GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

Q-FİBONACCİ DİZİLERİN Q-BİNOMİYEL DÖNÜŞÜMLERİ

Akif BAKIRHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Akif BAKIRHAN tarafından hazırlanan "Q-FİBONACCİ DİZİLERİN Q-BİNOMİYEL DÖNÜŞÜMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………..

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Can KIZILATEŞ

Matematik Ana Bilim Dalı, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...…………………

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...…………………

Üye: Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...…………………

Üye: Doç. Dr. Miraç ÇETİN

Matematik Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...…………………

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

………………..
Akif BAKIRHAN
24/06/2019

Q-FİBONACCİ DİZİLERİN Q-BİNOMİYEL DÖNÜŞÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Akif BAKIRHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu tezde, q-analiz yardımıyla tanımlanan binomiyel dönüşümün tanımı verilecektir. Daha sonra literatürde var olan bazı özel sayı dizilerinin q-benzerlerinin binomiyel dönüşümü tanımlanacaktır. Elde edilen bu yeni dizilerin birçok özelliği q-Riordan kavramı kullanılarak elde edilecektir. Bu çalışmamızın amacı literatürde var olan birçok sayı dizisini içeren binomiyel dönüşümlerin q-benzerlerini elde etmek ve bunları ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Binomiyel dönüşüm, Riordan grup
Sayfa Adedi	:	37
Danışman	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU
2. Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Can KIZILATEŞ

Q-BINOMIAL TRANSFORM OF Q-FIBONACCI SEQUENCES

(M. Sc. Thesis)

Akif BAKIRHAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

In this thesis, the definition of binomial transformation defined by q-analysis will be given. Then, q-analogue of the binomial transform of some special number sequences in the literature will be defined. Many properties of these new sequences will be obtained by using the q-Riordan concept. The aim of this study is to obtain the q-analogues of binomial transform which include many number sequences in the literature and to examine them in detail.

Science Code	:	20401
Key Words	:	Fibonacci numbers, Lucas numbers, Binomial transform, Riordan group
Page Number	:	37
Supervisor	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU
Co Supervisor	:	Asist. Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans süresince yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Naim TUĞLU, ikinci danışmanım Sayın hocam Dr. Öğr Üyesi Can KIZILATEŞ ve eğitim süresince yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI ve Doç. Dr. Miraç ÇETİN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan, babam Bünyamin BAKIRHAN ve annem Mukaddes BAKIRHAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca daima yanımda olan kardeşlerim Abdurrahim, BAKIRHAN, Talha BAKIRHAN ve Merve BAKIRHAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$[\boldsymbol{n}]$	q-tamsayı
$[\boldsymbol{n}]!$	q-faktöryel
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$	q-Binomiyel (Gauss Binomiyel) katsayıları
$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$	Binomiyel katsayıları
$\boldsymbol{e_q^x}$	q-üstel fonksiyon
$\boldsymbol{E_q^x}$	q-üstel fonksiyon
$(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{n}}$	$(1+x)^n$ in q-benzeri
$\boldsymbol{P_{n,q}}$	q-Pascal matrisi
$(\boldsymbol{\Re},*)$	Riordan grup
$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f})$	Riordan çifti
$\overline{\boldsymbol{o}}$	q-bileşke
$\boldsymbol{f}^{\overline{[\boldsymbol{m}]}}$	f^m in q-benzeri
$\boldsymbol{h_n}$	Horadam sayıları
$\boldsymbol{F_n}$	Fibonacci sayıları
$\boldsymbol{L_n}$	Lucas sayıları
$\boldsymbol{S_n}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})$	Genelleştirilmiş q-Fibonacci ve q-Lucas polinomları

1. GİRİŞ

Teknolojinin hızla ilerlediği günümüzde, matematik ile diğer bilimler arasında çok yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki de özellikle matematiğin önemli birer dalı olan matris teorisi ve sayılar teorisinin önemli bir yeri vardır. Çünkü mühendislik, istatistik ve diğer pek çok alanda matrislerle ve bazı özel sayı dizileri ile karşılaşılmaktadır.

Sayılar teorisi ve kombinatoryel teoride binom katsayılar ve onların birçok özellikleri kapsamlı bir şekilde incelenmekte olup son zamanlarda bu katsayıları kullanarak matematikçiler yeni bir bakış açısıyla binomiyel dönüşüm tanımlamışlardır. Bu binomiyel dönüşüm, bir dizinin ileri farklarını hesaplamaya yarayan bir dizi dönüşümdür. Bu dizinin Fibonacci, Lucas, Pell ve benzeri sayı dizileri olması durumunda ise dizinin adına sırasıyla Fibonacci, Lucas ve Pell dizilerinin binomiyel dönüşümü adı verilmiştir ve böylece Fibonacci, Lucas, Pell ve benzeri diziler için matematikçiler yeni özellikler elde etmeye devam etmişlerdir.

