



**ISI GEÇİRGENLİĞİ FONKSİYONU İÇİN
OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Cavide YAŞAR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat SUBAŞI
2019
Her hakkı saklıdır.**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ISI GEÇİRGENLİĞİ FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL
PROBLEMİ**

Cavide YAŞAR

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM
2019**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

ISI GEÇİRGENLİĞİ FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Cavide YAŞAR tarafından hazırlanan bu çalışma, 17/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oyçokluğu (.../...) ile kabul edilmiştir.**

Başkan : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza:

Üye : Prof. Dr. Murat SUBAŞI

İmza:

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi Muhammed YİĞİDER

İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu **05./07./2019** tarih ve **27./.../65** ... nolu kararı ile onaylanmıştır.


Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğraflarını kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ISI GEÇİRGENLİĞİ FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Cavide YAŞAR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde, ısı iletim probleminde geçirgenlik katsayısına ait bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu tür problemler kötü tanımlanmış problem sınıfında olduğu için çözümlerini bulmada regülerleştirme işlemi gerekmektedir. Bu yüzden bu işleme uygun olacak şekilde yeni bir amaç fonksiyoneli oluşturulmuştur. Bu fonksiyonel için bir minimalleştirici dizi elde edilerek minimum eleman, istenen kontrol fonksiyonu olarak seçilmiştir. Minimalleştirici dizi oluşturmada eşlenik metot yardımıyla fonksiyonelin gradyeni kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle test edilmiştir.

2019, 35 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal Kontrol Problemi, Eşlenik Metot, Isı Denklemi

ABSTRACT

MS Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR HEAT CONDUCTIVITY FUNCTION

Cavide YAŞAR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Applied Mathematics Science

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this study, we consider the problem of control of the thermal conductivity in a heat equation. Since these types of problems are ill-posed, the regularization process is needed for obtaining their solutions. Hence a new cost functional which is appropriate to this process has been constituted. Obtaining a minimizing sequence for this functional the minimum element has been chosen as the desired control function. In the constitution of minimizing sequence the gradient of the functional has been used with the help of adjoint method. The obtained results have been tested by numerical treatments.

2019, 35 pages

Keywords: Optimal Control Problem, Adjoint Method, Heat Equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yoğun bir çalışmanın ürünü olan bu tezimi yazarken bana bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, benden bir an olsun ilgi ve desteğini esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyesi danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI'ya tüm bilimsel katkılarının yanı sıra sabrı, hoşgörüsü ve anlayışı için en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans süresince benden sevgisini ve her türlü desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Cavide YAŞAR

Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	14
4.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	14
4.2. Eşlenik Problem Metodu	15
4.3. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilmesi ve Optimallik için Gerek Şart	17
4.4. Minimalleştirici Dizi Oluşturma	20
4.5. Optimal Kontrol için Yaklaşık Çözüm.....	21
4.6. Nümerik Örnekler.....	27
5. SONUÇ	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGELER DİZİNİ

$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$\Omega = (0, l) \times (0, T)$	\mathbb{R}^2 uzayında verilen bölge
$L_2(0, l)$	$(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_p(\Omega)$	Ω bölgesinde tanımlı ve p . dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_\infty(0, l)$	$(0, l)$ aralığında esaslı sınıra sahip fonksiyonlar uzayı
$W_2^{1,1}(\Omega)$	Ω bölgesinde tanımlı kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayı
$V_2^{1,0}(\Omega)$	Ω bölgesinde tanımlı birinci değişkene göre kısmi türevi $L_2(\Omega)$ uzayından ve ikinci değişkene göre sürekli olan fonksiyonların uzayı
$o(\ \Delta k\)$	$\ \Delta k\ $ ifadesinden daha hızlı sifıra giden terim

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Bazı α sayıları için $J(k)$ ve $\ k-k^+\ _{L_2(0,1)}^2$ değerleri.....	29
Şekil 4.2. α parametresinin değişik başlangıç elemanlarına sahip 0.1-minimum norm kontrolüne etkisi	30
Şekil 4.3. Bazı α sayıları için $J(k)$ ve $\ k-k^+\ _{L_2(0,1)}^2$ değerleri.....	32
Şekil 4.4. α parametresinin değişik başlangıç elemanlarına sahip x-minimum norm kontrolüne etkisi	33



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Bazı α değerlerine karşılık gelen $k^*(x)$ kontrolleri	29
Çizelge 4.2. Bazı α değerlerine karşılık gelen $k^*(x)$ kontrolleri	32



1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerde sisteme giren üç farklı kontrol tipi vardır. Bunlar; kaynak teriminin kontrolü (iç kontrol), sınır koşullarının kontrolü (sınır kontrol) ve yayılım katsayısının kontrolü (yayılım kontrol). İç ve yayılım kontrolü ile parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin optimal kontrol problemi, difüzyon popülasyonların yönetimi, hidrodinamik ve gaz dinamiği, ısı transferi, filtreleme, plazma fiziği ve bunun gibi çeşitli uygulama alanlarında ortaya çıkmaktadır.

Isı denklemiyle ilgili optimal kontrol problemleri üzerine yapılan araştırmalar son yıllarda da önemini kaybetmeden devam etmektedir.

Bu çalışmaların bir kısmında ısı kaynağı kontrol fonksiyonu olarak seçilmiştir. Bu çalışmaların bazıları şu şekildedir;

Subaşı (2002) çalışmasında,

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = v(x, t)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < \tau$$

problemi için

$$V = \{v = v(x, t) \in L_2(\Omega), \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq R\}$$

kümesinde

$$J(v) = \int_0^1 |T(x, \tau; v) - y(x)|^2 dx$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Effati, Nazemi ve Shabani (2014) çalışmasında,

$$Y_t(x, t) = LY(x, t) + u(t)g(x), \quad (x, t) \in \omega \times [0, T]$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad x \in \omega$$

$$Y(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\omega \times [0, T]$$

problemi için

uzayında

$$L_2([0, T])$$

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, u(t)) dt$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Teymurov (2017) çalışmasında,

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta(x - s_k(t))$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

ve

$$\dot{s}_k(t) = f_k(s_k(t), \vartheta(t), t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$s_k(0) = s_{k0}, \quad k = \overline{1, n},$$

denklemleriyle verilmiş problem için

$$V = \{(p, \vartheta) \in H: 0 \leq p_i \leq A_i, 0 \leq \vartheta_j \leq B_j \leq l, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r}\}$$

kümesinde

$$J(\bar{\vartheta}) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \alpha_1 \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt \\ + \alpha_2 \sum_{m=1}^r \int_0^T [\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)]^2 dt$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev (2004, 2007, 2009), Tagiyev ve Hashimov (2013) çalışmalarında parabolik denklemlerde katsayı fonksiyonlarının değişik türdeki amaç fonksiyonelleri kullanılarak kontrol edilmesi problemleri ele alınırken, Tagiyev (2009, 2013) çalışmalarında da quasilineer parabolik denklemlerde katsayı fonksiyonlarının kontrol edilmesi problemleri incelenmiştir.

Tagiyev (2004) çalışmasında,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(v_\alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) + v_0(x, t)u = f(x, t), (x, t) \in Q_T \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x), x \in \Omega; u|_{S_T} = 0$$

problemi için

$$V_0 = \{v_0 = v_0(x, t): v_0 \in L_q(Q_T), \|v_0\|_{L_q(Q_T)} \leq d_0\},$$

ve

$$V_\alpha = \{v_\alpha = v_\alpha(x, t): v_\alpha \in W_p^{1,1}(Q_T), \overset{\circ}{\forall} Q_T, 0 \leq v_\alpha \leq v_\alpha \leq v_\alpha(x, t) \leq \mu_\alpha ,$$

$$\left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right\|_{L_p(Q_T)} \leq d_\alpha, \left\| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \right\|_{L_p(Q_T)} \leq d_i^{(\alpha)}, i = 1, 2\}, \alpha = 1, 2$$

kümesinde

$$J(v) = \|u(x, T; v) - \varphi_1(x)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev (2007) çalışmasında,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega$$

problemi için

$$V = \{v = (k_1, \dots, k_n, q) \in B \equiv [W_p^{1,1}(Q_T)]^n \times L_S(Q_T) : 0 < v_\alpha \leq k_\alpha(x, t) \leq \mu_\alpha,$$

