T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMLER İÇİN SAYISAL METOTLAR

Yüksek Lisans Tezi

ELİF DUMAN

İSTANBUL, 2020

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMLER İÇİN SAYISAL METOTLAR

Yüksek Lisans Tezi

ELİF DUMAN

Tez Danışmanı: DOÇ. DR. MAKSAT ASHYRALIYEV

İSTANBUL, 2020

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK

Tezin Adı: Adveksiyon-Difüzyon Denklemler İçin Sayısal Metotlar
Öğrencinin Adı Soyadı: Elif Duman
Tez Savunma Tarihi: 10.01.2020

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Dr. Öğr.Üyesi Yücel Batu SALMAN
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Lütfi ARDA
Program Koordinatörü

Bu Tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzalar
Tez Danışmanı Doç. Dr. Maksat ASHYRALIYEV	----------------------------------
Üye Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU	----------------------------------
Üye Prof. Dr. Lütfi ARDA	----------------------------------

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışması süresince her aşamada bilgi, deneyim ve tavsiyelerinden yararlandığım, benden hiçbir zaman desteğini ve yardımını esirgemeyen çok kıymetli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Maksat ASHYRALIYEV'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca benden asla desteğini esirgemeyen sevgili babam, annem ve babaanneme teşekkür etmeyi borç bilirim. Çalışmalarım süresince beni hiç bir konuda yalnız bırakmayan eşim Mehmet Aziz Duman'a ise ayrıca teşekkür ederim.

İstanbul, 2020 Elif DUMAN

ÖZET

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMLER İÇİN SAYISAL METOTLAR

Elif DUMAN

Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Maksat ASHYRALIYEV

Ocak 2020, 59 sayfa

Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi sonlu farklar metodu kullanılarak incelenmektedir. Bu yöntemde denklemdeki bilinmeyen fonksiyonun türevleri yerine sonlu fark ifadeleri konulur. Bir boyutlu sabit katsayılı adveksiyon-difüzyon denklemi için çeşitli açık ve kapalı şemalar üzerinde durulmuştur. Bu şemaların kararlılığını incelemek için Von Neumann analizi kullanılmıştır. Bir boyutlu başlangıç sınır değer adveksiyon-difüzyon problemleri için bu şemaların nümerik çözümleri hesaplanmıştır. Test edilen nümerik örnekler teorik bulguları desteklemektedir.

Anahtar Kelimeler: Adveksiyon-Difüzyon Denklemi, Sonlu Farklar Metodu, Açık ve Kapalı Şemalar, Von Neumann Kararlılık Analizi

ABSTRACT

NUMERICAL METHODS FOR ADVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Elif DUMAN

Graduate Program of Applied Mathematics

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Maksat ASHYRALIYEV

January 2020, 59 pages

A study for numerical solutions of one-dimensional advection-diffusion equation using finite difference method is presented. This method is based on replacing the derivatives with the finite difference approximations. Various explicit and implicit schemes are used to find the approximate solution of one-dimensional advection-diffusion equation with constant coefficients. Von Neumann analysis is applied to study the stability of these schemes. Numerical examples for one-dimensional advection-diffusion equation with specified initial and boundary conditions are provided to support the theoretical findings. Numerical examples for one-dimensional advection-diffusion equation with specified initial and boundary conditions are provided to support the theoretical findings.

Keywords: Advection-Diffusion Equation, Finite Difference Method, Explicit and Implicit Schemes, Von Neumann Stability Analysis

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR

KISALTMALAR

ADD	:	Adi Diferansiyel Denklem
BDP	:	Başlangıç Değer Problemi
CN	:	Crank-Nicolson
DF	:	Dufort-Frankel
KDD	:	Kısmi Diferansiyel Denklem
LF	:	Leap-Frog
MZGUM	:	Modifiye Edilmiş Zamanda Geri Uzamsal Merkezi
SDP	:	Sınır Değer Problemi
ZGUM	:	Zamanda Geri Uzamsal Merkezi
ZİUM	:	Zamanda İleri Uzamsal Merkezi

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklem türlerinden; mühendislik, fizik, uzay ve doğa bilimleri, tıp ve istatistik gibi alanlardaki problemlerin matematiksel modellenmesinde yararlanılır. Adi Diferansiyel Denklemler (ADD), Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD), Gecikmeli Diferansiyel Denklemler vb. veya bunların kombinasyonları gibi bir grup lineer ve/veya lineer olmayan denklemler bu türlere dahildir. Bazı diferansiyel denklemlerin çözümü analitik yöntemlerle bulunur. Fakat çoğu zaman diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü hesaplamak mümkün olmayabilir. Bu tür durumlarda yaklaşık çözümü bulmak için nümerik metotlar geliştirilmiştir. Nümerik çözüm yöntemleri arasında en yaygın kullanılanlar: sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacimler yöntemleridir.

Yapılan bu çalışmada, bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi için nümerik yöntemleri sunuyoruz. Sonlu farklar metodu kullanılarak, bir boyutlu adveksiyon- difüzyon denklemi için çeşitli açık ve kapalı şemalar incelenmektedir. Bu şemaların Von Neumann kararlılık analizi verilmektedir. Ayrıca nümerik örnekler ile teorik bulgular desteklenmektedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Adveksiyon-Difüzyon denklemi, parçacıkların, enerjinin veya farklı fiziksel niceliklerin adveksiyon ve difüzyona bağlı olarak yayılımını gösteren bir denklemdir. Adveksiyon-Difüzyon denklemi, geniş kapsamlı bir çok bilimsel probleme model olarak alınmıştır, örneğin [3, 13, 8, 18, 14].

Adveksiyon-Difüzyon denkleminin nümerik çözümleri için farklı çalışmalar bulunmaktadır. Adveksiyon-Difüzyon denkleminin nümerik çözümleri için en yaygın kullanılanan yöntemler: sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sonlu hacimlerdir. Sonlu farklar yöntemi içlerinde en eskisidir. Bu yöntem ilk olarak 1768 yılında Euler tarafından Adi Diferansiyel Denklemler (ADD) için tanımlanmıştır [1]. 1908 yılında ise bu yöntem Runge tarafından Euler'in fikri kullanılarak iki boyutlu Poisson denklemi için geliştirilmiştir [5]. Sonlu farklar metodu için yakınsaklık ispatı ilk kez 1928 yılında Courant, Friedrichs ve Lewy tarafından ortaya konan akademik bildiride yer almıştır [16]. Bu akademik bildiri, kısmi türevli hiperbolik diferansiyel denklemlerin kararlılığı konusunda önemli bir yer tutmaktadır. Teorik olarak literatürde yer alan sonlu fark yöntemleri, 1950'li yıllarda bilgisayarların kullanılmaya başlanmasıyla uygulamaya konulmuştur. Bilgisayarların icat edilmesi sonucu, nümerik metotların verimli bir şekilde kullanılması ve teorik bilgilerin doğruluğunun test edilmesi mümkün olmuştur. Son yıllarda verimli ve yüksek hızlı bilgisayarların gelişmesi ile birlikte sayısal problemlerin çözümünün bulunması kolaylaşmıştır.

Sonlu farklar yöntemi, hem lineer hem de lineer olmayan problemlere uygulanabilmesi, yakınsaklık analizinin yapılabilmesi ve bilgisayarda rahatça programlanabilmesi gibi özelliklerinden dolayı günümüzde de sık sık tercih edilmektedir. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılmış [2, 9, 17, 4, 18] gibi daha farklı çalışmalar da mevcuttur.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan Adveksiyon Difüzyon denklemi, Taylor teoremi, türevlerin nümerik yaklaşım formülleri, sonlu farklar yöntemi ve bu yöntemin kararlılığı, tutarlılığı, yakınsaklığı ile ilgili genel bilgiler verilecektir. İlaveten, von Neumann polinomu da bu kısımda ele alınacaktır.

3.1 ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ

Bu kısımda Adveksiyon-Difüzyon denkleminden bahsetmeden önce kısaca Adveksiyon denklemi ve Difüzyon denklemi ele alınacaktır.

3.1.1 Adveksiyon Denklemi

Adveksiyon: Belirli bir yönde hareket eden akışkanın içinde yer alan bir maddenin, akışkanın hareketi sonucu ilgili yöne taşınması olayıdır.
Bir boyutlu adveksiyon denklemi, t zamana ve x konuma göre degişkenleri belirtmek üzere;

$$u_t + au_x = 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada a akış hızı sabiti ya da bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonudur. a'ya ayrıca adveksiyon sabiti de denir. Eğer a bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ya da türevi ise adveksiyon denklemi nonlineer (doğrusal olmayan)dir. Burada u ise konum ve zamana karşılık gelen x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur.

3.1.2 Difüzyon (Isı) Denklemi

Difüzyon: Bir maddenin içerisindeki hareketli parçacıkların yoğunluğun çok olduğu yerlerden az olduğu yerlere dağılması olayıdır.
Bir boyutlu Difüzyon (Isı) denklemi, t zamana ve x konuma göre değişkenleri belirtmek üzere;

$$u_t = du_{xx}, \tag{3.2}$$

şeklindedir. Burada d difüzyon sabitidir. u ise adveksiyon denklemindeki gibi konum ve zamana karşılık gelen x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur.

