GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

GRAF KUVVETLERİ KULLANILARAK SPEKTRAL YARIÇAP İÇİN SINIRLAR

Fatma KIZILCA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2019

Fatma KIZILCA tarafından hazırlanan "GRAF KUVVETLERİ KULLANILARAK SPEKTRAL YARIÇAP İÇİN SINIRLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

Üye: Doç. Dr. Özlem ÇAKIR

Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

Tez Savunma Tarihi: 30/12/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatma KIZILCA
30/12/2019

GRAF KUVVETLERİ KULLANILARAK SPEKTRAL
YARIÇAP İÇİN SINIRLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma KIZILCA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2019

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde grafın temel kavram ve özellikleri ile bazı özel graflar ve matrislerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, sonlu, yönsüz, basit, bağlantılı grafların k. kuvveti ile ilgili literatürde var olan bazı tanım, teorem ve önermeler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise sonlu, yönsüz, basit, bağlantılı grafların komşuluk matrisinin en büyük özdeğeri için bazı sınırlar elde edilmiştir. Beşinci bölüm sonuç kısmından oluşmaktadır.

Bilim Kodu	: 20401
Anahtar Kelimler	: Grafın kuvveti, Sınır, Spektral yarıçap.
Sayfa Adedi	: 45
Danışman	: Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

BOUNDS FOR SPECTRAL RADIUS USING GRAPH POWERS

(M. Sc. Thesis)

Fatma KIZILCA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2019

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first part consists of an introduction. In the second part, the basic concepts and properties of graph and some special graphs and matrices are mentioned. In the third part, some definition, theorems and lemmas exist in the literature about the k-th power of finite undirected simple connected graphs are given. In the fourth chapter, some bounds are obtained for the largest eigenvalue of the adjacency matrix of finite undirected simple connected graphs. The fifth section consists of the conclusion part.

Science Code : 20401
Key Words : Power of graph, Bound, Spectral radius.
Page Number : 45
Supervisor : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca her zaman yanımda olan ve bilgileri ile bana yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE’ye, çalışmalarımda bana yardımcı olan arkadaşlarım Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI ve Ülkünur KABATAŞ ile her zaman yanımda olan canım aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix
SİMGELER VE KISALTMALAR x
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ 3
2.1. Genel Bilgiler 3
2.2. Graf Kavramı 4
2.3. Bazı Özel Graflar 6
2.4. Graf ile İlgili Bazı Matrisler 8
3. YARDIMCI TEOREMLER 11
3.1. Grafın k. Kuvveti ile İlgili Yardımcı Teoremler 11
4. GRAF KUVVETLERİ KULLANILARAK SPEKTRAL YARIÇAP İÇİN SINIRLAR 23
4.1. Tanım 23
4.2. Teorem 23
4.3. Teorem 27
4.4. Teorem 29
4.5. Conjecture 33
5. SONUÇ 41
KAYNAKLAR 43
ÖZGEÇMİŞ 45

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 4.1. G grafının spektral yarıçapı için sınırlar 31

Çizelge 4.2. S_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar 32

Çizelge 4.3. P_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar 32

Çizelge 4.4. T_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar 33

Çizelge 4.5. S_5, P_5 ile G_1, G_2 ve G_3 graflarının spektral yarıçapları için sınırlar 39

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. G grafı 5

Şekil 2.2. Bağlantılı graf 6

Şekil 2.3. K_4 ve K_5 tam grafları 6

Şekil 2.4. Tümleyen graf 7

Şekil 3.1. G ve G^2 grafı 11

Şekil 3.2. G grafı 12

Şekil 3.3. H grafı 12

Şekil 3.4. S_5, P_5 ve T_5 grafları 14

Şekil 3.5. G grafı 16

Şekil 3.6. G^2 grafı 16

Şekil 3.7. $\bar{G}$ ve $\bar{G}^2$ grafları 17

Şekil 3.8. G grafı 19

Şekil 4.1. G grafı 25

Şekil 4.2. S_5 grafı 26

Şekil 4.3. G grafı 28

Şekil 4.4. G grafı 30

Şekil 4.5. S_5, P_5 ve T_5 grafları 31

Şekil 4.6. S_5, P_5 ile G_1, G_2 ve G_3 grafları 33

Şekil 4.7. S_5 ve ${S_5}^2$ grafları 34

Şekil 4.8. P_5, ${P_5}^2$, ${P_5}^3$ ve ${P_5}^4$ grafları 35

Şekil 4.9. G_1, ${G_1}^2$ ve ${G_1}^3$ grafları 36

Şekil 4.10. G_2, ${G_2}^2$, ${G_2}^3$ ve ${G_2}^4$grafları 37

Şekil 4.11. G_3, ${G_3}^2$, ${G_3}^3$ ve ${G_3}^4$ grafları 38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{A(G)}$	G grafının komşuluk matrisi
$\boldsymbol{A^k(G)}$	G grafının k. kuvvetinin komşuluk matrisi
$\boldsymbol{C_n}$	Devir graf
$\boldsymbol{d}$	Grafın çapı
$\boldsymbol{d_i}$	i noktasının derecesi
$\boldsymbol{d_i^{(k)}}$	G^k grafındaki i noktasının derecesi
$\boldsymbol{E}$	Kenarlar kümesi
$\boldsymbol{ec_G(v_i)}$	v_i noktasının dış merkezliği
$\boldsymbol{G = (V, E)}$	Graf
$\boldsymbol{G \cong H}$	G ile H grafları birbirine izomorftur
$\boldsymbol{G^k}$	G grafının k. kuvveti
$\boldsymbol{\overline{G}}$	G grafının tümleyen grafı
$\boldsymbol{i \sim j}$	i ve j noktalarının komşuluğu
$\boldsymbol{i \sim_k j}$	i ve j noktalarının G^k grafındaki komşuluğu
$\boldsymbol{K_A}$	Karakteristik polinom
$\boldsymbol{K_n}$	Tam graf
$\boldsymbol{V}$	Noktalar kümesi
$\boldsymbol{N_i}$	i noktasının komşuluklar kümesi
$\boldsymbol{P}$	Yol
$\boldsymbol{S_n}$	Star graf
$\boldsymbol{T_n}$	Ağaç graf
$\boldsymbol{W}$	Yürüme
$\boldsymbol{x_i^{(k)}}$	G^k grafındaki i noktasına karşılık gelen Perron vektör
$\boldsymbol{\delta(G)}$	G grafının minimum derecesi
$\boldsymbol{\Delta(G)}$	G grafının maksimum derecesi
$\boldsymbol{\lambda}$	G grafının komşuluk özdeğeri

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\lambda^k}$	G grafının $k.$ kuvvetinin komşuluk özdeğeri

1. GİRİŞ

Graf teori veya Çizge Kuramı, noktalar ve aralarındaki çizgeleri (eğrileri) inceleyen matematik dalıdır. Graf, uçlar ve bu uçları birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir tür ağ yapısıdır. Graf teorisi, bilgisayar ile yapılan modellemelerin çoğunda önemli bir yer tutmaktadır. Genelde graflar üzerine kurulmuş ve graf teorisi ile çözümlenen problemler karmaşık bir yapıya sahip olduklarından graf teorisi bilgisayar programcılığının en önemli alanları arasında yer alır. Genel anlamda kullanım amaçlarından en önemlisi iki nokta arasında bulunan güzergâh veya somut bir bağlantı bulunmak istemesidir. Graf teorisinin başlıca uygulandığı alanlar ise bilgisayar bilimleri, matematik, fizik, biyoloji, tarih, iletişim teknolojileri, bilişim teknolojileri gibi alanlardır.