$$\forall (x, t) \in Q_T, \left\| \frac{\partial k_\alpha}{\partial x_i} \right\|_{L_p(Q_T)} \leq d_i^{(\alpha)}, \left\| \frac{\partial k_\alpha}{\partial t} \right\|_{L_p(Q_T)} \leq d_\alpha, \quad (\alpha, i = \overline{1, n}), \|q\|_{L_S(Q_T)} \leq \rho\}$$

kümesinde

$$J(v) = \beta_0 \|u|_{t=T} - u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \beta_1 \|u - u_1\|_{L_2(Q_T)}^2$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev (2009) çalışmasında,

$$u_t - \sum_{i=1}^n (k_i(x, t) u_{x_i})_{x_i} + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in \Omega$$

problemi için

$$K_i = \{k_i(x, t) \in W_{p_i}^{1,1}(Q_T) : 0 < v_i \leq k_i(x, t) \leq \mu_i \forall Q_T,$$

$$\left\| k_{ix_j} \right\|_{p_i, Q_T} \leq d_j^{(i)} \quad (j = 1, \dots, n), \quad \|k_{it}\|_{p_i, Q_T} \leq d_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

ve

$$Q = \{q(x, t) \in L_s(Q_T): \|q\|_{s, Q_T} \leq \varrho\}$$

kümesinde

$$J(v) = \alpha_0 \int_{Q_T} |u(x, t, v) - z_0(x, t)|^2 dxdt + \alpha_1 \int_{\Omega} |u(x, T, v) - z_1(x)|^2 dx$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev ve Hashimov (2013) çalışmasında,

$$u_t - \sum_{i=1}^n (k_i(x, t) u_{x_i})_{x_i} + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in \Omega$$

problemi için

$$K_i = \{k_i(x, t) \in W_{p_i}^{1,1}(Q_T): \overset{\circ}{\forall} Q_T, 0 < v_i \leq k_i(x, t) \leq \mu,\}$$

$$\|k_{ix_j}\|_{p_i, Q_T} \leq d_j^{(i)} \quad (j = \overline{1, n}), \quad \|k_{it}\|_{p_i, Q_T} \leq d_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

ve

$$Q = \left\{q(x, t) \in L_s(Q_T): |q(x, t)| \leq \rho \overset{\circ}{\forall} Q_T\right\}$$

kümesinde

$$J_0(v) = \int_{Q_T} F_0(x, t, u(x, t, v), k(x, t)) dxdt + \int_{\Omega} G_0(x, u(x, T, v)) dx$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev (2009) çalışmasında,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f(x, t, u, q(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in Q_T$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega$$

problemi için

$$K_i = \{k_i(x, t) \in W_{p_i}^{1,1}(Q_T) : \forall Q_T, 0 < v_i \leq k_i(x, t) \leq \mu_i,$$

$$\left\| \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \right\|_{p_i, Q_T} \leq d_i^{(j)} \quad (j = \overline{1, n}), \quad \left\| \frac{\partial k_i}{\partial t} \right\|_{p_i, Q_T} \leq d_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

ve

$$Q = \{q(x, t) \in W_s^{1,1}(Q_T) : \forall Q_T, q_0 \leq q(x, t) \leq q_1$$

$$\left\| \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\|_{s, Q_T} \leq \rho_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad \left\| \frac{\partial q}{\partial t} \right\|_{s, Q_T} \leq \rho\}$$

kümesinde

$$J(v) = \int_{Q_T} F(x, t, u(x, t, v), v(x, t)) dx dt + \int_{\Omega} F_T(x, u(x, T, v)) dx$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Tagiyev (2013) çalışmasında,

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{i,j}(x, t, p(x, t)) u_{x_j} \right)_{x_i} + q(x, t) a(x, t, u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{S_T} = 0$$

problemi için

$$V = P \times Q \subset B = \left(W_{\infty}^{1,1}(Q_T) \right)^r \times L_{\infty}(Q_T),$$

$$P = \{p(x, t) = (p_1(x, t), \dots, p_r(x, t)) \in (W_\infty^{1,1}(Q_T))^r : \forall Q_T, 0 < v_i \leq p_i(x, t) \leq \mu_i,$$

$$|p_{ix_j}(x, t)| \leq d_i^{(j)}, |p_{it}(x, t)| \leq d_i \ (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n) \}$$

ve

$$Q = \{q(x, t) \in L_\infty(Q_T) : \forall Q_T, 0 \leq q_0 \leq q(x, t) \leq q_1 \}$$

kümesinde

$$J_0(v) = \int_{Q_T} [F_0(x, t, u(x, t, v), p(x, t)) + q(x, t)R_0(x, t, u(x, t, v))] dxdt \\ + \int_{\Omega} G_0(x, u(x, T, v)) dx$$

fonksiyoneli minimalleştirilmiştir.

Bu çalışmaların hepsinde optimal kontrolün varlığı, tekliği ve optimallik için gerek şartlar ifade edilmiştir. Buna karşın optimal kontrol problemlerinde karşılaşılan regülerleştirme işlemleri ve onların nümerik çözümlerine pek rastlanılmamaktadır.

Bu yüzden bu tez çalışmasında bu türdeki bir problem ele alınarak çözümün varlığı ve tekliği ispatlandıktan sonra regülerleştirme işlemleri ve nümerik çözümler üzerine incelemeler yapılacaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm tezde yer alan tanım ve teoremlerin ifade edildiği Kuramsal Temeller bölümüdür. Üçüncü bölümde tezde yer alan optimal kontrol problemi için regülerleştirme işleminin gereksimini ifade eden Materyal ve Yöntem kısmı yer almaktadır. Dördüncü bölümde tezde elde edilen bulguları ifade eden ve optimal çözümün varlığı ve tekliği, optimallik için gerek şart ve bir minimalleştirici dizi kurularak yaklaşık optimal çözümün elde edilmesi konularını kapsayan Araştırma Bulguları ve Tartışma kısmı bulunmaktadır. Son bölüm olan Sonuç bölümünde ise regülerleştirme işlemlerinin bu tür problemlerin çözümü üzerine olan etkisinden bahsedilmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1: Ω , \mathbb{R}^n uzayında bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. $L_p(\Omega)$, Ω bölgesinde tanımlı

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan bütün ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

$p = 2$ için yazılmış $L_2(\Omega)$ uzayı

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2 ($L_{\infty}(\Omega)$ Uzayı): Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti bulunabiliyorsa u fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına $|u|$ nun Ω bölgesindeki esas supremumu denir ve $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L_{\infty}(\Omega)$ vektör uzayı denir. $\|\cdot\|_{\infty}$ ile tanımlanan fonksiyonel

$$\|u\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3 (L_p Uzayları için Gömülme Teoremi): $\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L_q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L_p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p \leq (\text{vol}(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

şeklindedir. Buradan

$$L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.4: $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde verilmiş $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayı olup, kendisi ve birinci değişkene göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(f(x, t)g(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right) dx dt,$$

$$\|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5: $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde verilmiş $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayı olup, kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{W_2^{1,1}(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(f(x, t)g(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right) dx dt,$$

$$\|f\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^{1,1}(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6: $V_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda norm

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.7: K kümesinde tanımlanan $I(k)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta I(k) = I(k + \Delta k) - I(k) = \langle I'(k), \Delta k \rangle_K + o(\|\Delta k\|_K)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $k \in K$ elemanında diferensiyellenebilen fonksiyonel, $I'(k)$ elemanına ise $I(k)$ fonksiyonelinin türevi denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu tezde l uzunluğa sahip ince bir tel için $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde tanımlanmış

$$u_t - (k(x)u_x)_x = f(x, t) \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.2)$$

$$-k(0)u_x(0, t) = g_0(t) \quad k(l)u_x(l, t) = g_1(t) \quad (3.3)$$

problemini ele alalım. Burada $k(x) \in L_2(0, l)$ ısı iletim fonksiyonu, $f(x, t) \in L_2(\Omega)$ dış ısı kaynağı, $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ başlangıç ısı dağılımı, $g_0(t) \in L_2(0, T)$ ve $g_1(t) \in L_2(0, T)$ ise uç noktadaki ısı akı fonksiyonlarıdır. Bu problemin çözümü olan $u(x, t)$ fonksiyonu telin x noktasının t anındaki ısı değerini verir.