Not 1. *Adveksiyonda da difüzyonda da parçacıklar bir yerden başka bir yere taşınır fakat bunu farklı şekilde gerçekleştirirler. Adveksiyonda tek yönlü bir akış varken difüzyonda yoğunluğun çok olduğu yerden az olduğu yere yayılım vardır.*

3.1.3 Adveksiyon-Difüzyon Denklemi

Adveksiyon-Difüzyon denklemi, adveksiyon ve difüzyon etkisinin birleşmesinden oluşur. Başka bir deyişle; Adveksiyon-Difüzyon denklemi, parçacıkların, enerjinin veya farklı fiziksel niceliklerin adveksiyon ve difüzyona bağlı olarak yayılımını gösteren bir denklemdir.
Adveksiyon-Difüzyon denklemine; enerji, hız, kütle gibi çeşitli büyüklüklerin modellenmesinde de başvurulur. Sudaki kirliliğin yayılımı, akarsu ağlarındaki termal ısı yayılımı, körfezlerdeki petrol kirliliği gibi termal niteliklerin incelenmesinde kullanılmasının yanı sıra kimyasal tepkimeler sırasında bir maddenin sistemdeki değişimi ve çözeltilerdeki konsantrasyonum belirlenmesi gibi kimyasal kullanım alanları da vardır.
Başlangıç ve sınır koşulları verilen Adveksiyon-Difüzyon denkleminin çoğu örneğinde analitik çözümü bulmak yeterince zor olduğundan, bu denklemlerin çözümü için bazı

nümerik metotlar geliştirilmiştir. Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi, t zamana ve x konuma göre degişkenleri belirtmek üzere;

$$u_t + au_x = du_{xx} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada du_{xx} terimi difüzyonu, au_x terimi ise adveksiyonu belirtmektedir. Buna göre difüzyon sabiti $d = 0$ olduğunda (3.3) denklemi bir boyutlu adveksiyon denklemi (3.1)'e dönüşür. Adveksiyon sabiti $a = 0$ olduğunda ise (3.3) denklemi bir boyutlu difüzyon (ısı) denklemi (3.2) halini alır.

3.2 TAYLOR TEOREMİ

Teorem 1. *$f \in C^{(n+1)}[a,b]$ olsun, yani $f, f', f'', \cdots, f^{(n+1)}$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için x_0 ile x arasında*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.4}$$

eşitliğini sağlayacak en az bir ξ sayısı mevcuttur [11].

Not 2. *(3.4) eşitliğine f fonksiyonun x_0 civarında Taylor açılımı denir. İlaveten*

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

olmak üzere, (3.4) eşitliği

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada tanımlanan $P_n(x)$ polinomuna n.mertebeden Taylor polinomu *ve $R_n(x)$ ifadesine de $P_n(x)$ ile ilişkili kesme hatası denir. Kesme hatasındaki ξ sayısı $P_n(x)$ polinomu civarında açıldığı x sayısına bağlıdır.*

Not 3. *(3.4) eşitliğinde $x = x_0 + h$ ve $x_0 = x$ kabul edersek, aşağıdaki formülü elde ederiz*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.6}$$

Ayrica, (3.4) eşitliğinde $x = x_0 - h$ ve $x_0 = x$ kabul edersek, aşağıdaki formül elde edilir

$$f(x-h) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + (-1)^n\frac{f^n(x)}{n!}h^n + (-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.7}$$

3.3 NÜMERİK TÜREV

3.3.1 Birinci Türevin Yaklaşım Formülleri

Teorem 2. *$f(x)$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon ise aşağıdaki birinci mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h). \tag{3.8}$$

İspat: (3.6) esitliğinde $n = 1$ durumunda

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki sonuncu terim hata terimi olup, ξ, x ve $x + h$ arasında bir noktadır. Bu ifade $f'(x)$ için çözülürse

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

elde edilir. Buradaki ilk terimin sayısal türev için kullanılan ileri fark formülü olduğu, ikinci terimin ise sayısal türev alınırken yapılan hata olduğu söylenebilir. Görüldüğü gibi hata terimi h ile orantılıdır. Mertebe açısından düşünülürse hata $O(h)$ mertebesindedir ve böylece (3.8) sağlanmış olur.

Not 4. *(3.8) yaklaşım formülüne birinci türevin* ***birinci mertebeden ileri fark yaklaşım formülü*** *denir.*

Not 5. *(3.8) yaklaşım formülünde h yerine $-h$ konulursa aşağıdaki* ***birinci mertebeden geri fark yaklaşım formülü*** *elde edilir*

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h). \tag{3.9}$$

Teorem 3. *$f(x)$ üç kez türevlenebilen bir fonksiyon ise aşağıdaki ikinci mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2). \tag{3.10}$$

İspat: (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 2$ alnırsa,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2)$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\big)$$

olur ve böylece

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}\big(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\big)$$

elde edilir. Burada, sağdaki ilk terim türevin merkezi farklarla sayısal yaklaşımını ifade etmektedir. İkinci terim de hatayı belirtmekte olup hata h^2 ile orantılıdır. Mertebe açısından düşünülürse hata $O(h^2)$ mertebesindedir ve böylece (3.10) eşitliği elde edilmiş olur.

Not 6. *(3.10) yaklaşım formülüne birinci türevin* ***ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşım formülü*** *denir.*

Teorem 4. *$f(x)$ üç kez türevlenebilen bir fonksiyon ise, aşagıdaki ikinci mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2). \tag{3.11}$$

İspat: (3.6) formülünde $n = 2$ alınırsa ve yine (3.6) formülünde $n = 2$ ve h yerine $2h$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki formüller elde edilir

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1),$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2).$$

$f(x+h)$ ifadesi 4 ile çarpılıp sonuçtan $f(x+2h)$ ifadesi çıkarılırsa,

$$4f(x+h) - f(x+2h) = 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3}\big(f'''(\xi_1) - 2f'''(\xi_2)\big)$$

olur ve buradan,

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} - \frac{2h^2}{3}\big(f'''(\xi_1) - 2f'''(\xi_2)\big)$$

elde edilir. Burada, sağdaki ilk terim birinci türevin ikinci mertebeden sayısal yaklaşımını ifade etmektedir. İkinci terim de hatayı belirtmekte olup hata h^2 ile orantılıdır. Mertebe açısından düşünülürse hata $O(h^2)$ mertebesindedir ve böylece (3.11) eşitliği elde edilmiş olur.

Not 7. *(3.11) yaklaşım formülüne birinci türevin* ***ikinci mertebeden ileri fark yaklaşım formülü*** *denir.*

Not 8. *(3.11) yaklaşım formülünde h yerine $-h$ konulursa aşağıdaki* ***ikinci mertebeden geri fark yaklaşım formülü*** *elde edilir*

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2). \tag{3.12}$$

Teorem 5. *$f(x)$ beş kez türevlenebilen bir fonksiyon ise aşağıdaki dördüncü mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4). \tag{3.13}$$

İspat: (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 4$ alınırsa,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}h^5,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x)}{4!}h^4 - \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}h^5$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \frac{h^5}{120}\big(f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)\big) \tag{3.14}$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 4$ ve h yerine $2h$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki formüller elde edilir

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\xi_3),$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) - \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\xi_4).$$

Taraf tarafa çıkarılırsa,

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \frac{4h^5}{15}\big(f^{(5)}(\xi_3) + f^{(5)}(\xi_4)\big) \tag{3.15}$$

elde edilir. Şimdi, (3.14) eşitliğin 8 katından (3.15) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa

$$8\big(f(x+h) - f(x-h)\big) - \big(f(x+2h) - f(x-2h)\big) = 12hf'(x) + O(h^5)$$

bulunur. Bu ifade $f'(x)$ için çözülürse (3.13) eşitliği elde edilmiş olur.

Not 9. *(3.13) yaklaşım formülüne birinci türevin* ***dördüncü mertebeden merkezi fark yaklaşım formülü*** *denir.*

3.3.2 İkinci Türevin Yaklaşım Formülleri

Teorem 6. *$f(x)$ dört kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman Taylor formülüne göre aşağıdaki ikinci mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2). \tag{3.16}$$

İspat: (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 3$ alınırsa,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4,$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4$$

elde edilir. Üsteki iki eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}\big(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\big)$$

bulunur. Bu ifadeyi $f''(x)$ için çözersek

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}\big(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\big)$$

elde edilir. Burada, sağdaki ilk terim ikinci türevin merkezi farklarla sayısal yaklaşımını ifade etmektedir. İkinci terim de hatayı belirtmekte olup hata h^2 ile orantılıdır. Mertebe açısından düşünülürse hata $O(h^2)$ mertebesindedir ve böylece (3.16) eşitliği elde edilmiş olur.

Not 10. *(3.16) yaklaşım formülüne ikinci türevin* ***ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşım formülü*** *denir.*

Teorem 7. *$f(x)$ altı kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman Taylor formülüne* *göre aşağıdaki dördüncü mertebeden yaklaşım formülü sağlanır*

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + O(h^4). \quad (3.17)$$

İspat: (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 5$ alnırsa,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}h^5 + \frac{f^{(6)}(\xi_1)}{6!}h^6,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 - \frac{f^{(5)}(x)}{5!}h^5 + \frac{f^{(6)}(\xi_2)}{6!}h^6$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \frac{h^6}{360}\left(f^{(6)}(\xi_1) + f^{(6)}(\xi_2)\right) \quad (3.18)$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) numarali formüllerde $n = 5$ ve h yerine $2h$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki formüller elde edilir

$$f(x+2h) = f(x)+2hf'(x)+2h^2 f''(x)+\frac{4h^3}{3}f'''(x)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)+\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(x)+\frac{4h^6}{45}f^{(6)}(\xi_3),$$

$$f(x-2h) = f(x)-2hf'(x)+2h^2 f''(x)-\frac{4h^3}{3}f'''(x)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)-\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(x)+\frac{4h^6}{45}f^{(6)}(\xi_4).$$

Buradan,

$$f(x+2h)+f(x-2h) = 2f(x)+4h^2 f''(x)+\frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x)+\frac{8h^6}{45}\left(f^{(6)}(\xi_3)+f^{(6)}(\xi_4)\right) \quad (3.19)$$

elde edilir. Şimdi, (3.18) eşitliğinin 16 katından (3.19) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa

$$16\big(f(x+h) + f(x-h)\big) - \big(f(x+2h) + f(x-2h)\big) = 30f(x) + 12h^2 f(x) + O(h^6)$$

bulunur. Bu ifade $f''(x)$ için çözülürse (3.17) eşitliği elde edilmiş olur. Burada sağdaki kısım ikinci türevin merkezi farklarla yaklaşımını ifade etmektedir. İkinci terim de hatayı belirtmekte olup hata h^4 ile orantılıdır. Mertebe açısından düşünülürse hata $O(h^4)$ mertebesindedir.

