T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

Hazırlayan

Fatma CENKİZ

Danışman

Prof. Dr. Mehmet BARAN

Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2019

KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

Hazırlayan
Fatma CENKİZ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BARAN

Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2019
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Fatma CENKİZ

YÖNERGEYE UYGUNLUK

"T_0 Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar" adlı Yüksek Lisans Tezi Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Fatma CENKİZ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BARAN

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Mehmet BARAN danışmanlığında **Fatma CENKİZ** tarafından hazırlanan **"T_0 Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

08/ 07 / 2019

JÜRİ:

Danışman	: Prof. Dr. Mehmet BARAN	....
Üye	: Prof. Dr. Muammer KULA	....
Üye	: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES	Ayhan Erciyes ....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 16/07/2019 tarih ve 2019/41-16 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Mehmet Akkurt

16 / 07 / 2019

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"T_0 Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçların değerlendirilmesinde yardımlarıyla beni destekleyen, danışmanım olduğu süre zarfında bana kıymetli zamanını ayırıp muazzam bir sabır ve ilgiyle beni aydınlatan, üst düzey bilgisiyle bana farklı bakış açıları kazandıran, bugünlere gelmemde büyük katkı sahibi olan, gelecekte meslek hayatımda da bana kattıklarıyla yoluma ışık tutacak danışmanım çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet BARAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca gösterdikleri sevgi, sabır ve anlayıştan ve maddi-manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Fatma CENKİZ

Temmuz 2019, KAYSERİ

T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

Fatma CENKİZ
Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2019
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BARAN

ÖZET

Yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUConv*** nin kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olduğu ve bölüm dönüşümlerinin (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğu, tüm (simetrik) limit uzayları, düzgün yakınsak uzayları, tüm (simetrik) topolojik uzayları ve tüm düzgün uzayları ihtiva eden uygun bir kategoridir. Tezimiz dört bölümden oluşmakta olup bu bölümlerde özetle şu şekilde çalışılmıştır:

Birinci bölümde, ilerleyen bölümler için gerekli temel kategorik tanımlar, süzgeç kavramı ile ilgili temel özellikler ve sonraki teoremlerde kullanacağımız bazı sonuçları verildi.

İkinci bölümde, yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUCon*** in topolojik kategori olduğu gösterilmiş ve bu kategoride önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edildi.

Üçüncü bölümde, p noktasında T_0 yarıdüzgün yakınsak uzayları karakterize edildi.

Dördüncü bölümde T_0 yarıdüzgün yakınsak uzayları karakterize edildi ve klasik T_0 yarıdüzgün yakınsak uzaylarla aralarındaki ilişkiler araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Topolojik kategori, yarıdüzgün yakınsak uzay, düzgün süreklilik, T_0 yarıdüzgün yakınsak uzaylar.

T_0 SEMIUNIFORMCONVERGENCESPACES

Fatma CENKİZ
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc.Thesis, June 2019
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mehmet BARAN

ABSTRACT

The category ***SUConv*** of semi uniform convergence spaces (and unifomly continuous maps) is cartesian closed, hereditary topological category, and products of quotients are quotients. In addition, ***SUConv*** contains all (symmetric) limit spaces, uniform convergence spaces, all (symmetric) topological spaces and all uniform spaces. In this thesis, this important category has been investigated and this work consists of four chapters.

In the first chapter, some fundamental notions and theorems were given.

In the second chapter, it was shown that the category ***SUConv*** of semi uniform convergence spaces (and unifomly continuous maps) is a topological category and some important special objects and morphisms were characterized.

In the third chapter, T_0 semiuniform convergence spaces at a point p were characterized.

In the fourth chapter, T_0 semiuniform convergence spaces were characterized and how these generalizations are related with the usual T_0 were examined.

Keywords: Topological category, semiuniform convergence space, uniform continuity. T_0 semiuniform convergence spaces.

İÇİNDEKİLER

T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

2. BÖLÜM

YARIDÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

3. BÖLÜM

p NOKTASINDA T_0 YARIDÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

4. BÖLÜM

T_0 YARIDÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

GİRİŞ

1906'da Frechet [1] analizdeki birçok problem için oldukça faydalı bir yapı olan metrik uzayları tanımladı. 1914' te Hausdorff [2] tarafından tanımlanan (günümüzde Hausdorff uzaylar olarak bilinen) ve 1922'de Kuratowski [3] tarafından (bugün kullandığımız anlamda) tanımlanan topolojik uzaylarda noktasal yakınsaklık tanımlanabilir. Topolojik uzayların metrik uzaylar yerine kullanılmasının bir sebebi topolojik uzaylar (ve sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi ***Top*** un alt uzaylar, çarpımlar, bölümler ve dual çarpımlar gibi bütün alışılmış yapıların mevcut olmasıdır. Oysa metrik uzaylar (ve büzülme dönüşümlerin (contractions) kategorisi ***Met*** de sadece alt uzaylar ve sonlu çarpımlar oluşumu mevcuttur. Metrik uzayların keyfi çarpımlarının her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine pseudometrik kullanılarak, yani ***pMet*** kategorisine geçilerek çözülebilir, fakat bu defa da pseudometrikten elde edilen topolojinin her zaman Hausdorff olmaması problemi ortaya çıkar. Bir başka ifadeyle metrik başlangıç yapıların topolojik başlangıç yapılarla, genelde, uyuşmamaktadır. Başlangıç ve bitiş yapıların önemini göz önüne alırsak, metrikten topolojiye geçişin temel sebeplerinden birisi budur.

Metrik uzaylar sınıfı çok küçük olduğundan, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi düzgün kavramların mevcut olduğu metrik uzaylardan daha büyük sınıfların olup olmadığı sorusu ortaya çıkıyor. Bu soru 1937'de Weil [4] tarafından çözüldü. Weil düzgün uzayları tanımladı ve Hausdorff'un yaptığı her metrik uzayın tamlanışını [2] her düzgün uzayın tamlanışına genişletti. Fakat 1978'de Husek [5] düzgün uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi ***Unif*** in kartezyen kapalı olmadığını gösterdi. 1948'de L. Nachbin tarafından quasidüzgün uzaylar [6], 1963'te Csaszar tarafından syntopogeneous uzaylar [7], 1964'te D. B. Doitchinov tarafından genelleştirilmiş topolojik uzaylar (=süpertopolojik uzaylar) [8], 1965'te M. Katetov tarafından merotopik uzaylar [9] ve 1974'te H. Herrlich tarafından nearness uzaylar [10] gibi hem topolojik hem de düzgün uzayları içine alan topolojik kategoriler tanımlandı. Fakat bu kategorilerin hiçbirisi kartezyen kapalı değildir.

1965'te Cook ve Fischer [11] düzgün uzayların bir genelleştirilmesi olarak kartezyen kapalı bir kategori oluşturan düzgün yakınsak uzayları (düzgün limit uzaylar) geliştirdi. Fakat düzgün limit uzayları (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi ***ULim*** kalıtsal değildir.

1992'de Behling [12] ve 1993'te Preuss [13] yarı düzgün yakınsak uzayları tanıtarak bu konuya bir çözüm sunmuştur ve yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUConv*** nin kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olduğu ve bölüm dönüşümlerinin (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğunu göstermişlerdir. ***SUConv*** tüm (simetrik) limit uzayları, düzgün yakınsak uzayları ve tüm (simetrik) topolojik uzayları ve tüm düzgün uzayları ihtiva eder. Topolojik ve düzgün kavramlar ***SUConv*** da mevcut olduğundan, ***SUConv*** süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, tamlık, tam sınırlılık, kompaktlık, bağlantılılık ve fonksiyon uzaylarında basit yakınsaklık, sürekli yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık gibi kavramların tanımlaması için uygun bir kategoridir.

Bu çalışmada, yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUCon*** in topolojik kategori olduğu gösterilmiş ve bu kategoride önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edilmiştir. Ayrıca, T_0' yarı düzgün yakınsak uzayları karakterize edilmiş ve bu genellemelerin alışılmış T_0' yarı düzgün yakınsak uzaylar ile nasıl ilişkili olduğunu incelenmiş, T_0' yarı düzgün yakınsak uzayının bir *p* noktasında karakterize edilmiş ve bunun T_0' yarı düzgün yakınsak uzayları ile nasıl ilişkili olduğunu incelenmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ile bu kavramlarla ilgili bazı teoremlere yer verilecektir.

1.1. Kategorik Kavramlar

1945'lerin başında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Clane [14] tarafından keşfedilen kategori teorisi aynı tip objeler ve bu objeler arasındaki dönüşümlerle ilgilenir. İlerleyen dönemlerde topoloji ve cebir arasında yapılması gereken dönüşümler sebebiyle daha da geliştirilmiştir. 1957'de Alexander Grothendieck [15] kategori teorisini, kohomoloji teorisini oluşturmakta kullanmıştır. 1966'da Lawvere [16] kategori teorisini tüm matematiksel düşünceler için bir temel olarak görmüştür. 1980'de Lambek [17] bilgisayarlarda kullanılan karakter ve programların özel bir çeşit kategori oluşturduğunu göstermiştir. Kategori teorisinin yeni bir dil üretmesi farklı disiplinler arasında iletişimi kolaylaştırdığı için düşünce ve ifade bakımından oldukça ekonomiktir. Kategori teorisi; moleküler biyoloji, bilgisayar, astronomi, fizik, malzeme, ulaşım, coğrafya, jeoloji, klimatoloji vb. birçok bilim alanında kullanılmaktadır.

Tanım 1.1.1. Kategori olarak adlandırılacak sistemi A olarak adlandıralım. $X,Y,Z,...$ gibi harflerle göstereceğimiz objelerin sınıfını ise $Ob(A)$ ile gösterelim. $Ob(A)$ dan alınan herhangi X,Y objelerini ele alalım. X ve Y arasında bu objelerin yapısını koruyan bir $f:X\to Y$ morfizmi tanımlayalım. (Bunların fonksiyon olmaları gerekmez.) X den Y ye tüm morfizmlerin sınıfını ise $\mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(X,Y)$ ile gösterelim. $X,Y,Z\in Ob(A)$ ve $f:X\to Y$ ve $g:Y\to Z$ olmak üzere,

$o:\mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(X,Y)\times \mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(Y,Z)\to \mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(X,Z)$ ve $(f,g)\to gof$ ile tanımlı bir işlem olsun. Her X objesi için X den X e 1_x olarak tanımlayacağımız ve bu objenin yapısını değiştirmeyen birim morfizm var olmalıdır.

i) o işleminin birimli olması gerekir. Yani $\forall f\in \mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(X,Y)$ ve $1_x:X\to X\in \mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(X,X)$ ve $1_Y:Y\to Y\in \mathrm{M}or_{\mathrm{A}}(Y,Y)$ için $fo1_x=1_y of=f$ olmalıdır.

ii) o işleminin birleşmeli olması gerekir. Yani $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ ve $h:Z\to T$ olmak üzere $ho(gof)=(hog)of$ olmalıdır.

Bu özellikleri sağlayan A sistemine *kategori* denir.

Örnek 1.1.1. Objelerin sınıfı tüm cümleler olmak üzere X ve Y cümleleri için X den Y ye tüm fonksiyonların sınıfı $C(X,Y)$ olsun. Bu durumda X,Y,Z cümleleri için

$C(Y,Z)\times C(X,Y)\to C(X,Z)$

$(g,f)\to gof$ bileşke işlemi tanımlansın.

a) $f\in C(X,Y)$, $g\in C(Y,Z)$, $h\in C(Z,V)$ olmak üzere $ho(gof)=(hog)of$ dir.

b) Her bir X objesi için $1_X:X\to X$ birim fonksiyonu olmak üzere $fo1_X$ ve $1_X og$ birleşimleri mümkün olan f ve g fonksiyonları için $fo1_X=f$ ve $1_X og=g$ dir.

Bu şekilde elde edilen cümlelerin kategorisi ***Set*** ile gösterilir.

Örnek 1.1.2. Tüm topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategori için objeler bütün topolojik uzaylar, morfizmler bu topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve işlemimiz ise bilinen bileşke işlemi olsun. İki sürekli fonksiyonun bileşkesi sürekli olduğundan bu işlem tanımlıdır. Birim fonksiyon da süreklidir. Bu kategoriye topolojik uzayların kategorisi denir ve ***Top*** ile gösterilir.

Örnek 1.1.3. Objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri olan ve işlem ise grup homomorfizmlerin bileşkesi olarak alındığında elde edilen grupların kategorisi ***Grup*** ile gösterilir.

Örnek 1.1.4. Objeleri metrik uzaylar, morfizmleri metrik uzaylar arasındaki büzülme fonksiyonları (contraction) ve işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak alındığında elde edilen metrik uzayların kategorisi ***Met*** ile gösterilir. (İki metrik uzay arasındaki $f:(B,d)\to(C,e)$ fonksiyonu verilsin. Her $x,y\in B$ için $e(f(x),f(y))\leq d(x,y)$ ise f ye *büzülme fonksiyonu (contraction)* denir.)

Tanım 1.1.2. C ve D birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa D kategorisine C kategorisinin bir *alt kategorisi* denir.
(i) $Ob\ (D)$ sınıfı $Ob\ (C)$ sınıfının bir alt sınıfıdır.
(ii) $\forall A,B\in Ob(C)$ için $D(A,\ B)\subseteq C(A,\ B)$ dir.
(iii) D kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi, C kategorisindeki morfizmleri bileşkesi ile aynıdır.
(iv) $\forall A\in Ob(D)$ için D deki 1_A birim morfizmi, C deki birim morfizm ile aynıdır.

Tanım 1.1.3.
(i) Bir C kategorisindeki bir $f:A\to B$ morfizmi için $g\ o f\ =1_x$ ve $fog=1_Y$ olacak şekilde bir $g:\ B\to A$ morfizmi varsa f ye bir *izomorfizm* denir.
(ii) C bir kategori ve $f:B\to C$ ise C de bir morfizm olsun. Eğer $fog\ =\ foh$ olacak şekildeki $\forall g,h:A\to B$ morfizm çifti için $g=h$ *ise* f morfizmine bir *monomorfizm (mono)* denir.

$A\xrightarrow{g,h}B\xrightarrow{f}C$

(iii) C bir kategori ve $f:A\to B$ ise C de bir morfizm olsun. Eğer $gof=hof$ olacak şekildeki $\forall g,h:B\to C$ morfizm çifti için $g=h$ ise f morfizmine bir *epimorfizm (epi)* denir.

$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g,h}C$

Örnek 1.1.5. ***Set, Top, Grup*** ve ***Met*** kategorilerinde monomorfizmler birebir fonksiyonlardır.

Örnek 1.1.6. ***Set, Top, Grup*** ve ***Met*** kategorilerinde epimorfizmler örten fonksiyonlardır.

Örnek 1.1.7. ***Set*** kategorisinde izomorfizmler birebir ve örten fonksiyonlar, ***Top*** ve ***Met*** kategorilerinde izomorfizmler homemorfizmler, ***Grup*** kategorisindeki izomorfizmler ise birebir örten grup homomorfizmleridir.

Tanım 1.1.4. C bir kategori ve $f, g : A \to B$ ise C de iki morfizm olsun. Eğer bir $e : E \to A$ morfizmi için

(i) $foe = goe$ ve

(ii) $fox = gox$ olacak şekildeki her $x : X \to A$ morfizmi için bir tek $\varphi : X \to E$ morfizmi varsa (E, e) ikilisine f ve g morfizmlerinin bir *eşitleyicisi (equalizer)* denir.

Örnek 1.1.8. ***Set*** kategorisinde A ve B kümeleri ve $f, g : A \to B$ fonksiyonları için $E = \{a \in A \,|\, f(a) = g(a)\}$ olmak üzere f ve g nin eşitleyicisi $E \xrightarrow{i} A$ içine fonksiyonudur.

Top ve ***Met*** kategorilerinde de iki morfizmin eşitleyicisi içine fonksiyon ve alt uzaydır. ***Grup*** kategorisinde de iki morfizmin eşitleyicisi içine fonksiyon ve alt gruptur.

Bu tanımın duali olan dual eşitleyici (coequalizer) tanımı aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Tanım 1.1.5. C bir kategori ve $f, g : A \to B$ ise C de iki morfizm olsun. Eğer bir $c : B \to C$ morfizmi için

(i) $cof = cog$

(ii) $xof = xog$ olacak şekildeki her $x : B \to X$ morfizmi için bir tek $\varphi : C \to X$ morfizmi varsa (C, c) ikilisine f ve g morfizmlerinin bir *dual eşitleyicisi (coequalizer)* denir.

Örnek 1.1.9. ***Set*** kategorisinde A ve B kümeleri ve $f, g : A \to B$ fonksiyonları için B üzerindeki, $\forall a \in A$ için $f(a) \sim g(a)$ olacak şekildeki en küçük denklik bağıntısını alalım. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının dual eşitleyicisi B nin bu denklik bağıntısı ile bölüm kümesi $B/\sim$ ile $B \xrightarrow{p} B/\sim$ doğal (kanonik) fonksiyonudur. ***Top***, ***Grup*** ve ***Met*** kategorilerinde de iki morfizmin dual eşitleyicisi bölüm uzayı ile doğal fonksiyonudur.

Tanım 1.1.6. C bir kategori, I bir küme ve $\{A_i\}_{i\in I}$ ise C de objelerin bir sınıfı olsun. Bir $P\in Ob(C)$ objesi ve $\forall i\in I$ için $p_i : P\to A_i$ morfizmleri için bir $X\in Ob(C)$ objesi ve $\forall i\in I$ için $f_i : X\to A_i$ morfizmleri verildiğinde $p_i\ o\ \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X\to P$ varsa $(P,\ \{p_i\}_{i\in I})$ ikilisine $\{A_i\}_{i\in I}$ objelerinin *çarpımı (product)* denir.

Örneğin ***Set*** kategorisinde iki objenin çarpımı bilinen anlamda kartezyen çarpımdır. ***Grup*** kategorisinde iki objenin çarpımı direkt çarpımdır. ***Top*** ve ***Met*** kategorilerinde iki objenin çarpımı çarpım uzaylardır.

