

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN TANECİKLİ BİR KOMPOZİT İÇİN  
KARIŞIMLAR TEORİSİ YAKLAŞIMI VE ÇEŞİTLİ PROBLEMLERE  
UYGULANMASI**

**DOKTORA TEZİ**

**Emre KURT**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Makina Mühendisliği Programı**

**HAZİRAN 2019**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN TANECİKLİ BİR KOMPOZİT İÇİN  
KARIŞIMLAR TEORİSİ YAKLAŞIMI VE ÇEŞİTLİ PROBLEMLERE  
UYGULANMASI**

**DOKTORA TEZİ**

**Emre KURT  
(503122004)**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Makina Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ**

**HAZİRAN 2019**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503122004 numaralı Doktora Öğrencisi Emre KURT, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN TANECİKLİ BİR KOMPOZİT İÇİN KARIŞIMLAR TEORİSİ YAKLAŞIMI VE ÇEŞİTLİ PROBLEMLERE UYGULANMASI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Mehmet Alaittin ARPACI** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Serdar BARIŞ** .....  
İstanbul Üniversitesi

**Prof. Dr. Uğur GÜVEN** .....  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Teslim Tarihi**      :    **10 Nisan 2019**  
**Savunma Tarihi**    :    **11 Haziran 2019**





*Aileme,*



## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimi tamamladıktan 6 yıl sonra ailemin desteğiyle başladığım doktora eğitimi sürecimde 6 yıl boyunca desteğini devam ettiren eşime, canım kızlarım Zeynep Ceyda'ya ve Ayşe Serra'ya, anneme, babama, kayınvalide ve kayınpederime en içten teşekkürü kendime bir borç biliyorum.

Tez çalışmama konu olan karışımlar teorisi hakkındaki birikimini benimle paylaşan, temel kavramları bana öğreten ve çalışma boyunca yardımlarını esirgmeden sabırla beni yönlendiren hem hocam hem üstadım Sayın Prof. Dr. M. Salih Dokuz'a minnettarlığımı ifade etmekten aciz kaldığımı belirtmek istiyorum.

Nisan 2019

Emre KURT  
(Makina Yük. Mühendisi)



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
SEMBOLLER .....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY .....	xix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı .....	1
1.2 Literatür Araştırması .....	2
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER.....</b>	<b>5</b>
<b>3. BAĞIL HAREKET YAPMAYAN ORTAM KOŞULUNDA BÜNYE DENKLEMLERİNDEKİ BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BELİRLENMESİ VE BURULMA PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA</b>	<b>11</b>
3.1 Bağıl Hareket Yapmayan Ortam Koşulunda Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayıların Elde Edilmesi .....	11
3.1.1 Bilinmeyen katsayılar için elde edilen denklemler .....	12
3.1.2 Bilinmeyen katsayıların belirlenmesi.....	14
3.2 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Burulma Problemi .....	15
3.2.1 Eliptik kesitli prizmatik çubuk .....	22
3.2.2 Eşkenar üçgen kesitli prizmatik çubuk .....	24
3.2.3 Bağıl hareket yapmayan ortamda katı bileşenlerinin yük taşıma oranları	26
<b>4. BİLEŞENLERİ BAĞIL HAREKET YAPILABİLEN BİR ORTAM İÇİN KELVİN PROBLEMİ VE BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BELİRLENMESİ İÇİN BİR UYGULAMA.....</b>	<b>31</b>
4.1 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Galerkin Vektörü Metoduyla Kelvin Probleminin Çözümü.....	31
4.1.1 İki lineer elastik katı karışımı için Galerkin vektörü .....	31
4.1.2 Galerkin vektörü yoluyla Kelvin problemi çözümü.....	37
4.2 Bağıl Hareket Yapabilen Ortam Koşulunda Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayıların Belirlenmesi .....	40
4.2.1 Bilinmeyen katsayıların belirlenmesi.....	41
4.2.2 Elde edilen bilinmeyen katsayıların verdiği sonuçlar .....	44
<b>5. HACİM ORANI İLE İLİŞKİLİNDİRİLMİŞ ELASTİK KATSAYILAR VE KARIŞIM ORTAMININ BİLİNMEYEN KATSAYILARININ BU DURUMLA İLİŞKİSİ .....</b>	<b>47</b>
5.1 Hacim Oranı ile İlişkilendirilmiş Malzeme Özellikleri.....	47
5.2 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Hankel Dönüşümü Metoduyla Boussinesq Probleminin Çözümü.....	50
5.2.1 İki lineer elastik katı karışımına ait bağıntılar için Hankel dönüşümü .....	50

5.2.2 Hankel dönüşümü metoduyla Boussinesq problemi çözümü .....	54
5.3 Hacim Oranı ile İlişkilendirilmiş Malzeme Özelliklerinin Boussinesq Problemi için Verdiği Sonuçlar.....	57
<b>6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER .....</b>	<b>63</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>69</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>73</b>



## SEMBOLLER

$C_1, C_2$	: Lineer elastik katı bileşenler
$\rho, \rho_1, \rho_2$	: Karışımın ve katı bileşenlerin yoğunlukları
$\bar{\rho}, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$	: Şekil değişimi öncesi karışım ve katı bileşenlerin yoğunlukları
$x_i, y_i$	: Katı bileşenlerin parçacık konum vektörleri
$X_i, Y_i$	: Katı bileşenlerin parçacıklarının referans konum vektörleri
$v_i^{(1)}, v_i^{(2)}$	: Katı bileşenlerin $x_i$ ve $y_i$ konumlarındaki hız vektörleri
$t$	: Zaman
$f_i^{(1)}, f_i^{(2)}$	: Katı bileşenlerin ivmeleri
$w_i, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}$	: Yer değiştirme vektörleri
$\varepsilon_{ik}, e_{ik}, g_{ik}$	: Şekil değiştirme tansörleri
$t_{ik}, \sigma_{ik}, \pi_{ik}$	: Gerilme tansörleri
$p_k$	: Difüzyon kuvveti vektörü
$\alpha, \alpha_u, \alpha_v$	: Birim uzunluğa düşen burulma açıları
$\beta$	: Yük taşıma oranı
$\gamma$	: Hacim oranı
$\alpha_2, \lambda_1, \dots, \mu_1$	: Malzeme sabitleri
$\lambda, \mu$	: Lamé katsayıları
$\phi_1, \phi_2$	: Prandtl gerilme fonksiyonu
$\delta_{ik}$	: Kronecker deltası
$\nabla$	: Gradyant operatörü
$\nabla^2$	: Laplasyen operatörü
$\frac{D^{(1)}}{Dt}, \frac{D^{(2)}}{Dt}$	: Maddesel türev operatörleri
$E$	: Elastiklik modülü
$F_k, G_k$	: Kütle kuvveti vektörleri
$M_z$	: Burulma momenti
$P$	: Tekil yük
$T_i$	: Gerilme vektörü



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

<b>Çizelge 4.1</b> : Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ve NiAl katılarına ait özellikler.....	<b>41</b>
<b>Çizelge 4.2</b> : NiAl katısının farklı hacim oranları için Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -NiAl kompozitine ait bazı deneysel sonuçlar.....	<b>42</b>
<b>Çizelge 4.3</b> : Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ve NiAl katı bileşenlerinin, bağıl hareket olmayan ortam koşulunda, Kelvin ve burulma problemleri için taşıdıkları yük oranları.....	<b>42</b>
<b>Çizelge 4.4</b> : NiAl bileşeninin farklı hacim oranları için elde edilen kabul edilebilir $\lambda_3$ , $\lambda_4$ ve $\mu_3$ katsayıları.....	<b>43</b>
<b>Çizelge 5.1</b> : Elastik özellikleri hacim oranıyla ilişkilendirilmiş ve bileşenleri bağıl hareket etmeyen karışım durumu için taşınan yük oranları.....	<b>58</b>
<b>Çizelge 5.2</b> : Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ve NiAl bileşenlerinin karışım içindeki hacim oranlarına göre özellikleri.....	<b>59</b>
<b>Çizelge 5.3</b> : Elastik özellikleri hacim oranıyla değişen bileşenlerden oluşan karışım ortamı için kabul edilebilir $\lambda_3$ , $\lambda_4$ ve $\mu_3$ katsayıları.....	<b>59</b>
<b>Çizelge 6.1</b> : Bileşenleri bağıl hareket etmeyen karışım ortamında burulma, Kelvin ve Boussinesq problemleri için yük taşıma oranı denklemleri.....	<b>64</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1 : İki bileşenli karışımda şekil değiştirme.....	6
Şekil 3.1 : Ucundan burulma yüklemesine maruz prizmatik çubuk problemi.....	15
Şekil 3.2 : Eşkenar üçgen kesit. ....	24
Şekil 3.3 : $x=0$ ve $y=0$ doğrultuları boyunca bileşke gerilmelerdeki değişimler.....	27
Şekil 3.4 : Herhangi bir $z$ =sabit kesitindeki çarpılma. ....	28
Şekil 3.5 : $z=b$ kesitindeki yer değiştirme alanı değişimi.....	28
Şekil 3.6 : Üçgen kesitte üç yükseklik boyunca bileşke gerilmelerin değişimleri. ...	28
Şekil 3.7 : Herhangi bir $z$ =sabit kesitindeki çarpılma. ....	29
Şekil 3.8 : $z=a$ kesitindeki yer değiştirme alanı değişimi .....	29
Şekil 4.1 : Kelvin problemi.....	37
Şekil 4.2 : $\gamma = 0.3$ için bağıl hareketsiz ortamda Kelvin problemine ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	44
Şekil 4.3 : $\gamma = 0.3$ için bağıl hareketli ortamda Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri .....	45
Şekil 4.4 : $\gamma = 0.4$ için bağıl hareketsiz ortamda Kelvin problemine ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	45
Şekil 4.5 : $\gamma = 0.4$ için bağıl hareketli ortamda Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri .....	46
Şekil 5.1 : Boussinesq problemi.....	53
Şekil 5.2 : $\gamma = 0.3$ için bağıl hareketsiz ortamda Boussinesq probleminin çözümüne ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	60
Şekil 5.3 : $\gamma = 0.3$ için bağıl hareketli ortamda Boussinesq probleminin 2. çözüm grubuna ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	60
Şekil 5.4 : $\gamma = 0.4$ için bağıl hareketsiz ortamda Boussinesq probleminin çözümüne ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	61
Şekil 5.5 : $\gamma = 0.4$ için bağıl hareketli ortamda Boussinesq probleminin 2. çözüm grubuna ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	61
Şekil 6.1 : Bağıl hareketi olmayan ortamda $\gamma = 0.3$ hacim oranı için Kelvin problemine ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri.....	66
Şekil 6.2 : Bağıl hareketli ortamda $\gamma = 0.3$ hacim oranı için Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri. ....	67
Şekil 6.3 : Bağıl hareketi olmayan ortamda $\gamma = 0.4$ hacim oranı için Kelvin problemine ait $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri. ....	67
Şekil 6.4 : Bağıl hareketli ortamda $\gamma = 0.4$ hacim oranı için Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği $u_z^{(1)}$ , $u_z^{(2)}$ değişimleri. ....	68



# İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN TANECİKLİ BİR KOMPOZİT İÇİN KARIŞIMLAR TEORİSİ YAKLAŞIMI VE ÇEŞİTLİ PROBLEMLERE UYGULANMASI

## ÖZET

İki veya daha fazla maddenin karşılıklı difüzyona uğraması sonucu oluşturdukları cismin mekanik davranışını sürekli ortamlar mekaniğini baz alarak belirlemeye uğraşan bilim alanına karışımlar teorisi denmektedir. Bölgenin her noktasında sürekli ortam tanımına uyacak şekilde varlığını devam ettiren bileşenlere sahip kompozit malzemeler ve alaşımlar yapısı itibarıyla karışımlar teorisi yaklaşımıyla inceleyebilecek malzemeler olarak göze çarpmaktadır. İki lineer elastik katı karışımı için elde edilmiş olan temel bünye denklemleri, makroskopik boyutta ortamın her noktası her iki bileşen tarafından da işgal edilmiş gibi tasavvur edilebilen, iki bileşenli kompozit malzemelerin davranışlarını açıklamak için alternatif bir yol olarak kullanılabilir. Katı-katı karışımına ait lineer bünye denklemleri klasik elastisite teorisindeki lineer izotropik bir elastik malzemenin bünye denklemine şekilsel olarak benzerlik göstermektedir.

Karışımlar teorisinin ortaya koyduğu matematiksel modelleri kullanma konusunda en büyük sorun bünye katsayılarının belirlenmesindeki, sınır koşullarının yazılmasındaki ve bileşenler arasındaki etkileşimlerin tanımlanmasındaki zorluklardan kaynaklanmaktadır. Bu durum karışımlar teorisini baz alan pratik uygulamaların azlığına sebep olmuştur.

Bu çalışmada, termal etkilerin, karışım bileşenleri arasında kimyasal etkileşimlerin ve kütle kuvvetlerinin ortam davranışına etkilerinin ihmal edildiği denge halindeki iki lineer elastik katı karışımına ait teorik model kullanılmaktadır. Aynı zamanda, karışım ortamının bir bütün olarak sergilediği mekanik davranışa eşdeğer bir davranış sergileyen tekil bir elastik ortam tasavvur edilerek her iki ortama ait denklemler arasında bazı ilişkiler tanımlanmaktadır. Böylelikle, hem karışımlar teorisinin ortaya koyduğu iki lineer elastik katı karışımına ait düşünceler, hem de ortama bir bütün olarak bakıldığında tekil bir ortam gibi davranış sergilediği için klasik elastisite teorisi çözüm yöntemleri kullanılabilir. Bu kapsam, tanecikli kompozit bir malzemenin ve kompoziti oluşturan katı bileşenlerin malzeme özelliklerine ait deneysel verilerin hesaplamalarda kullanılabilmesine imkan tanımaktadır. Bu da, karışımlar teorisinde ortaya çıkan ek bünye katsayılarının belirlenmesi için analitik yöntemler geliştirilebilmesine fırsat vermektedir.

Yukarıda genel hatlarıyla ifade edilen yol haritası kapsamında, öncelikle, literatürde verilmiş olan bileşenleri bağıl hareket yapmayan karışım ortamı için bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar arasında elde edilmiş denklemler açıklandıktan sonra karışık formdaki bu denklemler sadeleştirilerek bilinmeyen katsayıların bilinen katsayılar cinsinden yazılabildiği münferit denklemler elde edilmektedir. Ardından, iki lineer elastik katı karışımı için Prandtl gerilme fonksiyonları yardımıyla burulma probleminin formülasyonu sonucunda karışım

bileşenlerinin yer değiştirme vektörleri, şekil değiştirme ve gerilme tansörleri için bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra, eliptik kesitli ve eşkenar üçgen kesitli prizmatik çubukların burulmasına dair uygulamalar ele alınmıştır. Burulma probleminin verdiği sonuçların daha az elastik katsayı içermesi nedeniyle, sadeliğinin ortamın her bir bileşeni tarafından taşınan yük miktarının anlaşılması konusunda faydalı olacağı değerlendirilerek bu hususta tanecikli yapıya sahip kompozit bir malzemenin verileri kullanılarak bir uygulama yapılmaktadır.

Çalışmanın devamında, bileşenleri arasında bağıl hareketin mümkün olduğu bir karışım söz konusu olduğunda bilinmeyen bünye katsayılarının tespitine yönelik bir düşünce ortaya konmaktadır. Bu amaçla, literatürde daha önce iki lineer elastik katı karışımı için Papkovich-Neuber metoduyla çözümü verilmiş olan Kelvin problemi Galerkin vektörü metoduyla çözülerek hem literatüre katkıda bulunulmakta hem de zikredilen hedef dahilinde kullanılacak denklemler elde edilmektedir. Bulunmuş olan bağıntılar ilgili denklemlerde tanecikli yapıya sahip kompozit bir malzemenin verileriyle birlikte kullanılarak bilinmeyen katsayılar için sayısal sonuçlar elde edilmektedir. Böylece bileşenleri bağıl hareket edebilen ve edemeyen karışım ortamları için Kelvin probleminden elde edilen verilerin karşılaştırılabilmesi mümkün olmaktadır.

Kullanılan teorik modelde karışım bileşenlerine ait malzeme özelliklerinin bileşen hacim oranıyla ilişkisi açık formda ifade edilmemektedir. Bu sebeple bu modeli kullanarak yapılmış olan hesaplamalarda tanecikli yapıya sahip kompoziti oluşturan bileşenlerin tekil haldeki özelliklerinin kullanılması tercih edilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise, kompoziti oluşturan her bir katının karışım içerisindeki özellikleriyle tekil haldeki özellikleri arasında bir bağıntı elde etmek amacıyla her bir katıyı diğer katının hacim oranı kadar gözenek içeren bir yapı gibi kabul ederek, literatürde gözenekli malzemelerin elastik özelliklerini tahmin etmek için kullanılan düşünceleri iki lineer elastik katı karışımına uyarlama amaçlı bir deneme yapılmaktadır. Bunun bir uygulaması olarak da iki lineer elastik katı karışımı için Hankel transformasyonu metoduyla Boussinesq probleminin çözümü verilerek bileşen davranışları bağıl hareketsiz ve bağıl hareketli ortamlar için irdelenmektedir.

# **THEORY OF MIXTURES APPROACH FOR A PARTICULATE COMPOSITE CONSISTED OF A MIXTURE OF TWO LINEAR ELASTIC SOLIDS AND ITS APPLICATIONS TO VARIOUS PROBLEMS**

## **SUMMARY**

Accompanied by industrial progresses, due to increasing expectations from material properties and much cases failing to satisfy these expectations from single component materials, the researches for multi-component materials have become a technological necessity. The structure that at least two constituent components of continuum has perceivable effect on behavior of whole continuum is defined as mixture. By using the fundamentals of continuum mechanics, derivation of mathematical models for the mechanical behavior of each constituent of the mixture has been in progress since 1960s. Theory of mixtures is a field of science dealing with multi-component materials and tries to determine their mechanical behaviours. Composites and alloys are supposed to be suitable materials to study by using the approach of theory of mixtures due to their structures that the constituent components are valid at every point of any region of the material.

The basic constitutive equations obtained for a mixture of two linear elastic solids can be used as an alternative way to describe the mechanical behaviour of binary composite materials that each point belongs to mixture is assumed as being occupied by a particle of each solid in consideration of a macroscopic scale. The constitutive equations that belong to mixture of two linear elastic solids are formally similar to those of linear isotropic elastic material in classical elasticity theory.

The important limitations using mathematical models derived by the theory of mixtures result from challenges of determining constitutive coefficients, expressing boundary conditions and defining interactions between constituent components. These cause rarity of applications based on the theory of mixtures.

The theoretical model used in this study is the equilibrium condition of a mixture of two linear elastic solids in such assumptions that thermal effects, chemical interactions between constituent components and effects of body forces on the behaviour of media are neglected. Moreover, the mechanical behavior of the whole mixture continuum is considered as the behavior of a mechanically equivalent single elastic continuum. Then, by using the solution methods of the classical theory of elasticity to the equivalent single elastic continuum representing the whole mixture behaviour, some relations between the equations of these two continuums are defined. In this way, both the considerations of two linear elastic solids presented by the theory of mixtures and the solution methods of the classical theory of elasticity can be used in the calculations. This scope allows us to use empirical data of material properties of both a particulate composite material and constituent solids of it in the calculations. By this means, we are given an opportunity to develop analytic methods for determining the remaining undetermined coefficients in the constitutive equation of the theory of mixtures. These remaining undetermined coefficients are defined as interaction coefficients in the

constitutive equations which is one of the main challenge to determine in this theory. The above explained approach to determine constitutive coefficients has been in progress since 2005.

Using the scope of above mentioned essentials of our roadmap, in the literature, numerical results for unknown coefficients in the constitutive equations for a binary mixture of elastic solids with no relative displacement (mutual motion) between the mixture components (perfectly bonded interface) are valid. These numerical results are obtained from some specific relations. In this study, a more general consideration that the relations for the case of a binary mixture allowing relative displacements between the mixture components are investigated. As the obtained more general results of this study also involve the previous results founded in the literature, this provides a useful check for the accuracy of calculations. Moreover, in this study, by simplifying these specific relations for no relative displacement case, individual equations for each unknown constitutive coefficients in terms of determined constitutive coefficients are obtained.

After that, torsion formulation of a linear elastic solid-solid mixture is obtained by using Prandtl stress function method. With this formulation, the angles of twist per unit length, partial stress and strain tensors, and displacement fields for each constituent solids are calculated. Then, this solution method is applied to elliptical and equilateral triangular cross-sectional prismatic bars subjected to torsion acting on the end plane. As the formulation of torsional end loading problem involves less coefficients of elasticity, the simplicity of its structure is evaluated to be beneficial to understand the external load ratios carried by each constituent solid. So, by using the empirical data of a particulate composite material an application is performed for no relative displacement case and the external load ratios carried by each constituent solid can be calculated directly. The result of this calculations shows that the load ratios carried by each constituent solid are not equal to their volume fractions in the whole mixture which is one of the assumptions in the literature for the load ratios carried by each constituent solid. So, throughout the study the load ratios carried by each constituent solid are not associated to their volume fractions in the whole mixture.

In the continuation of the study, an opinion is submitted to determine the unknown constitutive coefficients in case of a mixture continuum allowing relative displacements between its constituent solids. For this purpose, the solution of Kelvin problem for a mixture of two linear elastic solid by using Galerkin vector method instead of Papkovitch-Neuber method which is founded in the literature is obtained. Thus, both a contribution to the literature is made and equations to use for the said purpose are derived. By using the empirical data of a particulate composite material with these derived equations in the individual relations according to unknown constitutive coefficients, numerical results for the unknown constitutive coefficients are obtained. As the appointed individual relations contains non-linear terms, individual equations for each unknown constitutive coefficients in terms of determined constitutive coefficients can not be given for the case of a mixture continuum allowing relative displacements between its constituents. Having the numerical results for both no relative displacement and relative displacement continuums between the mixture components enables us to make a comparison of the data obtained from Kelvin problem for each case.

It is worth to underline the obtained result of this study that load ratios carried by each constituent solid is varied for different types of loading of the whole mixture.

Moreover, for the different volume fraction of the constituent solids in the whole mixture, the load ratios carried by each constituent solid is also varied. Another important point is that for no relative displacement between the mixture components case using the calculated load ratios instead of load ratios supposed to be equal to their volume fraction in the whole mixture gives equal displacement results of two constituent solids as expected. The third point to underline is that in case of a mixture continuum allowing relative displacements between its constituent solids, two different results are obtained. One result is identical to no relative displacement case, and second result is different from no relative displacement case and clearly shows varied displacement results of two constituent solids.

In the theoretical model used in this study, there is no limiting prediction for the relation between the material properties of the constituent components of mixture and the volume fraction of components in the whole mixture in the structural formulas founded in the literature. Thus, while performing calculations using this model it is preferred to use stand-alone material properties of the constituent components of the particulate composite in the equations, directly. But, in the last section of the study, each constituent solids in the mixture is supposed to have different material properties from its stand-alone conditions. Thus, in accordance with rule of mixtures which is a valid approach to predict various properties of composite materials, for trial purposes, a linear relation between the material properties of each constituent solid in the mixture and the material properties of each constituent solid in the stand-alone condition is defined. This definition is derived by the assumption that each constituent solid is in the structure that contains porosity in the amount of the volume fraction of the other constituent solid in the whole mixture. By using this assumption, a trial is performed in an attempt to adapt the considerations for estimating the elastic properties of porous materials in the literature to the mixture of two linear elastic solids. For an application of this trial, after the solution of Boussinesq problem for a mixture of two linear elastic solid by using Hankel transform method is given, the behaviours of the constituent solids are studied for both no relative displacement and relative displacement continuums between the mixture components cases.

At the end of the last section, it is shown that similar results of the previous consideration used in the previous section can be obtained by using a relation among the material properties of each constituent solid in the mixture and the material properties of each constituent solid in the stand-alone condition. So, this kind of consideration may assist the further researches in this field.



## 1. GİRİŞ

İki veya daha fazla maddenin karşılıklı difüzyona uğraması sonucu oluşturdukları cismin mekanik davranışını sürekli ortamlar mekaniğini baz alarak belirlemeye uğraşan bilim alanına karışımlar teorisi denmektedir. Maddesel bir cismin karışımlar teorisi kapsamında incelenbilmesi ancak onu oluşturan en az iki maddenin cismin davranışları üzerinde kabul edilebilir bir tesirinin olması ile mümkün olabilmektedir. Aksi takdirde cismi oluşturan maddelerden baskın olanının yanında diğerlerinin etkisi ihmal edilebilecek boyutta olması durumunda oluşan cisme baskın maddenin tekil malzemesi gözüyle bakılabilmektedir.

Bölgenin her noktasında sürekli ortam tanımına uyacak şekilde varlığını devam ettiren bileşenlere sahip kompozit malzemeler ve alaşımlar yapıları itibariyle karışımlar teorisi yaklaşımıyla incelenbilecek malzemeler olarak göze çarpmaktadır. Endüstriyel gelişmelerle birlikte önemi giderek artmakta olan kompozit malzemeler üzerinde birçok farklı deneysel ve teorik araştırmalar yapılmaktadır. Karışımlar teorisi yardımıyla bazı tip kompozit malzemeler için türetilmiş olan güncel ilişkilere destek olabilecek sonuçlara ulaşılabilir ve ilgili araştırmacılara farklı bir bakış açısı sunulabilir diye düşünülmektedir.

### 1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, literatürdeki mevcut iki lineer elastik katı karışımı için yapılan çalışmalara katkı sağlayacak şekilde farklı problem tipleri için uygulamalar yapılması temel amacı yanında, bileşenleri bağıl hareket yapabilen bir karışım ortamına ait bilinmeyen katsayıların analitik yolla bulunabilmesini sağlayacak bir yöntem için de gayret sarfedilmesi hedeflenmiştir.