Not 11. *(3.17) yaklaşım formülüne ikinci türevin* ***dördüncü mertebeden merkezi fark yaklaşım formülü*** *denir.*

3.4 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar yöntemi sayısal yöntemlerin en eskilerinden biridir. Literatüre bakıldığında ilk olarak Euler tarafından 1768 yılında Adi Diferansiyel denklemler (ADD) için tanımlanmıştır [1]. Daha sonra 1908 yılında Runge tarafından iki boyutlu Poisson denklemleri için geliştirilmiştir [5]. 1968 yılında ise Alterman ve Karal tarafından elastik dalga yayılımıyla ilgili ilk uygulamalar sonlu farklar yöntemiyle yapılmıştır [7] .

Sonlu farklar yöntemi, günümüzde de diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmakta sık sık başvurulan bir yöntem olmaya devam etmektedir. Bu yöntemin temeli Taylor formülüne dayanmış olup, sınırlı sayıda terim içeren bir diferansiyel denklemdeki türevlerin yerine sonlu fark ifadeleri konularak uygulanır.

Bu yöntemin kullanılmasındaki avantajlar olarak; hem lineer hem de lineer olmayan problemlere uygulanabilmesi, yakınsaklık analizinin yapılabilmesi ve bilgisayarda rahatça programlanabilmesi sayılabilir.

Burada, örnek bir başlangıç-sınır değer problemi için sonlu farklar yönteminin uygulanmasını göstereceğiz.

Örnek 1.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < l, \ \ 0 < t < T, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.20}$$

başlangıç-sınır değer ısı problemini ele alalım. Burada, $\phi(x)$ verilmiş bir fonksiyon olsun.

(3.8) yaklaşım formülünü kullanarak, yeterince küçük bir τ için,

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}$$

(3.16) yaklaşım formülünü kullanarak, küçük bir h için,

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2}$$

yaklaşım formülleri elde edilebilir. Bu yaklaşım formülleri kullanılarak (3.20) problemi aşağıdaki sonlu farklar şemasıyla değiştirilebilir

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M-1, \\ u_j^0 = \phi(x_j), \quad 0 \leq j \leq M, \\ u_0^n = u_M^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \tau = \dfrac{T}{N}, \quad h = \dfrac{l}{M}, \quad x_j = jh, \quad 0 \leq j \leq M, \quad t_n = n\tau, \quad 0 \leq n \leq N. \end{cases} \tag{3.21}$$

Burada u_j^n, (3.20) probleminin $u(x,t)$ çözümünün, $t = t_n$ ve $x = x_j$ değerleri için nümerik bir yaklaşımıdır. (3.21) sonlu farklar semasına zamanda ileri konumda merkezi fark yöntemi denir. Türevler için farklı yaklaşım yöntemleri kullanılarak daha değişik şemalar da elde edilebilir.

3.5 BAZI TEMEL KAVRAMLAR

$u(x,t)$, bir boyutlu bir diferansiyel denkleminin $D = \{(x,t) \mid 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ bölgesinde tanımlı gerçek çözümü olsun. M bir pozitif tamsayı olmak üzere, $h = \dfrac{l-0}{M}$ şeklinde x konuma göre adım uzunluğunu tanımlayalım. N bir pozitif tamsayı olmak üzere, $\tau = \dfrac{T-0}{N}$ şeklinde t zamana göre adım uzunluğunu belirtsin. Buna göre, D bölgesinin parçalanışı $x_j = jh,\ j = 0,1,2,\ldots,M$ ve $t_n = n\tau,\ \ n = 0,1,2,\ldots,N$ şeklinde olsun.

3.5.1 Tutarlılık

u_j^n, diferansiyel denklemin $u(x,t)$ gerçek çözümünün, $x = x_j$ ve $t = t_n$ değerleri için nümerik bir yaklaşımı olsun. Yani u_j^n, sonlu fark şemasının gerçek çözümü olsun. Tüm j ve n değerleri için,

$$\lim_{h,\tau\to 0}\left|u(x_j,\ t_n) - u_j^n\right| = 0$$

ise sonlu fark şemasına **tutarlıdır** denir [12].

3.5.2 Kararlılık

Bir kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümünü bulmak için kullandığımız sonlu fark şemasının bilgisayar kullanılarak bulunan yaklaşık çözümü, bu şemanın gerçek çözümüne yakınsıyorsa o şema kararlıdır [12]. Başka bir deyişle u_j^n sonlu fark şemasının gerçek çözümü, $\tilde{u}_j^n$ ise bu şemanın bilgisayar kullanılarak bulunan yaklaşık çözümü olmak üzere tüm j ve n değerleri için;

$$\lim_{h,\tau\to 0}\left|u_j^n - \tilde{u}_j^n\right| = 0$$

ise sonlu fark şeması **kararlıdır**.

Nümerik şemaların kararlılık analizini incelemek için biz bu tezde Von Neumann kararlılık analizini ele alacağız.

3.5.3 Yakınsaklık

$\tilde{u}_j^n$ diferansiyel denklemin nümerik çözümünü bulmak için kullandığımız sonlu fark şemasının bilgisayar tarafından hesaplanan yaklaşık çözümü olmak üzere tüm j ve n değerleri için;

$$\lim_{h,\tau\to 0}\left|u(x_j,\ t_n)-\tilde{u}_j^n\right|=0$$

ise sonlu fark şeması **yakınsaktır** [12].

Teorem 8. ***(Lax'ın Teoremi)*** *Sonlu fark yaklaşım metodunun yakınsak olması için gerek ve yeter koşul metodun kararlı ve tutarlı olmasıdır [12].*

3.5.4 Von Neumann Kararlılık Analizi

Von Neuman kararlılık analizi, sonlu fark şemalarının kararlı mı yoksa kararsız mı olduğunu incelemek için en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin temeli Fourier seri açılımına dayandığından bu yönteme Fourier Seri yöntemi de denir. Von Neumann kararlılık analizi sabit katsayılı doğrusal (lineer) diferansiyel denklemlere uygulanır [15]. Dolayısıyla, bu yöntemi kullanmak için doğrusal olmayan (nonlineer) diferansiyel denklemleri önce lineerleştirmek gerekir.

Lineer bir kısmi diferansiyel denklemde sonlu fark şemalarının kararlığı; u_j^n yerine $\lambda^n e^{ikx_j}$, $(i = \sqrt{-1})$ dönüşümü yapılıp, j ve n'nin her bir değeri için en sonunda elde edilen denklemin çözülmesiyle belirlenir. Buradaki λ'ya nümerik şemanın amplifikasyon faktörü denir. Nümerik şemaların kararlılığını aslında amplifikasyon faktörünün büyüklüğü belirler. $|\lambda| \leq 1$ ise nümerik şema kararlı, $|\lambda| > 1$ ise kararsızdır [6].

3.6 VON NEUMANN POLİNOMU

Tanım 1. *$a_0 \neq 0$ ve $a_n \neq 0$ olmak üzere kompleks katsayılı n.dereceden*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

polinomu verilsin. Eğer $f(z)$ polinomunun tüm kökleri birim çemberin içinde veya üzerindeyse bu polinoma von Neumann polinomu denir [10].

Tanım 2. *n.dereceden kompleks katsayılı bir*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{3.22}$$

polinomu için

$$f^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \cdots + \bar{a}_0 z^n \tag{3.23}$$

olmak üzere, $(n-1)$. dereceye indirgenmiş bir

$$f_1(z) = \frac{f^*(0)f(z) - f(0)f^*(z)}{z} \tag{3.24}$$

polinomu tanımlabilir [10].

Teorem 9. *[10] $f(z)$ polinomunun bir von Neumann polinomu olması için yeterli ve gerekli şartlar $|f^*(0)| > |f(0)|$ ve $f_1(z)$ polinomunun von Neumann polinomu olmasıdır.*

4. NÜMERIK ŞEMALAR VE KARARLILIK ANALIZI

Bu bölümde

$$u_t + au_x = du_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \tag{4.1}$$

bir boyutlu adveksiyon difüzyon denklemi için sonlu farklar yöntemiyle elde edilen çeşitli şemaları ve bu şemaların kararlılık analizini inceleyeceğiz. Bu incelemelerin sonunda hangi yöntemin hangi koşullar altında kararlı olduğuna, başka bir deyişle hangi yöntemin denklemin gerçek çözümüne yakınsayacak sonuçlar verdiğine karar vereceğiz.
M bir pozitif tamsayı olmak üzere, $h = \dfrac{l-0}{M}$ sayısını tanımlayalım. Bu durumda, $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, M$ olmak üzere $[0, l]$ aralığının parçalanışı olsun. Aynı şekilde, N bir pozitif tamsayı olmak üzere, $\tau = \dfrac{T-0}{N}$ sayısını tanımlayalım. Bu durumda, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots, T$ olmak üzere $[0, T]$ aralığının parçalanışı olsun. Burada u_j^n ise (4.1) denkleminin $u(x,t)$ çözümünün, $t = t_n$ ve $x = x_j$ değerleri için nümerik bir yaklaşımı olarak tanımlanır.