Bu problemle birlikte

$$J(k) = \int_0^l [u(x, T; k) - \mu(x)]^2 dx \quad (3.4)$$

amaç fonksiyoneli oluşturularak

$$\min_{k \in K} J(k) \quad (3.5)$$

minimalleştirme problemi

$$K = \left\{ k(x) \in L_2(0, l); \forall x \in (0, l) \text{ için } 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2 \right\} \quad (3.6)$$

kümesinde incelenecektir. Burada $\mu(x) \in L_2(0, l)$ şeklindedir.

(3.1)-(3.3) probleminin çözümü ile her $\eta \in W_2^{1,1}(\Omega)$ ($\eta(x, T) = 0$) için

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u\eta_t + k(x)u_x\eta_x) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^l f\eta dx dt + \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0) dx + \int_0^T g_1(t)\eta(l,t) dt - \int_0^T g_0(t)\eta(0,t) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitliğini sağlayan $u \in V_2^{1,0}(\Omega)$ fonksiyonu kastedilmektedir.

Ladyzhenskaya (1985) çalışmasından bilindiği üzere (3.1)-(3.3) problemi her bir $k \in K$ için (3.7) anlamında bir tek $u \in V_2^{1,0}(\Omega)$ çözümüne sahiptir. Üstelik bu çözüm aşağıdaki değerlendirmeyi sağlar;

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_0 (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|g_0\|_{L_2(0,T)} + \|g_1\|_{L_2(0,T)}). \quad (3.8)$$

Burada c_0 sayısı f , φ , g_0 ve g_1 fonksiyonlarından bağımsızdır.

Diğer yandan (3.5) probleminin kötü tanımlanmış olduğu bilinmektedir. Bu durumla ilgili örnekler tezin 4.6. bölümünde verilmiştir.

Kötü tanımlanmanın üstesinden gelmek için genellikle regülerleştirme işlemlerine ihtiyaç duyulur. Bunun için $\alpha \|k - k^+\|_{L_2(0,l)}^2$ fonksiyoneli, verilen $J(k)$ fonksiyoneline eklenir ve yeni

$$\begin{aligned} I(k) &= J(k) + \alpha \int_0^l [k - k^+]^2 dx \\ &= \int_0^l [u(x,T;k) - \mu(x)]^2 dx + \alpha \int_0^l [k - k^+]^2 dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

fonksiyoneli oluşturulur.

Böylece (3.9) ile verilen fonksiyonel kullanılarak (3.5) problemi yerine

$$\min_{k \in K} I(k) \quad (3.10)$$

problemi ele alınır.

Ayrıca (3.10) probleminin $k_*(x)$ çözümü, k^+ -minimum norm çözümü olarak adlandırılır. Yani

$$J(k_*) = \min_{k \in K} J(k)$$

ve

$$\|k_* - k^+\|_{L_2(0,l)}^2 = \min_{k \in K} \{\|k - k^+\|_{L_2(0,l)}^2\}$$

özelliğindedir.

Burada k^+ fonksiyonu aranan kontrol fonksiyonu için başlangıç tahmini olarak kullanılır. Özellikle yakınsama hızlarına ait lokal sonuçlar için k^+ fonksiyonunun seçimi oldukça önemlidir. Doğal olarak başarılı sonuçlar elde etmek için (3.5) probleminin çözümü ile ilgili bir ön bilgi k^+ fonksiyonunun seçiminde dahil edilmek zorundadır. Çalışmanın nümerik örnekler kısmında k^+ fonksiyonunun seçiminin çözüme etkisi görülmektedir. α parametresi ve k^+ fonksiyonu hakkında detaylı bilgi Engl, Hanke ve Neubauer (1996) çalışmasında bulunabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde tezde elde edilen bulgular incelenecektir.

4.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde (3.10) ile verilen minimalleştirme probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ele alınacaktır. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir.

4.1.1. Teorem: $L_2(0, l)$ uzayının öyle yoğun bir G alt kümesi vardır ki herhangi bir $k^+ \in G$ için (3.10) ile verilen problemin $\alpha > 0$ iken bir tek k^+ -minimum norm çözümü vardır.

İspat: Önce $J(k)$ fonksiyonelinin K kümesinde sürekli olduğu gösterilmelidir. Bunun için $k \in K$ elemanına $k + \Delta k \in K$ olacak şekilde bir $\Delta k \in L_2(0, l)$ artımı verilsin.

Bu durumda bu artıma karşılık olarak $J(k)$ fonksiyonelindeki fark

$$\Delta J(k) = \int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)]\Delta u(x, T)dx + \int_0^l [\Delta u(x, T)]^2 dx \quad (4.1.1)$$

şeklinde olur.

İkinci olarak (4.1.1) ifadesinde yer alan Δu ile ilgili terimler değerlendirilsin. $u_\Delta = u(x, t; k + \Delta k)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) probleminin $k + \Delta k$ elemanına karşılık gelen çözümü olsun. Böylece $\Delta u = u_\Delta - u$ fonksiyonu

$$\Delta u_t - (k(x)\Delta u_x)_x - (\Delta k(x)\Delta u_x)_x - (\Delta k(x)u_x)_x = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0 \quad (4.1.3)$$

$$[k(0) + \Delta k(0)]\Delta u_x(0, t) = -\Delta k(0)u_x(0, t) \quad (4.1.4)$$

$$[k(l) + \Delta k(l)]\Delta u_x(l, t) = -\Delta k(l)u_x(l, t) \quad (4.1.5)$$

fark probleminin çözümü olacaktır.

Bu fark problemi her bir $\Delta k \in L_2(0, l)$ için (3.7) anlamında bir tek $\Delta u \in V_2^{1,0}(\Omega)$ çözümüne sahiptir. Üstelik bu çözüm aşağıdaki değerlendirmeyi sağlar;

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_1(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}). \quad (4.1.6)$$

Burada c_1 sayısı Δk artımından bağımsızdır.

$\mu(x)$ verilen fonksiyon olduğundan (3.8) ve (4.1.6) ifadeleri

$$|\Delta J(k)| \leq c_2(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}) \quad (4.1.7)$$

değerlendirmesini ortaya çıkarır.

Bu eşitsizlik de $J(k)$ fonksiyonelinin sürekliliğini gerektirir. Ayrıca $J(k)$ fonksiyoneli aşağıdan sınırlıdır. Üstelik $L_2(0, l)$ düzgün konveks, refleksiv bir Banach uzayıdır (Iosida 1967). Bu durumda Goebel (1979) çalışmasına göre $L_2(0, l)$ uzayının öyle yoğun bir G alt kümesi vardır ki herhangi bir $k^+ \in G$ için (3.10) ile verilen problemin $\alpha > 0$ iken bir tek k^+ -minimum norm çözümü vardır.

4.2. Eşlenik Problem Metodu

Bu bölümde $I(k)$ amaç fonksiyonelinin diferansiyelinin bulunmasında kullanılacak olan eşlenik problem elde edilecektir. Bunun için (3.10) problemine karşılık gelen Lagrange fonksiyoneli

$$L(u, k, \eta) = \int_0^l [u(x, T; k) - \mu(x)]^2 dx + \alpha \int_0^l [k - k^+]^2 dx \quad (4.2.1)$$

$$+ \int_0^T \int_0^l (f - u_t + (k(x)u_x)_x) \eta dx dt$$

şeklinde oluşturulur.

δu fonksiyonu u elemanı için verilen $\delta u(x, 0) = \delta u_x(0, t) = \delta u_x(l, t) = 0$ özelliğinde bir artım olsun. Bu durumda Lagrange fonksiyonelinin birinci varyasyonu

$$\delta L(u, k, \eta) = \int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \delta u(x, T) dx + \int_0^T \int_0^l (-\delta u_t + (k(x)\delta u_x)_x) \eta dx dt$$

şeklinde olur.

Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} \delta L(u, k, \eta) = \int_0^l \{2[u(x, T; k) - \mu(x)] - \eta(x, T)\} \delta u(x, T) dx \quad (4.2.2) \\ + \int_0^T \int_0^l (\eta_t + (k(x)\eta_x)_x) \delta u dx dt. \end{aligned}$$

yazılır.