Tanım 1.1.7. C bir kategori, I bir küme ve $\{A_i\}_{i\in I}$ ise C de objelerin bir sınıfı olsun. Bir $Q\in Ob(C)$ objesi ve $\forall i\in I$ için $q_i : A_i\to Q$ morfizmleri için bir $X\in Ob(C)$ objesi ve her $\forall i\in I$ için $f_i : A_i\to X$ morfizmleri verildiğinde $\varphi o q_i = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : Q\to X$ varsa $(Q,\ \{q_i\}_{i\in I})$ ikilisine $\{A_i\}_{i\in I}$ objelerinin *dual çarpımı (coproduct)* denir.

Tanım 1.1.8. C bir kategori ve $A\in Ob(C)$ olsun. Eğer $\forall X\in Ob(C)$ objesi için bir tek $A\to X$ morfizmi varsa bu A objesine bir *başlangıç objesi* denir.

Örnek 1.1.10. ***Set, Top*** ve ***Met*** kategorilerinde boş küme, ***Grup*** kategorisinde tek elemanlı grup birer başlangıç objesidir.

Tanım 1.1.9. C bir kategori *ve* $A\in Ob(C)$ olsun. Eğer $\forall X\in Ob(C)$ objesi için bir tek $X\to A$ morfizmi varsa bu A objesine bir *bitiş objesi* denir.

Örnek 1.1.11. ***Set, Top, Grup*** **ve** ***Met*** kategorilerinde tek elemanlı küme birer bitiş objesidir.

Tanım 1.1.11. C bir kategori ve $A\in Ob(C)$ olsun. Eğer A objesi hem başlangıç hem de bitiş objesi ise bu A objesine bir *sıfır obje* denir.

Örnek 1.1.12. ***Grup*** kategorisinde tek elemanlı grup bir sıfır objedir.

1.2. Adjoint Fanktorlar

Tanım 1.2.1. C ve D birer kategori olmak üzere C nin her bir A objesini D nin bir $F(A)$ objesine, C nin her bir $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ morfizmini D nin bir $F(f):F(A)\to F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne *C den D ye bir fanktor* denir ve $F:C\to D$ ile gösterilir.

(i) C kategorisinde gof tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(go\,f)=F\big(g\big)oF(f)$ dır.

(ii) $\forall A\in Ob(C)$ için $F\left(1_{\mathrm{A}}\right)=1_{F(\mathrm{A})}$ dır.

Örnek 1.2.1. *U:**Top** → **Set*** dönüşümü üzerindeki bir topolojik uzayı, tanımlı olduğu kümeye götüren bir fanktordur. Bu şekildeki objeler üzerindeki yapıyı unutan fanktora *unutkan fanktor* denir. Bu durumda *U:**Grup** → **Set*** unutkan fanktordur.

Örnek 1.2.2. *D:**Set** →**Top*** dönüşümü her *A* kümesini *(A, P(A))* diskre topolojik uzayına götüren bir fanktordur. Bu fanktora *diskre fanktor* denir. *ID:**Set** →**Top*** dönüşümü, her *A* kümesini $\left(A,\{\varnothing,A\}\right)$ indiskre topolojik uzayına götüren bir fanktordur. Bu fanktora *indiskre fanktor* denir.

Örnek 1.2.3. Eğer *C* kategorisinin her *A, B* objesi ve her $f:A\to B$ morfizmi için $I_C(A)=A$ ve $I_C(f)=f:A=I_C(A)\to B=I_C(B)$ ise $I_C:C\to C$ ye *birim fanktor* denir.

Örnek 1.2.4. *C, D* nin alt kategorisi olsun. Eğer *C* nin her *A, B* objesi ve her $f:A\to B$ morfizmi için $T\big(A\big)=A$ ve $T\big(f\big)=f$ ise $T:C\to D$ ye *alt fanktor* denir.

Tanım 1.2.2. *C* ve *D* iki kategori ve $U:C\to D$ bir fanktor olsun.

(i) *C* nin her *A, B* objesi ve her $f:U(\mathrm{A})\to U\big(\mathrm{B}\big)$ morfizmi için $U(g)=f$ olacak şekilde *C* de en az bir $g:A\to B$ morfizmi varsa *U* ya *dolgun (full) fanktor* denir.

(ii) C nin her *A, B* objesi ve her $f,g:U(\mathrm{A})\to U\big(\mathrm{B}\big)$ morfizmleri için $U(g)=U(f)$ olduğunda $g=f$ oluyorsa *U* ya *düzenli (faithfull) fanktor* denir.

(iii) Eğer C deki her A objesi ve her $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ morfizmi için $U(f) = I_{U(\mathrm{A})}$ ve f izomorfizm olduğunda $f = I_{\mathrm{A}}$ oluyorsa U ya *amnestic fanktor* denir.

(iv) U hem düzenli hem de amnestik ise U ya *belirli (concrete) fanktor* denir.

(v) $GoU = I_C$ ve $UoG = I_D$ olacak şekilde $G : D \to C$ fanktoru varsa U ya bir *izomorfizm* denir. Eğer C ve D kategorileri arasında bir izomorfizm varsa C ve D ye *izomorfik kategoriler* denir ve $C \equiv D$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.5. U: ***Top*** $\to$ ***Set*** ve U: ***Grup*** $\to$ ***Set*** unutkan fanktorları düzenli, amnestic ve belirli fanktordur fakat U dolgun fanktor değildir.

Tanım 1.2.3. C ve D iki kategori ve $F, G : C \to D$ iki fanktor olsun. C nin her $\mathrm{A} \in Ob(C)$ objesini D nin bir $\eta_{\mathrm{A}} : F(A) \to G(A)$ morfizmine dönüştüren η: $Ob(C) \to Mor(D)$ dönüşümü verilsin. Eğer C nin her bir $f : A \to B$ morfizmi için $G(f) o \eta_A = \eta_B o F(f)$ ise η ye bir doğal dönüşüm denir ve $\eta : F \to G$ olarak gösterilir.

Tanım 1.2.4. $F, G : C \to D$ fanktorları verilsin. Bir $\eta : F \to G$ doğal dönüşümünde her bir $A \in Ob(C)$ için $\eta_A : F(A) \to G(A)$, D de bir izomorfizm ise η ya bir *doğal izomorfizm*, F ile G ye de *doğal olarak denktir* denir ve F ; G şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.1. F, G: $C \to D$ fanktorları verilsin. F ; G ancak ve ancak $\sigma o \mu = 1_F$ ve $\mu o \sigma = 1_G$ olacak şekilde $\mu : F \to G$ *ve* $\sigma : G \to F$ doğal dönüşümleri vardır.

Tanım 1.2.5. $F : C \to D$ fanktoru verilsin. Eğer GoF ; 1_c ve FoG ; 1_D olacak şekilde $G : D \to C$ fanktoru varsa bu kategorilere *doğal olarak denktir* denir ve C ; D olarak yazılır.

Tanım 1.2.6. C ve D iki kategori ve $F : C \to D, G : D \to C$ iki fanktor olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa F ye G nin *sol adjointi* veya G ye F nin *sağ adjonti* denir.

(i) $\eta : I \to GoF$ *ve* ξ:$FoG \to I$ doğal dönüşümler olmalıdır.

(ii) $(\xi G) o (G\eta) = I$ ve $(F\xi) o (\eta F) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Örnek 1.2.6. U*:* $\boldsymbol{Top} \rightarrow \boldsymbol{Set}$ unutkan fanktoru, D*:* $\boldsymbol{Set} \rightarrow \boldsymbol{Top}$ diskre fanktoru ve *ID:* $\boldsymbol{Set} \rightarrow \boldsymbol{Top}$ indiskre fanktoru olsun. U nun sağ adjointi *ID*, indiskre fanktoru ve sol adjointi *D*, diskre fanktorudur.

Tanım 1.2.7. *C, D* nin alt kategorisi olsun. Eğer $T: C \rightarrow D$ alt fanktorun sol adjointi varsa *C* alt kategorisine *D* de *reflektifdir*, denir. Eğer $T: C \rightarrow D$ alt fanktorun sağ adjointi varsa *C* alt kategorisine *D* de *corefléktifdir*, denir.

1.3. Topolojik Kategoriler

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [18], Kent [19], Wyler [20], Schwarz [21] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, 1974'te Herrlich [18] de belli bir kaynaktan başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriyi tanımlamıştır. Wyler [20] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır. Genel topolojideki ayrılma aksiyomları, Urysohn Metrikleştirme Teoremi, Urysohn Lemması, Tietze Genişleme Teoremi gibi çok önemli teoremlerde karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla, bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskrelik ve indiskrelik ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Tanım 1.3.1. E bir kategori ve $B,\ Bi \in Ob(E),\ i \in I$ olsun. $f_i: B \rightarrow B_i,\ i \in I$ dönüşümler ailesine *kaynak (source)* denir. $f_i: B_i \rightarrow B,\ i \in I$ dönüşümler ailesine *kavşak (sink)* denir.

Tanım 1.3.2. $f_i: \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}_i,\ i \in I$ dönüşümler ailesi E kategorisinde tanımlı bir kaynak olsun. $\forall A \in Ob(E)$ ve her $g, h: A \rightarrow B$ morfizm çifti için $f_i o g = f_i o h,\ i \in I$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa $f_i: B \rightarrow B_i,\ i \in I$ kaynağına *mono kaynak* denir.

Tanım 1.3.3. **E** ve **B** iki kategori ve U: $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ bir fanktor olsun. $\{A_i, i \in I\}$, **E** nin objeleri, $B \in Ob(\mathbf{B})$ ve $f_i : B \to U(A_i)$, $i \in I$ ailesi **B** de U-kaynağı olsun. $f_i : B \to U(A_i)$, $i \in I$ ailesinin bir başlangıç kaldırması (initial lift) $A \in Ob(\mathbf{E})$ nesnesi ve $U(g_i) = f_i$ ve $U(A) = B$ olacak şekildeki $g_i : A \to A_i$, $i \in I$, **E** de dönüşümler ailesi aşağıdaki şartı sağlamalıdır:
Eğer her $C \in Ob(\mathbf{E})$ ve **E** deki her $h_i : C \to A_i$, $i \in I$ dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $f_i o h = U(h_i)$ olacak şekilde bir $h : U(C) \to B$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $g_i o k = h_i$ olacak şekilde en az bir $h : C \to A$ dönüşümü vardır ve $U(k) = h$ dir.

Tanım 1.3.4. **E** ve **B** iki kategori ve U: $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ bir fanktor olsun. $\{A_i, i \in I\}$, **E** nin objeleri, $B \in Ob(\mathbf{B})$ ve $f_i : U(A_i) \to B$, $i \in I$ ailesi **B** de, U-kavşağı olsun. $f_i : U(A_i) \to B$, $i \in I$ ailesinin bir bitiş kaldırması (final lift) $A \in Ob(\mathbf{E})$ nesnesi ve $U(g_i) = f_i$ ve $U(A) = B$ olacak şekildeki $g_i : A_i \to A$, $i \in I$, **E** de dönüşümler ailesi aşağıdaki şartı sağlamalıdır:
Eğer her $C \in Ob(\mathbf{E})$ ve **E** deki her $h_i : A_i \to C$, $i \in I$ dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $h o f_i = U(h_i)$ olacak şekilde bir $h : B \to U(C)$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $k o g_i = h_i$ olacak şekilde en az bir $h : A \to C$ dönüşümü vardır ve $U(k) = h$ dir.

Örnek 1.3.1. ***Top*** kategorisinde başlangıç kaldırma başlangıç topolojiyi ve bitiş kaldırma ise bitiş topolojiyi verir.

Tanım 1.3.5. **E** ve **B** iki kategori ve U: $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ bir fanktor olsun. Eğer U fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa U ya topolojik fanktor veya **E** ye de **B** kategorisi üzerinde *topolojik kategori* denir.
(i) U belirli (concrete) olmalıdır,
(ii) U küçük demetlere sahip olmalıdır, yani, **B** kategorisinin her B objesi için $U^{-1}(B) = \{A \in Ob(\mathbf{E}) : U(A) = B\}$ bir cümle olmalıdır,
(iii) $\{A_i, i \in I\}$, **E** nin objeleri, $B \in Ob(\mathbf{B})$ için **B** deki her $f_i : B \to U(A_i)$, $i \in I$, U-kaynağının **E** de bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahip olmalıdır veya buna denk

olarak **B** deki $f_i : U(A_i) \to B,\ i \in I$ U-kaynağının **E** de bir bitiş kaldırmaya sahip olmalıdır.

Örnek 1.3.2. *U:* **Top** $\to$ **Set** unutkan fanktoru topolojik fanktordur.

Örnek 1.3.3. *U:* ***Met*** $\to$ ***Set*** ve *U:* ***Grup*** $\to$ ***Set*** unutkan fanktorları topolojik fanktor değildirler çünkü ***Met*** de keyfi sayıdaki (sonsuz) metrik uzayların çarpımı metrik uzay değildir ve ***Grup*** de bir grubun alt kümesi alt grup değildir.

Tanım 1.3.6. **E** kategorisi **B** kategorisi üzerinde topolojik kategori ve $A \in Ob(\mathbf{E})$ olsun.

(i) Eğer her $X \in Ob(\mathbf{E})$ için **B** deki her $U(X) \to U(A)$ morfizmi **E** de $X \to A$ morfizmine kaldırılıyorsa *A* ya, *indiskre obje* denir.

(ii) Eğer her $X \in Ob(\mathbf{E})$ için **B** deki her $U(A) \to U(X)$ morfizmi **E** de $A \to X$ morfizmine kaldırılıyorsa *A* ya, *diskre obje* denir.

Teorem 1.3.1. **E** kategorisi **B** üzerinde topolojik kategori olsun. *U:* **E** $\to$ **B** fanktorun hem sağ adjointi indiskre fanktoru hem de sol adjointi diskre fanktoru vardır.

Örnek 1.3.4. *U:* ***Top*** $\to$ ***Set*** unutkan fanktoru *D:* ***Set*** $\to$ ***Top*** diskre fanktoru ve *ID:* ***Set*** $\to$ ***Top*** indiskre fanktoru olsun. *U* nun sağ adjointi *ID*, indiskre fanktoru ve sol adjointi *D*, diskre fanktorudur.

Örnek 1.3.5. ***Top*** kategorisinde indiskre obje, indiskre uzayı ve diskre obje ise diskre uzayıdır.

Teorem 1.3.2. **B** kategorisi keyfi çarpımlara ve *U:* ***E*** $\to$ ***B*** fanktoru belirli ve küçük demetlere sahip olsun. **E** kategorisi **B** üzerinde topolojik kategoridir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) **E** kategorisi keyfi çarpımlara ve alt uzaylara sahiptir,

(2) **E** kategorisi indiskre objelere sahiptir. [27], [28].

1.4. Düzgün Uzaylar

Tanım 1.4.1. B boştan farklı bir cümle, $\alpha \neq \varnothing$ ve $\alpha \subset P(B)$ olsun. Eğer α aşağıdaki şartları sağlıyorsa α ya B üzerinde bir *öz süzgeç* denir.

(i) $\varnothing \notin \alpha$ dır,

(ii) $\forall U, V \in \alpha$ için $U \cap V \in \alpha$ dır,

(iii) $U \in \alpha$ ve $U \subset V$ ise $V \in \alpha$ dır.

B üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi $F(B)$ ile gösterilir. $M \subset B$ olmak üzere $[M] = \{A \subset B : M \subset A\}$ şeklinde tanımlanır. Özel olarak, $[x] = [\{x\}]$ olur ve eğer $\varnothing \in \alpha$ (yani $\alpha = P(B)$) ise α ya B üzerinde bir *öz olmayan süzgeç* denir.

Örnek 1.4.1. B boştan farklı bir cümle, $\varnothing \neq M \subset B$ olsun. $[M] = \{A \subset B : M \subset A\}$ ailesi, B üzerinde bir öz süzgeçtir.

Örnek 1.4.2. B sonsuz bir cümle ve $\alpha = \{A^c \subset B : A \subset B \, sonlu\}$ ailesi B üzerinde bir süzgeçtir. Buna sonlu tümleyenler süzgeci denir. Eğer $B = N$ doğal sayılar kümesi alınırsa α süzgecine Frechet süzgeci denir.

Örnek 1.4.3. *B bir* cümle ve $\alpha = \{A \subset B : \ A^c \ sonlu\}$ ailesi *B* üzerinde bir süzgeçtir. Buna tümleyeni sonlu süzgeç denir.

Tanım 1.4.2. B boştan farklı bir cümle ve α ve β, *B* üzerinde iki süzgeç ve $f : B \to C$ bir fonksiyon olsun.

(i) $\alpha \cap \beta = \{U \subset B : U \in \alpha, U \in \beta\}$.

(ii) $\alpha \cup \beta = \{U \subset B : \exists V \in \alpha, \ \exists W \in \beta \text{ öyleki } U \supset V \cap W\}$

(iii) $f(\alpha) = \{V \subset C : \exists U \in \alpha \text{ öyleki } f(U) \subset V\}$

(iv) $\alpha \times \beta = \{W \subset B \times B : \exists U \in \alpha, \ \exists V \in \beta \text{ öyleki } W \supset U \times V\}$

$= [\{U \times V : U \in \alpha, V \in \beta\}]$ dir.

Teorem 1.4.1. σ ve δ **,** $B\ x\ B$ üzerinde iki öz süzgeç ve $f: B \to C$ bir fonksiyon olsun.

(1) $\sigma \subset \delta \Rightarrow (f \times f)(\sigma) \subset (f \times f)(\delta)$.

(2) $(fxf)(\sigma \cap \delta) = (fxf)(\sigma) \cap (fxf)(\delta)$.

(3) $(fxf)(\sigma) \cup (fxf)(\delta) \subset (fxf)(\sigma \cup \delta)$.

(4) Eğer $\alpha, C \times C$ üzerinde bir öz süzgeç ise $\alpha \subset (ff^{-1} \times ff^{-1})(\alpha)$, burada $(ff^{-1} \times ff^{-1})(\alpha)$ süzgeci $\{(ff^{-1} \times ff^{-1})(D) : D \in \alpha\}$ ailesi tarafından üretilen süzgeçtir.

