

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KILCAL YÜZEYLERE BAĞLI VEKTÖR ALANLARI
İLE DUALERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ
FİLİZ KÖSE

Bölüm : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Afet ÖZOK

56327

İSTANBUL 1996 – OCAK

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Bu çalışmam esnasında bana yol gösteren, yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Afet zok'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Özet	i
	Summary	iv
Bölüm I	Ön Bilgiler	
I.1	Kılcal Yüzeyle Bağlı Vektör Alanları	1
I.2	Dual Vektör Alanları	2
I.3	Killing Vektör Alanları	4
I.4	Harmonik Vektör Alanları	5
Bölüm II	Σ Yüzeyinin Killing ve Harmonik olan Teğetsel Vektör Alanları	
II.1	Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanı	8
II.2	Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Killing Vektör Alanı Olması Şartları	11
II.3	Teğetsel Vektör Alanının Σ Yüzeyinin Birinci Parametre Eğrisi İle Yaptığı θ Açısının Sabit Olması Hali	14
II.4	Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Harmonik Vektör Alanı Olması Şartları	16
Bölüm III	Σ Yüzeyinin Killing ve Harmonik Olan Dual Vektör Alanları	
III.1	Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Duali	19
III.2	Dual Vektör Alanının Killing Vektör Alanı Olması Şartları	19
III.3	Dual Vektör Alanının Harmonik Vektör Alanı Olması Şartları	23
Bölüm IV	Σ Hiperyüzeyleri Üzerinde Killing ve Harmonik Vektör Alanları ve Tek Boyutlu Öklid Uzaylarında Dual Alan	
IV.1	$(n-1)$ - Boyutlu Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanı	26
IV.2	Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Killing Alanı Olması Şartları	29
IV.3	Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Harmonik Alanı Olması Şartları	30
IV.4	Çift Boyutlu Hiperyüzeyler Üzerinde Vektör Alanlarının Dualleri	31
IV.5	Çift Boyutlu Σ Hiperyüzeylerinin Teğetsel Vektör Alanlarının Dualleri	33
	Yararlanılan Kaynaklar	34

ÖZET

Bu araştırmada esas olarak kılcal yüzeylerin tanım bölgesinin sınır yüzeyi üzerinde R. Finn tarafından [1] tanımlanmış olan vektör alanları ile bunların duallerinin Killing ve Harmonik vektör alanı olması şartları araştırılmış ve ilk defa K. Amur ve D.J. Shetty [2] tarafından 3- boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler üzerinde tanımlanan dual alan kavramı, tek boyutlu Öklid uzaylarının hiperyüzeylerine genişletilmiştir.

Parametrik olmayan, yerçekimsiz " kılcallık problemi ", n-boyutlu Öklid uzayının ($n \geq 2$) bir Ω bölgesinde tanımlanmış, sabit ortalama eğriliğini haiz ve bölgenin sınırı boyunca dikey silindirin duvarlarını belirli bir γ sabit açısı altında kesen bir S yüzeyinin belirlenmesi problemidir. Bu şekilde belirlenen S yüzeylerine de "kılcal yüzeyler" adı verilir. Gerek kılcal yüzeylerin varlık şartları, gerekse özellikleri hakkında pek çok araştırma yapılmıştır. R. Finn' in 1979 yılında yayınlanan bir makalesinde, kılcal yüzeylerin, n-boyutlu Öklid uzayındaki Ω tanım bölgesinde, kılcal yüzey ve tanım bölgesinin seçimi ile tamamen belirli olan bir vektör alanı tanımlanmıştır. Bu vektör alanının önemi , daha önce Guisti tarafından [3] kılcal yüzeylerin sınır değer ve varlık problemleri için elde edilen gerek ve yeter şartları tek başına karakterize etmesidir, yani alanın varlığı sözkonusu gerek ve yeter şartlara denk olmaktadır, dolayısı ile bu vektör alanının özelliklerinin incelenmesi, kılcal yüzeyler teorisine katkıda bulunmaktadır. [4] nolu araştırmada, bağı vektör alanları Killing, Konform Killing ve Homotetik Konform Killing Vektör alanları olan kılcal yüzeylerin belirlenmesi problemi ele almıştır. Bilindiği üzere yukarıda sözkonusu edilen vektör alanları uzayın izometrilere (hareketlerini) tanımlar ve bu sonsuz küçük hareketler ile harmonik vektör alanlarının özellikleri bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Özellikle B.Kostant [5], C.C Bosch [6] ve G. Bitis [7]

Riemann Manifoldları üzerinde Killing alanları ve harmonik vektör alanlarının önemli bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın I.Bölümünde, konu ile ilgili kısa önbilgiler, ileride kullanılmaya elverişli şekilleri ile verilmiştir. II. Bölümde, 4 - boyutlu Öklid uzayında alınan bir S kılcal yüzeyine bağlı olarak, kılcal yüzeyin 3 - boyutlu Ω tanım bölgesinin, Σ sınır yüzeyi üzerinde tanımlanan vektör alanı, Σ nın elemanları cinsinden ifade edilerek, bu alanın Σ nın teğet düzlemi üzerindeki iz düşümü olan teğetsel vektör alanı bulunmuş, bulunan alanın Killing vektör alanı olması şartları araştırılmış ve sözkonusu teğetsel vektör alanının hiçbir zaman Killing vektör alanı olamayacağı gösterilmiştir. Daha sonra alanın invaryantlarından olan θ açısının (alanın, Σ yüzeyinin birinci parametre eğrisi ile yaptığı açı) Σ boyunca sabit olması için gerek ve yeter şart bulunmuş, bu şartı sağlayan yüzeyler için, sözkonusu teğetsel vektör alanının Harmonik vektör alanı olması şartları Σ yüzeyinin Birinci ve İkinci esas formuna bağlı bir gerek ve yeter şart ile verilmiştir. Bölümün sonunda da, elde edilen sonuçlar bir örneğe uygulanmıştır.

Çalışmanın III.Bölümünde önce Σ yüzeyinin teğetsel vektör alanının duali elde edilmiş, daha sonra yine θ açısının Σ boyunca sabit olması halinde, sözkonusu dual alanın önce Killing, sonra da Harmonik vektör alanı olması şartları araştırılmış ve bulunan gerek ve yeter şartlar birer teorem olarak verilmiştir. Daha sonra Σ yüzeyinin Minimal Yüzey olarak seçilmesi halinde elde edilen gerek ve yeter şartların çok sade bir hal aldığı görülmüş ve bunlar da birer teorem ile ifade edilmiştir.

IV.Bölümünde, bir Kılcal Yüzeye bağlı olarak, n - boyutlu ($n > 3$) Öklid uzayında tanımlanan sözkonusu vektör alanının, Σ nın elemanları cinsinden ifadesi elde edilmiş, bu alanın Σ nın teğet düzlemi üzerindeki iz düşümü alınarak bulunan teğetsel

vektör alanının yine Killing ve Harmonik vektör alanları olması şartları birer teorem ile verilmiştir. Aynı bölümde daha sonra, ilk defa K. Amur ve D.J. Shetty [2] tarafından 3 - boyutlu Öklid uzayının yüzeyleri üzerinde tanımlanan dual alan kavramı, tek boyutlu Öklid uzaylarının hiperyüzeylerine genişletilmiş ve Çift boyutlu Σ hiper yüzeyleri üzerindeki teğetsel vektör alanlarının duallerinin ifadeleri verilmiştir.



SUMMARY

The purpose of this research is to determine some necessary and sufficient conditions for the related vector fields of capillary surfaces and their dual vector fields to be Killing and Harmonic vectors and to extend the concept of dual fields, first defined over surfaces in three-dimensional Euclidean space by K. Amur and D. J. Shetty [2], to hypersurfaces of odd dimensional Euclidean spaces.

In the non-parametric "capillary problem" in the absence of gravity, one seeks a surface S of constant mean curvature H , defined over a base domain Ω in n -dimensional Euclidean space, such that S meets vertical cylinder walls over $\Sigma = \partial\Omega$ in a prescribed constant angle γ . The surface S defined in this manner is called a "capillary surface". There are many studies on the existence conditions of capillary surfaces and their properties. R. Finn [1] defined a vector field which is totally determined by selecting its domain and capillary surfaces on n -dimensional domain Ω in Euclidean space. The importance of this vector field given by Guisti [3] is that it characterizes by itself necessary and sufficient conditions for the existence and boundary value problems of capillary surfaces. That is, the existence of the field is equivalent to these necessary and sufficient conditions so that studying these properties of this vector field contributes to the theory of capillary surfaces. In [4] certain necessary and sufficient conditions are given for the related vector fields of capillary surfaces to be Killing, Conformal Killing and Homothetic Conformal Killing vectors in the n -dimensional domain Ω . As known, these vector fields define the isometries (motions) of space and the infinitesimal motions and Harmonic vector fields was studied by many researchers. Particularly, B. Kostant [5], C.C. Bosch and G. Bitis [7] obtained important properties about Killing fields, Harmonic vector fields on Riemannian Manifolds.