$\delta L = 0$ stasyonerlik koşulu aşağıdaki eşlenik problemini ortaya çıkarır;

$$\eta_t + (k(x)\eta_x)_x = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\eta(x, T) = 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \quad (4.2.4)$$

$$k(0)\eta_x(0, t) = 0 \quad (4.2.5)$$

$$k(l)\eta_x(l, t) = 0 \quad (4.2.6)$$

Bu eşlenik problem bir tek $\eta \in V_2^{1,0}(\Omega)$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm

$$\|\eta\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_3 \|u(x, T; k) - \mu(x)\|_{L_2(0,l)} \quad (4.2.7)$$

veya

$$\|\eta\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_4 \quad (4.2.8)$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada c_3 ve c_4 sabitlerdir.

4.3. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilmesi ve Optimallik için Gerek Şart

Bu bölümde eşlenik problemin çözümünden faydalanarak $I(k)$ amaç fonksiyonelinin diferansiyeli elde edilecektir.

Amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilmesi keyfi bir $\Delta k \in L_2(0, l)$ artımı için

$$\Delta I(k) = \langle I'(k), \Delta k \rangle_{L_2(0,l)} + o(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}) \quad (4.3.1)$$

eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Burada $\lim_{\|\Delta k\| \rightarrow 0} o(\|\Delta k\|)/\|\Delta k\| = 0$ şeklinde olup $I'(k)$ terimi fonksiyonelin türevidir.

Δk artımına karşılık olarak amaç fonksiyonelinde meydana gelen fark

$$\begin{aligned} \Delta I(k) = & \int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \Delta u(x, T) dx + \int_0^l [\Delta u(x, T)]^2 dx \\ & + \int_0^l 2\alpha(k - k^+) \Delta k dx + \alpha \int_0^l [\Delta k]^2 dx \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

şeklindedir.

Eşitliğin sağ tarafında yer alan ilk integral (4.2.3)-(4.2.6) eşlenik probleminin çözümü yardımıyla değerlendirilir.

(4.1.2) ile verilen eşitliğin her iki tarafı η fonksiyonu ile çarpılıp Ω bölgesinde integrallenirse

$$\int_0^T \int_0^l [\Delta u_t - (k(x)\Delta u_x)_x - (\Delta k(x)\Delta u_x)_x - (\Delta k(x)u_x)_x] \eta dx dt = 0 \quad (4.3.3)$$

eşitliği yazılır.

Kısmi integrasyon yardımıyla eşlenik problemden de faydalanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\int_0^T \int_0^l \Delta u_t \eta dx dt = \int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \Delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \Delta u dx dt,$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (-k(x)\Delta u_x)_x \eta dx dt &= -\int_0^T k(l)\Delta u_x(l, t)\eta(l, t) dt + \int_0^T k(0)\Delta u_x(0, t)\eta(0, t) dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^l (k(x)\eta_x)_x \Delta u dx dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l -(\Delta k(x)\Delta u_x)_x \eta dx dt &= -\int_0^T \Delta k(l)\Delta u_x(l, t)\eta(l, t) dt \\ &\quad + \int_0^T \Delta k(0)\Delta u_x(0, t)\eta(0, t) dt + \int_0^T \int_0^l \Delta k(x)\Delta u_x \eta_x dx dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l -(\Delta k(x)u_x)_x \eta dx dt &= -\int_0^T \Delta k(l)u_x(l, t)\eta(l, t) dt + \int_0^T \Delta k(0)u_x(0, t)\eta(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l \Delta k(x)u_x \eta_x dx dt. \end{aligned}$$

Bu eşitlikler (4.3.3) ifadesinde kullanılarak

$$\begin{aligned} &\int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \Delta u(x, T) dx \\ &= \int_0^T -[k(0) + \Delta k(0)] \Delta u_x(0, t)\eta(0, t) dt + \int_0^T [k(l) + \Delta k(l)] \Delta u_x(l, t)\eta(l, t) dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^l \Delta k(x)\Delta u_x \eta_x dx dt + \int_0^T \Delta k(l)u_x(l, t)\eta(l, t) dt \\ &\quad - \int_0^T \Delta k(0)u_x(0, t)\eta(0, t) dt - \int_0^T \int_0^l \Delta k(x)u_x \eta_x dx dt \\ &= \int_0^T \Delta k(0)u_x(0, t)\eta(0, t) dt - \int_0^T \Delta k(l)u_x(l, t)\eta(l, t) dt - \int_0^T \int_0^l \Delta k(x)\Delta u_x \eta_x dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \Delta k(l) u_x(l, t) \eta(l, t) dt - \int_0^T \Delta k(0) u_x(0, t) \eta(0, t) dt - \int_0^T \int_0^l \Delta k(x) u_x \eta_x dx dt \\
& = - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x \Delta k dx dt - \int_0^T \int_0^l \Delta u_x \eta_x \Delta k dx dt.
\end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkmaktadır.

Böylece (4.3.2) eşitliğinin sağ tarafında yer alan ilk integral

$$\int_0^l 2[u(x, T; k) - \mu(x)] \Delta u(x, T) dx = - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x \Delta k dx dt + R_1 \quad (4.3.4)$$

olarak bulunur. Burada $R_1 = - \int_0^T \int_0^l \Delta u_x \eta_x \Delta k dx dt$ şeklindedir.

Diğer yandan (4.3.2) eşitliğinde

$$R_2 = \int_0^l [\Delta u(x, T)]^2 dx + \alpha \int_0^l [\Delta k]^2 dx$$

denirse (4.1.6) göz önünde bulundurularak

$$R_1 + R_2 = o(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}) \quad (4.3.5)$$

olduğu görülür.

(4.3.4) ve (4.3.5) ifadeleri (4.3.2) eşitliğinde değerlendirilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\Delta I(k) & = - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x \Delta k dx dt + \int_0^l 2\alpha(k - k^+) \Delta k dx + o(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}) \\
\Delta I(k) & = \langle - \int_0^T u_x \eta_x dt + 2\alpha(k - k^+), \Delta k \rangle_{L_2(0,l)} + o(\|\Delta k\|_{L_2(0,l)}). \quad (4.3.6)
\end{aligned}$$

Böylece amaç fonksiyonelinin türevi

$$I'(k) = - \int_0^T u_x \eta_x dt + 2\alpha(k - k^+) \quad (4.3.7)$$

olarak bulunur.

Bu durumda Vasilyev (1981) çalışmasından bilindiği üzere bir $k_* \in K$ kontrolünün optimal çözüm olması için gerek şart $\forall k \in K$ için

$$\langle I'(k_*), k - k_* \rangle_{L_2(0,l)} = \langle - \int_0^T (u_*)_x (\eta_*)_x dt + 2\alpha(k_* - k^+), k - k_* \rangle_{L_2(0,l)} \geq 0 \quad (4.3.8)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada u_* ve η_* sırasıyla (3.1)-(3.3) ısı probleminin ve (4.2.3)-(4.2.6) eşlenik problemin genelleştirilmiş anlamda $k = k_*$ fonksiyonuna karşılık gelen çözümleridir.

4.4. Minimalleştirici Dizi Oluşturma

Bu bölümde Gradyent Metodu kullanılarak (3.10) probleminin çözümüne yakınsayan bir minimalleştirici dizi oluşturulur. Gradyent Metodu, bir $k_0(x) \in K$ başlangıç elemanı seçilerek

$$k_{m+1} = k_m - \tau_m I'(k_m), \tau_m > 0, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.1)$$

kuralı ile bir $\{k_m\}$ dizisi oluşturmaktan ibarettir.

Burada τ_m algoritma parametresidir. Eğer $I'(k_m) \neq 0$ ise bu durumda τ_m sayısı $I(k_{m+1}) < I(k_m)$ şartı sağlanacak şekilde seçilir. (4.3.6) ve (4.4.1) ifadelerinden görüleceği üzere yeteri kadar küçük $\tau_m > 0$ için

$$I(k_{m+1}) - I(k_m) = \tau_m \left(-\|I'(k_m)\|^2 + \frac{o(\tau_m)}{\tau_m} \right) < 0 \quad (4.4.2)$$

olacaktır. Bu $\tau_m > 0$ parametresi her bir m adımında $I(k_{m+1}) < I(k_m)$ şartı sağlanana kadar küçültülür. Eğer $I'(k_m) = 0$ ise o zaman $k_m(x)$ fonksiyonu (3.10) probleminin bir stasyoner elemanıdır. Bu durumda (4.4.1) iterasyonu durdurulur ve bu $k_m(x)$ fonksiyonunun (3.10) probleminin bir çözümü olup olmadığı incelenir.

