin gözlem verileri ile uyuşmadığını gösterir. Bunun dışında, eğer sıfır hipotezi altında beklenen frekanslar küçükse, ki-kare yaklaşımı başarısız olur. Pek çok araştırmacı, genellikle uygulanan beklenen frekansların 5'ten az olmaması gerektiği kuralını kullanır. Bu kuralın uygulanması ile, $\frac{N-1}{M+1} \geq 5$ eşitsizliği ve buradan $M \leq \frac{N-6}{5}$ eşitsizliği elde edilir. Örneğin, $N = 250$ ise simülasyon sayısı M , 48'den fazla olmamalıdır (Bak vd., 1999; Allen, 2007; İnce, 2021). Şekil 4.5'te $M \leq 5$ olacak şekilde herhangi bir SDD için her bir gözlem verisine karşılık gelen ve “*” ile gösterilen Monte Carlo simülasyon değerleri gösterilmiştir, burada simülasyon değerlerinin net görülebilmesi için veri setinin tamamı grafikte verilmemiştir.



Şekil 4.5 $M \leq 5$ olacak şekilde herhangi bir SDD için her bir gözlem verisine karşılık gelen Monte Carlo simülasyon değerleri

SDD'ler için geliştirilen bu test, uyumsuzluk olup olmadığını test etmenin yanı sıra, önerilen SDD modelleri arasından en iyi modeli seçmek için de kullanılır. Eşitlik (4.58) kullanılarak elde edilen test değeri, en iyi modeli seçmede, önerilen her model için

karşılaştırılmalıdır. En küçük test değerini veren model, verilere en uygun modeldir. Diğer bir deyişle, en küçük test değeri, gözlenen frekans ile beklenen frekans arasında çok fazla sapma olmadığı için model ve veri arasında uyumluluk olduğunu gösterir (Ergisi, 2019).

4.8 Model Performans Değerlendirmesi

Eldeki veriler için önerilen SDD modelleri arasından en iyi modeli seçmek araştırmacıların ulaşmak istediği bir sonuçtur. Modelin oluşturulmasından sonra modelin tahmin doğruluğunun ölçülmesi ve önerilen modeller arasından seçim yapılması önemli bir konudur. Bunun için istatistiksel bilimlerde çeşitli kriterler mevcuttur. Her bir kriterin kendine göre farklı avantajları ve dezavantajları vardır. Bu sebeple bu tez çalışmasında literatürde en çok kullanılan dört kritere yer verilmiştir. Bunlar AIC, BIC, MAPE ve RMSE'dir.

Bilgi teorisine dayalı model seçimi, istatistiksel bilimlerde oldukça farklı bir yaklaşımı temsil eder ve sonuçta seçilen model, bir tür istatistiksel sıfır hipotez testine dayalı model seçiminden önemli ölçüde farklı olabilir. Burada sunulan bilgi-teorik yaklaşım altında model seçimi, muhtemelen en iyi modeli belirlemeye çalışır, modelleri en iyiden en kötüye doğru sıralar ve her modelin bir çıkarım olarak gerçekten en iyisi olduğuna dair bir kanıt ağırlığı üretir (Burnham ve Anderson, 2002).

4.8.1 Akaike Bilgi Kriteri Model Seçimi

Akaike bilgi kriteri (AIC), 1973 yılına dayanmaktadır ve daha geniş bir model sınıfına gömülü en iyi modeli arayacak şekilde yapılandırılmıştır. Kabaca söylemek gerekirse, log olasılığının eksi iki katı ile parametre uzayının boyutunun iki katının toplamı olarak tanımlanan, olabilirliğe dayalı bir yöntemdir. Bir rakip model sınıfı verildiğinde, en iyi model AIC kriterini *en aza* indiren modeldir. Buradaki ana varsayım, gerçek modelin şu anda rakip olanlar arasında yer almasıdır; aksi takdirde bir yanlış belirleme sorunu ortaya çıkar (Iacus, 2008).

AIC, belirli bir veri seti için istatistiksel bir modelin göreceli kalitesinin bir ölçüsüdür. Bu nedenle AIC, muhtemelen iç içe olmayan modellerin model seçimi için

kullanılan bir araçtır, ancak istatistiksel bir test değildir. Gerçekten de AIC istatistiği, modelin kalitesi hakkında mutlak anlamda hiçbir şey söylemez; yani, tüm aday modeller zayıf bir şekilde eldeki veriye uyuyorsa, AIC bununla ilgili herhangi bir uyarı vermeyecektir. AIC, modelin uygunluğu ile modelin karmaşıklığı arasındaki denge ile ilgilenir.

$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ ve $\hat{\theta}_n$, θ 'nin en çok olabilirlik tahmincisi olsun. O zaman AIC istatistiği

$$AIC = -2\ln(\hat{\theta}_n) + 2\dim(\theta) \quad (4.59)$$

şeklinde tanımlanır (Iacus ve Yoshida, 2018). Bir başka ifadeyle, AIC hesaplanmasındaki temel amaç, parametre uzayının boyutunun bir fonksiyonu olan bir bilgi kriterini kullanarak ayırık gözlemler temelindeki sürekli modeli tanımlamaya çalışmaktır (Iacus, 2008). Görüldüğü gibi difüzyon süreçleri, geçiş olasılıkları hesabı içerdiğinden ve $\ln(\hat{\theta}_n)$ 'nin açık ifadesinin bilindiği yalnızca birkaç model olduğundan, çoğu durumda Bölüm 4.6'da değinilen yaklaşık olabilirlik yöntemlerinden birine ihtiyaç duyulur. Bu sorunu ortadan kaldırmak için önerilen çözüm, yaklaşık log-olabilirlik fonksiyonunu dikkate almaktır (Uchida ve Yoshida, 2005). Bu sebeple, bu tez çalışmasında kullanılan RStudio yazılımı “yuima” kütüphanesi de, SDD modelleri için, özellikle MLE sınıfını, QMLE yönteminin çıktısı gibi genişleten nesnelere için değerlendiren AIC adında bir fonksiyona sahip olduğundan AIC değeri hesaplanırken MLE tahmincileri yerine QMLE tahmincilerini ele almaktadır. Bu durum hakkında detaylı bilgiye (Uchida ve Yoshida, 2005; Iacus ve Yoshida, 2018) 'ten ulaşılabilir.

4.8.2 Bayes Bilgi Kriteri Model Seçimi

İstatistikte, Bayes bilgi kriteri (BIC), AIC'ye benzer şekilde sonlu bir model seti arasından *en doğru* modeli seçmeyi amaçlayan; log olasılığının eksi iki katı ile parametre uzayının boyutuna ve veri seti büyüklüğüne bağlı olan bir kriterdir. Genellikle daha düşük BIC değerine sahip olan modeller en doğru model olarak tercih edilmektedir. AIC hesabı-

na benzer şekilde, yine RStudio yazılımı “yuima” kütüphanesinde, SDD modelleri için BIC değeri hesaplanırken MLE tahmincileri yerine QMLE tahmincileri ele alınmaktadır.

$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ ve $\hat{\theta}_n$, θ 'nın en çok olabilirlik tahmincisi olsun. O zaman BIC istatistiği

$$BIC = -2\ln(\hat{\theta}_n) + \dim(\theta) \cdot \ln(n) \quad (4.60)$$

şeklinde Bayes bağlamında Schwarz tarafından 1978'de türetilmiştir ve "boyut tutarlı kriterlerin" en iyi bilinenidir (Schwarz, 1978; Burnham ve Anderson, 2002).

4.8.3 Model Performans Değerlendirmesi için MAPE

Ortalama mutlak hata yüzdesi (MAPE), farklı modeller veya farklı zamanlar için tahminin doğruluğunu ölçmek amacıyla kullanılır ve

$$MAPE = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{|X_i - Y_i|}{X_i} \right) \cdot 100 \quad (4.61)$$

eşitliği ile hesaplanır, burada n gözlem sayısı, X_i gözlemlenen değerler ve Y_i modelden tahmin edilen değerlerdir. Farklı MAPE değerlerinin yorumları Çizelge 4.1’de verilmiştir (Ergisi, 2019).

Çizelge 4.1 MAPE değerlerinin yorumlanması

Değer	Yorum
$MAPE < 0.1$	Mükemmel tahmin
$0.1 \leq MAPE < 0.2$	İyi tahmin
$0.2 \leq MAPE < 0.5$	Makul tahmin
$MAPE \geq 0.5$	Kusurlu tahmin

4.8.4 Model Performans Değerlendirmesi için RMSE

Ortalama karekök hatası (RMSE), pek çok istatistiksel çalışmada model performansını ölçmek için standart bir metrik olarak kullanılmaktadır. RMSE,

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2} \quad (4.62)$$

eşitliği ile hesaplanır, MAPE'ye benzer şekilde burada n gözlem sayısı, X_i gözlemlenen değerler ve Y_i modelden tahmin edilen değerlerdir (Chai ve Draxler, 2014).

4.9 Bazı Önemli SDD Modelleri

Bu bölümde literatürde, özellikle finasta, yaygın olarak kullanılan ve iyi bilinen geometrik Brownian hareketi süreci ve Cox-Ingersoll-Ross SDD'lerin bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Bunun için $\{X(t), t \geq 0\}$, başlangıç değeri X_0 olarak verilen ve Eşitlik (4.2)'nin tek bir çözümü olan bir boyutlu bir difüzyon süreci olsun. Buradan hareketle aşağıdaki süreçler ele alınmıştır.

4.9.1 Geometrik Brownian Hareketi Süreci

Geometrik Brown hareketi (GBM) ile matematiksel modellemede sıklıkla karşılaşılmaktadır. GBM, gelir dağılımı, vücut ağırlıkları, yağış, kaya kırma süreçlerinde parça boyutları da dâhil olmak üzere çeşitli doğal fenomenlerin dinamiklerinin temelini oluşturmak için kullanılmıştır. Yapısal olarak, GBM, rastgele değişen faiz miktarının logaritmasının sürüklenmeli bir Brown hareketini takip ettiği basit, sürekli zamanlı stokastik bir süreçtir. Buradaki stokastiklik, volatiliteden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla ilk yaklaşımda volatilitenin, stokastik bir süreçtir. Yerel volatilitenin modellerinde varlık fiyatları, difüzyon katsayısının fiyatın bir fonksiyonu olan bir SDD'yi takip eder. (Stojkoski vd., 2020).

Varlık fiyatlarını modellemek için finans bağlamında kullanılan GBM süreci daha önce Eşitlik (4.28) ile verilen aşağıdaki

$$dX(t) = \theta_1 X(t)dt + \theta_2 X_t dW(t), \quad X_0 = x_0$$

SDD'nin çözümüdür, burada $\theta_2 > 0$ 'dır ve θ_1 parametresi sabit faiz oranı, θ_2 parametresi ise riskli faaliyetlerin volatilitesi olarak yorumlanır. Örnek 4.1'de Eşitlik (4.29) şeklinde hesaplanan kesin çözümün logaritması alındığında, log-ortalama ve log-varyans

$$\mu = \log(x_0) + \left(\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)t \quad (4.63)$$

$$\sigma^2 = \theta_2^2 t \quad (4.64)$$

olarak, koşullu yoğunluk fonksiyonu ise, Eşitlik (4.63) ve Eşitlik (4.64) tarafından verilen logaritma dönüşümünün ortalaması ve varyansı (yani log-ortalama ve log-varyans) ile log-normaldir. Aşağıdaki gibi elde edilir.

$$p_\theta(t, y | x_0) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.65)$$

$$p_\theta(t, y | x_0) = \frac{1}{y\theta_2\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{\left(\log y - \left(\log x_0 + \left(\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)t\right)\right)^2}{2\theta_2^2 t}\right\} \quad (4.66)$$

Burada, $X(t)$ sürecinin ortalama ve varyansı ise

$$m(t, x_0) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = x_0 e^{\theta_1 t} \quad (4.67)$$

$$v(t, x_0) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = x_0^2 e^{2\theta_1 t} (e^{\theta_2^2 t} - 1) \quad (4.68)$$

fonksiyonları ile elde edilir (Iacus, 2008).

4.9.2 Cox-Ingersoll-Ross Süreci

Bir başka parametrik model ailesi, Cox-Ingersoll-Ross (CIR) sürecidir. Bu model Feller tarafından nüfus artışı için bir model olarak tanıtılmış ve Cox, Ingersoll ve Ross'un kısa vadeli faiz oranlarını modellemeyi önermesinden sonra finasta oldukça popüler hale gelmiştir. Son zamanlarda Pedersen tarafından topraktan nitroz oksit emisyonunu ve moleküler evrimde bölgeler arasındaki evrimsel hız değişimini modellemek için benimsenmiştir. CIR süreci,

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 \sqrt{X(t)} dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0 \quad (4.69)$$

eşitliği ile verilen SDD'nin bir çözümüdür, burada $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}^+$ şeklindedir. Bu modelde, $2\theta_1 > \theta_3^2$ ise süreç kesinlikle pozitifdir, diğer durumlarda süreç negatif değildir, bir başka ifadeyle süreç sıfır durumuna ulaşabilir. Ancak CIR süreci finasta faiz oranlarını modellemek için kullanıldığında bahsedilen bu durum geçerli değildir.

Eşitlik (4.69)'un kesin çözümü

$$X_t = \left(X_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} \int_0^t e^{\theta_2 s} \sqrt{X_s} dW_s \quad (4.70)$$

şeklinde, ortalama ve varyans ise

$$m(t, x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} \quad (4.71)$$

$$v(t, x_0) = x_0 \frac{\theta_3^2 (e^{-\theta_2 t} - e^{-2\theta_2 t})}{\theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2^2} \quad (4.72)$$

şeklindedir (Iacus, 2008).

Eşitlik (4.69) ile verilen CIR SDD'nin kesin çözümü Eşitlik (4.70)'in stokastik integral içerdiğine ve bu sebeple hesaplanmasının kolay olmadığına dikkat etmek gerekir. Kesin çözümünün bulunmasının yerine, kesin çözüme yaklaşan nümerik çözüm

yöntemleri tercih edilebilir. Bu sebeple, bu çalışmada hem GBM SDD hem de CIR SDD için EM yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Söz konusu EM çözümlerinin hangi aralıkta değişeceğini bulabilmek adına stokastik süreçlerin çözümleri için oluşturulan güven aralığı

$$m(t, x_0) \pm 2\sqrt{v(t, x_0)} \quad (4.73)$$

kullanılır (Mikosch, 1998).





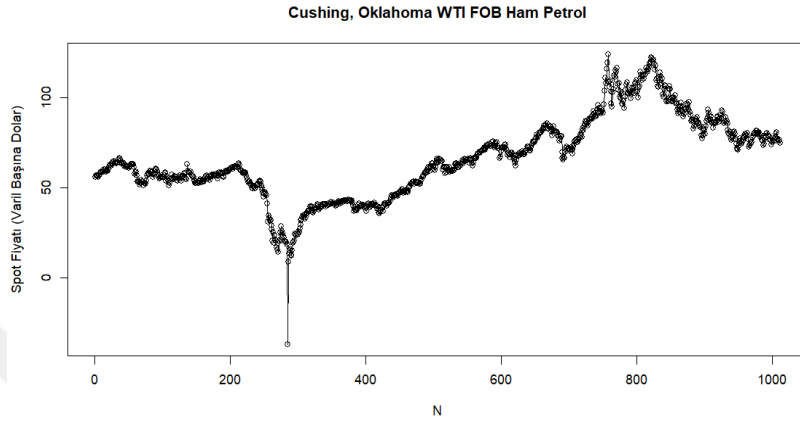
5. WTI HAM PETROL VERİLERİ İÇİN SDD MODELLEMESİ

Bir ekonominin can damarı olarak anılan ham petrol, bu nedenle petrol fiyatlarındaki dalgalanmalar dünya çapında birçok ülkeyi önemli ölçüde etkilemektedir (Sabah vd., 2021). Covid-19 pandemisinin yol açtığı insani kayıp ve ekonomik hasara paralel olarak ham petrol fiyatlarında önemli ölçüde düşüşler yaşanmıştır. Pek çok ülkenin trafik ablukaları ve karantina emirleri uygulayarak üretimi ve ticari faaliyetleri kısıtlaması bağlamında Covid-19 salgını küresel olarak ham petrol hareketliliğini kısıtlamış ve Nisan 2020'nin başlarında petrol talebinde 30 milyon varilden fazla düşüşe neden olmuştur. Ayrıca Suudi Arabistan, 9 Mart 2020'de ham petrol fiyatını %20'den fazla düşürerek ve “Kara Pazartesi” olarak adlandırılan aynı gün şok yayımlarıyla finansal piyasaları çökerten bir petrol fiyatı savaşı başlatmıştır. Rusya ile Suudi Arabistan arasındaki bu savaş, petrol fiyatlarında tarihin en sert düşüşüne sebep olmuştur. Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda modern tarihin en büyük piyasa kapanması yaşanmış ve 20 Nisan 2020'de bir noktada, ham petrol fiyatlarının WTI ölçütü varil başına -36,98\$'a düşmüştür (Corbet vd., 2021). Ayrıca bu dönemde, COVID-19 salgınının yanı sıra Rusya-Ukrayna savaşının küresel etkileri nedeniyle ham petrol fiyatlarında büyük dalgalanmalar gerçekleşmiş, Rusya'nın Ukrayna'ya başlattığı askeri müdahalenin ardından petrol fiyatları hızla yükselişe geçmiştir (Mbah ve Wasum, 2022). Petrol ve petrol ürünleri arz ve talebi değiştikçe bu dalgalanmanın şiddeti artacaktır. (Jahanshahi vd., 2022). Bu sebeple, küresel ölçekte petrol fiyatlarını tahmin etmek oldukça önemli hâle gelmiştir.