Bu kapsamda, iki bileşenli bir karışımın kinematiği ve iki lineer elastik katı karışımının temel denklemleri hakkında bilgi verilmesini müteakiben karışım bileşenlerinin bağıl hareket yapmadığı bir ortam için temel denklemlerdeki bilinmeyen katsayıları veren bağıntılar açıklanmış ve bilinmeyen katsayıların bilinen katsayılar cinsinden

yazılabildiği münferit denklemlere ulaşılmıştır. Ardından, burulma probleminin karışımlar teorisi kapsamında çözümü verildikten sonra karışım bileşenlerinin bağıl hareketsiz ortamı için her bir bileşenin yük taşıma oranları elde edilmiştir.

Literatürde iki lineer elastik katı karışımı için Papkovich-Neuber metoduyla çözümü verilmiş olan Kelvin probleminin bu çalışmada Galerkin vektörü metoduyla çözümü elde edilerek, bu çözüm yardımıyla karışım bileşenlerinin bağıl hareket yapabildiği bir ortam için temel denklemlerdeki bilinmeyen katsayıların bulunabilmesine imkan sağlayan bir düşünce sunulmuştur. Böylelikle, bağıl hareketli ve bağıl hareketsiz karışım ortamı koşullarında Kelvin probleminden elde edilen veriler karşılaştırılabilmektedir.

Son olarak, karışımı oluşturan malzemelerin tekil haldeki durumlarına ait katsayıların her bir karışım bileşeninin ortam içindeki hacim oranıyla ilişkilendirildiği bir durum öngörülerek, bünye katsayılarının modifiye edildiği bir hesap amaçlanmıştır. Ardından, Hankel transformasyonu metoduyla Boussinesq probleminin çözümü verilerek bu çözüm yardımıyla yeni katsayıların bağıl hareketsiz ve bağıl hareketli ortamlarda verdiği sonuçlar irdelenmiştir.

## **1.2 Literatür Araştırması**

Karışımlar teorisinin günümüzdeki formülasyonunun temelleri Truesdell ve Toupin (1960) ve Green ve Naghdi (1965) tarafından yapılan çalışmalara dayanmaktadır. Bu teori hakkında geniş çaplı değerlendirmeler Atkin ve Craine (1976), Bowen (1976), Bedford ve Drumheller (1983) ve Rajagopal ve Tao (1995) tarafından sunulan çalışmalarda bulunmaktadır. Bu çalışmalarda akışkan veya katı karışımları şeklinde ayırt etmeksizin genel olarak sürekli ortam kapsamına giren tüm malzemelerin karışımları modellenmektedir. Özel olarak sadece katı karışımlarının bünye denklemleriyle ilgilenen çalışmalar için Green and Steel (1966), Bowen and Wiese (1969) ve daha yakın tarihli olarak Rushchitsky (1996, 2008), Ieşan (1994, 1997, 2011), Ciarletta (1998), Burchuladze and Svanadze (2000), Passarella and Zampoli (2006), Leseduarte and Quintanilla (2008), Simchuk and Priz (2010), Muti and Dokuz (2015), Binark ve Dokuz (2017) tarafından yapılan çalışmalar zikredilebilir.

Bölgenin her noktasında sürekli ortam tanımına uyacak şekilde varlığını devam ettiren bileşenlere sahip kompozit malzemeler ve alaşımlar, yapısı itibarıyla karışımlar teorisi

yaklaşımıyla inceleyebilecek malzemeler olarak göze çarpmaktadır. Bu kapsamda, Green ve Naghdi (1965) tarafından verilen etkileşimli ortamların genel termodinamik teorisini kullanarak, Green ve Steel (1966) katı-katı karışımları için temel bünye denklemlerini vermiş ve daha sonra Steel (1967) bu denklemlerin lineer hallerini elde etmiştir. Sonraki bir çalışmada Steel (1968) böyle bir teorisinin makroskopik boyutta ortamın her noktası her iki bileşen tarafından da işgal edilmiş gibi tasavvur edilebilen kompozit malzemeler veya ikili alaşımların davranışlarını açıklamak için bir alternatif olabileceğini belirtmiştir.

Kompozit malzemeler için farklı bir yaklaşımla karışımın elastik katı bileşenlerinin uzaysal konum yerine maddesel konumda aynı yeri işgal ettiklerini kabul eden ve bünye bağımsız değişkenlerinden olan bağıl hız yerine bağıl yer değiştirme alanı kullanan bir teori de Bedford ve Stern (1972) tarafından verilmiştir. Ayrıca, Tiersten ve Jahanmir (1977) tarafından sunulan diğer bir kompozitler teorisinde de kompozit yapı karışım halindeki bir katı olarak modellenerek bileşenlerin birbirlerine göre bağıl hareketleri sonsuz küçük kabul edilmiştir.

İki lineer elastik katı karışımının matematiksel yönüyle ilgilenen Borrelli ve Patria (1983), çalışmada izotropik bir karışımda malzeme sabitlerinin maruz kaldıkları kısıtlamaları ortaya koymuşlardır.

Karışımlar teorisinin ortaya koyduğu matematiksel modelleri kullanma konusunda en büyük kısıtlama bünye katsayılarının belirlenmesindeki, sınır koşullarının yazılmasındaki ve bileşenler arasındaki etkileşimlerin tanımlanmasındaki zorluklardan kaynaklanmaktadır. Bu durum karışım teorisini baz alan pratik uygulamalarının azlığına sebep olmuştur. Katı-katı karışımına ait lineer bünye denklemleri klasik elastisite teorisindeki lineer izotropik bir elastik malzemenin bünye denklemine şekilsel olarak benzerlik göstermektedir. Steel (1967) tarafından verilen lineer bünye denklemleri ışığında Gürgöze ve Dokuz (1999, 2002) bu matematiksel modeli Kelvin ve Boussinesq problemlerine uygulayarak karışımlar teorisinin pratik uygulamalarına örnekler verdiler. Dokuz (2002) tarafından yapılan çalışmanın ardından, iki lineer elastik katıdan oluşan izotropik bir karışımın, rastgele dağılımlı elastik kürelerden oluşan tanecikli bir kompozit malzemeye mekanik davranış açısından eşdeğer kabul edilmesinin getireceği sonuçları bulmayı amaçlayan bir çalışma yine Dokuz (2005) tarafından gerçekleştirilmiştir. Söz konusu çalışmada, karışımın bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayıların tespiti amacıyla

Boussinesq probleminin çözümünden yararlanılmıştır. Muti ve Dokuz (2015) ise, iki lineer elastik katı karışımında düzlemsel gerilme ve düzlemsel şekil değiştirme halleri için Beltrami-Michell denklemlerini elde ederek bunları dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemlerinin çözümünde kullanmıştır. Kısa bir süre önce, Binark ve Dokuz (2017) iki lineer elastik katı karışımındaki bileşenlerin bağıl hareket yapmaması koşulu altında bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar arasında basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneylerinin matematiksel modelleri yardımıyla bazı analitik ilişkiler elde ettiler.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER

Karışımlar teorisi, birden fazla bileşen içeren özel bir malzeme modelini sürekli ortamlar mekaniğinin bakış açısıyla değerlendiren bir bilim dalıdır. Bu kapsamda, iki bileşenli bir malzemeyi, karışıma ait uzayın her konumunda her bir bileşenin yeterli yoğunluğa sahip olduğu yani her bir bileşen için karışımın sürekli ortam olduğu kabul edilsin. Buna ek olarak, karışıma ait uzayda herhangi bir noktayı çevreleyen yeteri kadar büyük herhangi bir  $\Delta V$  hacminde iki bileşen de karışımın genelini tutarlı olarak temsil edebilecek kadar bulunuyor kabulü yapılsın. Bu kabüller doğrultusunda iki bileşenli genel bir karışım için Green ve Naghdi (1965) tarafından önerilen temel aksiyomlardan yola çıkarak iki elastik katı bileşenli bir karışım için nonlinear bünye denklemleri Green ve Steel (1966) tarafından verildikten sonra Steel (1967) tarafından bu denklemlerin lineer halleri elde edilmiştir. İki lineer elastik katı karışımı için Steel (1967) tarafından verilen lineer bünye denklemleri ışığında ele aldığımız katı-katı karışımına ait teorik yapı aşağıda özetlenmektedir.

$C_1$  ve  $C_2$  olarak temsil edilen iki lineer elastik katı bileşenin oluşturduğu karışımın, bir bütün olarak, ilk anda izotropik olduğu ve karışıma ait her bir bileşenin yoğunluğunun ( $\bar{\rho}_1$  ve  $\bar{\rho}_2$ ) şekil değişiminden önce sabit olduğu düşünülmektedir. Buna ek olarak, makroskopik boyutta düşünüldüğünde karışımın her noktasının her iki katı parçacığı tarafından da işgal edildiği, yani  $x_i = y_i$  olduğu kabul edilmektedir. Karışımlar teorisinin temel kabülü olan bu düşünce doğrultusunda karışım bileşenlerinin uzaysal parçacık konumları,  $t$  anında

$$x_i(t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad y_i(t) = y_i(Y_1, Y_2, Y_3, t) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $X_i$  ve  $Y_i$ , bileşene ait parçacıkların referans yani maddesel konumlarını temsil etmektedir. Buna göre,  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin sırasıyla herhangi bir  $x_i$  ve  $y_i$  konumlarındaki hızları

$$V_i^{(1)} = \frac{D^{(1)}(x_i)}{Dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad V_i^{(2)} = \frac{D^{(2)}(y_i)}{Dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} \quad (2.2)$$

olmaktadır.  $\frac{D^{(1)}}{Dt}$  ve  $\frac{D^{(2)}}{Dt}$  maddesel türev operatörlerinin açık halleri

$$\frac{D^{(1)}(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + v_i^{(1)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}, \quad \frac{D^{(2)}(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + v_i^{(2)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_i} \quad (2.3)$$

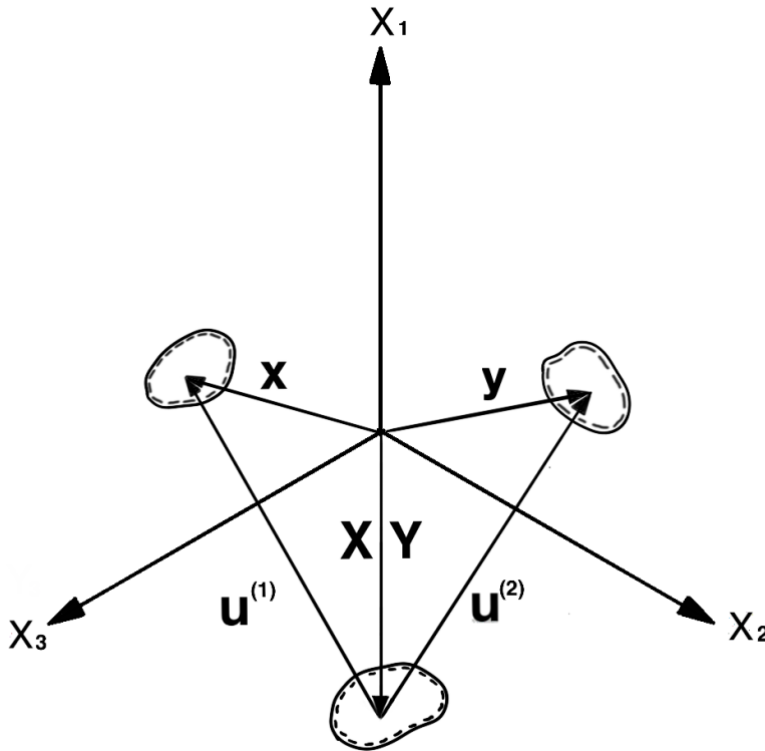
şeklindedir. Bu çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe, parantez içindeki indisler dışında tekrarlanan iki indis üzerinde 1'den 3'e kadar toplama yapılacaktır.  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  sırasıyla  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin yoğunluğu olmak üzere karışımın yoğunluğu

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (2.4)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin ivmeleri ise

$$f_i^{(1)} = \frac{D^{(1)}(v_i^{(1)})}{Dt}, \quad f_i^{(2)} = \frac{D^{(2)}(v_i^{(2)})}{Dt} \quad (2.5)$$

bağıntılarıyla temsil edilmektedir.



**Şekil 2.1** : İki bileşenli karışımda şekil değiştirme.

Buradakinden farklı olarak, karışım davranışının Lagrange yorumuna göre, deforme olan parçacıklar şekil değişiminden önce aynı konumu ( $X_i = Y_i$ ) işgal ederler. Tüm yer değiştirme gradyanları ve zamana ve konuma göre türevler çok küçük kabul

edildikleri için kısmi gerilmeleri ve difüzyon kuvvetini temsil eden denklemlerde sadece lineer terimler dikkate alınmaktadır. Ortama ait yer değiştirme bileşenleri için

$$x_i = X_i + u_i^{(1)}, \quad y_i = Y_i + u_i^{(2)} \quad (2.6)$$

yazabiliriz. Burada  $u_i^{(1)}$  ve  $u_i^{(2)}$  vektörleri,  $C_1$  ve  $C_2$  olarak temsil edilen her bir katı bileşene ait maddesel ve uzaysal konumlar arasındaki yer değiştirmeleri temsil etmektedir. Termal etkilerin ve karışım bileşenleri arasında herhangi bir kimyasal etkileşimin olmadığı kabul edilerek karışımı oluşturan katıların süreklilik denklemleri

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1(1 - e_{mm}), \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2(1 - g_{mm}) \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $C_1$  ve  $C_2$ 'ye ait birim şekil değiştirme tansörleri  $e_{ik}$  ve  $g_{ik}$  ile tanımlanmaktadır. Bu tansörler, lineer teoride aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_i} \right), \quad g_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial X_i} \right). \quad (2.8)$$

Ayrıca, denge halindeki iki elastik katıdan oluşan bir karışım için  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin hız ve ivme bileşenleri sıfır olacaktır. Bu şartlar altında lineer bünye denklemleri ve difüzyon kuvveti vektörü Steel (1967a) tarafından

$$\sigma_{ik} + \alpha_2 \delta_{ik} = \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} - \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) \quad (2.9)$$

$$\pi_{ik} - \alpha_2 \delta_{ik} = \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 e_{ik} + \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) \quad (2.10)$$

$$p_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} \quad (2.11)$$

şeklinde verilmektedir. Burada  $\bar{\rho}_1$  ve  $\bar{\rho}_2$  yoğunluklarıyla ilişkili olan  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ ,  $\lambda_5$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  ve  $\mu_3$  katsayıları sabit kabul edilmektedir.  $\delta_{ik}$  terimi ise Kronecker deltasını göstermektedir. Denklemlerde geçen diğer terimler için

$$h_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial X_k} \right), \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4 \quad (2.12)$$

tanımları geçerlidir. (2.9) ve (2.10) denklemlerine göre  $\alpha_2$  katsayısı aynı zamanda öngerilme olarak da yorumlanabilir. Karışımı ilk anda bir bütün olarak izotropik düşünmek yerine  $C_1$  ve  $C_2$ 'yi ayrı ayrı izotropik olarak düşünersek  $\lambda_5 = 0$  olur ve

böylece  $\lambda_1, \mu_1$  ve  $\lambda_2, \mu_2$  sırasıyla  $C_1$  ve  $C_2$  katılarına ait Lamé elastik katsayıları olarak düşünülebilir (Steel, 1967b, 1968).

$C_1$  ve  $C_2$  katılarına ve tüm karışıma ait denge denklemleri,

$$\sigma_{ik,i} - p_k + F_k = 0, \quad \pi_{ik,i} + p_k + G_k = 0, \quad \sigma_{ik,i} + \pi_{ik,i} + F_k + G_k = 0 \quad (2.13)$$

şeklindedir. Burada  $F_k$  ve  $G_k$  sırasıyla  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenleri için kütle kuvveti vektörlerini ve virgül sembolü ilgili değişkenin konuma göre türevini temsil etmektedir.

Yapılan çalışmalarda bundan böyle  $C_1$  ve  $C_2$  ayrı ayrı izotropik olarak düşünülmemekte ( $\lambda_5 = 0$ ) ve kütle kuvvetinin ortam davranışına etkisi diğer etkiler yanında ihmal edilmektedir ( $F_k = G_k = 0$ ). Buna ek olarak, karışım ortamının bir bütün olarak sergilediği mekanik davranışa eşdeğer bir davranış sergileyen tekil bir elastik ortam tasavvur edilerek her iki ortama ait denklemler arasında bazı ilişkiler tanımlanmaktadır. Karışımlar teorisinde karışım ortamının tümüne ait toplam gerilme aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$t_{ik} = \sigma_{ik} + \pi_{ik}. \quad (2.14)$$

Karışım ortamının bütünsel davranışını temsil eden eşdeğer tekil ortamın yer değiştirme vektörü  $w_i$  ile gösterilmekte ve bu parametre karışım için ortalama yer değiştirme olarak isimlendirilmektedir. Eşdeğer tekil elastik ortamın yer değiştirme vektörüyle karışımı oluşturan katıların yer değiştirme vektörleri arasındaki ilişki Dokuz (2005) tarafından

$$\mu w_i = (\mu_1 + \mu_3)u_i^{(1)} + (\mu_2 + \mu_3)u_i^{(2)} \quad (2.15)$$

şeklinde verilmiştir. Burada  $\mu$ , eşdeğer tekil elastik ortamın Lamé katsayılarından birini (kayma modülü) temsil etmektedir. Eşdeğer tekil elastik ortamın şekil değiştirme tansörü

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial X_k} + \frac{\partial w_k}{\partial X_i} \right) \quad (2.16)$$

şeklindedir.  $\varepsilon_{ik}$ , karışım için ortalama şekil değiştirme tansörü olarak isimlendirilmektedir. (2.15) denklemi (2.16) ve (2.8) denklemlerinde yerlerine konulursa,

$$\mu\varepsilon_{ik} = (\mu_1 + \mu_3)e_{ik} + (\mu_2 + \mu_3)g_{ik} \quad (2.17)$$

ilişkisi elde edilir. Karışıma ait süreklilik denklemi ortalama şekil değiştirme tansörü cinsinden

$$\rho = \bar{\rho}(1 - \varepsilon_{mm}) \quad (2.18)$$

şeklindedir. (2.7) ve (2.18) denklemlerinin (2.12)<sub>2</sub> kullanılarak (2.4) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\bar{\rho}\varepsilon_{mm} = \bar{\rho}_1 e_{mm} + \bar{\rho}_2 g_{mm} \quad (2.19)$$

ilişkisi elde edilir.

(2.9) ve (2.10) lineer bünye denklemlerinin karışıma ait (2.13)<sub>3</sub> denge denkleminde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & 2(\mu_1 + \mu_3)e_{ik,i} + (\lambda_1 + \lambda_4)e_{mm,k} \\ & + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{ik} + (\lambda_2 + \lambda_3)g_{mm,k} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

bağıntısına varılır. (2.8) ile verilen birim şekil değiştirme tansörlerinin (2.20) denkleminde kullanılmasıyla karışıma ait denge denklemi yer değiştirme vektörleri cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned} & (\mu_1 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \\ & + (\mu_2 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} + (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ayrıca, yukarıda verilen denklemler aşağıdaki tansörel ilişkiler ile de temsil edilebilir ( $\mathbf{I}$ , birim tansörü temsil etmektedir.):

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T, \quad 2\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T, \\ & \nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = e_{mm}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)} = g_{mm}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma + \alpha_2 \mathbf{I} = & \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{I} + \mu_1 [\nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T] + \lambda_3 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) \mathbf{I} \\ & + \mu_3 [\nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \pi - \alpha_2 \mathbf{I} = & \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) \mathbf{I} + \mu_2 [\nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T] + \lambda_4 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{I} \\ & + \mu_3 [\nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}). \quad (2.25)$$



### **3. BAĞIL HAREKET YAPMAYAN ORTAM KOŞULUNDA BÜNYE DENKLEMLERİNDEKİ BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BELİRLENMESİ VE BURULMA PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA**

İkinci bölümde, iki lineer elastik katı karışımı için bünye denklemleri (2.9) ve (2.10) bağıntıları ile verilmiş idi. Ayrıca,  $C_1$  ve  $C_2$  ayrı ayrı izotropik ( $\lambda_5 = 0$ ) kabul edildiğinde  $\lambda_1, \mu_1$  ve  $\lambda_2, \mu_2$  katsayılarının sırasıyla  $C_1$  ve  $C_2$  katı bileşenlerine ait Lamé elastik katsayıları olarak düşünülebileceği beyan edilmişti. Bu durumda,  $\lambda_3, \lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar olarak karşımıza çıkmaktadır.

Binark ve Dokuz (2017), iki lineer elastik katı karışımındaki bileşenlerin bağıl hareket yapmaması koşulu altında bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar arasında basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneylerinin matematiksel formülasyonları yardımıyla bazı analitik ilişkiler elde ettiler. Bu bölümde öncelikle elde edilen bu ilişkiler özetlendikten sonra, karışık formdaki bu denklemler sadeleştirilerek bağıl hareket yapmayan bir ortam için bilinmeyen katsayıların bilinen katsayılarla ilişkilerini temsil eden denklemler verilecektir. Ardından, iki lineer elastik katı karışımı için ucundan burulma yüklemesine maruz prizmatik çubuk probleminin çözümü verilerek bileşenlerin bağıl hareket yapmadığı ortam koşulunda her bir bileşenin yük taşıma oranı elde edilecektir.

#### **3.1 Bağıl Hareket Yapmayan Ortam Koşulunda Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayıların Elde Edilmesi**

Binark ve Dokuz (2017) tarafından iki lineer elastik katı karışımındaki bileşenlerin bağıl hareket yapmaması koşulu altında bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar arasında basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneyleri yardımıyla elde edilen analitik ilişkiler aşağıda özetlendiği gibidir.

### 3.1.1 Bilinmeyen katsayılar için elde edilen denklemler

Bir çubuk numunesi ile yapılan basit çekme deneyinde, çubuğun tekil çekme kuvveti doğrultusunda maruz kaldığı gerilmeyi karışım ortamının bütünsel davranışını temsil eden eşdeğer tekil ortama ait gerilme olarak düşünerek  $t_{11} = \sigma$  şeklinde tanımlarsak, eşdeğer tekil ortama ait diğer tüm gerilme bileşenleri sıfır olacaktır. Karışım bileşenlerine ait kısmi gerilmeler ile karışımın tümüne ait toplam gerilme arasındaki ilişki (2.14)'te verilmişti. Buna göre, (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerini kullanarak  $C_1$  ve  $C_2$ 'ye ait gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{11} + \alpha_2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{11} + \lambda_1(e_{22} + e_{33}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{11} + \lambda_3(g_{22} + g_{33}), \quad (3.1)$$

$$\pi_{11} - \alpha_2 = (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{11} + \lambda_4(e_{22} + e_{33}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{11} + \lambda_2(g_{22} + g_{33}), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{22} + \alpha_2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{22} + \lambda_1(e_{11} + e_{33}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{22} + \lambda_3(g_{11} + g_{33}), \quad (3.3)$$

$$\pi_{22} - \alpha_2 = (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{22} + \lambda_4(e_{11} + e_{33}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{22} + \lambda_2(g_{11} + g_{33}), \quad (3.4)$$

$$\sigma_{33} + \alpha_2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{33} + \lambda_1(e_{11} + e_{22}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{33} + \lambda_3(g_{11} + g_{22}), \quad (3.5)$$

$$\pi_{33} - \alpha_2 = (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{33} + \lambda_4(e_{11} + e_{22}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{33} + \lambda_2(g_{11} + g_{22}), \quad (3.6)$$

Burada, (3.1) ve (3.2) denklemlerinin toplamını (2.14) denkleminde yerine koyarsak

$$t_{11} = (\lambda_1 + \lambda_4 + 2\mu_1 + 2\mu_3)e_{11} + (\lambda_2 + \lambda_3 + 2\mu_2 + 2\mu_3)g_{11} \\ + (\lambda_1 + \lambda_4)(e_{22} + e_{33}) + (\lambda_2 + \lambda_3)(g_{22} + g_{33}) \quad (3.7)$$

olmaktadır. Daha önce Steel (1968b) and Dokuz (2005) tarafından kullanılan kabule benzer şekilde  $\sigma_{22} + \alpha_2 = \pi_{22} - \alpha_2 = \sigma_{33} + \alpha_2 = \pi_{33} - \alpha_2 = 0$  kabulü yapılarak (3.3)-(3.6) denklemlerinden  $e_{22}$ ,  $e_{33}$ ,  $g_{22}$  ve  $g_{33}$  şekil değiştirme bileşenleri çekilirse

$$e_{22} = \frac{1}{2k} \{ [\lambda_4(\lambda_3 + \mu_3) - \lambda_1(\lambda_2 + \mu_2)]e_{11} + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)g_{11} \}, e_{33} = e_{22}, \\ g_{22} = \frac{1}{2k} \{ (\lambda_1\mu_3 - \lambda_4\mu_1)e_{11} + [\lambda_3(\lambda_4 + \mu_3) - \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1)]g_{11} \}, g_{33} = g_{22} \quad (3.8)$$

ilişkileri elde edilir. Burada  $k = (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) - (\lambda_3 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_3)$  olarak tanımlanmaktadır. (3.8) ilişkilerinin (3.7) denkleminde  $t_{11} = \sigma$  olduğu hatırlanarak yerine konulmasıyla

$$\sigma = E_1 e_{11} + E_2 g_{22} \quad (3.9)$$

bağıntısı elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} E_1 &= (\lambda_1 + \lambda_4 + 2\mu_1 + 2\mu_3) \\ &+ \frac{1}{k} \{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_4\mu_1) + (\lambda_1 + \lambda_4)[\lambda_4(\lambda_3 + \mu_3) - \lambda_1(\lambda_2 + \mu_2)]\}, \\ E_2 &= (\lambda_2 + \lambda_3 + 2\mu_2 + 2\mu_3) \\ &+ \frac{1}{k} \{(\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) + (\lambda_2 + \lambda_3)[\lambda_3(\lambda_4 + \mu_3) - \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1)]\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

olmaktadır. E, eşdeğer tekil ortama ait elastiklik modülü olmak üzere  $\lambda$ , eşdeğer tekil ortama ait diğer Lamé katsayısı olarak tanımlanırsa

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.11)$$

olmaktadır. Şu halde Hooke yasası gereği

$$\sigma = E\varepsilon_{11} \quad (3.12)$$

bağıntısı geçerlidir. Bu durumda (3.9) denklemi

$$E\varepsilon_{11} = E_1 e_{11} + E_2 g_{22} \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir.