This study consists of four chapters. In the first chapter, the background of the subject is given. In the second chapter, a vector field is defined on the surfaces $\Sigma = \partial\Omega$ which is dependent on the capillary surface S in the four – dimensional Euclidean space. Ω is the domain of S and Σ is the surface boundary of Ω . The vector field is expressed in terms of the members of the surface Σ . Then the tangent vector field which is a projection of this vector field on the tangent plane of Σ is found. The conditions for this vector field to be a Killing vector field are investigated and it is shown that such a vector field can not be a Killing vector field. In the same chapter the necessary and sufficient condition for angle θ , an invariant of the vector field, to be constant on all Σ is obtained. For surfaces which satisfy this condition, a necessary and sufficient condition is given for the relevant vector fields of capillary surfaces to be Harmonic vector fields and the results are applied to an example.

In the third chapter, first the dual of the tangent vector fields of surface Σ is obtained. Then, the case of angle θ being constant on all Σ is considered and the conditions of the dual vector field to be Killing and Harmonic vector fields are studied and the necessary and sufficient conditions are given as theorems. It is shown that the necessary and sufficient conditions obtained here are very easy when the surface Σ is selected as a minimal surface. The relevant necessary and sufficient conditions are given as theorems.

In the fourth chapter, this vector field which is defined on an n – dimensional ($n > 3$) Euclidean space and related to a capillary surface is expressed in terms of the members of the surface Σ . Getting a projection on tangent plane of Σ for this vector field, the conditions of the tangent vector field to be Killing and Harmonic vector fields are given as theorems. In the same chapter, the concept of dual field, first defined over surfaces in three – dimensional Euclidean space, by K. Amur and D. J. Shetty [2] is extended to hypersurfaces of odd dimensional Euclidean spaces. An expression of dual fields of tangent vector fields on even dimensional hypersurfaces Σ is also given.

BÖLÜM I

ÖN BİLGİLER

I.1. Kılcal Yüzeyle Bağlı Vektör Alanları

n - boyutlu Öklid uzayının ($n \geq 2$) bir Ω bölgesinde tanımlanmış, sabit H ortalama eğriliğini haiz ve $\Sigma = \partial\Omega$ (Ω nın sınırı) boyunca dikey silindirin duvarlarını belirli bir γ sabit açısı altında kesen bir $S : z = z(x^1, \dots, x^n)$ KILCAL YÜZEYİ nin mevcut olması halinde R. Finn tarafından gösterilmiştir ki [1], Ω içinde

$$w(x) = \frac{\nabla z}{\cos \gamma \sqrt{1 + |\nabla z|^2}} \quad (1.1)$$

şeklinde bir vektör alanı vardır ve bu alan

$$\Omega \text{ içinde} \quad \operatorname{div} w = \frac{\Sigma}{\Omega} \quad (1.2)$$

$$\Sigma \text{ üzerinde} \quad v \cdot w = 1 \quad (1.3)$$

ve

$$\operatorname{lub} |w| \leq \frac{1}{\cos \gamma} \quad (1.4)$$

şartlarını sağlar. Burada v , Σ üzerinde birim dış normal göstermektedir [8] ve Ω , Σ sembolleri hem bir cümleyi, hem de onun ölçümünü göstermek için kullanılmışlardır [1].

Ayrıca S yüzeyi için Σ üzerinde sınır şartı

$$v \frac{\nabla z}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} = \cos \gamma \quad (1.5)$$

olan,

$$\operatorname{div} \frac{\nabla z}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} = nH \quad (1.6)$$

denklemini geçerlidir.

Ω herhangi bir (x^i) koordinat civarları sistemi ile örtülmüş pozitif tanımlı temel $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ metriğini haiz, n -boyutlu E^n öklid uzayının bir parçasıdır. Ω nın sınırı olan Σ ise aynı uzayda bir hiperyüzeidir. Böylece (1.1) ile n -boyutlu ($n \geq 2$) Öklid uzayının bir Σ hiperyüzeyi üzerinde Öklidsel bir vektör alanı tanımlanmıştır.

I.2. Dual Vektör Alanları

E^3 de düzgün bir M yüzeyi gözönüne alınsın. M nin göbek noktası olmayan noktalarının E cümlesi, M de açık bir cümledir ve E nin her p noktası, öyle bir U civarını haizdir ki, bu civarda asal vektörlerin ortonormal X, Y baz alanı sözkonusudur. E üzerinde asal eğrilik fonksiyonları olan h ve k düzgün fonksiyonlardır. H ve K , M üzerinde Ortalama ve Gauss eğrilik fonksiyonları ve her $p \in M$ için $I(p)$; M ye p de teğet uzayın idantik tasviri olmak üzere, L Weingarten tasviri [9], $L^2 - HL + KI = 0$ karakteristik polinomunu sağlar. Eğer M üzerindeki V ve W düzgün vektör alanları, her $p \in M$ için

$$\langle L(V), L(W) \rangle_p = 0 \quad (1.7)$$

şartını sağlarsa, vektör alanlarına birbirinin duali denir [2].

$p \in M$ nin bir A civarında X, Y asal baz alanı ile bir çift dual vektör alanı oluşturulabilir.

$$V = kX + hY, \quad W = kX - hY \quad (1.8)$$

vazedilirse, V ve W düzgün vektör alanlarıdır ve A nın her noktasında dualite şartını sağlarlar. Gerçekten,

$$L(V) = L(kX + hY) = kL(X) + hL(Y) = khX + hkY$$

$$L(W) = L(kX - hY) = kL(X) - hL(Y) = khX - hkY$$

dir. (1.7) den

$$\begin{aligned}
 \langle L(V), L(W) \rangle &= \langle khX + hkY, khX - hkY \rangle \\
 &= k^2h^2 \langle X, X \rangle - k^2h^2 \langle X, Y \rangle + h^2k^2 \langle Y, X \rangle - h^2k^2 \langle Y, Y \rangle \\
 &= k^2h^2 - h^2k^2 = 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Genellikle dual vektör alanları ortogonal değildir.

A, E nin bir p noktasının bir civarı ve X, Y; A da ortonormal asal vektör alanları ise A da $V = fX + gY$ olacak şekilde f ve g düzgün fonksiyonları mevcuttur.

$$W = -gk^2X + fh^2Y \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanan W vektör alanı A üzerinde düzgün bir alandır. Bu alanın V ye dual olma şartını sağladığı kolayca gösterilir:

Gerçekten ;

$$L(V) = L(fX + gY) = fL(X) + gL(Y) = fhX + gkY$$

$$L(W) = L(-gk^2X + fh^2Y) = -gk^2L(X) + fh^2L(Y) = -gk^2hX + fh^2kY$$

dir. (1.7) den

$$\begin{aligned}
 \langle L(V), L(W) \rangle &= \langle fhX + gkY, -gk^2hX + fh^2kY \rangle \\
 &= -fgk^2h^2 \langle X, X \rangle + f^2h^3k \langle X, Y \rangle - g^2k^3h \langle Y, X \rangle + gh^2k^2 \langle Y, Y \rangle \\
 &= -fgk^2h^2 + fgk^2h^2 = 0
 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem: V, E de bir düzgün vektör alanı ise, E de daima V ye dual olan W düzgün vektör alanı mevcuttur, ve

i) Eğer V sıfır olmayan bir vektör alanı ve K Gauss eğriliği E de sıfırdan farklı ise, W, bir düzgün fonksiyonla çarpma farkı ile tek türlü olarak belirlenir.

ii) Eğer $K = 0$ ise, E nin her noktasında W bir asal doğrultudur.

I.3. Killing Vektör Alanları

E^{n+1} de düzgün bir M hiperyüzeyi üzerinde bir vektör alanı W olsun. Eğer M üzerindeki her hangi iki düzgün Z, T vektör alanları için

$$W \langle Z, T \rangle = \langle [W, Z], T \rangle + \langle Z, [W, T] \rangle \quad (1.10)$$

bağıntısı sağlanırsa W vektör alanına M yüzeyinin bir sonsuz küçük hareketi veya Killing vektör alanı denir [10].

M nin bir U açık cümlesi üzerindeki bir lokal koordinat sistemi (u^1, \dots, u^n) , W Killing vektör alanının bu sisteme göre bileşenleri (w^i) ler olsun.

$$Z = \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad T = \frac{\partial}{\partial u^k} \quad \text{şeklinde seçilirse} \quad W = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

olduğuna göre, yüzeyin birinci esas formunun katsayıları da $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) ile gösterilmek üzere;

$$\langle Z, T \rangle = g_{jk}, \quad W \langle Z, T \rangle = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}$$

$$[W, Z] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial w^i}{\partial u^j} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right), \quad \langle [W, Z], T \rangle = - \sum_{i=1}^n g_{ik} \frac{\partial w^i}{\partial u^j}$$

$$[W, T] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial w^i}{\partial u^k} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right), \quad \langle Z, [W, T] \rangle = - \sum_{i=1}^n g_{ji} \frac{\partial w^i}{\partial u^k}$$

elde edilir. O halde "Killing diferansiyel denklemleri "

$$\sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = - \sum_{i=1}^n g_{ki} \frac{\partial w^i}{\partial u^j} - \sum_{i=1}^n g_{ji} \frac{\partial w^i}{\partial u^k}$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \left(g_{ik} \frac{\partial w^i}{\partial u^j} + g_{ji} \frac{\partial w^i}{\partial u^k} + w^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) = 0 \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (1.11)$$

dır.