İşlemler verilen yeterince küçük ε sayısı için $|I(k_m) - I(k_{m+1})| \leq \varepsilon$ kriteri sağlanana kadar devam ettirilir. Bu şartı sağlayan $k_m(x)$ fonksiyonu (3.10) probleminin yaklaşık çözümü olarak alınır. Yani bu fonksiyon yaklaşık optimal kontrol olacaktır.

4.5. Optimal Kontrol için Yaklaşık Çözüm

Bu bölümde tezde ele alınan optimal kontrol probleminin yaklaşık çözümünün nasıl hesaplanacağı incelenecektir.

Bunun için önce direkt problemin ve eşlenik problemin yaklaşık çözümleri bulunduktan sonra bu çözümleri kullanarak amaç fonksiyonelinin türevi ve buradan da minimalleştirici dizi oluşturulacaktır.

(3.1)-(3.3) probleminin çözümü $u = v + w$ şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak kabul edilir. Burada w fonksiyonu

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2} \frac{1}{lk(t)} g_1(t) + \left(\frac{x^2}{2} - xl \right) \frac{1}{lk(0)} g_0(t) \quad (4.5.1)$$

şeklinde seçilirse

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - w(x, 0) \quad (4.5.2)$$

ve

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - w_t + (k(x)w_x)_x \quad (4.5.3)$$

olmak üzere v fonksiyonu da

$$v_t - (k(x)v_x)_x = \tilde{f}(x, t) \quad (4.5.4)$$

$$v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) \quad (4.5.5)$$

$$-k(0)v_x(0, t) = 0 \quad k(l)v_x(l, t) = 0 \quad (4.5.6)$$

homojen Neumann probleminin çözümü olur.

(4.5.4)-(4.5.6) probleminin yaklaşık çözümü Galerkin Metodu ile elde edilecektir. Bu metoda göre çözüm

$$v^N(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \varphi_k(x) \quad (4.5.7)$$

şeklinde N tane sonlu toplam olarak araştırılır. Burada $\varphi_k(x)$ fonksiyonları $L_2(0, l)$ uzayının ortonormal bir tabanı olan

$$\{\varphi_k(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi}{l} x, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, \dots, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{N\pi}{l} x \right\}$$

kümesinden seçilmiştir.

(4.5.7) ile verilen $v^N(x, t)$ fonksiyonu, (4.5.4) eşitliğinde v fonksiyonu yerine yazılıp $\varphi_l(x)$, ($l = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonlarıyla çarpılarak $(0, l)$ aralığında integralenirse

$$\begin{aligned} \int_0^l \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} C_k^N(t) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \frac{d}{dx} \varphi_k(x) \right) \varphi_l(x) dx \\ = \int_0^l \tilde{f}(x, t) \varphi_l(x) dx, \quad (l = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem daha açık olarak

$$\frac{d}{dt} C_1^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_1 dx \right] C_1^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_1 dx \right] C_2^N(t) - \dots - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_1 dx \right] C_N^N(t) = \int_0^l \tilde{f} \varphi_1 dx$$

$$\frac{d}{dt} C_2^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_2 dx \right] C_1^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_2 dx \right] C_2^N(t) - \dots - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_2 dx \right] C_N^N(t) = \int_0^l \tilde{f} \varphi_2 dx$$

⋮

$$\frac{d}{dt} C_N^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_N dx \right] C_1^N(t) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_N dx \right] C_2^N(t) - \dots - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_N dx \right] C_N^N(t) = \int_0^l \tilde{f} \varphi_N dx$$

şeklinde gösterilir. Buradaki bileşenler C^N , K ve F matrisleriyle

$$K_{ij} = - \int_0^l (k(x) \varphi_j')' \varphi_i dx \quad \text{ve} \quad f_i(t) = \int_0^l \tilde{f}(x, t) \varphi_i(x) dx \quad \text{olmak üzere}$$

$$C^N = \begin{bmatrix} C_1^N(t) \\ C_2^N(t) \\ \vdots \\ C_N^N(t) \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \text{ ve } F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirse sistem,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C^N + K C^N &= F \\ C^N(0) &= A \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

matris sistemine dönüşür. Burada A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} C_1^N(0) \\ C_2^N(0) \\ \vdots \\ C_N^N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^l \varphi_1 \varphi dx \\ \int_0^l \varphi_2 \varphi dx \\ \vdots \\ \int_0^l \varphi_N \varphi dx \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.5.9) sisteminden $C_k^N(t)$ fonksiyonlarının bulunması problemi 1. mertebeden sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklem sistemi için Cauchy problemidir. Bu sistemin sağ tarafı karesel integrallenebilir fonksiyonlar sınıfındadır. Pontryagin (1976) çalışmasından bilindiği üzere bu problem $[0, T]$ aralığında bir tek çözüme sahiptir. Üstelik her $t \in [0, T]$ için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir;

$$\max_{0 \leq t \leq T} [\sum_{k=1}^N |C_k^N(t)|^2]^{1/2} \leq \|u^N\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}$$

$$\leq c_0 (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|g_0\|_{L_2(0,T)} + \|g_1\|_{L_2(0,T)}).$$

Bu tezde (4.5.9) sistemi Laplace dönüşümü metodu ile çözülmüştür. Buna göre bu sistemdeki eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} s+K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & s+K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & s+K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\{C_1^N(t)\} \\ L\{C_2^N(t)\} \\ \vdots \\ L\{C_N^N(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\{f_1(t)\} \\ L\{f_2(t)\} \\ \vdots \\ L\{f_N(t)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^N(0) \\ C_2^N(0) \\ \vdots \\ C_N^N(0) \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümüne de ters Laplace dönüşümü uygulandığında C^N bilinmeyen vektörü elde edilir. Bu vektördeki fonksiyonlar (4.5.7) eşitliğinde kullanılarak $v^N(x, t)$ sonlu toplamı bulunacaktır.

Buradan (3.1)-(3.3) probleminin çözümü $u^N = v^N + w$ şeklinde yaklaşık olarak temsil edilecektir.

Daha sonra aynı işlemler (4.2.3)-(4.2.6) ile verilen

$$\eta_t + (k(x)\eta_x)_x = 0$$

$$\eta(x, T) = 2[u(x, T; k) - \mu(x)]$$

$$k(0)\eta_x(0, t) = 0$$

$$k(l)\eta_x(l, t) = 0$$

eşlenik problemin çözümü için de yapılmalıdır. Bu problemde $t = T - \tau$ dönüşümü yapılırsa $\eta(x, \tau)$ fonksiyonu için yazılmış

$$\eta_\tau - (k(x)\eta_x)_x = 0 \quad (4.5.11)$$

$$\eta(x, 0) = 2[u(x, 0; k) - \mu(x)] \quad (4.5.12)$$

$$k(0)\eta_x(0, \tau) = 0 \quad (4.5.13)$$

$$k(l)\eta_x(l, \tau) = 0 \quad (4.5.14)$$

problemi elde edilir.