Spektral graf teori, herhangi bir grafın ilgili matrislerinin özdeğerleri ve özvektörlerini kullanarak grafın yapısı hakkında bilgi edinmemizi sağlar. Günümüzde fen bilimleri, veri tabanları, elektronik devreler gibi birçok alanda kullanılan spektral graf teorinin temeli, 1950'li yıllara dayandığı düşünülmesine rağmen birçok kaynak daha önce ortaya çıktığına dair izler taşımaktadır. 1931 yılında Hückel'in kuantum kimyasında yaptığı bir çalışmada elektron enerji seviyelerini temsil etmekte grafların özdeğerlerini kullandığı bilinmektedir. Ayrıca iyi bilinen Matris-Ağaç teoreminin spektral graf teorinin bir sonucu olduğu 1940'lı yıllarda ispatlanmıştır.

1957 yılında Collatz ve Sinogowitz'in yaptığı çalışma ile spektral graf teori matematik literatüründe sık kullanılan bir hal almıştır. Grafın spektrumu yani özdeğerlerinin çalışılması matematik ve diğer alanlarda önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel geometri, graf teori, kombinatorik teori gibi matematiğin pek çok alanında spektrum ve spektrum tekniklerinin kullanıldığı bilinmektedir. Ayrıca kimyada molekül kararlılığını temsil etmede, teorik fizik ve kuantum mekaniğinde Hamilton sistemlerinin enerjilerini en aza indirme probleminde ve iletişim ağlarındaki çeşitli problemlerin çözümünde grafın spektrumu kavramının önemli bir yeri vardır.

Bir grafın komşuluk matrisinin özdeğerlerini hesaplamak her zaman kolay olmayabilir. Bu durumda özdeğerler için sınır belirlemek işimizi kolaylaştıracaktır. Bu tezde sonlu yönsüz basit bağlantılı graflar için grafın k. kuvvetinden yararlanarak sınırlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Genel Bilgiler

Bu bölümde bir matrisin karakteristik polinomu ve özdeğeri kavramlarının tanımlarını vereceğiz.

Tanım

A, $n \times n$ tipinde bir kare matris ve $x \neq 0$ bir $n \times 1$ tipinde matris olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

olacak biçimde λ skaleri olsun. (2.1) denklemi, I $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere,

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) denkleminin aşikar olmayan çözümü,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \tag{2.3}$$

olması halinde mevcuttur.

$\det(A - \lambda I)$' nın hesaplanması sonucunda λ' ya bağlı n-inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A'nın karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani, $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$' dır. $K_A(\lambda) = 0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi ve bu karakteristik denklemin köklerine de A' nın özdeğerleri denir.

$K_A(\lambda) = 0$, n-inci dereceden bir denklem olduğundan n tane köke sahiptir ve bu köklerin hepsinin birbirinden farklı olması gerekmez.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0 \tag{2.4}$$

denkleminde sıfır olmayan x çözümlerine A matrisinin λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir. Bu tanımlar doğrultusunda,

$$A_{x_i} = \lambda_{x_i} \; (i = 1,2, \dots, n) \tag{2.5}$$

temel formülü elde edilir [1].

2.2. Graf Kavramı

Bu bölümde grafın tanımı ile graf ile ilgili bazı kavramların tanımlarını vereceğiz.

Tanım

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = \{1,2, \dots, n\}$ noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına denir ve $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir. Burada

$$E = \big\{\{i, j\} : i, j \in V\big\} = \{ij : i, j \in V\}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, her $i, j \in V$ için E nin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları e_i veya ij şeklinde gösterilir [2].

Tanım

G bir graf olmak üzere, G nin herhangi i ve j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir i noktasına komşu olan noktaların kümesine i nin komşuluklar kümesi denir ve N_i ile gösterilir [2].

Tanım

G grafının herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i nin derecesi denir ve $d_G(i)$ veya kısaca d_i ile gösterilir [2].

Tanım

Bir G grafının, minimum ve maksimum dereceleri sırasıyla

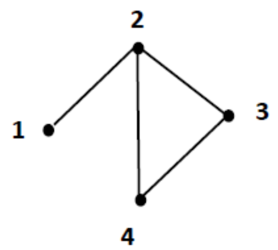
$$\delta(G) = min\{ d_i : i \epsilon V \},$$

$\Delta(G) = max\{ d_i : i \in V \}$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca

$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} d_i$

sayısına G nin ortalama derecesi denir. Burada $|V|$, V nin kardinalitesi yani noktalar kümesinin eleman sayısıdır [2].



Şekil 2.1. G grafı

$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ noktalar kümesi, $E(G) = \{12, 23, 24, 34\}$ kenarlar kümesi olan $G(V, E)$ grafı 4 noktalı 4 kenarlı bir graftır.

Tanım

Grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenar, çoklu kenar veya paralel kenar denir [2].

Tanım

Bir G grafının her bir nokta çifti arasındaki uzaklıkların maksimumuna yani; $\max_{i,j \in V}\{d(i,j)\}$ değerine G grafının çapı denir [3].

Tanım

Bağlantılı bir G grafında bir v_i noktasının dış merkezliği $ec_G(v_i)$, v_i ve G deki diğer v_j noktasının arasındaki maksimum uzaklıktır [3].

2.3. Bazı Özel Graflar

Bu bölümde graf çeşitlerinden olan basit, tam, regüler, bağlantılı ve tümleyen graf gibi bazı özel grafların tanımlarını vereceğiz.

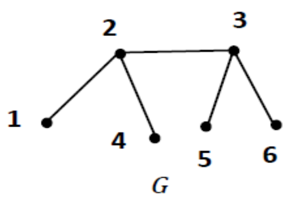
Tanım

Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [2].

Şekil 2.1 ile verilen G grafı bir basit graf örneğidir.

Tanım

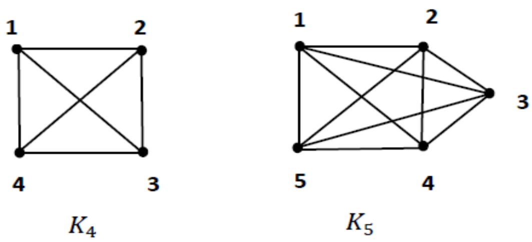
Herhangi iki noktası arasında en az bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [2].



Şekil 2.2. Bağlantılı graf

Tanım

Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti bağlantılı ise bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir [2].



Şekil 2.3. K_4 ve K_5 tam grafları

Tanım

Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa regüler graf denir. Özel olarak her bir noktası r dereceye sahip olan grafa r - dereceli regüler graf denir [2].

Şekil 2.3 ile verilen K_4 grafının her bir noktasının derecesi 3 ve K_5 grafının her bir noktasının derecesi 4 olduğundan bu graflar sırası ile 3- dereceli ve 4- dereceli regüler graflardır.

Tanım

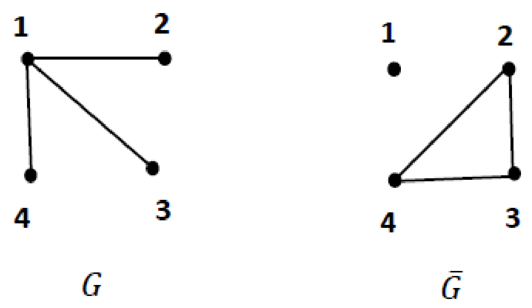
Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve P ile gösterilir [2].

Tanım

Herhangi bir noktasının derecesi $n-1$ olan ve diğer $n-1$ tane noktasının derecesi de 1 olan grafa yıldız graf ya da star graf denir ve genel olarak n noktalı bir star graf S_n olarak gösterilir [4].

Tanım

G, n noktalı bir graf olsun. Bu durumda G grafının tümleyeni G deki kenarların K_n tam grafından silinmesi sonucu elde edilen graftır ve $\bar{G}$ veya G' ile gösterilir [2].



Şekil 2.4. Tümleyen graf

Şekil 2.4 ile verilen G grafının tümleyen grafı $\bar{G}$ ile gösterilmiştir.

Tanım

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola devir denir ve n noktalı bir devir C_n ile gösterilir. Devirdeki her bir i noktasının derecesi $d_i = 2$ dir [2].