M hiperyüzeyi eğrilik çizgilerine nispet edildiğinde; $g_{ij} = d_{ij} = 0$ ($i \neq j$) olacağından Killing difransiyel denklemleri,

$$2g_{ii} \frac{\partial w^i}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j} w^j = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.12)$$

$$g_{ii} \frac{\partial w^i}{\partial u^j} + g_{jj} \frac{\partial w^j}{\partial u^i} = 0 \quad (i \neq j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n) \quad (1.13)$$

şeklini alır.

Özel olarak $n=2$ için ;

$$2g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} w^1 + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} w^2 = 0 \quad (1.14)$$

$$2g_{22} \frac{\partial w^2}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} w^1 + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} w^2 = 0 \quad (1.15)$$

$$g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial u^2} + g_{22} \frac{\partial w^2}{\partial u^1} = 0 \quad (1.16)$$

olur.

I.4. Harmonik Vektör Alanları

E^{n+1} de düzgün bir M hiperyüzeyi üzerinde bir vektör alanı V olsun. M üzerinde ∇ kovaryant türevi göstermek üzere eğer V vektör alanı için,

$$\nabla_j v_i - \nabla_i v_j = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \nabla_i v^i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.17)$$

bağıntıları sağlanırsa V vektör alanına harmonik vektör alanı denir[11].

V vektör alanının kovaryant türevi, Γ_{ij}^h Christoffel sembollerini göstermek üzere,

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - \sum_{h=1}^n \Gamma_{ij}^h v_h$$

dır. [Burada $\Gamma_{ij}^h = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} g^{h\alpha} \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right)$ dır.]

(1.17) ifadesindeki birinci bağıntıda yukarıdaki ifadeler yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \nabla_j v_i - \nabla_i v_j &= \frac{\partial v_i}{\partial u_j} - \frac{\partial v_j}{\partial u_i} - \sum_{h=1}^n \Gamma_{ij}^h v_h + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l v_l \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial u_j} - \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \end{aligned}$$

olur. Kovaryant bileşenlerden, kontravaryant bileşenlere geçildiğinde $v_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} v^k$

olduğuna göre,

$$\nabla_j v_i - \nabla_i v_j = \sum_{k=1}^n \left(g_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial u^j} - g_{jk} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) v^k \right) = 0 \quad (1.18)$$

$$(i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n)$$

dır.

(1.17) ifadesindeki ikinci bağıntı

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i v^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^i} + \sum_{h=1}^n \Gamma_{ih}^i v^h \right) = 0$$

dır.

$$\Gamma_{ih}^i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^h} + \frac{\partial g_{h\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^\alpha} \right)$$

ifadesi yukarıda yerleştirildiğinde

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial v^i}{\partial u^i} + \sum_{h=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^h} + \frac{\partial g_{h\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^\alpha} \right) \right) v^h \right] = 0 \quad (1.19)$$

olur.

Böylece V vektör alanının harmonik vektör alanı olması için (1.18) ve (1.19) diferansiyel denklemlerini birlikte sağlaması gerekir.

M hiperyüzeyi eğrilik çizgilerine nispet edildiğinde $g_{ij} = d_{ij} = 0$ ($i \neq j$) olacağından diferansiyel denklemlerden (1.18)

$$g_{ii} \frac{\partial v^i}{\partial u^j} - g_{jj} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j} v^i - \frac{\partial g_{jj}}{\partial u^i} v^j = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, n) \quad (1.20)$$

ve (1.19) da

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial v^i}{\partial u^i} + \frac{1}{2g_{ii}} \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^h} v^h \right] = 0 \quad (1.21)$$

şeklini alır.

Özel olarak $n=2$ için ;

$$g_{11} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} - g_{22} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} v^1 - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} v^2 = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial v^1}{\partial u^1} + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) v^1 + \left(\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) v^2 = 0$$

dır. (1.23)

M yüzeyi izometrik parametreye teşmil edildiğinde $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ olduğundan (1.22)

$$g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2} - \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} v^1 - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} v^2 = 0 \quad (1.24)$$

ve (1.23) denklemide

$$g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} v^1 + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} v^2 = 0 \quad (1.25)$$

olur.

BÖLÜM II

Σ YÜZEYİNİN KİLLİNG VE HARMONİK OLAN TEĞETSEL VEKTÖR ALANLARI

II.1. Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanı

Bölüm I de tanımlanan ve $(n + 1)$ -boyutlu $(n \geq 2)$ Öklid uzayının bir S kılcal yüzeyine bağlı olarak (1.1) ile ifade edilen Öklidsel vektör alanını, $n = 3$ için gözönüne alalım.

$n = 3$ için 4-boyutlu Öklid uzayında I.1 de verilen şartları sağlayan;

$$S : z = z(x^1, x^2, x^3) \quad (2.1)$$

kılcal yüzeyine bağlı olarak, kılcal yüzeyin 3- boyutlu Ω tanım bölgesinin en az C^3 sınıfından olan,

$$\Sigma : X^i = X^i(u^1, u^2) \quad (i = 1,2,3) \quad (2.2)$$

sınır yüzeyi üzerinde (1.1) ve (1.5) bağıntıları gereğince

$$w(x) = \frac{\nabla z}{v \cdot \nabla z} \quad (2.3)$$

veya

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial x^i} \quad (i = 1,2,3)$$

olmak üzere,

$$w^i(x) = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^3 v_j \cdot z_j} \quad (i = 1,2,3) \quad (2.4)$$

vektör alanı tanımlanmıştır. (1.3) şartı gereğince bu alan Σ yüzeyine teğet değildir ve tamamen kılcal yüzey ile tanım bölgesinin sınır yüzeyi olan Σ nın birim dış normali

cinsinden ifade edilmektedir. Birinci ve ikinci esas formunun katsayıları $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ ve $d_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$ olan Σ yüzeyi, eğrilik çizgilerine nispet edilsin. ($g_{12} = d_{12} = 0$). Σ yüzeyinin parametre eğrilerinin teğetleri de $X_\alpha^i(u^1, u^2)$, $(\alpha = 1, 2)$ ile gösterilsin. Σ yüzeyinin herhangi bir noktasındaki (X_1^i, X_2^i, v^i) bazına göre w^i vektörünün ifadesi, $A_\alpha = A_\alpha(u^1, u^2)$, $(\alpha = 1, 2)$ olmak üzere,

$$w^i = A_1 X_1^i + A_2 X_2^i + v^i \quad (2.5)$$

şeklinde olacaktır. $\nabla z = (z_1, z_2, z_3)$ vektörünün v^i birim normali ve X_1^i, X_2^i teğet vektörleri ile yaptığı açılar sırası ile φ , x ve y ile gösterilirse

$$\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \right) \text{ ve (1.3) gereğince,}$$

$$\langle w^i, v^i \rangle = |w^i| |v^i| \cos \varphi = 1$$

olduğundan

$$|w^i| = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (2.6)$$

bulunur.

Diğer taraftan (1.5) ve (2.3) denklemleri kullanıldığında

$$\langle w^i, v^i \rangle = \frac{\langle \nabla z, v^i \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2} \cos \gamma} = \frac{|\nabla z| |v^i| \cos \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2} \cos \gamma} = 1$$

dir. Böylece

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}}{|\nabla z|} \cos \gamma \quad (|\cos \varphi| > |\cos \gamma|, \cos \gamma = \text{sabit}) \quad (2.7)$$

bağıntısı elde edilir. w^i vektör alanının (2.5) ifadesinden

$$\langle w^i, X_1^i \rangle = \frac{\langle \nabla z, X_1^i \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2} \cos \gamma} = \frac{|\nabla z| |X_1^i| \cos x}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2} \cos \gamma} = A_1 g_{11} \quad (2.8)$$

bulunur. (2.7) bağıntısı kullanıldığında

$$A_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{g_{11}} \cos \varphi} \quad (2.9)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\langle w^i, X_2^i \rangle = \frac{\langle \nabla_Z, X_2^i \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla_Z|^2} \cos \varphi} = \frac{|\nabla_Z| |X_2^i| \cos y}{\sqrt{1 + |\nabla_Z|^2} \cos \varphi} = A_2 g_{22} \quad (2.10)$$

dir. (2.7) bağıntısı kullanıldığında

$$A_2 = \frac{\cos y}{\sqrt{g_{22}} \cos \varphi} \quad (2.11)$$

olur. O halde (2.9) ve (2.11) ifadeleri (2.5) te yerleştirildiğinde

$$w^i = \frac{\cos x}{\sqrt{g_{11}} \cos \varphi} X_1^i + \frac{\cos y}{\sqrt{g_{22}} \cos \varphi} X_2^i + v^i \quad (2.12)$$

şeklini alır. (2.12) den vektörün normunun karesi alındığında;

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 \varphi = 1$$

bulunacağından,

$$\cos y = \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 x} \quad (2.13)$$

ifadesi (2.12) deki yerine yazıldığında

$$w^i = \frac{\cos x}{\sqrt{g_{11}} \cos \varphi} X_1^i + \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 x}}{\sqrt{g_{22}} \cos \varphi} X_2^i + v^i \quad (2.14)$$

şekline ulaşılır.