İkinci olarak, karışımın gerilme bileşenlerinden  $t_{12} = t_{21} = \tau$  olarak tanımlandığı ve diğer tüm gerilme bileşenlerinin sıfır olduğu basit kayma deneyi için (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerinin (2.14) de kullanılmasıyla toplam kesme gerilmesi,

$$\tau = 2(\mu_1 + \mu_3)e_{12} + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{12} \quad (3.14)$$

olarak yazılabilir. Burada Hooke yasası gereği

$$\tau = 2\mu\varepsilon_{12} \quad (3.15)$$

olacağından (3.14) denklemi

$$2\mu\varepsilon_{12} = 2(\mu_1 + \mu_3)e_{12} + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{12} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak, karışımın gerilme bileşenlerinden  $t_{11} = t_{22} = t_{33} = -p$  olarak tanımlandığı ve diğer tüm gerilme bileşenlerinin sıfır olduğu hidrostatik basınç deneyi için (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerinin (2.14) de kullanılmasıyla

$$-3p = [3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3)]e_{mm} + [3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3)]g_{mm} \quad (3.17)$$

ilişkisi elde edilebilir. Eşdeğer tekil ortamda hidrostatik basınç deneyi için

$$-3p = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mm} \quad (3.18)$$

bağıntısı bilinmektedir. Şu halde (3.18) denkleminin (3.17) de yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mm} &= [3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3)]e_{mm} \\ &+ [3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3)]g_{mm} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ilişkisi elde edilmektedir.

### 3.1.2 Bilinmeyen katsayıların belirlenmesi

Bu kısımda bileşenleri birbirlerine göre bağıl deformasyon yapmayan bir karışım ortamı tasavvur edilecektir. Böyle bir ortam için yer değiştirme vektörleri arasında

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} = w_i \quad (3.20)$$

eşitliği bulunmaktadır. Şu halde, (3.20) koşulu için (2.8) ve (2.16) denklemlerinden

$$e_{ij} = g_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (3.21)$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylelikle, (3.21) eşitliğinin (3.13), (3.16) ve (3.19) denklemlerinde uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2, \\ \mu &= \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$3\lambda + 2\mu = 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)$$

ilişkileri elde edilebilir. Binark ve Dokuz (2017) tarafından yapılan çalışmada bu noktada bırakılan hesaplar devam ettirildiğinde, (3.22) ilişkilerinden bünye denklemlerindeki  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bilinmeyen katsayıları bilinen katsayılar cinsinden

$$\lambda_3 = -\lambda_2 + \frac{\lambda(\mu + \mu_2 - \mu_1)}{2\mu}, \quad (3.23)$$

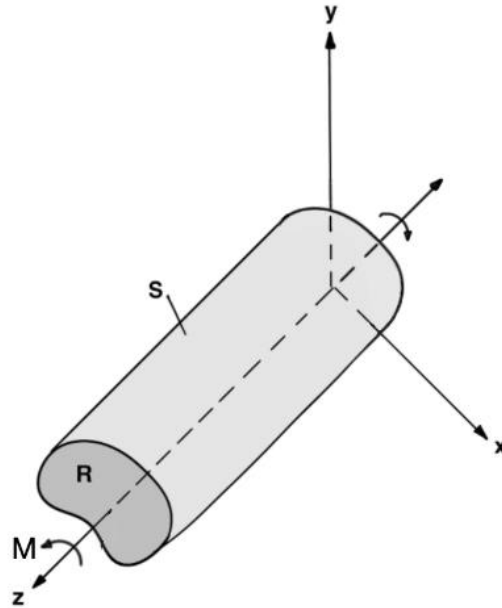
$$\lambda_4 = -\lambda_1 + \frac{\lambda(\mu + \mu_1 - \mu_2)}{2\mu}, \quad (3.24)$$

$$\mu_3 = \frac{\mu - \mu_1 - \mu_2}{2} \quad (3.25)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

### 3.2 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Burulma Problemi

Bu kısımda, bölüm 2’de özetlenen temel denklemler kullanılarak, iki lineer elastik katı karışımı için burulma probleminin formülasyonu sonucunda karışım bileşenlerinin yer değiştirme vektörleri, şekil değiştirme ve gerilme tansörleri elde edilmiştir. Daha sonra, eliptik kesitli ve eşkenar üçgen kesitli prizmatik çubukların burulmasına dair uygulamalar ele alınmıştır. Bu kapsamda burulma probleminin Prandtl gerilme fonksiyonları yardımıyla formülasyonunun aşağıda kısaca açıklanan yolla elde edilebileceği görülmüştür. Burulma probleminin çözümünün daha az elastik katsayı içermesi nedeniyle sergilediği sadeliğin ortamın her bir bileşeni tarafından taşınan yük miktarının anlaşılması konusunda faydalı olacağı değerlendirilmektedir. Öngörülen formülasyon aşağıda kısaca açıklanmaktadır.



Şekil 3.1 : Ucundan burulma yüklemesine maruz prizmatik çubuk problemi.

Formülasyonda, karışım ortamına ait parçacıkların uzaysal konumları  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ile gösterilip, gerekmedikçe indis notasyonu kullanılmayacaktır.  $R$  keyfi kesitli ve  $S$  yanal yüzeyli, kesit normal  $z$  eksenine paralel kabul edilen prizmatik bir elastik çubuğun uç kısımlarından burulma momenti etkisi altında olduğu farzedilmektedir. Yanal yüzeyde herhangi bir yükleme söz konusu değildir. Ayrıca, prizmatik çubuğun kesitinin  $z$  eksen  $z$  boyunca değişmediği ve içi dolu bir çubuk olduğu düşünülmektedir.

Burulma momenti etkisi altındaki prizmatik bir çubuk için klasik elastisite teorisinde verilen yer değiştirme kabulleri (Sadd, 2005), karışım ortamının da benzer fiziksel davranış sergilemesi nedeniyle burada da geçerlidir. Kartezyen eksen takımı burulma merkezine yerleştirilmekte ve moment bileşenleri  $M = M_z \neq 0$ ,  $M_x = M_y = 0$  şeklinde kabul edilmektedir. Ortalama yer değiştirme anlamında  $w_x = w_y = 0$  olan konum burulma merkezini temsil etmektedir. (2.15) denklemi dikkate alındığında iki elastik katıdan oluşan bir karışım için bu merkezin  $u_x^{(1)} = u_y^{(1)} = u_x^{(2)} = u_y^{(2)} = 0$  olan konuma tekabül ettiği açıktır. Klasik elastisite teorisinde burulma problemi için yer değiştirme vektörü bileşenleri  $w_x = -\alpha_y z$ ,  $w_y = \alpha_x z$ ,  $w_z = w_z(x, y)$  olarak verilmektedir. Burada  $\alpha$ , eşdeğer tekil ortamın birim uzunluğu için burulma açısını temsil etmektedir. Buna göre,  $M_z$  momenti etkisinde, burulma problemi için  $C_1$  ve  $C_2$  ortam bileşenlerine ait yer değiştirmeler

$$u_x^{(1)} = -\alpha_u y z, \quad u_y^{(1)} = \alpha_u x z, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(x, y), \quad (3.26)$$

$$u_x^{(2)} = -\alpha_v y z, \quad u_y^{(2)} = \alpha_v x z, \quad u_z^{(2)} = u_z^{(2)}(x, y) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha_u$  ve  $\alpha_v$ , sırasıyla  $C_1$  ve  $C_2$  katıları için birim uzunluğa karşı gelen burulma açılarıdır. (3.26) ve (3.27) denklemlerinin (2.15) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} -\mu \alpha y z &= -(\mu_1 + \mu_3) \alpha_u y z - (\mu_2 + \mu_3) \alpha_v y z, \\ \mu \alpha x z &= (\mu_1 + \mu_3) \alpha_u x z + (\mu_2 + \mu_3) \alpha_v x z, \\ \mu w_z &= (\mu_1 + \mu_3) u_z^{(1)} + (\mu_2 + \mu_3) u_z^{(2)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ilişkileri elde edilir. Yukarıdaki bağıntılardan  $\alpha$ ,  $\alpha_u$  ve  $\alpha_v$  arasındaki ilişkinin

$$\mu\alpha = (\mu_1 + \mu_3)\alpha_u + (\mu_2 + \mu_3)\alpha_v \quad (3.29)$$

olacağı kolayca görülebilir.

(3.26) ve (3.27) yer değiştirme formları (2.8) denkleminde kullanıldığında aşağıdaki birim şekil değiştirme bileşenleri elde edilir:

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0, e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \alpha_u y\right), e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} + \alpha_u x\right), \quad (3.30)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = g_{xy} = 0, g_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x} - \alpha_v y\right), g_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial y} + \alpha_v x\right). \quad (3.31)$$

Bu sonuçlarla (2.9)-(2.11) denklemlerine gidilirse,  $C_1$  ve  $C_2$ 'nin izotropik olduğu varsayımı altında, kısmi gerilmeler ve difüzyon kuvveti

$$\sigma_{xx} + \alpha_2 = \sigma_{yy} + \alpha_2 = \sigma_{zz} + \alpha_2 = \sigma_{xy} = 0,$$

$$\sigma_{xz} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \alpha_u y \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x} - \alpha_v y \right), \quad (3.32)$$

$$\sigma_{yz} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} + \alpha_u x \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial y} + \alpha_v x \right),$$

$$\pi_{xx} - \alpha_2 = \pi_{yy} - \alpha_2 = \pi_{zz} - \alpha_2 = \pi_{xy} = 0,$$

$$\pi_{xz} = \mu_2 \left( \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x} - \alpha_v y \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \alpha_u y \right), \quad (3.33)$$

$$\pi_{yz} = \mu_2 \left( \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial y} + \alpha_v x \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} + \alpha_u x \right),$$

$$p_x = p_y = p_z = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir. (3.30)-(3.34) denklemlerinden kısmi gerilmelerin ve birim şekil değiştirme bileşenlerinin yalnızca x ve y'ye bağlı fonksiyonlar oldukları açıkça görülmektedir. Bu durumda, kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde (2.13) denge denklemleri aşağıdaki formları alırlar:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial (\sigma_{xz} + \pi_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{yz} + \pi_{yz})}{\partial y} = 0. \quad (3.35)$$

Aynı zamanda, (3.32)<sub>2</sub> ve (3.33)<sub>2</sub>'nin y'ye göre ve (3.32)<sub>3</sub> ve (3.33)<sub>3</sub>'ün x'e göre kısmi türevleri alınıp sonuçlar birbirinden çıkarılırsa gerilme bileşenleri arasında

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} = -2(\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v), \quad \frac{\partial \pi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial x} = -2(\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u) \quad (3.36)$$

ilişkilerinin var olduğu da görülebilir. (3.36)<sub>1</sub> ve (3.36)<sub>2</sub>'nin toplanmasıyla elde edilen bağıntıda (2.14) ve (3.29) denklemlerinin kullanılması sonucunda eşdeğer tekil ortam için benzer bir ilişki

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial t_{yz}}{\partial x} = -2\mu\alpha \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir. Bu hesaplar sonucunda, (3.35)<sub>1</sub>, (3.36)<sub>1</sub> ve (3.35)<sub>2</sub>, (3.36)<sub>2</sub> grupları sırasıyla C<sub>1</sub> ve C<sub>2</sub>'ye ait gerilme alanlarını yöneten diferansiyel denklem takımları olarak karşımıza çıkar. (3.35)<sub>3</sub> ve (3.37) denklemleri ise eşdeğer tekil ortama ait benzer bağıntıları temsil ederler.

Her bir elastik katıya ait kısmi gerilmeleri  $\phi_1 = \phi_1(x, y)$  ve  $\phi_2 = \phi_2(x, y)$  Prandtl gerilme fonksiyonları ile aşağıdaki gibi ilişkilendirdiğimizi düşünelim:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad \pi_{xz} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \quad \pi_{yz} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \\ t_{xz} &= \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y}, \quad t_{yz} = -\frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Eğer (3.38) tanımları (3.35)–(3.37) denklemlerinde yerlerine konulursa, (3.35) denge denklemlerinin özdeş olarak sağlandığı ve (3.36), (3.37) diferansiyel denklemlerinin ise

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = -2(\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v), \\ \nabla^2 \phi_2 &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = -2(\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u), \\ \nabla^2(\phi_1 + \phi_2) &= \frac{\partial^2(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y^2} = -2\mu\alpha \end{aligned} \quad (3.39)$$

sonuçlarını verdiği görülür. Buna göre, (3.39)<sub>1</sub> ve (3.39)<sub>2</sub> denklemleri ucundan burulma momenti etkisine maruz prizmatik bir elastik katı karışımı için gerilme alanını yöneten yeni diferansiyel denklem takımını oluşturmaktadır. (3.39)<sub>3</sub> bağıntısı ise, eşdeğer bir tekil elastik ortamın Prandtl gerilme fonksiyonununun  $(\phi_1 + \phi_2)$  şeklinde olacağını göstermektedir.

Sınır koşullarına göre prizmatik çubuğun yan yüzeyi herhangi bir yüklemeye maruz değildir. Bu durumda, yan yüzey için gerilme vektörü bileşenleri ( $T_i$ ),

$$\begin{aligned} T_x &= t_{xx}n_x + t_{yx}n_y + t_{zx}n_z = 0, \\ T_y &= t_{xy}n_x + t_{yy}n_y + t_{zy}n_z = 0, \\ T_z &= t_{xz}n_x + t_{yz}n_y + t_{zz}n_z = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

koşullarını sağlamalıdır. Burada  $n_i$  birim normal vektörün bileşenlerini temsil etmektedir. Problemin gerilme alanı  $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0$  ve yan yüzeyde  $n_z = 0$  olduğuna göre, (3.40)<sub>1</sub> ve (3.40)<sub>2</sub> ilişkileri sağlanır. Son bağıntı ise, yan yüzeyi çevreleyen eğri boyunca

$$\frac{d(\phi_1 + \phi_2)}{ds} = 0 \quad (3.41)$$

olması gerektiğini gösterir. Buna göre, (3.41) denklemi  $(\phi_1 + \phi_2)$ 'nin kesit sınırlarında sabit olması gerektiğini ortaya koymaktadır. Klasik elastisite teorisinde yapılarına benzer şekilde içi dolu çubuklar için bu değer sıfır olarak kabul edilecektir (Sadd, 2005).

Uçlarda ise, birim normal vektör bileşenleri  $n_x = n_y = 0$ ,  $n_z = \pm 1$  değerlerini aldığı için, bu bölgelerdeki gerilme vektörleri

$$T_x = \pm t_{xz}, \quad T_y = \pm t_{yz}, \quad T_z = 0 \quad (3.42)$$

ilişkilerini sağlarlar. Uçlarda yalnız z-ekseni etrafında burulma momentinin etkidiği duruma ait ( $M_z \neq 0$ ) sınır koşulu aşağıdaki integrallerle verilir:

$$M_z = \iint_R (xT_y - yT_x) dx dy = M \neq 0. \quad (3.43)$$

(2.14), (3.38) ve (3.42) denklemlerinin kullanılmasıyla (3.43) sınır koşulu Prandtl gerilme fonksiyonu cinsinden

$$M_z = \iint_R (xT_y - yT_x) dx dy = - \iint_R \left( x \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} - y \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.44)$$

formuna dönüşür. Burada Green teoremini uygulayarak ve  $(\phi_1 + \phi_2)$  değerinin yanal yüzey eğrisi boyunca sıfır olduğu hatırlanırsa (3.44) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$M_z = 2 \iint_R (\phi_1 + \phi_2) dx dy. \quad (3.45)$$

Formülasyonumuzu, karışımı oluşturan her bir katının maruz kaldığı momenti ifade eden kısmi momentlere adapte edebilmek amacıyla (3.45) denklemine yeniden bakalım. Öncelikle,  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin  $M$  momentinin  $M_1$  ve  $M_2$  ile gösterilen bir kısmını taşıdıklarını düşünelim ( $M = M_1 + M_2$ ). Daha önce belirtildiği gibi, sınır koşullarına göre prizmatik çubuğun yan yüzeyi herhangi bir yüklemeye maruz değildir. Bu durumda, eğer  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin maruz kaldıkları kısmi gerilme vektörleri  $T_i^{(1)}$  ve  $T_i^{(2)}$  olarak tanımlanırsa ( $T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)}$ ),  $T_i^{(1)} = 0$  ve  $T_i^{(2)} = 0$  olarak yazılabilir. Buna göre, yan yüzey için  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin kısmi gerilme vektörü bileşenleri

$$\begin{aligned} T_x^{(1)} &= (\sigma_{xx} + \alpha_2)n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z = 0, \\ T_y^{(1)} &= \sigma_{xy}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha_2)n_y + \sigma_{zy}n_z = 0, \\ T_z^{(1)} &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + (\sigma_{zz} + \alpha_2)n_z = 0, \\ T_x^{(2)} &= (\pi_{xx} - \alpha_2)n_x + \pi_{yx}n_y + \pi_{zx}n_z = 0, \\ T_y^{(2)} &= \pi_{xy}n_x + (\pi_{yy} - \alpha_2)n_y + \pi_{zy}n_z = 0, \\ T_z^{(2)} &= \pi_{xz}n_x + \pi_{yz}n_y + (\pi_{zz} - \alpha_2)n_z = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

koşullarını sağlamalıdır. Burada,  $n_z = 0$  olduğu hatırlanıp, (3.32)<sub>1</sub> ve (3.33)<sub>1</sub> koşulları dikkate alınırsa  $C_1$  ve  $C_2$  için (3.46)'deki kısmi gerilme vektörlerinin  $x$  ve  $y$  bileşenlerine ait ilişkilerin sağlandığı görülebilir.  $T_z^{(1)}$  ve  $T_z^{(2)}$ 'ye ait ilişkiler için ise  $n_x = \frac{dy}{ds}$ ,  $n_y = -\frac{dx}{ds}$  bağıntılarıyla birlikte (3.38) denklemleri kullanılarak

$$\frac{d\phi_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\phi_2}{ds} = 0 \quad (3.47)$$

olması gerektiği gösterilebilir. Buna göre, (3.47) denklemi  $\phi_1$  ve  $\phi_2$ 'nin kesit sınırlarında sabit olması gerektiğini ortaya koymaktadır. Yine klasik elastisite

teorisinde yapılarına benzer şekilde içi dolu çubuklar için bu değerler sıfır olarak kabul edilecektir.

Uçlarda ise, birim normal vektör bileşenleri  $n_x = n_y = 0$ ,  $n_z = \pm 1$  değerlerini aldığı için,  $C_1$  ve  $C_2$  bileşenlerinin tarafından taşınan  $M_1$  ve  $M_2$ , yalnız z-ekseni etrafında burulma momentinin etkidiği duruma ait sınır koşulu olarak aşağıdaki integrallerle verilir:

$$M_1 = \iint_R (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})dxdy, \quad M_2 = \iint_R (x\pi_{yz} - y\pi_{xz})dxdy. \quad (3.48)$$

Böylelikle daha önce elde edilen (3.43) sınır koşulu yerine (3.48) sınır koşuluna (3.38) bağıntılarını kullanarak bir kez daha Green teoreminin uygulanmasının ardından, sınır yüzeyinde  $\phi_1 = 0$  ve  $\phi_2 = 0$  olmasından dolayı sınır integrallerinin ortadan kalkmasıyla, (3.48) denklemleri aşağıdaki hali almaktadır.

$$M_1 = 2 \iint_R \phi_1 dxdy, \quad M_2 = 2 \iint_R \phi_2 dxdy. \quad (3.49)$$

Toplam moment ( $M_z$ ) ile kısmi momentler ( $M_1$  ve  $M_2$ ) arasında ek bir bağıntı elde etmek amacıyla  $C_1$  ve  $C_2$  katıları tarafından işgal edilen hacim oranları

$$\gamma = \frac{\delta V_1}{\delta V}, \quad 1 - \gamma = \frac{\delta V_2}{\delta V} \quad (3.50)$$

şeklinde ifade edildiğinde (Rajagopal ve Tao, 1995), karışımı oluşturan bileşenlerin taşıdıkları kısmi momentlerin bu hacim oranlarıyla aşağıdaki gibi ilişkilendirilebileceğini düşünebiliriz:

$$M_1 = \gamma M_z, \quad M_2 = (1 - \gamma)M_z. \quad (3.51)$$

Burada  $\delta V_1$  ve  $\delta V_2$ , karışımdaki  $\delta V$  diferansiyel hacim elemanında  $C_1$  ve  $C_2$  katıları tarafından işgal edilen kısımları temsil etmektedir. Aynı zamanda  $\gamma$  katsayısı  $0 < \gamma < 1$  ilişkisine bağlı pozitif bir sabittir.

Prandtl gerilme fonksiyonları yardımıyla elde edilen formülasyon bu fonksiyonların (3.39) denklemlerini sağlamalarını ve kesit sınırında sıfır olmalarını gerektirmektedir.  $f(x,y)$  fonksiyonu sınır eğrisini temsil etmek üzere, sınır  $f(x,y) = 0$  ilişkisi ile tanımlanırsa bazı geometriler için gerilme fonksiyonları  $\phi_1 = K_1 f(x,y)$  ve  $\phi_2 = K_2 f(x,y)$  formunda kabul edilebilmektedir. Burada  $K_1$  ve  $K_2$  keyfi sabitlerdir.

Böylece, uygun  $K_1$  ve  $K_2$  değerlerinin seçilmesi halinde yanal yüzeydeki sınır koşullarını ve (3.39) denklemlerini sağlayan çözümlerin bulunması mümkün olmaktadır.

### 3.2.1 Eliptik kesitli prizmatik çubuk

Şimdi elde edilen çözüm metodunu sınır denklemi aşağıdaki gibi olduğu bilinen eliptik bir kesit için uygulayalım.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.52)$$

Burada  $a$  ve  $b$  elipsin büyük ve küçük eksen yarıçaplarıdır. Yukarıda belirtilen hususlar doğrultusunda gerilme fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$\phi_1 = K_1 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad \phi_2 = K_2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.53)$$

(3.53)'de  $K_1$  ve  $K_2$  sabitleri

$$K_1 = \frac{-(\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v) a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad K_2 = \frac{-(\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u) a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (3.54)$$

şeklinde seçildiğinde bu gerilme fonksiyonları hem sınır koşullarını hem de (3.39) denklemlerini sağlar ve eliptik kesitin burulması problemine ilişkin aranan çözüm elde edilmiş olur.

(3.45) denklemi kullanılarak  $M_z$

$$M_z = - \frac{2a^2 b^2 [(\mu_1 + \mu_3) \alpha_u + (\mu_2 + \mu_3) \alpha_v]}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{a^2} \iint_R x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_R y^2 dx dy - \iint_R dx dy \right) \quad (3.55)$$

olarak bulunur. (3.55) denkleminde birinci ve ikinci integraller sırasıyla  $y$  eksenine ve  $x$  eksenine göre atalet momentlerini temsil etmekte olup, üçüncü integral kesitin alanını vermektedir. İntegrallerin sonuçlarının (3.55) denkleminde yerine konmasıyla

$$M_z = \frac{\pi a^3 b^3 [(\mu_1 + \mu_3) \alpha_u + (\mu_2 + \mu_3) \alpha_v]}{a^2 + b^2} \quad (3.56)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.49) denklemlerini kullanarak  $M_1$  ve  $M_2$

$$M_1 = \frac{\pi a^3 b^3 (\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v)}{a^2 + b^2}, \quad M_2 = \frac{\pi a^3 b^3 (\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u)}{a^2 + b^2} \quad (3.57)$$

olarak bulunabilir. (3.51) denklemlerini (3.57) denklemlerinde kullanarak  $\alpha_u$  ve  $\alpha_v$  burulma açıları için uygulanan yük cinsinden  $\mu_1 \mu_2 \neq \mu_3^2$  koşulu altında

$$\alpha_u = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_2 M_1 - \mu_3 M_2}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) = \frac{M_2 (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_3 (1 - \gamma) - \mu_2 \gamma}{\mu_3^2 - \mu_1 \mu_2} \right),$$

$$\alpha_v = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_1 M_2 - \mu_3 M_1}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) = \frac{M_2 (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_3 \gamma - \mu_1 (1 - \gamma)}{\mu_3^2 - \mu_1 \mu_2} \right) \quad (3.58)$$

ilişkileri ortaya çıkmaktadır. (3.38) denklemlerini kullanarak  $C_1$  ve  $C_2$  katıları için kısmi gerilmeler

$$\sigma_{xz} = \frac{-2a^2 (\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v)}{a^2 + b^2} y = -\frac{2M_1 y}{\pi a b^3}, \quad \sigma_{yz} = \frac{2b^2 (\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v)}{a^2 + b^2} x = \frac{2M_2 x}{\pi b a^3},$$

$$\pi_{xz} = \frac{-2a^2 (\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u)}{a^2 + b^2} y = -\frac{2M_1 y}{\pi a b^3}, \quad \pi_{yz} = \frac{2b^2 (\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u)}{a^2 + b^2} x = \frac{2M_2 x}{\pi b a^3} \quad (3.59)$$

olarak elde edilip, (3.59) denklemlerinden  $\sigma$  ve  $\pi$  bileşke kayma gerilmeleri

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2} = \frac{2M_1}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}},$$

$$\pi = \sqrt{\pi_{xz}^2 + \pi_{yz}^2} = \frac{2M_2}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad (3.60)$$

şeklinde bulunur.  $a > b$  durumu için  $\sigma$  ve  $\pi$ 'nin maksimum değerleri  $x = 0$  ve  $y = \pm b$  için oluşacaktır. Bu durumda

$$\sigma_{\max} = \frac{2M_1}{\pi a b^2}, \quad \pi_{\max} = \frac{2M_2}{\pi a b^2} \quad (3.61)$$

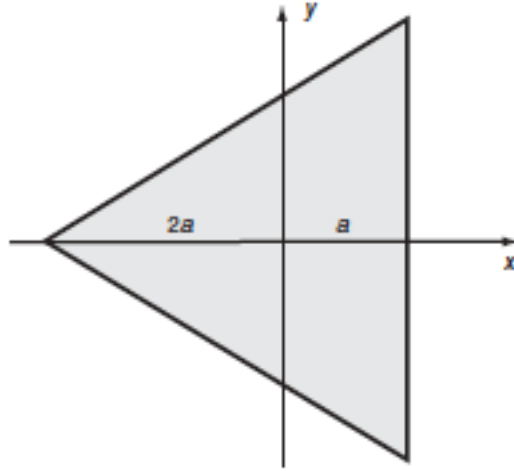
olmaktadır. Son olarak, (3.59) denklemlerini (3.32) ve (3.33)'de kullanmakla yer değiştirme alanlarını belirlemek için integre edilebilen iki sistem elde edilir. Böylelikle,

$$\mu_1 u_z^{(1)} + \mu_3 u_z^{(2)} = \frac{M_1 (b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3} xy, \quad \mu_2 u_z^{(2)} + \mu_3 u_z^{(1)} = \frac{M_2 (b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3} xy \quad (3.62)$$

bağıntıları elde edilir.  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$ 'yi (3.51)'i kullanarak (3.62) denklemlerinden hesaplırsak

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= \frac{(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_2 M_1 - \mu_3 M_2}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) xy = \frac{M_z (b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_3 (1-\gamma) - \mu_2 \gamma}{\mu_3^2 - \mu_1 \mu_2} \right) xy, \\ u_z^{(2)} &= \frac{(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_1 M_2 - \mu_3 M_1}{\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2} \right) xy = \frac{M_z (b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3} \left( \frac{\mu_3 \gamma - \mu_1 (1-\gamma)}{\mu_3^2 - \mu_1 \mu_2} \right) xy \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.2 : Eşkenar üçgen kesit.