Örneğin Falcon ve Plaza k-Fibonacci dizisinin binomiyel dönüşümü olan yeni bir dizi elde edip, bu dizi için rekürans bağıntısı, Binet formu ve üreteç fonksiyonu gibi özellikleri elde etmişlerdir [12].

Bhadouria ve arkadaşları ise Falcon ve Plaza nın çalışmasından yola çıkarak benzer metod ve yöntemle $k-$Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü olan yeni bir dizi elde edip, bu dizi için rekürans bağıntısı, Binet formu ve üreteç fonksiyonu gibi özellikleri elde etmişlerdir [5].

Matris teoride ise Riordan kavramı kombinatorik özdeşliklerin elde edilmesinde, kombinatorik problemlerde ortaya çıkan sayı dizilerinin araştırılmasında ve sayılar teorisindeki bazı problemlerin çözülmesinde önemli rol oynamaktadır. Özellikle binomiyel katsayılar ile tanımlanan Pascal matrisleri kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır.
Paul Bary, Riordan çifti ve bazı özel tipteki matrisleri kullanarak Pascal matrisleri için birçok özellik elde etmiştir [2-4].

q-Analiz kavramı ise hem matris teoride hem de sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda birçok matematikçi literatürde var olan özel sayı dizelerinin, binomiyel dönüşümün ve Riordan kavramının q-benzerini çalışmışlardır.

Bu tezde öncelikle binomiyel dönüşümün tanımından yola çıkarak Horadam dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı üreteç fonksiyonu ve bunun gibi bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Elde edilen bu yeni dizinin özel durumlarının literatürde var olan bazı özel sayı dizilerinin binomiyel dönüşümü olduğu görülmüştür. Ayrıca Riordan kavramından ve bu metodun bazı temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Bu metod kullanılarak binomiyel dönüşüm ile elde edilen dizilerin üreteç fonksiyonları hesaplanmıştır. q-analiz yardımıyla tanımlanan binomiyel dönüşümün tanımı verilmiştir. Daha sonra literatürde var olan bazı özel sayı dizilerinin q-benzerlerinin binomiyel dönüşümü ve Riordan kavramı tanımlanmıştır. Elde edilen bu yeni dizilerin birçok özelliği q-Riordan kavramı kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmamızın amacı literatürde var olan birçok sayı dizisini içeren binomiyel dönüşümlerin q-benzerlerini elde etmek ve bunları ayrıntılı bir biçimde incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız q –analiz için gerekli bazı temel tanımlar ve gösterimlerden bahsedeceğiz.

2.1. Tanım

n bir tamsayı ve $q \in (0,1)$ olmak üzere q-tamsayı

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q}, \tag{2.1}$$

q-faktöriyel

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n][n-1]\ldots[1], & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

ve q-Binomiyel (Gauss Binomiyel) katsayıları $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ ve $n < k$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!}$$

olarak tanımlanır.

$$\lim_{q \to 1^-} [n] = n$$

olup,

$$\lim_{q \to 1^-} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$$

binomiyel katsayılar elde edilir [16].

$n = 5$ ve $k = 3$ için

$$[5] = \frac{1-q^5}{1-q} \qquad [4] = \frac{1-q^4}{1-q} \qquad [2] = \frac{1-q^2}{1-q} \qquad [1] = \frac{1-q}{1-q}$$

olup,

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \frac{[5]!}{[2]!\,[3]!} = \frac{[5][4]}{[1][2]} = \frac{(1-q^5)(1-q^4)}{(1-q)(1-q^2)} == 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$$

elde edilir. Burada hemen belirtelim ki

$$\lim_{q\to 1^-}(1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6) = 10$$

dir.

n ve k negatif olmayan tamsayısı için

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dir. Pascal kuralının q-benzeri $1 \le k \le n-1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

biçimindedir.

e^x üstel fonksiyonunun q-benzeri (q-üstel fonksiyon) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [16].

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$$

ve

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{[n]!}.$$

2.2. Tanım

$(1+x)^n$ nin q-benzeri

$$(1+x)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\ldots(1+q^{n-1}x), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16].

2.1. Teorem

a bir reel sayı, x bir değişken ve n pozitif tamsayı olmak üzere Gauss Binom formülü

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} a^k x^{n-k}$$

dir [16].

Burada hemen belirtelim ki, x yerine 1, a yerine x seçilirse

$$(1+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k \tag{2.5}$$

elde edilir.

2.2. Teorem

x bir değişken ve n pozitif tamsayı olmak üzere Heine Binom formülü

$$\frac{1}{(1-x)_q^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{[n][n+1]\cdots[n+k-1]}{[k]!}x^k \tag{2.6}$$

dir [16].

3. MATRİSLERİN RİORDAN GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde Riordan kavramı ele alınacaktır. Riordan metodu için temel tanımlar verilecektir.

3.1. Tanım

$(n+1)\times(n+1)$ tipinden Pascal matrisi $P_n = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [6].