İspat: σ ve δ **,** $B\ x\ B$ üzerinde iki öz süzgeç ve $f: B \to C$ bir fonksiyon olsun.

(1) $\sigma \subset \delta$ ve $U \in (f \times f)(\sigma)$ olsun. Bu takdirde en az bir $V \in \sigma$ öyleki $(fxf)(V) \subset U$ dir. $V \in \sigma$ ve $\sigma \subset \delta$ olduğundan $(f \times f)(V) \in (f \times f)(\delta)$ ve $U \in (f \times f)(\delta)$ olur. O halde $(f \times f)(\sigma) \subset (f \times f)(\delta)$ dır.

(2) $\sigma \cap \delta \subset \sigma$ ve $\sigma \cap \delta \subset \delta$ olduğundan $(fxf)(\sigma \cap \delta) \subset (fxf)(\sigma)$ ve $(fxf)(\sigma \cap \delta) \subset (fxf)(\delta)$ olur. Dolayısıyla $(fxf)(\sigma \cap \delta) \subset (fxf)(\sigma) \cap (fxf)(\delta)$ dır. Diğer taraftan, $U \in (fxf)(\sigma) \cap (fxf)(\delta)$ ise en az bir $V \in \sigma$ ve en az bir $W \in \delta$ vardır öyleki $(fxf)(V) \subset U$, $(fxf)(W) \subset U$ dır. $V \cup W \in \sigma \cap \delta$ ve $(fxf)(V \cup W) \in (fxf)(\sigma \cap \delta)$ olduğundan $U \in (fxf)(\sigma \cap \delta)$. *Sonuç olarak* $(fxf)(\sigma \cap \delta) \supset (fxf)(\sigma) \cap (fxf)(\delta)$ ve $(fxf)(\sigma \cap \delta) = (fxf)(\sigma) \cap (fxf)(\delta)$ dır.

(3) $\sigma \cup \delta \supset \sigma$ ve $\sigma \cup \delta \supset \delta$ olduğundan $(fxf)(\sigma \cup \delta) \supset (fxf)(\sigma)$ ve $(fxf)(\sigma \cup \delta) \supset (fxf)(\delta)$ olur. Dolayısıyla $(fxf)(\sigma \cup \delta) \supset (fxf)(\sigma) \cup (fxf)(\delta)$ dır.

(4) α, $C \times C$ üzerinde öz süzgeç ve $D \in \alpha$ olsun. $(ff^{-1} \times ff^{-1})(D) \in (ff^{-1} \times ff^{-1})(\alpha)$ $(ff^{-1})(D) \subset D$ ve α süzgeç olduğundan $D \in (ff^{-1} \times ff^{-1})(\alpha)$ ve $\alpha \subset (ff^{-1} \times ff^{-1})(\alpha)$ olur.

Tanım 1.4.3. $B \neq \emptyset$ bir cümle ve $U, V \subset B \times B$ iki bağıntı olsun.

(i) $U \circ V = \{(x,z) : \exists y \in B \text{ için } (x,y) \in V, (y,z) \in U\}$,

(ii) $U^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in U\}$,

(iii) $\Delta = \{(x,x) : x \in B\}$.

Tanım 1.4.4. B boştan farklı bir cümle ve $\Psi \subset P(B\times B)$ bir süzgeç olsun. Eğer Ψ aşağıdaki şartları sağlarsa Ψ ye B üzerinde düzgün yapı, (B,Ψ) ye de düzgün uzay denir [22], [23].

(i) Eğer $U \in \Psi \Rightarrow \Delta \subset U$

(ii) Eğer $U \in \Psi \Rightarrow U^{-1} \in \Psi$

(iii) Her $U \in \Psi$ için en az bir $V \in \Psi$ vardır öyleki $VoV \subset U$ dır.

Örnek 1.4.4. B boştan farklı bir cümle ve $\Psi = \{U \subset B\times B : \Delta \subset U\} \subset P(B\times B)$ ailesi B üzerinde bir düzgün yapıdır ve (B,Ψ) ye de diskre düzgün uzay denir.

Örnek 1.4.5. B boştan farklı bir cümle ve $\Psi = \{B\times B\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün yapıdır ve (B,Ψ) ye de indiskre düzgün uzay denir.

Örnek 1.4.6. $B = \{x,\ y\}$ olsun.

(a) $\Psi = \{\Delta,\ \{(x,y),\ (x,x),\ (y,y),\ (y,x),\ (x,x),\ (y,y)\}, B^2\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün yapıdır.

(b) $\Psi = \{\Delta,\ \{(x,y),\ (x,x),\ (y,y)\},\ B^2\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün yapı değildir.

Tanım 1.4.5. B boştan farklı bir cümle ve $\varnothing \neq \beta \subset P(B\times B)$ olsun. Eğer β aşağıdaki şartları sağlarsa β ye B üzerinde bir *düzgün baz* denir.

(i) Eğer $U \in \beta$ ise $\Delta \subset U$ dır,

(ii) Eğer $U \in \beta$ ise $\exists V \in \beta$ öyleki $V \subset U^{-1}$ dır,

(iii) Eğer $U \in \beta$ ise $\exists V \in \beta$ öyleki $VoV \subset U$ dır,

(iv) Eğer $U,V \in \beta$ ise $\exists W \in \beta$ öyleki $W \subset U \cap V$ dır.

Teorem 1.4.2. B boştan farklı bir cümle ve $\varnothing \neq \beta \subset P(B\times B)$, B üzerinde bir düzgün baz olsun. $\Psi = \{U \subset B\times B : \exists V \in \beta \text{ öyleki } V \subset U\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün yapıdır.

Örnek 1.4.7. $(B,\ d)$ bir metrik uzay ve $S_\varepsilon = \{(x,\ y) \in B \times B : d(x,\ y) < \varepsilon\}$ olsun. $\beta_d = \{S_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün bazdır.

Teorem 1.4.3. Her metrik uzay düzgün uzaydır.

İspat: $(B,\ d)$ bir metrik uzay ve $S_\varepsilon = \{(x,\ y) \in B \times B : d(x,\ y) < \varepsilon\}$ olsun. $\beta_d = \{S_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ ailesi B üzerinde bir düzgün bazdır. $\Psi_d = \{U \subset B \times B : \exists V \in \beta_d$ öyleki $V \subset U\}$ ailesi B üzerindeki d metriği tarafından elde edilen bir düzgün yapıdır. (B, Ψ_d) düzgün uzaydır.

Teorem 1.4.4. Her düzgün uzay topolojik uzaydır.

İspat: (B, Ψ) bir düzgün uzay, her $x \in B$ ve her $U \in \Psi$ için $U(x) = \{y \in B : (x, y) \in U\}$ olsun. $\eta_x = \{U(x) : U \in \Psi\}$ ailesi B üzerinde x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur ve bu komşuluk ailesinden B üzerinde bir topoloji elde edilir [[23], 31s. 240].

Örnek 1.4.8. $(B,\ d)$ metrik uzayından elde edilen düzgün uzay (B, Ψ_d) olsun. (B, Ψ_d) düzgün uzaydan elde edilen topoloji ile $(B,\ d)$ metrik uzayından elde edilen topolojik uzay aynıdır.
$\forall x \in B$ için $S_\varepsilon(x) = \{y \in B : (x, y) \in S_\varepsilon\} = \{y \in B : d(x,\ y) < \varepsilon\} = S(x, \varepsilon)$, x-merkezli ε yarıçaplı açık disktir.

Örnek 1.4.9. Diskre düzgün uzaydan elde edilen topoloji diskre topolojidir ve indiskre düzgün uzaydan elde edilen topoloji indiskre topolojidir.

Örnek 1.4.10. **R**, reel sayılar cümlesi ve $a \in \mathbf{R}$ olsun. $U_a = \Delta \cup \{(x,\ y) : x > a, y > a\}$ ve $\beta_a = \{U_a : a \in \mathbf{R}\}$ ailesi **R** üzerinde bir düzgün bazdır. Bu düzgün yapıdan elde edilen topoloji diskre topolojidir. $\forall x \in \mathbf{R}$ ve $a \geq x$ için $U_a = \Delta \cup \{(a,\ a)\} = \Delta$ dir. Bu ve yukarıdaki örnekten görülüyor ki farklı düzgün yapılar aynı topolojiyi verebilir ve B üzerinde düzgün yapılar topolojilerden daha fazladır.

Tanım 1.4.6. (A,Θ) ve (B,Φ) iki düzgün uzay olsun. Eğer aşağıdaki birbirine denk olan şartlardan biri sağlanırsa $f:A\rightarrow B$ fonksiyonu düzgün süreklidir.

(i) Her $U\in\Psi$ için en az bir $V\in\Theta$ vardır öyleki $(f\times f)(V)\subset U$,

(ii) Her $U\in\Psi$ için $(f\times f)^{-1}(U)\in\Theta$.

Örnek 1.4.11. Diskre düzgün uzaydan herhangi bir düzgün uzaya giden her fonksiyon düzgün süreklidir.

Örnek 1.4.12. Düzgün sürekli fonksiyonların bileşkesi düzgün süreklidir.

Örnek 1.4.13. (A,d) ve (B,e) iki metrik uzay ve $f:A\rightarrow B$ olsun. Sırasıyla Ψ_d ve Θ_e, d ve e metriklerinin ürettiği düzgün yapılar olsun. $f:(A,\Psi_d)\rightarrow(B,\Theta_e)$ düzgün süreklidir ancak ve ancak $f:(A,\ d)\rightarrow(B,e)$ düzgün süreklidir.

Tanım 1.4.7. Objeleri düzgün uzaylar, morfizmleri düzgün sürekli fonksiyonlar ve bileşkede iki düzgün sürekli fonksiyonun bileşkesi olan sınıf bir kategoridir. Buna tüm düzgün uzayların kategorisi denir ve ***Unif*** ile gösterilir.

Teorem 1.4.5. $U:$***Unif***$\rightarrow$***Set*** unutkan fanktoru topolojik fanktordur [24], [25].

2. BÖLÜM

YARIDÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

2.1. Yarıdüzgün Yakınsak Uzaylar

1937 de Weil [4], düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi düzgün kavramların mevcut olduğu metrik uzaylardan daha büyük bir sınıf olan düzgün uzayları tanımladı ve Hausdorff un her metrik uzayın tamlanışını her düzgün uzayın tamlanışına genişletti. 1978 de Husek [5] düzgün uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi ***Unif*** *in* kartezyen kapalı olmadığını gösterdi. 1965'te Cook ve Fischer [11] düzgün uzayların bir genelleştirilmesi olarak kartezyen kapalı bir kategori oluşturan düzgün yakınsak uzayları (düzgün limit uzayları) geliştirdi. Düzgün limit uzayları (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi ***ULim*** de bölüm dönüşümleri kalıtsal degildir. 1992 de Behling [12] yarı düzgün yakınsak uzayları ortaya çıkardı ve yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUConv*** un kuvvetli topolojik universe olduğunu, yani kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olduğu ve bölüm dönüşümlerinin (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğu bir topolojik kategori teşkil ettiğini gösterdi. ***SUConv*** tüm (simetrik) limit uzayları, düzgün yakınsak uzayları ve tüm (simetrik) topolojik uzayları ve tüm düzgün uzayları ihtiva eder. Topolojik ve düzgün kavramlar ***SUConv*** da mevcut olduğundan süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, tamlık, tam sınırlılık, kompaktlık, baglantılılık ve fonksiyon uzaylarındaki basit yakınsaklık, sürekli yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık yapıları için de uygun bir kategoridir. Preuss [24], ***Top*** un ***SUConv*** içine gömülmesini yapmıştır.

Bu kısımda yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi ***SUConv*** incelenmiştir ve bu kategori ile ***Top*** ve ***Unif*** kategorileri arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

Tanım 2.1.1. B boştan farklı bir cümle ve $B \times B$ üzerinde süzgeçlerin cümlesi $F(B \times B)$ olsun. Eğer $\mathscr{J} \subset F(B \times B)$ aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathscr{J}$ ye, B üzerinde bir yarı düzgün yakınsak yapı ve $(B, \mathscr{J})$ ikilisine de yarıdüzgün yakınsak uzay denir.

(i) Her $\alpha \in B$ için $[\alpha] \times [\alpha] \in \mathscr{J}$,

(ii) Eğer $\alpha \in \mathscr{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ ise $\beta \in \mathscr{J}$.

(iii) Eğer $\alpha \in \mathscr{J}$ ise $\alpha^{-1} \in \mathscr{J}$ dir. Burada $\alpha^{-1} = \{U^{-1} : U \in \alpha\}$ ve $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$.

Eğer $(B, \mathscr{J})$ bir yarıdüzgün yakınsak uzay ise $\mathscr{J}$ nin elemanlarına *düzgün süzgeçler* denir.

Örnek 2.1.1. B boştan farklı bir cümle ve $\mathscr{J} = \{[\phi], [\alpha] \times [\alpha] : \alpha \in B\} \subset F(B \times B)$ ailesi B üzerinde bir yarıdüzgün yapıdır.

Örnek 2.1.2. B boştan farklı bir cümle ve $\mathscr{J} = F(B \times B)$ ailesi B üzerinde bir yarıdüzgün yapıdır.

Örnek 2.1.3. $B = \{a\}$ olsun. B üzerindeki tek yarıdüzgün yapı $\mathscr{J} = \{[\varnothing], [a] \times [a]\}$ dır.

Örnek 2.1.4. $B = \{a, b\}$ olsun.

$\mathscr{J}_1 = \{[\varnothing], [a] \times [a], [b] \times [b]\}$,

$\mathscr{J}_2 = \{[\varnothing], [a] \times [a], [b] \times [b], [a] \times [b], [b] \times [a]\}$,

$\mathscr{J}_3 = \{[\varnothing], [a] \times [a], [b] \times [b], [a] \times [B], [B] \times [a]\}$,

$\mathscr{J}_4 = \{[\varnothing], [a] \times [a], [b] \times [b], [a] \times [B]\}$,

$\mathscr{J}_5 = \{[\varnothing], [a] \times [a], [b] \times [b], [a] x [b]\}$

aileleri verilsin. $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$ ve $\mathscr{J}_3$ aileleri B üzerinde bir yarıdüzgün yapıdırlar fakat $\mathscr{J}_4$ ve $\mathscr{J}_5$ aileleri B üzerinde yarıdüzgün yapı değildirler.

Örnek 2.1.5. B boştan farklı bir cümle *ve* $\delta = \{U \subset B \times B : \Delta \subset U\}$ olsun. $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(B \times B) : \delta \subset \alpha\}$ ailesi B üzerinde bir yarıdüzgün yapı olduğunu gösterelim.

$a \in B$ ve $U \in \delta$ olsun. $\Delta \subset U$ olduğundan $(a,a) \in U$ dır. O halde $U \in [a] \times [a]$ ve $[a] \times [a] \in \mathcal{J}$ olur.

$\alpha \in \mathcal{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in \mathcal{J}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ ve sonuç olarak $\beta \in \mathcal{J}$ dır.

$\alpha \in \mathcal{J}$ olsun. $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathcal{J}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ dır. $\delta^{-1} = \delta \subset \alpha^{-1}$ olduğundan $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ olur. Tanım 2.1.1. den $\mathcal{J}$, B üzerinde bir yarıdüzgün yapıdır.

Örnek 2.1.6. **R** reel sayılar cümlesi ve her $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon = \{(x, y) : |x - y| < \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta = \{U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \exists \varepsilon > 0 \text{ için } V_\varepsilon \subset U\}$ olsun. $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) : \delta \subset \alpha\}$ ailesi **R** üzerinde bir yarı düzgün yapı olduğunu gösterelim.

$a \in \mathbf{R}$ ve $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ olur. $|a - a| = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(a,a) \in V_\varepsilon \subset U$ dır. O halde $U \in [a] \times [a]$ ve $[a] \times [a] \in \mathcal{J}$ olur.

$\alpha \in \mathcal{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in \mathcal{J}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ ve sonuç olarak $\beta \in \mathcal{J}$ dır.

$\alpha \in \mathcal{J}$ olsun. $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ olduğunu gösterelim. $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ dır. $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1}$ çünkü $|x - y| = |y - x|$ dır. Sonuç olarak $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1} \subset U^{-1}$ ve $\delta \subset \alpha$ olduğundan $U^{-1} \in \alpha$ dır. O halde tanımdan $U \in \alpha^{-1}$ *ve* $\delta \subset \alpha^{-1}$ olur. Yani $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ dır. Tanım 2.1.1 den $\mathcal{J}$,**R** üzerinde bir yarı düzgün yapıdır.

Örnek 2.1.7. **R** reel sayılar cümlesi ve her $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon = \Delta \cup \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}$ ve $|x-y| < \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta = \{U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \exists \varepsilon > 0 \text{ için } V_\varepsilon \subset U\}$ olsun. $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) : \delta \subset \alpha\}$ ailesi **R** üzerinde bir yarı düzgün yapı olduğunu gösterelim.

$a \in \mathbf{R}$ ve $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ dır. $\Delta \subset V_\varepsilon \subset U$ olduğundan $(a, a) \in U$ dır. O halde $U \in [a] \times [a]$ ve $[a] \times [a] \in \mathcal{J}$ olur.

$\alpha \in \mathcal{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in \mathcal{J}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ ve sonuç olarak $\beta \in \mathcal{J}$ dır. $\alpha \in \mathcal{J}$ olsun. $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ olduğunu gösterelim. $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ dır. $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1}$ çünkü $|x - y| = |y - x|$ ve $\Delta^{-1} = \Delta$ dir. Sonuç olarak

$V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1} \subset U^{-1}$ ve $\delta \subset \alpha$ olduğundan $U^{-1} \in \alpha$ dır. O halde tanımdan $U \in \alpha^{-1}$ ve $\delta \subset \alpha^{-1}$ olur. Yani $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ dır. Tanım 2.1.1 den $\mathcal{J}$, **R** üzerinde bir yarı düzgün yapıdır.