### 3.2.2 Eşkenar üçgen kesitli prizmatik çubuk

Şimdi,  $3a$  yüksekliğinde eşkenar üçgen kesitli prizmatik bir çubuk düşünelim. Kartezyen koordinat sisteminin merkezini kesitin ağırlık merkezinde konumlandırıp,  $x$  ekseninin negatif doğrultusunun kesitin iki sınır doğrusunun birleşme noktasından geçtiğini kabul edelim (Şekil 3.2). Bu durumda, daha önce açıklanan gereksinimler doğrultusunda, kesit sınırlarını oluşturan denklemlerin çarpımı ile aşağıdaki formda Prandtl gerilme fonksiyonları kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= K_1 (x + 2a + \sqrt{3}y)(x + 2a - \sqrt{3}y)(x - a), \\ \phi_2 &= K_2 (x + 2a + \sqrt{3}y)(x + 2a - \sqrt{3}y)(x - a). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Burada eğer  $K_1$  ve  $K_2$  sabitleri

$$K_1 = \frac{-(\mu_1 \alpha_u + \mu_3 \alpha_v)}{6a}, \quad K_2 = \frac{-(\mu_2 \alpha_v + \mu_3 \alpha_u)}{6a} \quad (3.65)$$

şeklinde seçilecek olursa bu gerilme fonksiyonları yanal yüzeyde sıfır değerini almasıyla sınır koşullarını sağlayacak ve ayrıca (3.39) denklemlerini de sağlayacaktır. Böylelikle gerekli tüm koşullar sağlandığından dolayı eşkenar üçgen kesitin burulması için çözüm elde edilmiş olmaktadır.

Burada (3.49) denklemlerini kullanarak  $M_1$  ve  $M_2$

$$M_1 = \frac{9\sqrt{3}a^4(\mu_1\alpha_u + \mu_3\alpha_v)}{5}, \quad M_2 = \frac{9\sqrt{3}a^4(\mu_2\alpha_v + \mu_3\alpha_u)}{5} \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir. (3.51) denklemlerini (3.66) denklemlerinde kullanarak  $\alpha_u$  ve  $\alpha_v$  burulma açıları uygulanan yük cinsinden  $\mu_1\mu_2 \neq \mu_3^2$  koşulu altında

$$\alpha_u = \frac{5\sqrt{3}}{27a^4} \left( \frac{\mu_2 M_1 - \mu_3 M_2}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2} \right) = \frac{5\sqrt{3}M_z}{27a^4} \left( \frac{\mu_3(1-\gamma) - \mu_2\gamma}{\mu_3^2 - \mu_1\mu_2} \right), \quad (3.67)$$

$$\alpha_v = \frac{5\sqrt{3}}{27a^4} \left( \frac{\mu_1 M_2 - \mu_3 M_1}{\mu_1\mu_2 - \mu_3^2} \right) = \frac{5\sqrt{3}M_z}{27a^4} \left( \frac{\mu_3\gamma - \mu_1(1-\gamma)}{\mu_3^2 - \mu_1\mu_2} \right)$$

olmaktadır. (3.38) denklemlerini kullanarak  $C_1$  ve  $C_2$  katıları için kısmi gerilmeler

$$\sigma_{xz} = \frac{(\mu_1\alpha_u + \mu_3\alpha_v)}{a} (x - a)y, \quad \sigma_{yz} = \frac{(\mu_1\alpha_u + \mu_3\alpha_v)}{2a} (x^2 + 2ax - y^2), \quad (3.68)$$

$$\pi_{xz} = \frac{(\mu_2\alpha_v + \mu_3\alpha_u)}{a} (x - a)y, \quad \pi_{yz} = \frac{(\mu_2\alpha_v + \mu_3\alpha_u)}{2a} (x^2 + 2ax - y^2)$$

olmaktadır. (3.68) denklemlerini (3.32) ve (3.33)'de kullanmakla yer değiştirme alanlarını belirlemek için integre edilebilen iki sistem elde edilir. Böylelikle,

$$\mu_1 u_z^{(1)} + \mu_3 u_z^{(2)} = \frac{(\mu_1\alpha_u + \mu_3\alpha_v)}{6a} y(3x^2 - y^2), \quad (3.69)$$

$$\mu_2 u_z^{(2)} + \mu_3 u_z^{(1)} = \frac{(\mu_2\alpha_v + \mu_3\alpha_u)}{6a} y(3x^2 - y^2)$$

olur.  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$ 'yi (3.51) denklemlerini kullanarak (3.69) denkleminde hesaplırsak

$$u_z^{(1)} = \frac{\alpha_u}{6a} y(3x^2 - y^2), \quad u_z^{(2)} = \frac{\alpha_v}{6a} y(3x^2 - y^2) \quad (3.70)$$

olarak bulunur.

### 3.2.3 Bağıl hareket yapmayan ortamda katı bileşenlerinin yük taşıma oranları

Bir önceki kısımda toplam burulma momenti ( $M_z$ ) ile  $C_1$  ve  $C_2$  katıları tarafından taşınan kısmi momentler ( $M_1$  ve  $M_2$ ) arasında ek bir bağıntı elde etmek amacıyla Rajagopal ve Tao (1995) tarafından sunulan (3.50) hacim oranı bağıntısı kullanılarak (3.51) ilişkisi tanımlanmıştı. Bu kısımda ise iki lineer elastik katı karışımı için burulma probleminin verdiği sonuçlar  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  katsayılarından bağımsız olduğundan dolayı, sadeliğinin ortamın her bir bileşeni tarafından taşınan yük miktarının anlaşılması konusunda faydalı olacağı değerlendirilmektedir. Bu düşünceyle, (3.51) ilişkisi göz ardı edilip (3.20) eşitliği dikkate alındığında, bağıl hareket yapmayan ortam için (3.63) yer değiştirme denklemlerinden

$$M_1(\mu_2 + \mu_3) - M_2(\mu_1 + \mu_3) = 0 \quad (3.71)$$

ilişkisinin var olduğu görülebilir. Bu bağıntı  $M = M_1 + M_2$  denklemi ile birlikte çözülmüşse her bir karışım bileşeninin burulma momentini aşağıda verilen oranlarda taşıdıkları hesaplanmaktadır:

$$M_1 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3} M_z, \quad M_2 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3} M_z. \quad (3.72)$$

Ayrıca, (3.22)<sub>2</sub>'den veya (3.20) koşulu için (2.15) ilişkisinden  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3$  olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki bağıntıların payda kısımlarının  $\mu$  terimine eşit olduğu anlaşılmaktadır.

$\beta = \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3}$  tanımı yapılırsa (3.72) bağıntıları  $M_1 = \beta M_z$  ve  $M_2 = (1 - \beta) M_z$  şeklinde ifade edilebilir. Kısa süreliğine göz ardı ettiğimiz (3.51) kabullerinin vereceği kısmi burulma momentlerinin buradaki sonuçlara eşdeğer olması gerektiği açıktır. Ancak, deneysel veriler kullanıldığında  $\beta$  teriminin sayısal değerinin  $\gamma$  hacim oranına eşit olmadığı görülmektedir. Bu sonuca göre kısmi yüklemelerin doğrudan hacim oranıyla ilişkilendirilmesi uygun bir yaklaşım değildir.

Bileşenleri bağıl hareket etmeyen bir karışım için bilinmeyen bünye katsayılarının tespiti amacıyla yapılan hesaplamalarda Binark ve Dokuz (2017) tarafından verilen tanecikli yapıdaki kompozit bir malzemeye ait aşağıdaki parametreleri bir örnek olması amacıyla burada kullanabiliriz:

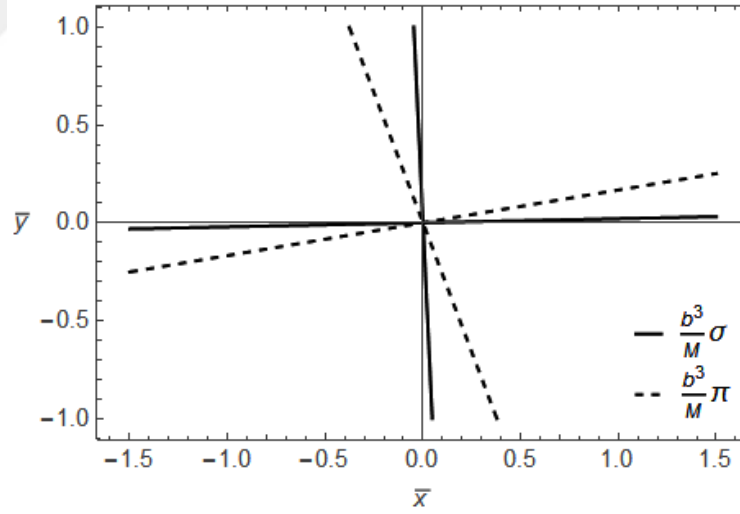
$$\gamma = 0.4, \mu_1 = 70.99 \text{ GPa}, \mu_2 = 161.7 \text{ GPa},$$

$$\mu_3 = -58.07 \text{ GPa}.$$

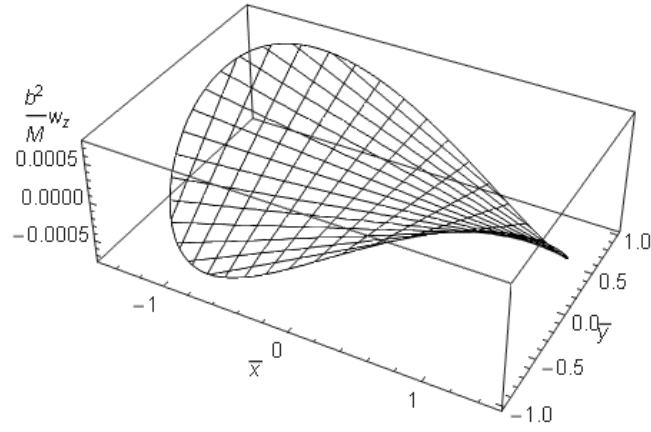
Burada,  $\gamma$ , (3.50) hacim oranı bağıntısında verildiği gibi  $C_1$  bileşenin ortam içerisindeki hacimsel oranını temsil etmektedir. Yukarıdaki parametrelerin (3.72) denklemlerinde kullanılmasıyla

$$M_1 = 0.111 M_z, M_2 = 0.889 M_z$$

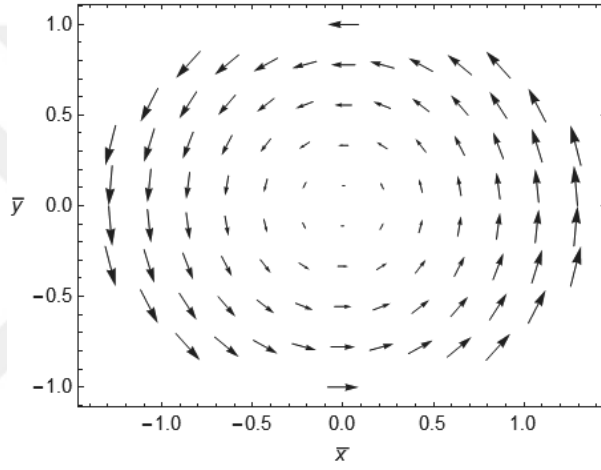
olduğu hesaplanır. Bu veriler kullanılarak,  $a = \frac{3b}{2}$  oranına sahip eliptik kesitli bir çubuk için bileşke kısmi kayma gerilmeleri, herhangi bir kesitteki çarpılma ve  $z = b$  kesiti için  $(u_x^{(1)}, u_y^{(1)})$  yer değiştirme bileşenlerinin değişimini temsil eden vektör alanı Şekil 3.3–3.5’de verilmektedir ( $\bar{x} = \frac{x}{b}$  ve  $\bar{y} = \frac{y}{b}$ ). Yüksekliği  $3a$  olan eşkenar üçgen kesitli bir çubuk için ise benzer değişimler Şekil 3.6–3.8’da sunulmaktadır ( $\bar{x} = \frac{x}{a}$  ve  $\bar{y} = \frac{y}{a}$ ).



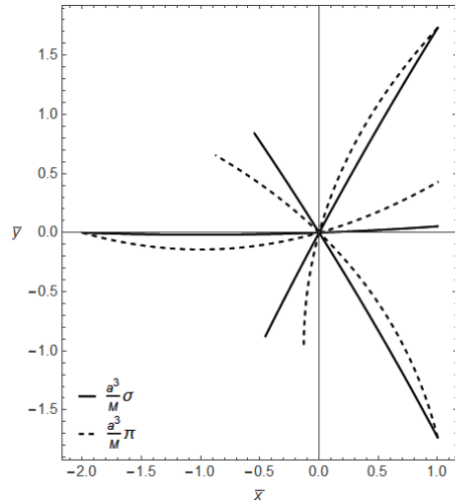
**Şekil 3.3 :**  $x=0$  ve  $y=0$  doğrultuları boyunca bileşke gerilmelerdeki değişimler.



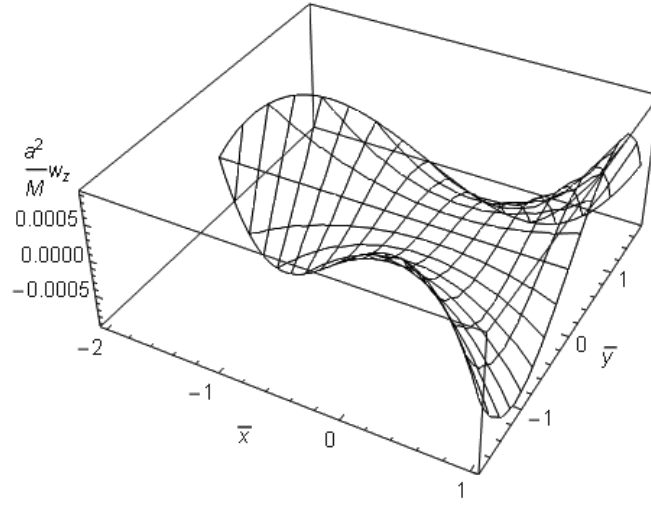
Şekil 3.4 : Herhangi bir  $z$ =sabit kesitindeki çarpılma.



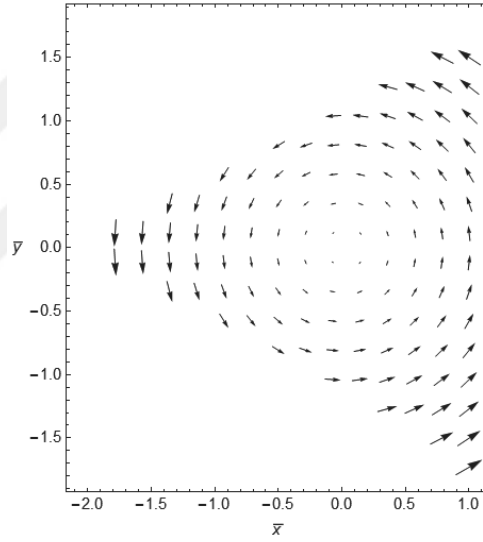
Şekil 3.5 :  $z=b$  kesitindeki  $\overline{u_x^{(1)}} e_x + \overline{u_y^{(1)}} e_y$  vektör alanı ( $\overline{u_x^{(1)}} = u_x^{(1)} \frac{b^2}{M}$ ,  $\overline{u_y^{(1)}} = u_y^{(1)} \frac{b^2}{M}$ ).



Şekil 3.6 : Üçgen kesitte üç yükseklik boyunca bileşke gerilmelerin değişimleri.



Şekil 3.7 : Herhangi bir z=sabit kesitindeki çarpılma.



Şekil 3.8 :  $z=a$  kesitindeki  $\overline{u_x^{(1)}} \mathbf{e}_x + \overline{u_y^{(1)}} \mathbf{e}_y$  yer değiştirme alanı değişimi ( $\overline{u_x^{(1)}} = \overline{u_x^{(1)} \frac{a^2}{M}}, \overline{u_y^{(1)}} = \overline{u_y^{(1)} \frac{a^2}{M}}$ ).



## 4. BİLEŞENLERİ BAĞIL HAREKET YAPILABİLEN BİR ORTAM İÇİN KELVİN PROBLEMİ VE BİLİNMEYEN KATSAYILARIN BELİRLENMESİ İÇİN BİR UYGULAMA

Üçüncü bölümde, iki lineer elastik katı karışımı için (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerindeki bilinmeyen  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayılarının bağıl deformasyona uğramayan karışım ortamı için elde edilmesi konusu ele alınmıştır. Bu bölümde ise,  $C_1$  ve  $C_2$  katı bileşenleri arasında bağıl harekete müsaade eden bir ortam için aynı katsayıların ( $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$ ) belirlenmesi amacıyla klasik elastisite teorisinde Kelvin problemi olarak bilinen bir çözümden yararlanılacaktır. Hem literatüre katkıda bulunmak hem de gerekli bağıntıları elde etmek amacıyla, öncelikle, literatürde iki lineer elastik katı karışımı için Papkovich-Neuber metoduyla çözümü verilmiş olan Kelvin probleminin Galerkin vektörü metoduyla çözümü elde edilecektir. Ardından, buradan elde edilen üç bağımsız denklemde tanecikli yapıya sahip örnek bir kompozit malzemenin verileri kullanılarak bilinmeyen  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları için bazı sayısal sonuçlar verilecektir. Son olarak, bağıl hareketli ve bağıl hareketsiz ortam koşulları için Kelvin probleminden elde edilen sonuçlar arasında bir karşılaştırma sunulacaktır.

### 4.1 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Galerkin Vektörü Metoduyla Kelvin Probleminin Çözümü

İki lineer elastik katıdan oluşan bir karışım ortamı için Kelvin probleminin Papkovich-Neuber metoduyla çözümü daha önce Gürgöze ve Dokuz (1999) tarafından verilmiştir. Burada, farklı bir yol olan Galerkin vektörüne ve eksenel simetrik problemler için uygun olan Love şekil değiştirme fonksiyonuna ait temel bilgiler verilmektedir.

#### 4.1.1 İki lineer elastik katı karışımı için Galerkin vektörü

Birbirinden bağımsız tüm  $\mathbf{u}^{(1)}$  and  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri için (2.21) denge denkleminin sağlanması gerektiğine göre, bu denklem aşağıdaki gibi iki farklı Navier benzeri denklemin toplamı gibi düşünülebilir:

$$(\mu_1 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) = 0, \quad (4.1)$$

$$(\mu_2 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} + (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 0. \quad (4.2)$$

Burada, (4.1) ve (4.2) denklemlerindeki katsayıların aşağıdaki koşulları sağladıkları kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_3) \neq 0, \quad (\mu_2 + \mu_3) \neq 0, \quad (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3) \neq 0, \\ (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3) \neq 0, \quad \mu_1 \mu_2 \neq \mu_3^2, \\ (\lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}})(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}}) \neq (\lambda_3 + 2\mu_3 - \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}})^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Gürgöze ve Dokuz (1999, 2002), (4.1) ve (4.2) denklemlerini yukarıdaki düşünceden çok daha genel bir yol izleyerek Helmholtz teoremi yardımıyla ispatlamıştır. Bu diferansiyel denklemlerin klasik elastisite teorisinde bilinen Navier denklemlerinin benzerleri oldukları aşikardır. Bu sebeple, (4.1) ve (4.2) denklemlerinin çözümünü elde etmek amacıyla, tekil elastik malzeme için yapılarına benzer şekilde  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri için aşağıdaki vektörel ilişkiler kullanılabilir.

$$\mathbf{u}^{(1)} = A_1 \nabla^2 \mathbf{F}_1 - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_1), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = A_2 \nabla^2 \mathbf{F}_2 - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_2). \quad (4.5)$$

Burada,  $A_1$  ve  $A_2$  keyfi sabitler olup ileride seçilecektir. (4.4) ve (4.5) denklemlerinin her biri  $A_1$  ve  $A_2$  keyfi sabitleri dışında klasik elastisite teorisinde kullanılan şekle özdeş olduğundan dolayı  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  vektörlerini Galerkin vektörleri olarak adlandırabiliriz. (4.4) denkleminin (4.1) denkleminde kullanılmasıyla aşağıda verilen biharmonik bağıntı elde edilebilir.

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_3)A_1 \nabla^4 \mathbf{F}_1 \\ + [-(\mu_1 + \mu_3) + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)(A_1 - 1)] \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1)] = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Yukarıdaki  $A_1$  keyfi sabiti  $\lambda_1, \lambda_4, \mu_1, \mu_3$  sabitleri cinsinden uygun bir şekilde seçilecek olursa (4.6) denkleminin ikinci terimi ortadan kaldırılabilir. Şu halde,

$$\nabla^4 \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \quad A_1 = \frac{2(\mu_1 + \mu_3) + (\lambda_1 + \lambda_4)}{(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)} \quad (4.7)$$

ilişkileri elde edilir. Benzer şekilde (4.2) ve (4.5) denklemlerinden de yukarıdaki yöntem vasıtasıyla aşağıdaki ilişkiler elde edilebilir.

$$\nabla^4 \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}, \quad A_2 = \frac{2(\mu_2 + \mu_3) + (\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)}. \quad (4.8)$$

Gerekli yerlerde kullanabilmek amacıyla, (2.22)-(2.25) denklemlerini Galerkin vektörleri cinsinden düzenlemek de uygun olacaktır.

$$2\mathbf{e} = A_1 \{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1)]^T \} - 2\nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_1), \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = (A_1 - 1)\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1),$$

$$2\mathbf{g} = A_2 \{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2)]^T \} - 2\nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_2), \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)} = (A_2 - 1)\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2),$$

$$\begin{aligned} \sigma + \alpha_2 \mathbf{I} &= \lambda_1 (A_1 - 1) \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \mathbf{I} \\ &+ \mu_1 A_1 \left\{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1)]^T - \left( \frac{2}{A_1} \right) \nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$+ \lambda_3 (A_2 - 1) \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \mathbf{I}$$

$$+ \mu_3 A_2 \left\{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2)]^T - \left( \frac{2}{A_2} \right) \nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \right\},$$

$$\pi - \alpha_2 \mathbf{I} = \lambda_4 (A_1 - 1) \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \mathbf{I}$$

$$+ \mu_3 A_1 \left\{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_1)]^T - \left( \frac{2}{A_1} \right) \nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \right\} \quad (4.12)$$

$$+ \lambda_2 (A_2 - 1) \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \mathbf{I}$$

$$+ \mu_2 A_2 \left\{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{F}_2)]^T - \left( \frac{2}{A_2} \right) \nabla\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \right\},$$

$$\mathbf{p} = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} (A_1 - 1) \nabla\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} (A_2 - 1) \nabla\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2). \quad (4.13)$$

Bundan böyle karışım ortamına ait parçacık konumları x, y, z parametreleri ile gösterilip, gerekmedikçe indis notasyonu kullanılmayacaktır.

Eksenel simetrik problemlerde Galerkin vektörünün özel bir hali olan Love şekil değiştirme fonksiyonunu kullanmak uygun olmaktadır. Bu amaçla, Galerkin vektörleri

$Z_1(x, y, z)$  ve  $Z_2(x, y, z)$  olarak tanımlanan iki Love şekil değiştirme fonksiyonu cinsinden

$$\mathbf{F}_1 = Z_1(x, y, z)\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{F}_2 = Z_2(x, y, z)\mathbf{i}_3 \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. (4.7), (4.8) ve (4.14) denklemlerinden,  $Z_1(x, y, z)$  ve  $Z_2(x, y, z)$  fonksiyonlarının

$$\nabla^4 Z_1 = 0, \quad \nabla^4 Z_2 = 0 \quad (4.15)$$

koşulunu sağlaması gerektiği, yani diğer bir deyişle biharmonik fonksiyonlar olmaları gerektiği bilinmektedir.