Σ nın elemanları cinsinden ifade edilmiş olan bu alanın, Σ nın her noktasındaki teğet düzlemi üzerindeki iz düşümü alınarak, Σ yüzeyinin

$$\bar{w}^i = \frac{\cos x}{\sqrt{g_{11}} \cos \varphi} X_1^i + \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 x}}{\sqrt{g_{22}} \cos \varphi} X_2^i \quad (2.15)$$

teğetsel vektör alanı elde edilir.

\bar{w}^i vektörünün, X_1^i teğet vektörü ile yaptığı açı θ ile gösterilirse $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$,

$$\cos \theta = \frac{\langle X_1^i, \bar{w}^i \rangle}{|X_1^i| |\bar{w}^i|} = \frac{g_{11} \cos x}{\sqrt{g_{11}} \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \tan \varphi} = \frac{\cos x}{\sin \varphi}$$

yani,

$$\cos x = \cos \theta \sin \varphi \quad (2.16)$$

dir. (2.16) ifadesi (2.15) de yerleştirildiğinde

$$\bar{w}^i = \tan \varphi \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{11}}} X_1^i + \frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{22}}} X_2^i \right) \quad (2.17)$$

bulunur.

II.2. Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Killing

Vektör Alanı Olması Şartları

Σ yüzeyinin (2.17) ile verilen teğetsel vektör alanının, Killing alanı olabilmesi için (1.11) Killing diferansiyel denklemlerinin gerçekleşmesi gerekir.

$$(\bar{w}^i)^1 = \tan \varphi \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (\bar{w}^i)^2 = \tan \varphi \frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{22}}}, \quad (2.18)$$

olduğuna göre

$$\frac{\partial (\bar{w}^i)^\beta}{\partial u^\alpha} = (\bar{w}^i)^\beta_{,\alpha}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} = g_{ij,\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.19)$$

ile gösterilerek;

$$\frac{\partial (\bar{w}^i)^1}{\partial u^1} = (\bar{w}^i)^1_{,1} = \frac{\varphi_{,1} \cos \theta}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} - \frac{\theta_{,1} \sin \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{g_{11,1} \cos \theta \tan \varphi}{2g_{11} \sqrt{g_{11}}}$$

bulunacağından, Killing diferansiyel denklemlerinden (1.14) de yerleştirildiğinde

$$\frac{2\sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} \cos \theta}{\cos^2 \varphi} + \frac{g_{11,2} \sin \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{22}}} - 2\sqrt{g_{11}} \theta_{,1} \sin \theta \tan \varphi = 0 \quad (2.20)$$

şeklini alır.

$$(\bar{w}^i)_{,2}^2 = \frac{\varphi_{,2} \sin \theta}{\sqrt{g_{22}} \cos^2 \varphi} + \frac{\theta_{,2} \cos \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{22}}} - \frac{g_{22,2} \sin \theta \tan \varphi}{2g_{22} \sqrt{g_{22}}} \quad (2.21)$$

olduğuna göre (1.15) ten

$$\frac{2\sqrt{g_{22}} \varphi_{,2} \sin \theta}{\cos^2 \varphi} + \frac{g_{22,1} \cos \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} + 2\sqrt{g_{22}} \theta_{,2} \cos \theta \tan \varphi = 0 \quad (2.22)$$

bulunur.

Nihayet,

$$(\bar{w}^i)_{,2}^1 = \frac{\varphi_{,2} \cos \theta}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} - \frac{\theta_{,2} \sin \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{g_{11,2} \cos \theta \tan \varphi}{2g_{11} \sqrt{g_{11}}}$$

ve

$$(\bar{w}^i)_{,1}^2 = \frac{\varphi_{,1} \sin \theta}{\sqrt{g_{22}} \cos^2 \varphi} + \frac{\theta_{,1} \cos \theta \tan \varphi}{\sqrt{g_{22}}} - \frac{g_{22,1} \sin \theta \tan \varphi}{2g_{22} \sqrt{g_{22}}}$$

ifadeleri (1.16) da yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{,2} \sqrt{g_{11}} \cos \theta}{\cos^2 \varphi} - \frac{g_{11,2} \cos \theta \tan \varphi}{2\sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,1} \sqrt{g_{22}} \sin \theta}{\cos^2 \varphi} - \frac{g_{22,1} \sin \theta \tan \varphi}{2\sqrt{g_{22}}} \\ & + \theta_{,1} \sqrt{g_{22}} \cos \theta \tan \varphi - \theta_{,2} \sqrt{g_{11}} \sin \theta \tan \varphi = 0 \quad (2.23) \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır.

O halde Σ yüzeyinin birinci parametre eğrisi ile $\theta = \theta(u^1, u^2)$ açısı yapan (2.17) teğetsel vektör alanının bir Killing alanı olabilmesi için (2.20), (2.22) ve (2.23) diferansiyel denklemleri birlikte gerçekleşmelidir.

(2.20) bağıntısından

$$\theta_{,1} = \frac{\varphi_{,1} \cot \theta}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,2}}{2\sqrt{g_{11}} g_{22}} \quad (2.24)$$

ve (2.22) bağıntısından da

$$\theta_{,2} = -\frac{\varphi_{,2} \tan \theta}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{g_{22,1}}{2\sqrt{g_{11} g_{22}}} \quad (2.25)$$

bulunacağına göre, bu ifadeler (2.23) te yerine yerleştirildiğinde,

$$\frac{\sqrt{g_{11}} \varphi_{,2}}{\cos \theta \cos^2 \varphi} + \frac{\sqrt{g_{22}} \varphi_{,1}}{\sin \theta \cos^2 \varphi} = 0 \quad (2.26)$$

şartına ulaşılır. O halde,

$$\sqrt{g_{11}} \varphi_{,2} \sin \theta + \sqrt{g_{22}} \varphi_{,1} \cos \theta = 0$$

olmalıdır. Dolayısı ile

$$\tan \theta = -\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\varphi_{,1}}{\varphi_{,2}} \quad (2.27)$$

dır. Diğer taraftan, \bar{w}^i vektörünün birinci parametre eğrisi ile yaptığı θ açısı

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{du^2}{du^1} \quad (2.28)$$

bağıntısı ile belirlidir. Bu durumda (2.27) ve (2.28) ifadelerinden

$$\varphi_{,1} du^1 + \varphi_{,2} du^2 = 0 \quad (2.29)$$

diferansiyel denkleminde ulaşılır ki,

$$d\varphi(u^1, u^2) = \varphi_{,1} du^1 + \varphi_{,2} du^2$$

olduğuna göre, (2.29) bağıntısından

$$d\varphi(u^1, u^2) = 0$$

dır. Dolayısı ile

$$\varphi(u^1, u^2) = c = \text{sabit}$$

olur. Diğer taraftan φ nin (2.7) ile verilen

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}}{|\nabla z|} \cos \gamma$$

ifadesi gözönüne alındığında, S kılcak yüzeyi ile Σ sınır yüzeyinin normalleri arasındaki γ açısında sabit olduğundan

$$|\nabla z|^2 = k = \text{sabit}$$

olması gerektiği sonucu elde edilir.

Halbuki,

$$|\nabla z|^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^3} \right)^2 = k$$

diferansiyel denkleminin çözüm yüzeyi bir düzlemden ibarettir.

Diğer taraftan kılcak yüzeyler düzlemden farklı olduğundan aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem II.1: (2.1) kılcak yüzeyine bağlı olarak, tanım bölgesinin sınır yüzeyi olan Σ üzerinde tanımlanan (2.17) teğetsel vektör alanları Killing alanı olamaz.

II.3. Teğetsel vektör alanının, Σ yüzeyinin birinci parametre eğrisi ile yaptığı θ açısının sabit olması hali.

$S : z = z(x^1, x^2, x^3)$ kılcak yüzeyi ile Ω tanım bölgesinin, izometrik parametrelerle [12] ifade edilen

$$\Sigma : X^i = X^i(u^1, u^2) \quad (i = 1, 2, 3)$$

sınır yüzeyi gözönüne alınsın. ($g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$)

$$\frac{\partial z}{\partial u^\alpha} = z_{u^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.30)$$

olmak üzere, Σ boyunca;

$$z_{u^\alpha} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x^j} \frac{\partial (X^i)^j}{\partial u^\alpha} = \langle \nabla z, X_\alpha^i \rangle \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.31)$$

dir. Diğer taraftan vektör alanının X_1^i ve X_2^i teğetsel vektör alanları ile yaptığı x ve y açıları

$$\cos x = \frac{\langle \nabla z, X_1^i \rangle}{\sqrt{g_{11}} |\nabla z|}, \quad \cos y = \frac{\langle \nabla z, X_2^i \rangle}{\sqrt{g_{11}} |\nabla z|} \quad (2.32)$$

dır. (2.16) gereğince

$$\cos \theta = \frac{\cos x}{\sin \varphi} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{\cos y}{\sin \varphi} \quad (2.33)$$

olduğuna göre (2.32) ve (2.33) bağıntıları kullanılarak

$$\cos \theta = \frac{\langle \nabla z, X_1^i \rangle}{\sqrt{g_{11}} |\nabla z| \sin \varphi}, \quad \sin \theta = \frac{\langle \nabla z, X_2^i \rangle}{\sqrt{g_{11}} |\nabla z| \sin \varphi} \quad (2.34)$$

yazılır. (2.34) bağıntılarından,

$$\tan \theta = \frac{\langle \nabla z, X_2^i \rangle}{\langle \nabla z, X_1^i \rangle}$$

bulunacağına göre bu ifadede (2.31) eşitlikleri yerlerine yazılarak,

$$\tan \theta = \frac{z_{u^2}}{z_{u^1}}$$

sonucuna ulaşılır ki, $\theta = \frac{\pi}{4}$ seçilmesi halinde

$$\tan \theta = 1 = \frac{z_{u^2}}{z_{u^1}}$$

olacağından

$$z_{u^2} - z_{u^1} = 0$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise

$$z = z(u^1 + u^2)$$

şeklindedir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem II.2: (2.1) kılcak yüzeyinin tanım bölgesinin Σ sınır yüzeyi olan (2.2) yüzeyi üzerinde izometrik parametrelerin seçilmesi halinde, kılcak yüzeye bağlı olarak tanımlanan (2.17) teğetsel vektör alanının, Σ nın birinci parametre eğrisi ile yaptığı θ açısının $\theta = \frac{\pi}{4}$ olması için gerek ve yeter şart, Σ boyunca $z = z(u^1 + u^2)$ olmasıdır.