Yukarıdaki bilgiler ışığında, petrol fiyatlarındaki ani dalgalanmaların, özellikle son bir kaç yılda, çeşitli küresel etkiler sebebiyle dünya çapında birçok ülkeyi önemli ölçüde etkilemesi sebebiyle bu tez çalışmasında, Şekil 5.1'de grafiği verilen, 01.03.2019 ile 13.03.2023 tarihleri arasındaki WTI petrol kapanış verileri, standart Wiener süreci şeklinde bir yörünge takip ettikleri için SDD modellemesi ile ele alınmıştır. Söz konusu veri seti ABD Enerji Bilgi İdaresi (U.S. Energy Information Administration (EIA))'nin <https://www.eia.gov/dnav/pet/hist/RWTCD.htm> adresli internet sitesinden elde edilmiştir.

WTI; Teksas ve Güney Oklahoma'da üretilen ve bir dizi başka ham petrol akışının fiyatlandırılması için bir referans veya “işaret” işlevi gören ve Cushing, Oklahoma'daki

yerel spot piyasada alınıp satılan ham bir akış olarak tanımlanmaktadır. Yukarıda belirtilen tarihlerdeki WTI verilerini modellemek için CP değişim noktası tahminini dikkate alan bir hibrit SDD modeli önerilmiştir. Bu modeli elde edebilmek amacıyla finasta çok sık kullanılan GBM SDD ve CIR SDD modelleri dikkate alınmıştır.

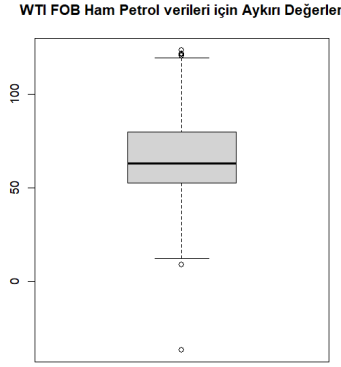


Şekil 5.1 Varil başına Dolar cinsinden ele alınan WTI ham petrol verileri

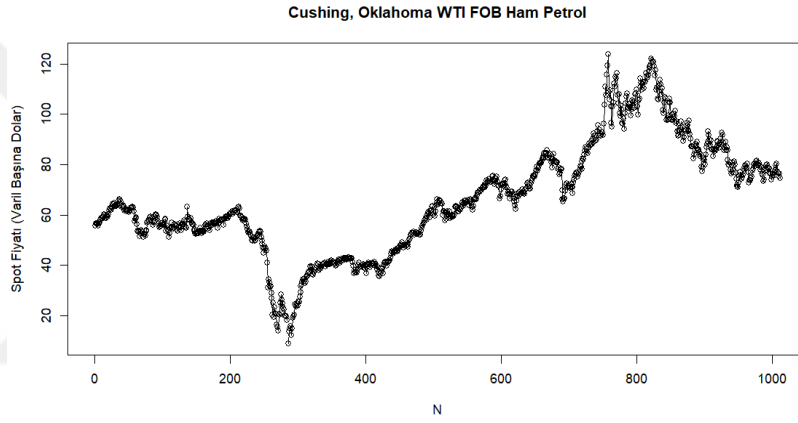
SDD modellerini dikkate alabilmek için öncelikle, söz konusu veri setinin Wiener süreci varsayımlarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

5.1 WTI Veri Seti için Wiener Süreci Varsayımlarının Kontrolü

SDD modellemesine geçmeden önce WTI veri setinin, Wiener sürecinin normallik, artışlarının durağanlığı ve bağımsızlığı varsayımlarını sağlayıp sağlamadığı sınanmalıdır. Öncelikle, yukarıda anlatılan sebeplerden ötürü 20 Nisan 2020 tarihindeki verinin kapanış fiyatının negatif değerlere düşmesi, veri setinin normallik varsayımını sağlamasını olumsuz etkilemiştir. Kaldı ki petrol verilerinin bu şekilde negatif değerlere düşmesi alışılabilir ve beklenen bir durum değildir. 1012 günlük veri setinde aykırı değer tespiti yapıldığında, 20 Nisan 2020 tarihli verinin aykırı değer olduğu sonucuna varılmış ve bu değer, SDD analizini yapabilmek açısından veri setinden arındırılmıştır. İlgili grafik Şekil 5.2’de gösterilmiştir. Aykırı değerlerden arındırılan WTI verileri Şekil 5.3’te gösterilmiştir.



Şekil 5.2 WTI ham petrol verileri için aykırı değerler



Şekil 5.3 Aykırı değerlerden arındırılan WTI ham petrol verileri

5.1.1 Normallik Varsayımının Kontrolü

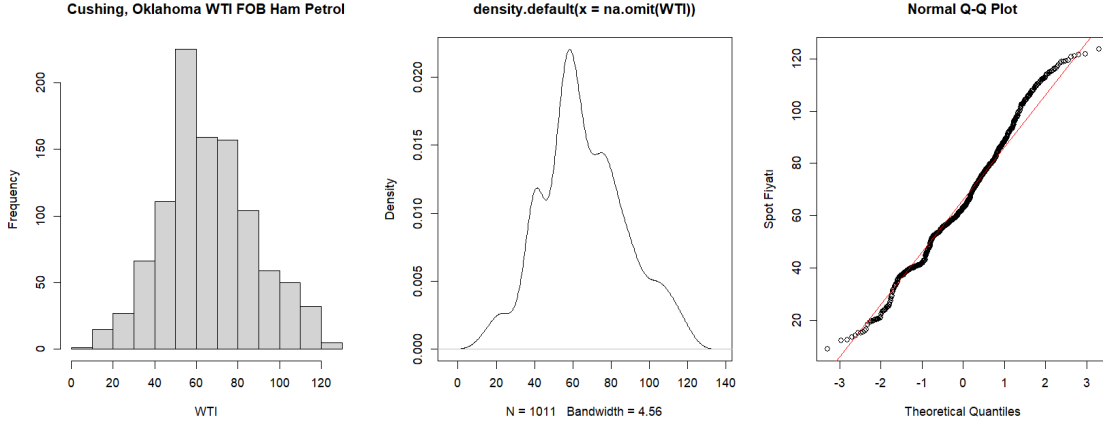
WTI veri setinin, Wiener sürecinin normallik varsayımını sağlayıp sağlamadığı

H_0 : WTI veri seti normal dağılımlıdır.

H_1 : WTI veri seti normal dağılımlı değildir.

hipotezleri altında RStudio programı “tseries” kütüphanesi kullanılarak Jarque-Bera normallik testi ile sınanmış ve elde edilen 4.3262 test istatistiğine karşılık gelen p değeri 0.115 olarak elde edilmiştir. Buna göre, $p = 0.115 > 0.05 = \alpha$ olduğundan %5’lik anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezi red edilemez, bir başka ifadeyle WTI veri setinin normal dağılımlı olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca normallik sınaması grafiksel olarak Şekil 5.4’te

gösterilmiştir. Buradan, söz konusu veri setinin asimptotik olarak normal olduğu görülmektedir.



Şekil 5.4 WTI verisinin histogramı, yoğunluk fonksiyonu ve Q-Q plot'ı

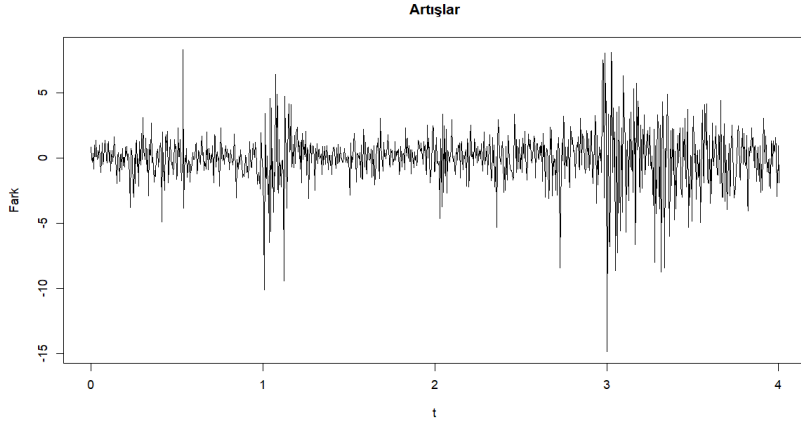
5.1.2 Durağanlık Varsayımının Kontrolü

İkinci adım olarak WTI veri setinin durağanlık varsayımı sınaması

H_0 : WTI veri seti artışları durağandır.

H_1 : WTI veri seti artışları durağan değildir.

hipotezleri altında, RStudio programının “urca” kütüphanesi kullanılarak genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) birim kök testi ile yapılmıştır. Elde edilen -23.2192 test istatistiği, %1, %5 ve %10 anlamlılık düzeylerinde sırasıyla -3.43 , -2.86 ve -2.57 olarak elde edilen kritik değerlerden küçük olduğundan H_0 hipotezi red edilememiştir, bir başka ifadeyle; WTI veri seti artışları durağandır. WTI veri setinin artışları Şekil 5.5'te gösterilmiştir. Burada, $0 = t_0 = 01.03.2019$ ile $13.03.2023 = t_n = T$ tarihleri arasında değişen WTI veri seti için $i = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\Delta = t_{i+1} - t_i = 1/252$ olarak alınarak t zamanı $[0, 4)$ aralığına dönüştürülmüştür. Tez çalışmasının tümünde t zamanı bu şekilde ele alınmıştır.



Şekil 5.5 WTI veri setinin artışları

5.1.3 Bağımsızlık varsayımının kontrolü

Son adım olarak WTI veri setinin bağımsızlık varsayımı sınaması

H_0 : WTI veri seti artışları bağımsızdır, bir başka ifadeyle verilerin tüm gecikmeleri için otokorelasyon katsayıları sıfıra eşittir.

H_1 : WTI verilerinin tüm gecikmeleri için otokorelasyon katsayıları sıfırdan farklıdır.

hipotezleri altında Box-Pierce testi ile yapılmış ve elde edilen 0.0038642 test istatistiğine karşın p değeri 0.9504 olarak hesaplanmıştır. Buna göre, $p = 0.9504 > 0.05 = \alpha$ olduğundan %5'lik anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezi red edilemez, bir başka ifadeyle WTI veri seti artışlarının bağımsızlığı sağlanmış olur.

WTI veri seti için Wiener sürecinin normallik, durağanlık ve bağımsızlık varsayımları sağlandığından modellemeye geçilebilir.

5.2 WTI Veri Seti için SDD Modellemesi

Bunun için öncelikle amaçlanan hibrit modeli kurabilmek için gerekli olan GBM SDD ve CIR SDD modelleri sırasıyla Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2) ile aşağıda verilmiştir:

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = X(0) \quad (5.1)$$

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = X(0) \quad (5.2)$$

Burada her iki denklemde de X_t , WTI kapanış fiyatını; X_0 , WTI verilerinin başlangıç değerini; θ_1 ve θ_2 , sürüklenme katsayısının sabitlerini; σ ise sürecin volatilité parametresini göstermektedir. Bu çalışmada ilk olarak WTI veri seti, değişim noktası dikkate alınmadan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2) ile modellenmiştir. Bunun için öncelikle modeldeki parametreler, QMLE yöntemi ile tahmin edilmiş ve sonuçlar Çizelge 5.1’de verilmiştir. Bu tez çalışmasındaki tüm parametre ve değişim noktası tahminleri RStudio programının “yuima” kütüphanesi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Çizelge 5.1 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)’nin parametre tahmin sonuçları

Model/Parametre	θ_1		θ_2		σ	
	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata
GBM SDD	0.3373	0.3599	-	-	0.7206	0.0161
CIR SDD	108.8132	42.4974	1.5787	0.6945	4.2037	0.0952

Elde edilen parametreler her iki denklemde yerine yazılırsa

$$dX_t = 0.3373X_t dt + 0.7206X_t dW_t, \quad X_0 = 55.76 \quad (5.3)$$

$$dX_t = (108.8132 - 1.5787X_t)dt + 4.2037\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = 55.76 \quad (5.4)$$

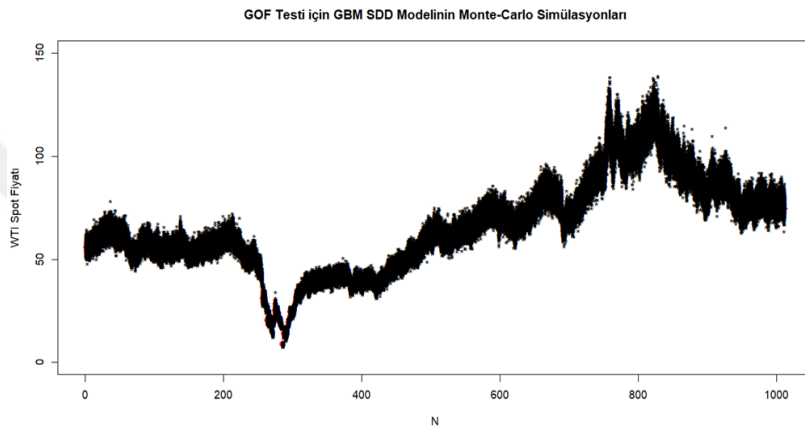
denklemlerine ulaşılır. Parametre tahmini yapıldıktan sonra, Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modeli ile veriler arasında bir uyumsuzluk olup olmadığını test etmek için Bölüm 4.7’de dikkate alınan ki-kare uyum iyiliği testinden yararlanılmıştır. O halde,

H_0 : Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri arasında uyum eksikliği yoktur,

H_1 : Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri arasında uyum eksikliği vardır,

hipotezleri altında $N = 1012$ adet gözlem değerinin her biri için $M = 201$ adet Monte-Carlo simülasyonu elde edilmiş ve ki-kare hesap değeri $\chi^2_1 = 247.5545$ olarak bulunmuştur. Burada, GBM SDD’nin hesaplanan iki adet parametresi olduğundan

serbestlik derecesi $sd = 201 - 2 = 199$ olmak üzere %1 anlamlılık düzeyinde, yani $\alpha = 0.01$ için, ki-kare tablo değeri $\chi^2_{199,0.01} = 248.3286$ şeklindedir. Buna göre; $\chi^2_1 < \chi^2_{199,0.01}$ olduğundan model ile veriler arasında uyum eksikliği olmadığına dair verilen sıfır hipotezi reddedilemez. Bir başka ifadeyle; Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.6'da görsel olarak verilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.



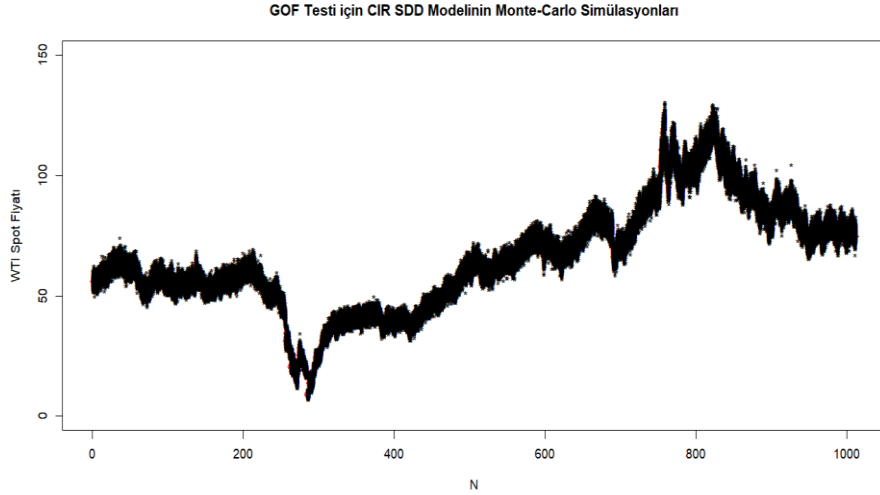
Şekil 5.6 Eşitlik (5.3) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

Benzer bir şekilde, Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modeli ile veriler arasında bir uyumsuzluk olup olmadığını test etmek için ki-kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır. O halde,

H_0 : Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

H_1 : Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir,

hipotezleri ile $N = 1012$ ve $M = 201$ için ki-kare hesap değeri $\chi^2_2 = 229.9195$ olarak bulunmuştur. Burada, CIR SDD'nin hesaplanan üç adet parametresi olduğundan serbestlik derecesi $sd = 201 - 3 = 198$ olmak üzere $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{198,0.01} = 247.2118$ şeklindedir. Buna göre; $\chi^2_2 < \chi^2_{198,0.01}$ olduğundan sıfır hipotezi reddedilemez. Bir başka ifadeyle; Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumludur. Şekil 5.7'de uyum iyiliği gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.



Şekil 5.7 Eşitlik (5.4) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

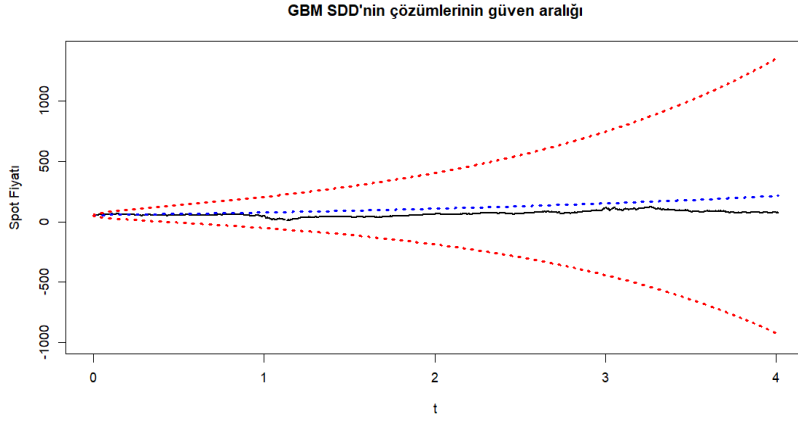
Model ile veri arasında uyum söz konusu olduğuna göre kurulan SDD'lerin yaklaşık çözümünü hesaplamaya geçilebilir. İlk olarak Eşitlik (5.3) ele alınsın. Bu denklemin Eşitlik (4.67) ve Eşitlik (4.68) tarafından elde edilen ve Eşitlik (5.5) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.6) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.8'de gösterilmiştir. Bu tez çalışmasındaki tüm güven aralıkları, EM çözümleri ve grafikler RStudio programı yardımıyla elde edilmiştir.

$$m_{GBM}(t, x_0) = 55.76 \exp(0.3373t) \quad (5.5)$$

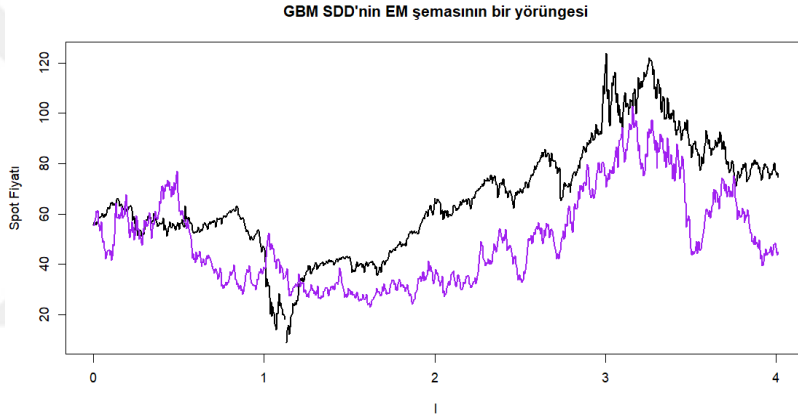
$$v_{GBM}(t, x_0) = (55.76)^2 \exp(2(0.3373)t) (\exp((0.7206)^2 t) - 1) \quad (5.6)$$

Burada mavi kesikli çizgi $m_{GBM}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.5) ve Eşitlik (5.6) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{GBM}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{GBM}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.

Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.9'da gösterilmiştir. Burada siyah çizgi ile WTI gözlem verileri, mor çizgi ile EM nümerik çözümleri gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.8'de gösterilen aralığa düşmektedir.



Şekil 5.8 Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

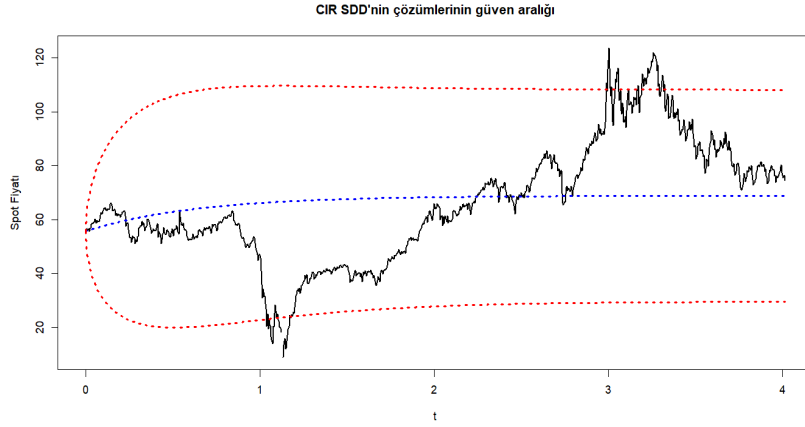


Şekil 5.9 Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

İkinci adım olarak Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD denklemi ele alınsın. Bu denklemin Eşitlik (4.71) ve Eşitlik (4.72) tarafından elde edilen ve Eşitlik (5.7) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.8) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.10'da gösterilmiştir.

$$m_{CIR}(t, x_0) = \frac{108.8132}{1.5787} + \left(55.76 - \frac{108.8132}{1.5787} \right) \exp(-1.5787t) \quad (5.7)$$

$$v_{CIR}(t, x_0) = 55.76 \cdot \frac{(4.2037)^2 (e^{-1.5787t} - e^{-2(1.5787)t})}{1.5787} + \frac{108.8132(4.2037)^2 (1 - e^{-2(1.5787)t})}{2(1.5787)^2} \quad (5.8)$$

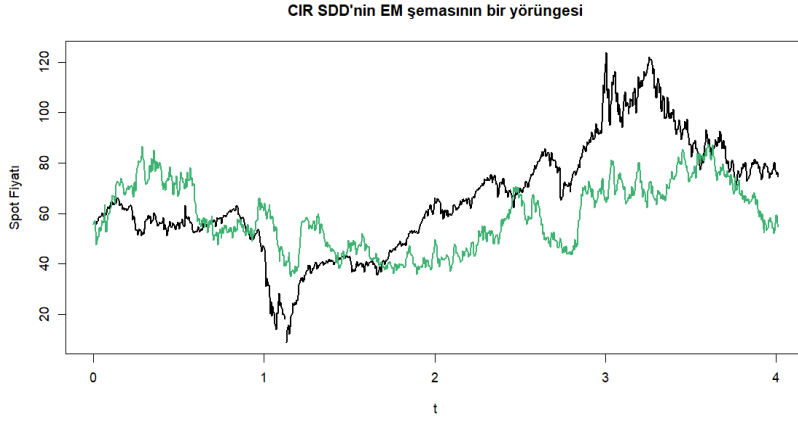


Şekil 5.10 Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

Burada mavi kesikli çizgi $m_{CIR}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.7) ve Eşitlik (5.8) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{CIR}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{CIR}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir. Dikkat etmek gerekir ki, Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin güven aralığı, Eşitlik (5.3) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin güven aralığından daha dar ve WTI veri setine daha yakındır. Ayrıca her iki model için ki-kare hesap değerleri karşılaştırıldığında da bu durum desteklenmektedir. Çünkü Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin ki-kare hesap değeri $\chi^2_2 = 229.9195$, Eşitlik (5.3) ile verilen (5.3) GBM SDD'nin ki-kare hesap değeri $\chi^2_1 = 247.5545$ 'den küçüktür. Bölüm 4.7'de ki-kare hesap değerlerinin model performansı değerlendirmesi açısından ele alınabileceği ifade edilmiştir.

Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.11'de gösterilmiştir. Burada siyah çizgi ile WTI gözlem verileri, yeşil çizgi ile EM nümerik çözümünün yörüngesi gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.10'da gösterilen aralığa düşmektedir.

Ancak Şekil 5.9 ve Şekil 5.11 dikkate alındığında elde edilen çözümlerin WTI veri setindeki ani düşüş ve artışları yansıtamadığı düşünülmüştür. Bu sebeple veri setinin değişim noktaları, GBM SDD ve CIR SDD denklemleri dikkate alınarak hesaplanmıştır.



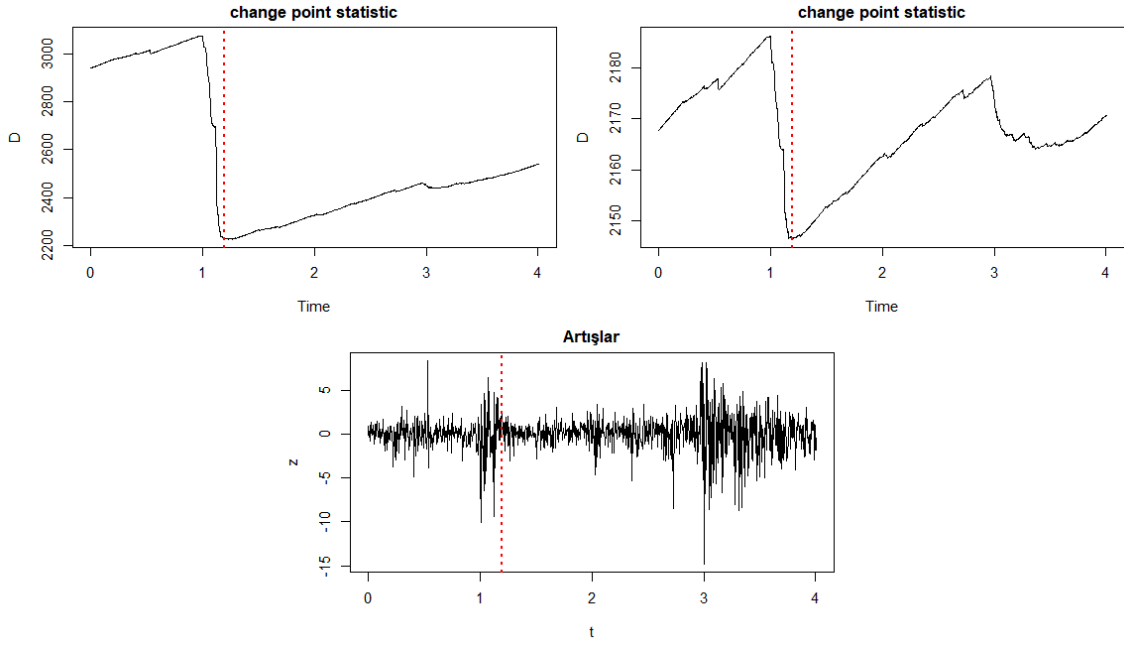
Şekil 5.11 Eşitlik (5.4) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

5.3 WTI Veri Seti için Değişim Noktası (CP) Tahmini

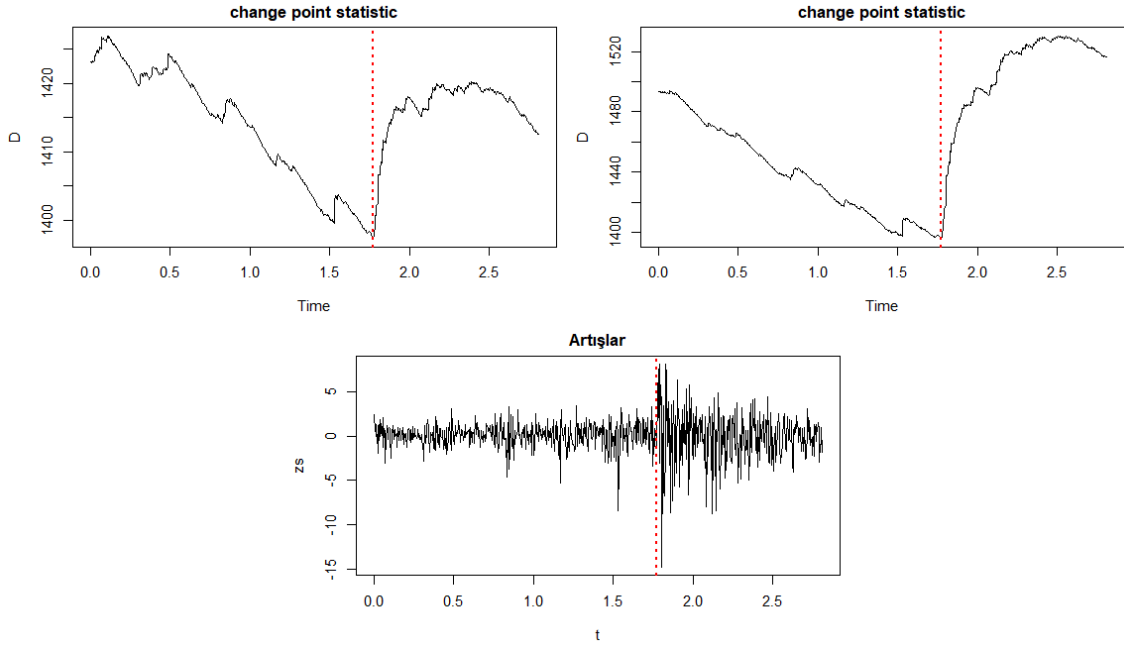
Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin her ikisinden de iki adet değişim noktası, her defasında veri setinin ilk %35'lik ve son %35'lik kısımları alınarak elde edilmiş ve τ_1 ve τ_2 olarak gösterilmiştir. Buna göre τ_1 , 14.05.2020 tarihli veri (303. veri) ve τ_2 , 24.02.2022 tarihli veri (750. veri) olarak bulunmuştur. Sonuçlar sırasıyla Şekil 5.12 ve Şekil 5.13 ile gösterilmiştir.

Burada τ_1 , Covid-19 pandemisinin tüm dünyada alevlendiği ve ham petrol fiyatlarının en sert düşüşü yaşadığı dönem olan 20 Nisan 2020 tarihi sonrasındaki sürecin dönüm noktasına denk gelmektedir. Bu tarihten sonra fiyatlar net bir şekilde yükselişe geçmiştir. τ_2 ise Rusya'nın başlattığı askeri müdahalenin ardından Rusya'nın Ukrayna'yı işgaline denk gelen tarihi göstermektedir. Bu tarihten sonra petrol fiyatları hızla yükselişe geçmiştir. WTI veri seti için τ_1 ve τ_2 değişim noktalarının tahmin sonuçlarının dünya tarihindeki böylesi önemli tarihlere denk düşmesi, ele alınan SDD modelleri için CP değişim noktası analizinin doğru bir şekilde kullanıldığını göstermektedir.

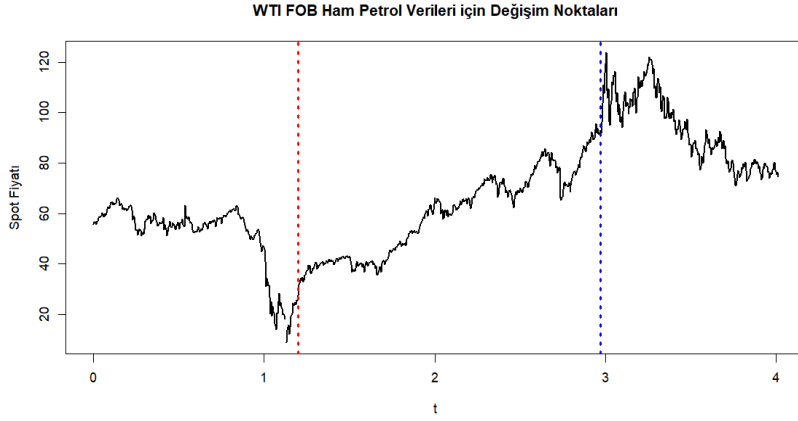
WTI veri seti, τ_1 ve τ_2 değişim noktaları dikkate alınarak tekrar modellenmiştir. Bunun için söz konusu veri seti, $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıklarında ayrı ayrı incelenmiştir. İlgili aralıklar ve τ_1 ve τ_2 değişim noktaları, veri seti üzerinde Şekil 5.14'te gösterilmiştir. Burada siyah çizgi WTI veri setini, kırmızı kesikli çizgi τ_1 , mavi kesikli çizgi ise τ_2 değişim noktasını göstermektedir.



Şekil 5.12 WTI veri setinde sırasıyla GBM SDD için τ_1 değişim noktası istatistikleri, CIR SDD için τ_1 değişim noktası istatistikleri ve her iki SDD için artışlara göre τ_1 değişim noktası



Şekil 5.13 $[\tau_1, T]$ aralığındaki WTI veri setinde sırasıyla GBM SDD için τ_2 değişim noktası istatistikleri, CIR SDD için τ_2 değişim noktası istatistikleri ve her iki SDD için artışlara göre τ_2 değişim noktası



Şekil 5.14 WTI veri setinde τ_1 ve τ_2 değişim noktası istatistikleri ve $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıkları

5.4 WTI Veri Seti için CP Tahmini Dikkate Alınarak Yapılan SDD Modellemesi

Yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak, bahsi geçen her bir aralıkta veri seti Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2) ile ayrı ayrı modellenmiştir. Bunun için öncelikle QMLE yöntemi ile modeldeki parametreler tahmin edilmiş ve her bir aralık için sonuçlar sırasıyla Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'te verilmiştir.

Çizelge 5.2 $[0, \tau_1)$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları

Model/Parametre	θ_1		θ_2		σ	
	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata
GBM SDD	0.4297	0.6915	-	-	0.9524	0.0308
CIR SDD	203.2234	67.9702	4.2780	1.4942	4.4936	0.1484

Çizelge 5.3 $[\tau_1, \tau_2)$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları

Model/Parametre	θ_1		θ_2		σ	
	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata
GBM SDD	0.7925	0.3389	-	-	0.3789	0.0152
CIR SDD	147.0962	69.5120	2.2070	1.3747	2.7048	0.1155

Çizelge 5.4 $[\tau_2, T]$ aralığındaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.1) ve Eşitlik (5.2)'nin parametre tahmin sonuçları

Model/Parametre	θ_1		θ_2		σ	
	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata	Tahmin	Std. hata
GBM SDD	-0.0859	0.4549	-	-	0.4691	0.0203
CIR SDD	397.7344	301.5859	4.4581	3.2809	4.6828	0.2050

5.4.1 τ_1 ve τ_2 Dikkate Alınarak Kurulan GBM SDD Modeli

Yukarıda belirtilen her bir aralık için elde edilen parametreler Eşitlik (5.1)'de yerine yazılmıştır. Bu denklemde değişim noktaları τ_1 ve τ_2 dikkate alındığından elde edilen GBM SDD

$$dX_t = \begin{cases} 0.4297X_t dt + 0.9524X_t dW_t, & X_0 = 55.76, t \in [0, \tau_1) \\ 0.7925X_t dt + 0.3789X_t dW_t, & X_{\tau_1} = 27.4, t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -0.0859X_t dt + 0.4691X_t dW_t, & X_{\tau_2} = 92.77, t \in [\tau_2, T] \end{cases} \quad (5.9)$$

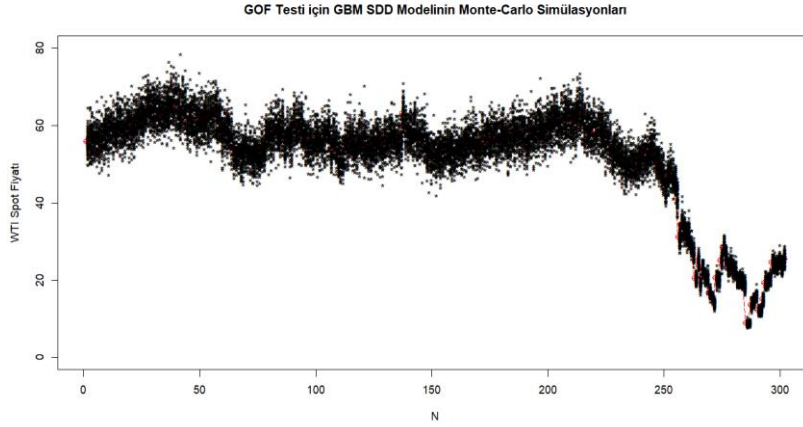
şeklindedir.