Tanım

İçinde devir bulundurmayan bağlantılı grafa ağaç graf veya kısaca ağaç denir ve n noktalı bir ağaç graf T_n ile gösterilir [2].

Tanım

$G = (V, E)$ grafının içerdiği bazı noktalardan ve kenarlardan oluşan grafa G nin alt grafı denir. Yani; $G_1(V_1, E_1)$ ve $G_2(V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ oluyorsa, G_2 grafına G_1 in bir alt grafı denir [2].

Tanım

Grafın noktalar kümesi, her bir noktası aynı kümedeki diğer noktalar ile komşu olmayacak şekilde U ve W gibi iki ayrık kümeye bölünebiliyorsa bu grafa iki parçalı graf denir. $U \cap W = \emptyset$ ve $U \cup W = V$ olmak üzere $G = (U, W, E)$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım

$G_1(V_1, E_1)$ ve $G_2(V_2, E_2)$ iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının noktaları ve kenarları arasında onların özelliğini koruyacak şekilde $1-1$ bir dönüşüm varsa, G_1 ve G_2 graflarına izomorfik graflar denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir [2].

2.4. Graf ile İlgili Bazı Matrisler

Bu bölümde bir grafın komşuluk matrisinin tanımını vereceğiz.

Tanım

G, n noktalı basit bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i \sim j \\ 0 & ; \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Bu matrisin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri için $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ eşitsizliği vardır. Ayrıca bu matrisin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı o satır ve sütuna karşılık gelen noktanın derecesini verir [2].

3. YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde bize yardımcı olan literatürde var olan bir grafın k. kuvveti ve grafın spektral yarıçapı ile ilgili bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

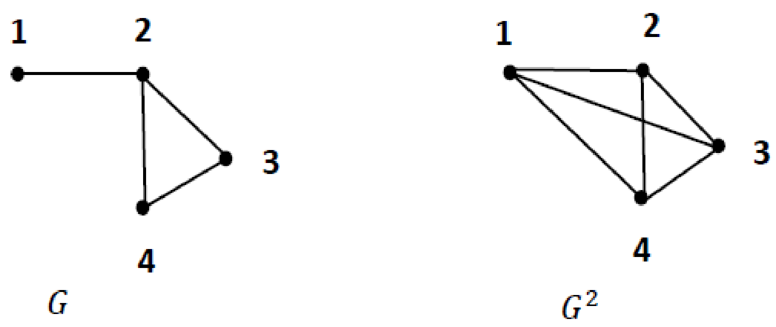
3.1. Grafın k. Kuvveti ile İlgili Yardımcı Teoremler

Bu bölümde sonraki bölümlerde bize yardımcı olan bir grafın k. kuvveti ve grafın spektral yarıçapı ile ilgili bazı tanım, teorem ve yardımcı teoremleri vereceğiz.

Tanım

Bir G grafının k. kuvveti G^k, G nin nokta kümesi V ile aynı nokta kümesine sahip bir graftır ancak G^k da iki noktanın komşu olması için gerek ve yeter şart G de bu iki nokta arasındaki uzaklık en fazla k kadar olacaktır [3].

Örnek



Şekil 3.1. G ve G^2 grafı

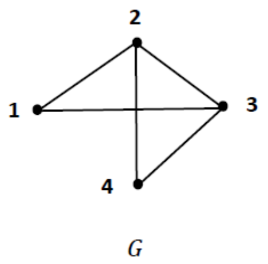
Yardımcı Teorem

H, G nin bir alt grafı olsun. O zaman,

$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(H)$.

Ayrıca bağlantılı graflar için eşitlik gerek ve yeter şart $G \cong H$ olması durumunda sağlanır [5].

Örnek



Şekil 3.2. G grafı

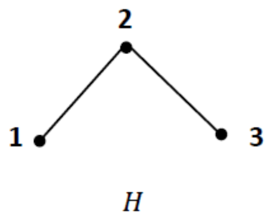
Şekil 3.2 ile verilen G grafının spektral yarıçapını ve alt grafının spektral yarıçapını bulalım.

Çözüm

Öncelikle G grafının komşuluk matrisini yazıp spektral yarıçapını bulalım.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(G) = -1{,}5615$, $\lambda_2(G) = -1$, $\lambda_3(G) = -0{,}2222$ ve $\lambda_4(G) = 2{,}5615$ olup spektral yarıçapı $\lambda_1(G) = 2{,}5615$ olarak bulunur. Şimdi G grafının bir alt grafını çizelim.



Şekil 3.3. H grafı

Şekil 3.3 ile verilen grafın spektral yarıçapını bulalım.

$$A(H)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(H)=1{,}4142$ olarak bulunur. O zaman,

$$\lambda_1(G)\geq\lambda_1(H)$$

$$2{,}5615\geq 1{,}4142$$

ifadesi elde edilir.

<u>Yardımcı Teorem</u>

G, n noktalı bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$$\lambda_1(G)\leq\max_{v_iv_j\in E(G)}\sqrt{d_G(v_i)d_G(v_j)}\,, \qquad (3.1)$$

burada $d_G(v_i)$, G deki v_i noktasının derecesidir. Üstelik (3.1) deki eşitlik yalnızca G nin semi regüler iki parçalı graf olması durumunda sağlanır [6].

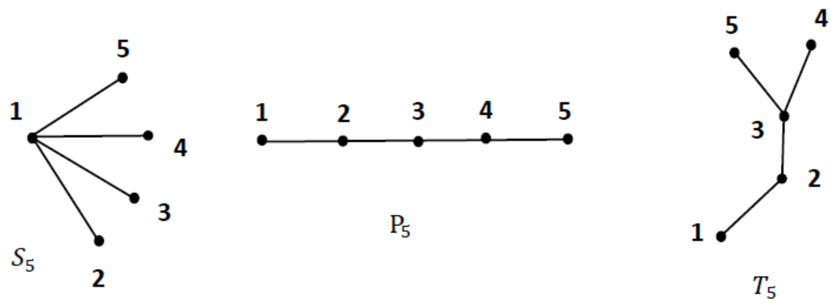
<u>Yardımcı Teorem</u>

n noktalı herhangi bir T ağacı için

$$\lambda_1(S_n)\geq\lambda_1(T)\geq\lambda_1(P_n).$$

Soldaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T\cong S_n$ olması ve sağdaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T\cong P_n$ olması gerekir [5].

Örnek



Şekil 3.4. S_5, P_5 ve T_5 grafları

Şekil 3.4 ile verilen grafların spektral yarıçaplarını bulalım.

Çözüm

Önce S_5 star grafının komşuluk matrisini yazıp spektral yarıçapını bulalım.

$$\mathrm{A}(S_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(S_5) = 2$ olarak bulunur. Şimdi P_5 yol grafının komşuluk matrisini yazıp spektral yarıçapını bulalım.

$$\mathrm{A}(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5) = 1{,}7320$ olarak bulunur. Son olarak T_5 ağaç grafının komşuluk matrisini yazıp spektral yarıçapını bulalım.

$$\mathrm{A}(T_5\,) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(T_5) = 1{,}8477$ olarak bulunur. Bulduklarımızı önermede verilen eşitsizlikte yerlerine yazalım.

$$\lambda_1(S_n) \geq \lambda_1(T) \geq \lambda_1(P_n)$$

$$2 \geq 1{,}8477 \geq 1{,}7320$$

şeklinde elde edilir.

<u>Yardımcı Teorem</u>

G maksimum derecesi $\Delta(G)$ olan n noktalı bağlantılı bir graf olsun. Ayrıca G deki maksimum dereceli nokta v_i olarak verilsin. Daha sonra $ec_G(v_i) > k$ iken $\Delta(\mathrm{G}^{\mathrm{k}}) \geq \Delta(G) + k$ ve diğer durumlarda $\Delta(\mathrm{G}^{\mathrm{k}}) = n - 1$ olur, burada $ec_G(v_i)$, G grafındaki v_i noktasının dış merkezliğidir [7].