II.4. Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Harmonik

Vektör Alanı Olması Şartları

Σ yüzeyinin, (2.17) ile verilen teğetsel vektör alanı gözönüne alınsın. Σ yüzeyi izometrik parametrelere teşmil edilip ($g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$), sözkonusu alanın, birinci parametre eğrisinin X_1^i teğeti ile yaptığı θ açısının özel olarak $\theta = \frac{\pi}{4}$ seçilmesi halinde (2.17) vektör alanı;

$$\bar{w}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} X_1^i + \frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} X_2^i \right) \quad (2.35)$$

şeklini alır. O halde

$$(\bar{w}^i)^1 = (\bar{w}^i)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} \right)$$

dir. Yukarıdaki (2.35) teğetsel vektör alanının harmonik vektör alanı olabilmesi için (1.24) ve (1.25) diferansiyel denklemleri birlikte sağlanmalıdır.

(2.19) notasyonları ile;

$$\frac{\partial (\bar{w}^i)^1}{\partial u^1} = (\bar{w}^i)^1_{,1} = (\bar{w}^i)^2_{,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi_{,1}}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} - \frac{g_{11,1} \tan \varphi}{2g_{11} \sqrt{g_{11}}} \right)$$

ve

$$(\bar{w}^i)_{,2}^1 = (\bar{w}^i)_{,2}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi_{,2}}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} - \frac{g_{11,2} \tan \varphi}{2g_{11} \sqrt{g_{11}}} \right)$$

bulunacağından bu ifadeler (1.24) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} + \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} = 0 \quad (2.36)$$

olur. Benzer şekilde (1.25) denkleminde yerleştirildiğinde

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} + \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} = 0 \quad (2.37)$$

denkleminde ulaşılır.

(2.36) ve (2.37) ifadelerinden de

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} \quad (2.38)$$

ve

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} \quad (2.39)$$

bulunacağına göre (2.38) ifadesi du^1 ile, (2.39) ifadesi du^2 ile çarpılıp toplandığında

$$\frac{\varphi_{,1} du^1 + \varphi_{,2} du^2}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \frac{g_{11,1} du^1 + g_{11,2} du^2}{2g_{11}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin integrasyonu ile

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \int \frac{dg_{11}}{2g_{11}}$$

denkleminde

$$\log(\tan \varphi) = \log \frac{c}{\sqrt{g_{11}}}$$

veya

$$\tan \varphi = \frac{c}{\sqrt{g_{11}}} \quad (c = \text{sabit}) \quad (2.40)$$

bağıntısına ulaşılır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem II.3: $S: z = z(x^1, x^2, x^3)$ kılcal yüzeyinin Ω tanım bölgesinin, $\Sigma: X^i = X^i(u^1, u^2)$ sınır yüzeyi izometrik parametrelere teşmil edilip, $\tan \theta = 1$ alınması halinde (2.35) teğetsel vektör alanının Σ yüzeyi üzerinde harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, φ açısının $\tan \varphi = \frac{c}{\sqrt{g_{11}}}$ ($c = \text{sabit}$) bağıntısını sağlamasıdır.

Örnek: Σ yüzeyi olarak aşağıdaki şekilde parametrelenmiş bir küre yüzeyinin alınması halinde

$$\Sigma: X^i(u^1, u^2) = (\text{sech}(u^1+u^2) \cos(u^1-u^2), \text{sech}(u^1+u^2) \sin(u^1-u^2), \tanh(u^1+u^2)) \quad (2.41)$$

yüzeyinin birinci ve ikinci esas formlarının g_{ij} ve d_{ij} katsayıları:

$$g_{11} = g_{22} = 2\text{sech}^2(u^1 + u^2), \quad g_{12} = 0; \quad d_{11} = d_{22} = -2\text{sech}^2(u^1 + u^2), \quad d_{12} = 0 \quad (2.42)$$

dır.

Diğer taraftan, kartezyen denklemleri

$$z = z(x^1, x^2, x^3) = f_1(x^1{}^2 + x^2{}^2) + f_2(x^3) \quad (2.43)$$

şeklinde olan bütün S kılcal yüzeyleri için, Ω tanım bölgesinin sınır yüzeyinin yukarıdaki Σ küresi olarak seçilmesi halinde Σ boyunca $z = z(u^1 + u^2)$ olacaktır, dolayısı ile Teorem II.2. gereğince $\tan \theta = 1$ dir. Yani (2.43) formundaki bütün S kılcal yüzeyleri için Ω tanım bölgesinin sınır yüzeyinin (2.41) küresi olarak seçilmesi halinde Teorem II.3. ün ilk şartı sağlanır. (2.43) formunda olupta sözkonusu teoremin ikinci şartını da sağlayan yüzeyler bulmak mümkündür. (2.7) denklemden,

$$\tan^2 \varphi = \frac{|\nabla z|^2 \tan^2 \gamma - 1}{1 + |\nabla z|^2} \quad (2.44)$$

elde edileceğine göre, örneğin Σ boyunca

$$|\nabla z|^2 = \frac{1 + \cosh^2(u^1 + u^2)}{\tan^2 \gamma - \cosh^2(u^1 + u^2)} \quad (2.45)$$

şeklinde olan S kılcal yüzeyleri için

$$\tan \varphi = \cosh(u^1 + u^2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g_{11}}} \quad (2.46)$$

dir, dolayısı ile bağıli vektör alanı harmonik olacaktır.

BÖLÜM III

Σ YÜZEYİNİN KİLLİNG VE HARMONİK OLAN DUAL VEKTÖR ALANLARI

III.1. Σ Yüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Duali

Dual vektör alanının I.2 de verilen tanımı gözönüne alınırsa, (2.17) vektör alanının v^i duali, $h = \frac{d_{22}}{g_{22}}$ ve $k = \frac{d_{11}}{g_{11}}$; Σ yüzeyinin asal eğriliklerini göstermek üzere,

$$v^i = \tan \varphi \left(-\frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{11}}} h^2 X_1^i + \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{22}}} k^2 X_2^i \right) \quad (3.1)$$

dır.

III.2. Dual Vektör Alanının Killing Vektör Alanı Olması Şartları

Σ yüzeyi izometrik parametrelere teşmil edilip, $\tan \theta = 1$ alındığında yukarıdaki dual vektör alanı,

$$v^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} h^2 X_1^i + \frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} k^2 X_2^i \right) \quad (3.2)$$

şeklini alır. Σ yüzeyi üzerinde (3.2) ile verilen dual vektör alanının Killing vektör alanı olabilmesi için (1.11) Killing diferansiyel denklemleri gerçekleşmelidir.

$$(v^i)^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} h^2 \right), \quad (v^i)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} k^2 \right) \quad (3.3)$$

olduğuna göre (2.19) notasyonları ile

$$(v^i)_{,1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2 h h_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} + \frac{g_{11,1} h^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} - \frac{\varphi_{,1} h^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right) \quad (3.4)$$

bulunacağından, Killing diferansiyel denklemlerinden (1.14) de yerleştirildiğinde

$$-\frac{2 \varphi_{,1} h^2 \sqrt{g_{11}}}{\cos^2 \varphi} + \frac{g_{11,2} k^2 \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} - 4 h h_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi = 0 \quad (3.5)$$

bulunur.

$$(v^i)_{,2}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 k k_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} - \frac{g_{11,2} k^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,2} k^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right) \quad (3.6)$$

olduğuna göre (1.15) de yazıldığında

$$\frac{2 \varphi_{,2} k^2 \sqrt{g_{11}}}{\cos^2 \varphi} - \frac{g_{11,1} h^2 \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} + 4 k k_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi = 0 \quad (3.7)$$

olur.