4.1 ZAMANDA İLERİ UZAMSAL MERKEZİ ŞEMA

(3.8) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_t(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + O(\tau)$$

elde edilebilir. (3.10) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_x(x_j, t_n) = \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} + O(h^2)$$

elde edilebilir. (3.16) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_{xx}(x_j,t_n)=\frac{u(x_{j-1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j+1},t_n)}{h^2}+O(h^2)$$

elde edilebilir. τ ve h sayıları yeteri kadar küçük olmak üzere, bu yaklaşım formülleri kullanılarak (4.1) denklemi aşağıdaki şema ile değiştirilebilir,

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\cdot\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=d\cdot\frac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}. \tag{4.2}$$

(4.2) şeması bundan sonra Zamanda İleri Uzamsal Merkezi (ZİUM) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 12. *(4.2) ZİUM şemasının kesim hatası $O(\tau+h^2)$'dir.*

Teorem 10. *Eğer*

$$\tau\leq\min\left\{\frac{2d}{a^2},\frac{h^2}{2d}\right\} \tag{4.3}$$

koşulu sağlanıyor ise (4.2) ZİUM şeması (4.1) denklemi için kararlıdır.

İspat: (4.2) ZİUM şeması

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\tau a}{2h}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)+\frac{\tau d}{h^2}\left(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n=\lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\lambda^{n+1}e^{ikx_j}=\lambda^n e^{ikx_j}-\frac{\tau a}{2h}\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}\right)+\frac{\tau d}{h^2}\lambda^n\left(e^{ikx_{j-1}}-2e^{ikx_j}+e^{ikx_{j+1}}\right)$$

veya

$$\lambda^{n+1}e^{ikjh}=\lambda^n e^{ikjh}-\frac{\tau a}{2h}\lambda^n\left(e^{ik(j+1)h}-e^{ik(j-1)h}\right)+\frac{\tau d}{h^2}\lambda^n\left(e^{ik(j-1)h}-2e^{ikjh}+e^{ik(j+1)h}\right)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\lambda = 1 - \frac{\tau a}{2h}(e^{ikh} - e^{-ikh}) + \frac{\tau d}{h^2}(e^{-ikh} - 2 + e^{ikh})$$

bulunur. Buradan

$$e^{\pm ikh} = \cos(kh) \pm i \sin(kh) \tag{4.4}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda = 1 - \frac{2\tau d}{h^2}\big(1 - \cos(kh)\big) - i\frac{\tau a}{h}\sin(kh)$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 &= \left(1 - \frac{2\tau d}{h^2}\big(1 - \cos(kh)\big)\right)^2 + \left(\frac{\tau a}{h}\sin(kh)\right)^2 \\
&= 1 - \frac{4\tau d}{h^2}\big(1 - \cos(kh)\big) + \frac{4\tau^2 d^2}{h^4}\big(1 - \cos(kh)\big)^2 + \frac{\tau^2 a^2}{h^2}\sin^2(kh)
\end{aligned}$$

olur. Burada ZİUM şeması (4.3) koşulunu sağladığı sürece,

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 &= 1 + \frac{4\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\left(\frac{\tau d}{h^2}\big(1 - \cos(kh)\big) + \frac{\tau a^2}{4d}\big(1 + \cos(kh)\big) - 1\right) \\
&\leq 1 + \frac{4\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\left(\frac{1}{2}\big(1 - \cos(kh)\big) + \frac{1}{2}\big(1 + \cos(kh)\big) - 1\right) = 1
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla tüm k değerleri için $|\lambda| \leq 1$ olur. Sonuç olarak (4.2) ZİUM şeması, (4.3) koşulunu sağladığı sürece kararlıdır. Yani, koşullu kararlıdır.

4.2 ZAMANDA GERİ UZAMSAL MERKEZİ ŞEMA

(3.9) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_t(x_j,t_{n+1}) = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\tau} + O(\tau)$$

elde edilebilir. (3.10) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_x(x_j,t_{n+1}) = \frac{u(x_{j+1},t_{n+1}) - u(x_{j-1},t_{n+1})}{2h} + O(h^2)$$

elde edilebilir. (3.16) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_{xx}(x_j,t_{n+1}) = \frac{u(x_{j-1},t_{n+1}) - 2u(x_j,t_{n+1}) + u(x_{j+1},t_{n+1})}{h^2} + O(h^2)$$

elde edilebilir. τ ve h sayıları yeteri kadar küçük olmak üzere, bu yaklaşım formülleri kullanılarak (4.1) denklemi aşağıdaki şema ile değiştirilebilir,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = d \cdot \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2}. \tag{4.5}$$

(4.5) şeması bundan sonra Zamanda Geri Uzamsal Merkezi (ZGUM) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 13. *(4.5) ZGUM şemanın kesim hatası $O(\tau + h^2)$'dir.*

Teorem 11. *(4.5) ZGUM şeması (4.1) denklemi için koşulsuz kararlıdır.*

İspat: (4.5) ZGUM şeması

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau a}{2h}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right) + \frac{\tau d}{h^2}\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\lambda^{n+1}e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - \frac{\tau a}{2h}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}\right) + \frac{\tau d}{h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j-1}} - 2e^{ikx_j} + e^{ikx_{j+1}}\right)$$

veya

$$\lambda^{n+1}e^{ikjh} = \lambda^n e^{ikjh} - \frac{\tau a}{2h}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right) + \frac{\tau d}{h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j-1)h} - 2e^{ikjh} + e^{ik(j+1)h}\right)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\lambda = 1 - \frac{\tau a}{2h}\lambda(e^{ikh} - e^{-ikh}) + \frac{\tau d}{h^2}\lambda(e^{-ikh} - 2 + e^{ikh})$$

bulunur. Buradan (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda = 1 - i\frac{\tau a}{h}\lambda \sin(kh) - \frac{2\tau d}{h^2}\lambda\Big(1 - \cos(kh)\Big)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda\left[1 + i\frac{\tau a}{h}\sin(kh) + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\right] = 1$$

veya

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big) + i\frac{\tau a}{h^2}\sin(kh)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right|^2 = \left(1 + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\right)^2 + \left(\frac{\tau a}{h^2}\sin(kh)\right)^2 \geq 1$$

elde edilir. Buna göre $|\lambda| \leq 1$ eşitsizliği tüm k değerleri icin sağlanmış olur. Dolayısıyla (4.5) ZGUM şeması koşulsuz kararlıdır.

4.3 LEAP-FROG ŞEMA

(3.10) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_t(x_j,t_n) = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1})}{2\tau} + O(\tau^2)$$

elde edilebilir. Yine (3.10) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_x(x_j,t_n) = \frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2h} + O(h^2)$$

elde edilebilir. (3.16) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_{xx}(x_j,t_n) = \frac{u(x_{j-1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j+1},t_n)}{h^2} + O(h^2)$$

elde edilebilir. τ ve h sayıları yeteri kadar küçük olmak üzere, bu yaklaşım formülleri kullanılarak (4.1) denklemi aşağıdaki şema ile değiştirilebilir,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = d \cdot \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}. \tag{4.6}$$

(4.6) şeması bundan sonra Leap-Frog (LF) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 14. *(4.6) LF şemanın kesim hatası $O(\tau^2 + h^2)$'dir.*

Teorem 12. *(4.6) LF şeması (4.1) denklemi için kararsızdır.*

İspat: (4.6) LF şeması

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\tau a}{h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{2\tau d}{h^2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\lambda^{n+1}e^{ikx_j} = \lambda^{n-1}e^{ikx_j} - \frac{\tau a}{h}\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}\right) + \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^n\left(e^{ikx_{j-1}} - 2e^{ikx_j} + e^{ikx_{j+1}}\right)$$

veya

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{ikjh} &= \lambda^{n-1}e^{ikjh} - \frac{\tau a}{h}\lambda^n\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right)\\ &\quad + \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^n\left(e^{ik(j-1)h} - 2e^{ikjh} + e^{ik(j+1)h}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\lambda^2 = 1 - \frac{\tau a}{h}\lambda(e^{ikh} - e^{-ikh}) + \frac{2\tau d}{h^2}\lambda(e^{-ikh} - 2 + e^{ikh})$$

bulunur. Buradan (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda^2 = 1 - i\frac{2\tau a}{h}\lambda \sin(kh) - \lambda\frac{4\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)$$

veya

$$\lambda^2 + \left(\frac{4\tau d}{h^2}\big(1 - \cos(kh)\big) + i\frac{2\tau a}{h}\sin(kh)\right)\lambda - 1 = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir.

$$\alpha = \frac{4\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{2\tau a}{h}\sin(kh)$$

olmak üzere

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha + i\beta)\lambda - 1$$

polinomunu ele alalım. Bu polinom için (3.23) eşitliğine göre

$$f^*(\lambda) = -\lambda^2 + (\alpha - i\beta)\lambda + 1$$

olur. O zaman, $|f^*(0)| = |f(0)| = 1$'dir. Bu durumda, Teorem 9'a göre $f(z)$ bir Von

Neumann polinomu değildir. Bu nedenle (4.7) denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 ise $|\lambda_1| > 1$ veya $|\lambda_2| > 1$ olur. Sonuç olarak, (4.6) LF şeması kararsızdır.