<u>Yardımcı Teorem</u>

n noktalı bağlantılı herhangi bir G grafı için

$$\lambda_1(\mathrm{G}^{\mathrm{k}}) \geq \lambda_1(G). \qquad (3.2)$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $k = 1$ veya G nin bir tam graf olmasıdır [4].

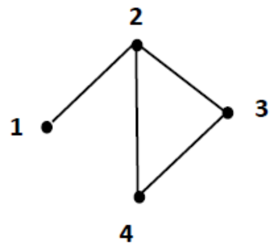
<u>Sonuç</u>

G, n noktalı bağlantılı bir graf ile $\bar{G}$ tümleyeni bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$$\lambda_1(\mathrm{G}^{\mathrm{k}}) + \lambda_1(\bar{G}^k) \geq \lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}). \qquad (3.3)$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $k = 1$ olmasıdır [4].

Örnek

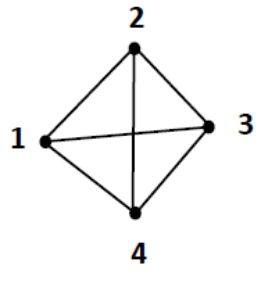


Şekil 3.5. G grafı

Şekil 3.5'deki G grafının ikinci kuvvetini, tümleyen grafını ve tümleyen grafın ikinci kuvvetini bulalım.

Çözüm

Önce G grafının ikinci kuvveti olan grafı çizelim.

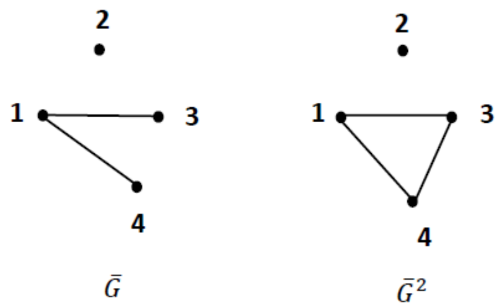


Şekil 3.6. G^2 grafı

Şekil 3.6'daki G^2 grafının spektral yarıçapını bulalım.

$$A(\mathrm{G}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(\mathrm{G}^2) = 3$ olarak bulunur. Şimdi G grafının tümleyen grafını ve tümleyen grafın ikinci kuvveti olan grafı çizelim.



Şekil 3.7. $\bar{G}$ ve $\bar{G}^2$ grafları

Şekil 3.7'deki grafların spektral yarıçaplarını bulalım. Önce grafların sırasıyla komşuluk matrislerini yazalım.

$$A(\bar{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$A(\bar{G}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislerin spektral yarıçapları sırasıyla $\lambda_1(\bar{G}) = 1{,}4142$ ve $\lambda_1(\bar{G}^2) = 2$ olarak bulunur. Son olarak G grafının spektral yarıçapını bulalım.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G) = 2{,}17$ olarak bulunur. Tüm bulduklarımızı sonuçtaki verilen eşitsizlikte yerlerine yazalım.

$$\lambda_1(\mathrm{G}^2) + \lambda_1(\bar{G}^2) \geq \lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G})$$

$$3 + 2 \geq 2{,}17 + 1{,}4142$$

$5 \geq 3{,}5842$

elde edilir.

Teorem

n noktalı herhangi bir T ağacı için,

$$\lambda_1\left({S_n}^2\right) \geq \lambda_1(\mathrm{T}^2) \geq \lambda_1\left({P_n}^2\right). \tag{3.4}$$

Soldaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong S_n$ ve sağdaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong P_n$ olması gerekir [4].

Sonuç

Herhangi bir $n(\geq 4)$ noktalı bağlantılı bir G grafı için

$$\lambda_1\left({S_n}^2\right) \geq \lambda_1(\mathrm{G}^2) \geq \lambda_1\left({P_n}^2\right). \tag{3.5}$$

Soldaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $d \leq 2$ ve sağdaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong P_n$ olması gerekir [4].

Yardımcı Teorem

G, kendisi ve tümleyeni bağlantılı olan bir graf olsun. $d > 3$ ise o zaman $\bar{d} = 2$ ($\bar{d}$, $\bar{G}$ nin çapıdır) [8].

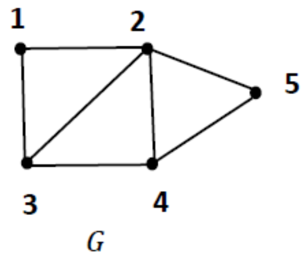
Yardımcı Teorem

G, n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. δ, G nin minimum derecesi olarak verilsin. O zaman

$$\lambda_1(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - n\delta)}}{2}$$

eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin regüler bir graf olması ya da her noktasının derecesi δ veya $n-1$ olan iki dereceli bir graf olması gerekir [9].

Örnek



Şekil 3.8. G grafı

Şekil 3.8 deki G grafının komşuluk matrisini yazıp spektral yarıçapını bulalım.

Çözüm

G grafı 5 noktalı ve 7 kenarlı bir graftır. Burada $n=5$, $m=7$ ve $\delta=2$ dir. Şimdi G grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$\mathrm{A}(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G)=2{,}9354$ olarak bulunur ve bu bulduğumuz değerleri önermedeki eşitsizlik ifadesinde yerlerine yazarsak

$$\lambda_1(G)\leq\frac{\delta-1+\sqrt{(\delta+1)^2+4(2m-n\delta)}}{2}$$

$$2{,}9354\leq\frac{2-1+\sqrt{(2+1)^2+4(2.7-5.2)}}{2}$$

$$2{,}9354\leq\frac{1+\sqrt{9+16}}{2}$$

$2{,}9354 \leq \frac{1+\sqrt{25}}{2}$

$2{,}9354 \leq 3$

elde edilir.

Yardımcı Teorem

G grafı, $k\ (2 \leq k \leq n-2)$ tane noktasının derecesi $n-1 (n>3)$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$\lambda_1(G) \geq \frac{\delta-1+\sqrt{(2k-\delta-1)^2+4k(n-k)}}{2}$,

burada δ, G nin minimum derecesidir. Üstelik eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin her noktasının derecesi δ veya $n-1$ olan iki dereceli bir graf olması gerekir [4].

Sonuç

G grafı, $k\ (2 \leq k \leq n-2)$ tane noktasının derecesi $n-1 (n>3)$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun O zaman

$\lambda_1(G) \geq \frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2+4k(n-k)}}{2}$.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G = K_k \vee (n-k)K_1$ olması gerekir [4].

Teorem

G, $\bar{G}$ tümleyeni bağlantılı olan n noktalı bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$$\lambda_1(\mathrm{G}^2) + \lambda_1(\bar{G}^2) \geq \lambda_1\left({P_n}^2\right) + \lambda_1(\bar{P_n}^2). \qquad (3.6)$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong P_n$ ya da $\bar{G} \cong P_n$ olması gerekir [4].

Teorem

G, n noktalı bağlantılı ve $\bar{G}$ tümleyeni de bağlantılı olan bir graf olsun. Eğer $k \geq 2$ ise o zaman

$$\lambda_1\left(P_n{}^{\mathrm{k}}\right) + \lambda_1\left(\bar{P_n}{}^{k}\right) \leq \lambda_1(\mathrm{G}^2) + \lambda_1(\bar{G}^2) \leq 2n - 2 \qquad (3.7)$$

dir [4].

4. GRAF KUVVETLERİ KULLANILARAK SPEKTRAL YARIÇAP İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde daha önce tanımlanan komşuluk matrisinden yararlanarak sonlu yönsüz basit bağlantılı grafların kuvvetleri yardımıyla bu grafların özdeğerleri için sınırlar elde edeceğiz. Ayrıca elde ettiğimiz bu sınırlar ile ilgili bazı tanım ve teoremler vereceğiz.