Pascal matrisi

$$P_n = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & & \binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Literatürde Pascal matrisinin birçok genelleştirmeleri mevcuttur. Bunlardan bir tanesi de Pascal matrisinin q-benzeridir. q-Pascal matrisi $P_{n,q} = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$p_{i,j} = \begin{cases} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [11].

$$P_{n,q} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & q\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & q^3\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} & q\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} & q^3\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} & \cdots & q^{\binom{n+1}{2}}\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

q-Pascal matrisinin tersi $P^{-1} = (a_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} q^{\binom{j+1}{2}-i(j+1)} \binom{i}{j}_q, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

şeklindedir [11].

3.2. Tanım

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ bir dizi olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde bir formal kuvvet serisi ile tanımlanabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç (doğurucu) fonksiyonu denir [4].

3.3. Tanım

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ bir dizi olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

biçiminde bir formal kuvvet serisi ile tanımlanabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu denir [4].

Örnek

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (3.1)$$

şeklinde yazılabildiği için genel terimi $a_n = 1$ olan $\{1,1,1,1,\ldots\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\frac{1}{1-x}$ olur. Eşitlik (3.1) ifadesini genelleştirecek olursak m pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n \qquad (3.2)$$

dir [4].

3.1. Riordan Grupları

3.4. Tanım

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots \qquad (g_0 \neq 0)$$

ve

$$f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots$$

iki üreteç fonksiyonu olsun. j. sütunu

$$g(x)(f(x))^j \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad (3.3)$$

ürettiği formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşan matris (g,f) şeklinde tanımlansın. Eşitlik (3.3) ile tanımlanan bütün sonsuz boyutlu alt üçgen matrislerin kümesi $\Re$ olmak üzere, her $(g,f),(u,v)\in\Re$ için

$$(g,f)*(u,v)=(g(u\circ f),v\circ f)$$

şeklinde tanımlı işlem ile $(\Re,*)$ bir gruptur. Bu gruba Riordan grup, (g,f) sıralı ikilisine de Riordan çifti denir. Riordan grubun birim elemanı ise $(1,x)$ Riordan çifti ile tanımlanır. $\bar{f}$, f fonksiyonunun bileşke tersi olmak üzere Riordan çiftinin tersi

$$(g,f)^{-1}=(\frac{1}{g\circ\bar{f}},\bar{f})$$

dir [4].

$(g,f)=[d_{ij}]_{i,j\geq 0}$ şeklinde bir Riordan gösterime sahip olsun. O zaman

$$d_{ij}=[x^i]g(x)f(x)^j \tag{3.4}$$

dir. Burada $[x^i]$ ifadesi x^i li terimin katsayısını ifade etmek için kullanılmaktadır.

Örnek

$\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)$ Riordan çiftine karşılık gelen matris gösterimini bulalım.

$\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanları Riordan matrisin 0. sütunu oluşturur. Eşitlik (3.1) den

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

olduğundan $\frac{1}{1-x}$; $\{1,1,1,\ldots\}$dizisinin üreteç fonksiyonudur. O halde 0. sütun $(1,1,1,\ldots)^T$ olur.

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanları 1. sütunu oluşturur. Eşitlik (3.2.) de $m=1$ için x ile çarpılırsa

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^{n+1}=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\cdots$$

olduğundan $\frac{x}{(1-x)^2}$; $\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ dizisinin üreteç fonksiyonudur. O halde 1. sütun $(0,1,2,3,4,5,\ldots)^T$ olur.

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2=\frac{x^2}{(1-x)^3}$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanları 2. sütunu oluşturur. Eşitlik (3.2.) de $m=2$ alınır ve bu eşitlik x^2 ile çarpılırsa

$$\frac{x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^{n+2}=x^2+3x^3+6x^4+10x^5+20x^6+\cdots$$

olduğundan $\frac{x^2}{(1-x)^3}$; $\{0,0,1,3,6,10,20,\ldots\}$ dizisinin üreteç fonksiyonudur. O halde 2. sütun $(0,0,1,3,6,10,20,\ldots)^T$ şeklinde olur.

$\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=\frac{x^3}{(1-x)^4}$ fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanları 3. sütunu oluşturur. Eşitlik (3.2.) de $m=3$ alınır ve bu eşitlik x^3 ile çarpılırsa

$$\frac{x^3}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+3}=x^3+4x^4+10x^5+20x^6+\cdots$$

olduğundan $\frac{x^3}{(1-x)^4}$; $\{0,0,0,1,4,10,20,35,\ldots\}$dizisinin üreteç fonksiyonudur. O halde 3. sütun $(0,0,0,1,4,10,20,35,\ldots)^T$ şeklinde olur.

$$
\begin{aligned}
[x^i]g(x)f(x)^j &= [x^i]\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^j \\
&= [x^i]\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \\
&= [x^i]\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+j}{i}x^{i+j} \\
&= \binom{i}{i-j} \\
&= \binom{i}{j} \\
&= p_{i,j}
\end{aligned}
$$

Pascal matrisi elde edilir.

$$
\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \ldots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & \ldots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}
$$

Örnek

Pascal matrisinin Riordan gösterimi

$$g(x)=\frac{1}{1-x}\ , \quad f(x)=\frac{x}{1-x}$$

(g,f) biçiminde olup, Pascal matrisinin tersi

$$(g,f)^{-1}=\left(\frac{1}{gof^{-1}},f^{-1}\right)=\left(\frac{1}{1+x},\frac{x}{1+x}\right)$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi de Riordan Kavramının Temel Teoremi olarak adlandırılan Riordan kavramı için temel teşkil eden teoremi verelim.