Eşitlik (5.3) GBM SDD modelindeki işlemlere benzer olarak, Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin her bir aralığındaki model ile veriler arasında bir uyumsuzluk olup olmadığını test etmek için ki-kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Bunun için ilk olarak, $[0, \tau_1)$ aralığındaki model ele alınmıştır. O halde,

$H_0 : t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

$H_1 : t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir

hipotezleri altında $N = 302$ adet gözlemin her biri için $M = 59$ adet Monte Carlo simülasyonu elde edilmiş ve ki-kare hesap değeri $\chi^2_3 = 84.0521$ olarak bulunmuştur. Bir önceki bölümde bahsedildiği üzere serbestlik derecesi $sd = 57$ ve $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{57,0.01} = 84.7328$ şeklindedir. $\chi^2_3 < \chi^2_{57,0.01}$ olduğundan model ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.15'te gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “*” ile gösterilmiştir.



Şekil 5.15 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

İkinci olarak, Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin $[\tau_1, \tau_2)$ aralığındaki model dikkate alınmış ve

$H_0 : t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

$H_1 : t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir

hipotezleri altında $N = 447$ adet gözlemin her biri için $M = 88$ adet Monte Carlo simülasyonu elde edilmiş ve ki-kare hesap değeri $\chi^2_4 = 87.6278$ olarak bulunmuştur. Burada, serbestlik derecesi $sd = 86$ olmak üzere $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{86,0.01} = 119.4139$ şeklindedir. $\chi^2_4 < \chi^2_{86,0.01}$ olduğundan model ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.16'da gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.

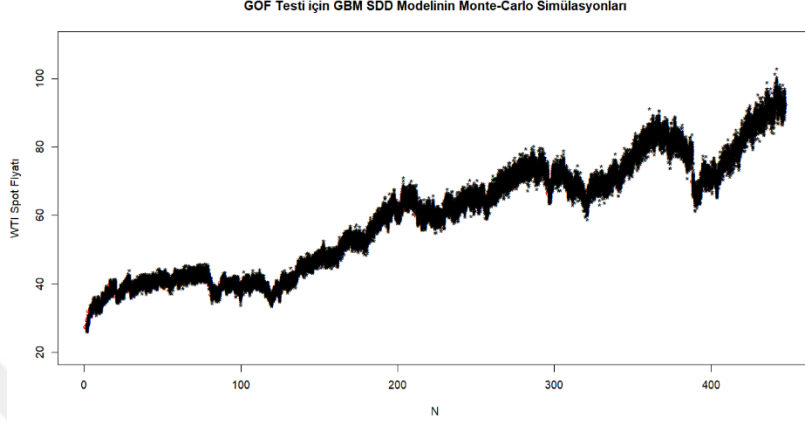
Son olarak, (5.9) GBM SDD modelinin $[\tau_2, T]$ aralığı için

$H_0 : t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

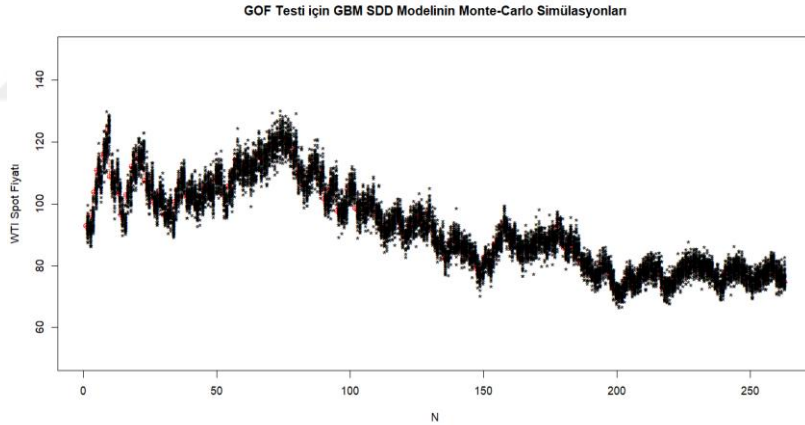
$H_1 : t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir

hipotezleri altında $N = 263$ adet gözlemin her biri için $M = 51$ adet Monte Carlo simülasyonu elde edilmiş ve ki-kare hesap değeri $\chi^2_5 = 38.9768$ olarak bulunmuştur. Serbestlik derecesi $sd = 49$ olmak üzere $\alpha = 0.01$ anlamlılık düzeyi için ki-kare tablo

değeri $\chi^2_{49,0.01} = 74.9195$ şeklindedir. $\chi^2_5 < \chi^2_{86,0.01}$ olduğundan model ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.17’de gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.



Şekil 5.16 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları



Şekil 5.17 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile kurulan GBM SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

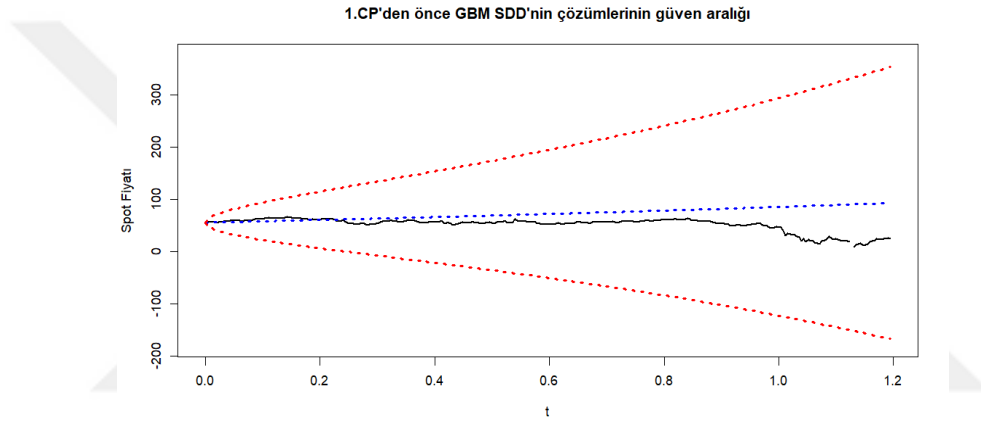
Eşitlik (5.9) modeli ile veri arasında uyum söz konusu olduğuna göre bu modelin yaklaşık çözümünü hesaplamaya geçilebilir. O halde, Eşitlik (5.9)’un çözümünün güven aralıkları ve EM yörüngeleri, bir önceki bölümdekine benzer olarak, denklemdeki her bir alt denklem için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar aşağıdaki alt bölümlerde verilmiştir.

5.4.1.1 $[0, \tau_1)$ Aralığında Kurulan GBM SDD'nin EM Nümerik Çözümü

$t \in [0, \tau_1)$ aralığında kurulan GBM SDD'nin Eşitlik (5.10) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.11) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.13'te gösterilmiştir.

$$m_{GBM_1}(t, x_0) = 55.76 \exp(0.4297t) \quad (5.10)$$

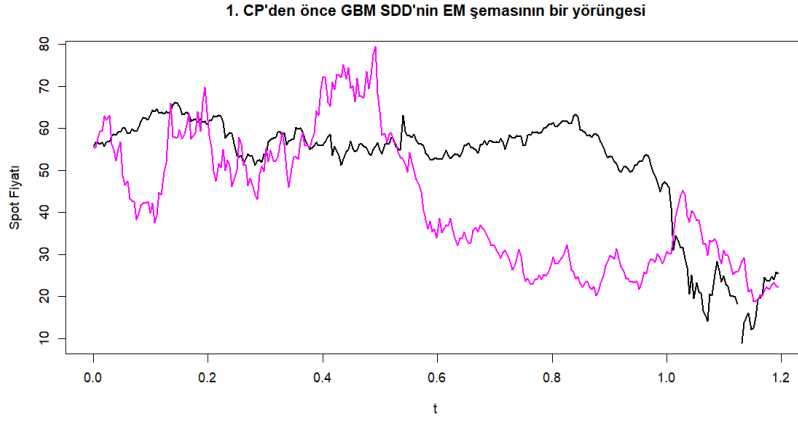
$$v_{GBM_1}(t, x_0) = (55.76)^2 \exp(2(0.4297)t) (\exp((0.9524)^2 t) - 1) \quad (5.11)$$



Şekil 5.18 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

Burada siyah çizgi $t \in [0, \tau_1)$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{GBM_1}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.10) ve Eşitlik (5.11) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{GBM_1}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{GBM_1}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.

$t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.19'da gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, pembe çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.18'de gösterilen aralığa düşmektedir.



Şekil 5.19 $t \in [0, \tau_1]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

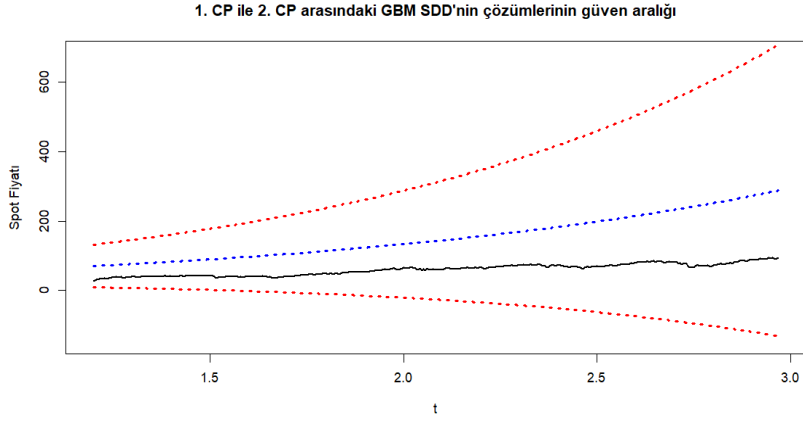
5.4.1.2 $[\tau_1, \tau_2]$ Aralığında Kurulan GBM SDD'nin EM Nümerik Çözümü

$t \in [\tau_1, \tau_2]$ aralığında kurulan GBM SDD'nin Eşitlik (5.12) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.13) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.20'de gösterilmiştir.

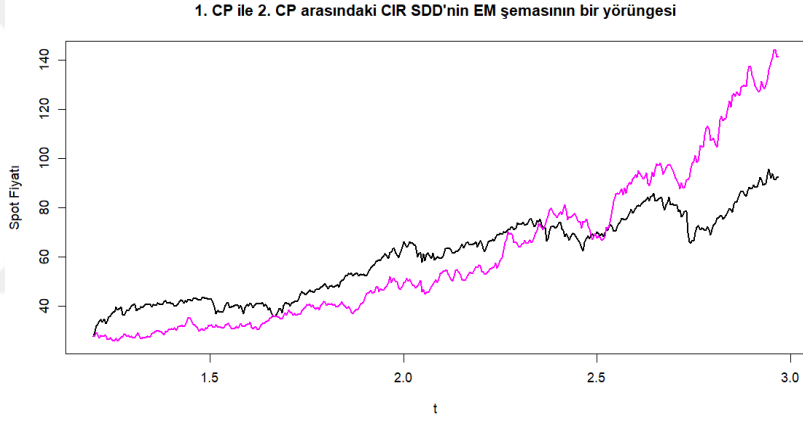
$$m_{GBM2}(t, x_0) = 27.46 \exp(0.7925t) \quad (5.12)$$

$$v_{GBM2}(t, x_0) = (27.46)^2 \exp(2(0.7925)t) (\exp((0.3789)^2 t) - 1) \quad (5.13)$$

Burada siyah çizgi $t \in [\tau_1, \tau_2]$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{GBM2}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.12) ve Eşitlik (5.13) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{GBM2}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{GBM2}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir. $t \in [\tau_1, \tau_2]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.21'de gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, pembe çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.15'te gösterilen aralığa düşmektedir.



Şekil 5.20 $t \in [\tau_1, \tau_2]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı



Şekil 5.21 $t \in [\tau_1, \tau_2]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

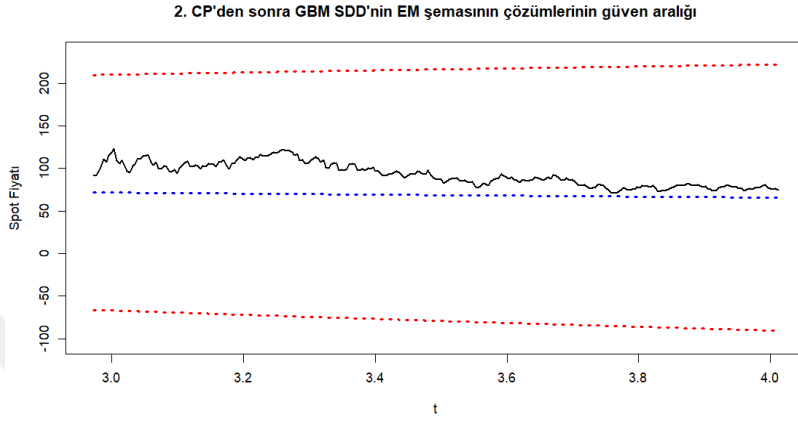
5.4.1.3 $[\tau_2, T]$ aralığında kurulan GBM SDD'nin EM nümerik çözümü

$t \in [\tau_2, T]$ aralığında kurulan GBM SDD'nin Eşitlik (5.14) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.15) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.22'de gösterilmiştir.

$$m_{GBM3}(t, x_0) = 92.776 \exp(-0.0859t) \quad (5.14)$$

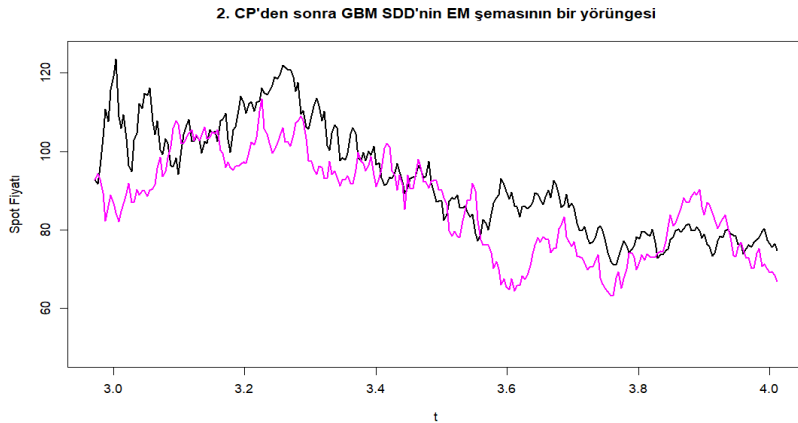
$$v_{GBM3}(t, x_0) = (92.77)^2 \exp(2(-0.0859)t) (\exp((0.4691)^2 t) - 1) \quad (5.15)$$

Burada siyah çizgi $t \in [\tau_2, T]$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{GBM3}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.14) ve Eşitlik (5.15) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{GBM3}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{GBM3}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.



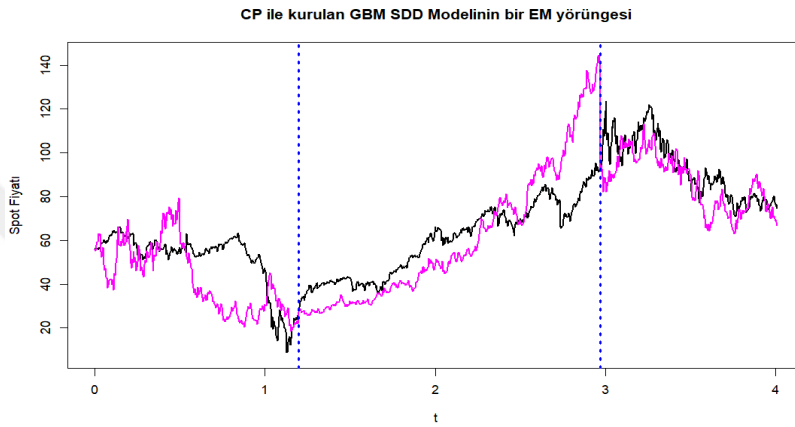
Şekil 5.22 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

$t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.23'te gösterilmiştir.



Şekil 5.23 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, pembe çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.22’de gösterilen aralığa düşmektedir. İlgili aralıklar birleştirildiğinde Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi Şekil 5.24’teki gibi elde edilir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, pembe çizgi ile EM nümerik çözümü, mavi kesikli çizgiler ile sırasıyla τ_1 ve τ_2 değişim noktaları gösterilmektedir.



Şekil 5.24 $t \in [0, T]$ için Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi

5.4.2 τ_1 ve τ_2 dikkate alınarak kurulan CIR SDD Modeli

Yukarıda belirtilen her bir aralık için elde edilen parametreler Eşitlik (5.2)’de yerine yazılmıştır. Bu denklemden değişim noktaları τ_1 ve τ_2 dikkate alındığından elde edilen CIR SDD

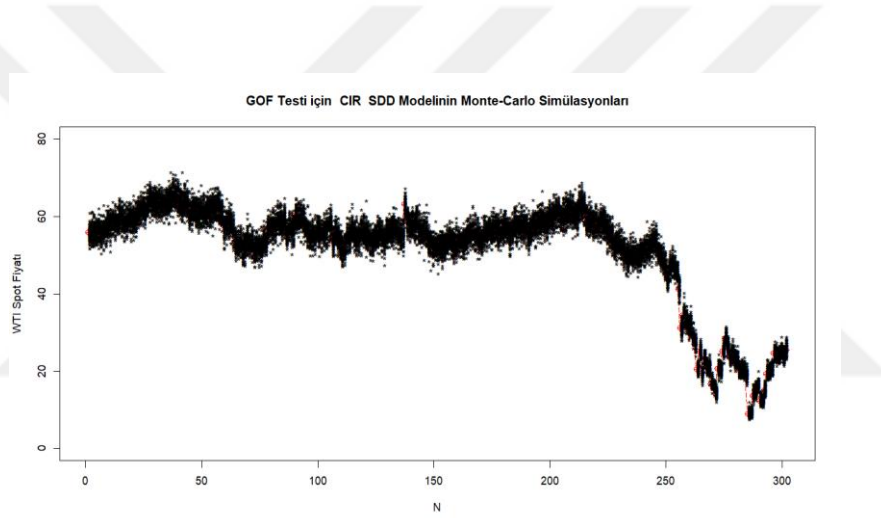
$$dX_t = \begin{cases} (203.2234 - 4.2780X_t)dt + 4.4936\sqrt{X_t}dW_t, & X_0 = 55.76, t \in [0, \tau_1) \\ (147.0962 - 2.2070X_t)dt + 2.7048\sqrt{X_t}dW_t, & X_{\tau_1} = 27.40, t \in [\tau_1, \tau_2) \\ (397.7344 - 4.4581X_t)dt + 4.6828\sqrt{X_t}dW_t, & X_{\tau_2} = 92.77, t \in [\tau_2, T] \end{cases} \quad (5.16)$$

şeklinde dir. Eşitlik (5.9) ile verilen GBM SDD modelindeki işlemlere benzer olarak, Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin her bir aralığındaki model ile veriler arasında bir uyumsuzluk olup olmadığını test etmek için ki-kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Bunun için ilk olarak, $[0, \tau_1)$ aralığındaki model ele alınmıştır. O halde,

$H_0 : t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

$H_1 : t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir

hipotezleri altında $N = 302$ adet gözlem ve $M = 59$ adet Monte Carlo simülasyonu için ki-kare hesap değeri $\chi^2_6 = 74.5501$ olarak bulunmuştur. Serbestlik derecesi $sd = 56$ ve $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{56,0.01} = 83.5134$ şeklindedir. $\chi^2_6 < \chi^2_{56,0.01}$ olduğundan model ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.25'te gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.