(4.4), (4.5) ve (4.13) denklemlerinden yer değiştirme vektörlerinin ve difüzyon kuvveti vektörünün bileşenleri Love şekil değiştirme fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$u_x^{(1)} = -\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial z}, \quad u_y^{(1)} = -\frac{\partial^2 Z_1}{\partial y \partial z}, \quad u_z^{(1)} = A_1 \nabla^2 Z_1 - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}, \quad (4.16)$$

$$u_x^{(2)} = -\frac{\partial^2 Z_2}{\partial x \partial z}, \quad u_y^{(2)} = -\frac{\partial^2 Z_2}{\partial y \partial z}, \quad u_z^{(2)} = A_2 \nabla^2 Z_2 - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}, \quad (4.17)$$

$$p_x = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z}, \quad p_y = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z}, \quad p_z = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}. \quad (4.18)$$

Burada  $\Omega = \alpha_2 [(A_1 - 1)\bar{\rho}_2 \nabla^2 Z_1 + (A_2 - 1)\bar{\rho}_1 \nabla^2 Z_2] / \bar{\rho}$  olarak tanımlanmaktadır. (4.11) denkleminde birinci katıya ait gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_1 (A_1 - 1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_3 (A_2 - 1) \nabla^2 Z_2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2), \quad (4.20)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu_1 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_3 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \quad (4.21)$$

$$\sigma_{yy} + \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_1(A_1 - 1)\nabla^2 Z_1 + \lambda_3(A_2 - 1)\nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \quad (4.22)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} [\mu_1 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_3 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \quad (4.23)$$

$$\sigma_{zz} + \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} \{ [A_1(\lambda_1 + 2\mu_1) - \lambda_1]\nabla^2 Z_1 + [A_2(\lambda_3 + 2\mu_3) - \lambda_3]\nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2) \} \quad (4.24)$$

bağıntılarıyla ifade edilebilirken, ikinci katıya ait gerilme bileşenleri, (4.12) denkleminde ( $A_1$  ve  $A_2$  aynı kalmak koşuluyla)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  ve  $\alpha_2$  katsayıları yerine sırasıyla  $\lambda_4$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_2$  ve  $-\alpha_2$  yazılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\pi_{xx} - \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_4(A_1 - 1)\nabla^2 Z_1 + \lambda_2(A_2 - 1)\nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \quad (4.25)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2), \quad (4.26)$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu_3 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_2 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \quad (4.27)$$

$$\pi_{yy} - \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_4(A_1 - 1)\nabla^2 Z_1 + \lambda_2(A_2 - 1)\nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \quad (4.28)$$

$$\pi_{yz} = \pi_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} [\mu_3 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_2 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \quad (4.29)$$

$$\pi_{zz} - \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial z} \{ [A_1(\lambda_4 + 2\mu_3) - \lambda_4]\nabla^2 Z_1 + [A_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \lambda_2]\nabla^2 Z_2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2) \}. \quad (4.30)$$

Eksenel simetrik problemlerde silindirik koordinatları kullanmak hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır. Bu durumda (4.14) denklemlerinde verilen Galerkin vektörleri

$\mathbf{F}_1 = Z_1(r, z)\mathbf{i}_3$  ve  $\mathbf{F}_2 = Z_2(r, z)\mathbf{i}_3$  bağıntılarıyla ifade edilirler. Ayrıca, (4.16)-(4.30) ilişkileri yerine bunların silindirik formlarını kullanmak gerekmektedir. Silindirik koordinat sisteminde yer değiştirme vektörleri, difüzyon kuvveti vektörü ve gerilme tansörleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_r^{(1)} = -\frac{\partial^2 Z_1}{\partial r \partial z}, \quad u_\theta^{(1)} = 0, \quad u_z^{(1)} = A_1 \nabla^2 Z_1 - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}, \quad (4.31)$$

$$u_r^{(2)} = -\frac{\partial^2 Z_2}{\partial r \partial z}, \quad u_\theta^{(2)} = 0, \quad u_z^{(2)} = A_2 \nabla^2 Z_2 - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}, \quad (4.32)$$

$$p_r = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z}, \quad p_\theta = 0, \quad p_z = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}. \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_1 (A_1 - 1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_3 (A_2 - 1) \nabla^2 Z_2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{\partial}{\partial r} [\mu_1 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_3 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)], \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_1 (A_1 - 1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_3 (A_2 - 1) \nabla^2 Z_2 \\ &\quad - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_1 Z_1 + \mu_3 Z_2)]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \pi_{rr} - \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_4 (A_1 - 1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_2 (A_2 - 1) \nabla^2 Z_2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\pi_{rz} = \pi_{zr} = \frac{\partial}{\partial r} [\mu_3 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_2 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)], \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\theta\theta} - \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial z} [\lambda_4 (A_1 - 1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_2 (A_2 - 1) \nabla^2 Z_2 \\ &\quad - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_3 Z_1 + \mu_2 Z_2)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

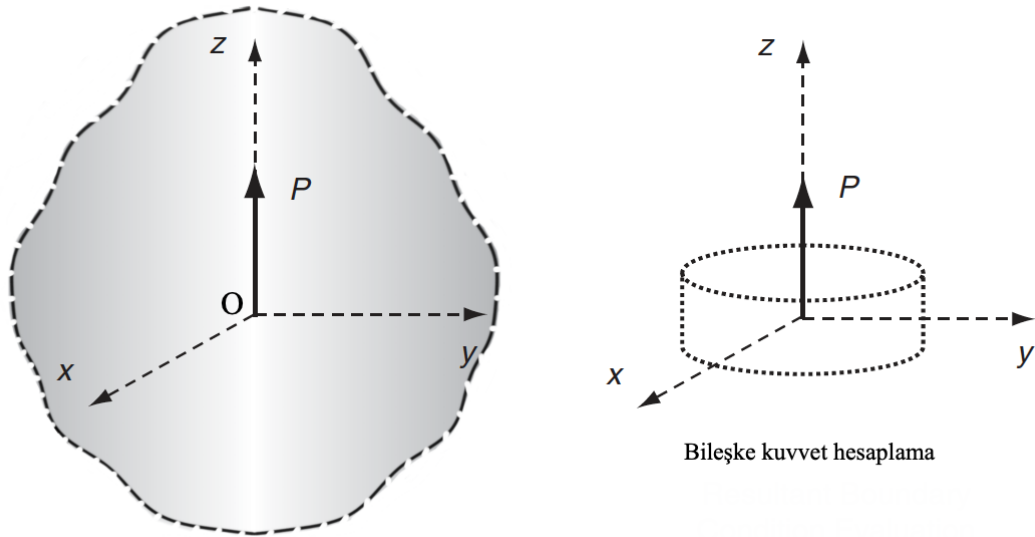
(4.24) denkleminde verilen  $\sigma_{zz}$  ve (4.30) denkleminde verilen  $\pi_{zz}$  silindirik koordinat sisteminde de özdeş olarak geçerlidir ve geriye kalan gerilme bileşenleri  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$  ve  $\pi_{r\theta} = \pi_{\theta r} = \pi_{z\theta} = \pi_{\theta z} = 0$  olmaktadır.

#### 4.1.2 Galerkin vektörü yoluyla Kelvin problemi çözümü

Bir önceki kısımda verilen yöntem ışığında iki lineer elastik katı karışımı için Kelvin probleminin Galerkin vektörü yoluyla çözümü aşağıda kısaca açıklanmaktadır.

Sonsuz bir karışım ortamı içerisinde koordinat sisteminin orijini olarak kabul edilen bir  $O$  noktasına sabit bir  $\mathbf{P}$  tekil yükünün  $z$  eksenine doğrultusunda etki ettiği farzedilmektedir. Kelvin problemi için genel sınır koşulları, gerilme alanının sonsuzda sıfıra yaklaşmasını, orijinde tanımsız olmasını ve orijini çevreleyen tüm yüzeyler için  $P\mathbf{e}_z$  bileşke kuvvetine eşdeğer olmasını gerektirmektedir.

İki lineer elastik katı karışımı için her bir karışım bileşeninin  $\mathbf{P}$  tekil yükünün  $\mathbf{P}_1$  ve  $\mathbf{P}_2$  ile gösterilen kısmını taşıdıklarını düşünelim ( $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ ). Şu halde, gerilme alanının birinci elastik katı için  $P_1\mathbf{e}_z$ , ikinci elastik katı için ise  $P_2\mathbf{e}_z$  bileşke kuvvetini dengeleyecek şekilde etki ettiği düşünülebilir.



Şekil 4.1 : Kelvin problemi.

Biharmoniklik koşulları dikkate alınarak Love şekil değiştirme fonksiyonları için

$$Z_1(r, z) = N_1 R = N_1 \sqrt{r^2 + z^2}, \quad Z_2(r, z) = N_2 R = N_2 \sqrt{r^2 + z^2} \quad (4.40)$$

kabulleri yapılabilir.

Burada,  $N_1$  ve  $N_2$  keyfi sabitler olup sınır koşulları yardımıyla belirlenmeleri gereklidir. Love şekil değiştirme fonksiyonları için yapılan (4.40) kabullerinin (4.24), (4.30)-(4.39) denklemlerinde kullanılmasıyla yer değiştirmeler, difüzyon kuvveti ve gerilme alanları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$u_r^{(1)} = \frac{N_1 r z}{R^3}, \quad u_\theta^{(1)} = 0, \quad u_z^{(1)} = N_1 \left[ \frac{(2A_1 - 1)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right], \quad (4.41)$$

$$u_r^{(2)} = \frac{N_2 r z}{R^3}, \quad u_\theta^{(2)} = 0, \quad u_z^{(2)} = N_2 \left[ \frac{(2A_2 - 1)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right], \quad (4.42)$$

$$p_r = 6\eta \frac{r z}{R^5}, \quad p_\theta = 0, \quad p_z = -2\eta \frac{(r^2 - 2z^2)}{R^5}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \alpha_2 = 2N_1 & \left[ \frac{(\lambda_1(1 - A_1) + \mu_1)z}{R^3} - \frac{3r^2 z \mu_1}{R^5} \right] \\ & + 2N_2 \left[ \frac{(\lambda_3(1 - A_2) + \mu_3)z}{R^3} - \frac{3r^2 z \mu_3}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \alpha_2 = \frac{2N_1 z [\lambda_1(1 - A_1) + \mu_1]}{R^3} + \frac{2N_2 z [\lambda_3(1 - A_2) + \mu_3]}{R^3} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} + \alpha_2 = -2N_1 & \left[ \frac{(\lambda_1(A_1 - 1) + \mu_1(2A_1 - 3))z}{R^3} + \frac{3z^3 \mu_1}{R^5} \right] \\ & - 2N_2 \left[ \frac{(\lambda_3(A_2 - 1) + \mu_3(2A_2 - 3))z}{R^3} + \frac{3z^3 \mu_3}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\sigma_{rz} = -2N_1 \mu_1 \left[ \frac{(A_1 - 1)r}{R^3} + \frac{3z^2 r}{R^5} \right] - 2N_2 \mu_3 \left[ \frac{(A_2 - 1)r}{R^3} + \frac{3z^2 r}{R^5} \right], \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \pi_{rr} - \alpha_2 = 2N_1 & \left[ \frac{(\lambda_4(1 - A_1) + \mu_3)z}{R^3} - \frac{3r^2 z \mu_3}{R^5} \right] \\ & + 2N_2 \left[ \frac{(\lambda_2(1 - A_2) + \mu_2)z}{R^3} - \frac{3r^2 z \mu_2}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\pi_{\theta\theta} - \alpha_2 = \frac{2N_1 z [\lambda_4(1 - A_1) + \mu_3]}{R^3} + \frac{2N_2 z [\lambda_2(1 - A_2) + \mu_2]}{R^3}, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \pi_{zz} - \alpha_2 = -2N_1 & \left[ \frac{(\lambda_4(A_1 - 1) + \mu_3(2A_1 - 3))z}{R^3} + \frac{3z^3 \mu_3}{R^5} \right] \\ & - 2N_2 \left[ \frac{(\lambda_2(A_2 - 1) + \mu_2(2A_2 - 3))z}{R^3} + \frac{3z^3 \mu_2}{R^5} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\pi_{rz} = -2N_1 \mu_3 \left[ \frac{(A_1 - 1)r}{R^3} + \frac{3z^2 r}{R^5} \right] - 2N_2 \mu_2 \left[ \frac{(A_2 - 1)r}{R^3} + \frac{3z^2 r}{R^5} \right]. \quad (4.51)$$

Burada  $\eta$  katsayısı,  $\eta = \alpha_2 [(A_1 - 1)N_1 \bar{\rho}_2 + (A_2 - 1)N_2 \bar{\rho}_1] / \bar{\rho}$  bağıntısını temsil etmektedir. Denklem takımında yer alan ikinci katıya ait gerilme bileşenleri, daha önce

de belirtildiği gibi, birinci katıya ait gerilme bileşenlerinde  $A_1$  ve  $A_2$  aynı kalmak koşuluyla  $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_3$  ve  $\alpha_2$  katsayıları yerine sırasıyla  $\lambda_4, \lambda_2, \mu_3, \mu_2$  ve  $-\alpha_2$  yazılarak elde edilebilmektedir.

(4.41)-(4.51) denklemlerinde açıkça gözüktüğü gibi gerilmeler, yer değiştirmeler ve difüzyon kuvveti sonsuzda sıfıra yaklaşmakta, orijinde tanımsız olmaktadır. Bileşke kuvveti hesaplamak için Şekil 4.1'deki gibi orijini çevreleyen keyfi bir silindirik yüzey düşünelim. Silindirin üst ve alt yüzeyleri  $z = \pm a$  ile sınırlandırılmış olsun ve yarıçapı sonsuza yaklaşsın. Şu halde, birinci ve ikinci katının  $z$  doğrultusundaki denge hali için sırasıyla

$$\int_0^{\infty} 2\pi r(\sigma_{zz} + \alpha_2)(r, a) dr - \int_0^{\infty} 2\pi r(\sigma_{zz} + \alpha_2)(r, -a) dr + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} 2\pi r \sigma_{rz}(r, z) dr + P_1 = 0, \quad (4.52)$$

$$\int_0^{\infty} 2\pi r(\pi_{zz} - \alpha_2)(r, a) dr - \int_0^{\infty} 2\pi r(\pi_{zz} - \alpha_2)(r, -a) dr + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} 2\pi r \pi_{rz}(r, z) dr + P_2 = 0 \quad (4.53)$$

yazılabilir. Bu denge denklemleri ise gerekli integrasyonlardan sonra

$$P_1 = 8\pi[N_1(\lambda_1 + 2\mu_1)(A_1 - 1) + N_2(\lambda_3 + 2\mu_3)(A_2 - 1)], \quad (4.54)$$

$$P_2 = 8\pi[N_1(\lambda_4 + 2\mu_3)(A_1 - 1) + N_2(\lambda_2 + 2\mu_2)(A_2 - 1)] \quad (4.55)$$

bağıntılarını verir. Böylece  $N_1$  ve  $N_2$  sabitleri

$$N_1 = \frac{P_1(\lambda_2 + 2\mu_2) - P_2(\lambda_3 + 2\mu_3)}{8\pi(A_1 - 1)[(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)]}, \quad (4.56)$$

$$N_2 = \frac{P_2(\lambda_1 + 2\mu_1) - P_1(\lambda_4 + 2\mu_3)}{8\pi(A_2 - 1)[(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)]} \quad (4.57)$$

olarak hesaplanabilir. Bu şekilde, iki lineer elastik katı karışımı için Kelvin probleminin Galerkin vektörü yoluyla çözümü elde edilmiş olmaktadır.

## 4.2 Bağlı Hareket Yapabilen Ortam Koşulunda Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayıların Belirlenmesi

Bölüm 3.1.1 'de, iki lineer elastik katı karışımının bünye denklemlerinde yer alan bilinmeyen katsayılar arasında basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneyleri yardımıyla (3.13), (3.16) ve (3.19) analitik ilişkileri elde edilmişti. Burada, Binark ve Dokuz (2017) tarafından verilen bu ilişkiler bağlı hareket yapabilen bir ortam için kullanılarak, bünye denklemlerindeki bilinmeyen  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayılarının nasıl belirlenebileceğine dair öngörülen yöntem tanıtılmaktadır.

İki lineer elastik katı karışımı ortamında Kelvin problemine ait yer değiştirmeler silindirik koordinatlarda (4.41) ve (4.42) denklemleriyle verildiğine göre, her iki katının birim şekil değiştirme tansörleri  $x$ ,  $y$ ,  $z$  değişkenleri cinsinden yazılan (4.41) ve (4.42) denklemlerinin (2.8)'de kullanılmasıyla elde edilebilir. Karışımın tümü özel bir tekil ortam gibi davrandığı için, gerekli eşleştirmelerin yapılabilmesi amacıyla, tekil ortama ait klasik çözüme de ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde tekil ortam için Kelvin problemine ait yer değiştirmeler,  $A = \frac{P}{8\pi(1-\nu)}$  ve  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$  tanımları yardımıyla

$$2\mu w_r = \frac{Arz}{R^3}, \quad w_\theta = 0, \quad 2\mu w_z = A \left[ \frac{2(1-2\nu)}{R} + \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \quad (4.58)$$

şeklinde verilmektedir (Sadd, 2005). Bu bileşenler kartezyen değişkenler cinsinden yazılarak (2.16) yardımıyla Kelvin problemi için eşdeğer tekil ortama ait birim şekil değiştirme tansörü elde edilebilir. Bu noktadan sonra, bağlı deformasyona uğrayabilen karışım ortamı için bilinmeyen katsayıların tespiti amacıyla gerekli işlemler yapılabilir.

Karışım bileşenleri ve eşdeğer tekil ortam için elde edilen birim şekil değiştirme tansörleri ile (3.13), (3.16) ve (3.19) denklemlerine gidildiğinde, (3.16) ve (3.19) denklemlerinin eşdeğer hale geldiği görülür. Bu durumda, üç bilinmeyen ( $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$ ) belirlenebilmesi için gerekli olan ek denklem, iki lineer elastik katı karışımının teorik altyapısında var olan, (2.19) bağıntısının hesaba dahil edilmesiyle elde edilmektedir.

Bileşenleri arasında bağlı hareket olmayan karışım durumunda  $\epsilon_{mm} = e_{mm} = g_{mm}$  olacağı için (2.19) denklemi (2.12) gereğince otomatik olarak sağlanmaktadır. Bu

sebeple (3.22) ile verilen denklem takımında yer almaz. Böylece, bileşenleri bağıl hareket edebilen bir karışım ortamı söz konusu olduğunda, üç bilinmeyen katsayı (3.13), (3.19) ve (2.19)'den oluşan

$$\begin{aligned}
 E\varepsilon_{11} &= E_1e_{11} + E_2g_{22}, \\
 (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mm} &= [3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3)]e_{mm} \\
 &+ [3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3)]g_{mm}, \\
 \bar{\rho}\varepsilon_{mm} &= \bar{\rho}_1e_{mm} + \bar{\rho}_2g_{mm}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

denklem takımı yardımıyla belirlenebilir. Buna ek olarak, Bölüm 3.2.3'te karışımı oluşturan bileşenlerin taşıdıkları kısmi yüklerin doğrudan hacim oranıyla ilişkilendirilmesinin doğru bir yaklaşım olmadığı belirtilmişti. Bu sebeple, birinci katının taşıdığı yük oranı  $\beta$  ve ikinci katının taşıdığı yük oranı  $(1 - \beta)$  ile gösterilip, kısmi yükler aşağıdaki gibi ilişkilendirilecektir.

$$P_1 = \beta P, \quad P_2 = (1 - \beta)P. \tag{4.60}$$

#### 4.2.1 Bilinmeyen katsayıların belirlenmesi

Yapılan hesaplamalarda (3.13) denkleminin içerdiği nonlineerlik sebebiyle  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayılarının, (3.23)-(3.25)'te olduğu gibi, analitik olarak hesabının mümkün olmadığı görülmüştür. Sayısal çözüm aramak amacıyla Binark ve Dokuz (2017) tarafından kullanılan tanecikli yapıya sahip kompozit bir malzemenin verileri kullanılacaktır. Bu makalede kullanılan Hsieh, Tuan ve Wu (2004) tarafından sağlanan tanecikli yapıya sahip  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitine ait veriler Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de gösterilmektedir.

**Çizelge 4.1** :  $Al_2O_3$  ve NiAl katılarına ait özellikler (Hsieh, Tuan ve Wu, 2004).

	Teorik yoğunluk (gr/cm <sup>3</sup> )	Elastiklik modülü (GPa)	Poisson oranı	Lamé katsayıları (GPa)	
NiAl	$\bar{\rho}_{10} = 5.95$	$E_{10} = 186$	$\nu_{10} = 0.31$	$\lambda_{10} = 115.8$	$\mu_{10} = 70.99$
$Al_2O_3$	$\bar{\rho}_{20} = 3.98$	$E_{20} = 401$	$\nu_{20} = 0.24$	$\lambda_{20} = 149.3$	$\mu_{20} = 161.7$

**Çizelge 4.2 :** NiAl katısının farklı hacim oranları için Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-NiAl kompozitine ait bazı deneysel sonuçlar (Hsieh, Tuan ve Wu, 2004).

$\gamma$ (NiAl)	Elastiklik modülü (GPa)	Poisson oranı	Lamé katsayıları (GPa)	
0.3	301	0.238	$\lambda = 110.4$	$\mu = 121.6$
0.4	293	0.257	$\lambda = 123.3$	$\mu = 116.5$

Çizelge 4.1’de NiAl katısının tekil haldeki özellikleri  $\bar{\rho}_{10}$ ,  $E_{10}$ ,  $\nu_{10}$ ,  $\lambda_{10}$ ,  $\mu_{10}$  ile, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> katısının tekil haldeki özellikleri ise  $\bar{\rho}_{20}$ ,  $E_{20}$ ,  $\nu_{20}$ ,  $\lambda_{20}$ ,  $\mu_{20}$  ile gösterilmiştir.

Bağıl hareketi olmayan ortam için (4.60) kabullerindeki  $\beta$  katsayısı (3.20) eşitliği ve (3.23)-(3.25) denklemleri kullanılarak

$$\beta = \frac{2\mu(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu + \mu_1 - \mu_2) + \lambda(\mu - \mu_1 + \mu_2)}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \quad (4.61)$$

şeklinde elde edilir. Burulma probleminin verdiği sonuçla karşılaştırıldığında  $\beta$  yük taşıma oranlarının farklı olduğu görülmektedir. Buna göre, farklı tip zorlanmalar için karışım bileşenlerinin taşıdıkları yük oranlarının da farklı olacağı söylenebilir.

Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de verilen değerlerin bağıl hareketsiz bir karışımın Kelvin problemi çözümünde kullanılması sonucunda elde edilen yük taşıma oranları Çizelge 4.3’de sunulmuştur. Burada görüldüğü gibi, bileşenlerin taşıdıkları yükler Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-NiAl kompozitinin 0.3 ve 0.4 hacim oranları için farklılık göstermektedir.

**Çizelge 4.3 :** Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ve NiAl katı bileşenlerinin, bağıl hareket olmayan ortam koşulunda, Kelvin ve burulma problemleri için taşıdıkları yük oranları.

$\gamma$ (NiAl)	Problem Tipi	NiAl bileşeninin taşıdığı yük oranı ( $\beta$ )	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> bileşeninin taşıdığı yük oranı (1- $\beta$ )
0.3	Burulma	0.111	0.889
	Kelvin	0.265	0.735
0.4	Burulma	0.123	0.877
	Kelvin	0.286	0.714

Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de verilen değerlerin, bileşenleri bağıl hareket edebilen bir ortama ait, (4.59) denklem takımında kullanılması neticesinde  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları

için birden çok çözüm kümesi elde edilmektedir. Bu çözüm takımları arasında seçim yapılırken, reel köklerin

- i.  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirmelerinin zıt yönlerde bulunmasına izin vermemesi,
- ii. İzotropik bir elastik katı karışımı için Borrelli ve Patria (1983) tarafından (4.62) ile verilen kısıtlamalara uygun olması

koşulları dikkate alınmıştır.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\bar{\rho}_2\alpha_2}{\rho} &\geq 0, \quad \lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\bar{\rho}_1\alpha_2}{\rho} \geq 0, \\ (\lambda_3 + 2\mu_3 - \frac{\bar{\rho}_1\alpha_2}{\rho})^2 &\leq (\lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\bar{\rho}_2\alpha_2}{\rho})(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\bar{\rho}_1\alpha_2}{\rho}), \\ (\mu_3)^2 &\leq \mu_1\mu_2, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Çizelge 4.3 kullanılarak, bağıl hareketli ortamda yukarıda bahsedilen beklentileri karşılayan  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları ile, (3.23), (3.24) ve (3.25) denklemlerinden elde edilen bağıl hareket yapmayan ortam çözümüne ait katsayılar topluca Çizelge 4.4'de verilmektedir.

**Çizelge 4.4 :** NiAl bileşeninin farklı hacim oranları için elde edilen kabul edilebilir  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları.