3.1. Teorem

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ herhangi iki dizi bu dizilerin üreteçleri sırasıyla $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olsun. (g, f) Riordan matris, $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ ve $B = (b_0, b_1, b_2, \dots)^T$ sonsuz boyutlu vektörler olmak üzere

$$(g, f)A = B \Leftrightarrow g(x) \cdot \alpha\big(f(x)\big) = \beta(x) \tag{3.5}$$

dir.

3.2. *q*-Riordan Gösterimi

Bu bölümde önce Riordan gösterimlerin q-benzerlerinden sonrasında ise Riordan kavramının temel teoremi olarak verilen teoremin q-benzerinden bahsedeceğiz.

3.5. Tanım

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

formal kuvvet serileri olsun. F ve f fonksiyonlarının q-bileşkeleri

$$F\overline{o}f = \sum_{n\geq 1} F_n f(x) f(qx) \cdots f(q^{n-1}x)$$
$$F\underline{o}f = \sum_{n\geq 1} F_n f(x) f\left(\frac{x}{q}\right) \cdots f\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)$$

olarak tanımlanır [13].

3.6. Tanım

$a_n(q) \neq 0$ olmak üzere

$a_n(q)x^n + a_{n+1}(q)x^{n+1} + a_{n+2}(q)x^{n+2} + \cdots$

kuvvet serilerinin kümesi $F_q(n)$ olsun. $g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olmak üzere

$$g(x) *_q f(x) = g(x)f(qx) \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlı $*_q: F_q(0) \times F_q(1) \rightarrow F_q(1)$ işlemleri verilsin.

$f(x)^{\overline{[0]}} = 1$

olmak üzere $m \geq 1$ için

$$f(x)^{\overline{[m]}} = f(x) *_q f(x)^{\overline{[m-1]}} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlıdır [29].

3.7. Tanım

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olsun. j. sütununun elemanlarının üreteci

$$g(x) *_q f(x)^{\overline{[j]}} \qquad j = 0,1,2,\ldots \tag{3.8}$$

olan matrise q-Riordan matris denir ve $(g,f)_q$ ile gösterilir [27].

$$(g,f)_q = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ g & g *_q f & g *_q f^{\overline{2}} & g *_q f^{\overline{3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3.2. Teorem

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olsun.

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(q)x^k \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(q)x^k$$

olmak üzere

$$(g,f)_q \begin{bmatrix} a_0(q) \\ a_1(q) \\ a_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(q) \\ b_1(q) \\ b_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} \Leftrightarrow g(x) *_q (\alpha \bar{o} f)(x) = \beta(x) \tag{3.9}$$

dir.

4. BİNOMİYEL DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde öncelikle Horadam dizisini ve bu dizinin bazı özelliklerini vereceğiz. Daha sonra binomiyel dönüşümün tanımını vereceğiz. Horadam dizisinin binomiyel dönüşümü olarak elde edilen yeni dizinin bazı cebirsel özellikleri vereceğiz. Dahası bu dönüşüm altında elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu için iki farklı yöntemden bahsedeceğiz.

4.1. Tanım

Başlangıç şartları $h_0 = a$, $h_1 = b$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$h_n = ch_{n-1} + dh_{n-2} \tag{4.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Horadam sayıları denir. $\{h_n\}$ ifadesine ise Horadam sayı dizisi denir. Horadam dizilerinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - cx - d = 0$$

olup, $c^2 + 4d > 0$ için bu denklemin iki kökü

$$\alpha = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4d}}{2}, \quad \beta = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4d}}{2}$$

dir. Böylece Horadam sayılarının Binet formülü

$$A_0 = \frac{b - a\beta}{\sqrt{c^2 + 4d}}, \qquad B_0 = \frac{a\alpha - b}{\sqrt{c^2 + 4d}}$$

olmak üzere

$$h_n = A_0\, \alpha^n + B_0\, \beta^n \tag{4.2}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonu ise

$$h(x) = \frac{a + x(b - ac)}{1 - cx - dx^2} \tag{4.3}$$

dir [14].

a, b, c, d nin özel seçimleri ile birçok özel dizi elde edilir.