Şekil 5.25 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

İkinci olarak, Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin $[\tau_1, \tau_2)$ aralığındaki model dikkate alınmış ve

$H_0 : t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

$H_1 : t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir

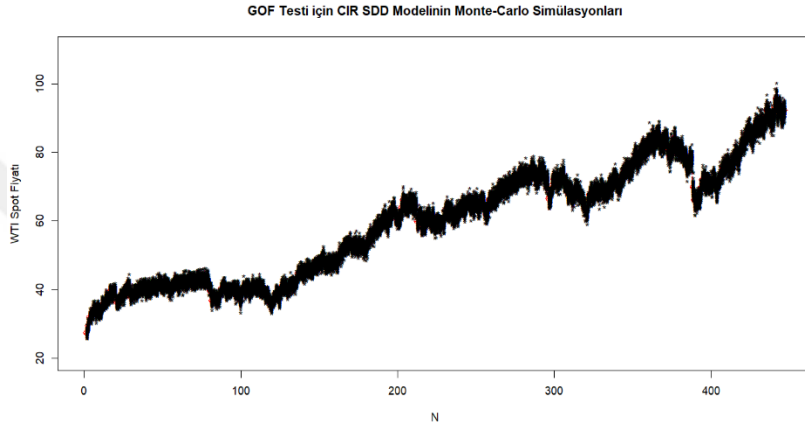
hipotezleri altında $N = 447$ ve $M = 88$ için ki-kare hesap değeri $\chi^2_7 = 86.6255$ olarak bulunmuştur. Serbestlik derecesi $sd = 85$ olmak üzere $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{85,0.01} = 118.2357$ şeklindedir. $\chi^2_7 < \chi^2_{85,0.01}$ olduğundan model ile WTI

verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.26’da gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.

Son olarak, Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin $[\tau_2, T]$ aralığı için

$H_0 : t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumludur,

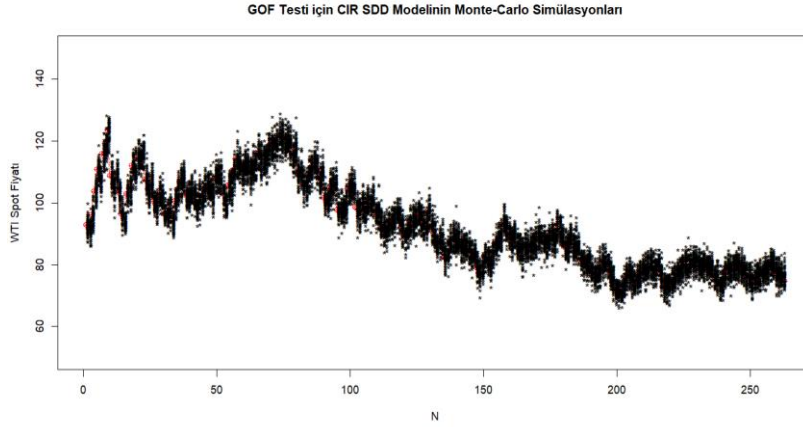
$H_1 : t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modeli ile WTI verileri uyumlu değildir



Şekil 5.26 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

hipotezleri altında $N = 263$ ve $M = 51$ için ki-kare hesap değeri $\chi^2_8 = 51.8623$ olarak bulunmuştur. Serbestlik derecesi $sd = 48$ olmak üzere $\alpha = 0.01$ için ki-kare tablo değeri $\chi^2_{48,0.01} = 73.6826$ şeklindedir. $\chi^2_8 < \chi^2_{48,0.01}$ olduğundan model ile WTI verileri uyumludur. Bu durum, Şekil 5.27’de gösterilmiştir. Burada WTI veri seti kırmızı çizgi ile, Monte-Carlo simülasyonları “ * ” ile gösterilmiştir.

Eşitlik (5.16) modeli ile veri arasında uyum söz konusu olduğuna göre bu modelin yaklaşık çözümünü hesaplamaya geçilebilir. O halde, Eşitlik (5.16)’nın çözümünün güven aralıkları ve EM yörüngeleri, bir önceki bölümdekine benzer olarak, denklemdeki her bir alt denklem için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar aşağıdaki alt bölümlerde verilmiştir.



Şekil 5.27 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile kurulan CIR SDD modelinin Monte-Carlo simülasyonları

5.4.2.1 $[0, \tau_1)$ aralığında kurulan CIR SDD'nin EM nümerik çözümü

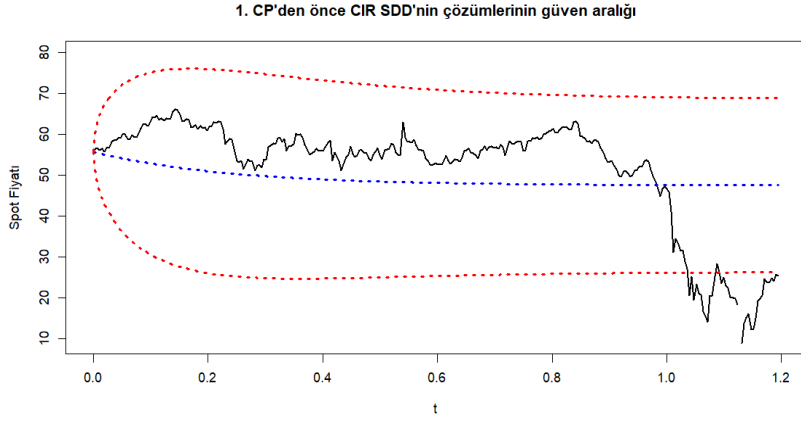
$t \in [0, \tau_1)$ aralığında kurulan CIR SDD'nin Eşitlik (5.17) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.18) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.28'de gösterilmiştir.

$$m_{CIR1}(t, x_0) = \frac{203.2234}{4.2780} + \left(55.76 - \frac{203.2234}{4.2780} \right) \exp(-4.2780t) \quad (5.17)$$

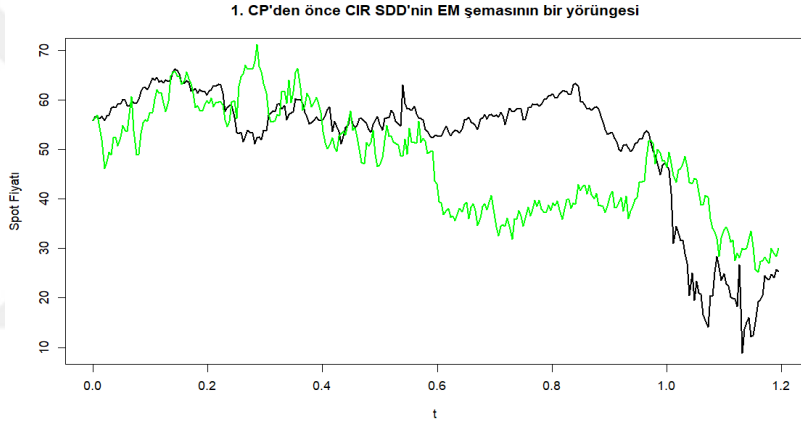
$$v_{CIR1}(t, x_0) = 55.76 \cdot \frac{(4.4936)^2 (e^{-4.2780t} - e^{-2(4.2780)t})}{4.2780} + \frac{203.2234(4.4936)^2(1 - e^{-2(4.2780)t})}{2(4.2780)^2} \quad (5.18)$$

Burada siyah çizgi $t \in [0, \tau_1)$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{CIR1}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.17) ve Eşitlik (5.18) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{CIR1}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{CIR1}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.

$t \in [0, \tau_1)$ için (5.16) CIR SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.29'da gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, açık yeşil çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.28'de gösterilen aralığa düşmektedir.



Şekil 5.28 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı



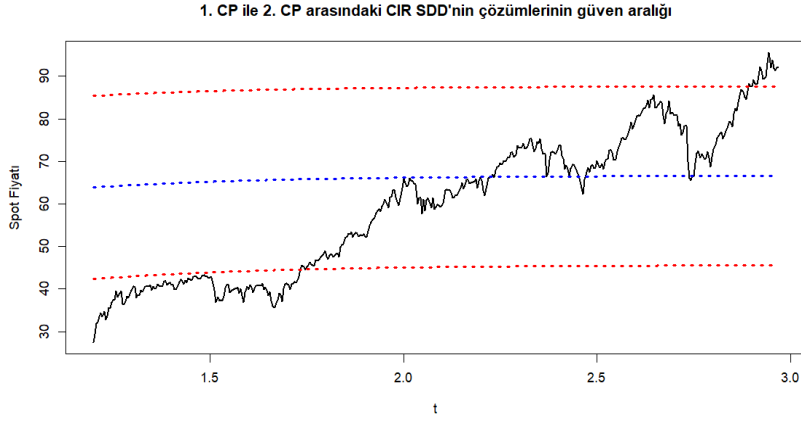
Şekil 5.29 $t \in [0, \tau_1)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

5.4.2.2 $[\tau_1, \tau_2)$ aralığında kurulan CIR SDD'nin EM nümerik çözümü

$t \in [\tau_1, \tau_2)$ aralığında kurulan CIR SDD'nin Eşitlik (5.19) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.20) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.30'da gösterilmiştir.

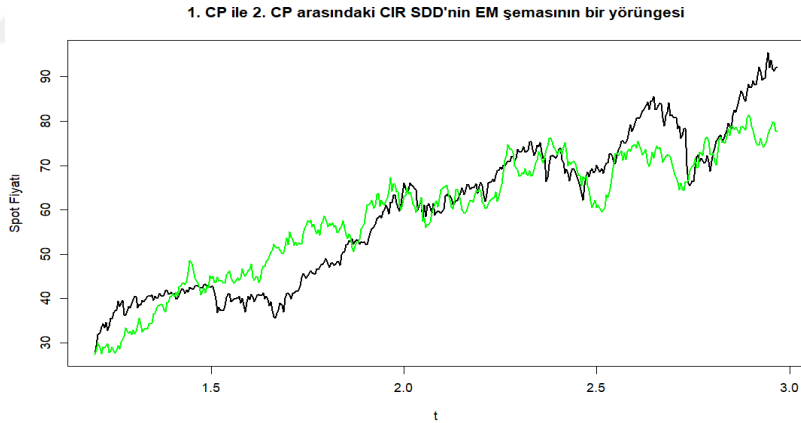
$$m_{CIR2}(t, x_0) = \frac{147.0962}{2.2070} + \left(27.4 - \frac{147.0962}{2.2070}\right) \exp(-2.2070t) \quad (5.19)$$

$$v_{CIR2}(t, x_0) = 27.4 \cdot \frac{(2.7048)^2 (e^{-2.2070t} - e^{-2(2.2070)t})}{2.2070} + \frac{147.0962(2.7048)^2 (1 - e^{-2(2.2070)t})}{2(2.2070)^2} \quad (5.20)$$



Şekil 5.30 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

Burada siyah çizgi $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{CIR2}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.19) ve Eşitlik (5.20) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{CIR2}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{CIR2}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.



Şekil 5.31 $t \in [\tau_1, \tau_2)$ için (5.16) CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

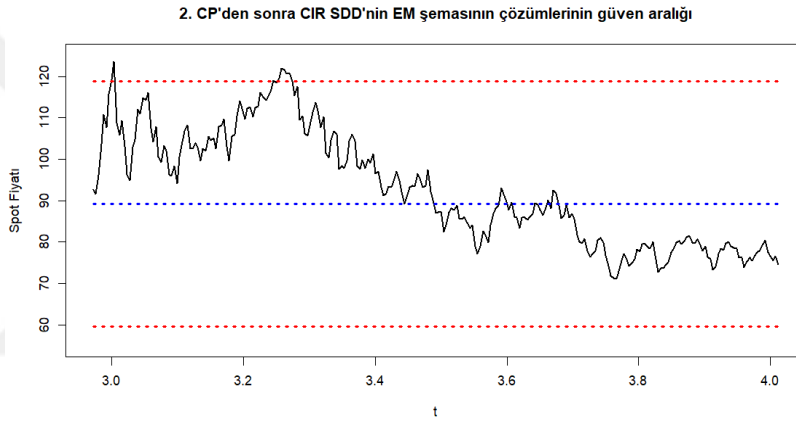
$t \in [\tau_1, \tau_2)$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.31'de gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, açık yeşil çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.30'da gösterilen aralığa düşmektedir

5.4.2.3 $[\tau_2, T]$ aralığında kurulan CIR SDD'nin EM nümerik çözümü

$t \in [\tau_2, T]$ aralığında kurulan CIR SDD'nin Eşitlik (5.21) ile verilen beklenen değer ve Eşitlik (5.22) ile verilen varyans fonksiyonları yardımıyla çözümlerinin bulunacağı aralık Şekil 5.32'de gösterilmiştir.

$$m_{CIR3}(t, x_0) = \frac{397.7344}{4.4581} + \left(92.77 - \frac{397.7344}{4.4581}\right) \exp(-4.4581t) \quad (5.21)$$

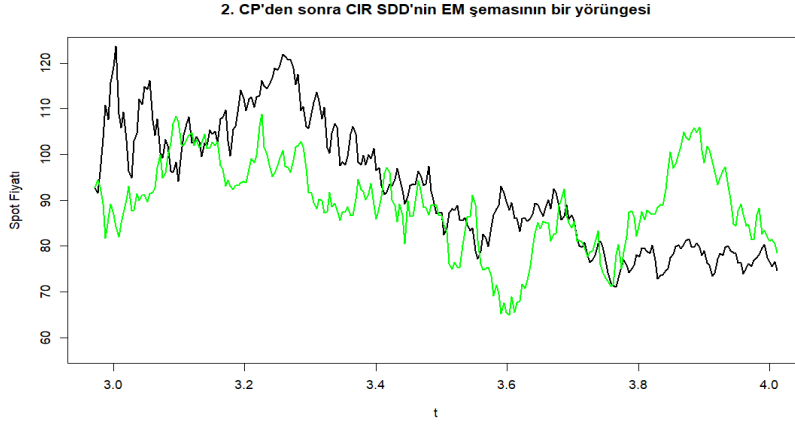
$$v_{CIR3}(t, x_0) = 92.77 \cdot \frac{(4.6828)^2(e^{-4.4581t} - e^{-2(4.4581)t})}{4.4581} + \frac{397.7344(4.6828)^2(1 - e^{-2(4.4581)t})}{2(4.4581)^2} \quad (5.22)$$



Şekil 5.32 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin çözümlerinin bulunabileceği güven aralığı

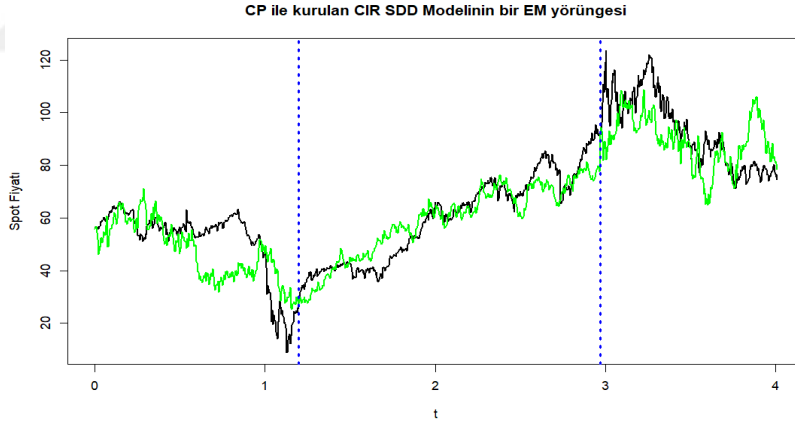
Burada siyah çizgi $t \in [\tau_2, T]$ için WTI veri setini, mavi kesikli çizgi $m_{CIR3}(t, x_0)$ beklenen değer fonksiyonunu, kırmızı kesikli çizgiler ise Eşitlik (5.21) ve Eşitlik (5.22) yardımı ile oluşturulan güven aralıklarının $m_{CIR3}(t, x_0) \pm 2\sqrt{v_{CIR3}(t, x_0)}$ fonksiyonlarını göstermektedir.

$t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin nümerik çözümleri Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanmış ve elde edilen çözümlerin bir yörüngesi Şekil 5.33'te gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, açık yeşil çizgi ile EM nümerik çözümü gösterilmektedir. Buradan da görüleceği gibi elde edilen yörüngeler Şekil 5.32'de gösterilen aralığa düşmektedir.



Şekil 5.33 $t \in [\tau_2, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

İlgili aralıklar birleştirildiğinde Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi Şekil 5.34'teki gibi elde edilir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, açık yeşil çizgi ile EM nümerik çözümü, mavi kesikli çizgiler ile sırasıyla τ_1 ve τ_2 değişim noktaları gösterilmektedir.