Nihayet,

$$(v^i)_{,2}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2 h h_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} + \frac{g_{11,2} h^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} - \frac{\varphi_{,2} h^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right) \quad (3.8)$$

ve

$$(v^i)_{,1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 k k_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} - \frac{g_{11,1} k^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,1} k^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right) \quad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9) ifadeleri (1.16) da yerleştirildiğinde,

$$\frac{g_{11,2} h^2 \tan \varphi}{2 \sqrt{g_{11}}} - \frac{g_{11,1} k^2 \tan \varphi}{2 \sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,1} k^2 \sqrt{g_{11}}}{\cos^2 \varphi} - \frac{\varphi_{,2} h^2 \sqrt{g_{11}}}{\cos^2 \varphi} \quad (3.10)$$

$$-2 h h_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi + 2 k k_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi = 0$$

denkleminde ulaşılır.

O halde Σ yüzeyi üzerinde (3.2) ile verilen dual vektör alanının Killing vektör alanı olabilmesi için (3.5), (3.7), (3.10) diferansiyel denklemlerini birlikte gerçekleştirmesi gerekir. (3.5) bağıntısından Σ yüzeyi için $k \neq 0$, $h \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{k^2}{h^2} (\log \sqrt{g_{11}})_{,2} - (\log h^2)_{,1} \quad (3.11)$$

ve (3.7) bağıntısından

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin\varphi \cos\varphi} = \frac{h^2}{k^2} (\log \sqrt{g_{11}})_{,1} - (\log k^2)_{,2} \quad (3.12)$$

bulunacağına göre bu ifadeler (3.10) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} (h^4 + k^4) [k^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,2} - h^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,1}] \\ + h^2 (h^2 k_{,2}^2 - k^2 h_{,2}^2) - k^2 (k^2 h_{,1}^2 - h^2 k_{,1}^2) = 0 \end{aligned}$$

şartına ulaşılır. Bu ifade uygun şekilde düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{(h^4 + k^4)}{h^4} [k^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,2} - h^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,1}] \\ + h^2 \left(\frac{k^2}{h^2} \right)_{,2} + k^2 \left(\frac{k^2}{h^2} \right)_{,1} = 0 \quad (3.13) \end{aligned}$$

bulunacağından, aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem.III.1: (3.2) ile verilen dual vektör alanının, Σ sınır yüzeyi üzerinde

Killing vektör alanı olması için,

$$\frac{2\varphi_{,1}}{\sin 2\varphi} = \frac{k^2}{h^2} (\log \sqrt{g_{11}})_{,2} - (\log h^2)_{,1}$$

ve

$$\frac{2\varphi_{,2}}{\sin 2\varphi} = \frac{h^2}{k^2} (\log \sqrt{g_{11}})_{,1} - (\log k^2)_{,2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{(h^4 + k^4)}{h^4} [k^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,2} - h^2 (\log \sqrt{g_{11}})_{,1}] \\ + h^2 \left(\frac{k^2}{h^2} \right)_{,2} + k^2 \left(\frac{k^2}{h^2} \right)_{,1} = 0 \end{aligned}$$

şartı sağlanmalıdır.

Özel bir yüzey sınıfı.

Σ yüzeyinin minimal yüzey olarak seçilmesi halinde $h^2 = k^2$ olacağından

(3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntıları sırası ile

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} - \frac{(h^2)_{,1}}{h^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} - \frac{(h^2)_{,2}}{h^2} \quad (3.15)$$

ve

$$g_{11,1} = g_{11,2} \quad (3.16)$$

şekillerini alırlar. O halde (3.16)

$$g_{11,1} - g_{11,2} = 0 \quad (3.17)$$

olduğuna göre bu diferansiyel denklemin çözümü

$$g_{11} = g_{11} (u^1 + u^2)$$

dir.

Diğer taraftan (3.16) eşitliği (3.14) ve (3.15) bağıntılarında kullanıldığında

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} - \frac{(h^2)_{,1}}{h^2} \quad (3.18)$$

ve

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} - \frac{(h^2)_{,2}}{h^2} \quad (3.19)$$

olur. (3.18) ifadesi du^1 ile (3.19) ifadesi du^2 ile çarpılıp toplandığında

$$\frac{\varphi_{,1} du^1 + \varphi_{,2} du^2}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{g_{11,1} du^1 + g_{11,2} du^2}{2g_{11}} - \frac{(h^2)_{,1} du^1 + (h^2)_{,2} du^2}{h^2}$$

bulunur. Bu ifade

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{dg_{11}}{2g_{11}} - \frac{dh^2}{h^2}$$

şeklinde olduğundan integrasyonu ile

$$\log \tan \varphi = \log \frac{c \sqrt{g_{11}}}{h^2} \quad (c = \text{sabit})$$

dolayısı ile

$$\tan \varphi = \frac{c \sqrt{g_{11}}}{h^2}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem.III.2: Σ sınır yüzeyinin minimal yüzey seçilmesi halinde (3.2) ile verilen dual vektör alanının Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, $g_{11} = g_{11}(u^1 + u^2)$ olmak üzere φ açısının $\tan \varphi = \frac{c \sqrt{g_{11}}}{h^2}$ ($c = \text{sabit}$) bağıntısını sağlamasıdır.

III.3. Dual Vektör Alanının Harmonik Vektör

Alanı Olması Şartları

Σ yüzeyinin (3.2) ile verilen dual vektör alanının harmonik vektör alanı olabilmesi için (1.24) ve (1.25) diferansiyel denklemlerinin sağlaması gerekir.

$$(v^i)^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} h^2 \right), \quad (v^i)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} k^2 \right)$$

olduğuna göre (2.19) notasyonları ile

$$(v^i)_{,2}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2 h h_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} + \frac{g_{11,2} h^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} - \frac{\varphi_{,2} h^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right)$$

ve

$$(v^i)_{,1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 k k_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} - \frac{g_{11,1} k^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,1} k^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right)$$

bulunacağından (1.24) denklemi

$$\frac{\varphi_{,1} k^2}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{\varphi_{,2} h^2}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,1} k^2}{2g_{11}} + \frac{g_{11,2} h^2}{2g_{11}} + 2hh_{,2} + 2kk_{,1} = 0 \quad (3.20)$$

olur. Benzer şekilde

$$(vi)_{,1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2 h h_{,1} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} + \frac{g_{11,1} h^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} - \frac{\varphi_{,1} h^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right)$$

ve

$$(vi)_{,2}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 k k_{,2} \sqrt{g_{11}} \tan \varphi}{g_{11}} - \frac{g_{11,2} k^2 \tan \varphi}{2 g_{11} \sqrt{g_{11}}} + \frac{\varphi_{,2} k^2}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} \right)$$

olduğuna göre (1.25) denklemi de

$$-\frac{\varphi_{,1} h^2}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{\varphi_{,2} k^2}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{g_{11,1} h^2}{2g_{11}} + \frac{g_{11,2} k^2}{2g_{11}} - 2hh_{,1} + 2kk_{,2} = 0 \quad (3.21)$$

şeklini alır. Böylece Σ üzerindeki (3.2) dual vektör alanının harmonik vektör alanı olması için (3.20) ve (3.21) diferansiyel denklemleri birlikte gerçekleşmelidir. (3.20) ve (3.21) bağıntılarında gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} + \frac{(h^4 + k^4)_{,1}}{2(h^4 + k^4)} + \left(\arctan \frac{h^2}{k^2} \right)_{,2} = 0 \quad (3.22)$$

ve

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} + \frac{(h^4 + k^4)_{,2}}{2(h^4 + k^4)} + \left(\arctan \frac{k^2}{h^2} \right)_{,1} = 0 \quad (3.23)$$

elde edileceğinden aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem.III.3: Σ yüzeyi üzerinde (3.2) ile verilen dual vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şartlar (3.22) ve (3.23) ile verilmiştir.

Özel bir yüzey sınıfı.

Σ yüzeyinin minimal yüzey seçilmesi halinde $h^2 = k^2$ olacağından (3.22) denklemi

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} + \frac{(h^4)_{,1}}{2h^4} = 0 \quad (3.24)$$

ve (3.23) denklemi de

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} + \frac{(h^4)_{,2}}{2h^4} = 0 \quad (3.25)$$

şeklini alır. Bu denklemler

$$\frac{\varphi_{,1}}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \left[\frac{g_{11,1}}{2g_{11}} + \frac{2h_{,1}}{h} \right] \quad (3.26)$$

ve

$$\frac{\varphi_{,2}}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \left[\frac{g_{11,2}}{2g_{11}} + \frac{2h_{,2}}{h} \right] \quad (3.27)$$

şeklinde yazılarak, (3.26) ifadesi du^1 , (3.27) de du^2 ile çarpılıp toplandığında

$$\frac{\varphi_{,1} du^1 + \varphi_{,2} du^2}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \left[\frac{g_{11,1} du^1 + g_{11,2} du^2}{2g_{11}} + \frac{2(h_{,1} du^1 + h_{,2} du^2)}{h} \right]$$

elde edilir. Bu ifade

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = - \left[\frac{dg_{11}}{2g_{11}} + \frac{2dh}{h} \right]$$

olduğundan integrasyonu ile

$$\log \tan \varphi = \log \frac{c}{\sqrt{g_{11}} h^2} \quad (c = \text{sabit})$$

veya

$$\tan \varphi = \frac{c}{\sqrt{g_{11}} h^2}$$

bağıntısına ulaşılır. Dolayısı ile aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem.III.4: Σ sınır yüzeyinin minimal yüzey seçilmesi halinde (3.2) ile verilen dual vektör alanının harmonik vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

φ açısının $\tan \varphi = \frac{c}{\sqrt{g_{11}} h^2}$ ($c = \text{sabit}$) bağıntısını sağlamasıdır.