4.1. Tanım

G, n noktalı basit bir graf olsun. G^k nın komşuluk matrisi $A^{(k)}(G^k) = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & ; \quad i\sim_k j \\ 0 & ; \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Bu matrisin $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}$ özdeğerleri için $\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_n^{(k)}$ eşitsizliği vardır. Ayrıca bu matrisin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı o satır ve sütuna karşılık gelen noktanın derecesini verir ve bunu da ${d_i}^{(k)}$ ile gösteririz.

4.2. Teorem

G, n noktalı sonlu yönsüz basit bağlantılı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı

$$\lambda_1(G) \leq \max_{\substack{l_i\sim l_j \\ 1\leq i<j\leq t-1}} \sqrt[t-1]{d_{l_1}^{(k)} d_{l_2}^{(k)} \dots d_{l_{t-1}}^{(k)}}\ ,$$

dir. Burada d_i, i noktasının derecesidir.

İspat

$x_i^{(k)}$, $x^{(k)}$ nın v_i noktasına karşılık geldiği G^k nın bir özvektörü olsun. $d_t = 1$ olacak şekilde $x_{l_1}^{(k)} = \max_{v_i \in V(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}$, $x_{l_2}^{(k)} = \max_{(v_i,v_j) \in E(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}, \ldots, x_{l_{t-1}}^{(k)} = \max_{(v_i,v_j) \in E(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}$ $(t-1)$. adıma kadar olan özvektörler olsun. $A^{(k)}(G)x^{(k)} = \lambda_1(G)x^{(k)}$ den

$$\lambda_1(G)x_{l_1}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_1})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_1})} x_{l_{t-1}}^{(k)} = d_{l_1} x_{l_{t-1}}^{(k)}$$

$$\lambda_1(G)x_{l_2}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_2})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_2})} x_{l_{t-2}}^{(k)} = d_{l_2} x_{l_{t-2}}^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1(G)x_{l_{t-2}}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-2}})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-2}})} x_{l_1}^{(k)} = d_{l_{t-2}} x_{l_1}^{(k)}$$

$$\lambda_1(G)x_{l_{t-1}}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-1}})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-1}})} x_{l_2}^{(k)} = d_{l_{t-1}} x_{l_2}^{(k)}$$

yazabiliriz, burada $N_G(S)$, S nin G deki komşuluklarını belirtir. Buradan

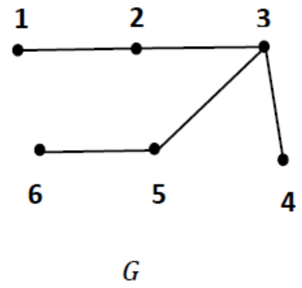
$$[\lambda_1(G)]^{t-1} x_{l_1}^{(k)} x_{l_2}^{(k)} \ldots x_{l_{t-2}}^{(k)} x_{l_{t-1}}^{(k)} \leq x_{l_1}^{(k)} x_{l_2}^{(k)} \ldots x_{l_{t-2}}^{(k)} x_{l_{t-1}}^{(k)}\, d_{l_1} d_{l_2} \ldots d_{l_{t-2}} d_{l_{t-1}}$$

$$\sqrt[t-1]{[\lambda_1(G)]^{t-1}} \leq \sqrt[t-1]{d_{l_1} d_{l_2} \ldots d_{l_{t-2}} d_{l_{t-1}}}$$

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt[t-1]{d_{l_1} d_{l_2} \ldots d_{l_{t-2}} d_{l_{t-1}}}$$

elde edilir.

Örnek



Şekil 4.1. G grafı

Şekil 4.1 deki G grafına yukarıdaki teoremin ifadesindeki eşitsizliği uygulayalım.

Çözüm

Önce G grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G) = 1{,}9318$ olarak bulunur. G grafının maksimum derecesi $d_3 = 3$ olduğundan bu noktaya komşu olan derecesi en büyük noktayı belirleyerek teoremin ifadesindeki eşitsizliği yazalım.

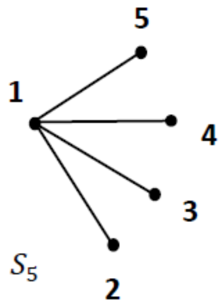
$$\lambda_1(G) \leq \max_{\substack{3\sim 5 \\ 5\sim 6}} \sqrt{d_3 d_5}$$

$$\lambda_1(G) \leq \max_{\substack{3\sim 5 \\ 5\sim 6}} \sqrt{3.2}$$

$$1{,}9318 \leq \max_{\substack{3\sim 5 \\ 5\sim 6}} \sqrt{6}$$

$1{,}9318 \leq 2{,}4494$, elde edilir.

Örnek



Şekil 4.2. S_5 grafı

Şekil 4.2. deki S_5 grafına yukarıdaki teoremin ifadesindeki eşitsizliği uygulayalım.

Çözüm

Önce S_5 grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$A(S_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(S_5) = 2$ olarak bulunur. S_5 grafının maksimum derecesi $d_1 = 4$ olduğundan bu noktaya komşu olan derecesi en büyük noktayı belirleyerek teoremin ifadesindeki eşitsizliği yazalım.

$$\lambda_1(S_5) \leq \max_{1\sim 2} \sqrt{d_1 d_2}$$

$$\lambda_1(S_5) \leq \max_{1\sim 2} \sqrt{4.1}$$

$$2 \leq \max_{1\sim 2} \sqrt{4}$$

$2 = 2$, elde edilir.

4.3. Teorem

G, n noktalı sonlu yönsüz basit bağlantılı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı için aşağıdaki gibi bir üst sınır vardır:

$$\lambda_1(G) \leq \max_{i \sim j} \sqrt{d_i^{(k)} d_j^{(k)}}$$

burada $d_i^{(k)}$, G^k daki i noktasının derecesidir.

İspat

$x_i^{(k)}$, $x^{(k)}$ nın v_i noktasına karşılık geldiği G^k nın bir özvektörü olsun. $x_s^{(k)} = \max_{v_i \in V(G)} \left\{ x_i^{(k)} \right\}$ ve $x_t^{(k)} = \max_{(v_i, v_j) \in E(G)} \left\{ x_i^{(k)} \right\}$ olsun. $A^{(k)}(G) x^{(k)} = \lambda_1{}^{(k)}(G) x^{(k)}$ den

$$\lambda_1{}^{(k)}(G) x_s^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_s)} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_s)} x_t^{(k)} = d_s{}^{(k)} x_t^{(k)}$$

$$\lambda_1{}^{(k)}(G) x_t^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_t)} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_t)} x_s^{(k)} = d_t{}^{(k)} x_s^{(k)}$$

yazabiliriz, burada $N_G(S)$, S nin G deki komşuluklarını belirtir. Buradan

$$\left[\lambda_1{}^{(k)}(G)\right]^2 x_s^{(k)} x_t^{(k)} \leq x_s^{(k)} x_t^{(k)} d_s{}^{(k)} d_t{}^{(k)}$$

$$\left[\lambda_1{}^{(k)}(G)\right]^2 \leq d_s{}^{(k)} d_t{}^{(k)}$$

$$\sqrt{\left[\lambda_1{}^{(k)}(G)\right]^2} \leq \sqrt{d_s{}^{(k)} d_t{}^{(k)}}$$

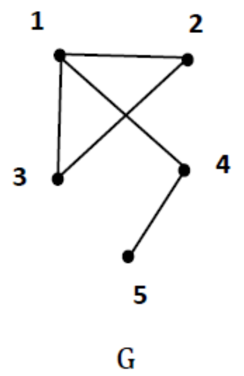
$$\lambda_1{}^{(k)}(G) \leq \sqrt{d_s{}^{(k)} d_t{}^{(k)}}$$

bulunur. 3.1.2 Yardımcı Teorem ifadesindeki H grafı G grafının alt grafı olduğunda $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(H)$ eşitsizliğini ve 3.1.6. Yardımcı Teorem ifadesindeki $\lambda_1(\mathrm{G}^{\mathrm{k}}) \geq \lambda_1(G)$ kullanırsak

$$\lambda_1(G) \leq \max_{i\sim j} \sqrt{d_i^{(k)} d_j^{(k)}}$$

elde edilir.