Çizelge 4.1. Horadam dizisinin bazı özel durumları

a	b	c	d	h_n	Horadam dizisi	Üreteç
0	1	1	1	F_n	Fibonacci dizisi	$\frac{x}{1-x-x^2}$
2	1	1	1	L_n	Lucas dizisi	$\frac{2-x}{1-x-x^2}$
0	1	2	1	P_n	Pell dizisi	$\frac{x}{1-2x-x^2}$
2	2	2	1	Q_n	Pell-Lucas dizisi	$\frac{2-2x}{1-2x-x^2}$
0	1	1	2	J_n	Jacobsthal dizisi	$\frac{x}{1-x-2x^2}$
2	1	1	2	j_n	Jacobsthal-Lucas dizisi	$\frac{2-x}{1-x-2x^2}$
0	1	k	1	$F_{k,n}$	k-Fibonacci dizisi	$\frac{x}{1-kx-x^2}$
2	k	k	1	$L_{k,n}$	k-Lucas dizisi	$\frac{2-kx}{1-kx-x^2}$

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının q −benzeri Jia ve arkadaşları tarafından $S_0(t,q) = a,\ S_1(t,q) = b$ başlangıç şartları ve $n \geq 1$ için

$$S_{n+1}(t,q) = S_n(t,q) + tq^{n-2}S_{n-1}(t,q) \tag{4.4}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır [15]. Dahası bu polinomların üreteç fonksiyonunu

$$\frac{1}{1 - x - tx^2\eta_x}\{a + (b - a)x\} \tag{4.5}$$

olarak bulmuşlardır.

Burada hemen not edelim ki Eş. (4.4) de $t = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ seçilirse q −Fibonacci sayıları, $t = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ seçilirse de q −Lucas sayıları elde edilir. Dahası $q \to 1$ için Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir.

4.2. Tanım

$A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ herhangi bir dizi olmak üzere

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \qquad (4.6)$$

şeklinde tanımlı $B(A) = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine bu dizinin binomiyel dönüşümü denir [3].

Binomiyel İnversiyon Teoremi kullanılarak

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} b_i$$

şeklinde binomiyel dönüşümden, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin elemanları elde edilebilir.

Şimdi ise binomiyel dönüşümün üreteç fonksiyonunu bulmak için Barry ve Prodinger tarafından ispatlanan ve ileri ki kısımlarda kullanacağımız aşağıdaki teoremi verelim [3, 21].

4.1. Teorem

Herhangi bir $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\alpha(x)$, bu dizinin binomiyel dönüşümünün üreteç fonksiyonu ise $\beta(x)$ ise

$$\beta(x) = \frac{1}{1-x} \alpha\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad (4.7)$$

dir.

Horadam dizisinin binomiyel dönüşümü

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_i$$

şeklinde olup, binomiyel dönüşümün elemanları ise, $B(A) = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ şeklindedir.

Aşağıdaki teorem de ise Horadam dizilerinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen yeni dizinin indirgeme bağıntısını vereceğiz.

4.2. Teorem

Horadam dizisinin binomiyel dönüşümünün indirgeme bağıntısı, başlangıç şartları $b_0 = a$, $b_1 = a + b$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$b_n = (c+2)b_{n-1} - (c-d+1)b_{n-2} \tag{4.8}$$

dir.

Şimdi b_n dizisinin bazı özel durumlarını vereceğiz.

4.1. Sonuç

$a = 0,\ b = c = d = 1$ seçilirse Fibonacci dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$$

elde edilir [12].

4.2. Sonuç

$a = 2$, $b = c = d = 1$ seçilirse Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 2$, $b_1 = 3$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$$

elde edilir [5].

4.3. Sonuç

$a = 0$, $b = d = 1$, $c = 2$ seçilirse Pell dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 4b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

elde edilir [12].

4.4. Sonuç

$a = b = c = 2$, $d = 1$ seçilirse Pell-Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 2$, $b_1 = 4$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 4b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

elde edilir [5].

4.5. Sonuç

$a = 0$, $b = c = 1$, $d = 2$ seçilirse Jacobsthal dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 3b_{n-1}$$

elde edilir.

4.6. Sonuç

$a = 2,\ b = c = 1,\ d = 2$ seçilirse Jacobsthal-Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 2,\ b_1 = 3$ başlangıç şartları ile

$$b_n = 3b_{n-1}$$

elde edilir.

4.7. Sonuç

$a = 0,\ b = d = 1,\ c = k$ seçilirse k-Fibonacci dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 0,\ b_1 = 1$ başlangıç şartları ile

$$b_n = (k+2)b_{n-1} - kb_{n-2}$$

elde edilir [12].

4.8. Sonuç

$a = 2,\ b = d = 1,\ c = k$ seçilirse k-Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin rekürans bağıntısı $b_0 = 2,\ b_1 = k + 2$ başlangıç şartları ile

$$b_n = (k+2)b_{n-1} - kb_{n-2}$$

elde edilir [5].