4.4 CRANK-NİCOLSON ŞEMA

(4.2) ZİUM ve (4.5) ZGUM şemalarını taraf tarafa toplayıp 2'ye böldüğümüzde aşağıdaki şema

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}\right)$$
$$=\frac{d}{2}\left(\frac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{h^2}\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) şeması bundan sonra Crank-Nicolson (CN) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 15. *(4.2) ZİUM ve (4.5) ZGUM şemaların her ikisinin de kesim hatası $O(\tau+h^2)$ olmasına rağmen, (4.8) CN şemanın kesim hatası $O(\tau^2+h^2)$ olduğu gösterilebilir.*

Teorem 13. *(4.8) CN şeması (4.1) denklemi için koşulsuz kararlıdır.*

İspat: (4.8) CN şeması

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\tau a}{4h}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n+u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\frac{\tau d}{2h^2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n+u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n=\lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\lambda^{n+1}e^{ikx_j}=\lambda^n e^{ikx_j}-\frac{\tau a}{4h}\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}\right)-\frac{\tau a}{4h}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j+1}}-e^{ikx_{j-1}}\right)$$
$$+\frac{\tau d}{2h^2}\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}}-2e^{ikx_j}+e^{ikx_{j-1}}\right)+\frac{\tau d}{2h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j+1}}-2e^{ikx_j}+e^{ikx_{j-1}}\right)$$

veya

$$\lambda^{n+1}e^{ikjh} = \lambda^{n}e^{ikjh} - \frac{\tau a}{4h}\lambda^{n}\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right) - \frac{\tau a}{4h}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right)$$
$$+ \frac{\tau d}{2h^2}\lambda^{n}\left(e^{ik(j+1)h} - 2e^{ikjh} + e^{ik(j-1)h}\right) + \frac{\tau d}{2h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j+1)h} - 2e^{ikjh} + e^{ik(j-1)h}\right)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\lambda = 1 - \frac{\tau a}{4h}\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right) - \frac{\tau a}{4h}\lambda\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right) + \frac{\tau d}{2h^2}\left(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}\right) + \frac{\tau d}{2h^2}\lambda\left(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}\right)$$

bulunur. Buradan (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda = 1 - i\frac{\tau a}{2h}\sin(kh) - i\lambda\frac{\tau a}{2h}\sin(kh) - \frac{\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big) - \lambda\frac{\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda = \frac{1 - \frac{\tau d}{h^2}\left(1 - \cos(kh)\right) - i\frac{\tau a}{2h}\sin(kh)}{1 + \frac{\tau d}{h^2}\left(1 - \cos(kh)\right) + i\frac{\tau a}{2h}\sin(kh)}$$

olarak bulunur. O zaman

$$|\lambda|^2 = \frac{\left(1 - \frac{\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\right)^2 + \left(\frac{\tau a}{2h}\sin(kh)\right)^2}{\left(1 + \frac{\tau d}{h^2}\Big(1 - \cos(kh)\Big)\right)^2 + \left(\frac{\tau a}{2h}\sin(kh)\right)^2} \leq 1$$

elde edilir. Buna göre $|\lambda| \leq 1$ eşitsizliği tüm k değerleri icin sağlanmış olur. Dolayısıyla (4.8) CN şeması koşulsuz kararlıdır.

4.5 MODİFİYE EDİLMİŞ ZAMANDA GERİ UZAMSAL MERKEZİ ŞEMA

(3.12) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_t(x_j, t_{n+1}) = \frac{3u(x_j, t_{n+1}) - 4u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1})}{2\tau} + O(\tau^2)$$

elde edilebilir. Yine (3.10) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_x(x_j, t_{n+1}) = \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - u(x_{j-1}, t_{n+1})}{2h} + O(h^2)$$

elde edilebilir. (3.16) yaklaşım formülünü kullanarak,

$$u_{xx}(x_j, t_{n+1}) = \frac{u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j+1}, t_{n+1})}{h^2} + O(h^2)$$

elde edilebilir. τ ve h sayıları yeteri kadar küçük olmak üzere, bu yaklaşım formülleri kullanılarak (4.1) denklemi aşağıdaki şema ile değiştirilebilir,

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} + a \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = d \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}. \tag{4.9}$$

(4.9) şeması bundan sonra Modifiye edilmiş Zamanda Geri Uzamsal Merkezi (MZGUM) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 16. *(4.9) MZGUM şemanın kesim hatası $O(\tau^2 + h^2)$'dir.*

Teorem 14. *(4.9) MZGUM şeması (4.1) denklemi için koşulsuz kararlıdır.*

İspat: (4.9) MZGUM şeması

$$3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1} + \frac{\tau a}{h}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = \frac{2\tau d}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}3\lambda^{n+1}e^{ikx_j} - 4\lambda^n e^{ikx_j} + \lambda^{n-1}e^{ikx_j} + \frac{\tau a}{h}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}\right)\\ = \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_j} + e^{ikx_{j-1}}\right)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}3\lambda^{n+1}e^{ikjh} - 4\lambda^n e^{ikjh} + \lambda^{n-1}e^{ikjh} + \frac{\tau a}{h}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right)\\ = \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^{n+1}\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ikjh} + e^{ik(j-1)h}\right)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 + \frac{\tau a}{h}\lambda^2\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right) = \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^2\left(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 + i\lambda^2\frac{2\tau a}{h}\left(\sin(kh)\right) = -\lambda^2\frac{4\tau d}{h^2}\left(1 - \cos(kh)\right)$$

veya

$$\left(3 + \frac{4\tau d}{h^2}\left(1 - \cos(kh)\right) + i\frac{2\tau a}{h}\sin(kh)\right)\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \tag{4.10}$$

bulunur.

$$\alpha = \frac{4\tau d}{h^2}\left(1 - \cos(kh)\right) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{2\tau a}{h}\sin(kh)$$

olmak üzere

$$f(\lambda) = (3 + \alpha + i\beta)\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

polinomunu ele alalım. Bu polinom için (3.23) eşitliğine göre

$$f^*(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + (3 + \alpha - i\beta)$$

bulunur.

$$f(0) = 1 \quad \text{ve} \quad f^*(0) = 3 + \alpha - i\beta$$

olduğuna göre

$$|f^*(0)| = \sqrt{(3+\alpha)^2 + \beta^2} > |f(0)|$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.24) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{f^*(0)f(\lambda) - f(0)f^*(\lambda)}{\lambda} \\ &= \frac{(3+\alpha-i\beta)\Big((3+\alpha+i\beta)\lambda^2 - 4\lambda + 1\Big) - \Big(\lambda^2 - 4\lambda + (3+\alpha-i\beta)\Big)}{\lambda} \\ &= \Big((3+\alpha)^2 + \beta^2 - 1\Big)\lambda - 4\Big(2+\alpha-i\beta\Big) \end{aligned}$$

olur. Elde ettiğimiz $f_1(\lambda)$ polinomunun tek kökü $\lambda = \dfrac{4(2+\alpha-i\beta)}{(3+\alpha)^2+\beta^2-1}$'dır ve bunun için

$$|\lambda| = \frac{4\sqrt{(2+\alpha)^2+\beta^2}}{8+6\alpha+\alpha^2+\beta^2} = \frac{4\sqrt{(2+\alpha)^2+\beta^2}}{(2+\alpha)^2+\beta^2+4+2\alpha} \le 1$$

olduğu görülür. Yani $f_1(\lambda)$ bir Von Neumann polinomudur. O zaman Teorem 9'a göre $f(\lambda)$ da bir Von Neumann polinomudur. Böylece (4.10) denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 ise tüm k değerleri için $|\lambda_1| \le 1$ ve $|\lambda_2| \le 1$ olur. Dolayısıyla (4.9) MZGUM şeması koşulsuz kararlıdır.

4.6 DUFORT-FRANKEL ŞEMA

Önceden incelediğimiz

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = d \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

LF şemanın kararsız olduğunu görmüştük. Yeteri kadar küçük τ için,

$$u(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) + u(x_j, t_{n-1})}{2} + O(\tau^2)$$

yaklaşım formülünü kullanarak, LF şema aşağıdaki şema ile değiştirilebilir

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = d \cdot \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{4.11}$$

(4.11) şeması bundan sonra Dufort-Frankel (DF) şema olarak adlandırılacaktır.

Not 17. *(4.11) DF şemanın kesim hatası $O(\tau^2 + h^2)$'dir.*

Teorem 15. *Eğer*

$$\tau \leq \frac{h}{a} \tag{4.12}$$

koşulu sağlanıyor ise (4.11) DF şeması (4.1) denklemi için kararlıdır.

İspat: (4.11) DF şeması

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\tau a}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n\Big)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{ikx_j} &= \lambda^{n-1}e^{ikx_j} - \frac{\tau a}{h}\lambda^n\left(e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}\right)\\ &\quad + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(\lambda^n e^{ikx_{j+1}} - (\lambda^{n+1}e^{ikx_j} + \lambda^{n-1}e^{ikx_j}) + \lambda^n e^{ikx_{j-1}}\Big)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{ikjh} &= \lambda^{n-1}e^{ikjh} - \frac{\tau a}{h}\lambda^n\left(e^{ik(j+1)h} - e^{ik(j-1)h}\right)\\ &\quad + \frac{2\tau d}{h^2}\Big(\lambda^n e^{ik(j+1)h} - (\lambda^{n+1}e^{ikjh} + \lambda^{n-1}e^{ikjh}) + \lambda^n e^{ik(j-1)h}\Big)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\lambda^2 = 1 - \frac{\tau a}{h}\lambda(e^{ikh} - e^{-ikh}) + \frac{2\tau d}{h^2}\lambda(e^{ikh} + e^{-ikh}) - \frac{2\tau d}{h^2}(\lambda^2 + 1)$$

bulunur. Buradan (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda^2 = 1 - i\frac{2\tau a}{h}\lambda \sin(kh) + \frac{4\tau d}{h^2}\lambda \cos(kh) - \frac{2\tau d}{h^2} - \frac{2\tau d}{h^2}\lambda^2$$

veya

$$\left(1 + \frac{2\tau d}{h^2}\right)\lambda^2 - \left(\frac{4\tau d}{h^2}\cos(kh) - i\frac{2\tau a}{h}\sin(kh)\right)\lambda + \frac{2\tau d}{h^2} - 1 = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir.