Örnek



Şekil 4.3. G grafı

Şekil 4.3. G grafına yukarıdaki teoremin ifadesindeki eşitsizliği uygulayalım.

Çözüm

Öncelikle G grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G) = 2{,}2143$ olarak bulunur. G grafının maksimum derecesi $d_1 = 3$ olduğundan bu noktaya komşu olan derecesi en büyük noktayı belirleyerek teoremin ifadesindeki eşitsizliği yazalım.

$$\lambda_1(G) \leq \max_{i\sim j} \sqrt{d_i^{(k)} d_j^{(k)}}$$

$\lambda_1(G) \leq \max\limits_{1\sim 4} \sqrt{d_1 d_4}$

$\lambda_1(G) \leq \max\limits_{1\sim 4} \sqrt{3.2}$

$2{,}2143 \leq \max\limits_{1\sim 4} \sqrt{6}$

$2{,}2143 \leq 2{,}4494$, elde edilir.

4.4. Teorem

G, n noktalı sonlu yönsüz basit bağlantılı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı için aşağıdaki gibi bir üst sınır vardır:

$$\lambda_1(G) \leq \max_{\substack{l_i \sim l_j \\ 1 \leq i < j \leq t}} \sqrt[t]{d_{l_1}^{(k)} d_{l_2}^{(k)} \ldots d_{l_t}^{(k)}}.$$

İspat

Tümevarım yöntemiyle teoremin ispatını yapalım. Eşitsizliğin $t = 2$ için doğru olduğu 4.3.Teorem ifadesinde mevcuttur. Şimdi $t - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman $\lambda_1(G) \leq \max\limits_{\substack{l_i \sim l_j \\ 1 \leq i < j \leq t-1}} \sqrt[t-1]{d_{l_1}^{(k)} d_{l_2}^{(k)} \ldots d_{l_{t-1}}^{(k)}}$ yazabiliriz. Şimdi t için doğru olduğunu gösterelim. $x_i^{(k)}$, $x^{(k)}$ nın v_i noktasına karşılık geldiği G^k nın bir özvektörü olsun. $x_{l_1}^{(k)} = \max\limits_{v_i \in V(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}$, $x_{l_2}^{(k)} = \max\limits_{v_i v_j \in E(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}, \ldots, x_{l_t}^{(k)} = \max\limits_{v_i v_j \in E(G)} \left\{x_i^{(k)}\right\}$ t. adıma kadar olan özvektörler olsun. $A^{(k)}(G)x^{(k)} = \lambda_1(G)x^{(k)}$ den

$$\lambda_1(G)x_{l_1}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_1})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_1})} x_{l_t}^{(k)} = d_{l_1} x_{l_t}^{(k)}$$

$$\lambda_1(G)x_{l_2}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_2})} x_i^{(k)} \leq \sum_{v_i \in N_G(v_{l_2})} x_{l_{t-1}}^{(k)} = d_{l_2} x_{l_{t-1}}^{(k)}$$

$\vdots$

$\lambda_1(G)x_{l_{t-1}}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-1}})} x_i^{(k)} \le \sum_{v_i \in N_G(v_{l_{t-1}})} x_{l_1}^{(k)} = d_{l_{t-1}} x_{l_1}^{(k)}$

$\lambda_1(G)x_{l_t}^{(k)} = \sum_{v_i \in N_G(v_{l_t})} x_i^{(k)} \le \sum_{v_i \in N_G(v_{l_t})} x_{l_2}^{(k)} = d_{l_t} x_{l_2}^{(k)}$

yazabiliriz, burada $N_G(S)$, S nin G deki komşuluklarını belirtir. Buradan

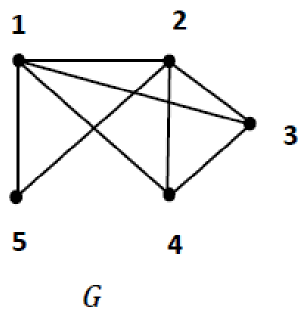
$[\lambda_1(G)]^t x_{l_1}^{(k)} x_{l_2}^{(k)} \dots x_{l_{t-1}}^{(k)} x_{l_t}^{(k)} \le x_{l_1}^{(k)} x_{l_2}^{(k)} \dots x_{l_{t-1}}^{(k)} x_{l_t}^{(k)}\, d_{l_1} d_{l_2} \dots d_{l_{t-1}} d_{l_t}$

$\sqrt[t]{[\lambda_1(G)]^t} \le \sqrt[t]{d_{l_1} d_{l_2} \dots d_{l_{t-1}} d_{l_t}}$

$\lambda_1(G) \le \sqrt[t]{d_{l_1} d_{l_2} \dots d_{l_{t-1}} d_{l_t}}$

elde edilir.

Örnek



Şekil 4.4. G grafı

Şekil 4.4. G grafının spektral yarıçapı için sınırlar bulalım.

Çözüm

G grafı minimum derecesi $\delta = 2$ olan $m = 8$ kenarlı ve $n = 5$ noktalı bağlantılı bir graftır. Ayrıca G grafında $d_1 = 4$ ve $d_2 = 4$ noktaları maksimum dereceli noktalardır. Tüm bu değerleri kullanarak spektral yarıçap için sınırlar belirleyelim.

Önce G grafının komşuluk matrisini yazalım.

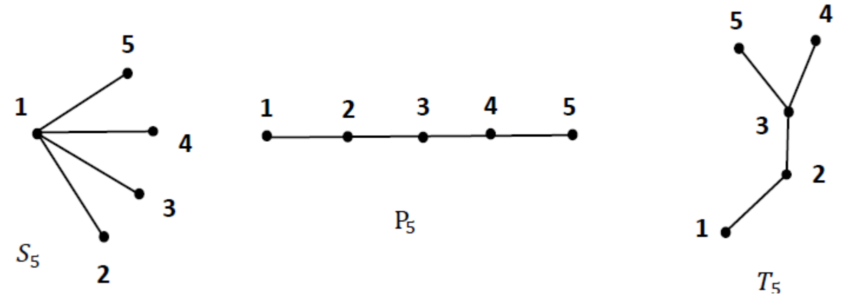
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G) = 3{,}3234$ olarak bulunur.

Çizelge 4.1. G grafının spektral yarıçapı için sınırlar

$\lambda_1(G)$	4.2. Teorem	4.3. Teorem	4.4. Teorem
3,3234	4	4	4

Örnek



Şekil 4.5. S_5, P_5 ve T_5 grafları

S_5, P_5 ve T_5 graflarının spektral yarıçapları için sınırlar bulalım.

Çözüm

Önce S_5 grafının spektral yarıçapı için sınırları bulalım. S_5 grafı minimum derecesi $\delta = 1$ olan $m = 4$ kenarlı ve $n = 5$ noktalı bağlantılı bir graftır. Şimdi S_5 grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$A(S_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(S_5) = 2$ olarak bulunur. Tüm bu bulduklarımızı kullanarak sınırları belirleyelim.

Çizelge 4.2. S_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar

$\lambda_1(S_5)$	4.2. Teorem	4.3. Teorem	4.4. Teorem
2	2	2	2

Şimdi P_5 grafının spektral yarıçapı için sınırları bulalım. P_5 grafı minimum derecesi $\delta = 1$ olan $m = 4$ kenarlı ve $n = 5$ noktalı bağlantılı bir graftır. Şimdi P_5 grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$\mathrm{A}(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5) = 1{,}7320$ olarak bulunur. Bulduğumuz değerleri kullanarak sınırları belirleyelim.