Direkt problemin çözümünde yapıldığı gibi burada da önce Galerkin Metodu ve sonrasında ortaya çıkan adi diferansiyel denklem sistemi için de Laplace dönüşümü yöntemi kullanılarak (4.2.3)-(4.2.6) eşlenik probleminin η^N yaklaşık çözümü bulunur.

$$\eta^N(x, \tau) = \sum_{k=1}^N (C_e)_k^N(\tau) \varphi_k(x) \quad (4.5.15)$$

fonksiyonu $\varphi_l(x)$, $(l = 1, 2, \dots, N)$ fonksiyonlarıyla çarpılarak, $(0, l)$ aralığında integrallenirse $l = 1, 2, \dots, N$ için

$$\int_0^l \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\tau} (C_e)_k^N(\tau) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \sum_{k=1}^N (C_e)_k^N(\tau) \frac{d}{dx} \varphi_k(x) \right) \varphi_l(x) dx = 0$$

sistemi elde edilir. Bu sistem daha açık olarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (C_e)_1^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_1 dx \right] (C_e)_1^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_1 dx \right] (C_e)_2^N(\tau) - \dots - \\ \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_1 dx \right] (C_e)_N^N(\tau) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (C_e)_2^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_2 dx \right] (C_e)_1^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_2 dx \right] (C_e)_2^N(\tau) - \dots - \\ \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_2 dx \right] (C_e)_N^N(\tau) = 0 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (C_e)_N^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_1')' \varphi_N dx \right] (C_e)_1^N(\tau) - \left[\int_0^l (k(x) \varphi_2')' \varphi_N dx \right] (C_e)_2^N(\tau) - \dots - \\ \left[\int_0^l (k(x) \varphi_N')' \varphi_N dx \right] (C_e)_N^N(\tau) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Buradaki bileşenler C_e^N ve K matrisleriyle

$$K_{ij} = - \int_0^l (k(x) \varphi_j')' \varphi_i dx \text{ olmak üzere}$$

$$C_e^N = \begin{bmatrix} (C_e)_1^N(\tau) \\ (C_e)_2^N(\tau) \\ \vdots \\ (C_e)_N^N(\tau) \end{bmatrix} \text{ ve } K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirse sistem,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} C_e^N + K C_e^N &= 0 \\ C_e^N(0) &= A \end{aligned}$$

matris sistemine dönüşür. Burada A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} (C_e)_1^N(0) \\ (C_e)_2^N(0) \\ \vdots \\ (C_e)_N^N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^l \varphi_1 \varphi dx \\ \int_0^l \varphi_2 \varphi dx \\ \vdots \\ \int_0^l \varphi_N \varphi dx \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu sistemdeki eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} s + K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & s + K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & s + K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\{(C_e)_1^N(\tau)\} \\ L\{(C_e)_2^N(\tau)\} \\ \vdots \\ L\{(C_e)_N^N(\tau)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_e)_1^N(0) \\ (C_e)_2^N(0) \\ \vdots \\ (C_e)_N^N(0) \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümüne de ters Laplace dönüşümü uygulandığında C_e^N bilinmeyen vektörü elde edilir. Bu vektördeki fonksiyonlar (4.5.15) eşitliğinde kullanılarak $\eta^N(x, \tau)$ sonlu toplamı bulunacaktır.

Daha sonra η^N de τ yerine $T - t$ yazılarak problem yaklaşık olarak temsil edilecektir.

Bu çözümler kullanılarak amaç fonksiyonelinin yaklaşık türevi de

$$(I^N)'(k(x)) = - \int_0^T [u^N(x, t; k(x))]_x [\eta^N(x, t; k(x))]_x dt + 2\alpha[k(x) - k^+(x)] \quad (4.5.16)$$

şeklinde yazılır.

Daha sonra 4.4. Bölümde bahsedildiği gibi Gradyent Metoduna göre bir $k_0(x) \in K$ başlangıç elemanı seçilerek

$$k_{m+1}(x) = k_m(x) - \tau_m (I^N)'(k_m(x)), \tau_m > 0, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.17)$$

kuralı ile bir $\{k_m(x)\}$ dizisi oluşturulur.

Buradaki $\tau_m > 0$ parametresi her bir m adımında $I^N(k_{m+1}) < I^N(k_m)$ şartı sağlanacak kadar küçük seçilir. Verilen yeterince küçük ε sayısı için $|I^N(k_m) - I^N(k_{m+1})| \leq \varepsilon$ kriteri sağlanana kadar ardışık hesaplama devam ettirilir. Bu şartı sağlayan $k_m(x)$ fonksiyonu N sonlu toplam için yaklaşık optimal kontrol olarak alınır.

4.6. Nümerik Örnekler

Bu bölümde elde edilen bulgular doğrultusunda sonuçları test etmek üzere nümerik örneklere yer verilmiştir.

4.6.1. Örnek: $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ bölgesi için

$$K = \left\{ k(x) \in L_2(0,1); (0,1) \overset{\circ}{\forall} 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2 \right\}$$

kümesinde

$$I(k) = \int_0^1 |u(x, 1; k) - (x + e^{-\pi^2} \cos \pi x)|^2 dx + \alpha \|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2 \quad (4.6.1)$$

amaç fonksiyoneli ile verilmiş

$$\min_{k \in K} I(k) \quad (4.6.2)$$

problemini ele alalım. Burada $u(x, t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \pi^2 e^{-\pi^2 t} \cos \pi x, \quad (x, t) \in \Omega \quad (4.6.3)$$

$$u(x, 0) = x + \cos \pi x, \quad x \in (0, 1) \quad (4.6.4)$$

$$-k(0)u_x(0, t) = -2 \quad k(1)u_x(1, t) = 2, \quad t \in (0, 1) \quad (4.6.5)$$

ısı iletim probleminin çözümüdür.

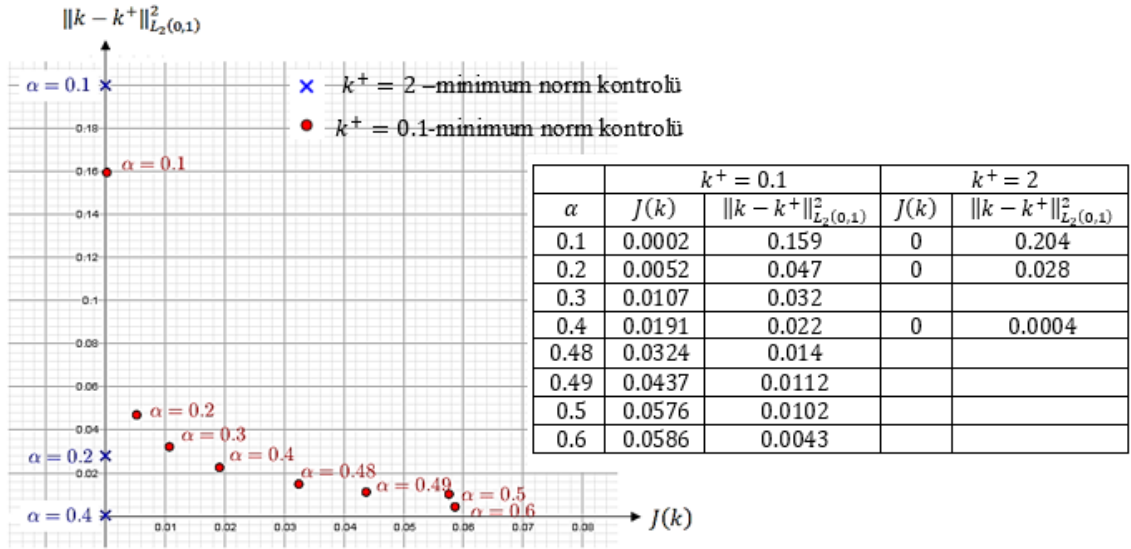
(4.6.1) amaç fonksiyoneliinde sırasıyla $k^+ = 0.1$ ve $k^+ = 2$ olarak verilen problem için 0.1 -minimum norm kontrolünü ve 2 -minimum norm kontrolünü araştıralım.

4.5. Bölümde bahsedildiği gibi $N = 2$ alınarak $k_0(x) = 1$ elemanından başlayıp (4.5.17) kuralı ile verilen bir $\{k_m(x)\}$ minimalleştirici dizisi oluşturulur. İterasyonu durdurma kriteri olarak $I(k_m) - I(k_{m+1}) < 0.01$ şartı seçilir. Bu durumda bazı α değerlerine karşılık olarak elde edilen $k_*(x)$ kontrolleri aşağıda Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Bazı α değerlerine karşılık gelen $k_*(x)$ kontrolleri

α	$k_*(x)$
0.1	$0.50690 - 0.01273 \sin \pi x + 0.00158 \sin^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$) $1.54787 - 0.00028 \sin \pi x$ ($k^+ = 2$)
0.2	$0.34914 - 0.03796 \sin \pi x - 0.01346 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$) $1.83222 - 0.00010 \sin \pi x$ ($k^+ = 2$)
0.3	$0.29643 - 0.02166 \sin \pi x - 0.00617 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$)
0.4	$0.31275 - 0.06015 \sin \pi x - 0.04825 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$) $1.97804 - 0.00008 \sin \pi x$ ($k^+ = 2$)
0.48	$0.22376 - 0.00111 \sin \pi x - 0.00151 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$)
0.49	$0.21015 - 0.00238 \sin \pi x - 0.00422 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$)
0.5	$0.24841 - 0.02771 \sin \pi x - 0.06094 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$)
0.6	$0.20615 - 0.00789 \sin \pi x - 0.01700 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = 0.1$)