Örnek 2.1.8. *B* boştan farklı bir cümle olmak üzere ve $(B,\ d)$ bir metrik uzay olsun. $V_\varepsilon = \{(x,\ y) : d(x, y) < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ ve $\delta = \{U \subset B \times B\ : \exists \varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U\}$ olsun. $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) : \delta \subset \alpha\}$ ailesi *B* üzerinde bir yarıdüzgün yapıdır.

$a \in B$ ve $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ dır. $d(a,\ a) = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(a,\ a) \in V_\varepsilon \subset U$ dır. O halde $U \in [a] \times [a]$ ve $[a] \times [a] \in \mathcal{J}$ olur.

$\alpha \in \mathcal{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in \mathcal{J}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ ve $\beta \in \Im$ dır.

$\alpha \in \mathcal{J}$ olsun. $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ olduğunu gösterelim. $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon \subset U$ dır. $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1}$ çünkü d bir metriktir. Sonuç olarak, $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1} \subset U^{-1}$ ve $\delta \subset \alpha$ olduğundan $U^{-1} \in \alpha$ dır. O halde tanımdan $U \in \alpha^{-1}$ ve $\delta \subset \alpha^{-1}$ olur. Yani $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}$ dır. Tanım 2.1.1 den $\mathcal{J}$, *B* üzerinde bir yarı düzgün yapıdır.

Teorem 2.1.1. Her düzgün uzay yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

İspat: (B, Ψ) bir düzgün uzay olsun. $\Im_\Psi = [\Psi] = \{\alpha \in F(B \times B) : \Psi \subset \alpha\}$ ailesi *B* üzerinde bir yarıdüzgün yapı olduğunu gösterelim. $a \in B$ ve $U \in \Psi$ olsun. $\Delta \subset U$ olduğundan $(a,\ a) \in U$ dır. O halde $U \in [a] \times [a]$ ve $[a] \times [a] \in \mathcal{J}_\Psi$ olur.

$a \in \mathcal{J}_\Psi$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $a \in \mathcal{J}_\Psi$ olduğundan $\Psi \subset \alpha$ ve sonuç olarak $\beta \in \mathcal{J}_\Psi$ dır.

$a \in \mathcal{J}_\Psi$ olsun. $\alpha^{-1} \in \mathcal{J}_\Psi$ olduğunu gösterelim. $a \in \mathcal{J}_\Psi$ olduğundan $\Psi \subset \alpha$ dır. Eğer $U \in \Psi$ ise $U^{-1} \in \Psi$ ve dolayısıyla $U^{-1} \in \alpha$ dır. O halde, $U \in \alpha^{-1}$ ve $\Psi \subset \alpha^{-1}$ olur.

Buradan, $\alpha^{-1} \in \Im_\Psi$ ve Tanım 2.1.1 den $(B, \Im_\Psi)$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. [24].

Tanım 2.1.2. $(A, \mathcal{J}_1)$ ve $(B, \mathcal{J}_2)$ iki yarıdüzgün yakınsak uzay olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathcal{J}_1$ için $(f \times f)(a) \in \mathcal{J}_2$ oluyorsa $f : (A, \mathcal{J}_1) \to (B, \mathcal{J}_2)$ fonksiyonuna düzgün sürekli fonksiyon denir [24].

Tanım 2.1.3. Objeleri yarıdüzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri düzgün sürekli fonksiyonlar ve bileşkede iki düzgün sürekli fonksiyonun bileşkesi olan sınıf bir kategoridir. Buna tüm yarıdüzgün yakınsak uzayların kategorisi denir ve ***SUConv*** ile gösterilir [23], [24].

Teorem 2.1.2. (A,Ψ) ve (B,Θ) iki düzgün uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) $f:(A,\Psi)\to(B,\Theta)$ fonksiyonu ***Unif*** de düzgün süreklidir,

(2) $f:(A,\mathcal{J}_\Psi)\to(B,\mathcal{J}_\Theta)$ fonksiyonu ***SUConv*** de düzgün süreklidir.

İspat: $(1)\Rightarrow(2)$ olduğunu gösterelim. $f:(A,\Psi)\to(B,\Theta)$ fonksiyonu ***Unif*** de düzgün sürekli, $\alpha\in\mathcal{J}_\Psi$ ve $U\in\Theta$ olsun. $f:(A,\Psi)\to(B,\Theta)$ fonksiyonu ***Unif*** de düzgün sürekli olduğundan en az bir $V\in\psi$ öyleki $(f\times f)(V)\subset U$ dır. $\alpha\in\mathcal{J}_\Psi$ olduğundan $\Psi\subset\alpha$ ve $V\in\alpha$ dır. Buradan $(f\times f)(V)\in(f\times f)(\alpha)$ ve $U\in(f\times f)(\alpha)$ elde edilir. O halde, $\Theta\subset(f\times f)(\alpha)$ ve $(f\times f)(\alpha)\in\mathcal{J}_\Theta$ olur. Sonuç olarak $f:(A,\mathcal{J}_\Psi)\to(B,\mathcal{J}_\Theta)$ fonksiyonu ***SUConv*** de düzgün süreklidir.

$(2)\Rightarrow(1)$ olduğunu gösterelim. $f:(A,\mathcal{J}_\Psi)\to(B,\mathcal{J}_\Theta)$ fonksiyonu ***SUConv*** de düzgün sürekli ve $U\in\Theta$ olsun. Özel olarak, $\Psi\in\mathcal{J}_\Psi$ ve $f:(A,\mathcal{J}_\Psi)\to(B,\mathcal{J}_\Theta)$ fonksiyonu ***SUConv*** de düzgün sürekli olduğundan $(f\times f)(\Psi)\in\mathcal{J}_\Theta$ ve $(f\times f)(\Psi)\supset\Theta$ dır. Böylece, $U\in(f\times f)(\Psi)$ ve en az bir $V\in\Psi$ öyleki $(f\times f)(V)\subset U$ olur. O halde $f:(A,\Psi)\to(B,\Theta)$ fonksiyonu ***Unif*** de düzgün süreklidir [24].

2.2. SUConv Topolojik Kategori

Teorem 2.2.1. *U: **SUConv**$\to$**Set***, her $(A,\mathcal{J}_1)\in Ob(\textbf{\textit{SUConv}})$ için $U((A,\mathcal{J}_1))=A$ ve her $f:(A,\mathcal{J}_1)\to(B,\mathcal{J}_2)$ düzgün sürekli fonksiyonunu $f:A\to B$ fonksiyona götüren, unutkan fanktoru topolojik fanktordur.

İspat: **(1)** U:***SUConv***$\rightarrow$***Set*** nun belirli fanktor olduğunu gösterelim. $f, g:(A,\Psi)\rightarrow(B,\Theta)$ düzgün sürekli fonksiyonlar ve $U(f)=U(g)$ olsun. $f=U(f)=U(g)=g$ olduğundan $f=g$ ve U düzenlidir. $f:(B,\Psi)\rightarrow(B,\Theta)$ izomorfizm ve $U(f)=1_B$, birim fonksiyon olsun. $\alpha\in\mathcal{J}_1$ olsun. f düzgün sürekli fonksiyon olduğundan $(f\times f)(\alpha)=(1_B\times 1_B)(\alpha)=\alpha\in\mathcal{J}_2$ ve dolayısıyla $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}_2$ olur. $\alpha\in\mathcal{J}_2$ olsun. f^{-1} düzgün sürekli fonksiyon olduğundan ve $(f^{-1}\times f^{-1})(\alpha)=(1_B\times 1_B)(\alpha)=\alpha\in\mathcal{J}_1$ ve dolayısıyla $\mathcal{J}_2\subset\mathcal{J}_1$ olur. O halde, $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_2$ dir ve U amnestiktir.

(2) U nun küçük demetlere sahip, yani, her B cüesi için $U^{-1}(B)$ in bir cümle olduğunu gösterelim. $U^{-1}(B)=\{(B,\mathcal{J}):U((B,\mathcal{J}))=B\}$ ve $\Gamma=\{\mathcal{J}:\mathcal{J}$, B üzerinde bir yarıdüzgün yapı$\}\subset P(P(B\times B))$ olsun. $f:U^{-1}(B)\rightarrow\Gamma$, $f((B,\mathcal{J}))=\mathcal{J}$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Dolayısıyla, $U^{-1}(B)$ in bir cümledir.

(3) ***SUConv*** kategorisinin keyfi çarpımlara sahip olduğunu gösterelim. $\{(B_i,\mathcal{J}_i),\ i\in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzaylar verilsin. $B=\prod_{i\in I}B_i$ ve $\mathcal{J}=\{\alpha\in F(B\times B):\forall i\in I,\ (\pi_i\times\pi_i)(\alpha)\in\mathcal{J}_i\}$ olsun. $(B,\mathcal{J})$ çarpım yarıdüzgün yakınsak uzay olduğunu gösterelim. Her $a\in B$ için $\pi_i(a)=a_i\in B_i$ ve $(\pi_i)([\alpha]\times[\alpha])=(\pi_i)([\alpha])\times(\pi_i)([\alpha])=[\alpha_i]\times[\alpha_i]\in\mathcal{J}_i$ olduğundan $([\alpha]\times[\alpha])\in\mathcal{J}$ dır. $\alpha\in\mathcal{J}$ ve $\alpha\subset\beta$ olsun. $\alpha\in\mathcal{J}$ olduğundan $\forall i\in I,(\pi_i\times\pi_i)(\alpha)\in\mathcal{J}_i$ ve sonuç olarak $\forall i\in I,(\pi_i\times\pi_i)(\beta)\in\mathcal{J}_i$ dır. O halde $\beta\in\mathcal{J}$ dır.

$\alpha\in\mathcal{J}$ olsun. $\alpha^{-1}\in\mathcal{J}$ olduğunu gösterelim. $\alpha\in\mathcal{J}$ olduğundan $\forall i\in I,\beta_i=(\pi_i\times\pi_i)(\alpha)\in\mathcal{J}_i$ dir. $\beta_i^{-1}\in\mathcal{J}_i$ çünkü $(B,\mathcal{J}_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. $\beta_i^{-1}=((\pi_i\times\pi_i)(\alpha))^{-1}=(\pi_i\times\pi_i)(\alpha^{-1})$ ve her $i\in I$ için $\beta_i^{-1}\in\mathcal{J}_i$ olduğundan $\alpha^{-1}\in\mathcal{J}$ dır. O halde $(B,\mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. Eğer $\alpha\in\mathcal{J}$ ise $\forall i\in I$ için $(\pi_i\times\pi_i)(\alpha)\in\mathcal{J}_i$ ve dolayısıyla π_i izdüşüm fonksiyonları düzgün süreklidirler. $(B,\mathcal{J})$

nin çarpım uzay olduğunu gösterelim. $(A,\mathcal{J}_1)$ herhangi yarıdüzgün yakınsak uzay, $f_i:(A,\mathcal{J}_1)\to(B_i,\mathcal{J}_i), i\in I$ düzgün sürekli fonksiyonlar ve $\pi_i o h=f_i$ olacak şekilde bir $h:A\to B$ fonksiyonu mevcut olsun. $h:(A,\mathcal{J}_1)\to(B,\mathcal{J}))$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha\in\mathcal{J}_1$ olsun. Her $i\in I$ için $f_i:(A,\mathcal{J}_1)\to(B_i,\mathcal{J}_i), i\in I$ düzgün sürekli fonksiyonlar olduğundan $(f_i\times f_i)(\alpha)\in\mathcal{J}_i$ dir. $(f_i\times f_i)(\alpha)=(\pi_i oh\times\pi_i oh)(\alpha)=(\pi_i\times\pi_i)o(h\times h)(\alpha)=(\pi_i\times\pi_i)((h\times h)(\alpha))\in\mathcal{J}_i$ olur ve buradan $(h\times h)(\alpha)\in\mathcal{J}$ dir. $h:(A,\mathcal{J}_i)\to(B,\mathcal{J})$ fonksiyonu düzgün süreklidir. $(B,\mathcal{J})$ çarpım yarıdüzgün yakınsak uzayıdır ve ***SUConv*** kategorisi keyfi çarpımlara sahiptir.

(4) ***SUConv*** kategorisinin keyfi altuzaylara sahip olduğunu gösterelim. $(B,\mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzay ve $M\subset B$ olsun. $i:M\to B, a\in M, i(a)=a$ altküme fonksiyonu olsun. $\mathcal{J}_M=\{\alpha\in F(M\times M):(i\times i)(\alpha)\in\mathcal{J}\}$ olsun. $(M,\mathcal{J}_M)$ nin yarıdüzgün yakınsak uzayı ve $i:(M,\mathcal{J}_M)\to(B,\mathcal{J})$ nin düzgün sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim.

Her $\alpha\in B$ için $i(\alpha)=\alpha\in B$ ve $i([\alpha]\times[\alpha])=([\alpha]\times[\alpha])\in\mathcal{J}$ olduğundan $([\alpha]\times[\alpha])\in\mathcal{J}_M$ dır.

$\alpha\in\mathcal{J}_M$ ve $\alpha\subset\beta$ olsun. $\alpha\in\mathcal{J}_M$ olduğundan $(i\times i)(\alpha)\in\mathcal{J}$ ve sonuç olarak $(i\times i)(\beta)\in\mathcal{J}$ dır. O halde $\beta\in\mathcal{J}_M$ dır.

$\alpha\in\mathcal{J}_M$ olsun. $((i\times i)(\alpha))^{-1}=(i\times i)(\alpha^{-1})$ ve $((i\times i)(\alpha))^{-1}\in\mathcal{J}$ dır. Çünkü $(B,\mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. O halde $\alpha^{-1}\in\mathcal{J}_M$ ve $(M,\mathcal{J}_m)$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. Eğer $\alpha\in\mathcal{J}$ ise $(i\times i)(\alpha)\in\mathcal{J}$ ve dolayısıyla i altküme fonksiyonu düzgün süreklidir.

(5) ***SUConv*** kategorisinin indiskre objelere sahip olduğunu gösterelim. B boştan farklı bir cümle ve $\mathcal{J}=F(B\times B)$ olsun. $(B,\mathcal{J})$ nin indiskre yarıdüzgün yakınsak uzay olduğunu gösterelim. Kolaylıkla, $(B,\mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. $(B,\mathcal{J})$ nin indiskre şartını sağladığını gösterelim. $(A,\mathcal{J}_1)$ herhangi bir yarıdüzgün yakınsak uzay ve

$f : A \to B$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f : (A, \mathcal{J}_1) \to (B, \mathcal{J})$ nin düzgün sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim. Eğer $\alpha \in \mathcal{J}_1$ ise $(f \times f)(\alpha) \in \mathcal{J}$ ve dolayısıyla f fonksiyonu düzgün süreklidir. O halde, ***SUConv*** kategorisi indiskre objelere sahiptir ve $U : \textbf{\textit{SUConv}} \to \textbf{\textit{Set}}$ unutkan fanktoru topolojik fanktordur [25].

Şimdi, ***SUConv*** kategorisinde önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edelim.

Önerme 2.2.1. (1) B boştan farklı bir cümle ve $\mathcal{J} = \{[\varnothing], [a] \times [a],\ a \in B\} \subset F(B \times B)$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ diskre yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(2) B boştan farklı bir cümle ve $\mathcal{J} = F(B \times B)$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ indiskre yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(3) $B = \{a\}$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ terminal (son) yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(4) $B = \varnothing$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ başlangıç (ilk) yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(5) $\{(B_i, \mathcal{J}_i), i \in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzaylar verilsin. $B = \prod_{i \in I} B_i$ ve $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(B \times B) : \forall i \in I,\ (\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathcal{J}_i\}$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ çarpım yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(6) $\{(B_i, \mathcal{J}_i), i \in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzaylar verilsin. $B = \coprod_{i \in I} B_i$ ve $\mathcal{J} = \{\alpha \in F(B \times B) : \exists j \in I, \exists \beta_j \in \mathcal{J}_j$ öyleki $(i \times i)(\beta_j) \subset \alpha\}$, burada $i : B_i \to B = \prod$ kanonik injektif fonksiyonlar olsun. $(B, \mathcal{J})$ coçarpım yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

İspat: (1) B boştan farklı bir cümle ve $\mathcal{J} = \{[\varnothing], [a] \times [a],\ a \in B\} \subset F(B \times B)$ olsun. $(B, \mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. $(B, \mathcal{J})$ nin diskre şartını sağladığını gösterelim. $(A, \mathcal{J}_1)$ herhangi bir yarıdüzgün yakınsak uzay $f : B \to A$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f : (B, \mathcal{J}) \to (A, \mathcal{J}_1)$ düzgün sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim. Eğer $\alpha \in \mathcal{J}$ ise $(f \times f)([\varnothing]) = [\varnothing] \in \mathcal{J}_1$, $\forall a \in B$, $(f \times f)([a] \times [a]) = ([a] \times [a]) \in \mathcal{J}_1$ ve dolayısıyla f fonksiyonu düzgün süreklidir. O halde $(B, \mathcal{J})$ diskre yarı düzgün yakınsak uzaydır.

(2) nin ispatı Teorem 2.2.1 (5) te verilmiştir.

(3) $B = \{a\}$ olsun. B üzerindeki tek yarıdüzgün yapı $\mathcal{J} = \{[\varnothing], [a] \times [a]\}$ dır. $(A, \mathcal{J}_1)$

herhangi bir yarı düzgün yakınsak uzay verilsin. Her $f:(A,\mathcal{J}_1)\to(B,\mathcal{J})$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. O halde $(B,\mathcal{J})$ terminal (son) yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(4) $B=\varnothing$ olsun. B üzerindeki tek yarıdüzgün yapı $\mathcal{J}=\{[\varnothing]\}$ dır. $(A,\mathcal{J}_1)$herhangi bir yarı düzgün yakınsak uzay verilsin. $f:(B,\mathcal{J})\to(A,\mathcal{J}_1)$ fonksiyonu tek bir (boş fonksiyon) fonksiyondur. O halde $(B,\mathcal{J})$ başlangıç (ilk) yarıdüzgün yakınsak uzaydır.

(5) nin ispatı Teorem 2.2.1 (3) te verilmiştir.

(6) $\{(B_i,\mathcal{J}_i),i\in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzaylar verilsin.