BÖLÜM IV

Σ HİPERYÜZEYLERİ ÜZERİNDE KİLLİNG VE HARMONİK VEKTÖR ALANLARI VE TEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA DUAL ALAN

IV.1. $(n - 1)$ - Boyutlu Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanı

Bölüm 1 de, n - boyutlu ($n \geq 2$) Öklid uzayının bir Ω bölgesinde (1.1) ile tanımlanan Öklidsel vektör alanını gözönüne alalım. ($n > 3$) olmak üzere, Σ hiperyüzeyi en az C^3 sınıfından,

$$X^i = X^i(u^1, \dots, u^{n-1}), \quad (i = 1, \dots, n)$$

denklemleri ile ifade edilsin ve birinci ve ikinci esas formlarının katsayıları

$$g_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^{n-1}), \quad d_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^{n-1}) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n - 1)$$

olsun[13]. Ayrıca Σ hiperyüzeyi üzerinde eğrilik çizgilerinin parametre eğrileri olarak seçilmesi ile

$$g_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta = 1, \dots, n - 1)$$

olacaktır. Söz konusu hiperyüzeyin parametre eğrilerinin teğetleri

$$X^i_{\alpha}(u^1, \dots, u^{n-1}), \quad (\alpha = 1, \dots, n - 1)$$

ile gösterilirse $\left(X^i_{\alpha} = \frac{\partial X^i}{\partial u^{\alpha}} \right)$, hiperyüzeyin her noktasındaki $(X^1_1, \dots, X^i_{n-1}, v^i)$ bazına göre, (1.1) vektör alanının ifadesi,

$$A_{\alpha} = A_{\alpha}(u^1, \dots, u^{n-1}), \quad (\alpha = 1, \dots, n - 1)$$

olmak üzere,

$$w^i = \sum_{\alpha=1}^{n-1} A_{\alpha} X_{\alpha}^i + v^i \quad (4.1)$$

şeklinde olacaktır. $\nabla Z = (z_1, \dots, z_n)$, $\left(z_i = \frac{\partial Z}{\partial x^i} \right)$ vektörünün, Σ nın v^i birim normali

ve X_{α}^i teğet vektörleri ile yaptığı açılar sırası ile φ ve y_{α} ($\alpha = 1, \dots, n-1$) ile gösterilirse $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < y_{\alpha} < \frac{\pi}{2}, \alpha = 1, \dots, n-1 \right)$, (1.3) bağıntısından

$$|w^i| = \frac{1}{\cos \varphi}$$

bulunur. (4.1) gereğince

$$\langle w^i, X_{\alpha}^i \rangle = A_{\alpha} g_{\alpha\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (4.2)$$

ve (1.1) yardımını ile

$$\langle w^i, X_{\alpha}^i \rangle = \frac{\langle \nabla Z, X_{\alpha}^i \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla Z|^2} \cos \gamma} = \frac{|\nabla Z| |X_{\alpha}^i| \cos y_{\alpha}}{\sqrt{1 + |\nabla Z|^2} \cos \gamma} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (4.3)$$

olduğuna göre, bu ifadelerde (2.7) bağıntısı da kullanılarak,

$$A_{\alpha} = \frac{\cos y_{\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \cos \varphi} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (4.4)$$

elde edilir.

Bu sonuç (4.1) vektör alanına yerleştirilirse

$$w^i = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\cos y_{\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \cos \varphi} X_{\alpha}^i + v^i \quad (4.5)$$

olur. Σ üzerinde tanımlanmış bu vektör alanının, Σ nın her noktasındaki teğet düzlemi üzerindeki iz düşümü alınarak, Σ yüzeyinin

$$\bar{w}^i = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\cos y_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} \cos \varphi}} X_\alpha^i \quad (4.6)$$

teğetsel vektör alanı elde edilir.

\bar{w}^i vektör alanının X_α^i teğet vektörleri ile yaptığı açılar $\theta_\alpha = \theta_\alpha(u^1, \dots, u^{n-1})$, ($\alpha = 1, \dots, n-1$) ile gösterilirse ($0 < \theta_\alpha < \frac{\pi}{2}$), (4.6) ifadesinden

$$\cos \theta_\alpha = \frac{\langle \bar{w}^i, X_\alpha^i \rangle}{|\bar{w}^i| |X_\alpha^i|} = \frac{g_{\alpha\alpha} \cos y_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \tan \varphi} = \frac{\cos y_\alpha}{\sin \varphi} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

bulunur. Buradan elde edilecek

$$\cos y_\alpha = \cos \theta_\alpha \sin \varphi \quad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

ifadeleri, (4.6) da yerleştirildiğinde teğetsel vektör alanı

$$\bar{w}^i = \tan \varphi \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\cos \theta_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} X_\alpha^i \quad (4.7)$$

şeklini alır. Σ yüzeyinin izometrik parametrelere teşmil edilmesi halinde

$$g_{11} = g_{22} = \dots = g_{n-1, n-1}$$

olacağına göre (4.7) vektör alanının izometrik parametrelerdeki ifadesi

$$\bar{w}^i = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\cos \theta_\alpha) X_\alpha^i \quad (4.8)$$

dır. Şimdi $(n-1)$ - boyutlu Σ hiperyüzeyi üzerinde, hiperyüzeyin elemanları ile tanımlanmış bu teğetsel vektör alanı için Killing alanı olması şartlarını araştıralım.

IV.2. Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Killing

Alanı Olması Şartları

(4.8) ile verilen teğetsel vektör alanının Killing alanı olması için (1.11) Killing diferansiyel denklemlerinin sağlanması gerekir. Hiperyüzey üzerinde izometrik parametrelerin seçilmesi halinde (1.12) ve (1.13) diferansiyel denklemleri

$$2g_{11} \frac{\partial w^\alpha}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n-1} g_{11,\beta} w^\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (4.9)$$

ve

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial w^\beta}{\partial u^\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq \beta ; \alpha, \beta = 1, \dots, n-1) \quad (4.10)$$

şeklini alırlar.

(4.8) bağıntısı ile, hiperyüzeyin her noktasındaki $(X_\alpha^i, \alpha = 1, \dots, n-1)$ bazına göre ifade edilmiş olan \bar{w}^i vektör alanının β numaralı bileşeni olan

$$(\bar{w}^i)^\beta = \frac{\tan \varphi \cos \theta_\beta}{\sqrt{g_{11}}} \quad (4.11)$$

nın türevi alınarak

$$\frac{\partial (\bar{w}^i)^\beta}{\partial u^\alpha} = \frac{\varphi_{,\alpha} \cos \theta_\beta}{\sqrt{g_{11}} \cos^2 \varphi} - \frac{\theta_{\beta,\alpha} \sin \theta_\beta \tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{g_{11,\alpha} \cos \theta_\beta \tan \varphi}{2g_{11} \sqrt{g_{11}}} \quad (4.12)$$

bulunacağından, (4.12) ifadesi Killing diferansiyel denklemlerinin birincisinde yerleştirilip gerekli kısaltmalar yapıldığında

$$\frac{4\sqrt{g_{11}} \varphi_{,\alpha} \cos \theta_\alpha}{\sin 2\varphi} - 2\sqrt{g_{11}} \theta_{\alpha,\alpha} \sin \theta_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{n-1} g_{11,\beta} \frac{\cos \theta_\beta}{\sqrt{g_{11}}} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

veya;

$$(\cos \theta_\alpha)(\log \tan \varphi)_{,\alpha} - \theta_{\alpha,\alpha} \sin \theta_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{n-1} (\log \sqrt{g_{11}})_{,\beta} \cos \theta_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (4.13)$$

şartı bulunur. Benzer şekilde, (4.10) denkleminde de

$$\frac{2(\varphi_{,\alpha} \cos \theta_\beta + \varphi_{,\beta} \cos \theta_\alpha)}{\sin 2\varphi} - \frac{g_{11,\beta} \cos \theta_\alpha + g_{11,\alpha} \cos \theta_\beta}{2g_{11}} - (\theta_{\alpha,\beta} \sin \theta_\alpha + \theta_{\beta,\alpha} \sin \theta_\beta) = 0$$

$$(\alpha \neq \beta \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1)$$

veya

$$\left(\log \frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} \right)_{,\alpha} \cos \theta_\beta + \left(\log \frac{\tan \varphi}{\sqrt{g_{11}}} \right)_{,\beta} \cos \theta_\alpha + (\cos \theta_\beta)_{,\alpha} + (\cos \theta_\alpha)_{,\beta} = 0 \quad (4.14)$$

$$(\alpha \neq \beta \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1)$$

şartına ulaşılır. O halde aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem IV.1: Σ hiperyüzeyinin parametre eğrileri ile $\theta_\alpha = \theta_\alpha(u^1, \dots, u^{n-1})$, $(\alpha = 1, \dots, n-1)$ açıları yapan (4.8) teğetsel vektör alanının bir Killing alanı olabilmesi için gerek ve yeter şartlar (4.13) ve (4.14) ile verilmiştir.