Şekil 5.34 $t \in [0, T]$ için Eşitlik (5.16) ile verilen CIR SDD modelinin EM şemasının bir yörüngesi

5.5 WTI Veri Seti için Model Seçimi

Alt bölüm 5.2'de kurulan modeller, AIC ve BIC kriterleri kullanılarak karşılaştırılmış ve WTI veri seti için en uygun model seçimi yapılmıştır. Alt bölüm 5.4'te kurulan modeller, CP değerleri dikkate alınarak bölünen aralıklarda, yine AIC ve BIC kriterleri

kullanılarak karşılaştırılmış ve ilgili aralıklara düşen veri seti için en uygun model seçimi yapılmıştır. Sonuçlar sırasıyla Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6’da verilmiştir.

Çizelge 5.5 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.3) ve Eşitlik (5.4)’ün AIC ve BIC değerleri

Model	AIC	BIC
Eşitlik (5.3) GBM SDD	4950.618	4960.453
Eşitlik (5.4) CIR SDD	4330.257	4345.010

Çizelge 5.5 dikkate alındığında, Eşitlik (5.4) CIR SDD modeli, her iki kritere göre en küçük değeri aldığından Eşitlik (5.3) GBM SDD modeline göre WTI veri setini daha iyi açıklayan model olarak seçilmiştir.

Çizelge 5.6 CP değerleri dikkate alınarak bölünen aralıklardaki WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.9) ve Eşitlik (5.16)’nın AIC ve BIC değerleri

Model/Aralık	$t \in [0, \tau_1)$		$t \in [\tau_1, \tau_2)$		$t \in [\tau_2, T]$	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
Eşitlik (5.9) GBM SDD	2329.240	2337.579	1012.1363	1019.641	1300.005	1307.187
Eşitlik (5.16) CIR SDD	1972.711	1985.220	993.7283	1004.986	1319.080	1329.853

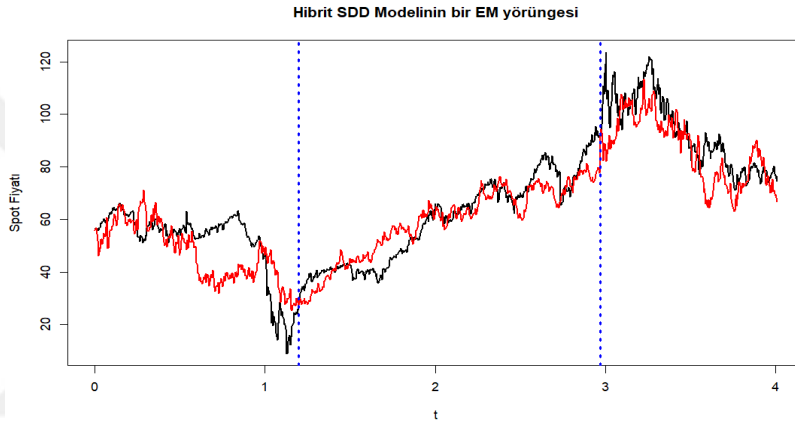
Çizelge 5.6 dikkate alındığında, $[0, \tau_1)$ ve $[\tau_1, \tau_2)$ aralıklarında Eşitlik (5.16) CIR SDD modeli, $[\tau_2, T]$ aralığında ise Eşitlik (5.9) GBM SDD modeli, her iki kritere göre en küçük değeri aldığından söz konusu aralıklarda WTI veri setini daha iyi açıklayan modeller olarak seçilmiştir.

5.6 WTI Veri Seti için CP Tahmini Dikkate Alınarak Kurulan Hibrit SDD

Tüm WTI veri seti göz önünde tutulduğunda, $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıkları için seçilen yukarıdaki modellerin birleştirilmesiyle, CP dikkate alınarak kurulan hibrit SDD modeli önerilmiştir. Bir başka ifadeyle WTI veri seti için sunulan hibrit model

$$dX_t = \begin{cases} (203.2234 - 4.2780X_t)dt + 4.4936\sqrt{X_t}dW_t, & X_0 = 55.76, t \in [0, \tau_1) \\ (147.0962 - 2.2070X_t)dt + 2.7048\sqrt{X_t}dW_t, & X_{\tau_1} = 27.40, t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -0.0859X_t dt + 0.4691X_t dW_t, & X_{\tau_2} = 92.77, t \in [\tau_2, T] \end{cases} \quad (5.23)$$

şeklindedir. Eşitlik (5.23) hibrit SDD'nin nümerik çözümleri, daha önce, ilgili aralıklardaki Euler-Maruyama yöntemi ile hesaplanan yörüngelerin birleştirilmesiyle oluşturulmuş ve Şekil 5.35'de gösterilmiştir. Burada, siyah çizgi ile ilgili aralıktaki WTI gözlem verileri, kırmızı çizgi ile EM nümerik çözümü, mavi kesikli çizgiler ile sırasıyla τ_1 ve τ_2 değişim noktalarını gösterilmektedir.



Şekil 5.35 Eşitlik (5.23) Hibrit SDD'nin EM çözümünün bir yörüngesi

5.7 WTI Veri Seti için Model Performans Değerlendirmesi

WTI veri seti için kurulan tüm modellerin performansı RMSE ve MAPE kriterleri ile incelenmiştir. Sonuçlar Çizelge 5.7'de verilmiştir.

Çizelge 5.7 WTI verileri için kurulan Eşitlik (5.3), Eşitlik (5.4), Eşitlik (5.9), Eşitlik (5.16) ve Eşitlik (5.23) denklemlerinin RMSE ve MAPE değerleri

Model	RMSE	MAPE
Eşitlik (5.3) GBM SDD	21.3624	0.3101
Eşitlik (5.4) CIR SDD	19.7637	0.2754
Eşitlik (5.9) GBM SDD	16.4034	0.2138
Eşitlik (5.16) CIR SDD	10.7092	0.1491
Eşitlik (5.23) Hibrit SDD	9.9439	0.1425

Burada, MAPE değerleri dikkate alındığında, Eşitlik (5.23) Hibrit SDD ve Eşitlik (5.16) CIR SDD'nin MAPE değerleri [0.1,0.2) aralığına düştüğünden “*iyi tahmin*” yapıldığı, benzer şekilde, Eşitlik (5.9) GBM SDD, Eşitlik (5.4) CIR SDD ve Eşitlik (5.3) GBM SDD'nin MAPE değerleri [0.2,0.5) aralığına düştüğünden “*makul tahmin*” yapıldığı söylenir.

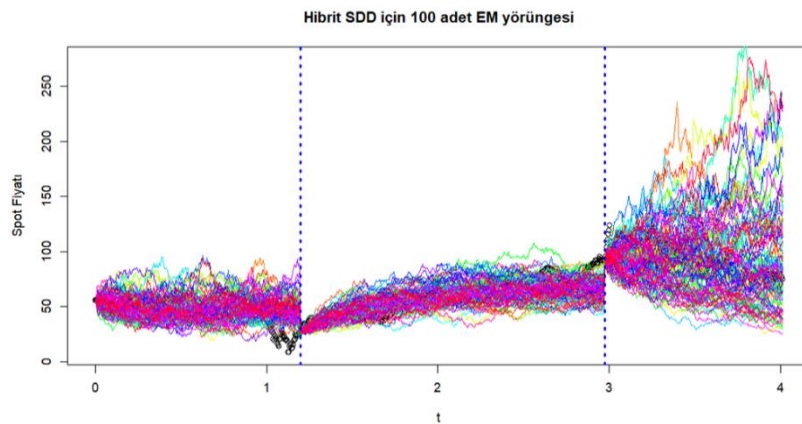
Kurulan tüm modeller karşılaştırıldığında en küçük RMSE ve MAPE değerlerine sahip olan Eşitlik (5.23) hibrit SDD modeli, veri seti için en uygun model olarak seçilmiştir. Bu durum SDD modellemesinde, değişim noktası analizinin, özellikle ani dalgalanma gösteren veri setleri ile çalışıldığında, oldukça önemli bir yere sahip olduğuna bir işaretir.

5.8 WTI Veri Seti için Hibrit SDD Modelinin Yörüngelerinden Elde Edilen Rassal Değişkenlerin Dağılımlarını Belirleme

Eşitlik (5.23) Hibrit SDD modeli için kurulan

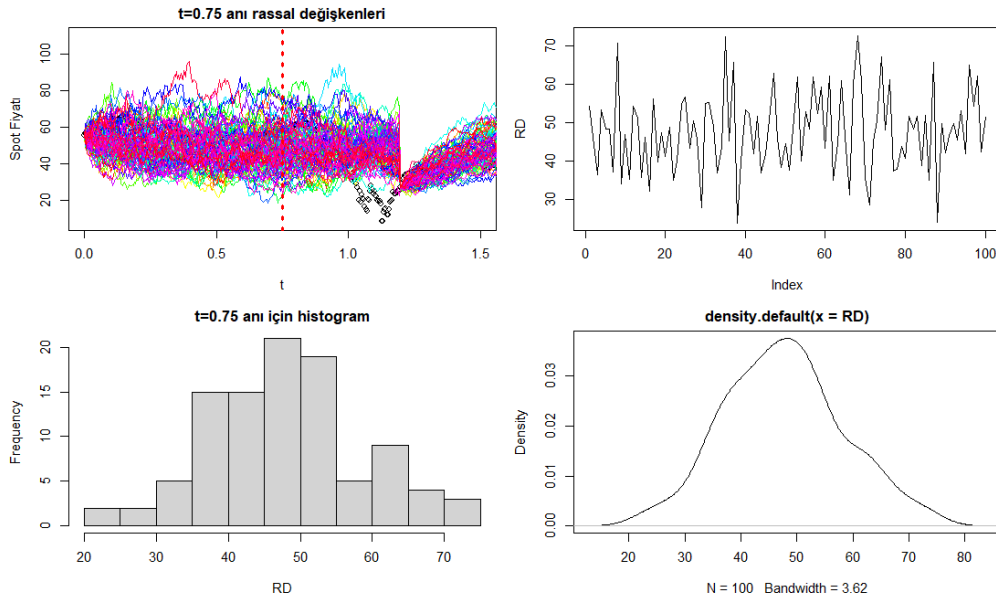
$$X_j = \begin{cases} X_{j-1} + (203.2234 - 4.2780X_t)\Delta t + 4.4936\sqrt{X_t}(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})), & j = 1,2, \dots, 302 \\ X_{j-1} + (147.0962 - 2.2070X_t)dt + 2.7048\sqrt{X_t}(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})), & j = 303, \dots, 749 \\ X_{j-1} - 0.0859X_t dt + 0.4691X_t(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})), & j = 750, \dots, 1012 \end{cases} \quad (5.24)$$

EM şeması yardımıyla 100 adet yörünge elde edilmiştir. Burada, $X_0 = 55.76$, $X_{303} = x_{\tau_1} = 27.40$ ve $X_{750} = x_{\tau_2} = 92.77$ 'dir. Sonuçlar Şekil 5.36 ile gösterilmiştir.



Şekil 5.36 WTI veri seti için kurulan Eşitlik (5.24) EM şemasının yörüngeleri

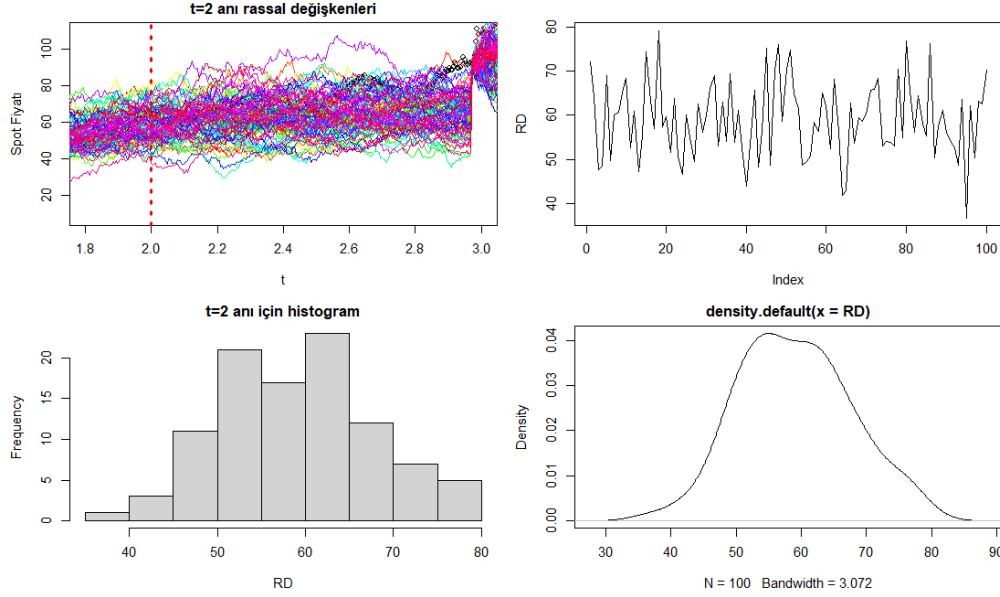
Söz konusu yörüngeler herhangi bir t anında dikey olarak kesilirse, Bölüm 3.7’de belirtildiği gibi, söz konusu t anındaki $X(t, \omega)$ rassal değişkenleri elde edilir. Böylece, elde edilen rassal değişkenler için istatistiksel çıkarımlarda bulunulabilir. O halde, elde edilen rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları çizdirilerek hangi dağılıma uygun oldukları araştırılmıştır. Bu uygulamada, WTI veri seti üç aralığa bölündüğünden, her bir aralık için rasgele seçilen üç t anında, rassal değişkenler oluşturulmuş ve dağılımları bulunmuştur. İlk olarak, $t = 0.75$ anındaki gözlem değeri 55.97\$ olan 02.12.2019 tarihli veri için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişken kümesi için elde edilen sonuçlar Şekil 5.37’de gösterilmiştir. Söz konusu rassal değişken kümesinin normal dağılıma yakınsaklığı Jarque-Bera normallik testi ile sınanmış ve p-değeri, $0.3031 > 0.05$ olarak elde edilmiştir. Buna göre, %5 anlam düzeyinde söz konusu rassal değişkenlerin dağılımı, ortalaması 60.2913 ve standart sapması 9.15 olan normal dağılıma yakınsamaktadır.



Şekil 5.37 $t = 0.75$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

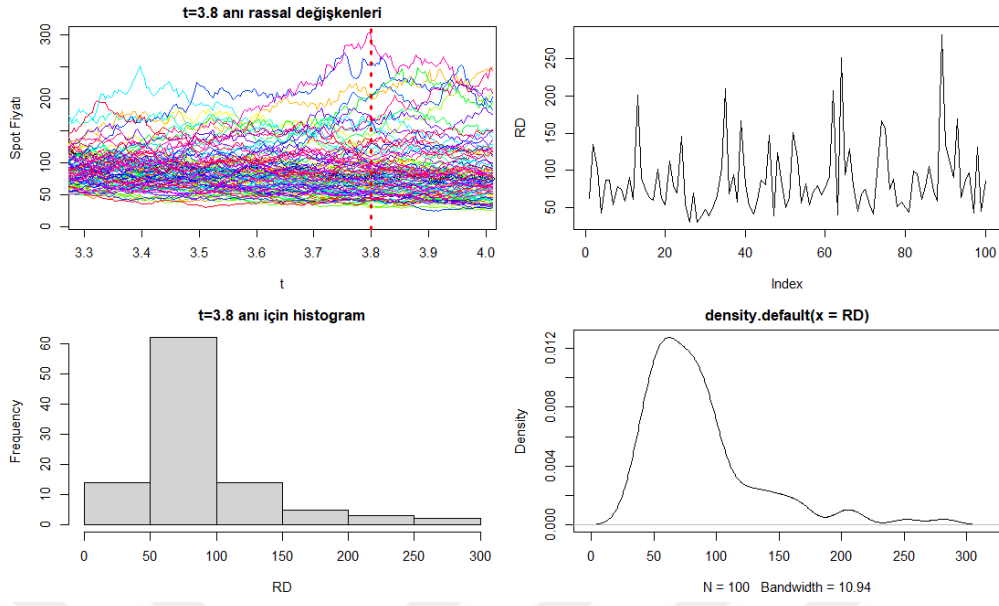
İkinci olarak, $t = 2.00$ anındaki gözlem değeri 65.03\$ olan 08.03.2021 tarihli veri için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişken kümesi için elde edilen sonuçlar Şekil 5.39’da gösterilmiştir. Söz konusu rassal değişken kümesinin normal dağılıma yakınsaklığı Jarque-Bera normallik testi ile sınanmış ve p-değeri= $0.429 > 0.05$ olarak

elde edilmiştir. Buna göre, %5 anlam düzeyinde söz konusu rassal değişkenlerin dağılımı, ortalaması 48.7025 ve standart sapması 10.7257 olan normal dağılıma yakınsamaktadır.



Şekil 5.38 $t = 2.00$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

Üçüncü olarak, $t = 3.8016$ anındaki gözlem değeri 79.57\$ olan 23.12.2022 tarihli veri için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişken kümesi için elde edilen sonuçlar Şekil 5.40'da gösterilmiştir. Söz konusu rassal değişken kümesinin log-normal dağılıma yakınsaklığı Jarque-Bera normallik testi ile sınanmış ve p-değeri= 0.0837 > 0.05 olarak elde edilmiştir. Buna göre, %5 anlam düzeyinde söz konusu rassal değişkenlerin dağılımı, ortalaması 4.4164 ve standart sapması 0.4479 olan log-normal dağılıma yakınsamaktadır.



Şekil 5.39 $t = 3.8016$ anındaki WTI verisi için tahmin edilen 100 elemanlı rassal değişkenin elemanları, grafiği, histogramı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Gerçek hayatta bir sistemin davranışı modellenmek istendiğinde ya sistemin nasıl davranacağını belirlemek için yeterli ve detaylı bilgi elde edilemez ya da söz konusu sistemin davranışı o kadar karmaşıktır ki sistemin tam olarak betimlenmesi olanaksızdır. Bu gibi durumlarda, rastgelelik içerdiğinden dolayı stokastik modellerin kullanımı, araştırmacılar için son derece faydalıdır. Son yetmiş beş yıldır varlığını ivmelenen bir şekilde sürdüren SDD ile modelleme, giderek daha fazla insanın karşılaştığı pek çok alanda önemli bir rol oynamaktadır. Bu modelleme türü birçok disiplinde çeşitli uygulamalara sahiptir ve birçok olgunun incelenmesinde doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Hatta bu doğal rastlantısal sürecin zaman zaman ani değişimler göstermesi, literatürde SDD'ler için çeşitli çalışmalarda ele alınan tekli veya çoklu değişim noktası problemlerini de beraberinde getirmiştir.