$B=\coprod_{i\in I}B_i$ ve $\mathcal{J}=\{\alpha\in F(B\times B):\exists j\in I,\exists\beta_j\in\mathcal{J}_j$ öyleki $(i\times i)(\beta_j)\subset\alpha\}$, burada

$i:B_i\to B=\prod_{i\in I}B_i$ kanonik injektif fonksiyonlar olsun.

Öncelikle $(B,\mathcal{J})$ nin yarıdüzgün yakınsak uzay olduğunu gösterelim. $a\in B$ verilsin. $B=\coprod_{i\in I}B_i$ nin tanımından en az bir $j\in I$ vardır öyleki $a_j\in B_j, i(a_j)=a$ dır. $(i\times i)([a_j]\times[a_j])=[a]\times[a]$ ve $[a_j]\times[a_j]\in\mathcal{J}_j$ olduğundan $[a]\times[a]\in\mathcal{J}$ dir. $\alpha\in\mathcal{J}$ ve $\alpha\subset\beta$ olsun. $\alpha\in\mathcal{J}$ olduğundan en az bir $j\in I$ ve en az bir $\beta_j\in\mathcal{J}_j$ öyleki $(i\times i)(\beta_j)\subset a$ dır. $\beta_j^{-1}\in\mathcal{J}_j$ çünkü $(B,\mathcal{J}_j)$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. $\left\{\left((i\times i)(\beta_j)\right)^{-1}=(i\times i)(\beta_j^{-1})\subset\alpha^{-1}\right\}$ den $\alpha^{-1}\in\mathcal{J}$ dir. O halde $(B,\mathcal{J})$ yarıdüzgün yakınsak uzaydır. Eğer her $i\in I$ ve $\alpha_i\in\mathcal{J}_i$ için $(i\times i)(\alpha_i)\in\mathcal{J}$ ve dolayısıyla i kanonik injektif fonksiyonları düzgün süreklidirler.

$(B,\mathcal{J})$ nin coçarpım uzay olduğunu gösterelim. $(A,\mathcal{J}_1)$herhangi bir yarı düzgün yakınsak uzay, $f_i:(B_i,\mathcal{J}_i)\to(A,\mathcal{J}_1), i\in I$ düzgün sürekli fonksiyonlar ve $hoi=f_i$ olacak şekilde bir $h:B\to A$ fonksiyonu mevcut olsun. $h:(B,\mathcal{J})\to(A,\mathcal{J}_1)$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha\in\mathcal{J}$ olsun. $\mathcal{J}$ nin tanımından en az bir $j\in I$ ve en az bir $\beta_j\in\mathcal{J}_j$ öyleki $(i\times i)(\beta_j)\subset a$ dır. Her $i\in I$ için $f_i:(B_i,\mathcal{J}_i)\to(A,\mathcal{J}_1)$ düzgün sürekli fonksiyonlar olduğundan $(f_j\times f_j)(\beta_j)\in\mathcal{J}_1$ olur ve buradan $(h\times h)(\alpha)\in\mathcal{J}_1$ dir. $h:(B,\mathcal{J})\to(A,\mathcal{J}_1)$ fonksiyonu düzgün süreklidir ve dolayısıyla $(B,\mathcal{J})$ coçarpım yarıdüzgün yakınsak uzayıdır [25].

Teorem 2.2.2. (1) D: ***SUConv*** $\rightarrow$ ***Set***, boştan farklı her B cümlesi için $D(B)=\left(B,\mathcal{J}=\{[0],[a]x[a],\ a\in B\}\right)$, diskre yarıdüzgün yakınsak uzayına götüren diskre fanktoru U: ***SUConv*** $\rightarrow$ ***Set*** unutkan fanktorun sol adjointidir.

(2) ID: ***Set*** $\rightarrow$ ***SUConv***, boştan farklı her B cümlesi için $ID(B)=(B,\Im=F(B\times B))$ indiskre yarıdüzgün yakınsak uzayına götüren indiskre fanktoru U: ***SUConv*** $\rightarrow$ ***Set*** unutkan fanktorun sağ adjointidir.

3. BÖLÜM

p NOKTASINDA T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

Bu bölümde p noktasında değişik T_0 yarı düzgün yakınsak uzaylar karakterize edilmiştir.

3.1 p Noktasında T_0 Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar

Tanım 3.1.1. B bir cümle ve $p \in B$ olsun. $B \coprod B$, B nin ayrık iki kopyası olsun. B nin p de wedge çarpımı $B \coprod B$ nin p de çakışmasıdır ve $B \vee_p B$ şeklinde gösterilir. x noktası eğer $B \vee_P B$ nin birinci bileşeni içinde ise x_1 olarak, ikinci bileşeni içinde ise x_2 olarak gösterilecektir. $B^2 = B \times B$, B nin kartezyen çarpımı olsun.

(i) ***p*** **de Temel Eksen Dönüşümü:**

$$A_p : B \vee_P B \to B^2,\ A_p(x_i) = \begin{cases} (x,p),\ i = 1 \\ (p,x),\ i = 2 \end{cases}$$

(ii) ***p*** **de Skewed Eksen Dönüşümü:**

$$S_p : B \vee_P B \to B^2,\ S_p(x_i) = \begin{cases} (x,x),\ i = 1 \\ (p,x),\ i = 2 \end{cases}$$

(iii) ***p*** **de Katlama Dönüşümü:**

$\nabla p :\ B \vee_P B \to B,\ i = 1,2$ için $\nabla p(x_i) = x$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2: (B,τ) topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

(i) Eğer her $x \in B$ ve $x \neq p$ için $x \notin G_p$ olacak şekilde p nin bir G_p açık komşuluğu veya $p \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B,τ) ya p de T_0' dır, denir.

(ii) Eğer her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin G_y açık komşuluğu veya $y \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B,τ) ya T_0' dır, denir.

Teorem 3.1.1. (B,τ) topolojik uzay ve $p \in B$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) (B,τ) p de T_0' dır.

(2) τ^*, B^2 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A_p : B \vee_P B \to (B^2,\tau^*)$ ve ∇_p : $B \vee_P B \to (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

(3) τ_*, $i_1, i_2 : B \to B \vee_P B$, $x \mapsto i_1(x) = x_1$, $i_2(x) = x_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B \vee_P B$ üzerindeki bitiş topolojisi olmak üzere $id : B \vee_P B \to (B \vee_P B, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla_p : B \vee_P B \to (B, P(B))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [26].

Tanım 3.1.3. *U: **E** $\to$ **Set*** bir topolojik fanktor ve $U(X) = B$ olmak üzere *X*, ***E*** nin bir nesnesi ve $p \in B$ olsun.

(i) X nesnesinin , p de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart $\{A_p : B \vee_P B \to U(X^2) = B^2$ *ve* $\nabla_p : B \vee_P B \to UD(B) = B\}$ *U*-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada *D, U* nun sol adjointi olan diskre fanktordur.

(ii) X nesnesinin p de T_0' olması için gerek ve yeter şart $\{id : B \vee_P B \to U(X \vee_P X) = B \vee_P B$ *ve* $\nabla_p : B \vee_P B \to UD(B) = B\}$ *U*-kaynağının başlangıç kaldırmasının ayrık olmasıdır. $X \vee_P X$, ***E*** de wedge çarpımıdır, yani $i_1 : B \to B \vee_P B$, $x \mapsto i_1(x) = x_1$ ve $i_2 : B \to B \vee_P B$, $i_2(x) = x_2$ kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : U(X) = B \to B \vee_P B\}$ U-kavşağının bitiş kaldırmasıdır.

Uyarı 3.1.1.

(1) (B,τ) topolojik uzayının T_0' olması için gerek ve yeter şart her $p \in B$ için (B,τ) nin p de T_0' olmasıdır.

(2) U: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktor ise bu takdirde p de $\overline{T_0}$, p de T_0 ' nü gerektirir.

Teorem 3.1.2. $(B,\Im)$ bir yarıdüzgün yakınsak uzay ve $p \in B$ olsun. $(B,\Im)$ nin p de T_0 olması için gerek ve yeter şart her $x \in B$ ve $x = p$ için aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır.

(1) $[x]\times[p] \notin \Im$,

(2) $([x]\times[x]) \cap ([p]\times[p]) \notin \Im$.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im)$, p de $\overline{T_0}$ olsun. Yani $B \vee_P B$ üzerindeki $A_p : B \vee_P B \to U((B^2,\Im^2)) = B^2$ ve $\nabla_p : B\Delta_p B \to U((B,\Im_d)) = B$ tarafından üretilen yarı düzgün yakınsak yapı $\Im_W = \{\alpha \in ((B \vee_P B) \times (B \vee_P B)) : (\pi_i A_p \times \pi_i A_p)(\alpha) \in \Im, \quad i = 1,2$ ve $(\nabla_p \, x \nabla_p)(\alpha) \in \Im_d\}$ diskre olsun. Burada $\Im_d$, B üzerindeki diskre yarı düzgün yakınsak yapıdır. $\Im_w$ deki bir α süzgeci için $\alpha = [x_i]\times[x_i]$ $(i = 1,2)$ veya $\alpha = [p]\times[p]$ veya $\alpha = [\varnothing]$ dır. Şimdi şartların sağlandığını göstermeliyiz. Aksini kabul edelim, yani (1) ve (2) şartlarından en az biri sağlanmasın. Eğer (1) şartı sağlanmazsa $\exists x \neq p$ için $[x]\times[p] \in \Im$ ve $[p]\times[x] \in \Im$ olur. $\alpha = [x_1]\times[x_2]$ alırsak;

$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([x_1]\times[x_2]) = (\pi_1 A_p[x_1] \times \pi_1 A_p[x_2]) = \pi_1[(x,p)]$ $\times \pi_1[(p,x)] = [x]\times[p] \in \Im$, $(\pi_2 A_p \times \pi_2 A_p)(\alpha) = (\pi_2 A_p \times \pi_2 A_p)([x_1]\times[x_2]) = (\pi_2 A_p[x_1] \times$ $\pi_2 A_p[x_2] = \pi_2[(x,p)] \times \pi_2[(p,x)] = [p]\times[x] \in \Im$, $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = (\nabla_p \times \nabla_p)([x_1]$ $\times[x_2]) = (\nabla_p[x_1] \times \nabla_p[x_2]) = [x]\times[x] \in \Im_d$ dir. O halde $\alpha = [x_1]\times[x_2] \in \Im_w$ olur. Bu da $\Im_w$ nin diskre olmasıyla ve $(B,\Im)$ nın p de $\overline{T_0}$ olmasıyla çelişir. Buradan her $x \neq p$ için $[x]\times[p] \notin \Im$ veya $[p]\times[x] \notin \Im$ olmak zorundadır. Eğer (2) şartı sağlanmazsa en az bir $x \neq p$ için $([x]\times[x]) \cap ([p]\times[p]) \in \Im$ olur.

$\alpha=([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2])$ alalım. Bu takdirde $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)=(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)$ $(([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2]))=([x]\times[x])\cap([p]\times[p])\in\Im$, $(\pi_2 A_p\times\pi_2 A_p)(\alpha)=(\pi_2 A_p\times$ $\pi_2 A_p)(([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2]))=([x]\times[x])\cap([p]\times[p])\in\Im$, $(\nabla_p\times\nabla_p)(\alpha)=(\nabla_p$ $\times\nabla_p)(([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2]))=[x]\times[x]\in\Im_d$ olduğu için, $\alpha=([x_1]\times[x_1])$ $\cap([x_2]\times[x_2])\in\Im_w$ olur. Bu da $\Im_w$ nın diskre olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $x\neq p$ için $([x]\times[x])\cap([p]\times[p])\notin\Im$ dır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki (1) ve (2) şartları sağlansın. Yani $x\neq p$ için $[x]\times[p]\notin\Im$ veya $[p]\times[x]\notin\Im$ veya $([x]\times[x])\cap([p]\times[p])\notin\Im$ olsun. $(B,\Im)$ yarıdüzgün yakınsak uzayının p de $\overline{T_0}$ olduğunu yani $B\vee_P B$ üzerindeki $A_p: B\vee_P B$ $\to U((B^2,\Im^2))=B^2$ ve $\nabla_p: B\vee_P B\to U((B,\Im_d))=B$ tarafından üretilen yarı düzgün yakınsak yapı $\Im_W=\{\alpha\in((B\vee_P B)\times(B\vee_P B):(\pi_i A_p\times\pi_i A_p)(\alpha)\in\Im,\ i=1,2$ ve $(\nabla_p\, x\nabla_p)(\alpha)\in\Im_d\}$ nın diskre olduğunu gösterelim. Bunun için de her $\alpha\in\Im_w$ için $\alpha=[x_i]\times[x_i]\ (i=1,2)$ veya $\alpha=[p]\times[p]$ veya da $\alpha=[\varnothing]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha\in\Im_w$ herhangi bir süzgeç olsun. $\Im_w$ tanımından $(\pi_i A_p\times\pi_i A_p)(\alpha)\in\Im,\ i=1,2$ ve $(\nabla_p\, x\nabla_p)(\alpha)\in\Im_d$ dır. Eğer $(\nabla_p\, x\nabla_p)(\alpha)=[p]\times[p]$ ise $(\nabla_p)^{-1}\{p\}=\{p_i=p\}\ (i=1,2)$ olduğundan $\alpha=[p_i]\times[p_j]\,(i,j=1,2)$ olduğu açıktır. $(\nabla_p\, x\nabla_p)(\alpha)=[\varnothing]$ ise $\alpha=[\varnothing]$ olduğu açıktır. Eğer p den farklı bir $x\in B$ için $(\nabla_p\, x\nabla_p)(\alpha)=[x]\times[x]$ ise bu takdirde $\alpha=[x_i]\times[x_j],\ i=1,2$ veya $\alpha\supset[\{x_1,x_2\}]\times[\{x_1,x_2\}]$ veya $\alpha\supset[\{x_i\}]\times[\{x_i,x_j\}]$ veya $\alpha\supset[\{x_i,x_j\}]$ $\times[x_i]\,(i,j=1,2$ ve $i\neq j)$ dir.

$\alpha=[x_i]\times[x_i],\ i=1,2$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\alpha=[x_i]\times[x_j], i\neq j$ ise, bu takdirde, özel olarak, $i=1, j=2$ için $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)=(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)([x_i]\times[x_j])$ $=[x]\times[p]\in\Im$ ve $i=2, j=1$ için $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)=(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)([x_i]\times[x_j])$

$= [p] \times [x] \in \mathfrak{I}$. Bu bir çelişkidir. Buradan $\alpha \neq [x_i] \times [x_j], i \neq j$ dır.

Eğer $\alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}], i \neq j$ ise bu takdirde (i=1 için) $(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha)$ $= (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)[x_i] \times [\{x_i, x_j\}] = [p] \times [\{p, x\}] \subset [p] \times [x]$ olur ve sonuç olarak $[p] \times [x] \in \mathfrak{I}$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Böylece $\alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i \neq j$ dır.

Şimdi göstereceğiz ki $[\varnothing] \neq \alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i \neq j$ ise bu takdirde $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ ya da $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ olmasıdır. Eğer $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ ya da $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ ise bu takdirde $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ dır. Eğer $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ ve $[\varnothing] \neq \alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ ise bu takdirde $U \neq \varnothing$ ve $U \neq \{x_i\} \times \{x_i, x_j\}$ olacak şekilde bir $U \in \alpha$ mevcuttur. $U \in \alpha$, $\{x_i\} \times \{x_i, x_j\} \in \alpha$ ve α süzgeç olduğundan $U \cap \{x_i\} \times \{x_i, x_j\} = \{x_i\} \times \{x_i\}$ veya $\{x_i\} \times \{x_j\}, \alpha$ nın elemanıdır, yani $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ ya da $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ dır. $\alpha \neq [x_i] \times [x_j]$, $i \neq j$ olduğunu yukarıda gösterdik. $\alpha = [x_i] \times [x_i]$, $i = 1,2$ dır. $\alpha \supset [\{x_i, x_j\}] \times [x_i]$ durumu benzer şekilde elde edilebilir.

Eğer $\alpha = [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ise $(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)[\{x_1, x_2\}]$ $\times [\{x_1, x_2\}] = [\{x, p\}] \times [\{x, p\}] \subset [x] \times [p]$ ve sonuç olarak $[x] \times [p] \in \mathfrak{I}$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Böylece $\alpha \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$, $i \neq j$ elde edilir.

Eğer $\alpha \supset [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ve $\varnothing \neq \alpha \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ise bu takdirde $U \neq \varnothing$ ve $U \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ olacak şekilde bir $U \in \alpha$ mevcuttur. $U \in \alpha$, $[\{x_1, x_2\}]$ $\times [\{x_1, x_2\}] \in \alpha$ ve α süzgeç olduğundan $U \cap \{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\} \in \alpha$ dır. Dikkat edelim ki $U \cap \{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\} = \{(x_i, x_j)\}$ veya $\{x_i\} \times \{(x_i, x_j)\}$ veya $\{(x_i, x_j)\} \times \{x_i\}$ veya $\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$ veya $\{(x_1, x_1), (x_2, x_2)\}$ veya $(\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cup (\{(x_2, x_1)\})$ veya $(\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cup (\{(x_2, x_2)\})$ veya $(\{x_1, x_2\} \times \{x_1\}) \cup (\{(x_2, x_2)\})$ veya $(\{x_1, x_2\} \times \{x_2\}) \cup (\{(x_2, x_1)\})$ dır.

Eğer $\alpha=([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2])$ ise bu durumda $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)$ $=(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2])=([x]\times[x])\cap([p]\times[p])\in\Im$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha\neq([x_1]\times[x_1])\cap([x_2]\times[x_2])$ dır.

Eğer $\alpha=([x_1]\times[x_2])\cap([x_2]\times[x_1])$ ise bu takdirde $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)=(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)$ $([x_1]\times[x_2])\cap([x_2]\times[x_1])=([x]\times[p])\cap([p]\times[x])\subset[x]\times[p]$ ve sonuç olarak $[x]\times[p]\in\Im$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha\neq([x_1]\times[x_2])\cap([x_2]\times[x_1])$ dır.