Çizelge 4.3. P_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar

$\lambda_1(P_5)$	4.2. Teorem	4.3. Teorem	4.4. Teorem
1,7320	2	2	2

Son olarak T_5 grafının spektral yarıçapı için sınırları bulalım. T_5 grafı minimum derecesi $\delta = 1$ olan $m = 4$ kenarlı ve $n = 5$ noktalı bağlantılı bir graftır. Şimdi T_5 grafının komşuluk matrisini yazalım.

$$\mathrm{A}(T_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(T_5) = 1{,}8477$ olarak bulunur. Tüm bu bulduğumuz değerleri kullanarak sınırları belirleyelim.

Çizelge 4.4. T_5 grafının spektral yarıçapı için sınırlar

$\lambda_1(T_5)$	4.2. Teorem	4.3. Teorem	4.4. Teorem
1,8477	2,4494	2,4494	2,4494

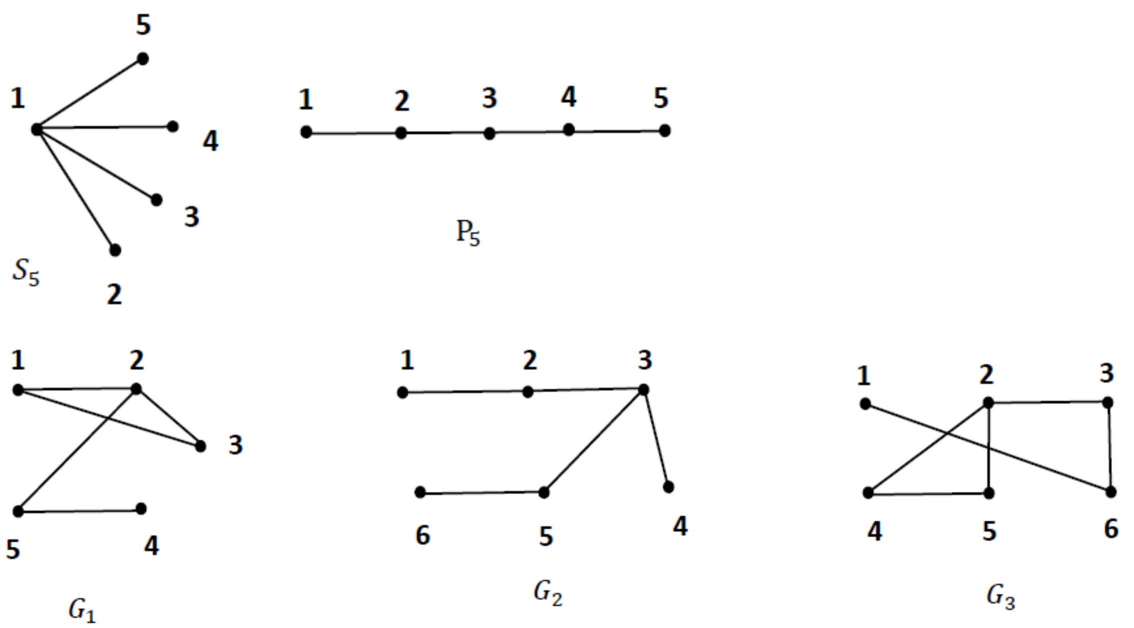
4.5. Conjecture

G, n noktalı sonlu yönsüz basit bağlantılı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı için aşağıdaki gibi bir alt sınır vardır:

$$\lambda_1(G) \geq \min_{\substack{i\sim j \\ j\sim k \\ \vdots \\ r\sim s}} \sqrt[nk]{d_i^{(k)} \dots d_s^{(k)}}$$

burada $d_i^{(k)}$, G^k daki i noktasının derecesidir.

Örnek

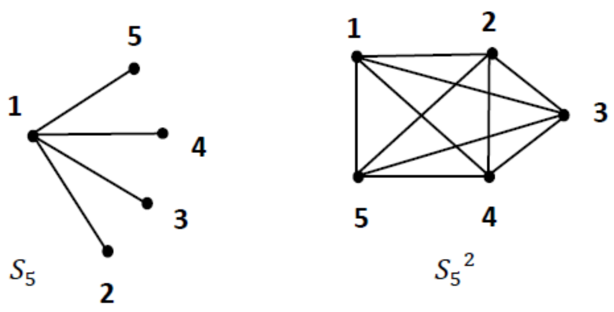


Şekil 4.6. S_5, P_5 ile G_1, G_2 ve G_3 grafları

Yukarıdaki grafların spektral yarıçapları için sınırlar bulalım.

Çözüm

Önce S_5 grafının k. kuvvet graflarını çizelim.



Şekil 4.7. S_5 ve $S_5{}^2$ grafları

Şimdi ise bu iki grafın komşuluk matrislerini yazalım.

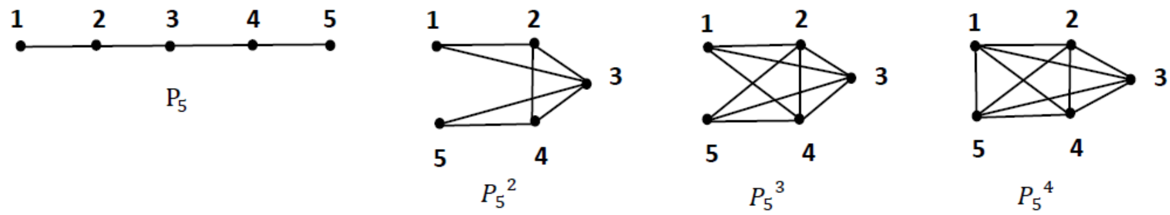
$$A(S_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(S_5) = 2$ olarak bulunur.

$$A(S_5{}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(S_5{}^2) = 4$ olarak bulunur.

Şimdi P_5 grafının k. kuvvet graflarını çizelim.



Şekil 4.8. P_5, $P_5{}^2$, $P_5{}^3$ ve $P_5{}^4$ grafları

Sırasıyla bu grafların komşuluk matrislerini yazalım.

$$A(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5) = 1{,}7320$ olarak bulunur.

$$A(P_5{}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5{}^2) = 2{,}9354$ olarak bulunur.

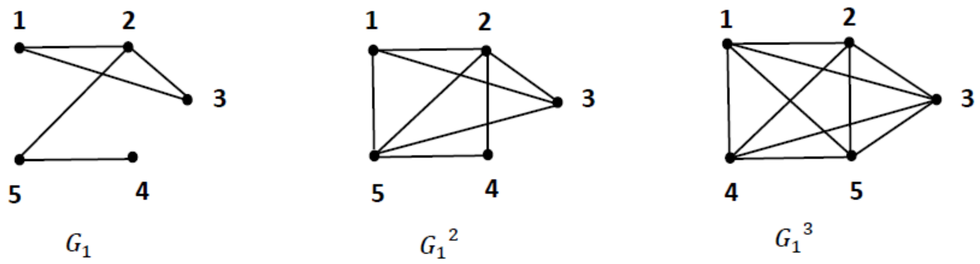
$$A(P_5{}^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5{}^3) = 3{,}6457$ olarak bulunur.

$$A(P_5{}^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(P_5{}^4) = 4$ olarak bulunur.

Şimdi ise G_1 grafının k. kuvvet graflarını çizelim.



Şekil 4.9. G_1, $G_1{}^2$ ve $G_1{}^3$ grafları

Sırasıyla bu grafların spektral yarıçaplarının bulalım.

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_1) = 2{,}2143$ olarak bulunur.