$$\alpha = \frac{\tau a}{h} > 0 \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{2\tau d}{h^2} > 0$$

olmak üzere

$$f(\lambda) = (1 + \beta)\lambda^2 - 2\Big(\beta\cos(kh) - i\alpha\sin(kh)\Big)\lambda + \beta - 1$$

polinomunu ele alalım. Bu polinom için (3.23) eşitliğine göre

$$f^*(\lambda) = (\beta - 1)\lambda^2 - 2\Big(\beta\cos(kh) + i\alpha\sin(kh)\Big)\lambda + 1 + \beta$$

bulunur. Buradan,

$$|f^*(0)| = \beta + 1 > \beta - 1 = |f(0)|$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.24) eşitliğine göre

$$f_1(\lambda) = \frac{f^*(0)f(\lambda) - f(0)f^*(\lambda)}{\lambda} = 4\beta\lambda - 4\beta\cos(kh) + 4i\beta\alpha\sin(kh)$$

elde edilir. Elde ettiğimiz $f_1(\lambda)$ polinomunun tek kökü

$$\lambda = \cos(kh) - i\alpha \sin(kh) \text{ 'dir}$$

ve (4.12) koşulu sağlandığı sürece bu kök için,

$$|\lambda| = \cos^2(kh) + \alpha^2 \sin^2(kh) = \cos^2(kh) + \frac{\tau^2 a^2}{h^2} \sin^2(kh) \leq 1$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.12) koşulu sağlandığı sürece $f_1(\lambda)$ bir Von Neumann polinomudur. O zaman Teorem 9'a göre $f(\lambda)$ da bir Von Neumann polinomudur. Bu nedenle (4.13) denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 ise tüm k değerleri için $|\lambda_1| \leq 1$ ve $|\lambda_2| \leq 1$ olur. Sonuç olarak (4.11) DF şeması, (4.13) koşulunu sağladığı sürece kararlıdır. Yani, koşullu kararlıdır.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde, yukarıda anlattığımız sonlu fark şemalarını iki farklı örnek üzerinde uygulayacağız. Bu uygulamalar sonucunda hangi şemanın bu örnekler için daha iyi sonuçlar verdiğini inceleyeceğiz.

5.1 PERİYODİK SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

İlk olarak

$$\begin{cases} u_t + au_x = du_{xx}, & 0 < x < 2,\ 0 < t < 0.5, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 2, \\ u(0,t) = u(2,t), & 0 \leq t \leq 0.5, \\ u_x(0,t) = u_x(2,t), & 0 \leq t \leq 0.5 \end{cases} \tag{5.1}$$

başlangıç-sınır-değer adveksiyon difüzyon problemini ele alalım. Buradaki a ve d pozitif sabitlerdir. (5.1) probleminin gerçek çözümü

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 dt} \sin\big(\pi(x - at)\big), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$

dür. M bir pozitif tamsayı olmak üzere, $h = \dfrac{2}{M}$ ve $x_j = jh,\ j = 0, 1, 2, \ldots, M$ şeklinde $[0, 2]$ aralığının parçalanışını ele alalım. Aynı şekilde, N pozitif tamsayısı için $\tau = \dfrac{0.5}{N}$ ve $t_n = n\tau,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$ şeklinde $[0, 0.5]$ aralığının parçalanışı olsun. u_j^n, (5.1) probleminin $u(x,t)$ çözümünün, $t = t_n$ ve $x = x_j$ değerleri için nümerik bir yaklaşımı olmak üzere aşağıdaki vektörleri tanımlayalım

$$\mathrm{U}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{bmatrix}, \qquad \phi = \mathrm{U}^0 = \begin{bmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \vdots \\ \sin(\pi x_{M-1}) \\ \sin(\pi x_M) \end{bmatrix}.$$

Nümerik çözümlerin hata ölçümünü ise

$$\|E\|_\infty = \max_{1\le n\le N,\ 1\le j\le M} \left| u(t_n, x_j) - u_j^n \right| \tag{5.2}$$

olarak tanımlayalım.

5.1.1 Zamanda İleri Uzamsal Merkezi Yöntem

(4.2) ZİUM şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = d\dfrac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}, \quad 0 \le n < N,\ 1 \le j < M, \\ u_j^0 = \sin(\pi x_j), \quad 0 \le j \le M, \\ u_0^n = u_M^n, \quad 0 \le n \le N, \\ -3u_0^n + 4u_1^n - u_2^n = 3u_M^n - 4u_{M-1}^n + u_{M-2}^n, \quad 0 \le n \le N. \end{cases} \tag{5.3}$$

(5.3) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} A\mathrm{U}^{n+1} = B\mathrm{U}^n, \quad 0 \le n < N, \\ \mathrm{U}^0 = \phi. \end{cases} \tag{5.4}$$

Burada, $\alpha = \dfrac{\tau a}{2h}$ ve $\beta = \dfrac{\tau d}{h^2}$ olmak üzere A ve B matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta+\alpha \\ \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.4) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.2)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1: (5.1) problemi için (5.3) şemasının hataları

M	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe
10	1.62e-002	-
20	3.61e-003	2.171
40	7.21e-004	2.322
80	2.85e-005	4.662

Not 18. *$M = 160$ değeri için (5.4) şemasının kararsız olduğu gözlenlenmiştir. Bu sonuç (4.3) koşulunu desteklemektedir.*

5.1.2 Zamanda Geri Uzamsal Merkezi Yöntem

(4.5) ZGUM şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=d\dfrac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{h^2}, \;\; 0\le n<N,\; 1\le j<M, \\ u_j^0=\sin(\pi x_j), \;\; 0\le j\le M, \\ u_0^n=u_M^n, \;\; 0\le n\le N, \\ -3u_0^n+4u_1^n-u_2^n=3u_M^n-4u_{M-1}^n+u_{M-2}^n, \;\; 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.5}$$

(5.5) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} A\mathrm{U}^{n+1}=B\mathrm{U}^n, \;\; 0\le n<N, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.6}$$

Burada, $\alpha=\dfrac{\tau a}{2h}$ ve $\beta=\dfrac{\tau d}{h^2}$ olmak üzere A ve B matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A=\begin{bmatrix} 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha-\beta \\ -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.6) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları (5.2)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.2: (5.1) problemi için (5.5) şemasının hataları

M	$\|\|Hata\|\|_\infty$	Mertebe
10	1.66e-002	-
20	4.00e-003	2.054
40	1.12e-003	1.837
80	4.27e-004	1.393

5.1.3 Crank-Nicolson Yöntemi

(4.8) CN şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}\right) \\ \quad =\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{h^2}\right),\ 0\le n<N,\ 1\le j<M, \\ u_j^0=\sin(\pi x_j),\ \ 0\le j\le M, \\ u_0^n=u_M^n,\ \ 0\le n\le N, \\ -3u_0^n+4u_1^n-u_2^n=3u_M^n-4u_{M-1}^n+u_{M-2}^n,\ \ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.7}$$

(5.7) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} A\mathrm{U}^{n+1}=B\mathrm{U}^n,\ \ 0\le n<N, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.8}$$

Burada $\alpha=\dfrac{\tau a}{4h}$ ve $\beta=\dfrac{\tau d}{2h^2}$ olmak üzere A ve B matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A=\begin{bmatrix} 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha-\beta \\ -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta+\alpha \\ \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.8) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları (5.2)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.3'te verilmiştir.

Tablo 5.3: **(5.1) problemi için (5.7) şemasının hataları**

M	$\|\|Hata\|\|_\infty$	Mertebe
10	1.64e-002	-
20	3.80e-003	2.111
40	9.21e-004	2.047
80	2.27e-004	2.020

5.1.4 Modifiye Edilmiş Zamanda Geri Uzamsal Merkezi Yöntem

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.9) MZGUM şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} + a\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = d\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \ 1 \le n < N, \ 1 \le j < M, \\ \dfrac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} + \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} + \dfrac{u_{j+1}^1 - u_{j-1}^1}{2h}\right) \\ \qquad = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0}{h^2} + \dfrac{u_{j-1}^1 - 2u_j^1 + u_{j+1}^1}{h^2}\right), \ 1 \le j < M, \\ u_j^0 = \sin(\pi x_j), \ \ 0 \le j \le M, \\ u_0^n = u_M^n, \ \ 0 \le n \le N, \\ -3u_0^n + 4u_1^n - u_2^n = 3u_M^n - 4u_{M-1}^n + u_{M-2}^n, \ \ 0 \le n \le N. \end{cases} \tag{5.11}$$

(5.11) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} C\mathrm{U}^{n+1} = D\mathrm{U}^n + E\mathrm{U}^{n-1}, \ \ 1 \le n < N, \\ A\mathrm{U}^1 = B\mathrm{U}^0, \\ \mathrm{U}^0 = \phi. \end{cases} \tag{5.12}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.9) ve (5.10) şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\alpha = \dfrac{\tau a}{h}$ ve $\beta = \dfrac{2\tau d}{h^2}$ olmak üzere C, D ve E matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 3+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha-\beta \\ -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.12) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları (5.2)'e göre bulunmuştur ve

Tablo 5.4'te verilmiştir.