Eğer $\alpha=([\{x_1\}\times\{x_1,x_2\}])\cap([x_2]\times[x_1])$ ise bu takdirde $(\pi_1 A_p\times\pi_1 A_p)(\alpha)=(\pi_1 A_p$ $\times\pi_1 A_p)([\{x_1\}\times\{x_1,x_2\}])\cap([x_2]\times[x_1])=([x]\times[\{x,p\}])\cap([p]\times[x])\subset[x]\times[p]$ ve sonuç olarak $[x]\times[p]\in\Im$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha\neq([\{x_1\}\times\{x_1,x_2\}])$ $\cap([x_2]\times[x_1])$ dır.

Geri kalan α lar için bu şekilde devam edersek $\alpha=[x_i]x[x_i]$, $i=1,2$ elde ederiz. Sonuç olarak, $(B,\Im)$ p de $\overline{T_0}$ dır. Bu da ispatı tamamlar [27].

Teorem 3.1.3. Her $(B,\Im)$ yarı düzgün yakınsak uzayı $p\in B$ de T_0' dır.

İspat: Kabul edelim ki $p\in B$ ve $(B,\Im)$ de herhangi bir yarı düzgün yakınsak uzay olsun. $(B,\Im)$ nin p de T_0' olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için göstermeliyiz ki $(B\vee_P B)^2$ üzerindeki herhangi bir α süzgeci için, eğer, $k=1$ veya $k=2$ için $(i_k\times i_k)(\beta)\subset\alpha$ olacak şekilde en az bir $\beta\in\Im$ mevcutsa ve bir $x\in B$ için $(\nabla_p\times\nabla_p)(\alpha)=[\varnothing]$ veya $[p]\times[p]$ veya $[x]\times[x]$ ise bu takdirde $\alpha=[\varnothing]$ veya $[p]\times[p]$ veya $[x_m]\times[x_m]$, $m=1,2$ dır.

Eğer $(\nabla_p\times\nabla_p)(\alpha)=[p]x[p]$ ise bu takdirde $(\nabla_p)^{-1}(p)=\{p_m=p\}$, $m=1,2$ olduğundan $\alpha=[p]\times[p]$ $(m=1,2)$ dır.

Eğer $(\nabla_p\times\nabla_p)(\alpha)=[\varnothing]$ ise $\alpha=[\varnothing]$ dır.

Eğer en az bir $x\in B$ ve $x\neq p$ için $(\nabla_p\times\nabla_p)(\alpha)=[x]\times[x]$ ise bu takdirde $\alpha=[x_m]\times[x_n]$

veya $\alpha \supset [x_m] \times [\{x_m, x_n\}]$ veya $\alpha \supset [\{x_m, x_n\}] \times [x_m]$ veya $\alpha \supset [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ $(m,n = 1,2)$ olduğu görülür.

Eğer bir $\beta \in \Im$ ve $k = 1$ $(k = 2)$ için $\alpha = [x_1] \times [x_2] \supset (i_k \, x \, i_k)(\beta)$ ise bu takdirde kolayca görülür ki her $V \in \beta$ için $\{x_1\} \times \{x_2\} \in (i_1 \times i_1)(V)$ dır. Bu takdirde x_2 (x_1) $B \vee_P B$ birinci (ikinci) bileşeninde olmalıdır. $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Eğer $\beta \in \Im$ ve k=1 (k=2) için $\alpha = [x_2] \times [x_1] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\{x_2\} \times \{x_1\} \in (i_1 \times i_1)(V)$ dır. Bu da x_2 (x_1) noktasının $B \vee_P B$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorunda olduğunu gösterir. $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Eğer bir $\beta \in \Im$ ve k=1 (k=2) $(m \neq n, m,n = 1,2)$ için $a = [x_m] \, x \, [\{x_m, x_n\}] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\{x_1\} \times \{x_1, x_2\} \subset (i_1 \times i_1)(V)$ dir ve sonuç olarak x_2 (x_1) $B \vee_P B$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. Bu bir çelişkidir.

Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq [x_m] \times [\{x_m, x_n\}]$ ve $\alpha \supset [x_m] \times [\{x_m, x_n\}]$ $(m \neq n, m,n = 1,2)$ ise bu takdirde $\alpha = [x_m] \times [x_m]$ veya $\alpha = [x_m] \times [x_n]$ dır. $\alpha = [x_m] \times [x_n]$, $m \neq n, m,n = 1,2$ durumunun mümkün olmadığı yukarıda gösterildi. Benzer şekilde eğer $\emptyset \neq \alpha \neq [\{x_m, x_n\}] \, x \, [x_m]$ ve $\alpha \supset [\{x_m, x_n\}] \times [x_m]$ $(m \neq n, m,n = 1,2)$ ise bu takdirde $\alpha = [x_m] x [x_m]$ dır.

Eğer $\beta \in \Im$ ve $k = 1$ $(k = 2)$ için $\alpha = [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}] \supset (i_k \, x \, i_k)(\beta)$ ise bu takdirde kolayca görülür ki her $V \in \beta$ için $\{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\} \in (i_1 \, x \, i_1)(V)$ dır. Bu takdirde x_2 (x_1) , $B \vee_P B$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ve $\alpha \supset [\{x_t, x_2\}] \times [\{x_t, x_2\}]$ ise bu takdirde $\alpha = [x_m] \times [x_m]$ veya $\alpha = ([x_1] \, x \, [x_2]) \cap ([x_2] \, x \, [x_1])$ veya $\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$ dır.

Eğer $\beta \in \Im$ ve k=1 (k=2) için $\alpha = ([x_1] \times [x_2]) \cap ([x_2] \times [x_1])(\beta) \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $(\{x_1\} \times \{x_2\}) \cup (\{x_2\} \times \{x_1\}) \in (i_1 \times i_1)(V)$ olur. Bu takdirde x_2 (x_1) $B \vee_P B$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Eğer $\beta \in \Im$ ve k=1 (k=2) için $\alpha = ([x_1]\times[x_1]) \cap ([x_2]\times[x_2]) \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $(\{x_1\}\times\{x_1\}) \cup (\{x_2\}\times\{x_2\}) \in (i_1 \times i_1)(V)$ olur. Bu takdirde $x_2(x_1)$ $B \vee_P B$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha = [x_m]\times[x_m]$, $m = 1,2$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\beta \in \Im$, p de T_0' dır [27].

3.2 p Noktasında T_0 Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Uyarı 3.2.1.

Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 den, eğer $(B,\Im)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı p de $\overline{T_0}$ ise bu takdirde $(B,\Im)$, p de T_0' dır.

Fakat bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $B = \{x,\ y\}$ ve $\Im_1 = \{[x]\times[x],[y]\times[y],[\emptyset],[x]\times[y]\}$ ve $\Im_2 = \{[x]\times[x],[y]\times[y],[\emptyset],[y]\times[x],$ $[x]\times[y]\}$ olsun. Dikkat edelim ki $\Im_1$ *ve* $\Im_2$ birer yarıdüzgün yakınsak yapıdır. $(B,\Im_1)$, Teorem 3.1.2 den x de $\overline{T_0}$ dır. $(B,\Im_2)$ Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 den x de T_0' dür fakat x de $\overline{T_0}$ değildir.

Örnek 3.2.1 $B \neq \emptyset$ ve en az iki elemanlı bir cümle ve $\Im = F(B\times B)$ indiskre yarıdüzgün yakınsak uzay olsun. Bu takdirde $p \in B$ olmak üzere her $x \neq p$ için $[x]\times[p] \in \Im$, $[p]\times[x] \in \Im$ ve $([x]\times[x]) \cap ([p]\times[p]) \in \Im$ olduğundan $(B,\Im)$, Teorem 3.1.2 den p de $\overline{T_0}$ değildir.

4. BÖLÜM

T_0 YARI DÜZGÜN YAKINSAK UZAYLAR

Bu bölümde farklı T_0 yarıdüzgün yakınsak uzaylar karakterize edilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak daha önce yapılmış olan çalışmalarla bizim çalışmalarımız arasında karşılaştırma yapılmıştır.

4.1 T_0 Yarıdüzgün Yakınsak Uzaylar

Tanım 4.1.1. B boştan faklı bir cümle ve $B^2 = B \ x \ B$ olsun. B^2 nin iki ayrı kopyasının diagonali boyunca çakıştırılması $B^2 \vee_\Delta B^2$ ile gösterilir. $B^2 \vee_\Delta B^2$ de bir (x, y) noktası birinci bileşende ise $(x, y)_1$ ile, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. Açık olarak $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x = y$ dir[26].

1. Temel Eksen Dönüşümü (Principle Axis Map): $A : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,

$$A\left((x, y)_i\right) = \begin{cases} (x, y, x), \ i = 1 \\ (x, x, y), \ i = 2 \end{cases}$$

2. Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map): $S : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,

$$S\left((x, y)_i\right) = \begin{cases} (x, y, y), \ i = 1 \\ (x, x, y), \ i = 2 \end{cases}$$

3. Katlama Dönüşümü (The Fold Map): $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^2$, $i = 1, 2$ için

$\nabla\left((x, y)_i\right) = (x, y)$ şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 4.1.2. (B,τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x,y\in B$ ve $x\neq y$ için $x\notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu veya $y\notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B,τ) ya T_0 dır denir [26].

Teorem 4.1.1. (B,τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) (B,τ) T_0 dır.

(2) τ^*, B^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A: B^2\vee_\Delta B^2\to(B^3,\tau^*)$ ve $\nabla: B^2\vee_\Delta B^2\to(B^2,P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [26].

(3) τ_*, $i_1,i_2: B^2\to B^2\vee_\Delta B^2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi olmak üzere $id: B^2\vee_\Delta B^2\to(B^2\vee_\Delta B^2,\tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla: B^2\vee_\Delta B^2\to(B^2,P(B^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [26].

(4) (B,τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez [28].

(5) Tanım cümlesi (B,τ) olan her başlangıç kaynağı mono-kaynaktır [29].

(6) İki elemanlı bir indiskre topolojik uzaydan (B,τ) topolojik uzayına tanımlı her morfizm sabittir [28].

(7) Tanım cümlesi (B,τ) olan her başlangıç morfizmi bir monomofizmdir [30].

(8) Tanım cümlesi (B,τ) topolojik uzayı olan her başlangıç epimorfizmi bir homeomorfizmdir [30].

1971'de Brümmer [31] (7) yi kullanarak T_0 objeyi kategoride tanımladı. 1973'te Marny [28] (4) ve (6) yı, 1974'te Hoffman [29] (5) i ve 1977'de Harvey [30] (8) i kullanarak T_0 objeyi topolojik kategoride tanımladılar. 1991'de Weck-Schwarz [32] topolojik kategorilerde (4), (5), (6), (7) ve (8) genelleştirilmeleri arasındaki ilişkiyi inceledi. 1990'da Baran [26] (2) ve (3) ü kullanarak T_0 objeyi topolojik kategoriye genişletti (sırasıyla $\overline{T_0}$ ve T_0' ile gösterdi) ve 1995'te [33] tüm bu farklı genelleştirmelerinin karşılaştırmasını inceledi. Baran [34] çalışmalarında (2) ve (3) deki T_0 objelerini kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımladı.

Tanım 4.1.3. U: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere, X, $\boldsymbol{E}$'nin bir nesnesi olsun.

(i) X nesnesinin $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart $\{A : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(X^3) = B^3$ ve $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to UD(B^2) = B^2\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [26].

(ii) X nesnesinin T_0' olması için gerek ve yeter şart $\{id : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(X^2 \vee_\Delta X^2) = B^2 \vee_\Delta B^2$ ve $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to UD(B^2) = B^2\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. $X \vee_\Delta X$, E de wedge çarpımıdır, yani $i_1 : U(X^2) = B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2$, $(x,y) \mapsto i_1(x,y) = (x,y)_1$ ve $i_2 : U(X^2) = B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2$, $(x,y) \mapsto i_2(x,y) = (x,y)_2$ kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2\}$ U-kavşağının bitiş kaldırmasıdır [26].

(iii) X nesnesinin T_0 olması için gerek ve yeter şart X in en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmemesidir [28].

Uyarı 4.1.1

1. Herhangi bir topolojik kategori için $\overline{T_0}$, T_0' nü gerektirir fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir [33].

2. Genelde T_0' ile $\overline{T_0}$ veya T_0' arasında bir ilişki yoktur [33].

3. Eğer U: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde T_0, p de $\overline{T_0}$ nü gerektirir [26].

Teorem 4.1.2. $(B, \Im)$ bir yarı düzgün yakınsak uzay olsun. $(B, \Im)$ nin $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır.

(1) $[x] \times [y] \notin \Im$

(2) $([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \notin \Im$

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ olsun. Yani, Tanım 4.1.3 ten $B^2 \vee_\Delta B^2$ üzerindeki $A: B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(B^3,\Im^3)=B^3$ ve $\nabla: B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(B^2,\Im_d{}^2)=B^2$ tarafından üretilen yarıdüzgün yakınsak yapı diskre olsun. Bu yapıyı $\Im_w^A$ ile gösterelim. $\Im^3$, $\Im_d{}^2$ ve $\pi_i : B^3 \to B, i=1,2,3$ sırasıyla B^3 üzerindeki çarpım yarı düzgün yakınsak yapısı, B^2 üzerindeki diskre yarı düzgün yakınsak yapı ve izdüşüm fonksiyonlarını göstermek üzere, $\Im_w^A = \{\alpha \in ((B^2 \vee_\Delta B^2)\times(B^2 \vee_\Delta B^2) : (\pi_i A\times\pi_i A)(\alpha)\in\Im,\ i=1,2,3$ ve $(\nabla\times\nabla)(\alpha)\in\Im_d^2\}$ şeklinde tanımlanır. $\Im_w^A$ daki herhangi bir α süzgeci için $\alpha=[(x,y)_i]\times[(x,y)_i],\ (i=1,2)$ ya da $\alpha=[\varnothing]$ dır. Şimdi şartların sağlandığını göstermeliyiz. Aksini kabul edelim, en az bir $x,y\in B$ ve $x\neq y$ için (1) veya (2) şartlarından en az biri sağlanmasın.

Eğer (1) şartı sağlanmazsa bu takdirde en az bir $x\neq y$ için $[x]\times[y]\in\Im$ ve $[y]\times[x]\in\Im$ dır. $\alpha=[(x,y)_1]\times[(x,y)_2]$ olsun. Bu takdirde $(\pi_1 A\times\pi_1 A)(\alpha)=(\pi_1 A\times\pi_1 A)\big([(x,y)_1]$ $=\pi_1 A[(x,y)_1]\times\pi_1 A[(x,y)_2]\times[(x,y)_2]\big)=\pi_1[(x,y,x)]\times\pi_1[(x,x,y)]=[x]\times[x]\in\Im$, $(\pi_2 A\times\pi_2 A)(\alpha)=[y]\times[x]\in\Im$, $(\pi_3 A\times\pi_3 A)(\alpha)=[x]\times[y]$ $\in\Im, (\nabla\times\nabla)(\alpha)=(\nabla\times\nabla)\big([(x,y)_1]\times[(x,y)_2]\big)=\nabla[(x,y)_1]\times\nabla[(x,y)_2]=[(x,y)]$ $\times[(x,y)]\in\Im_d$ elde edilir. Sonuç olarak $\alpha\in\Im_w^A$ elde edilir. Bu da $\Im_w$ nin diskre olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $x\neq y$ için $[x]\times[y]\notin\Im$ olmak zorundadır. Benzer şekilde $x\neq y$ için $[y]\times[x]\notin\Im$ olmak zorundadır.

Eğer (2) şartı sağlanmazsa en az bir $x\neq y$ için $([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\in\Im$ dır. $\alpha=\big([(x,y)_1]\times[(x,y)_1]\big)\cap\big([(x,y)_2]\times[(x,y)_2]\big)$ olsun. Bu takdirde $(\pi_1 A\times\pi_1 A)(\alpha)$ $=(\pi_1 A\times\pi_1 A)\Big(\big([(x,y)_1]\times[(x,y)_1]\big)\cap\big([(x,y)_2]\times[(x,y)_2]\big)\Big)=(\pi_1\times\pi_1)\Big(\big(A[(x,y)_1]$ $\times A[(x,y)_1]\big)\cap\big(A[(x,y)_2]\times A[(x,y)_2]\big)\Big)=(\pi_1\times\pi_1)\Big(\big([(x,y,x)]\times[(x,y,x)]\big)\cap$ $\big([(x,x,y)]\times[(x,x,y)]\big)\Big)=\big(\pi_1[(x,y,x)]\times\pi_1[(x,y,x)]\big)\cap\big(\pi_1[(x,x,y)]\times\pi_1[(x,x,y)]\big)$ $=[x]\times[x]\in\Im$ $(\pi_2 A\times\pi_2 A)(\alpha)=([y]\times[y])\cap([x]\times[x])\in\Im$, $(\pi_3 A\times\pi_3 A)(\alpha)=([y]$

$\times[y])\cap([x]\times[x])\in\Im$ ve $(\nabla\times\nabla)(\alpha)=(\nabla\times\nabla)([(x,y)_1]\times[(x,y)_1])\cap([(x,y)_2]$ $\times[(x,y)_2])=[(x,y)]\times[(x,y)]\in\Im_d$ elde edilir. Böylece $a\in\Im_w^A$ elde edilir. Bu da $\Im_w$ nin diskre olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $x\neq y$ için $([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\notin\Im$ olmak zorundadır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki şart sağlansın. $(B,\Im)$ yarı düzgün yakınsak uzayının $\overline{T_0}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\Im_w^A$ nın $B^2\vee_\Delta B^2$ üzerindeki diskre yarıdüzgün yakınsak yapı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de her $a\in\Im_w^A$ için $\alpha=[(x,\ y)_i]\times[(x,\ y)_i]$ $(i=\ 1,2\ )$ veya $\alpha=[\varnothing]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a\in\Im_w^A$ herhangi bir süzgeç olsun. $\Im_w^A$ nin tanımından $(\pi_iA\times_i\pi_iA)(\alpha)\in\Im$, $i=1,2,3$ ve $(\nabla\times\nabla)(\alpha)\in\Im_d^2$ dır.