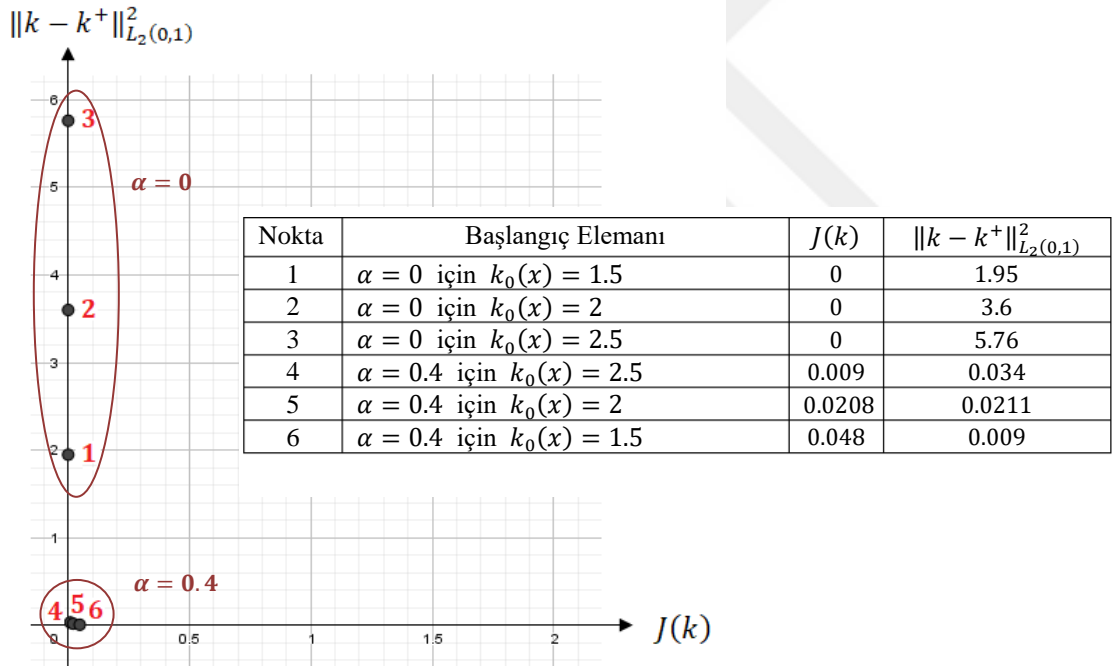
Bu kontrollere karşılık gelen $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri de aşağıda Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

**Şekil 4.1.** Bazı α sayıları için $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri

Şekilden görüldüğü gibi k^+ seçimi yakınsama hızlarına önemli ölçüde etki eder.

Bu verilenlerden 2-minimum norm kontrolü için elde edilmiş kontrollerin daha uygun yaklaşımlar meydana getirdiği görülmektedir.

Şimdi α parametresinin problemin çözümüne olan etkisini araştıralım. Bunun için $\alpha = 0$ ve $\alpha = 0.4$ olarak değişik başlangıç elemanlarından başlayarak 0.1-minimum norm kontrollerini inceleyelim. Aşağıda Şekil 4.2’de bu α değerlerine karşılık gelen $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri gösterilmiştir.



Şekil 4.2. α parametresinin değişik başlangıç elemanlarına sahip 0.1-minimum norm kontrolüne etkisi

Bu şekilden görüleceği üzere $\alpha = 0$ iken değişik $k_0(x)$ başlangıç elemanlarına bağlı olarak oldukça farklı normlarda kontroller mevcut iken $\alpha \neq 0$ olduğunda değişik $k_0(x)$ başlangıç elemanları hemen hemen aynı normlara sahip kontroller üretmektedir.

4.6.2. Örnek: $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ bölgesi için

$$K = \left\{ k(x) \in L_2(0,1); (0,1) \overset{\circ}{\forall} 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2 \right\}$$

kümesinde

$$I(k) = \int_0^1 |u(x, 1; k) - (e^{-\pi^2} \sin \pi x)|^2 dx + \alpha \|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2 \quad (4.6.6)$$

amaç fonksiyoneli ile verilmiş

$$\min_{k \in K} I(k) \quad (4.6.7)$$

problemini ele alalım. Burada $u(x, t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \pi e^{-\pi^2 t} (\pi x \sin \pi x - \cos \pi x), \quad (x, t) \in \Omega \quad (4.6.8)$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad x \in (0,1) \quad (4.6.9)$$

$$-u_x(0, t) = -\pi e^{-\pi^2 t} \quad 2u_x(1, t) = -2\pi e^{-\pi^2 t}, \quad t \in (0,1) \quad (4.6.10)$$

ısı iletim probleminin çözümüdür.

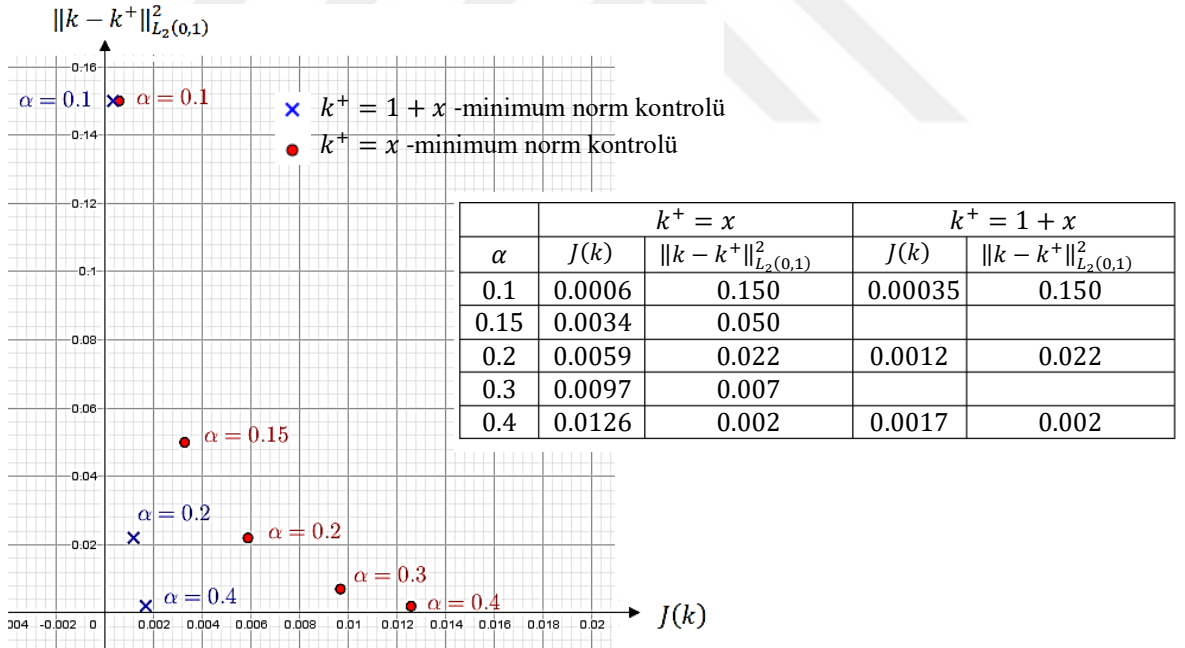
(4.6.6) amaç fonksiyoneliinde sırasıyla $k^+ = x$ ve $k^+ = 1 + x$ olarak verilen problem için x -minimum norm kontrolünü ve $1 + x$ -minimum norm kontrolünü araştıralım.