2019-2023 yılları arasındaki güvenilir olmayan ekonomik ortam, petrol arıtma şirketlerini istikrarsız kâr marjına neden olan dalgalı ham petrol fiyatıyla karşı karşıya bırakmıştır. Bu durum, ham petrol fiyatları üzerindeki, küresel anlamda yaşanan çeşitli krizlerin sebep olduğu belirsizlikten kaynaklanmaktadır. Bu sebeple rastlantısallık, dolayısıyla belirsizlik içeren teorik bir yaklaşım olan SDD modelleri, verilerin standart Wiener süreci şeklinde bir yörünge takip etmeleri sebebiyle 01.03.2019 ile 13.03.2023 tarihleri arasındaki WTI ham petrol kapanış fiyatlarına uygulanmıştır. Burada, elde edilen veri setini modellemek için GBM ve CIR SDD'leri ele alınmıştır. Bu sebeple, bu çalışmada ilk adım olarak SDD modellerinin parametreleri QMLE tahmin yöntemi kullanılarak tahmin edilmiş ve kurulan modeller ile veri seti arasında bir uyumsuzluk olup olmadığı, literatürde SDD'ler için özel olarak geliştirilen, ki-kare uyum iyiliği testi ile test edilmiştir. Testin sonucunda her iki modelin, veri seti ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Sonrasında kurulan her bir SDD modelinin yaklaşık çözümü, EM nümerik çözümü ile elde edilmiştir. Her bir model için çözümlerin güven aralıkları oluşturulmuş ve hesaplanan her bir nümerik çözümün EM yörüngelerinin, kendi modellerinin güven aralıkları sınırları içinde olduğu gösterilmiştir.

İkinci adım olarak, WTI veri setindeki fiyat dalgalanmalarının ani değişimler göstermesi sebebiyle, kullanılmak istenen SDD modellerinde değişim noktası tahminini dikkate almanın gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu sebeple, bu çalışmada QMLE tahmin

yöntemi ile değişim noktaları tahmin edilmiştir. Buna göre söz konusu tahminler, her defasında veri setinin ilk %35'lik ve son %35'lik kısımları alınarak $\tau_1 = 14.05.2020$ ve $\tau_2 = 24.02.2022$ tarihleri olarak elde edilmiştir. Burada ilk değişim noktası olan τ_1 , Covid-19 pandemisinin tüm dünyada yarattığı olumsuz etkinin sebebiyle ham petrol fiyatlarının en sert düşüşü yaşadığı tarih olan 20 Nisan 2020'den sonraki sürecin dönüm noktasına denk düşmektedir. Bu tarihten sonra ham petrol fiyatlarının net bir şekilde yükselişe geçtiği görülmektedir. İkinci değişim noktası olan τ_2 ise Rusya'nın Ukrayna'ya başlattığı askeri müdahalenin ardından Rusya'nın Ukrayna'yı işgali olarak literatüre geçen tarihi göstermektedir. Bu tarihten sonra petrol fiyatları hızlı bir yükselişe geçmiştir. WTI veri seti için τ_1 ve τ_2 değişim noktalarının tahmin sonuçlarının dünya tarihindeki böylesi önemli tarihlere denk düşmesi, ele alınan SDD modelleri için CP değişim noktası tahmininin doğru bir şekilde kullanıldığının kanıtı niteliğindedir.

Üçüncü adım olarak, WTI veri seti, $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıklarında ayrı ayrı incelenmiş ve ilgili aralıkların her birinde GBM ve CIR SDD modelleri tekrar kurulmuştur. Söz konusu SDD modellerinin parametreleri yine QMLE tahmin yöntemi kullanılarak tahmin edilmiş ve böylece WTI verilerini modellemek için iki farklı SDD modeli daha önerilmiştir. Bunlar, CP tahminleri dikkate alınarak, bir başka ifadeyle $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıklarında ayrı ayrı kurulan GBM ve CIR SDD modelleridir. Kurulan modeller ile veri seti arasında bir uyumsuzluk olup olmadığı, yine ki-kare uyum iyiliği testi ile test edilmiş ve testin sonucunda her iki modelin, veri seti ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra, kurulan her bir SDD modelinin yaklaşık çözümü, yine EM nümerik çözümü ile elde edilmiş ve her bir model için çözümlerin güven aralıkları oluşturulmuştur. İlk adımdakine benzer olarak, söz konusu SDD'lerin EM nümerik çözümlerinin yörüngelerinin, kendi modellerinin güven aralıkları sınırları içinde olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü adımda ise kurulan modeller arasından veri seti için en iyi olan model belirlenmiştir. Bunun için ilk olarak AIC ve BIC kriterlerine göre $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$ ve $[\tau_2, T]$ aralıklarında ayrı ayrı elde edilen her bir GBM ve CIR SDD modeli karşılaştırılmış ve $[0, \tau_1)$ aralığında, en küçük AIC değeri 1972.711 ile ve en küçük BIC değeri 1985.220 ile CIR SDD, $[\tau_1, \tau_2)$ aralığında, en küçük AIC değeri 993.7283 ile ve en küçük BIC değeri 1004.986 ile CIR SDD ve son olarak $[\tau_2, T]$ aralığında, en küçük AIC değeri 1319.080 ile ve en küçük BIC değeri 1329.853 ile GBM SDD, ilgili aralıklardaki

WTI ham petrol verilerini en iyi açıklayan model olarak seçilmiştir. Böylece söz konusu aralıklarda model performansı açısından seçilen SDD modelilerinin birleştirilmesiyle bir hibrit SDD modeli elde edilmiştir. Bu model, bu tez çalışmasının literatüre katkı niteliğinde sunduğu bir modeldir.

Beşinci adımda, WTI veri setini modellemek için önerilen bahsi geçen beş model, MAPE ve RMSE kriterlerine göre karşılaştırılmıştır. Buna göre yukarıdaki yaklaşıma benzer olarak, en küçük MAPE değeri 0.1425 ile ve en küçük RMSE değeri 9.9439 ile WTI veri seti için önerilen en uygun modelin, iki değişim noktalı hibrit SDD modeli olduğu elde edilmiştir. Burada, hibrit SDD'nin MAPE değeri [0.1,0.2) aralığına düştüğünden “*iyi tahmin*” yapıldığı gösterilmiş olur. Bir başka ifadeyle bu model, veri setindeki ani iniş ve çıkışları, dolayısıyla fiyat dalgalanmalarını diğer modellerin aksine daha iyi açıklamıştır.

Son olarak, hibrit SDD modeli dikkate alındığında, EM nümerik yaklaşım yöntemi yardımıyla hesaplanan 100 adet yörüngenin rastgele seçilen üç adet t anındaki rassal değişkenlerinin oluşturduğu kümelerin dağılımının nasıl olduğu tahmin edilmiştir.

Sonuç olarak, dalgalanan ham petrol fiyatının doğru bir şekilde modellenebilmesi, hammadde tedarikini tahmin etmede çıkan zorlukların üstesinden gelmeyi ve rafinaj şirketi kâr marjını optimize etmede daha verimli kararlar almayı sağlar. Dolayısıyla ani değişimlerin olduğu veri kümeleriyle çalışırken CP'yi dikkate almak, oluşturulan modelin performansı üzerinde olumlu bir etki gösterir. Bu nedenle değişim noktası tahmini, SDD modellemesinde modelin performansına kayda değer anlamda bir katkı sunmaktadır. Ayrıca sadece WTI veri seti için değil aynı zamanda farklı bilim alanlarındaki uygulamalarda da böylesi bir dalgalanmayı modelleyebilmek ve elde edilen model ile geçmiş veriler yardımıyla gelecek verilerin nasıl bir davranış sergileyeceğini tahmin edebilmek büyük ölçüde önemlidir.

Bu tez çalışmasının sonuçları ile değişim noktası tespiti içeren daha karmaşık ve ayrıntılı sistemleri ve fiyat dalgalanmalarının gelenekleştirilmiş özelliklerine sahip zaman serilerini modellemede ilerleme kaydedilmesi, kurulan modellerde daha nitelikli modifikasyonun yapılabilmesi ve yeni fikirlerin benimsenebilmesi için temel oluşturmak amaçlanmaktadır.



KAYNAKLAR

- ABD Enerji Bilgi İdaresi (U.S. Energy Information Administration (EIA)) Erişim Tarihi: 20.03.2023. Erişim adresi: <https://www.eia.gov/dnav/pet/hist/RWTCD.htm>
- Akdi, Y. (2014). *Matematisel istatistiğe giriş*. Gazi Kitapevi: Ankara.
- Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations*. Springer: Texas Tech University, USA.
- Allen, L. J. S. (2010). *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. CRC Press: New York.
- Bahar, A., Noh, N. M., Zainuddin, Z. M. (2017). Forecasting model for crude oil price with structural break article history..*Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences Special Issue on Some Advances in Industrial and Applied Mathematics*, 13(4-1), 421-24.
- Bayram, M., Partal, T., Orucova Buyukoz, G. (2018). Numerical methods for simulation of stochastic differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2018 (17), 1-10.
- Bak, J., Nielsen, H. A., Madsen, H. (1999). Goodness of fit of stochastic differential equations. **in Symposium i Adventt Statistik**, Copenhagen Business School, Copenhagen, Denmark, 341-346.
- Bozdağ, B. (2010). *Stokastik diferansiyel denklemlerle modelleme*. Yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye.
- Burnham, K. P., Anderson, D. R. (2002). *Model selection and multimodel inference*. Springer: USA.
- Burrage, K., Burrage, P. M., Tian, T. (2004). Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: An overview. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, Royal Society.
- Büberkökü, Ö. (2021). Genelleştirilmiş hiperbolik çarpık student t dağılım varsayımına dayalı asimetrik stokastik volatilité modelinin Türk döviz piyasasına uygulanması. *Muhasebe ve Finansman Dergisi*, 185-202.
- Büberkökü, Önder. (2021). Stokastik faiz oranı modelleri (CIR/Vasicek) ile faiz oranlarının modellenmesi ve getiri eğrisi tahmini. *İzmir İktisat Dergisi*, 36, 893-911.
- Carletti, M. (2006). Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185 (2), 422-440.
- Chai, T., Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247-1250.
- Chen, G., Choi, Y. K., Zhou, Y. (2005). Nonparametric estimation of structural change points in volatility models for time series. *Journal of Econometrics*, 126(1), 79-114.
- Chen, J., Gupta, A. K. (2014). Parametric statistical change point analysis: With applications to genetics, medicine, and finance. *Parametric Statistical Change Point Analysis: With Applications to Genetics, Medicine, and Finance*, 1-273.
- Chen, F., Mamon, R., Nkurunziza, S. (2018). Inference for a change-point problem under a generalised Ornstein–Uhlenbeck setting. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 70(4), 807-853.
- Chicco, D., Warrens, M. J., Jurman, G. (2021). The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation. *PeerJ Computer Science*, 7, 1-24.

- Corbet, S., Hou, Y. (Greg), Hu, Y., Oxley, L. (2021). An analysis of investor behaviour and information flows surrounding the negative WTI oil price futures event. *Energy Economics*, 104, 105589.
- Cuenod, C. A., Favetto, B., Genon-Catalot, V., Rozenholc, Y., Samson, A. (2011). Parameter estimation and change-point detection from dynamic contrast enhanced MRI data using stochastic differential equations. *Mathematical Biosciences*, 233 (1), 68-76.
- Çakar, Ö. (2007). *Fonksiyonel Analize Giriş 1*. A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları: Ankara.
- Dehling, H., Franke, B., Kott, T., Kulperger, R. (2014). Change point testing for the drift parameters of a periodic mean reversion process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 17(1), 1-18.
- De Gregorio, A., Iacus, S. M. (2008). Least squares volatility change point estimation for partially observed diffusion processes. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37, 2342-2357.
- De Oliveira, A. M. B., Mandal, A., Power, G. J. (2019). A primer on the pricing of electric energy options in Brazil via mean-reverting stochastic processes. *Energy Reports*, 5, 594-601.
- Dipple, S., Choudhary, A., Flaminio, J., Szymanski, B. K., Korniss, G. (2020). Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities. *Applied Network Science*, 5 (17), 1-30.
- El-Sayed, A. M. A., Gaafar, F., El-Gendy, M. (2016). Continuous dependence of the solution of Itô stochastic differential equation with nonlocal conditions. *Applied Mathematical Sciences*, 10 (40), 1971-1982.
- Ergişi, S. (2019). *Various parameter estimation techniques for stochastic differential equations*, Yüksek lisans tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.
- Evans, L. (2013). *An introduction to stochastic differential equations*. American Mathematical Society. Vol. 8.
- Guidotti, E., Iacus, S. M., Mercuri, L. (2017). *YuimaGUI: A graphical user interface for the yuima package*. User Guide yuimaGUI v1.0.
- Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 43(3), 525-546.
- Lahmuddin, M. F., Shabri, A. (2022). Forecasting the crude oil price in Malaysia using geometric Brownian motion. **Proceedings of Sciences and Mathematics**, 9, 185-194.
- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and inference for stochastic differential equations with R examples*. Springer: USA.
- Iacus, S. M., Yoshida, N. (2010). Numerical analysis of volatility change point estimators for discretely sampled stochastic differential equations. *Economic Notes: Review of Banking, Finance and Monetary Economics*, 39 (1-2), 107-127.
- Iacus, S. M., Yoshida, N. (2012). Estimation for the change point of volatility in a stochastic differential equation. *Stochastic Processes and Their Applications*, 122(3), 1068-1092.
- Iacus, S. M., Yoshida, N. (2018). **Simulation and inference for stochastic processes with YUIMA. A comprehensive R framework for SDEs and other stochastic processes. Use R**. Springer: USA.

- Ince, N., Shamilov, A. (2020). An application of new method to obtain probability density function of solution of stochastic differential equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5 (1), 337-348.
- İnce, N. (2021). *Stokastik diferansiyel denklem modellemede geliştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri*, Doktora tezi. Eskişehir Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye.
- Jahanshahi, H., Uzun, S., Kaçar, S., Yao, Q., Alassafi, M. O. (2022). Artificial intelligence-based prediction of crude oil prices using multiple features under the effect of Russia–Ukraine War and COVID-19 pandemic. *Mathematics*, 10 (22).
- Kloeden, P. E., Platen, E., Schurz, H. (2000). *Numerical solution of stochastic differential equations through computer experiment*. Springer-Verlag: Berlin.
- Kolmogorov, A. N., Fomin, S. (1970). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc: New York.
- Kostrista, E., Çibuku, D. (2018). Introduction to stochastic differential equations. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT*, 3 (5-6), 189-195.
- Kovarik, M. (2013). Volatility change point detection using stochastic differential equations and time series control charts. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 7 (2), 121-133.
- Lapeyre, B., Pardoux, E., Sentis, R. (2003). *Introduction to Monte Carlo methods for transport and diffusion equations*. Oxford: New York.
- Lee, S., Nishiyama, Y., Yoshida, N. (2006). Test for parameter change in diffusion processes by CUSUM statistics based on one-step estimators. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 58(2), 211-222.
- Mao, X. (2007). *Stochastic differential equation and applications*. Woodhead Publishing: United Kingdom.
- Mbah, R. E., Wasum, D. (2022). Russian-Ukraine 2022 War: A review of the economic impact of Russian-Ukraine crisis on the USA, UK, Canada, and Europe. *Advances in Social Sciences Research Journal*, 9(3), 144-153.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific: Singapore.
- Mohd Noh, N., Bahar, A., Zainuddin, Z. M. (2023). Formulating a deterministic equivalent of stochastic programming in describing behaviour of oil prices and demand uncertainty. *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc.
- Nesin, A. (2012). *Analiz IV*. Nesin Yayıncılık: İstanbul.
- Neuenkirch, A., Szölgényi, M., Szpruch, L. (2019). An adaptive Euler-Maruyama scheme for stochastic differential equations with discontinuous drift and its convergence analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 57 (1), 378-403.
- Neyman, J., Pearson, E. S. (1933). IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231 (694-706), 289-337.
- Nielsen, J. N., Madsen, H., Young, P. C. (2000). Parameter estimation in stochastic differential equations: An overview. *Annual Reviews in Control*, (24), 83-94.
- Øksendal, B. (2000). *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Springer-Verlag: Berlin.
- Onalan, Ö. (2010). *Stokastik Süreçler*. Avcıol Basım Yayın: İstanbul.