Horadam dizisinin binomiyel dönüşümünün Binet formülü

$$b_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n \tag{4.9}$$

dir. Burada

$$r_1 = \frac{(c+2) + \sqrt{(c+2)^2 - 4(c-d+1)}}{2} \qquad r_2 = \frac{(c+2) - \sqrt{(c+2)^2 - 4(c-d+1)}}{2}$$

$$A = \frac{b - a(r_2 - 1)}{\sqrt{(c+2)^2 - 4(c-d+1)}} \qquad B = \frac{(r_1 - 1)a - b}{\sqrt{(c+2)^2 - 4(c-d+1)}}$$

dir.

r_1 ve r_2 ifadeleri binomiyel dönüşümün indirgeme bağıntısının karakteristik denkleminin yani

$$r^2 - (c+2)r + (c-d+1) = 0$$

denkleminin kökleridir.

Horadam dizisinin binomiyel dönüşümün üreteç fonksiyonu $\beta(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \frac{1}{1-x} h\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ &= \frac{a - (a - b + ac)x}{1 - (c+2)x + (c-d+1)x^2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

dir.

Şimdi de $\beta(x)$ üreteç fonksiyonunun bazı özel durumlarını verelim.
4.9. Sonuç

$a = 0,\ b = c = d = 1$ seçilirse Fibonacci dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) = \frac{x}{1 - 3x + x^2}$$

elde edilir [12].

4.10. Sonuç

$a = 2$, $b = c = d = 1$ seçilirse Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) = \frac{2 - 3x}{1 - 3x + x^2}$$

elde edilir [5].

4.11. Sonuç

$a = 0$, $b = d = 1$, $c = 2$ seçilirse Pell dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) = \frac{x}{1 - 4x + 2x^2}$$

elde edilir [12].

4.12. Sonuç

$a = b = c = 2$, $d = 1$ seçilirse Pell-Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) = \frac{2 - 4x}{1 - 4x + 2x^2}$$

elde edilir [5].

4.13. Sonuç

$a = 0$, $b = c = 1$, $d = 2$ seçilirse Jacobsthal dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) \ = \frac{x}{1-3x}$$

elde edilir.

4.14. Sonuç

$a = 2,\ b = c = 1,\ d = 2$ seçilirse Jacobsthal-Lucas dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu

$$\beta(x) \ = \frac{2-3x}{1-3x}$$

elde edilir.

Binomiyel dönüşümün üreteci çeşitli şekilde hesaplanmıştır. Paul Bary [12], Riordan Gösteriminin temel teoremini kullanarak binomiyel dönüşüm gibi çeşitli dönüşümlerin üreteçlerini bulmuştur.

$g(x) = \frac{1}{1-x},\ f(x) = \frac{x}{1-x}$ ve $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ olarak $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci dizisi seçilirse

$$\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olup,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$$

yani Fibonacci dizilerinin Binomiyel dönüşümü elde edilir.

Riordan'ın Temel Teoremini kullanarak $\{b_n\}$ dizisinin $\beta(x)$ üreteç fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{aligned}\beta(x) &= g(x)\cdot\alpha\big(f(x)\big)\\ &= \frac{1}{1-x}\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}\right)\\ &= \frac{x}{1-3x+x^2}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Bu sonucu bileşke işleminin tanımını kullanarak yapalım.

$$\begin{aligned}\beta(x) &= g(x)\cdot(\alpha\circ f)(x)\\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{k}F_n\binom{k}{n}\right\}x^k\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}F_{2n}x^n\\ &= \frac{x}{1-3x+x^2}\end{aligned}$$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yerine $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ Horadam dizisi, dolayısıyla $h(x)$ üreteç fonksiyonu alınırsa Horadam dizisinin binomiyel dönüşümü elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas gibi Horadam dizisinden elde edilen bütün dizilerin binomiyel dönüşümlerinin üreteçleri bulunabilir.

5. *q*-BİNOMİYEL DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde ise öncelikle q −binomiyel dönüşüm tanımlanacaktır. Daha sonra q −Riordan kavramı kullanılarak q −binomiyel dönüşümlerin üreteçleri bulunacaktır.

5.1. Tanım

$\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ bir dizi olsun.

$$b_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a_j(q) \tag{5.1}$$

$\{b_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin q −Binomiyel dönüşümü denir.

Örnek

$\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin binomiyel dönüşümünün bazı terimlerini bulalım.

$n = 0$ için $b_0(q) = a_0(q)$
$n = 1$ için $b_1(q) = a_0(q) + qa_1(q)$
$n = 2$ için $b_2(q) = a_0(q) + q[2]a_1(q) + q^3a_2(q)$

olarak elde edilir.

5.1. Teorem

$g(x,q) = \frac{1}{(1-x)_q}$, $f(x,q) = \frac{x}{(1-x)_q}$ ve $\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin q −Binomiyel dönüşümü $\{b_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. $\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\alpha(x,q)$ ve $\{b_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\beta(x,q)$ ise

$$\beta(x,q) = g(x,q) *_q (\alpha\, \overline{o}\, f)(x,q) \tag{5.2}$$

dir.