$\gamma$ (NiAl)	Karışım Ortamı	Hesaplanan katsayılar
0.3	Bağıl hareketsiz	$\lambda_3 = -52.84$ GPa , $\lambda_4 = -101.81$ GPa , $\mu_3 = -55.56$ GPa
0.3	Bağıl hareketli (1. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -52.84$ GPa , $\lambda_4 = -101.81$ GPa , $\mu_3 = -55.56$ GPa
0.3	Bağıl hareketli (2. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -60.67$ GPa , $\lambda_4 = -92.67$ GPa , $\mu_3 = -54.70$ GPa
0.4	Bağıl hareketsiz	$\lambda_3 = -39.66$ GPa , $\lambda_4 = -102.16$ GPa , $\mu_3 = -58.07$ GPa
0.4	Bağıl hareketli (1. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -39.66$ GPa , $\lambda_4 = -102.16$ GPa , $\mu_3 = -58.07$ GPa
0.4	Bağıl hareketli (2. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -48.24$ GPa , $\lambda_4 = -91.88$ GPa , $\mu_3 = -57.12$ GPa

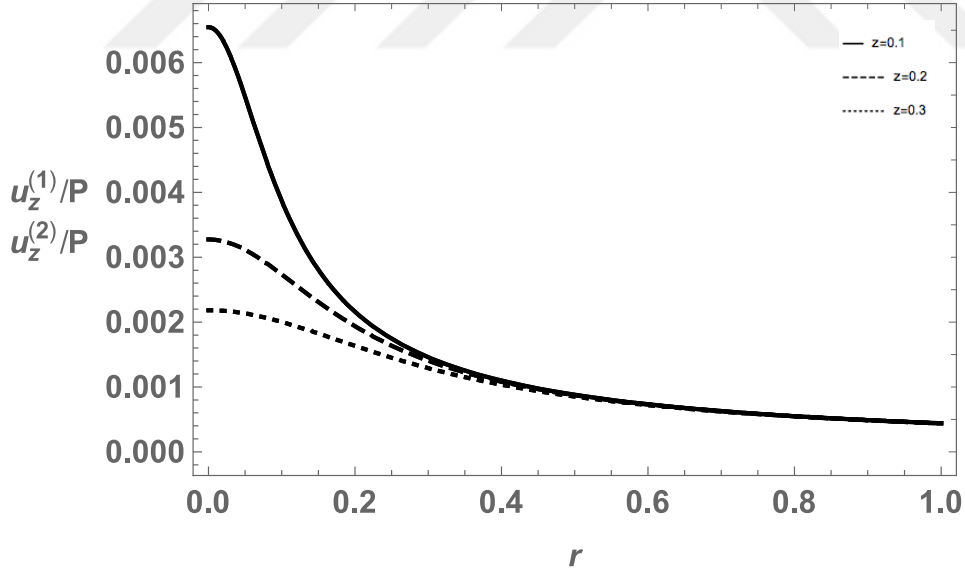
Çizelge 4.4'de görüldüğü gibi,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -NiAl kompoziti için bağıl hareketli ortam çalışmasında her bir hacim oranı için ikişer adet  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  kabul edilebilir katsayı

grubu elde edilmektedir. Bunlardan ilki, bileşenleri bağıl hareket edemeyen ortam koşulundan elde edilenler ile özdeş çıkmaktadır.

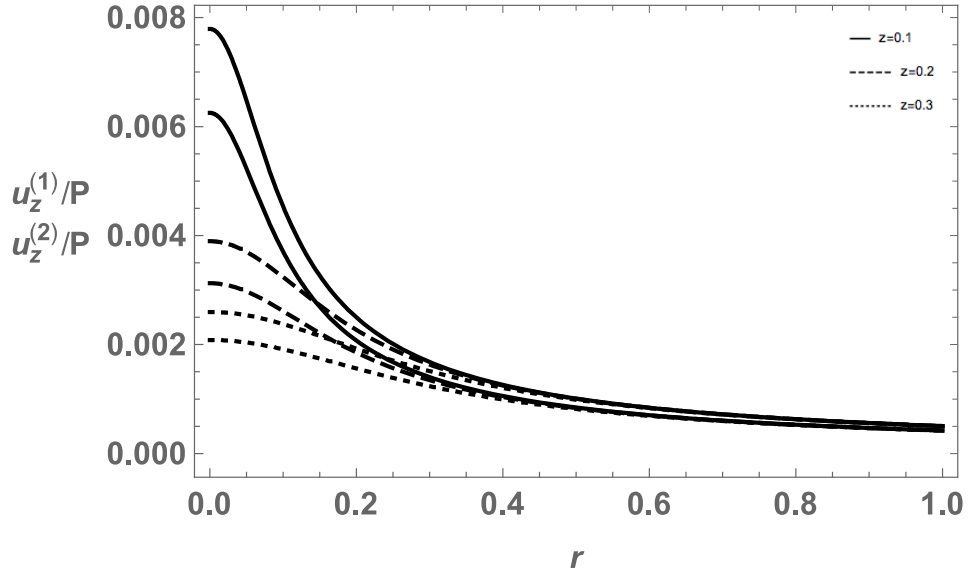
#### 4.2.2 Elde edilen bilinmeyen katsayıların verdiği sonuçlar

$Al_2O_3-NiAl$  kompozitine ait deneysel veriler kullanılarak bağıl hareketli ve bağıl hareketsiz karışım kabulleri altında  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları için elde edilen çözüm kümeleri Çizelge 4.4'te sunulmuştur. Bu sonuçlar iki lineer elastik katı karışımı için Galerkin vektörü yardımıyla çözdüğümüz Kelvin probleminde kullanılarak, her bir katının  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  yer değiştirme vektörü bileşenlerinin ortam içerisinde nasıl değiştikleri Şekil 4.2-4.5 ile verilen grafiklerde gösterilmektedir.

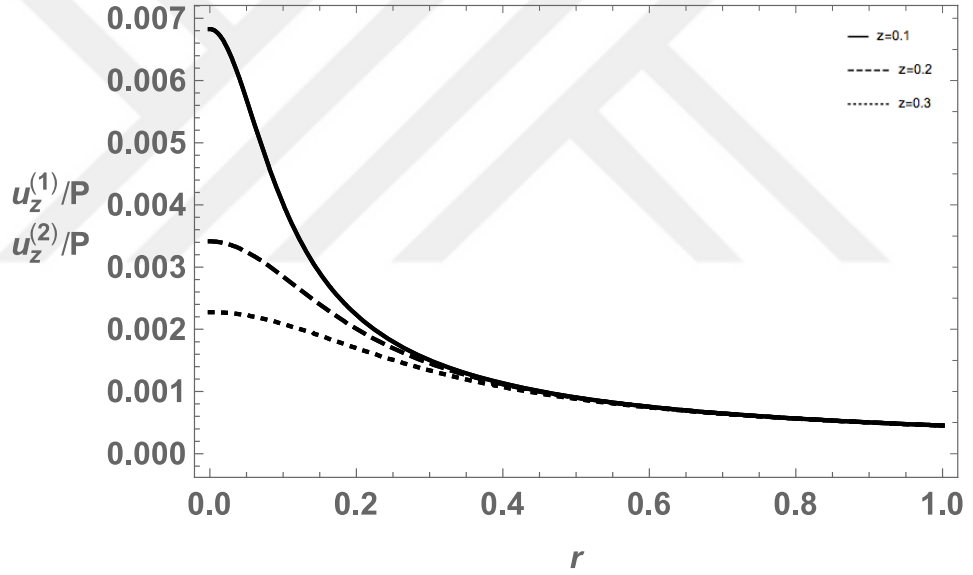
Görüldüğü gibi, Kelvin probleminde, bileşenleri arasında bağıl hareket olmayan ortam koşulunda  $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$  olan grafikler elde edilmektedir. Benzer şekilde, bağıl hareketli ortam için elde edilen birinci çözüm kümesi öncekiyle eşdeğer olduğu için aynı yer değiştirme grafiklerine tekrar ulaşılmaktadır. Bağıl hareketli ortam için elde edilen ikinci çözüm kümesi ise birbirinden farklı yer değiştirmeler yapan katı bileşenleri açıkça göstermektedir.



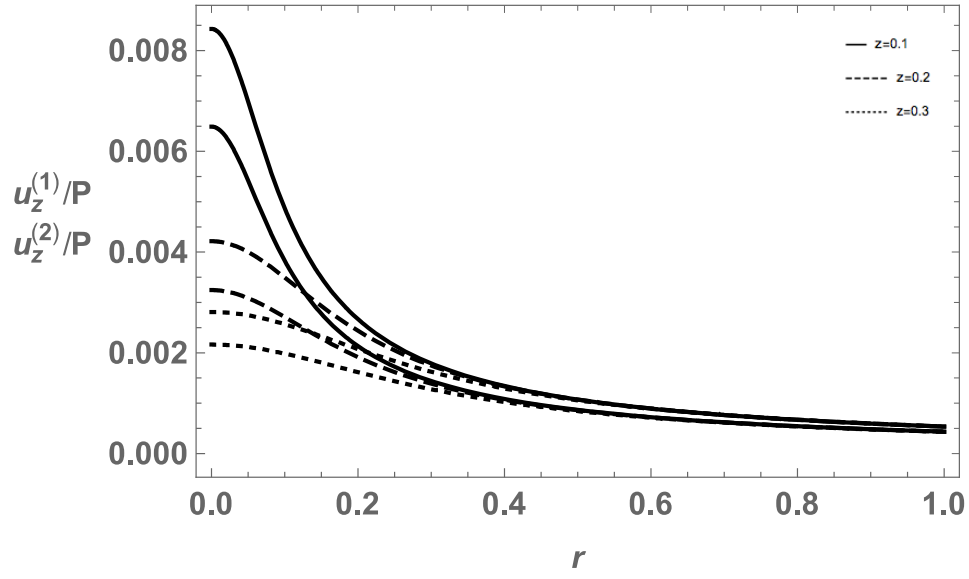
Şekil 4.2 :  $\gamma = 0.3$  için bağıl hareketsiz ortamda Kelvin problemine ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 4.3 :  $\gamma = 0.3$  için bağıl hareketli ortamda Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 4.4 :  $\gamma = 0.4$  için bağıl hareketsiz ortamda Kelvin problemine ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 4.5 :  $\gamma = 0.4$  için bağıl hareketli ortamda Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.

## **5. HACİM ORANI İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ ELASTİK KATSAYILAR VE KARIŞIM ORTAMININ BİLİNMEYEN KATSAYILARININ BU DURUMLA İLİŞKİSİ**

Karışımlar teorisinin kullandığımız formu bünye denklemlerindeki katsayıların bileşen hacim oranı ile ilgisi konusunda kısıtlayıcı bir öngörü sunmamaktadır. Buraya kadar yapılan hesaplamalarda, tanecikli yapıya sahip  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitini oluşturan  $Al_2O_3$  ve NiAl katılarının tekil haldeki malzeme özellikleriyle karışım durumundaki özellikleri eşdeğer kabul edilerek, bağıl hareketli ve bağıl hareketsiz ortamlarda bilinmeyen katsayılar hesaplanmış ve akabinde bunların kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.

Literatürde gözenekli malzemelerin elastik özelliklerini tahmin etmek için bir çok çalışma bulunmaktadır (Choren, Heinrich ve Silver-Thorn, 2013). Bu bölümde de kompoziti oluşturan her bir katının karışım içerisindeki özellikleriyle tekil haldeki özellikleri arasında bir bağıntı elde etmek amacıyla her bir katıyı diğer katının hacim oranı kadar gözenek içeren bir yapıda kabul ederek literatürdeki çalışmalarını iki lineer elastik katı karışımına uyarlama amaçlı bir inceleme yapılmaktadır. Bu vesileyle, hem literatüre katkı sunmak hem de bulunan sonuçları irdelemek amacıyla, iki lineer elastik katı karışımı için Hankel transformasyonu metoduyla Boussinesq probleminin çözümü de ele alınacak ve bileşen katsayılarının yeni formları için bağıl hareketsiz ve bağıl hareketli ortam durumlarının vereceği sonuçlar değerlendirilecektir.

### **5.1 Hacim Oranı ile İlişkilendirilmiş Malzeme Özellikleri**

Karışım kanunu adı verilen ve iki bileşenli ortamın elastiklik modülünün üst sınırını temsil eden  $E = pE_{10} + (1 - p)E_{20}$  bağıntısı, eşdeğer elastiklik modülüne her bir bileşenin tekil haldeki değerinin kendi hacim oranıyla doğru orantılı olarak katkı sağladığını kabul etmektedir. Burada  $p$  birinci katının karışım içindeki hacim oranını temsil etmektedir. Gözenekli malzeme benzetimi yapmak ve elastik özelliklerini tahmin etmek amacıyla, örneğin birinci katı için  $E_{10} = 0$  alınırsa, bu durum  $p$  hacimsel gözenekliliğine sahip ikinci bileşenden oluşan bir ortam anlamına gelecektir. Yukarıda

verilen düşünce temel alındığında, malzeme özelliği ile gözeneklilik arasında en basit ilişki olarak

$$E_p = E_0(1 - p) \quad (5.1)$$

bağıntısı karışım ortamının bileşenleri için de kullanılabilir. Burada  $E_p$ ,  $p$  oranında gözeneklilik içeren malzemenin efektif elastiklik modülü ve  $E_0$  boşluksuz katı malzemenin elastiklik modülüdür (Choren, Heinrich ve Silver-Thorn, 2013).

Önceki bölümlerde olduğu gibi birinci katının karışım içerisindeki hacimsel oranı  $\gamma$  ile, ikinci katının ise  $(1 - \gamma)$  ile gösterilecektir. Şu halde, her bir katının karışım içindeki elastiklik modülü (5.1) denklemiyle temsil edilecekse, birinci katı için  $p = (1 - \gamma)$ , ikinci katı için  $p = \gamma$  değerleri kullanılmalıdır. Böylelikle, bileşenlerin karışım içindeki elastiklik modülleri

$$E_1 = E_{10}\gamma \quad (5.2)$$

$$E_2 = E_{20}(1 - \gamma) \quad (5.3)$$

şeklinde ilişkilendirilebilir.

Klasik elastisite teorisinde Lamé katsayıları, Poisson oranı ve elastiklik modülü arasında

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.4)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E} \quad (5.5)$$

ilişkileri verilmektedir. Bu durumda, (5.2) denkleminin (5.4) ve (5.5) ilişkilerinde kullanılmasıyla birinci katının karışım içindeki Lamé katsayılarının  $(\lambda_1, \mu_1)$  katının tekil haldeki elastiklik modülü ve Poisson oranıyla olan ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilebilir. Benzer şekilde, (5.4) ve (5.5) ilişkilerinde (5.3) denkleminin kullanılmasıyla da ikinci katının karışım içindeki Lamé katsayıları  $(\lambda_2, \mu_2)$  elde edilmektedir.

$$\mu_1 = \frac{\gamma E_{10}}{2(1 + \nu_{10})} \quad (5.6)$$

$$\mu_2 = \frac{(1 - \gamma)E_{20}}{2(1 + \nu_{20})} \quad (5.7)$$

$$\lambda_1 = \frac{\gamma \nu_{10} E_{10}}{(1 + \nu_{10})(1 - 2\nu_{10})} \quad (5.8)$$

$$\lambda_2 = \frac{(1 - \gamma)\nu_{20} E_{20}}{(1 + \nu_{20})(1 - 2\nu_{20})} \quad (5.9)$$

Buna göre, yukarıdaki denklemlerden birinci ve ikinci katının karışım içindeki Lamé katsayılarının her bir katının tekil haldeki Lamé katsayıları ile olan ilişkisinin

$$\mu_1 = \gamma \mu_{10} \quad (5.10)$$

$$\mu_2 = (1 - \gamma) \mu_{20} \quad (5.11)$$

$$\lambda_1 = \gamma \lambda_{10} \quad (5.12)$$

$$\lambda_2 = (1 - \gamma) \lambda_{20} \quad (5.13)$$

şeklinde olduğu görülebilir. Bu varsayımın sonucu olarak, her bir katının tekil haldeki Poisson oranı ile karışım içindeki Poisson oranı özdeştir ( $\nu_1 = \nu_{10}$ ,  $\nu_2 = \nu_{20}$ ).

Buna ek olarak, şekil değiştirmeden önceki ortam yoğunluğunun birinci ve ikinci bileşenin tekil haldeki yoğunlukları ile

$$\bar{\rho} = \gamma \bar{\rho}_{10} + (1 - \gamma) \bar{\rho}_{20} \quad (5.14)$$

şeklinde lineer bir ilişkiye sahip olduğu ve her bir bileşenin karışım içerisinde (ilk andaki) yoğunluklarının da, (2.12) ve (5.14) denklemlerinden yola çıkılarak,

$$\bar{\rho}_1 = \gamma \bar{\rho}_{10} \quad (5.15)$$

$$\bar{\rho}_2 = (1 - \gamma) \bar{\rho}_{20} \quad (5.16)$$

şeklinde yazılabileceği düşünülebilir.

## 5.2 İki Lineer Elastik Katı Karışımı için Hankel Dönüşümü Metoduyla Boussinesq Probleminin Çözümü

İki lineer elastik karışım için Boussinesq probleminin Galerkin vektörü yoluyla çözümü Dokuz ve Gürgöze (2002) tarafından verilmiştir. Daha sonra Dokuz (2005) bu çözümü baz alarak iki lineer elastik katıdan oluşan izotropik bir karışımın rastgele dağılımlı elastik kürelerden oluşan tanecikli bir kompozit malzemeye mekanik davranış açısından eşdeğer kabul edilmesinin getireceği sonuçları bulmayı amaçlayan bir çalışma gerçekleştirmiştir.

Burada ise, daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak problemin Hankel transformasyonu metoduyla çözümü verilerek, hacim oranıyla ilişkilendirilmiş katsayıların ortamın bağıl hareketsiz ve bağıl hareketli olması durumları için ne cevaplar vereceği irdelenmektedir.

### 5.2.1 İki lineer elastik katı karışımına ait bağıntılar için Hankel dönüşümü

Bölüm 4'te iki lineer elastik katı karışımı için Kelvin probleminin çözümü verilmişti. (4.60) bağıntılarındaki kısmi yük paylaşımına paralel bir şekilde birinci ve ikinci elastik katı bileşenin ortama uygulanan  $P(x, y)$  yüküne sırasıyla  $\beta$  ve  $(1 - \beta)$  oranı ölçüsünde maruz kaldığı kabul edilirse, bu durumda Boussinesq problemi için sınır koşulları

$$\begin{aligned}(\sigma_{zz} + \alpha_2)|_{z=0} &= \beta P(x, y), & (\pi_{zz} - \alpha_2)|_{z=0} &= (1 - \beta)P(x, y), \\(\sigma_{xx} + \alpha_2)|_{z=0} &= 0, & (\pi_{xx} - \alpha_2)|_{z=0} &= 0, \\(\sigma_{yy} + \alpha_2)|_{z=0} &= 0, & (\pi_{yy} - \alpha_2)|_{z=0} &= 0, \\ \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0, & \pi_{xz}|_{z=0} &= 0, & \sigma_{yz}|_{z=0} &= 0, & \pi_{yz}|_{z=0} &= 0\end{aligned}\tag{5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Eksenel simetrik problemlerde silindirik koordinatların kullanılmasıyla (5.17) sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\begin{aligned}(\sigma_{zz} + \alpha_2)|_{z=0} &= \beta P(r), & (\pi_{zz} - \alpha_2)|_{z=0} &= (1 - \beta)P(r), \\(\sigma_{rr} + \alpha_2)|_{z=0} &= 0, & (\pi_{rr} - \alpha_2)|_{z=0} &= 0, \\ \sigma_{rz}|_{z=0} &= 0, & \pi_{rz}|_{z=0} &= 0.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Silindirik koordinatların kullanılmasını gerektiren yüklemeler için, Bölüm 4'te de tanımlanan, Love şekil değiştirme fonksiyonları  $Z_1(r, z)$  ve  $Z_2(r, z)$  biçiminde ifade edilmektedir.

Bir  $f(r)$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden Hankel transformu

$$\bar{f}^n(k) = H_n\{f(r); k\} = \int_0^\infty r f(r) J_n(rk) dr \quad (5.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ters Hankel dönüşümü ise

$$f(r) = \int_0^\infty k \bar{f}^n(k) J_n(rk) dk \quad (5.20)$$

bağıntısıyla verilmektedir. (5.19) kullanılarak elde edilmiş olan ve problem çözümünde ihtiyaç duyacağımız temel Hankel dönüşüm ilişkileri aşağıda listelenmektedir:

$$\begin{aligned} H_0\{\nabla^2 Z_1; k\} &= -k^2 \bar{Z}_1^0 + \frac{d^2 \bar{Z}_1^0}{dz^2}, & H_0\{\nabla^2 Z_2; k\} &= -k^2 \bar{Z}_2^0 + \frac{d^2 \bar{Z}_2^0}{dz^2}, \\ H_0\left\{\frac{\partial^m Z_1}{\partial z^m}; k\right\} &= \frac{d^m \bar{Z}_1^0}{dz^m}, & H_0\left\{\frac{\partial^m Z_2}{\partial z^m}; k\right\} &= \frac{d^m \bar{Z}_2^0}{dz^m}, \\ H_1\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial r}; k\right\} &= -k \bar{Z}_1^0, & H_1\left\{\frac{\partial Z_2}{\partial r}; k\right\} &= -k \bar{Z}_2^0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$H_0\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right] Z_1; k\right\} = -k^2 \bar{Z}_1^0, \quad H_0\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right] Z_2; k\right\} = -k^2 \bar{Z}_2^0.$$

(5.21) dönüşümlerinin yardımıyla silindirik koordinat sistemindeki (4.31), (4.32) yer değiştirme vektörleri ve (4.33) difüzyon kuvveti vektörü

$$\bar{u}_r^{1(1)} = k \frac{d\bar{Z}_1^0}{dz}, \quad \bar{u}_z^{1(1)} = -A_1 k^2 \bar{Z}_1^0 + (A_1 - 1) \frac{d^2 \bar{Z}_1^0}{dz^2}, \quad (5.22)$$

$$\bar{u}_r^{1(2)} = k \frac{d\bar{Z}_2^0}{dz}, \quad \bar{u}_z^{1(2)} = -A_2 k^2 \bar{Z}_2^0 + (A_2 - 1) \frac{d^2 \bar{Z}_2^0}{dz^2}, \quad (5.23)$$

$$\bar{p}_r^1 = -k \bar{\Omega}^0, \quad \bar{p}_z^0 = \frac{d\bar{\Omega}^0}{dz} \quad (5.24)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\bar{\Omega}^0 = \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ -k^2 \frac{d}{dz} + \frac{d^3}{dz^3} \right] [(A_1 - 1) \bar{p}_2 \bar{Z}_1^0 + (A_2 - 1) \bar{p}_1 \bar{Z}_2^0]$  olarak tanımlanmaktadır. Dönüşüm işlemlerini kolaylaştırmak amacıyla birinci katı için  $\sigma_{rr}$  ve  $\sigma_{\theta\theta}$  gerilme bileşenlerinin toplamını, ikinci katı için de  $\pi_{rr}$  ve  $\pi_{\theta\theta}$  gerilme

bileşenlerinin toplamını kullanırsak, (4.24), (4.30) ve (4.34)-(4.39) denklemlerinin Hankel dönüşümleri

$$\begin{aligned} \overline{(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2\alpha_2)}^0 &= 2k^2 \frac{d}{dz} \{[\mu_1 - \lambda_1(A_1 - 1)]\bar{Z}_1^0 + [\mu_3 - \lambda_3(A_2 - 1)]\bar{Z}_2^0\} \\ &+ 2 \frac{d^3}{dz^3} [\lambda_1(A_1 - 1)\bar{Z}_1^0 + \lambda_3(A_2 - 1)\bar{Z}_2^0], \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\overline{\sigma_{rz}}^{-1} = k^3 (\mu_1 A_1 \bar{Z}_1^0 + \mu_3 A_2 \bar{Z}_2^0) + k \frac{d^2}{dz^2} [\mu_1 (2 - A_1) \bar{Z}_1^0 + \mu_3 (2 - A_2) \bar{Z}_2^0], \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\sigma_{zz} + \alpha_2)}^0 &= \left[ -k^2 \frac{d}{dz} + \frac{d^3}{dz^3} \right] \{ [A_1(\lambda_1 + 2\mu_1) - \lambda_1] \bar{Z}_1^0 \\ &+ [A_2(\lambda_3 + 2\mu_3) - \lambda_3] \bar{Z}_2^0 \} - 2 \frac{d^3}{dz^3} (\mu_1 \bar{Z}_1^0 + \mu_3 \bar{Z}_2^0) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} - 2\alpha_2)}^0 &= 2k^2 \frac{d}{dz} \{ [\mu_3 - \lambda_4(A_1 - 1)]\bar{Z}_1^0 + [\mu_2 - \lambda_2(A_2 - 1)]\bar{Z}_2^0 \} \\ &+ 2 \frac{d^3}{dz^3} [\lambda_4(A_1 - 1)\bar{Z}_1^0 + \lambda_2(A_2 - 1)\bar{Z}_2^0], \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\overline{\pi_{rz}}^{-1} = k^3 (\mu_3 A_1 \bar{Z}_1^0 + \mu_2 A_2 \bar{Z}_2^0) + k \frac{d^2}{dz^2} [\mu_3 (2 - A_1) \bar{Z}_1^0 + \mu_2 (2 - A_2) \bar{Z}_2^0], \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\pi_{zz} - \alpha_2)}^0 &= \left[ -k^2 \frac{d}{dz} + \frac{d^3}{dz^3} \right] \{ [A_1(\lambda_4 + 2\mu_3) - \lambda_4] \bar{Z}_1^0 \\ &+ [A_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \lambda_2] \bar{Z}_2^0 \} - 2 \frac{d^3}{dz^3} (\mu_3 \bar{Z}_1^0 + \mu_2 \bar{Z}_2^0) \end{aligned} \quad (5.30)$$

olarak elde edilmektedir. Dönüşümleri yapılmış denklemlerle ilişkilendirebilmek amacıyla, (5.18) sınır koşullarının da Hankel dönüşümleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \overline{(\sigma_{zz} + \alpha_2)}^0 \Big|_{z=0} &= \beta \bar{P}^0(k), \quad \overline{(\pi_{zz} - \alpha_2)}^0 \Big|_{z=0} = (1 - \beta) \bar{P}^0(k), \\ \overline{\sigma_{rz}}^{-1} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \overline{\pi_{rz}}^{-1} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

(4.15) denklemlerinin Hankel dönüşümleri, (5.21) uyarınca, Love şekil değiştirme fonksiyonları için

$$\left[ -k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right]^2 \bar{Z}_1^0 = 0, \quad \left[ -k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right]^2 \bar{Z}_2^0 = 0 \quad (5.32)$$

ifadelerini vermektedir. Bunların çözülmesiyle de  $\bar{Z}_1^0(k, z)$  ve  $\bar{Z}_2^0(k, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonları için

$$\bar{Z}_1^0 = (C_{11} + C_{12}kz)e^{-kz}, \quad \bar{Z}_2^0 = (C_{21} + C_{22}kz)e^{-kz} \quad (5.33)$$

ilişkileri elde edilir. Burada,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  integrasyon sabitleridir. (5.31) sınır koşulları yardımıyla integrasyon sabitleri

$$C_{11} = m_1 \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3}, \quad C_{12} = n_1 \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3}, \quad C_{21} = m_2 \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3}, \quad C_{22} = n_2 \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3} \quad (5.34)$$

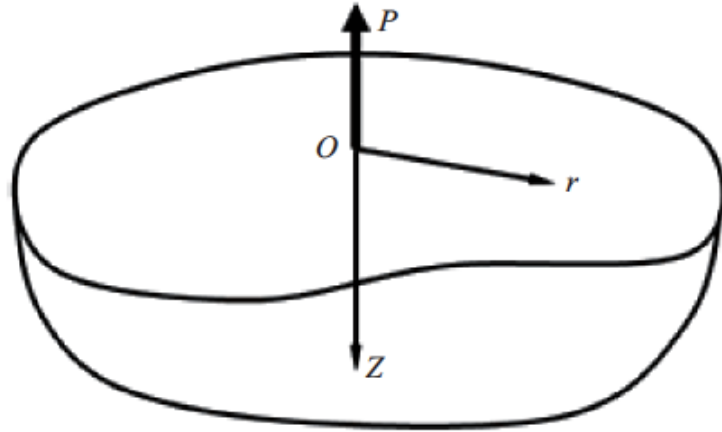
olarak bulunabilir. Buradaki sabit katsayılar, (4.7)<sub>2</sub> ve (4.8)<sub>2</sub> tanımları da dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_4)[\beta(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3) - \lambda_3 - \mu_3]}{(\mu_1 + \mu_3)\Pi}, \\ n_1 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)[\beta(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3) - \lambda_3 - \mu_3]}{(\mu_1 + \mu_3)\Pi}, \\ m_2 &= -\frac{(\lambda_2 + \lambda_3)[\beta(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3) - \lambda_1 - \mu_1]}{(\mu_2 + \mu_3)\Pi}, \\ n_2 &= -\frac{(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)[\beta(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3) - \lambda_1 - \mu_1]}{(\mu_2 + \mu_3)\Pi}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

şeklinde yazılabilmekte ve  $\Pi = 2[(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) - (\lambda_3 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_3)]$  eşitliği ile  $\Pi$  katsayısı temsil edilmektedir. Sonuç olarak, (5.33)'te verilen dönüşmüş Love şekil değiştirme fonksiyonları

$$\bar{Z}_1^0 = (m_1 + n_1kz)e^{-kz} \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3}, \quad \bar{Z}_2^0 = (m_2 + n_2kz)e^{-kz} \frac{\bar{P}^0(k)}{k^3} \quad (5.36)$$

formunda elde edilmiş olmaktadır.