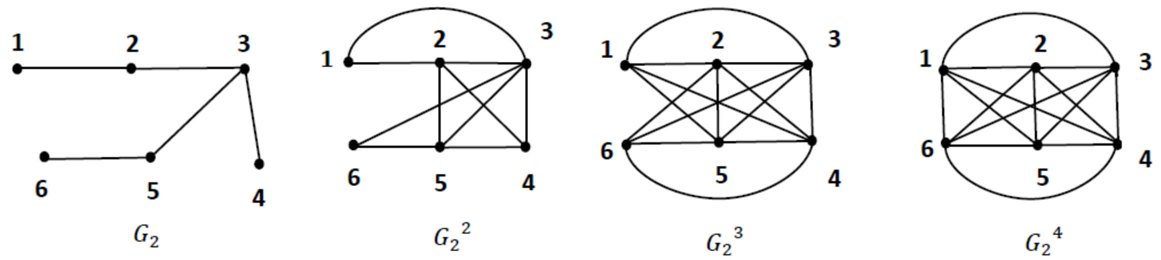
$$A(G_1^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_1{}^2) = 3{,}3234$ olarak bulunur.

$$A(G_1^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_1{}^3) = 4$ olarak bulunur.

Şimdi G_2 grafının k. kuvvet graflarını çizelim.



Şekil 4.10. G_2, $G_2{}^2$, $G_2{}^3$ ve $G_2{}^4$grafları

Sırasıyla G_2 grafının k. kuvvet graflarının komşuluk matrislerini yazalım.

$$\mathrm{A}(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_2) = 1{,}9318$ olarak bulunur.

$$\mathrm{A}(G_2{}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_2{}^2) = 3{,}5926$ olarak bulunur.

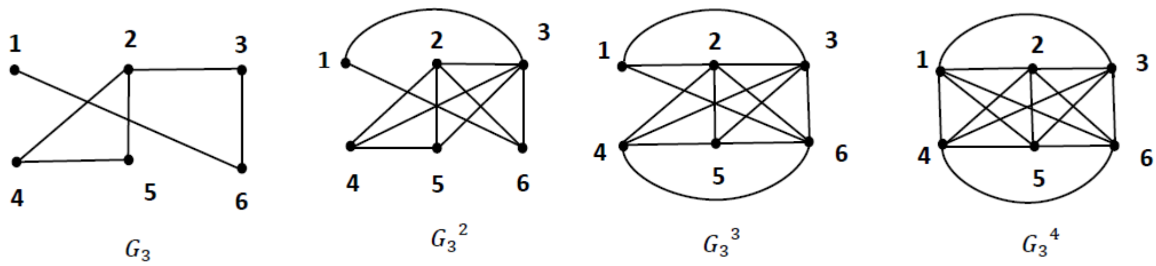
$$\mathrm{A}(G_2{}^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_2{}^3) = 4{,}7015$ olarak bulunur.

$$A(G_2{}^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_2{}^4) = 5$ olarak bulunur.

Son olarak G_3 grafının k. kuvvet graflarını çizelim.



Şekil 4.11. G_3, $G_3{}^2$, $G_3{}^3$ ve $G_3{}^4$ grafları

Şimdi sırasıyla G_3 grafının k. kuvvet graflarının komşuluk matrislerini yazalım.

$$A(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_3) = 2{,}2283$ olarak bulunur.

$$A(G_3{}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_3{}^2) = 3{,}5344$ olarak bulunur.

$$A(G_3{}^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_3{}^3) = 4{,}4278$ olarak bulunur.

$$A(G_3{}^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

komşuluk matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1(G_3{}^4) = 5$ olarak bulunur. Son olarak bütün bu grafların spektral yarıçapları için bulduğumuz sınırları bir tabloda gösterelim.

Çizelge 4.5. S_5, P_5 ile G_1, G_2 ve G_3 graflarının spektral yarıçapları için sınırlar

	λ_1	Teorem 4.2.	Teorem 4.3.	Teorem 4.4.	Conj 4.5.
S_5	$\lambda_1(S_5) = 2$	2	2	2	2
	$\lambda_1(S_5{}^2) = 4$	5,6568	4	4	2
P_5	$\lambda_1(P_5) = 1{,}7320$	2	2	2	1,6817
	$\lambda_1(P_5{}^2) = 2{,}9354$	4,1601	3,4641	3,3019	1,7067
	$\lambda_1(P_5{}^3) = 3{,}6457$	4,8989	4	3,7224	1,5497
	$\lambda_1(P_5{}^4) = 4$	5,6568	4	4	1,4142
G_1	$\lambda_1(G_1) = 2{,}2143$	3,4641	2,4494	2,2894	1,8171
	$\lambda_1(G_1{}^2) = 3{,}3234$	5,2414	4	3,4641	1,8612
	$\lambda_1(G_1{}^3) = 4$	5,6568	4	4	1,5874
G_2	$\lambda_1(G_2) = 1{,}9318$	2,4494	2,4494	2,4494	1,8171
	$\lambda_1(G_2{}^2) = 3{,}5926$	5,4288	4,4721	3,9359	1,8192
	$\lambda_1(G_2{}^3) = 4{,}7015$	6,3095	5	4,7817	1,6847
	$\lambda_1(G_2{}^4) = 5$	6,8986	5	5	1,4953
G_3	$\lambda_1(G_3) = 2{,}2283$	2,2894	2,4494	2,2894	1,8612
	$\lambda_1(G_3{}^2) = 3{,}5344$	4,0428	4,4721	3,6628	1,9138
	$\lambda_1(G_3{}^3) = 4{,}4278$	5,6967	5	4,5730	1,6598
	$\lambda_1(G_3{}^4) = 5$	6,8986	5	5	1,4953

5. SONUÇ

Bu çalışmada grafın k. kuvvetinin tanım ve özelliklerinden yararlanarak sonlu, yönsüz, basit, bağlantılı grafların komşuluk matrisinin en büyük özdeğeri için bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sınırların yer aldığı teorem ifadelerine örnekler verilerek sınırların yakınlığının çizilen graf yapılarına göre değiştiği görülmüştür. Tez çalışmamızda gördüğümüz bir alt sınırı da conjecture olarak tez çalışmamızda yer verdik. Çalışmanın devamında farklı graf yapıları incelenerek farklı sınırlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Taşçı, D. (2011). *Lineer cebir* (Dördüncü Baskı). Ankara: Gazi Yayınevi, 444-445.

2. Büyükköse, Ş., Gök Kaya, G. (2018). *Graf teoriye giriş* (Birinci Baskı). Ankara: Nobel Yayınevi, 1-81.

3. Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications,* London: Macmillan, 45.

4. Das, K. Ch., Guo, J. M. (2016). Eigenvalues of the k-th power of a graph, *Mathematische Nachrichten,* 289(13), 1585-1593.

5. Cvetkovic, D. M., Doob, M., Sachs, H. (1995). *Spectra of Graphs, Theory and Applications* (Third Edition). Heidelberg: Johan Ambrosius Barth Verlag.

6. Berman, A., Zhang, X.-D. (2001). On the spectral radius of graphs with cut vertices, *Journal of Combinatorial Theory Series B,* 83, 233-240.

7. Das, K. Ch., Guo, J. M. (2013). Laplacian eigenvalues of the k-th power of a graph, *Discrete Mathematics,* 313, 626-634.

8. Zhang, L., Wu, B. (2005). The Nordhaus-Gaddum-type inequalities for some chemical indices, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 54, 189-194.

9. Hong, Y., Shu J. L., Fang, K. F. (2001). A sharp upper bound of the spectral radius of graphs, *Journal of Combinatorial Theory Series B,* 81, 177-183.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KIZILCA, Fatma
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 22.01.1994, Ankara
Medeni hali	: Bekâr
Tel	: 0507 417 76 09
e-mail	:fatmakzlca94@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Böl.	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Böl.	2016
Lise	İnönü Lisesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-2019	Çözüm Akademi Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Başdaş Nurkahlı, S., Kabataş, Ü., Kızılca, F. (2018). Bounds for singless laplacian spectral radius, *Journal of Science and Arts*, 3(44), 631-644.

2. Büyükköse, Ş., Kızılca, F. (2019, 3-4 Mayıs). *The spectra of the graph with using k-th power of a graph*, International Workshop on Dynamical Systems and Applications.

Hobiler

Kitap okumak, Müzik dinlemek, Yürüyüş yapmak

GAZİ GELECEKTİR...