- Oyuna, D., Yaobin, L. (2021). Forecasting the crude oil prices volatility with stochastic volatility models. *SAGE Open*, 11(3).
- Özdemir, T. A. (2019). *Parameter estimation in Merton jump diffusion model*, Yüksek lisans tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.
- Özel Kadılar, G. (2020). *Stokastik süreçler ve R uygulamaları*. Seçkin yayıncılık: Ankara.
- Panik, M. J. (2017). *Stochastic differential equations an introduction with applications in population dynamics modeling*. Wiley: USA.
- Pavan Kumar, S. T., Lahiri, B., Alvarado, R. (2022). Multiple change point estimation of trends in Covid-19 infections and deaths in India as compared with WHO regions. *Spatial Statistics*, 49, 1-14.
- Rezaeyan, R., Farnoosh, R. (2010). Stochastic differential equations and Markov processes in the modeling of electrical circuits. *Journal of Mathematical Extension* Vol. 4, 15-26.
- Sabah, N., Sagheer, A., Dawood, O. (2021). Survey: (Blockchain-based solution for COVID-19 and smart contract healthcare certification). *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, 2(1),1-8.
- Schuss, Z. (2010). *Theory and applications of stochastic processes an analytical approach*. Springer.
- Schuss, Z. (2013). *Brownian dynamics at boundaries and interfaces in physics, chemistry, and biology*. Springer.
- Schwarz G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461.
- Steele, J. M. (2000). *Stochastic calculus and financial applications*. Springer.
- Stojkoski, V., Sandev, T., Basnarkov, L., Kocarev, L., Metzler, R. (2020). Generalised geometric Brownian motion: Theory and applications to option pricing. *Entropy*, 22 (12), 1-34.
- Su, F., Chan, K. S. (2015). Quasi-likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Journal of Econometrics*, 189 (2), 473-484.
- Şamilov, A. (2007). *Ölçüm teorisi, olasılık ve Lebesgue integrali*. Anadolu Üniversitesi Yayınları: Eskişehir.
- Şamilov, A. (2012). *Teori ve çözümlü problemlerle diferansiyel denklemler*. Nobel Akademik Yayıncılık: Ankara.
- Şamilov, A. (2014). *Kavramsal yorumlar ve uygulamalarla olasılık teorisi*. Nobel Akademik Yayıncılık: Ankara.
- Tan, K. (2018). Detecting structural changes in stochastic differential equation system based upon a Bayesian approach. *Journal of Economic and Social Research*, 58 (1-2), 51-67.
- Tonaki, Y., Kaino, Y., Uchida, M. (2023). Estimation for change point of discretely observed ergodic diffusion processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 50(1), 142-183.
- Uchida, M., Yoshida, N. (2005). AIC for ergodic diffusion processes from discrete observation.
- Uchida, M., Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field. *Stochastic Processes and Their Applications*, 123 (7), 2851-2876.

- Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 63(3), 431-479.
- Yüksel, Ş. (2006). *Genel Topoloji*. Eğitim Yayınevi: Konya.
- Zou, C., Yin, G., Feng, L., Wang, Z. (2014). Nonparametric maximum likelihood approach to multiple change-point problems. *Annals of Statistics*, 42 (3), 970-1002.





EKLER

Ek 1. Örnek 3.1 için RStudio Program Kodları

```
set.seed (123)
n = 10000
beta =3
x = rnorm (n)
y = exp (beta*x)
exp ( beta ^2/2)
mc.mean = mean (y)
mc.sd = sd(y)
true.sd = sqrt ( exp (2* beta ^2) - exp ( beta ^2))
mc.mean - true.sd*1.96 / sqrt (n)
mc.mean + true.sd* 1.96 / sqrt (n)
mc.mean - mc.sd* 1.96 / sqrt (n)
mc.mean + mc.sd* 1.96 / sqrt (n)
plot (1:n, cumsum(y)/ (1: n), type ="l",axes =F, xlab ="n",
      ylab = expression ( hat (g)[n]), ylim =c (0 ,135))
axis (1, seq(0,n, length =5))
axis (2, seq(0 ,135 , length =6))
abline (h =90.01713, col="red")
abline (h=mc.mean-mc.sd* 1.96 / sqrt (n), lty =4, col="green")
abline (h=mc.mean+mc.sd* 1.96 / sqrt (n), lty =4, col="green")
abline (h=mc.mean , lty =2, col="blue")
box ()
```

Ek 2. Şekil 3.3 için RStudio Program Kodları

```
set.seed (132)
N = 1000
T = 1
Delta = T/N
W = numeric (N +1)
t = seq (0,T, length = N +1)
for (i in 2:( N +1))
W[i] = W[i -1] + rnorm (1)*sqrt(Delta)
plot (t, W, type = "l", main = " Wiener Süreci ", ylim = c( -1 ,1))
```

Ek 3. Örnek 4.1 için MATLAB Program Kodları

```
clc
clear all
randn('state',100)
lambda=2 ; mu = 2; Xzero = 2;
T = 1; N = 2^8; dt = 1/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW);
Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)*([dt:dt:T])+mu*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'b-'), hold on
R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
Xem = zeros(1,L);
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;
Xem(j) = Xtemp;
end
plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem],'r--*'), hold off
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Gerçek Çözüm')
emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end))
```

Ek 4. Bölüm 5 için RStudio Program Kodları

```
# WTI, West Teksas ham petrol verisini göstermek üzere;
library(nortest)
library(tseries)
library(urca)
require(yuima)
n = length(WTI)
Delta = 1/252
time = rep(0,n)
for (i in 1:n) { time[i] = time[i-1]+Delta }
h = boxplot(WTI, main = "WTI FOB Ham Petrol verileri için Aykırı Değerler")
WTI[285]=NA
hist(WTI, main = "Cushing, Oklahoma WTI FOB Ham Petrol")
plot(density(na.omit(WTI)))
jarque.bera.test(na.omit(WTI))
test_normality(na.omit(WTI), show.volatility = FALSE, plot = TRUE, pch = 1,
               add.legend = TRUE, seed = sample(1e+06, 1))
qqnorm(na.omit(WTI),ylab = "Spot Fiyatı", main = "Normal Q-Q Plot")
qqline(na.omit(WTI),col = "red")
As = ts(na.omit(WTI))
df_As = diff(As, difference=1)
plot(time[1:1010], df_As, xlab = "t", ylab = "Fark", typ = 'l', main = "Artışlar")
adf_d_AIC_df_As <- ur.df(df_As, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(adf_d_AIC_df_As)
Box.test(df_As, lag = 1, type = "Box-Pierce")

##### CIR SDD #####
cir <- setModel(drift = "theta1- theta2*x", diffusion = "sigma*sqrt(x)")
modcir <- setYuima(model = cir, data = setData(na.omit(WTI))
fitcir <- qmle(modcir, start = list(theta1, theta2, sigma))
summary(fitcir)
```

```

theta1=fitcir@coef[["theta1"]]
theta2=fitcir@coef[["theta2"]]
sigma=fitcir@coef[["sigma"]]
MUCIR<-rep(0,n)
VARCIR<-rep(0,n)
vCIR<-rep(0,n)
con.int.lCIR<-rep(0,n)
con.int.rCIR<-rep(0,n)
for (i in 1:n) {
MUCIR[i]=(theta1/theta2)+(WTI[1]-(theta1/theta2))*exp(-theta2*time[i])
VARCIR[i]=WTI[1]*((sigma^2)*(exp(-theta2*time[i])-exp(-
2*theta2*time[i]))/theta2)+(theta1*(sigma^2)*(1-exp(-
2*theta2*time[i])))/(2*(theta2^2))
vCIR[i]=sqrt(VARCIR[i])
con.int.lCIR[i]=MUCIR[i]-2*vCIR[i]
con.int.rCIR[i]=MUCIR[i]+2*vCIR[i]
plot(time, WTI, typ = 'l',lwd = 2.5, xlab = "t", ylab = "Spot Fiyatı", main = "CIR
SDD'nin çözümlerinin güven aralığı")
lines(time, MUCIR, lty=3,lwd=3, col="blue")
lines(time, con.int.lCIR, lty=3,lwd=3, col="red")
lines(time, con.int.rCIR, lty=3,lwd=3, col="red")
YCIR <- rep(0,n)
for (j in 1:n){
YCIR[j]<-YCIR[j-1]+(theta1-theta2*YCIR[j-1])*Delta+sigma*(YCIR[j-1])*dw[j] }
plot(time, WTI, typ='l', lwd=2.5, xlab="t", ylab="Spot Fiyatı", main="CIR SDD'nin EM
şemasının bir yörüngesi")
lines (time, YCIR, typ='l', lwd=2.5, col="mediumseagreen")
fit1cir <- qmleL(modcir, t, start=list(theta1, theta2, sigma))
fit2cir <- qmleR(modcir, t, start=list(theta1, theta2, sigma))
summary(fit1cir)
summary(fit2cir)
cpcir <- CPoint(modcir,param1=coef(fit1cir),param2=coef(fit2cir), plot=TRUE)

```

```

z <- diff(get.zoo.data(modcir)[[1]])
plot(time[1:1010], z, xlab="t", typ='l', main="Artışlar")
plot(time, WTI, typ='l', lwd=2.5, xlab="t", ylab="Spot Fiyatı", main="WTI FOB Ham
Petrol Verileri için Değişim Noktaları")
abline(v=time[750], lty=3,lwd=3,col="blue")
abline(v=cpcir$tau, lty=3,lwd=3,col="red")

##### GBM SDE #####
gBm <- setModel(drift="theta*x", diffusion="sigma*x")
modgBm <- setYuima(model=gBm, data=setData(na.omit(WTI), delta=Delta))
fitgBm <- qmle(modgBm, start=list(theta, sigma))
summary(fitgBm)
theta=fitgBm@coef[["theta"]]
sigma=fitgBm@coef[["sigma"]]
MUGBM<-rep(0,n)
VARGBM<-rep(0,n)
vGBM<-rep(0,n)
con.int.lGBM<-rep(0,n)
con.int.rGBM<-rep(0,n)
for (i in 2:n) {
MUGBM[i]=WTI[1]*exp(theta*time[i])
VARGBM[i]=(WTI[1]^2)*exp(2*theta*time[i])*(exp((sigma^2)*time[i])-1)
vGBM[i]=sqrt(VARGBM[i])
con.int.lGBM[i]=MUGBM[i]-2*vGBM[i]
con.int.rGBM[i]=MUGBM[i]+2*vGBM[i] }
plot(time, WTI, typ='l',lwd=2.5, ylim=c(-1000,1400), xlab="t", ylab="Spot Fiyatı",
main="GBM SDD'nin çözümlerinin güven aralığı")
lines(time, MUGBM, lty=3,lwd=3, col="blue")
lines(time, con.int.lGBM, lty=3,lwd=3, col="red")
lines(time, con.int.rGBM, lty=3,lwd=3, col="red")
YGBM<-rep(0,n)
for (j in 1:n){

```

```

YGBM[j]<-YGBM[j-1]+(theta*YGBM[j-1])*Delta+(sigma*YGBM[j-1])*dw[j] }
plot(time,WTI,typ='l', lwd=2.5, xlab="", ylab="Spot Fiyatı", main="GBM SDD'nin
EM şemasının bir yörüngesi")
lines(time, YGBM, typ='l',lwd=2.5, col="purple")
fit1gBm <- qmleL(modgBm, t, start=list(theta, sigma))
fit2gBm <- qmleR(modgBm, t, start=list(theta, sigma))
summary(fit1gBm)
summary(fit2gBm)
cpgBm<-CPoint(modgBm,param1=coef(fitgBm),param2=coef(fitgBm),plot=TRUE)
z <- diff(get.zoo.data(modgBm)[[1]])
plot(z)
abline(v=cpgBm$tau, lty=3,lwd=2,col="red")
modcirs <- setYuima(model=cir, data=setData(na.omit(WTI[303:1012]), delta=Delta))
fit1cirs <- qmleL(modcirs, t, start=list(theta1, theta2, sigma))
fit2cirs <- qmleR(modcirs, t, start=list(theta1, theta2, sigma))
summary(fit1cirs)
summary(fit2cirs)
cpcirs <- CPoint(modcirs,param1=coef(fitcirs),param2=coef(fitcirs), plot=TRUE)
zs <- diff(get.zoo.data(modcirs)[[1]])
plot(time[1:709], zs, xlab="t", typ='l', main="Artışlar")
abline(v=cpcirs$tau, lty=3,lwd=2,col="red")
modgBms <- setYuima(model=gBm, data=setData(na.omit(WTI[303:1012]),
delta=Delta))
fit1gBms <- qmleL(modgBms, t, start=list(theta, sigma))
fit2gBms <- qmleR(modgBms, t, start=list(theta, sigma))
summary(fit1gBms)
summary(fit2gBms)
cpgBms<-CPoint(modgBms,param1=coef(fitgBms),param2=coef(fitgBms),
plot=TRUE)
zs <- diff(get.zoo.data(modgBms)[[1]])
plot(zs, xlab="t", typ='l', main="Artışlar")
abline(v=cpgBms$tau, lty=3,lwd=2,col="red")

```

```

YGBMcp2<-c(YGBMcpo,YGBMcpso,YGBMcpss)
YCIRcp2<-c(YCIRcpo,YCIRcpso,YCIRcpss)
AIC(fitcir, fitgBm)
BIC(fitcir, fitgBm)
HYB<-c(YCIRcpo,YCIRcpso, YGBMcpss)
mape(WTI, HYB)
mape(WTI, YCIR)
mape(WTI, YGBM)
mape(WTI, YCIRcp2)
mape(WTI, YGBMcp2)
rmse(WTI, HYB)
rmse(WTI, YCIR)
rmse(WTI, YGBM)
rmse(WTI, YCIRcp2)
rmse(WTI, YGBMcp2)
x<-WTI
m=(n-6)%/%5
xc<-array(dim=c(n,m))
omega<-array(n)
ir<-array(n)
for (icase in 1:2) {
xx=1
for (j in 1:m+1){
omega[j]=0}
kk=1
akk=kk
plot(x, ylim=c(5,150), lty=5, pch=10, col="red", xlab="N",ylab="WTI Spot Fiyatı",
main="GOF Testi için CIR SDD Modelinin Monte-Carlo Simülasyonları")
lines(x,lty=5, pch=10, col="red")
for (i in 1:n){
xs=x[i-1]
for (j in 2:m){

```

```

for (k in 2:kk){
r1<-funct_CIR(xk, 0.01*theta1, theta2, sigma)
r2<-ran(xx)
xk=h*r1[[1]]+sqrt(h)*r1[[2]]*r2[[1]]
points(i, xk, col="black",pch="*")
xx=r2[[3]] } }
for (i in 2:n){
irr=1
for (j in 1:m) {
xcalc=xc[i,j] }
ir[i]=irr }
for (i in 2:n){
omega[irr]=omega[irr]+1 }
hlp=(an-1.0)/(am+1.0)
for (j in 1:m+1){
chi2=chi2+(omega[j]-hlp)^2/h }

```



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Ege Üniversitesi

Fakülte : Fen Fakültesi

Bölüm : Matematik Bölümü

Mezuniyet Yılı : 2010

Yüksek Lisans

Üniversite : Anadolu Üniversitesi

Enstitü : Fen Bilimleri Enstitüsü

Anabilim Dalı : İstatistik Anabilim Dalı

Mezuniyet Yılı : 2014

Akademik Yayınlar

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- Ozdemir Calikusu S., Erdogan F. (2021). Fitting the Itô stochastic differential equation to the COVID-19 data in Turkey. *MANAS Journal of Engineering*. 9 (2), 192-197.
- Shamilov A., Ozdemir S. (2017). Survival data analysis by minminxent and maxminxent methods. *Turkiye Klinikleri Journal of Biostatistics*. 9 (1), 23-34.
- Shamilov A., Kalathilparmbil C., Ozdemir S. (2017). An application of generalized entropy optimization methods in survival data analysis. *Journal of Modern Physics*, 8, 349-364.

Uluslararası Kongrelerde Yayımlanan Tam Metin ve Özet Bildiriler

- Ozdemir Calikusu S., Erdogan F. (2022). Stochastic differential equation modeling for gold data with YUIMAGUI. **6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences**. Ordu, Turkey. 1 (1), 257.
- Ozdemir Calikusu S., Erdogan F. (2021). Itô stochastic sifferential equation modeling for Bitcoin data. **5th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences**. Van, Turkey. 1 (1), 133.
- Shamilov A., Ince N., Ozdemir S. (2019). Several applications of new generalized entropy optimization methods in survival data analysis. **5th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress**. Aydın, Turkey. 348-356.
- Shamilov A., Ozdemir S., Erdogan F. (2019). Fitting one life expectancy at birth data to stochastic differential equation. **5th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress**. Aydın, Turkey. 2-7.
- Shamilov A., Erdogan F., Ozdemir S. (2019). Fitting irregular migration data in Turkey to Itô stochastic differential equation. **International Conference on Data Science, Machine Learning and Statistics**. Van, Turkey. 87.

- Shamilov A., Ozdemir S., Celik H. E. (2017). Generalized entropy optimization methods on leukemia remission times. **10th International Statistics Congress**, Ankara, Turkey. 108.
- Özdemir S., Çoksöyler F. N. (2015). Arrhenius tipi bir model kullanarak, pH ve su aktivitesini spesifik gelişme hızı-sıcaklık ilişkisini nasıl etkileyebileceğini betimleyici modellerle gösterilmesi. **18. Ulusal Biyoteknoloji Kongresi**, Konya, Türkiye.
- Shamilov A., Ozdemir S., Yılmaz N. (2014). Generalization entropy optimization methods generated by Shannon and Kullback – Leibler measures. **ALT2014 : 5th International Conference on Accelerated Life Testing and Degradation Models**. Pau, Fransa. 1-10.
- Shamilov A., Giriftinoğlu C., Ozdemir S. (2014). An application of generalized entropy optimization methods in survival data analysis. **On Actual Problems of Mathematics and Informatics, Institute of Mathematics and Mechanics**. Baku, Azerbaycan. 30-31.
- Shamilov A., Giriftinoğlu Ç., Özdemir S. (2013). Minminxent ve maxminxent yöntemleri ile sağkalım veri analizi. **Uluslararası 8. İstatistik Kongresi**. Kemer-Antalya, Türkiye. 6-7.
- Shamilov A., Giriftinoğlu C., Ozdemir S. (2013). Survival data analysis by generalized entropy optimization methods. **The 7th International Days of Statistics and Economics**. Prague, Czech Republic. 1250-1260.

VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 12/06/2023

Tez Başlığı: Değişim Noktaları Tahminleri Kullanılarak Stokastik Diferansiyel Denklemler ile Modelleme

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 132 (yüz otuz iki) sayfalık kısmına ilişkin, 12/06/2023 tarihinde tez danışmanım tarafından TURNİTİN adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı % 12 (yüzde on iki) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

12/06/2023

İmza

Adı Soyadı : Sevda ÖZDEMİR ÇALIKUŞU

Öğrenci No : 159102075

Anabilim Dalı : İstatistik Anabilim Dalı

Programı : İstatistik

Statüsü: () Yüksek lisans (X) Doktora

DANIŞMAN

ENSTİTÜ ONAYI

Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

UYGUNDUR

UYGUNDUR