4.5. Bölümde bahsedildiği gibi $N = 2$ alınarak $k_0(x) = 1$ elemanından başlayıp (4.5.17) kuralı ile verilen bir $\{k_m(x)\}$ minimalleştirici dizisi oluşturulur. İterasyonu durdurma kriteri olarak $I(k_m) - I(k_{m+1}) < 0.01$ şartı seçilir. Bu durumda bazı α değerlerine karşılık olarak elde edilen $k_*(x)$ kontrolleri aşağıda Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Bazı α değerlerine karşılık gelen $k_*(x)$ kontrolleri

α	$k_*(x)$
0.1	$0.672400 + 0.327600x + 0.000005 \sin \pi x - 0.000001x \sin \pi x$ ($k^+ = x$) $1.000000 + 0.3276x$ ($k^+ = 1 + x$)
0.1	$0.389023 + 0.610983x + 0.000002 \sin \pi x - 0.000005x \sin \pi x - 0.000006 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = x$)
0.2	$0.262158 + 0.737856x + 0.000006 \sin \pi x - 0.000012x \sin \pi x - 0.000014 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = x$) $1.000000 + 0.737856x$ ($k^+ = 1 + x$)
0.3	$0.145514 + 0.854525x + 0.000016 \sin \pi x - 0.000032x \sin \pi x - 0.000039 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = x$)
0.4	$0.078434 + 0.9216x + 0.000014 \sin \pi x - 0.000028x \sin \pi x - 0.000034 \cos^2 \pi x$ ($k^+ = x$) $1.000000 + 0.9216x$ ($k^+ = 1 + x$)

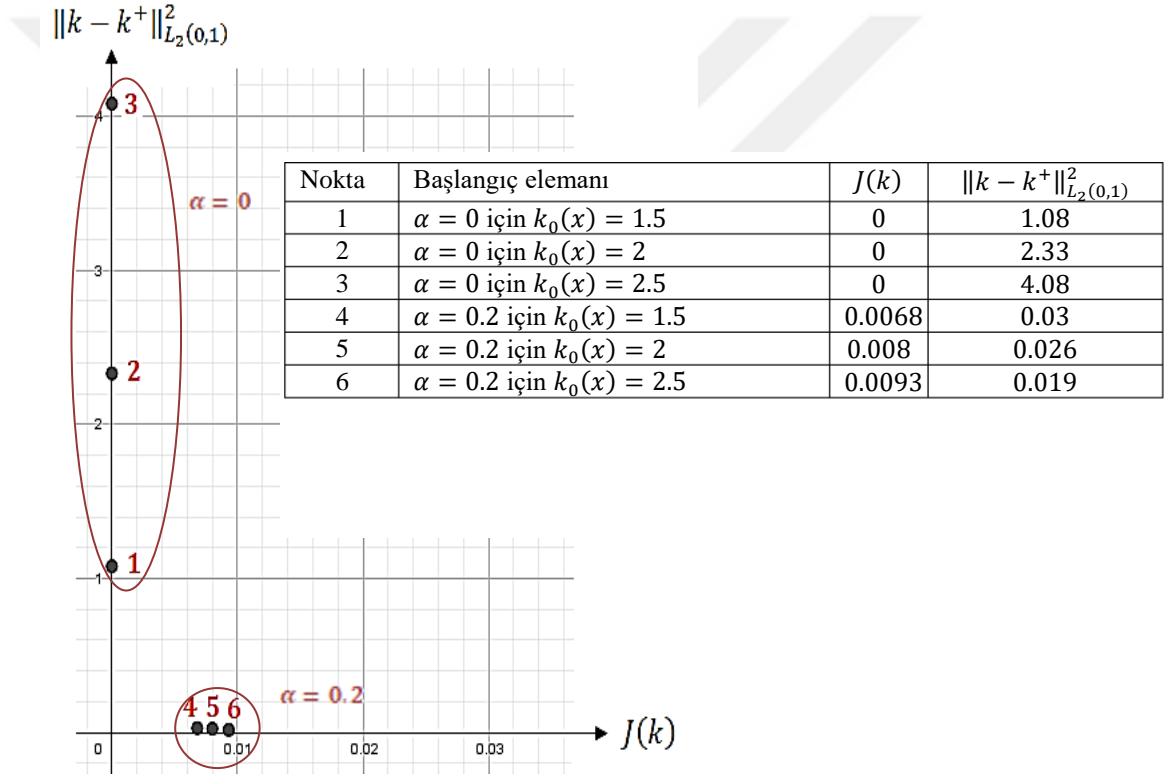
Bu kontrollere karşılık gelen $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri de aşağıda Şekil 4.3'de gösterilmiştir.

**Şekil 4.3.** Bazı α sayıları için $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri

Şekilden görüldüğü gibi k^+ seçimi yakınsama hızlarına önemli ölçüde etki eder.

Bu verilenlerden $1 + x$ -minimum norm kontrolü için elde edilmiş kontrollerin daha uygun yaklaşımlar meydana getirdiği görülmektedir.

Şimdi α parametresinin problemin çözümüne olan etkisini araştıralım. Bunun için $\alpha = 0$ ve $\alpha = 0.2$ olarak değişik başlangıç elemanlarından başlayarak x -minimum norm kontrollerini inceleyelim. Aşağıda Şekil 4.4'de bu α değerlerine karşılık gelen $J(k)$ ve $\|k - k^+\|_{L_2(0,1)}^2$ değerleri gösterilmiştir.



Şekil 4.4. α parametresinin değişik başlangıç elemanlarına sahip x -minimum norm kontrolüne etkisi

Bu şekilden görüleceği üzere $\alpha = 0$ iken değişik $k_0(x)$ başlangıç elemanlarına bağlı olarak oldukça farklı normlarda kontroller mevcut iken $\alpha \neq 0$ olduğunda değişik $k_0(x)$ başlangıç elemanları hemen hemen aynı normlara sahip kontroller üretmektedir.

5. SONUÇ

Kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili katsayı kontrol problemlerinin kötü tanımlanmış problemler sınıfından olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla böyle problemler için regülerleştirme işlemi yapmak büyük önem arz eder.

Tezde elde edilen bulgulardan sonra α regülerleştirme parametresinin kullanımının minimalleştirici dizinin yakınsadığı elemanın başlangıç elemanına olan bağıllığını büyük ölçüde ortadan kaldırdığı nümerik örneklerle görülmektedir.

Ayrıca optimal k_* çözümünün hesaplanmasında ve istenen yaklaşımların daha uygun olarak elde edilmesinde k^+ fonksiyonunun seçiminin ne kadar önemli olduğu örneklerle ortaya konulmaktadır.

KAYNAKLAR

- Effati, S., Nazemi, A., Shabani, H., 2014. Time Optimal Control Problem of the Heat Equation with Thermal Source, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Volume 31, pp. 384-402.
- Engl, H. W., Hanke, M., Neubauer, A., 1996. *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. *Mathematische Nachrichten*, 93,67–73.
- Iosida, K., 1967. *Functional Analysis*, Moscow.
- Ladyzhenskaya O. A., *Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 322 p, New York, 1985.
- Pontryagin, L. S., 1976. *Adi Diferansiyel Denklemler*, Nauka, 332 s, Moskova.
- Subaşı, M., 2002. Optimal Control of Heat Source in a Heat Conductivity Problem, *Optimization Methods and Software*, Vol. 17, pp. 239-250.
- Tagiyev, R. K., Hashimov, S. A., 2013. On Optimal Control of the coefficients of a parabolic equation Involing Phase Constraints, *Proceedings of IMM of National Academy of Sciences of Azerbaijan*, volume , pp. 131-146.
- Tagiyev, R., 2004. Optimal control by the coefficients of a parabolic equation, *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume 23, pp. 247-256.
- Tagiyev, R., 2007. The Problems of Optimal Control by Parabolic Equations Coefficients, *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume 27, pp. 135-146.
- Tagiyev, R., 2009. Optimal Coefficient Control in Parabolic Systems, *Differential Equations*, Volume 45, no. 10, pp. 1526-1535.
- Tagiyev, R., 2009. Optimal control for the coefficients of a Quasilinear parabolic equation, *Automation and Remote Control*, volume 70, no. 11, pp. 1814-1826.
- Tagiyev, R., 2013. Optimal control problem for a Quasilinear parabolic equation with Controls in the coefficients and with State Constraints, *Differential Equations*, Volume 49, no. 3, pp. 369-381.
- Teymurov, R., 2017. Optimal control of mobile sources for heat conductivity processes, *International Journal of Control*, Volume 90, Issue 5, pp. 923-931.
- Vasilyev, F.P., 1981. *Numerical Methods for Solving Extremal Problems*. Nauka, 400 s, Moskova.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Ordu'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ordu'da tamamladı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yükseköğrenimine başladı ve 2016 yılında mezun oldu. 2017 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