Tablo 5.4: (5.1) problemi için (5.11) şemasının hataları

M	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe
10	1.64e-002	-
20	3.80e-003	2.111
40	9.21e-004	2.047
80	2.27e-004	2.020

5.1.5 Dufort-Frankel Yöntemi

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.11) DF şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+a\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=d\dfrac{u_{j+1}^n-(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})+u_{j-1}^n}{h^2},\ 1\le n<N,\ 1\le j<M, \\ \dfrac{u_j^1-u_j^0}{\tau}+\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{u_{j+1}^0-u_{j-1}^0}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^1-u_{j-1}^1}{2h}\right) \\ \qquad =\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{u_{j-1}^0-2u_j^0+u_{j+1}^0}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^1-2u_j^1+u_{j+1}^1}{h^2}\right),\ 1\le j<M, \\ u_j^0=\sin(\pi x_j),\ \ 0\le j\le M, \\ u_0^n=u_M^n,\ \ 0\le n\le N, \\ -3u_0^n+4u_1^n-u_2^n=3u_M^n-4u_{M-1}^n+u_{M-2}^n,\ \ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.13}$$

(5.13) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} CU^{n+1}=DU^n+EU^{n-1},\ \ 1\le n<N, \\ AU^1=BU^0, \\ U^0=\phi. \end{cases} \tag{5.14}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.9) ve (5.10) şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\alpha = \dfrac{\tau a}{h}$ ve $\beta = \dfrac{2\tau d}{h^2}$ olmak üzere C, D ve E matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+\beta & 0 \\ -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha+\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & 0 & -\alpha+\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 0 & -\alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & 0 & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.14) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları (5.2)'e göre bulunmuştur ve

Tablo 5.5'te verilmiştir.

Tablo 5.5: (5.1) problemi için (5.13) şemasının hataları

M	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe
10	1.64e-002	-
20	3.80e-003	2.112
40	9.05e-004	2.070
80	1.63e-004	2.470

5.1.6 Leap-Frog Yöntemi

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.6) LF şemasını kullanarak (5.1) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+a\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=d\dfrac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}, \quad 1\le n<N,\ 1\le j<M, \\ \dfrac{u_j^1-u_j^0}{\tau}+\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{u_{j+1}^0-u_{j-1}^0}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^1-u_{j-1}^1}{2h}\right) \\ \qquad =\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{u_{j-1}^0-2u_j^0+u_{j+1}^0}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^1-2u_j^1+u_{j+1}^1}{h^2}\right), \ 1\le j<M, \\ u_j^0=\sin(\pi x_j),\ 0\le j\le M, \\ u_0^n=u_M^n,\ 0\le n\le N, \\ -3u_0^n+4u_1^n-u_2^n=3u_M^n-4u_{M-1}^n+u_{M-2}^n,\ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.15}$$

(5.15) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} CU^{n+1}=DU^n+EU^{n-1},\ \ 1\le n<N, \\ AU^1=BU^0, \\ U^0=\phi. \end{cases} \tag{5.16}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.9) ve (5.10) şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\alpha = \dfrac{\tau a}{h}$ ve $\beta = \dfrac{2\tau d}{h^2}$ olmak üzere C, D ve E matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2\beta & -\alpha+\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2\beta & -\alpha+\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & -2\beta & -\alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & -2\beta & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = d = 1$ ve $\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, $M = 10, 20, 40, 80$ değerleri için (5.16) şemasının kararsız olduğu gözlenlenmiştir. Bu sonuçlar LF şemanın kararsız olduğunu desteklemektedir.

5.2 DİRİCHLET SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Şimdi,

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0.01 u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < 1, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = g_0(t), \quad 0 \le t \le 1, \\ u(1,t) = g_1(t), \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.17}$$

başlangıç-sınır-değer adveksiyon difüzyon problemini ele alalım. Burada

$$f(x) = \exp\left(-\frac{(x+0.5)^2}{0.00125}\right), \quad g_0(t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625+0.02t}} \exp\left(-\frac{(0.5-t)^2}{0.00125+0.04t}\right)$$

$$g_1(t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625+0.02t}} \exp\left(-\frac{(1.5-t)^2}{0.00125+0.04t}\right)$$

olsun. (5.17) probleminin gerçek çözümü

$$u(x,t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625+0.02t}} \exp\left(-\frac{(x+0.5-t)^2}{0.00125+0.04t}\right), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1$$

dür [4]. M bir pozitif tamsayı olmak üzere, $h = \dfrac{1}{M}$ ve $x_j = jh,\ j = 0,1,2,\ldots,M$ şeklinde $[0,1]$ aralığının parçalanışını ele alalım. Aynı şekilde, N pozitif tamsayısı için $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve $t_n = n\tau,\ n = 0,1,2,\ldots,N$ şeklinde $[0,1]$ aralığının parçalanışı olsun. u_j^n, (5.17) probleminin $u(x,t)$ çözümünün, $t = t_n$ ve $x = x_j$ değerleri için nümerik bir yaklaşımı olmak üzere aşağıdaki vertörleri tanımlayalım.

$$\mathrm{U}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}, \qquad \phi = \mathrm{U}^0 = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{bmatrix}$$

Nümerik çözümlerin hata ölçümünü ise

$$\|E\|_\infty = \max_{1\le n\le N,\ 1\le j\le M-1} \left| u(t_n, x_j) - u_j^n \right| \tag{5.18}$$

olarak tanımlayalım.

5.2.1 Zamanda İleri Uzamsal Merkezi Yöntem

(4.2) ZİUM şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.01\dfrac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}, \ \ 0 \le n < N,\ 1 \le j \le M-1, \\ u_j^0 = f(x_j),\ 1 \le j \le M-1, \\ u_0^n = g_0(t_n),\ 0 \le n \le N, \\ u_M^n = g_1(t_n),\ 0 \le n \le N. \end{cases} \tag{5.19}$$

(5.19) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} \mathrm{U}^{n+1} = A\mathrm{U}^n + b_n,\ 0 \le n < N, \\ \mathrm{U}^0 = \phi. \end{cases} \tag{5.20}$$

Burada, $\alpha = \dfrac{\tau}{2h}$ ve $\beta = \dfrac{0.01\tau}{h^2}$ olmak üzere A ve b_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta+\alpha & 1-2\beta & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta+\alpha & 1-2\beta \end{bmatrix}$$

$$b_n = \begin{bmatrix} (\beta+\alpha)g_0(t_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)g_1(t_n) \end{bmatrix}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.20) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.18)'ya göre bulunmuştur ve Tablo 5.6'da verilmiştir.

Tablo 5.6: **(5.17) problemi için (5.19) şemasının hataları**

M	$\|\|Hata\|\|_\infty$	Mertebe
10	4.60e-002	-
20	1.73e-002	1.408
40	4.75e-003	1.867
80	1.15e-003	2.051

5.2.2 Zamanda Geri Uzamsal Merkezi Yöntem

(4.5) ZGUM şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0.01\dfrac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{h^2}, \ \ 0\le n<N,\ 1\le j\le M-1, \\ u_j^0=f(x_j),\ 1\le j\le M-1, \\ u_0^n=g_0(t_n),\ 0\le n\le N, \\ u_M^n=g_1(t_n),\ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.21}$$

(5.21) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} A\mathrm{U}^{n+1}=\mathrm{U}^n+b_n,\ 0\le n<N, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.22}$$

Burada, $\alpha=\dfrac{\tau}{2h}$ ve $\beta=\dfrac{0.01\tau}{h^2}$ olmak üzere A ve b_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A=\begin{bmatrix} 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta \end{bmatrix}$$

$$b_n = \begin{bmatrix} (\beta+\alpha)g_0(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)g_1(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.22) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.18)'ya göre bulunmuştur ve Tablo 5.7'de verilmiştir.

Tablo 5.7: **(5.17) problemi için (5.21) şemasının hataları**

M	$\|\|Hata\|\|_\infty$	Mertebe
10	4.61e-002	-
20	1.75e-002	1.400
40	4.92e-003	1.827
80	1.33e-003	1.889

5.2.3 Crank-Nicolson Yöntemi

(4.8) CN şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}\Big) \\ \quad =\dfrac{0.01}{2}\Big(\dfrac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{h^2}\Big),\ \ 0\le n<N,\ 1\le j\le M-1, \\ u_j^0=f(x_j),\ 1\le j\le M-1, \\ u_0^n=g_0(t_n),\ 0\le n\le N, \\ u_M^n=g_1(t_n),\ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.23}$$

(5.23) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} A\mathrm{U}^{n+1}=B\mathrm{U}^n+b_n,\ 0\le n<N, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.24}$$

Burada, $\alpha=\dfrac{\tau}{4h}$ ve $\beta=\dfrac{0.01\tau}{2h^2}$ olmak üzere A, B ve b_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A=\begin{bmatrix} 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 1+2\beta & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha-\beta & 1+2\beta \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1-2\beta & -\alpha+\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+\beta & 1-2\beta & -\alpha+\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 1-2\beta & -\alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & 1-2\beta & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha+\beta & 1-2\beta \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$b_n=\begin{bmatrix} (\alpha+\beta)\big(g_0(t_n)+g_0(t_{n+1})\big) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)\big(g_1(t_n)+g_1(t_{n+1})\big) \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.24) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.18)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.8'de verilmiştir.