İspat

q −Pascal matrisinin q −Riordan gösterimi

$$\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)_q$$

dir ([13]). q −Pascal matrisi ile $\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden oluşan sütun vektörü ile çarpımından

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & q\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & 0 & 0 & \cdots \\ \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & q\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} & q^3\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} & 0 & \cdots \\ \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} & q\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} & q^3\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} & q^6\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0(q) \\ a_1(q) \\ a_2(q) \\ a_3(q) \\ a_4(q) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(q) \\ b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \\ b_4(q) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$b_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix} a_j(q) \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{5.3}$$

elde edilir. Bu ise $\{a_n(q)\}$ dizisinin q −Binomiyel dönüşümüdür. Teorem 3.2 den

$$\beta(x,q) = g(x,q) *_q (\alpha\, \overline{o}\, f)(x,q)$$

olur.

5.1. Sonuç

Eşitlik (5.2) de $q \to 1$ ise Eşitlik (4.7) elde edilir.

Şimdi $\beta(x,q)$ üreteç fonksiyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\beta(x,q) &= \frac{1}{(1-x)_q} *_q \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \overline{o} \left(\frac{x}{(1-x)_q}\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)_q} *_q \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{x}{(1-x)_q}\right)^{\overline{[j]}}\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)_q} *_q \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \prod_{k=0}^{j-1} \frac{q^k x}{1-q^k x}\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)_q} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \prod_{k=0}^{j-1} \frac{q^{k+1} x}{1-q^{k+1} x}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, q^{\binom{j+1}{2}} \frac{x^j}{(1-x)_q^{j+1}}
\end{aligned}$$

Heine Binom Teoremi kullanılırsa

$$\beta(x,q) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, q^{\binom{j+1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^n$$

olup, denklem düzenlenirse

$$\beta(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \, q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) x^n \tag{5.4}$$

elde edilir.

Özel olarak Eş. (5.4) de $a_n(q) = S_n(t,q)$ seçilirse,

$$\beta(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j(t,q) \, q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) x^n \tag{5.5}$$

genelleştirilmiş q −Fibonacci ve q −Lucas polinomlarının q −binomiyel dönüşümünün üreteci elde edilir.

$t = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ seçilirse q −Fibonacci sayıları, $t = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ seçilirse de q −Lucas sayıları elde edilir. Dahası $q \to 1$ için Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir.

5.2. Sonuç

Eş. (5.5) de $t = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ seçilirse q −Fibonacci sayılarının q −binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu elde edilir. Dahası $q \to 1$ için Fibonacci sayılarının binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin Eş. (4.11) ile verilen üreteç fonksiyonu elde edilir.

5.3. Sonuç

Benzer biçimde Eş. (5.5) de $t = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ seçilirse q −Lucas sayılarının q −binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu elde edilir. $q \to 1$ için Lucas sayılarının binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin üreteç fonksiyonu elde edilir.

5.4. Sonuç

Eş.(5.4) $q \to 1$ ve $a_n = h_n$ seçilirse, Horadam dizisinin binomiyel dönüşümü ile elde edilen dizinin Eş. (4.10) ile verilen üreteç fonksiyonu elde edilir.

5.5. Sonuç

$a_n(q) = q^{-n}$ olmak üzere $\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin q −Binomiyel dönüşümünün üstel üreteci

$$\varepsilon_q^x = e_q^x \cdot E_q^x$$

dir.

İspat

Eş. (5.4) de $a_n(q) = q^{-n}$ seçilirse

$$\beta(x,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}\right)x^n$$

olur.

$$\beta_n=\sum_{j=0}^{\infty}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}$$

olsun. q-üstel fonksiyonların tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
e_q^x.E_q^x &=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^{\binom{j}{2}}\frac{x^n}{[n]!}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{j}{2}}}{[n-j]!\,[j]!}\right)x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}\right)\frac{x^n}{[n]!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{x^n}{[n]!}
\end{aligned}$$

$\{a_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin q-Binomiyel dönüşümünün üstel üreteci elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde problem tanımlanmış, gerekli literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde gerekli tanım ve kavramlar verilmiş, üçüncü bölümde matrislerin Riordan ve q −Riordan gösterimleri incelenmiş, dördüncü bölümde dizilerin binomiyel dönüşümleri ve çeşitli özellikleri verilmiş son olarak beşinci bölümde q −binomiyel dönüşüm tanımlanmış ve q −Riordan gösterimler yardımı ile üreteç fonksiyonu elde edilmiştir.

q −binomiyel dönüşümün üreteç fonksiyonunda q nun ve dizilerin özel seçimine ile birçok sonuç elde edilebilmektedir.

KAYNAKLAR

1. Aral, A., Gupta and V., Agarwal, R. P. (2013). *Applications of q-Calculus in Operator Theory*. New York: Springer-Verlag.

2. Barry, P. (2005). A Catalan transform and related transformations on integer sequences. ***Journal of Integer Sequences***, 8, Article 05.4.5.