Şekil 5.1 : Boussinesq problemi.

### 5.2.2 Hankel dönüşümü metoduyla Boussinesq problemi çözümü

Bu kısımda, bir önceki kısımda elde edilen silindirik koordinatlardaki Hankel dönüşümleri yardımıyla, iki lineer elastik katı karışımı için Boussinesq probleminin çözümü verilmektedir.

Şekil 5.1’de gösterildiği gibi,  $z = 0$  düzleminin O noktasında sabit bir P tekil yükünün  $(P(x, y) \rightarrow P)$  z eksenine çakışık ve ters yönde  $z \geq 0$  yarı-sonsuz uzayını kapsayan karışıma etkidiği farzedilmektedir. O noktasının çevresinde a yarıçaplı bir dairesel eleman göz önüne alındığı takdirde, bu doğrultudaki gerilmenin ( $0 < r < a$  olmak koşuluyla)

$$(\sigma_{zz} + \pi_{zz})|_{z=0} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P}{\pi a^2} \quad (5.37)$$

değerine eşit olması gerekir. (5.18) sınır koşullarından

$$(\sigma_{zz} + \pi_{zz})|_{z=0} = P \quad (5.38)$$

olduğu bilindiğine göre, Hankel dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} \bar{P}^0(k) &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{P}{\pi a^2} r J_0(rk) dr = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{P}{\pi a^2} \frac{a}{k} J_1(ak) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P}{\pi a^2} \frac{a}{k} \left[ \frac{ak}{2} - \left( \frac{ak}{2} \right)^3 \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{P}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.39)$$

olduğu hesaplanabilir. Burada, n tamsayıları için birinci türden Bessel fonksiyonu tanımı  $J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2i} \right)$  şeklindedir. (5.36) denklemleriyle verilen Love şekil değiştirme fonksiyonları (5.22)-(5.30) ifadelerinde yerlerine konulup, ters Hankel dönüşümleri hesaplanırsa, yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u_r^{(1)} = \frac{P[(2n_1 - m_1)r^2 z + (n_1 - m_1)(z^3 - R^3)]}{2\pi r R^3}, \quad u_z^{(1)} = -\frac{P\{[m_1 + 2n_1(A_1 - 1)]R^2 + n_1 z^2\}}{2\pi R^3}, \quad (5.40)$$

$$u_r^{(2)} = \frac{P[(2n_2 - m_2)r^2 z + (n_2 - m_2)(z^3 - R^3)]}{2\pi r R^3}, \quad u_z^{(2)} = -\frac{P\{[m_2 + 2n_2(A_2 - 1)]R^2 + n_2 z^2\}}{2\pi R^3}, \quad (5.41)$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2\alpha_2 = \frac{P}{\pi R^5} (d_{11} r^2 z + d_{12} z^3), \quad (5.42)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{P}{\pi R^5} (d_{13} r z^2), \quad (5.43)$$

$$\sigma_{zz} + \alpha_2 = \frac{P}{\pi R^5} (d_{14} r^2 z + d_{15} z^3), \quad (5.44)$$

$$\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} - 2\alpha_2 = \frac{P}{\pi R^5} (d_{21} r^2 z + d_{22} z^3), \quad (5.45)$$

$$\pi_{rz} = \frac{P}{\pi R^5} (d_{23} r z^2), \quad (5.46)$$

$$\pi_{zz} - \alpha_2 = \frac{P}{\pi R^5} (d_{24} r^2 z + d_{25} z^3), \quad (5.47)$$

$$p_r = -\frac{3P\omega}{\pi R^5} r z, \quad p_z = -\frac{P\omega}{\pi R^5} (-r^2 + 2z^2). \quad (5.48)$$

Bağıntılarda görülmekte olan çeşitli katsayılar

$$d_{11} = 2(A_1 - 1)n_1\lambda_1 + 2(A_2 - 1)n_2\lambda_3 - (m_1 - 2n_1)\mu_1 - (m_2 - 2n_2)\mu_3,$$

$$d_{21} = 2(A_1 - 1)n_1\lambda_4 + 2(A_2 - 1)n_2\lambda_2 - (m_1 - 2n_1)\mu_3 - (m_2 - 2n_2)\mu_2,$$

$$d_{12} = d_{11} - 3(n_1\mu_1 + n_2\mu_3),$$

$$d_{22} = d_{21} - 3(n_1\mu_3 + n_2\mu_2),$$

$$d_{13} = [m_1 + (A_1 + 1)n_1]\mu_1 + [m_2 + (A_2 + 1)n_2]\mu_3,$$

$$d_{23} = [m_1 + (A_1 + 1)n_1]\mu_3 + [m_2 + (A_2 + 1)n_2]\mu_2,$$

$$d_{14} = (A_1 - 1)n_1\lambda_1 + (A_2 - 1)n_2\lambda_3 + [m_1 + 2(A_1 - 2)n_1]\mu_1 + [m_2 + 2(A_2 - 2)n_2]\mu_3, \quad (5.49)$$

$$d_{24} = (A_1 - 1)n_1\lambda_4 + (A_2 - 1)n_2\lambda_2 + [m_1 + 2(A_1 - 2)n_1]\mu_3 + [m_2 + 2(A_2 - 2)n_2]\mu_2,$$

$$d_{15} = d_{14} + 3(n_1\mu_1 + n_2\mu_3),$$

$$d_{25} = d_{24} + 3(n_1\mu_3 + n_2\mu_2),$$

$$\omega = \alpha_2 [(A_1 - 1)n_1\bar{\rho}_2 + (A_2 - 1)n_2\bar{\rho}_1] / \bar{\rho}$$

ilişkilerini temsil etmektedir. Hesaplarda matematiksel kolaylık amacıyla karışım bileşenlerine ait  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  ve  $\pi_{rr}$ ,  $\pi_{\theta\theta}$  gerilme bileşenlerinin toplamları kullanılmıştır. Bu gerilme bileşenleri (2.13) denge denklemleri yardımıyla ayrı ayrı elde edilebilir.

Bu amaçla, kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği göz önünde bulundurularak, silindirik koordinatlarda (2.13)<sub>1</sub> ve (2.13)<sub>2</sub> denklemlerinin r-bileşenleri aşağıdaki gibi yazılır

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{rr}) = r(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + r^2\left(-\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + p_r\right), \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\pi_{rr}) = r(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + r^2\left(-\frac{\partial\pi_{rz}}{\partial z} + p_r\right) \quad (5.51)$$

ve (5.42), (5.43), (5.48) ve (5.50) denklemlerinden  $\sigma_{rr}$  ve  $\sigma_{\theta\theta}$  gerilme bileşenleri ayrı ayrı olarak

$$\sigma_{rr} + \alpha_2 = \frac{P}{3\pi r^2 R^5} (e_{11}r^4z + e_{12}r^2z^3 + e_{13}z^5), \quad (5.52)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \alpha_2 = \frac{P}{3\pi r^2 R^5} [(3d_{11} - e_{11})r^4z + (3d_{12} - e_{12})r^2z^3 - e_{13}z^5] \quad (5.53)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, (5.52) ifadesindeki integrasyon sabiti (5.18) sınır koşulları gereğince sıfır olduğundan gösterilmemiştir. Benzer şekilde (5.45), (5.46), (5.48) ve (5.51) denklemlerinden  $\pi_{rr}$  ve  $\pi_{\theta\theta}$  gerilme bileşenleri ayrı ayrı olarak

$$\pi_{rr} - \alpha_2 = \frac{P}{3\pi r^2 R^5} (e_{21}r^4z + e_{22}r^2z^3 + e_{23}z^5), \quad (5.54)$$

$$\pi_{\theta\theta} - \alpha_2 = \frac{P}{3\pi r^2 R^5} [(3d_{21} - e_{21})r^4z + (3d_{22} - e_{22})r^2z^3 - e_{23}z^5] \quad (5.55)$$

olarak hesaplanabilmektedir. (5.54) ifadesindeki integrasyon sabiti (5.18) sınır koşulları gereğince sıfır olduğundan gösterilmemiştir. Buradaki yeni katsayılar

$$e_{11} = (-d_{11} + 2d_{13} + 3\omega),$$

$$e_{21} = (-d_{21} + 2d_{23} + 3\omega),$$

$$e_{12} = 5(-d_{11} + d_{13} + 3\omega) - d_{12}, \quad (5.56)$$

$$e_{22} = 5(-d_{21} + d_{23} + 3\omega) - d_{22},$$

$$e_{13} = 2(-d_{11} + d_{13} + 3\omega) - d_{12},$$

$$e_{23} = 2(-d_{21} + d_{23} + 3\omega) - d_{22}$$

bağıntılarıyla tanımlanmaktadır. Bir noktanın daha altının çizilmesi uygun olacaktır. Dikkat edilirse, elde edilen  $\sigma_{zz} + \alpha_2$  ve  $\pi_{zz} - \alpha_2$  denklemleri  $z=0$  için sıfır olmaktadır, ancak orijinde tanımsızdır. Bu yüzden, ilgili sınır koşulları doğrudan sağlanamaz.

Bunun yerine,  $z=h$ =sabit olan herhangi bir düzlem için (5.18) sınır koşulları kontrol edilmelidir. Gerçekten de

$$\int_0^{\infty} 2\pi r(\sigma_{zz} + \alpha_2)|_{z=h} dr = \beta P, \quad (5.57)$$

$$\int_0^{\infty} 2\pi r(\pi_{zz} - \alpha_2)|_{z=h} dr = (1 - \beta)P \quad (5.58)$$

integrallerinin sağlanması hesapların doğruluğunun kontrolü açısından bir test niteliğindedir.

Bileşenleri bağıl hareket etmeyen karışım ortamı için (5.17) bağıntılarındaki  $\beta$ , (3.20) eşitliği ve bilinmeyen katsayıların ( $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$ ) bilinen katsayılar cinsinden verildiği (3.23), (3.24) ve (3.25) denklemleri kullanılarak

$$\beta = \frac{\mu(2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu + \mu_1 - \mu_2) + \lambda(\mu - \mu_1 + \mu_2)}{2\mu(\lambda + \mu)} \quad (5.59)$$

şeklinde elde edilebilmektedir. Burada görüldüğü gibi, Boussinesq probleminden, hem burulma hem de Kelvin problemlerinde bulunmuş olanlardan daha farklı bir  $\beta$  ilişkisi elde edilmektedir. Bu durum, farklı tip zorlanmalar için karışımdaki bileşenlerin karşıladıkları yüklerin de farklı olacağı bulgusunu teyid eder niteliktedir.

### **5.3 Hacim Oranı ile İlişkilendirilmiş Malzeme Özelliklerinin Boussinesq Problemi için Verdiği Sonuçlar**

Bölüm 4.2.2’de, Çizelge 4.4’teki veriler kullanılarak iki lineer elastik katı karışımı için Galerkin vektörü metoduyla Kelvin probleminin çözümünden elde edilen  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  bileşenlerinin bağıl hareketli ve bağıl hareketsiz ortamlar için değişimleri gösterilmişti. Fark edildiği gibi, Çizelge 4.4’teki veriler NiAl ve Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> karışım bileşenlerinin tekil haldeki özelliklerini karışım içerisinde de korudukları kabulüyle elde edilmiştir. Bölüm 5.1’de ise, kompoziti oluşturan bileşenlerin karışım içerisindeki özellikleriyle karışım harici özellikleri arasında bir ilişki vermek amacıyla, her bir katı diğer katının hacim oranı kadar gözenek içeren bir malzeme olarak değerlendirilmektedir. Bunun sonucu olarak her bir bileşenin karışım içerisindeki özellikleriyle tekil haldeki özellikleri arasında, (5.10)-(5.16) denklemleri uyarınca,

$$\mu_1 = \gamma\mu_{10}, \quad \mu_2 = (1 - \gamma)\mu_{20}, \quad \lambda_1 = \gamma\lambda_{10}, \quad \lambda_2 = (1 - \gamma)\lambda_{20},$$

$$\bar{\rho}_1 = \gamma\bar{\rho}_{10}, \quad \bar{\rho}_2 = (1 - \gamma)\bar{\rho}_{20}$$

bağıntıları verilmiştir. Buna göre, her bir katının tekil haldeki yoğunluğu ve Lamé katsayıları ile bunların karışmış haldeki değerleri arasında hacim oranını içeren doğrusal ilişki olduğu kabulü yapılmış olmaktadır.

Bu kabuller kullanılarak, kompozitin 0.3 ve 0.4 hacim oranlarında NiAl içeren iki durumu için, bağıl hareketin olmadığı ortamda Kelvin ve Boussinesq problemlerinde bileşenlerin taşıdıkları yük oranları Çizelge 5.1’de verilmektedir. Çizelge 4.3 ve Çizelge 5.1 karşılaştırıldığında karışım bileşenlerinin malzeme özelliklerinin hacim oranıyla ilişkilendirilmesi durumunda bileşenlerin karşıladıkları yüklerin değiştikleri görülmektedir. Ek olarak, hacim oranıyla ilişkilendirilmiş katsayılar durumunda da (öncekinde olduğu gibi) kompozitin farklı yüklemeleri için taşınan yük oranlarının farklı olduğu bulgusu teyit edilmektedir.

Mekanik özellikleri hacim oranıyla değişen karışım bileşenlerinin elastik katsayıları Çizelge 5.2’de verilmektedir. Çizelge 5.3’te ise, Bölüm 4.2’de açıklanan yöntem ve Çizelge 5.1, Çizelge 5.2 ve Çizelge 4.2’deki veriler kullanılarak, bileşenleri bağıl hareket yapabilen ve yapamayan karışım ortamları için elde edilen bilinmeyen  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları listelenmektedir.

Çizelge 5.3’te görüldüğü gibi, malzeme özellikleri hacim oranıyla ilişkilendirilmiş ve bileşenleri bağıl hareket edebilen ortam için de, Bölüm 4.2’dekine benzer şekilde, ikişer adet  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  kabul edilebilir katsayı grubu elde edilmektedir. Ayrıca, ilk katsayı grupları, bileşenleri bağıl hareket edemeyen ortam kabulünün verdikleriyle aynı çıkmaktadır.

**Çizelge 5.1 :** Elastik özellikleri hacim oranıyla ilişkilendirilmiş ve bileşenleri bağıl hareket etmeyen karışım durumu için taşınan yük oranları.

$\gamma$ (NiAl)	Problem Tipi	NiAl bileşeninin taşıdığı yük oranı ( $\beta$ )	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> bileşeninin taşıdığı yük oranı (1- $\beta$ )
0.3	Kelvin	0.161	0.839
	Boussinesq	0.181	0.819
0.4	Kelvin	0.288	0.712
	Boussinesq	0.328	0.672

**Çizelge 5.2 :** Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ve NiAl bileşenlerinin karışım içindeki hacim oranlarına göre özellikleri.

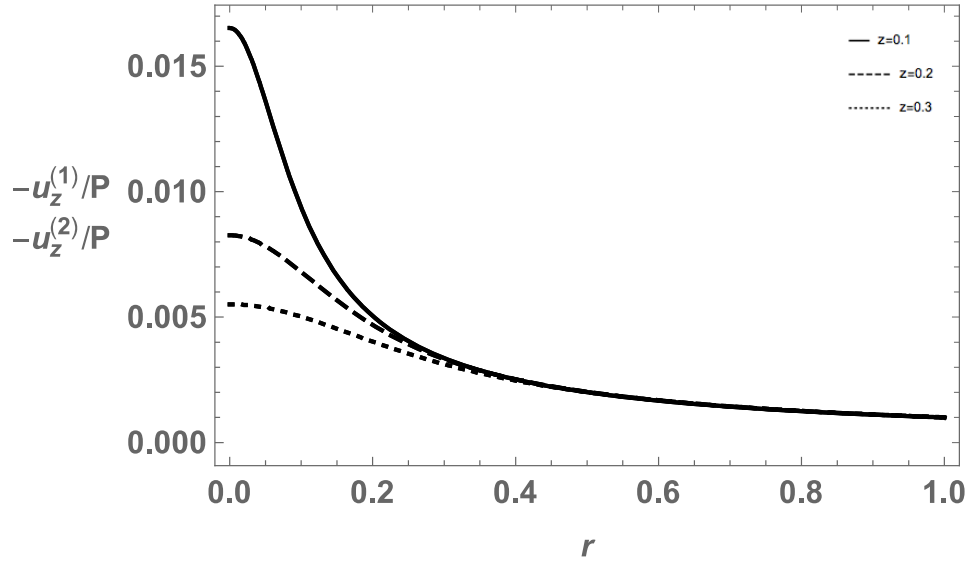
$\gamma$ (NiAl)	Yoğunluk (gr/cm <sup>3</sup> )	Elastiklik modülü (GPa)	Lamé katsayıları (GPa)	
0.3	$\bar{\rho}_1 = 1.79$	$E_1 = 55.80$	$\lambda_1 = 34.75$	$\mu_1 = 21.30$
	$\bar{\rho}_2 = 2.79$	$E_2 = 280.70$	$\lambda_2 = 104.48$	$\mu_2 = 113.19$
0.4	$\bar{\rho}_1 = 2.38$	$E_1 = 74.40$	$\lambda_1 = 46.33$	$\mu_1 = 28.40$
	$\bar{\rho}_2 = 2.39$	$E_2 = 240.60$	$\lambda_2 = 89.55$	$\mu_2 = 97.02$

**Çizelge 5.3 :** Elastik özellikleri hacim oranıyla değişen bileşenlerden oluşan karışım ortamı için kabul edilebilir  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları.

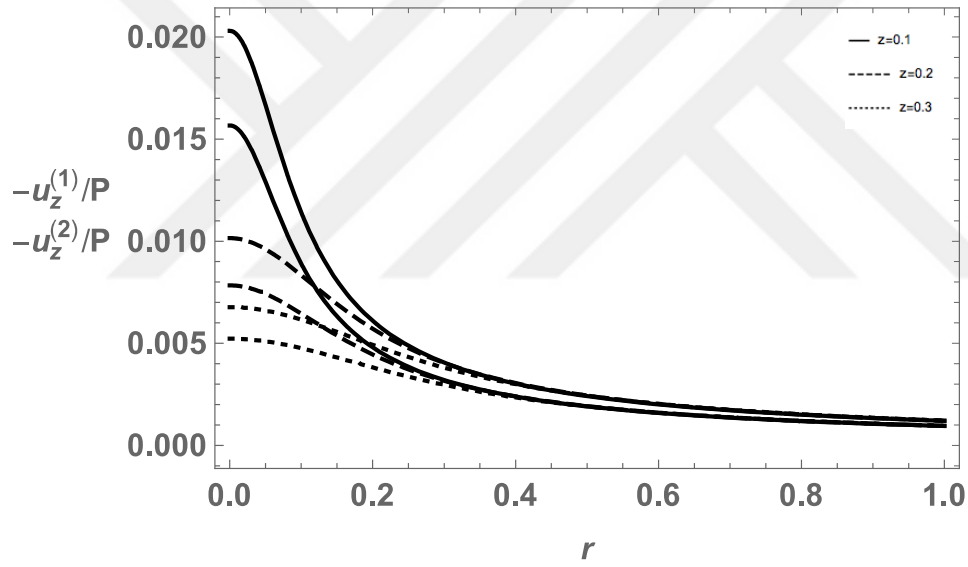
$\gamma$ (NiAl)	Karışım Ortamı	Hesaplanan katsayılar
0.3	Bağlı hareketsiz	$\lambda_3 = -7.53$ GPa , $\lambda_4 = -21.27$ GPa , $\mu_3 = -6.46$ GPa
	Bağlı hareketli (1. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -7.53$ GPa , $\lambda_4 = -21.27$ GPa , $\mu_3 = -6.46$ GPa
	Bağlı hareketli (2. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -12.77$ GPa , $\lambda_4 = -14.63$ GPa , $\mu_3 = -5.50$ GPa
0.4	Bağlı hareketsiz	$\lambda_3 = 8.36$ GPa , $\lambda_4 = -20.99$ GPa , $\mu_3 = -4.43$ GPa
	Bağlı hareketli (1. uygun çözüm)	$\lambda_3 = 8.36$ GPa , $\lambda_4 = -20.99$ GPa , $\mu_3 = -4.43$ GPa
	Bağlı hareketli (2. uygun çözüm)	$\lambda_3 = -4.26$ GPa , $\lambda_4 = -5.28$ GPa , $\mu_3 = -2.03$ GPa

Çizelge 5.3'teki veriler iki lineer elastik katı karışımı için Hankel transformasyonu metoduyla çözülen Boussinesq probleminde kullanılarak her bir katının  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  yer değiştirme vektörü bileşenlerinin ortam içerisinde nasıl değiştikleri Şekil 5.2-5.5 ile verilen grafiklerde gösterilmektedir.

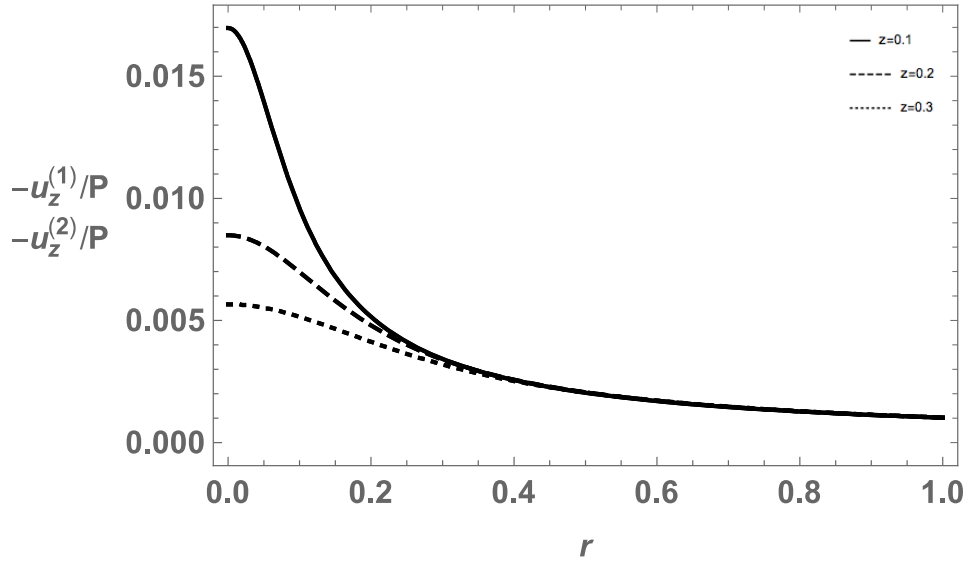
Hem bileşenleri bağlı hareket etmeyen ortam ( $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$ ) için hem de bağlı hareketli ortama ait birinci çözüm kümesi için aynı yer değiştirme grafikleri elde edilmektedir. Bağlı hareketli ortam için elde edilen ikinci çözüm kümesi ise birbirinden farklı yer değiştirmeler yapan katı bileşenleri açıkça göstermektedir.