Tablo 5.8: (5.17) problemi için (5.23) şemasının hataları

M	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe
10	4.61e-002	-
20	1.74e-002	1.404
40	4.84e-003	1.847
80	1.23e-003	1.974

5.2.4 Modifiye Edilmiş Zamanda Geri Uzamsal Merkezi Yöntem

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.9) MZGUM şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} + \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \\ \qquad = 0.01\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \quad 1 \le n < N, \ 1 \le j \le M-1, \\ \dfrac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} + \dfrac{u_{j+1}^1 - u_{j-1}^1}{2h}\right) \\ \qquad = \dfrac{0.01}{2}\left(\dfrac{u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0}{h^2} + \dfrac{u_{j-1}^1 - 2u_j^1 + u_{j+1}^1}{h^2}\right), \quad 1 \le j \le M-1, \\ u_j^0 = f(x_j), \ 1 \le j \le M-1, \\ u_0^n = g_0(t_n), \ 0 \le n \le N, \\ u_M^n = g_1(t_n), \ 0 \le n \le N. \end{cases} \tag{5.28}$$

(5.28) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} C\mathrm{U}^{n+1} = 4\mathrm{U}^n - \mathrm{U}^{n-1} + a_n, \ 1 \le n < N, \\ A\mathrm{U}^1 = B\mathrm{U}^0 + b_0, \\ \mathrm{U}^0 = \phi. \end{cases} \tag{5.29}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.25) ve (5.26) şeklinde tanımlıdır, b_0 vektörü ise (5.27) formülünden bulunur. Ayrıca $\alpha = \dfrac{\tau}{h}$ ve $\beta = \dfrac{0.02\tau}{h^2}$ olmak üzere C ve a_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 3+2\beta & \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha-\beta & 3+2\beta & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha-\beta & 3+2\beta \end{bmatrix}$$

$$a_n = \begin{bmatrix} (\beta+\alpha)g_0(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)g_1(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.29) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.18)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.9'da verilmiştir.

Tablo 5.9: **(5.17) problemi için (5.28) şemasının hataları**

M	$\|Hata\|_\infty$	Mertebe
10	4.61e-002	-
20	1.74e-002	1.404
40	4.84e-003	1.848
80	1.23e-003	1.977

5.2.5 Dufort-Frankel Yöntemi

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.11) DF şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h} \\ \qquad =0.01\dfrac{u_{j+1}^n-(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})+u_{j-1}^n}{h^2},\ 1\le n<N,\ 1\le j\le M-1, \\ \dfrac{u_j^1-u_j^0}{\tau}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{u_{j+1}^0-u_{j-1}^0}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^1-u_{j-1}^1}{2h}\Big) \\ \qquad =\dfrac{0.01}{2}\Big(\dfrac{u_{j-1}^0-2u_j^0+u_{j+1}^0}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^1-2u_j^1+u_{j+1}^1}{h^2}\Big),\ 1\le j\le M-1, \\ u_j^0=f(x_j),\ 1\le j\le M-1, \\ u_0^n=g_0(t_n),\ 0\le n\le N, \\ u_M^n=g_1(t_n),\ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.30}$$

$\beta=\dfrac{0.02\tau}{h^2}$ olmak üzere, (5.30) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} (1+\beta)\mathrm{U}^{n+1}=C\mathrm{U}^n+(1-\beta)\mathrm{U}^{n-1}+a_n,\ 1\le n<N, \\ A\mathrm{U}^1=B\mathrm{U}^0+b_0, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.31}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.25) ve (5.26) şeklinde tanımlıdır, b_0 vektörü ise (5.27) formülünden bulunur. Ayrıca $\alpha=\dfrac{\tau}{h}$ olmak üzere C ve a_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+\beta & 0 & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 0 & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha+\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_n = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)g_0(t_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)g_1(t_n) \end{bmatrix}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, M'nin farklı değerleri için (5.31) şemasının çözümleri hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik çözümlerin hataları, (5.18)'e göre bulunmuştur ve Tablo 5.10'da verilmiştir.

Tablo 5.10: (5.17) problemi için (5.30) şemasının hataları

M	$\|\|Hata\|\|_\infty$	Mertebe
10	4.61e-002	-
20	1.74e-002	1.404
40	4.83e-003	1.848
80	1.23e-003	1.979

5.2.6 Leap-Frog Yöntemi

İlk adımda (4.8) CN şemasını ve sonraki adımlarda (4.6) LF şemasını kullanarak (5.17) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki sonlu farklar şemasını elde ederiz

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0.01\dfrac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{h^2}, \quad 1\le n<N,\ 1\le j\le M-1, \\ \dfrac{u_j^1-u_j^0}{\tau}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{u_{j+1}^0-u_{j-1}^0}{2h}+\dfrac{u_{j+1}^1-u_{j-1}^1}{2h}\Big) \\ \qquad =\dfrac{0.01}{2}\Big(\dfrac{u_{j-1}^0-2u_j^0+u_{j+1}^0}{h^2}+\dfrac{u_{j-1}^1-2u_j^1+u_{j+1}^1}{h^2}\Big), \quad 1\le j\le M-1, \\ u_j^0=f(x_j),\ 1\le j\le M-1, \\ u_0^n=g_0(t_n),\ 0\le n\le N, \\ u_M^n=g_1(t_n),\ 0\le n\le N. \end{cases} \tag{5.32}$$

(5.32) şemasını matris şeklinde yazabiliriz

$$\begin{cases} \mathrm{U}^{n+1}=C\mathrm{U}^n+\mathrm{U}^{n-1}+a_n,\ 1\le n<N, \\ A\mathrm{U}^1=B\mathrm{U}^0+b_0, \\ \mathrm{U}^0=\phi. \end{cases} \tag{5.33}$$

Burada, A ve B matrisleri sırasıyla (5.25) ve (5.26) şeklinde tanımlıdır, b_0 vektörü ise (5.27) formülünden bulunur. Ayrıca $\alpha=\dfrac{\tau}{h}$ ve $\beta=\dfrac{0.02\tau}{h^2}$ olmak üzere C ve a_n matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C=\begin{bmatrix} -2\beta & \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+\beta & -2\beta & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & -2\beta & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & -2\beta & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha+\beta & -2\beta \end{bmatrix}$$

$$a_n=\begin{bmatrix} (\alpha+\beta)g_0(t_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ (\beta-\alpha)g_1(t_n) \end{bmatrix}$$

$\tau = 10^{-4}$ olmak üzere, $M = 10$ ve $M = 20$ değerleri için (5.33) şeması kararlı olsa da, $M = 40, 80, 160$ değerleri için bu şemanın kararsız olduğu gözlenlenmiştir. Bu sonuçlar LF şemanın kararsız olduğunu desteklemektedir.

6. SONUÇ

Bu tezde, bir boyutlu Adveksiyon- Difüzyon denklemi için nümerik metotlar sunulmuştur. Sonlu farklar yöntemiyle Zamanda İleri Uzamsal Merkezi (ZİUM) şema, Zamanda Geri Uzamsal Merkezi (ZGUM) şema, Leap-Frog (LF) şema, Crank-Nicolson (CN) şema, Modifiye edilmiş Zamanda Geri Uzamsal Merkezi (MZGUM) şema ve son olarak Dufort-Frankel (DF) şema incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda ZİUM ve DF şemaların koşullu kararlı, ZGUM, CN ve MZGUM şemaların koşulsuz kararlı, LF şemanın ise kararsız olduğu görülmüştür. Nümerik örnekler ile teorik bulgular teyit edilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] Blazek, J. (2005). *Computational fluid dynamics: principles and applications(2nd ed)*. Elsevier, Oxford.

[2] Chan, T. F. (1984). Stability analysis of finite difference schemes for the advection-diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(2):272–284.

[3] Chatwin, P. C. and Allen, C. M. (1985). Mathematical models of dispersion in rivers and estuaries. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 17(1):119–149.

[4] Dehghan, M. (2004). Weighted finite difference techniques for the one dimensional advection diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 147(2):307–319.

[5] Gander, M. J. and Kwok, F. (2018). *Numerical analysis of partial diferential equations using Maple and Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[6] Hoffmann, K. A. and Chiang, S. T. (2000). *Computational fluid dynamics volume I (4th ed)*. Engineering Education System, Kansas.

[7] Igel, H. (2017). *Computational seismology a practical introduction*. Oxford University Press, New York.

[8] Isenberg, J. and Gutfinger, C. (1972). Heat transfer to a draining film. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:505–512.

[9] Kinzelbach, W. (1986). *Groundwater modelling an introduction with sample program in Basic*. Elsevier, Amsterdam.

[10] Miller, J. (1971). On the location of zeros of certain classes of polynomials with applications to numerical analysis. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 8:397–406.

[11] Rudin, W. (1976). *principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, Inc, New York.

[12] Smith, G. (1987). *Numerical solution of partial differantial equations: Finite difference methods*. Clarendon Press, Oxford.

[13] Srivastava, R. (2008). *Flow through open channels*. Oxford University Press, Kanpur.

[14] Stocker, T. (2014). *Introduction to climate modelling*. Elsevier, Bern.

[15] Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations (2nd Ed)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[16] Thomee, V. (2001). From finite differences to finite elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128(1-2):1–54.

[17] Wang, H. and Anderson, M. (1995). *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*. Academic Press, San Francisco.

[18] Zlatev, Z., Berkowicz, R., and Praham, L. P. (1984). Implementation of a variable stepsize variable formula method in the time-integration part of a code for treatment of long-range transport of air pollutants. *Journal of Computational Physics*, 55:278–301.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif Duman

Sürekli Adresi : Emek Mah. Ordu Cad. Kentlife sitesi A2-2 Blok D:49 Sancaktepe/İSTANBUL

Doğum Yeri ve Yılı : Trabzon, 1990

Yabancı Dili : İngilizce

İlk Öğretim : Kadir Has İlköğretim Okulu, 2004

Orta Öğretim : Erenköy Kız Lisesi, 2008

Lisans : Bahçeşehir Üniversitesi, 2013

Yüksek Lisans : Bahçeşehir Üniversitesi, 2020

Enstitü Adı : Fen Bilimleri Enstitüsü

Program Adı : Uygulamalı Matematik

Çalışma Hayatı : İçerik Editörü / NMQ Digital (2013-…)