Eğer $(\nabla\times\nabla)(\alpha)=[\varnothing]$ ise $\alpha=[\varnothing]$ dır.

Eğer en az bir $x\in B$ için $(\nabla\times\nabla)(\alpha)=[(x,x)]\times[(x,x)]$ ise bu takdirde $\nabla^{-1}(x,x)=(x,x)_i$, $i=1,2$ olduğundan, $\alpha=[(x,\ x)_i]\ x\ [(x,\ x)_i]$ dır.

Eğer $x\neq y$ olacak şekilde en az bir $(x,\ y)\in B^2$ için $(\nabla\times\nabla)(\alpha)=[(x,y)]\times[(x,y)]$ ise bu takdirde $\alpha=[(x,y)_i]\times[(x,y)_j]$, $(i,j=1,2)$ veya $\alpha\supset[(x,y)_i]$ $\times[\{(x,y)_i,(x,y)_j\}]$ veya $\alpha\supset[\{(x,y)_i,(x,y)_j\}]\times[(x,y)_i]$ $(i,j=1,2$ ve $i\neq j)$ veya $\alpha\supset[\{(x,y)_1,(x,y)_2\}]\times[\{(x,y)_1,(x,y)_2\}]$ olduğu görülür.

Eğer $\alpha=[(x,y)_i]\times[(x,y)_j]$, $i\neq j$ ise bu takdirde $(\pi_2A\times\pi_2A)(\alpha)=[x]\times[y]$ veya $[y]\times[x]\in\Im$ (sırasıyla $i=2,\ j=1$ veya $i=1,\ j=2$). Bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha\neq[(x,y)_i]\times[(x,y)_j]$, $i\neq j$ dır.

Eğer $\alpha=[(x,y)_i]\times[\{(x,y)_i,(x,y)_j\}]$, $i\neq j$ ise bu takdirde $(i=1)$ için $(\pi_2A\times\pi_2A)$ $(\alpha)=[y]\times[\{y,x\}]\subset[y]\times[x]$ ve $(i=1)$ için $(\pi_2A\times\pi_2A)(\alpha)=[x]\times[\{x,y\}]\subset[x]\times[y]$ ve sonuç olarak $[y]\times[x]\in\Im$ ve $[x]\times[y]\in\Im$ dır. Bu bir çelişkidir. Böylece

$\alpha \neq \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$, $i \neq j$ elde edilir.

Şimdi göstereceğiz ki eğer $\emptyset \neq \alpha \neq \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$, $(i \neq j)$ ise bu takdirde $\alpha \supset \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$, $(i \neq j)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_j\right]$ veya $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$ dır.

Eğer $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_j\right]$ veya $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$ ise bu takdirde açık olarak $\alpha \supset \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$ dır. Eğer $\alpha \supset \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$ ve $\emptyset \neq \alpha \neq \left[(x,y)_i\right] \times \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right]$ ise bu takdirde $U \neq \emptyset$ ve $U \neq \left\{(x,y)_i\right\} \times \left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}$ olacak şekilde bir $U \in \alpha$ mevcuttur. $U \in \alpha$, $\left\{(x,y)_i\right\} \times \left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\} \in \alpha$ ve α bir süzgeç olduğundan $U \cap \left(\left\{(x,y)_i\right\} \times \left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right) = \left\{(x,x)_i\right\} \times \left\{(x,x)_i\right\}$ veya $\left\{(x,y)_i\right\} \times \left\{(x,y)_j\right\}$ α nın elemanıdır yani, $\alpha = \left[(x,x)_i\right] \times \left[(x,x)_i\right]$ veya $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_j\right]$ dır. $\alpha \neq \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$, $i \neq j$ olduğu yukarıda gösterildi. Böylece $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$, $i = 1,2$ dır.

$\alpha \supset \left[\left\{(x,y)_i,(x,y)_j\right\}\right] \times \left[(x,y)_i\right]$, $i \neq j$ durumu benzer şekilde elde edilir.

Eğer $\alpha = \left(\left[(x,y)_1\right] \times \left[(x,y)_1\right]\right) \cap \left(\left[(x,y)_2\right] \times \left[(x,y)_2\right]\right)$ ise bu takdirde $(\pi_2 A \times \pi_2 A)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \in \Im$ olur. Bu bir çelişkidir. Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq \left(\left[(x,y)_1\right] \times \left[(x,y)_1\right]\right) \cap \left(\left[(x,y)_2\right] \times \left[(x,y)_2\right]\right)$ ve $\alpha \supset \left(\left[(x,y)_1\right] \times \left[(x,y)_1\right]\right) \cap \left(\left[(x,y)_2\right] \times \left[(x,y)_2\right]\right)$ ise bu takdirde $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$, $i = 1,2$ dır.

Eğer $\alpha = \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right] \times \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ ise bu takdirde $(\pi_2 A \times \pi_2 A)(\alpha) = \left[\{x,y\}\right] \times \left[\{x,y\}\right] \subset [x] \times [y]$ ve $\left[\{x,y\}\right] \times \left[\{x,y\}\right] \subset [y] \times [x]$ dır. Sonuç olarak $[x] \times [y] \in \Im$ ve $[y] \times [x] \in \Im$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha \neq \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right] \times \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ dır.

Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right] \times \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ ve $\alpha \supset \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ $\times \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ ise bu takdirde yukarıda kullanılan aynı yolla $\alpha = \left[(x,y)_i\right] \times \left[(x,y)_i\right]$, $i = 1,2$ elde edilir.

O halde $(B,\Im)$, $\overline{T_0}$ dır [27].

Teorem 4.1.3: Tüm yarı düzgün yakınsak uzaylar T_0 ' dır.

İspat: $(B,\Im)$ herhangi bir yarıdüzgün yakınsak uzay olsun. Göstereceğiz ki $\Im^2$ ve $\Im_d^2$ sırasıyla B^2 üzerindeki çarpım ve diskre yarı düzgün yakınsak yapılar ve α ise (B^2 $\vee_\Delta$ B^2)$\times$(B^2 $\vee_\Delta$ B^2) üzerinde süzgeç olmak üzere, eğer en az bir $\beta \in \Im^2$ için $\alpha \supset (i_k x\, i_k)(\beta)$, $k = 1$ veya 2 ve bir $(x,\ y) \in B^2$ için $(\nabla \times \nabla)(\alpha) \in \Im_d^2$ ise bu takdirde $\alpha = [\emptyset]$ veya $\alpha = [(x,\ y)_m] \times [(x,\ y)_m]$, $m = 1,2$ dır. Buradan $\Im_d^2 = \left\{[\emptyset], \left[(x,y)\right] \times \left[(x,y)\right] : x,y \in B\right\}$ dır.

Eğer $(\nabla \times \nabla)(\alpha) = [\emptyset]$ ise $\alpha = [\emptyset]$ olduğu açıktır.

Eğer en az bir $x \in B$ için $(\nabla \times \nabla)(a\ ) = [(x,y)] \times [(x,y)]$ ise $\nabla^{-1}(x,x) = (x,x)_m = (x,x)$ olduğundan, $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_m]$, $m = 1,2$ dır.

Eğer $x \neq y$ olacak şekildeki en az bir $(x,y) \in B^2$ için $(\nabla \times \nabla)(\alpha) = [(x,y)] \times [(x,y)]$ ise bu takdirde $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_n]$ $(m,n = 1,2)$ veya $\alpha \supset [(x,y)_m] \times \left[\left\{(x,y)_m,\ (x,y)_n\right\}\right]$ veya $\alpha \supset \left[\left\{(x,y)_m,(x,y)_n\right\}\right] \times [(x,y)_m]$, $m \neq n$, $m,n = 1,2$ veya $\alpha \supset \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right] \times \left[\left\{(x,y)_1,(x,y)_2\right\}\right]$ olduğu görülür.

Eğer bir $\beta \in \Im^2$ ve $k = 1(2)$ için $\alpha = \left[(x,y)_1\right] \times \left[(x,y)_2\right] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\left\{(x,y)_1\right\} \times \left\{(x,y)_2\right\} \in (i_k \times i_k)(V)$ dır. Sonuç olarak $(x,y)_2\ ((x,y)_1)$ B^2 $\vee_\Delta$ B^2 nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan, bu bir çelişkidir.

Eğer bir $\beta \in \Im^2$ ve k = 1 (2) için $\alpha = \left[(x,y)_2\right] \times \left[(x,y)_1\right] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her

$V \in \beta$ için $\{(x,y)_2\} \times \{(x,y)_1\} \in (i_k \times i_k)(V)$ dır. Sonuç olarak $(x,y)_2\left((x,y)_1\right)$ $B^2 \vee_\Delta B^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan, bu bir çelişkidir.

Eğer bir $\beta \in \Im^2$ ve $k = 1\ (2)$ için $\alpha = [(x,y)_m] \times [\{(x,y)_m, (x,y)_n\}] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$, $(m \neq n,\ m,n = 1,2)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\{(x,y)_1\} \times \{(x,y)_1, (x,y)_2\}$ $\subset (i_k \times i_k)(V)$ dır. Sonuç olarak $(x,y)_2\left((x,y)_1\right)$ $B^2 \vee_\Delta B^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan, bu bir çelişkidir.

Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq [(x,y)_m] \times [\{(x,y)_m, (x,y)_n\}]$ ve $\alpha \supset [(x,y)_m] \times [\{(x,y)_m, (x,y)_n\}]$ $(m \neq n,\ m,n = 1,2)$ ise bu takdirde $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_m]$ veya $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_n]$ dır. $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_n]$ $(m \neq n,\ m,n = 1,2)$ olmasının mümkün olmadığı yukarıda gösterildi.

Eğer $\beta \in \Im^2$ ve $k = 1(2)$ için $\alpha = [\{(x,y)_1, (x,y)_2\}] \times [\{(x,y)_1, (x,y)_2\}] \supset (i_k \times i_k)(\beta)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\{(x,y)_1, (x,y)_2\} \times \{(x,y)_1, (x,y)_2\} \subset (i_k \times i_k)(V)$ dır. Sonuç olarak $(x,y)_2\left((x,y)_1\right)$ $B^2 \vee_\Delta B^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan, bu bir çelişkidir.

Eğer $\emptyset \neq \alpha \neq [\{(x,y)_1, (x,y)_2\}] \times [\{(x,y)_1, (x,y)_2\}]$ ve $\alpha \supset [\{(x,y)_1, (x,y)_2\}] \times$ $[\{(x,y)_1, (x,y)_2\}]$ ise bu takdirde $\alpha = [(x,y)_m] \times [(x,y)_m]$ veya $\alpha = \left([(x,y)_1]\right.$ $\left.\times [(x,y)_2]\right) \cap \left([(x,y)_2] \times [(x,y)_1]\right)$ veya $\alpha = \left([(x,y)_1] \times [(x,y)_1]\right) \cap \left([(x,y)_2] \times [(x,y)_2]\right)$ dır.

Eğer bir $\beta \in \Im^2$ ve $k = 1(2)$ için $\alpha = \left([(x,y)_1] \times [(x,y)_2]\right) \cap \left([(x,y)_2] \times [(x,y)_1]\right)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\left(\{(x,y)_1\} \times \{(x,y)_2\}\right) \cup \left(\{(x,y)_2\} \times \{(x,y)_1\}\right) \subset (i_k \times i_k)(V)$ dır. Buradan $(x,y)_2\left((x,y)_1\right)$ $B^2 \vee_\Delta B^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan, bu bir çelişkidir.

Eğer bir $\beta \in \Im^2$ ve $k = 1(2)$ için $\alpha = \left([(x,y)_1] \times [(x,y)_1]\right) \cap \left([(x,y)_2] \times [(x,y)_2]\right)$ ise bu takdirde her $V \in \beta$ için $\left(\{(x,y)_1\} \times \{(x,y)_1\}\right) \cup \left(\{(x,y)_2\} \times \{(x,y)_2\}\right) \subset (i_k \times i_k)(V)$ dır.

Buradan $(x, y)_2 \left((x, y)_1\right)$ $B^2 \vee_\Delta B^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olmak zorundadır. $x \neq y$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece eğer $x \neq y$ ise $\alpha = \left[(x, y)_m\right]$ $\times\left[(x, y)_m\right]$, $m, n = 1, 2$ olmak zorundadır. O halde $(B, \Im)$ yarı düzgün yakınsak uzayı T_0 ' dır [27].

Teorem 4.1.4: $(B, \Im)$bir yarıdüzgün yakınsak uzay olsun. $(B, \Im)$ nin T_0 olması için gerek ve yeter şart $x \neq y$olacak şekildeki her $x, y \in B$ için $[\{x, y\}] \times [\{x, y\}] \notin \Im$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $(B, \Im)$, T_0 olsun. Kabul edelim ki $x \neq y$ olacak şekildeki en az bir $x, y \in B$ için $[\{x, y\}] \times [\{x, y\}] \in \Im$ olsun. $A = \{x, y\}$ olsun. Dikkat edelim ki $(A, \Im_A), (B, \Im\ )$ in alt uzayıdır. Burada $\Im_A, i : A \to B$ alt küme fonksiyonu tarafından üretilen A üzerindeki alt yarıdüzgün yakınsak yapıdır. $(i \times i)([\{x, y\}] x [\{x, y\}])$ $= [\{x, y\}] \times [\{x, y\}] = A \times A \in \Im$ olduğundan, $[A] \times [A] \in \Im_A$ ve sonuç olarak, $\Im_A = F(A \times A)$ dır. $\Im_A = F(A \times A)$, A üzerindeki indiskre yarıdüzgün yakınsak yapı olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in B$ için $[\{x, y\}] \times [\{x, y\}] \notin \Im$ olmak zorundadır.

Tersine olarak kabul edelim ki $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in B$ için $[\{x, y\}] \times [\{x, y\}] \notin \Im$ olsun. $(B, \Im)$ nin T_0 olduğunu yani en az iki elemanlı hiçbir yarıdüzgün yakınsak indiskre alt uzay ihtiva etmediğini göstermek istiyoruz. Aksini kabul edelim. $(B, \Im)$ en az iki elemanlı en az bir indiskre yarıdüzgün yakınsak alt uzay ihtiva etsin. Bu alt uzay, $x \neq y$olacak şekilde $A = \{x, y\} \subset B$ olmak üzere $(A, \Im_A)$ olsun. $(A, \Im_A)$ indiskre olduğundan $\Im_A = F(A \times A)$ dır. $[\{x, y\}]\ x [\{x, y\}] \in F(A \times A)$ olduğundan, $[\{x, y\}]\ x [\{x, y\}] \in \Im_A$ olur. $\Im_A$ nın tanımından $(i \times i)([\{x, y\}]$ $\times [\{x, y\}]) = [\{x, y\}] \times [\{x, y\}] \in \Im$ dır. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $(B, \Im)$ en az iki elemanlı hiçbir yarıdüzgün yakınsak indiskre alt uzay ihtiva etmez, yani $(B, \Im), T_0$ dır.

Teorem 4.1.5. Her $\overline{T_0}$ yarıdüzgün yakınsak uzayın alt uzayı da $\overline{T_0}$ dır.

İspat: Kabul edelim $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ uzayı ve $A \subset B$, $i : A \to B$ alt küme fonksiyonu, $\Im_A = \{a \in F(A\times A) : (i\times i)(a) \in \Im\}$ alt yarıdüzgün yakınsak uzay yapısı ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. $A \subset B$ olduğundan $x, y \in B$ dir. $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $[x]\times[y] \notin \Im$ ve $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \notin \Im$ dır. $(i\times i)([x]\times[y]) = [x]\times[y] \notin \Im$ ve $(i\times i)\big(([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\big) = ([x]\times[x])\cap([y]\times[y]) \notin \Im$ olduğundan $[x]\times[y] \notin \Im_A$ ve $([x]x[x])\cap([y]x[y]) \notin \Im_A$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.1.2 den $(A,\Im_A)$, $\overline{T_0}$ dır [27].

Teorem 4.1.6. $(B,\Im)$ ve $(B',\Im')$ yarıdüzgün yakınsak uzayları izomorf olsunlar. Bu takdirde $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ dır ancak ve ancak $(B',\Im')$ $\overline{T_0}$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$, $x \neq y$ ve $x, y \in B'$ olsun. $(B,\Im)$ ve $(B',\Im')$ yarıdüzgün yakınsak uzayları izomorf olduklarından bir $f : (B,\Im) \to (B',\Im')$ izomorfizmi mevcuttur. f izomorfizm olduğundan, $gf = 1_{(B,\Im)}$ ve $fg = 1_{(B',\Im')}$ olacak şekilde bir $g : (B',\Im') \to (B,\Im)$ morfizmi vardır. $x \neq y$ olduğundan $g(x) \neq g(y)$ dır. $g(x) = g(y)$ olsaydı $(fg)(x) = (fg)(y)$ ve sonuç olarak $x = y$ olurdu. $(B',\Im')$ $\overline{T_0}$ olmasın. Bu takdirde Teorem 4.1.2 gereğince $[x]\times[y] \in \Im'$ ve $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \in \Im'$ dır. $[x]\times[y] \in \Im'$ ise g düzgün sürekli olduğundan $[g(x)]\times[g(y)] \in \Im$ ve $[g(y)]\times[g(x)] \in \Im$ elde edilir. $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \in \Im'$ ise g düzgün sürekli olduğundan $g\big(([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y])\big) \in \Im$ olur ve $\big([g(x)]\times[g(x)]\big) \cap \big([g(y)]\times[g(y)]\big) \in \Im$ elde edilir. Bu $(B,\Im)$ in $\overline{T_0}$ olması ile çelişir. Bu takdirde $(B',\Im')$, $\overline{T_0}$ olmak zorundadır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki $(B',\Im')$ $\overline{T_0}$ olsun. g bir izomorfizm olduğundan, ispatın ilk kısmı gereğince $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ olur [27].