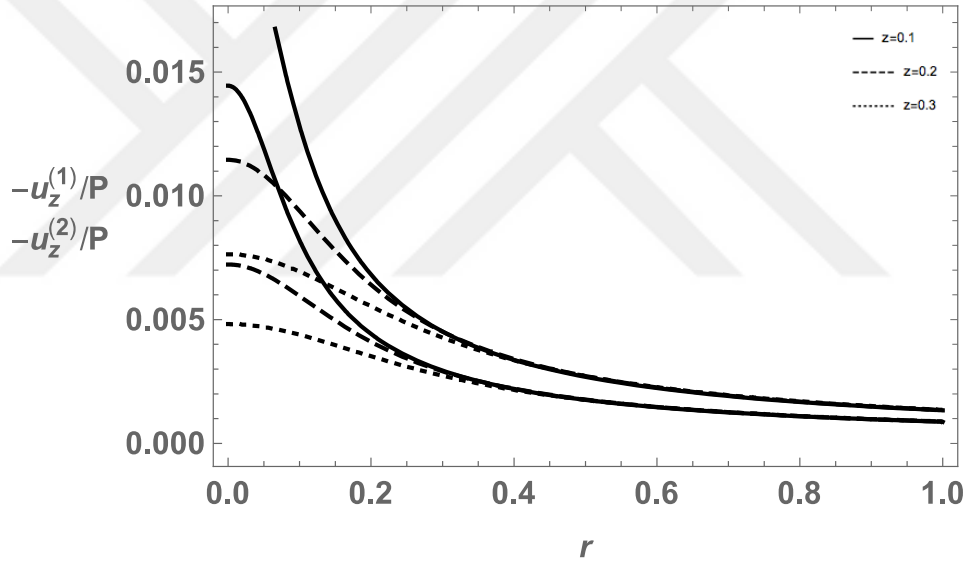
Şekil 5.2 :  $\gamma = 0.3$  için bağıl hareketsiz ortamda Boussinesq probleminin çözümüne ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 5.3 :  $\gamma = 0.3$  için bağıl hareketli ortamda Boussinesq probleminin 2. çözüm grubuna ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 5.4 :  $\gamma = 0.4$  için bağıl hareketli ortamda Boussinesq probleminin çözümüne ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 5.5 :  $\gamma = 0.4$  için bağıl hareketli ortamda Boussinesq probleminin 2. çözüm grubuna ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



## 6. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Çalışmada, karışımlar teorisi kapsamında iki lineer elastik katı karışımına ait teorik bir model tanıtılmış ve karışım ortamının bir bütün olarak sergilediği mekanik davranışa eşdeğer davranış sergileyen tekil lineer elastik bir ortam tasavvur edilmiştir. Klasik elastisite teorisinin sunduğu bazı çözümler yardımıyla bu iki ortam arasında bazı ilişkiler elde edilmiş ve bu suretle de iki bileşenli karışımın genel özellikleri ile bu ortamı oluşturan elastik katı bileşenlerin özellikleri arasındaki olası ilişkileri belirlemek amacı güdülmüştür. Bunun için sürekli ortam tanımına uyacak şekilde varlığını devam ettiren bileşenlere sahip olan, diğer bir deyişle, makroskopik boyutta karışım ortamının her noktası her iki bileşen tarafından da işgal edilmiş gibi tasavvur edilebilen iki bileşenli tanecikli bir kompozit yapı dikkate alınmıştır. Sayısal hesaplamalarda bileşenlere ait malzeme özellikleri ve ortamın genel davranışına ait deneysel veriler kullanılmıştır.

Yukarıda genel hatları verilen düşünce kullanılarak, bileşenleri bağıl hareket etmeyen bir karışım ortamı için bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayılara ait sayısal sonuçlar literatürde mevcuttur. Bu çalışmada, daha genel bir düşünceyle, bileşenleri bağıl hareket edebilen bir karışıma ait ilişkiler araştırılmış ve elde edilen sonuçların öncekileri de içeren daha genel çözümler olması hesapların doğruluğuna dair bir kontrol unsuru olmuştur. Çalışmada, ayrıca, bağıl hareketsiz bir ortam için literatürde verilmiş olan ilişkiler gözden geçirilerek sonraki bir aşamaya taşınmış ve daha uygun formlarda münferit denklemler elde edilmiştir.

İki lineer elastik katı karışımı için Prandtl gerilme fonksiyonları yardımıyla burulma probleminin formülasyonu elde edilmiştir. Literatürde, karışımlar teorisi kapsamında her bir karışım bileşeninin karışımın bir bütün halinde maruz kaldığı yüklemeyi karışım içindeki kendi hacim oranında karşıladığını öngören bir kabul mevcuttur. Burulma probleminin çözümünün daha az elastik katsayı içermesi nedeniyle sergilediği sadeliğin ortamın her bir bileşeni tarafından taşınan yük miktarının anlaşılması konusunda faydalı olacağı değerlendirilmiştir. Bu hususta, tanecikli yapıya

sahip kompozit bir malzemenin verileri kullanılmak suretiyle bağıl hareketsiz ortam koşulunda bir uygulama yapılarak her bir bileşenin taşıdıkları yük oranı belirlenmiştir. Bileşenleri arasında bağıl hareket olmayan bir karışım ortamında birinci ve ikinci elastik katı bileşenlerin taşıdıkları yük oranları, sırasıyla,  $\beta$  ve  $(1 - \beta)$  ile temsil edilmektedir. Çalışmada yapılan hesaplar, literatürde her bir katının sırasıyla  $\gamma$  ve  $(1 - \gamma)$  ile gösterilen karışım içindeki kendi hacim oranının yük taşıma oranı olarak kullanıldığı sonuçları desteklememiştir. Buradan hareketle, kısmi yüklemelerin hacim oranıyla doğrudan ilişkilendirilmesinin uygun bir yaklaşım olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışma kapsamında iki lineer elastik katı karışımı için elde edilen burulma, Kelvin ve Boussinesq problem çözümleri için bağıl hareketsiz ortam koşulunda  $\beta$  katsayısını veren ilişkiler Çizelge 6.1’de özetlenmektedir.

**Çizelge 6.1 :** Bileşenleri bağıl hareket etmeyen karışım ortamında burulma, Kelvin ve Boussinesq problemleri için yük taşıma oranı denklemleri.

Problem Tipi	Birinci katı bileşen için yük taşıma oranı denklemi
Burulma	$\beta_{\text{burulma}} = \frac{\mu + \mu_1 - \mu_2}{2\mu}$
Kelvin	$\beta_{\text{Kelvin}} = \frac{2\mu(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu + \mu_1 - \mu_2) + \lambda(\mu - \mu_1 + \mu_2)}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$
Boussinesq	$\beta_{\text{Boussinesq}} = \frac{\mu(2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu + \mu_1 - \mu_2) + \lambda(\mu - \mu_1 + \mu_2)}{2\mu(\lambda + \mu)}$

Çizelge 6.1’e göre, birbirine göre bağıl hareketleri olmayan iki lineer elastik katı bileşenden oluşan bir karışımın maruz kaldığı yükleme şeklinin bileşenlerin taşıdıkları yük oranları üzerinde etkili olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca, tanecikli yapıya sahip  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  kompozitinin 0.3 ve 0.4 hacim oranları için sunulan deneysel veriler kullanılarak yapılan hesaplamalar kompozitin farklı hacim oranlı türleri için de bileşenlerin taşıdıkları yük oranlarının değiştiğini, yani bileşen hacim oranlarının da  $\beta$  üzerinde etkili bir faktör olduğunu göstermektedir.

Bağıl harekete müsaade eden bir ortam söz konusu olduğunda bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayıların nasıl belirlenebileceğinin araştırıldığı Bölüm 4’te, öncelikle iki lineer elastik katı karışımı için Kelvin probleminin Galerkin vektörü metoduyla

çözümü elde edilmiştir. Bu çözüm kullanılarak  $Al_2O_3-NiAl$  kompoziti için yapılan hesaplar her bir hacim oranı için ikişer adet gerekli kısıtlamaları sağlayan  $\lambda_3, \lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayı grubu vermiştir. Bu kabul edilebilir çözüm gruplarından ilki bileşenleri bağıl hareket edemeyen ortam koşulundan elde edilenler ile özdeş çıkmaktadır. Bilinmeyen katsayıların belirlenmesinin ardından, örnek olarak, bağıl hareketsiz ve bağıl hareketli ortamlar için Kelvin probleminin çözümünden elde edilen  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  yer değiştirme vektörü bileşenlerinin ortam içerisinde nasıl değiştiklerini veren grafikler elde edilmiştir.

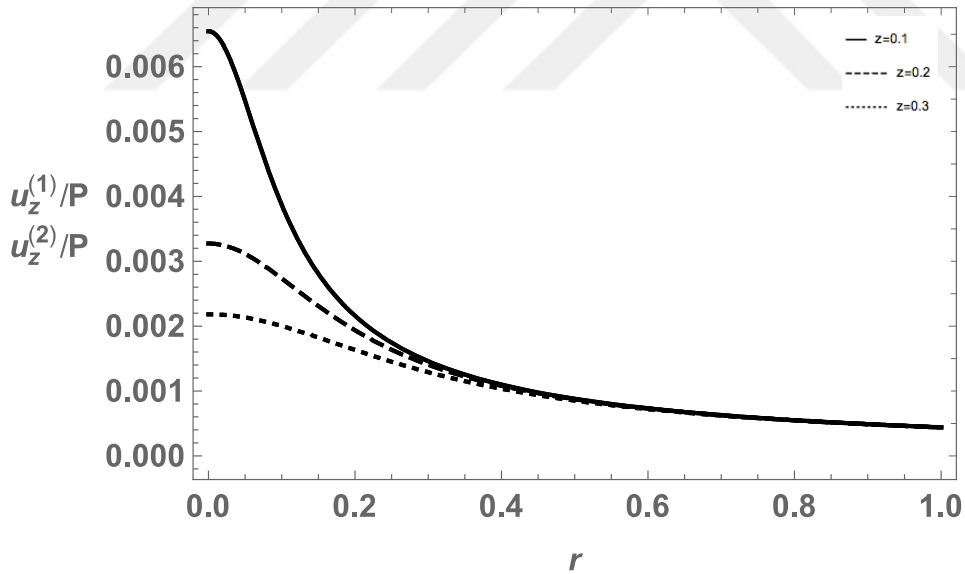
Bileşenleri arasında bağıl hareket olmayan ortam koşulunda Kelvin problemi, beklendiği gibi,  $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$  olan grafikler vermektedir. Benzer şekilde, bağıl hareketli ortam için elde edilen birinci çözüm kümesi öncekiyle eşdeğer olduğu için aynı yer değiştirme grafiklerine tekrar ulaşılmaktadır. Bağıl hareketli ortam için elde edilen ikinci çözüm kümesi ise birbirinden farklı yer değiştirmeler yapan katı bileşenleri açıkça göstermektedir.

Karışımlar teorisinin kullandığımız formu bünye denklemlerindeki katsayıların bileşen hacim oranı ile ilgisi konusunda kısıtlayıcı bir öngörü sunmamaktadır. Bu nedenle, beşinci bölüme kadar yapılmış olan çalışmalarda, tanecikli yapıya sahip kompoziti oluşturan bileşenlerin tekil haldeki malzeme özellikleriyle karışım durumundaki özellikleri eşdeğer kabul edilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise karışım içerisindeki bileşenlerin tekil hal için verilenlerden farklı özelliklere sahip olacağı kabul edilerek, kompozit malzemelerin mekaniğinde geçerli bir düşünce olan karışım kanunu ilkesinden hareketle, örnek olarak lineer bir ilişki ele alınmış ve ortamın hacim oranıyla değişen özellikleri hesaplanarak ortam davranışına ilişkin grafikler elde edilmiştir. Hacim oranıyla değişen malzeme özelliklerinin kullanıldığı bağıl hareketsiz bir karışım ortamı için Kelvin ve Boussinesq problemlerinin çözümlerinden elde edilen bileşen yük taşıma oranları bu durumda öncekilerden farklı değerler almaktadır. Bu sonuç, hem malzeme özelliklerine ilişkin hacim oranının hem de kompozit bileşenlerine ait karışım oranının bileşenlerin taşıdıkları yükler üzerinde etkili olduğunu hesap yoluyla teyit etmektedir.

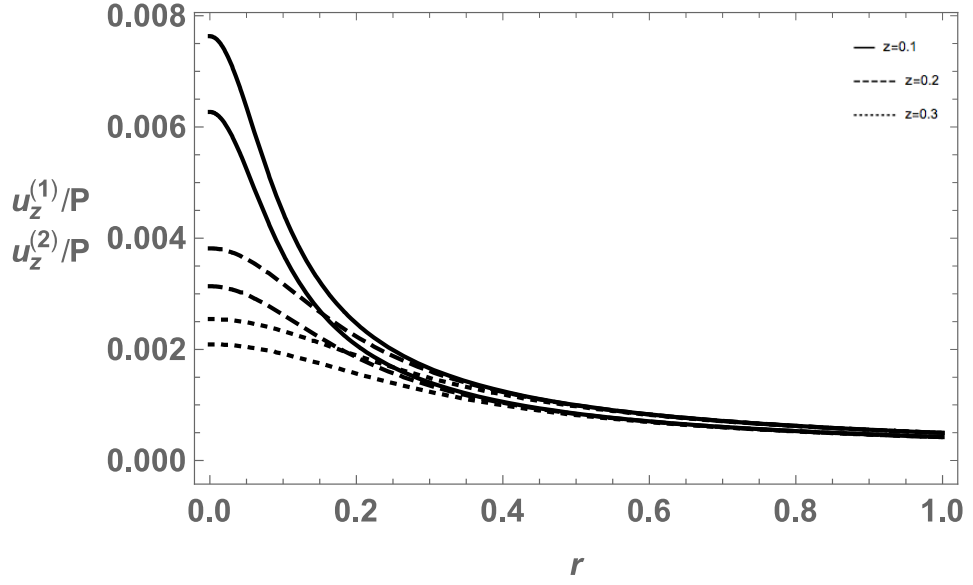
Yukarıda zikredilen analizin verdiği sonuçları uygulamak ve farklı bir çözümle literatüre katkı sağlamak amacıyla Hankel transformasyonu metoduyla Boussinesq probleminin çözümü ele alınmıştır. Elde edilen çözüm hacim oranıyla ilişkilendirilmiş

özelliklere sahip  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  tanecikli kompoziti için bilinmeyen  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayılarının bileşenleri bağıl hareket yapabilen ve yapamayan karışım ortamları için yeniden hesaplanmasında kullanılmıştır. Malzeme özelliklerinin hacim oranıyla ilişkilendirildiği bağıl hareketli ortam çalışmasında da, Bölüm 4.2’de olduğu gibi, her bir hacim oranı için ikişer adet  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  kabul edilebilir katsayı grubuna ulaşılmaktadır. Boussinesq probleminin çözümüne ilişkin  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  yer değiştirme vektörü bileşenlerine ait grafiklerde de görüldüğü üzere, ilk çözüm grubu bileşenleri bağıl hareket edemeyen ortam koşulundan elde edilen değerlerle özdeş çıkmaktadır. Birinci çözüm kümesi  $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$  olan grafikler verirken ikinci çözüm kümesi birbirinden farklı yer değiştirmeler yapabilen katı bileşenleri açıkça göstermektedir.

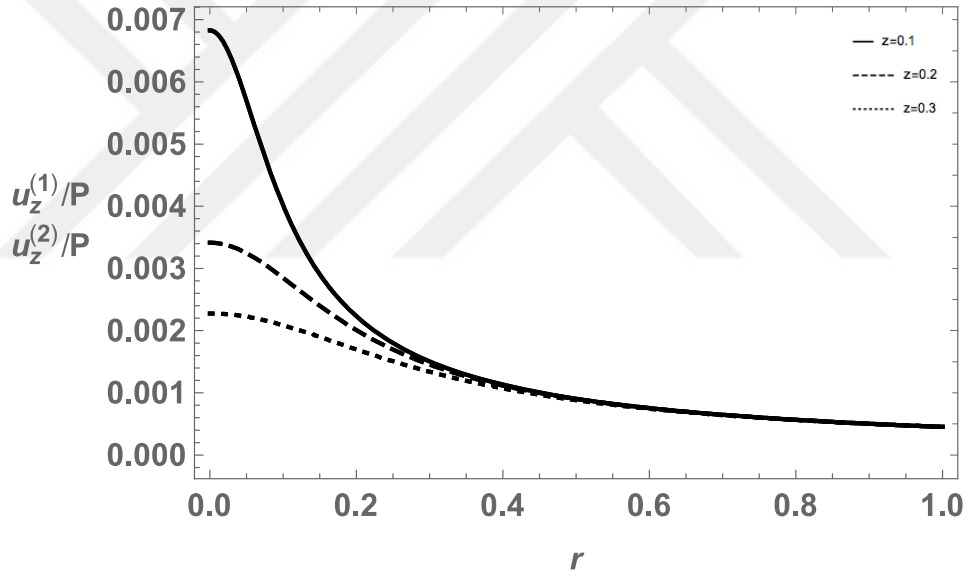
Beşinci bölümde gerçekleştirilen analizin Bölüm 4’te elde edilen Kelvin probleminin çözümüne ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  yer değiştirme vektörü bileşenlerine uygulanması durumunda da, Şekil 6.1-6.4’teki grafiklerde gösterildiği gibi, benzer şekilde yorumlanabilecek sonuçlara ulaşılmaktadır. Bunun da yapılan hesapların kontrolü açısından bir test niteliğinde olduğu düşünülebilir.



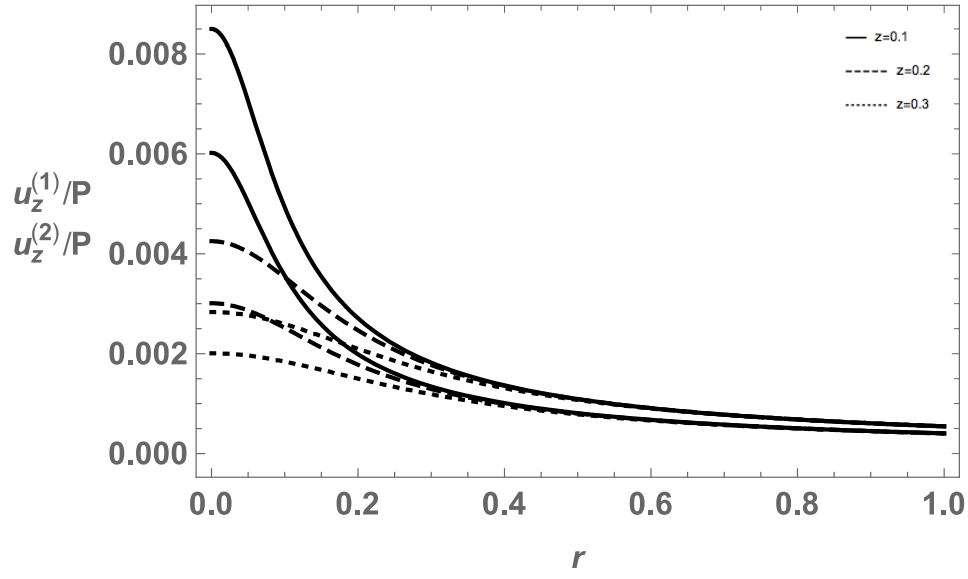
**Şekil 6.1 :** Bağıl hareketi olmayan ortamda  $\gamma = 0.3$  hacim oranı için Kelvin problemine ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 6.2 : Bağlı hareketli ortamda  $\gamma = 0.3$  hacim oranı için Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 6.3 : Bağlı hareketi olmayan ortamda  $\gamma = 0.4$  hacim oranı için Kelvin problemine ait  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.



Şekil 6.4 : Bağlı hareketli ortamda  $\gamma = 0.4$  hacim oranı için Kelvin probleminin 2. çözüm grubunun verdiği  $u_z^{(1)}$  ve  $u_z^{(2)}$  değişimleri.

## KAYNAKLAR

- Atkin, R.J. & Craine, R.E.**, (1976). Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 29, 209-245.
- Bedford, A. & Drumheller, D.S.**, (1983). Theory of immiscible and structured mixtures, *International Journal of Engineering Science*, 21, 863-960.
- Bedford, A. & Stern, M.**, (1972). A multi-continuum theory for composite elastic materials, *Acta Mechanica*, 14, 85-102.
- Binark, N. K. ve Dokuz, M.S.**, (2017). Analytical relations for the undetermined constitutive coefficients of a binary mixture of elastic solids with no relative component motion and an application for semi-infinite mixture continuum, *International Journal of Engineering Science*, 111, 1-11.
- Borrelli, A. & Patria, M.C.**, (1983). Uniqueness and reciprocity in the boundary-initial value problem for a mixture of two elastic solids occupying an unbounded domain, *Acta Mechanica*, 46, 99-109.
- Bowen, R.M.**, (1976). *Theory of mixtures, in continuum physics, vol. III/1, Ed. Eringen, A.C.*, Academic Press, New York.
- Bowen, R.M. & Wiese, J.C.**, (1969). Diffusion in mixtures of elastic materials, *International Journal of Engineering Science*, 7, 689-722.
- Burchuladze, T. & Svanadze, M.**, (2000). Potential method in the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids, *Journal of Thermal Stresses*, 23, 601-626.
- Ciarletta, M.**, (1995). General theorems and fundamental solutions in the dynamical theory of mixtures, *Journal of Elasticity*, 39, 229-246.
- Choren, J.A., Heinrich, S.M. & Silver-Thorn, M.B.**, (2013). Young's modulus and volume porosity relationships for additive manufacturing applications, *Journal of Materials Science*, 48, 5103-5112.
- Dokuz, M.S.**, (2000). *Termoelastik koşullar altında iki elastik katı karışımı ile ilgili analitik çözümler* (Doktora tezi), İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Dokuz, M.S.**, (2002). Thermoelasticity of an infinite mixture of two solids and a spherical thermal inclusion problem, *International Journal of Engineering Science*, 40, 177-191.
- Dokuz, M.S.**, (2005). An analytical procedure to determine constitutive coefficients of a mixture of two linear elastic solids, *International Journal of Solids and Structures*, 42, 805-817.
- Dokuz, M.S. ve Gürgöze, İ.T.**, (2002). The galerkin vector solution for a mixture of two elastic solids and Boussinesq problem, *International Journal of Engineering Science*, 40, 211-222.

- Green, A.E. & Naghdi, P.M.,** (1965). A dynamical theory of interacting continua, *International Journal of Engineering Science*, 3, 231-241.
- Green, A.E. & Steel, T.R.,** (1966). Constitutive equations for interacting continua, *International Journal of Engineering Science*, 4, 483-500.
- Gürgöze, İ.T. ve Dokuz, M.S.,** (1998). An equilibrium solution for the Boussinesq problem for a mixture of an elastic solid and a fluid in an infinite half-space, *International Journal of Engineering Science*, 36, 645-653.
- Gürgöze, İ.T. ve Dokuz, M.S.,** (1999). Papkovitch-Neuber solution for a mixture of two elastic solids and Kelvin problem, *International Journal of Engineering Science*, 37, 497-507.
- İeşan, D.,** (1994). On the theory of mixtures of elastic solids, *Journal of Elasticity*, 35, 251-268.
- İeşan, D.,** (1997). A Theory of mixtures with different constituent temperatures, *Journal of Thermal Stresses*, 20, 147-167.
- İeşan, D.,** (2011). Prestressed composite modelled as interacting solid continua, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12, 513-524.
- Kovacık, J.,** (1999). Correlation between Young's modulus and porosity in porous materials, *Journal of Materials Science Letters*, 18, 1007-1010.
- Leseduarte, M.C. & Quintanilla, R.,** (2008). Saint-Venant decay rates for an anisotropic and non-homogeneous mixture of elastic solids in anti-plane shear, *International Journal of Solids and Structures*, 45, 1697-1712.
- Muti, S. ve Dokuz, M.S.,** (2015). Two-Dimensional Beltrami-Michell Equation for a Mixture of Two Linear Elastic Solids and Some Applications Using The Airy Stress Function, *International Journal of Solids and Structures*, 59, 140-146.
- Passarella, F. & Zampoli, V.,** (2006). Some results on the spatial behavior of elastic mixtures, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 25, 1031-1040.
- Phani, K.K. & Niyogi, S.K.,** (1987). Young modulus of porous brittle solids, *Journal of Materials Science*, 22, 257-263.
- Rajagopal, K.R. & Tao, L.,** (1995). *Mechanics of mixtures*, World Scientific Publishing, Singapore.
- Rushchitskii, Y.Y.,** (1996). On simple waves in solid mixtures, *Prikladnaia Mekhanika*, 32, 40-45.
- Rushchitsky, J.J.,** (2008). On structural mixture theory applied to elastic isotropic materials with internal three-component nanoscale structure, *International Applied Mechanics*, 44, 1233-1243.
- Sadd, M.H.,** (2005). *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier Inc., Burlington.
- Simchuk, Y.V. & Priz, S.N.,** (2010). A linear structural theory of isotropic three-component mixture, *International Applied Mechanics*, 46, 763-770.
- Steel, T.R.,** (1967). Applications of a theory of interacting continua, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 20, 57-72.

- Steel, T.R.**, (1967). Linearised theory of plane strain of a mixture of two solid, *International Journal of Engineering Science*, 5, 775-789.
- Steel, T.R.**, (1968). Determination of the constitutive coefficients for a mixture of two solids, *International Journal of Solids and Structures*, 4, 1149-1160.
- Tiersten, H.F. & Jahanmir, M.**, (1977). A theory of composites modelled as interpenetrating solid continua, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 65, 153-192.
- Truesdell C. & Toupin, R.**, (1960). *The classical field theories*, *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Ed. Flügge, S., Springer-Verlag, Berlin.





## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Emre Kurt  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 14.06.1981, İstanbul  
**E-posta** : kurtemre@itu.edu.tr

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2003, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2006, Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği

### DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Kurt, E.** ve Dokuz, M. S., (2018). Analytical Solutions for Axisymmetric Normal Loadings Acting on a Particulate Composite Modeled as a Mixture of Two Linear Elastic Solids, *Journal of Mechanics*, 34, 567-578.
- **Kurt, E.** ve Dokuz, M. S., (2017). Torsional End Loading Problem for a Prismatic Bar Consisted of a Mixture of Two Linear Elastic Solids. *Proceedings Book of 1th International Conference on Advances in Science and Arts, Oral Presentations*, (pp.48-55). Istanbul, March 29-31.
- **Kurt, E.** ve Dokuz, M. S., (2018). Galerkin Vector Solution of Kelvin Problem for a Mixture of Two Linear Elastic Solids. *Proceedings of the 7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, (pp.9-17). Istanbul, June 20-24.