3. Barry P. (2006). On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangels. ***Journal of Integer Sequences***, 9(art.06.2.4): 1-34.

4. Barry, P. (2009). A study of integer sequences, Riordan arrays, Pascal-like arrays and hankel transforms. Published electronically at http://repository.with.ie/id/eprint/1379

5. Bhadouria, P., Jhala, D., Singh, B. (2014). Binomial transforms of the k-Lucas sequences and its properties. ***Journal Mathematical. Computer Sciences***, 8, 81-92.

6. Call, G. S., Velleman, D. J. (1993). Pascal's matrices. ***The American Mathematical Monthly***, 100, 372-376.

7. Carlitz, L. (1973). Some q-expansion formulas. ***Glasnik Mathematicki Serija***, 8, 205-214.

8. Charalambides, Charalambos A. (2002). *Enumerative Combinatorics*, New York: Champan & Hall, 33-38.ar.

9. Chen, K.-W. (2007). Identities from the binomial transform. ***Journal of Number Theory***, 124(1), 142-150

10. Corcino, Roberto B. (2008). On $p - q$ binomial coefficients. ***Electronic Journal of Combinatorial Number Theory***, 8, 1-16.

11. Ernst, T. (2008). *q-Pascal and q-Bernoulli matrices and umbral approach*, Department of Mathematics Uppsala Universty D.M. Report 2008, 23.

12. Falcon, S. Plaza, A. (2009). Binomial transforms of k-Fibonacci sequence. ***International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation***, 10(11-12), 1527-1538.

13. Garsia, A. (1981). A q-analogue of the Lagrange inversion formula. ***Houston Journal of Mathematics,*** 7, 205-237.

14. Horadam, A. F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. ***The American Mathematical Monthly***. 68(5), 455-459.

15. Jia, C. Z., Liu, H. M., Wang T. M., (2007). q-Analogs of Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials. ***Fibonacci Quaterly***. 451, 26-34.

16. Kac, V. ve Cheung, P. (2002) *Quantum Calculus*. Newyork: Springer, 5-20.

17. Khristo N Boyadzhiev (2018) *Notes on the Binomial Transform*, Ohio: World Scientific, 11-20.

18. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,* New York: John Wiley and Sons, 153-155.

19. Kızılateş, C., Tuglu, N., Çekim, B. (2017). Binomial transforms of Quadrapell sequences and Quadrapell matrix sequences. ***Journal of Science and Arts***, 38, 69-80.

20. Merlini, D., Rogers, D. G., Sprugnoli, R., Verri, M. C. (1997). On some alternative characterizations of Riordan arrays. ***Canadian Journal of Mathematics***, 49(2), 301-320.

21. Prodinger H. (1994). Some information about the binomial transform. ***The Fibonacci Quarterly***, 32(5), 412-415.

22. Rogers, D. G. (1978). Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays. ***Discrete Mathematics***, 22, 301-310.

23. Shapiro, L., Getu, W.S., Woan, W. J., Woodson, L.C. (1991). The Riordan group, ***Discrete Applied Mathematics***, 34, 229-239.

24. Spivey M., Steil, L. (2006). The k-binomial transforms and the Hankel transform, ***Journal of Integer Sequences*** 9, Article 06.1.1

25. İnternet: Sprugnoli, R. (2015). An introduction to mathematical methods in combinatorics. URL:http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fwww.dsi.unifi.+it%2F %7Eresp%2FHandbook.pdf&date=2015-12-09. Son Erişim Tarihi:09.12.2015.

26. Tuglu, N., Yesil, F. Kocer, E.G. Dziemianczuk, M. (2014). The F-analogue of Riordan representation of Pascal matrices via fibonomial coefficients. ***Journal of Applied Mathematics***, 2014.

27. Tuglu, N., Yesil, F., Dziemanczuk, M., Kocer, E.G. (2016). q-Riordan array for q-Pascal matrix and its inverse matrix. ***Turkish Journal of Mathematics***, 40,1038-1048

28. Vajda, S. (1989). *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and Applications*. New York: Ellis Horwood Limited, 35-37.

29. Yeşil, F., Tuğlu N. (2017). q-Riordan representation. ***Linear Algebra and its Applications***, 525, 105-117.

30. Yilmaz, N., Taskara, N. (2013). Binomial transforms of the Padovan and Perrin matrix sequences. ***Abstract and Applied Analysis***, Article ID 497418.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BAKIRHAN, Akif
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 30.01.1988, Osmaniye
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 544 448 65 44
e-mail	: akifbakirhan44@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2015
Lise	Osmaniye Anadolu Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014-Halen	Malatya Çınar Koleji	Matematik Öğretmeni
2016-2018	ODTÜLÜLER Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Bakırhan, A. (2019). *q-Binomiyel Dönüşüm ve Uygulamaları*. Uluslararası Erciyes Bilimsel Araştırmalar Kongresi, Kayseri, Türkiye.

Hobiler

Yüzme, Voleybol, Kitap okumak

GAZİ GELECEKTİR.