T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DÜZGÜN ALTMODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EDA ŞAHİN

TEMMUZ 2020

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DÜZGÜN ALTMODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EDA ŞAHİN

UŞAK 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Eda ŞAHİN

DÜZGÜN ALTMODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

EDA ŞAHİN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2020

ÖZET

Bu tez çalışmasında modüllerin yerel endomorfizma halkasına sahip düzgün altmodüllere ayrışımı incelenmiştir. Bu bağlamda farklı modül kategorilerde, abel kategorilerde ve torsion teoride Krull-Remak-Schmidt Teoreminin uyarlanabilirliğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Krull-Remak-Schmidt Teoremi özellikle kategori teoride temel ve önemli sonuçlardan biridir. Bu sonucu farklı modül sınıflarına ve torsion teoriye uyarlayıp, buradaki tekniklerle sonuçlar elde edilmiştir. Bu doğrultuda bazı somut örnekler ve uygulamalar verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde modül kavramı ve torsion teori ile ilgili temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde düzgün altmodüller modül kategorisinde ve torsion teoride incelenmiştir. Dördüncü bölümde abel kategorilerde düzgün ayrışımların tekliği üzerinde durulmuştur. Beşinci bölümde ise torsion teoriye göre düzgün ayrışımların tekliği incelenmiştir.

Bilim Kodu	**:** 403.01.00
Anahtar Kelimeler	**:** Modül, Düzgün altmodül, Torsion teori, Abel kategori
Sayfa Adedi	**:** 50
Tez Yöneticisi	**:** Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ

ON UNİFORM SUBMODULES

(M.Sc. Thesis)

EDA ŞAHİN

UŞAK UNIVERSITY
GRADUATE EDUCATION INSTITUTE
July 2020

ABSTRACT

In this thesis, the decomposition of the modules into uniform submodules with local endomorphism rings was investigated. In this context, it is aimed to examine the adaptability of Krull-Remak-Schmidt Theorem in different module categories, abel categories and torsion theory. The Krull-Remak-Schmidt Theorem is one of the fundamental and important results, especially in category theory. By adapting this result to different module classes and torsion theory, results were obtained with the techniques here. In this direction, some concrete examples and applications are given.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and a general literature is given. In the second part, basic definitions and features related to module concept and torsion theory are given. In the third chapter, the uniform submodules are examined in the module category and in torsion theory. In the fourth section, abel is focused on the uniqueness of uniform separations in categories. In the fifth chapter, the uniqueness of uniform decompositions according to torsion theory is examined.

Science Code **:** 403.01.00
Key Words **:** Modul, Uniform submodule, Torsion Theory, Abelian category
Page Number **:** 50
Supervisor **:** Assoc. Prof. Mustafa Kemal BERKTAŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında beni destekleyen, akademik açıdan gelişmemde ve ilerlememde yardımını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ'a,

Bu süreçte sıkıntımı ve sevincimi benimle paylaşan aileme, kalben benimle olan, daima destekleyen can dostlarıma,

En önemlisi eğitimde ve bilimde yer alabilmemizin önünü açan başöğretmen M. Kemal Atatürk'e ve güzel ülkeme minnet ve teşekkürlerimle.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu araştırmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}$	Prüfer p – grup
$\boldsymbol{M_R}$	M birimsel sağ R – modül
${}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M}$	M birimsel sol R – modül
$\oplus \boldsymbol{M_i}$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$\prod \boldsymbol{M_i}$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$	A nın B ye bölüm modülü
$\boldsymbol{M} \cong \boldsymbol{N}$	M, N ye izomorf
$\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{M}$	$A,$ M nin altmodülü
$\boldsymbol{A} \leq_e \boldsymbol{M}$	$A,$ M nin büyük (essential) altmodülü
$\boldsymbol{Hom_R}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$	M den N ye R – modül homomorfizmalarının sınıfı
$\boldsymbol{G}$ör$\boldsymbol{f}$	f fonksiyonunun görüntüsü
Ç$\boldsymbol{ekf}$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\boldsymbol{\tau}$	Torsion sınıfı