Teorem 4.1.7. $\{(B_i,\Im_i): i\in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzayların bir sınıfı $B=\prod_i B_i$, B_i cümlelerinin kartezyen çarpımı olsun. Bu takdirde $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı $\overline{T_0}$ dır ancak ve ancak her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı $\overline{T_0}$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı $\overline{T_0}$ olsun. Teorem 4.1.5 den, $(B,\Im^*)$ çarpım uzayının her alt uzayı da $\overline{T_0}$ dır. Diğer taraftan her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı $(B,\Im^*)$ çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf olduğundan Teorem 4.1.6 dan, $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı $\overline{T_0}$ dır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı $\overline{T_0}$ ve $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in B$ olsun. $x=(x_i)_{i\in I}$, $y=(y_i)_{i\in I}$ ve $x\neq y$ olduğundan en az bir $i\in I$ için $x_i, y_i\in B_i$ ve $x_i\neq y_i$ dır. $(B_i,\Im_i)$ $\overline{T_0}$ olduğundan, Teorem 4.1.2 gereğince $[x_i]\times[y_i]\notin\Im_i$ veya $[y_i]\times[x_i]\notin\Im_i$ ve $([x_i]\times[x_i])\cap([y_i]\times[y_i])\in\Im_i$ dır. Her $i\in I$ için $(\pi_i\times\pi_i)([x]\times[y])=[x_i]\times[y_i]\notin\Im_i$ veya $(\pi_i\times\pi_i)([y]\times[x])=[y_i]\times[x_i]\notin\Im_i$ ve $(\pi_i\times\pi_i)(([x]\times[x])\cap([y]\times[y]))=([x_i]$ $\times[x_i])\cap([y_i]\times[y_i])\notin\Im_i$ olduğundan $[x]\times[y]\notin\Im^*$ veya $[y]\times[x]\notin\Im^*$ ve $([x]\times[x])$ $\cap([y]\times[y])\notin\Im^*$ elde edilir. Teorem 4.1.6 dan $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı $\overline{T_0}$ dır.

Teorem 4.1.8. Her T_0 yarıdüzgün yakınsak uzayın alt uzayı da T_0 dır.

İspat: Kabul edelim ki $A\subset B$, $i:A\to B$ alt küme fonksiyonu $\Im_A=\{\alpha\in F(A\times A):$ $(i\times i)(\alpha)\in\Im\}$ alt yarıdüzgün yakınsak uzay yapısı, $(B,\Im)$ T_0 ve $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in A$ olsun. $A\subset B$ olduğundan $x,y\in B$ dir. $(B,\Im)$ T_0 olduğundan Teorem 4.1.4 den, $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\notin\Im$ dır. $(i\times i)([\{x,y\}]\times[\{x,y\}])=[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\notin\Im$ olduğundan, $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\notin\Im_A$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.1.4 den $(A,\Im_A)$ T_0 dır [27].

Teorem 4.1.9. $(B,\Im)$ ve $(B',\Im')$ yarıdüzgün yakınsak uzayları izomorf olsunlar. Bu takdirde $(B,\Im)$ T_0 dır ancak ve ancak $(B',\Im')$ T_0 dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im)$ T_0, $x \neq y$ ve $x, y \in B'$ olsun. $(B,\Im)$ ve $(B',\Im')$ yarıdüzgün yakınsak uzayları izomorf olduklarından bir $f:(B,\Im)\to(B',\Im')$ izomorfizmi mevcuttur. f izomorfizm olduğundan, $gf = 1_{(B,\Im)}$ ve $fg = 1_{(B',\Im')}$ olacak şekilde bir $g:(B',\Im')\to(B,\Im)$ morfizmi vardır. $x \neq y$ olduğundan $g(x)\neq g(y)$ dır. $g(x)=g(y)$ olsaydı $(fg)(x)=(fg)(y)$ ve sonuç olarak $x=y$ olurdu. $(B',\Im')$ T_0 olmasın. Bu takdirde Teorem 4.1.4 gereğince $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\in\Im'$ dır. g düzgün sürekli olduğundan $[\{g(x),g(y)\}]\times[\{g(x),g(y)\}]\in\Im$ elde edilir. $[\{g(x)\times g(x)\}]\cap[\{g(y)\times g(y)\}]\in\Im$ elde edilir ki bu $(B,\Im)$ in T_0 olması ile çelişir. Bu takdirde $(B',\Im')$ T_0 olmak zorundadır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki $(B',\Im')$ T_0 olsun. g bir izomorfizm olduğundan, ispatın ilk kısmı gereğince $(B,\Im)$ T_0 olur.

Teorem 4.1.10. $\{(B_i,\Im_i): i\in I\}$ yarıdüzgün yakınsak uzayların bir sınıfı, $B=\prod_i B_i$, B_i cümlelerinin kartezyen çarpımı olsun. Bu takdirde $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı T_0 dır ancak ve ancak her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı T_0 dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı T_0 olsun. Teorem 4.1.8 dan, $(B,\Im^*)$ çarpım uzayının her alt uzayı da T_0 dır. Diğer taraftan her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı $(B,\Im^*)$ çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf olduğundan Teorem 4.1.9 dan, $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı T_0 dır.

$(\Leftarrow)$ Tersine olarak kabul edelim ki her $i\in I$ için $(B_i,\Im_i)$ yarıdüzgün yakınsak uzayı T_0 ve $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in B$ olsun. $x=(x_i)_{i\in I}, y=(y_i)_{i\in I}$ ve $x\neq y$ olduğundan en az bir $i\in I$ için $x_i, y_i\in B_i$ ve $x_i\neq y_i$ dır. $(B_i,\Im_i)$ T_0 olduğundan, Teorem 4.1.4

gereğince $\left[\{x_i, y_i\}\right]\times\left[\{x_i, y_i\}\right]\notin \Im_i$ dır. Her $i\in I$ için $(\pi_i\times\pi_i)\left(\left[\{x,y\}\right]\times\left[\{x,y\}\right]\right)=$ $\left(\left[\{x_i,y_i\}\right]\times\left[\{x_i,y_i\}\right]\right)\notin\Im_i$ olduğundan, $\left[\{x,y\}\right]\times\left[\{x,y\}\right]\notin\Im^*$ elde edilir. Teorem 4.1.4 den $(B,\Im^*)$ çarpım uzayı T_0 dır [27].

Teorem 4.1.11. $(B,\Im)$bir yarıdüzgün yakınsak uzay ve $p\in B$ olsun. $(B,\Im)$ nin $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart $(B,\Im)$ nin p de $\overline{T_0}$ olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.2 den açıktır.

4.2 T_0 Yarıdüzgün Yakınsak Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 den, eğer $(B,\Im)$yarıdüzgün yakınsak uzayı T_0 ise bu takdirde $(B,\Im)$ T_0' dır. Bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $B=\{x,y\}$ ve $\Im_1=\{[x]\times[x],[y]\times[y],[\varnothing],[x]\times[y]\}$ ve $\Im_2=\{[x]\times[x],[y]\times[y],[\varnothing],$ $\left[\{x,y\}\right]\times\left[\{x,y\}\right]\}$ olsun. Dikkat edelim ki $\Im_1$ ve $\Im_2$ birer yarı düzgün yakınsak yapıdır. $(B,\Im_2)$ Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 den T_0' ve $\overline{T_0}$ dır fakat T_0 değildir.

Tanım 4.2.1.

(i) Eğer her $(x,y)\in(B\times B)$ için, $([x],y)\in q$ ve $([y],x)\in q$ olması $x=y$ olmasını gerektirirse (B,q) genelleştirilmiş yakınsak uzayına T_0 uzayı denir.

(ii) Eğer $(\mathrm{B},\mathrm{q}_{\Im})$ underlying genelleştirilmiş yakınsak uzayı T0 uzayı ise $(\mathrm{B},\Im)$ yarıdüzgün yakınsak uzayına T_0 uzayı denir.

Uyarı 4.2.2. Teorem 4.1.2 den, $(\mathrm{B},\Im)$ yarıdüzgün yakınsak uzay bizim çalıştığımız anlamda $\overline{\mathrm{T}_0}$ ise genel anlamda T_0 uzayıdır fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin $\mathrm{B}=\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}$ ve $\Im=\{[\mathrm{x}]\times[\mathrm{x}],[\mathrm{y}]\times[\mathrm{y}],[\varnothing],[\mathrm{x}]\times[\mathrm{x}]\cap[\mathrm{y}]\times[\mathrm{y}]\}$ olsun. Bu takdirde $(\mathrm{B},\Im)$ bizim çalıştığımız anlamda $\overline{T_0}$ değildir fakat genel anlamda T_0 dir.

Örnek 4.2.1. B boştan farklı bir cümle ve $\Im_d$ de B üzerindeki diskre yarıdüzgün yakınsak yapı olsun. $(B,\Im_d)$, $\overline{T_0}, T_0'$ *ve* T_0 dır. $\Im_d = \{[\varnothing],[x]\times[x] : x\in B\} \subset F(B\times B)$ şeklinde tanımlıdır. Her $x, y\in B$ ve $x\neq y$ için $[x]\times[y]\notin\Im$, $[y]\times[x]\notin\Im$, $([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\notin\Im$ ve $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\notin\Im$ olduğundan, $(B,\Im_d)$ Teorem 4.1.2 den $\overline{T_0}$, Teorem 4.1.4 den T_0 ve Teorem 4.1.3 den T_0' dır.

Örnek 4.2.2. B en az iki elemanlı bir cümle ve $\Im$ de B üzerindeki indiskre yarıdüzgün yakınsak yapı olsun. $(B,\Im)$ T_0' dır fakat $\overline{T_0}$ ve T_0 değildir. $\Im = F(B\times B)$ olduğundan $B\times B$ üzerindeki tüm süzgeçler $\Im$ in elemanıdır. Dolayısıyla her $x, y\in B$ ve $x\neq y$ için $[x]\times[y]\in\Im$, $[y]\times[x]\in\Im$, $([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\in\Im$ ve $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\in\Im$ dır. Bu takdirde $(B,\Im)$, Teorem 4.1.2 den $\overline{T_0}$ değildir, Teorem 4.1.4 den T_0 değildir ve Teorem 4.1.3 den T_0' dır.

Örnek 4.2.3. $B=\{x\}$ olsun. Bu takdirde B üzerindeki tek yarıdüzgün yapı $\Im=\{[x]\times[x],[\varnothing]\}$ dır. $(B,\Im)$ hem diskre hem indiskre yarıdüzgün yakınsak uzaydır. $x\neq y$ olacak şekilde $y\in B$ mevcut olmadığından, $(B,\Im)$ Teorem 4.1.2 den $\overline{T_0}$ ve Teorem 4.1.4 den T_0 dır.

Örnek 4.2.4. $B=\{x,y\}$ ve $\Im=\{[x]\times[x],[y]\times[y],[\varnothing],[x]\times[y],[x]\times[\{x,y\}]\}$ olsun. $[y]\times[x]\notin\Im$ ve $([x]\times[x])\cap([y]\times[y])\notin\Im$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $(B,\Im)$ $\overline{T_0}$ dır. $[\{x,y\}]\times[\{x,y\}]\notin\Im$ olduğundan Teorem 4.1.4 den $(B,\Im)$ T_0 dır.

Örnek 4.2.5. $B\neq\varnothing$ bir cümle, (B,d) bir metrik uzay olsun. $D_\varepsilon=\{(x, y): d(x, y)<\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ ve $\delta=\{U\subset B\times B:$ en az bir $\varepsilon>0$ için $D_\varepsilon\subset U\}$ olsun. Bu takdirde $\Im=\{\beta\in F(B\times B):\beta\supset\delta\}$ olmak üzere $(B,\Im)$ yarıdüzgün yakınsak uzayını inceleyelim. $x \neq y$ olsun. Bu takdirde $d(x, y) > 0$ dır. Kabul edelim ki $[x]\times[y] \in \Im$ olsun. Bu takdirde $[x]\times[y] \supset \delta$ ve dolayısıyla her $U \in \delta$ için $U \in [x]\times[y]$ dir. $0 < \varepsilon' < d(x, y)$ olacak şekilde seçersek $D_{\varepsilon'} \subset U'$ olacak şekilde $U' \in \delta$ bulunabilir. $D_{\varepsilon'} \subset U' \in [x]\times[y]$ olduğundan $(x, y) \in D_{\varepsilon'}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $0 < \varepsilon' < d(x, y)$ olduğundan $(x, y) \notin D_{\varepsilon'}$ dır. Bu takdirde $[x]\times[y] \notin \Im$ olmak zorundadır. Benzer şekilde $[y]\times[x] \notin \Im$ dır. $d(x, x) = 0$ ve $d(y, y) = 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{(x, x),(y, y)\} \in D_\varepsilon$ dır. Bu takdirde her $U \in \delta$ için $\{(x, x),(y, y)\} \in U$ dır. Buradan her $U \in \delta$ için $U \in ([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y])$ ve dolayısıyla $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \supset \delta$ elde edilir. Sonuç olarak $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \in \Im$ dır. $([x]\times[x]) \cap ([y]\times[y]) \in \Im$ olduğundan, Teorem 4.1.2 den $(B, \Im)$ $\overline{T_0}$ değildir. $[x]\times[y] \notin \Im$ ve $[y]\times[x] \notin \Im$ olduğundan, yarıdüzgün yakınsak uzay olmanın ikinci şartından $[\{x, y\}]\times[\{x, y\}] \notin \Im$ dır. $[\{x, y\}]\times[\{x, y\}] \notin \Im$ olduğundan, Teorem 4.1.4 den $(B, \Im)$ T_0 dır.

KAYNAKLAR

1. Frechet, M., 1906. Sur quelques points du calcul fonctionnel. **Rend. Palermo, 22**: 1-74.
2. Hausdorff, F., 1914. Grundzüge der Mengenlehre. Veit, Leipzig. (Reprint:1949, 1965, Chelsea, New York).
3. Kuratowski, C., 1922. Sur I'operation A de I'Analysis Situs, **Fund. Math., 3**, 182-199.
4. Weil, A., 1937. Sur les espaces a structures uniformes et sur la topologie generale. Hermann, Paris.
5. Husek, M., Rice, M. D., 1978. Productivity of coreflective subcategories of uniform spaces. **Gen. Top. Appl., 9**: 295-306.
6. Nachbin, L., Sur les espaces uniformisables ordonnes, **C. R. Acad. Sci., Paris, 226:** 774-775, 1948.
7. Csâszâr, A., 1963. Foundations of general topology. Macmillan, New York.
8. Doitchinov, D. B., 1964. A unifed theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces**. Soviet Math. Dokl., 5**: 595-598.
9. Katetov, M., 1965. On continuity structures and spaces of mappings. **Comm. Math. Univ. Carolinae, 6**: 257-278.
10. Herrlich, H., 1974. Topological structures, In: **Math. Centre Tracts, 52**: 59-122. Math. Centrum, Amsterdam.
11. Cook, C. H., Fischer, H. R., 1965. On equicontinuity and continuous convergence. **Math. Ann., 159**: 94-101.
12. Behling, A., 1992. Einbettung uniformer Raume in topologische Universen. Free University, PhD. Thesis, Berlin.
13. G. Preuss, 1993, Cauchy Spaces and Generalizations, **Math. Japonica, 38 No. 5**, 803-812.
14. S. Eilenberg and S. Mac Lane, 1945, General Theory of Natural Equivalences, **Transactions of the American Mathematical Society, 58 (2),** 231-294.
15. Grothendieck, A., 1957, Sur Quelquees points d'Algebre Homologique, **Tohoku Math. J.,9**, 119-221.
16. Lawvere, F. W., 1966, "The Category of categories as a Foundation for Mathematics", in Proc. Conf. on Categorical Algebra, S. Eilenberg et al. (eds.), La Jolla, 1965,

Springer-Verlag.

17. Lambek, J., 1980, "From lambda-calculus to cartesian closed categories", in J.R. Hindley and J.P. Seldin (eds.) to H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic Press, (375-402).
18. Herrlich, H.,1974, Topological Structures, In: Math.CentreTracts, Math.Centrum, Amsterdam,52, 59-122.
19. Kent, D.C.,1969, Convergence Quotient Maps, **Fund. Math. 165**: 197-205.
20. Wyler, O., 1971, Top. Categories And Categorical Topology**, Gen. Top. Appl., 11**: 17-28.
21. Schwarz, F., 1978, Connections Between Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag719, 345-354.
22. Preuss, G., 1988, Theory of Topological Structures. An Approach to Topological Categories, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
23. G. Preuss, 1995, Semiuniform Convergence Spaces, **Math. Japonica, 41 No.3**, 465-491.
24. Preuss, G., 2002, Foundations of topology, An approach to Convenient topology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
25. Baran T.M., Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yükseklisans Tezi, Kayseri, 54 sayfa, 2015.
26. Baran, M., 1992. Seperation properties, Indian J. Pure **Appl. Math., 23**: 13-21.
27. Kula S., Pre Düzgün Yakınsak Uzaylar, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Kayseri, 98 sayfa, 2014.
28. Marny, T. H., 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien, Dissertation, Freie Univ., Berlin
29. Hoffman, R-E., 1974. (E, M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, Universitat Duseldorf.
30. Harvey, J. M., 1977. T_0 -Seperation in Topological Categories, **Quaestiones Math**., 2: 177-190.
31. Brümmer, G. C. L., 1971. A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology, Univ. Of Cape Town, Ph.D. Thesis.
32. Weck-Schwarz, S., 1991. T_0 -objects and separated objects in topological categories, **Quastiones Math., 14**: 315-325.
33. Baran, M., Altındiş, H., T_0 -objects objects in topological categories, **J. Univ. Kuwait**

(Sci.) 22: 123-127.

34. Baran, M., Altındiş, H., 1996. T_2 -objects in topological categories, **Acta Math. Hungar., 71** (1-2): 41-48.

35. Baran, M., Kula, S., Erciyes, A., 2013. T_0 and T semiuniform convergence spaces, **Filomat**, 27 (4): 537-546.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatma CENKİZ
Baba Adı : Mustafa
Anne Adı : Havva
Doğum Yeri : Kütahya
Doğum Tarihi : 29.11.1986
Medeni Hâli : Bekar

EĞİTİM (DERECE/KURUM/MEZUNİYET TARİHİ)

Lisans Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2011)
Ortaöğrenim Kütahya Ali Güral Lisesi (2005)

İLETİŞİM

Adres: Kütahya Altıntaş İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü Altıntaş/ KÜTAHYA