IV.3. Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Harmonik Vektör Alanı Olması Şartları

Σ Hiperyüzeyinin Teğetsel Vektör Alanının Harmonik Vektör Alanı Olması için (1.20) ve (1.21) bağıntılarının sağlanması gerekir. Σ hiperyüzeyi için izometrik parametrelerin seçilmesi halinde (1.20) ve (1.21) diferansiyel denklemleri sırası ile

$$g_{11} \frac{\partial w^\alpha}{\partial u^\beta} - g_{11} \frac{\partial w^\beta}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\beta} w^\alpha - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} w^\beta = 0 \quad (4.15)$$

$$(\alpha \neq \beta \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1)$$

ve

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[\frac{\partial w^\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2g_{11}} \sum_{\beta=1}^{n-1} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\beta} w^\beta \right] = 0 \quad (4.16)$$

şeklini alırlar. (4.12) ifadesi (4.15) denkleminde yerleştirilip düzenlendiğinde

$$\frac{2(\varphi_{,\beta} \cos \theta_{\alpha} - \varphi_{,\alpha} \cos \theta_{\beta})}{\sin 2\varphi} - \frac{g_{11,\alpha} \cos \theta_{\beta} - g_{11,\beta} \cos \theta_{\alpha}}{2g_{11}} - (\theta_{\alpha,\beta} \sin \theta_{\alpha} - \theta_{\beta,\alpha} \sin \theta_{\beta}) = 0$$

$$(\alpha \neq \beta ; \alpha, \beta = 1, \dots, n-1)$$

veya

$$(\log(\sqrt{g_{11}} \tan \varphi))_{,\beta} \cos \theta_{\alpha} - (\log(\sqrt{g_{11}} \tan \varphi))_{,\alpha} \cos \theta_{\beta} + (\cos \theta_{\alpha})_{,\beta} - (\cos \theta_{\beta})_{,\alpha} = 0 \quad (4.17)$$

$$(\alpha \neq \beta ; \alpha, \beta = 1, \dots, n-1)$$

bulunur. Aynı şekilde (4.16) denkleminde de

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(\frac{2\varphi_{,\alpha} \cos \theta_{\alpha}}{\sin 2\varphi} - \theta_{\alpha,\alpha} \sin \theta_{\alpha} + (n-2) \frac{g_{11,\alpha} \cos \theta_{\alpha}}{2g_{11}} \right) = 0$$

veya

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[(\log \tan \varphi)_{,\alpha} \cos \theta_{\alpha} + (\cos \theta_{\alpha})_{,\alpha} + (n-2) (\log \sqrt{g_{11}})_{,\alpha} \cos \theta_{\alpha} \right] = 0 \quad (4.18)$$

şartı elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2: Σ hiperyüzeyinin parametre eğrileri ile $\theta_{\alpha} = \theta_{\alpha}(u^1, \dots, u^{n-1})$,

$(\alpha = 1, \dots, n-1)$ açılı yapan (4.8) teğetsel vektör alanının bir harmonik vektör alanı olabilmesi için gerek ve yeter şartlar (4.17) ve (4.18) ile verilmiştir.

IV.4. Çift Boyutlu Hiperyüzeyler Üzerindeki Vektör Alanlarının Dualleri

$2n+1$ - boyutlu Öklid uzayının düzgün bir M hiperyüzeyi, $2n$ -boyutlu bir alt uzay olacağına göre, bu hiperyüzeyin göbek noktası olmayan noktalarının E cümlesinin her p noktası, öyle bir O civarını haizdir ki, bu civarda asal vektörlerin ortonormal $\{X_{\alpha}^i\}$ ($\alpha = 1, \dots, 2n$) baz alanı sözkonusudur. E üzerinde asal eğrilik fonksiyonları olan k_{α} ($\alpha = 1, \dots, 2n$) fonksiyonları da düzgün fonksiyonlardır. M hiperyüzeyinin E cümlesine ait bir p noktasındaki herhangi bir v^i teğetsel vektör alanı, $f_{\alpha}(p) \in C^{\infty}$ ($\alpha = 1, \dots, 2n$) fonksiyonlar olmak üzere,

$$v^i = \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} X_{\alpha}^i \quad (4.19)$$

şeklinindedir. Bu alanın duali, $g_{\alpha}(p) \in C^{\infty}$ ($\alpha = 1, \dots, 2n$) olmak üzere

$$u^i = \sum_{\alpha=1}^{2n} g_{\alpha} X_{\alpha}^i \quad (4.20)$$

şeklinde yazılırsa, I.2. gereğince , (1.7) şartları sağlanmalıdır.

L, Weingarten tasvirini göstermek üzere,

$$L(v^i) = L\left(\sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} X_{\alpha}^i\right) = \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} L(X_{\alpha}^i) \quad (4.21)$$

olduğuna göre [9] , hiperyüzeyin eğrilik çizgilerine nispet edilmesi halinde

$$L(X_{\alpha}^i) = k_{\alpha} X_{\alpha}^i \quad (\alpha = 1, \dots, 2n)$$

olacaktır. O halde

$$L(v^i) = \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} k_{\alpha} X_{\alpha}^i$$

ve

$$L^2(v^i) = \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} k_{\alpha}^2 X_{\alpha}^i$$

bulunur. Bu durumda (1.7) şartı,

$$\begin{aligned} \langle \underline{L^2(v^i)}, u^i \rangle_p &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} k_{\alpha}^2 X_{\alpha}^i, \sum_{\alpha=1}^{2n} g_{\alpha} X_{\alpha}^i \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2n} f_{\alpha} g_{\alpha} k_{\alpha}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklini alır. O halde,

$$g_{2j-1} = -f_{2j} k_{2j}^2, \quad g_{2j} = f_{2j-1} k_{2j-1}^2 \quad (j = 1, \dots, 2n)$$

seçilmesi halinde (4.22) şartı sağlanacaktır.

Sonuç olarak , (4.19) vektör alanının duali

$$u^i = \sum_{\alpha=1}^n \left(-f_{2\alpha} k_{2\alpha}^2 X_{2\alpha-1}^i + f_{2\alpha-1} k_{2\alpha-1}^2 X_{2\alpha}^i \right) \quad (4.23)$$

şeklindedir. Böylece çift boyutlu bir hiperyüzey üzerinde verilen bir teğetsel vektör alanının duali tanımlanmış olmaktadır.

IV.5. Çift Boyutlu Σ Hiperyüzeylerinin Teğetsel Vektör Alanlarının Dualleri

2n boyutlu Σ hiperyüzeyleri üzerinde (4.7) gereğince

$$\bar{w}^i = \tan \varphi \sum_{\alpha=1}^{2n} (\cos \theta_{\alpha}) \frac{X_{\alpha}^i}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \quad (4.24)$$

şeklinde bir teğetsel vektör alanı tanımlandığına göre, k_{α} ($\alpha = 1, \dots, 2n$) fonksiyonları Σ nin bir p noktasındaki asal eğrilik fonksiyonlarını göstermek üzere (4.24) alanının duali,

$$\bar{u}^i = \tan \varphi \sum_{\alpha=1}^n \left[-k_{2\alpha}^2 (\cos \theta_{2\alpha}) \frac{X_{2\alpha-1}^i}{\sqrt{g_{2\alpha-1, 2\alpha-1}}} + k_{2\alpha-1}^2 (\cos \theta_{2\alpha-1}) \frac{X_{2\alpha}^i}{\sqrt{g_{2\alpha, 2\alpha}}} \right]$$

olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] FINN, R., Existence and Non - Existence of Capillary Surfaces, Manuscripta Math. 28 , (1979),1-11.
- [2] AMUR, K and SHETTY, D.J., On Duality of Vector Fields, Tensor, N.S. Vol.31, (1977), 292 – 295.
- [3] GIUSTI, E., Boundary Value Problems for Non - Parametric Surfaces of Prescribed Mean Curvature, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3 , (1976), 501 – 548.
- [4] ÖZOK, A.K., On Related Vector Fields of Capillary Surfaces , Internat. J. Math and Math. Sci. Vol. 4. No .3. (1981), 473 – 484.
- [5] KOSTANT, B., Holonomy and The Lie Algebra of Infinitesimal Motions of a Riemannian Manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 80, (1955), 528 – 542.
- [6] BOSCH, C.C., Killing Vector Fields and Holonomy Algebras, Proceedings of the American Mathematical Society Vol.90 Number.1, January (1984), 97 – 102.
- [7] BİTİS, G., Harmonic 1-forms and Killing Vector Fields, Tensor, N.S. Vol. 51.(1992) 117 – 121.
- [8] FINN, R., Capillary Phenomena, Uspechi Mat. Nauk. 29.(1974), 131 – 152.
- [9] HICKS, J.N., Notes on Differential Geometry, D. Van. Nostrand Co. (1965).
- [10] MATSUSHIMA, Y., Differentiable Manifolds, Marcel Dekker, (1972).
- [11] YANO, K., Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, The Macmillan Co., (1965).
- [12] EISENHART, L.P., An Introduction to Differential Geometry , Prisceton University Press, (1947).
- [13] WEATHERBURN, C.E., Riemannian Geometry and The Tensor Calculus, Cambridge University Press, (1966).