$\boldsymbol{t(M)}$	M nin torsion altmodülü
$\boldsymbol{E(A)}$	A modülünün injektif zarfı
$\boldsymbol{E_\tau(A)}$	A modülünün τ- injektif zarfı
$\boldsymbol{Ext_R^i}$	i. Extension funktoru
$\boldsymbol{\mathcal{C}}$	Kategori
$\boldsymbol{\mathcal{C}^{op}}$	$\mathcal{C}$ kategorisinin duali

Kısaltmalar	**Açıklama**
ACC	Artan zincir kuralı
Grp	Gruplar ve grup homomorfizmleri
Mod-*R*	R- modüller ve modül homomorfizmleri
Rng	Halkalar ve halka homomorfizmleri
Vect	Vektör uzayları ve lineer dönüşümler
Top	Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar
Set	Kümeler
$\boldsymbol{Mor}$	Morfizm
$\boldsymbol{Ob}$	Obje

1. GİRİŞ

Krull-Remak-Schmidt Teoremi özellikle kategori teoride temel ve önemli sonuçlardan biridir.

$\mathcal{A}$ toplamsal kategorisinde,

(i) $\mathcal{A}$ daki her obje, ayrıştırılamaz objelerin bir biçarpımıdır.

(ii) Eğer her M_i ve her N_j için $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$, $\mathcal{A}$ da ayrıştırılamaz bir obje ise, bu durumda $n = m$ ve her i için yeniden numaralandıktan sonra $M_i \cong N_i$ dir.

ise bu kategoride Krull-Remak-Schmidt sağlanır.

Bu ifade, Aritmetiğin Temel Teoremi'nin farklı bir versiyonu olarak görülebilir.

Krull-Remak-Schmidt Teoreminin kökeni Frobenius ve Stickelberger'in 1879 yılında kanıtladığı, 'Herhangi bir sonlu abel grup, mertebeleri asal sayının kuvveti olan devirli grupların direkt toplamıdır ve bu kuvvetler grup tarafından tek bir şekilde belirlenir.' teoremine dayanır.

Sonlu değişmeli olmayan gruplara ilk genellemeyi Wedderburn 1909 yılında, 'Eğer sonlu bir G grubunun $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_t = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_s$ şeklinde iki farklı direkt çarpım ayrışımı varsa o zaman $t = s$ olur ve tüm i ler için, $\varphi(G_i) = H_{\sigma(i)}$ olacak şekilde G nin bir φ otomorfizmi vardır.' teoremiyle yapmıştır.

Remak, 1911'de φ nın merkezi bir otomorfizm seçilebileceğini kanıtlamıştır.

Schmidt, 1913'de Remak'ın sonucunu basitleştirmiş ve geliştirmiştir.

Krull 1925'te sonuçları artan ve azalan zincir koşullarına sahip modüllere genişletmiş ve teori Schmidt tarafından 1929'da daha da derinleştirilmiştir.

Azumaya, 1950'de klasik Krull-Remak-Schmidt teoremini, yerel endomorfizm halkaları olan modüllerin sonsuz direkt toplamı durumuna genişletmiştir.

Bu çalışmada daha önce Diracca ve Facchini (19) ve Krause (18) nin ortaya koyduğu ve klasik Krull-Remak-Schmidt Teoreminin sonuçları olan kavramlar üzerinde durulmuş ve torsion teorideki uygulamasına yer yerilmiştir.

Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerek tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Başta modül teori olmak üzere, torsion teorinin gerekli kavramları üzerinde durulmuştur. Sonuçları ve tanımları anlaşılır hale getirmek için örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde düzgün altmodüller, modül kategorisinde ve torsion teoride incelenmiştir. Bu bağlamda, düzgün modül, düzgün (Goldie) boyut kavramları üzerinde durulmuş ve örneklere yer verilmiştir.

Ayrıca bu bölümde torsion teoride uygulamalar yapılmıştır, bu hususta τ – injektif zarf kavramıyla ilgili Lemma 3.3.1. de 'M düzgün (τ – düzgün) modül olmak üzere, $E_\tau(M)$ düzgündür (τ-düzgündür) ve eğer M düzgün (τ-düzgün) ise, $E_\tau(M)$ ayrıştırılamazdır.' ve Lemma 3.3.2. de 'M, τ-düzgün bir R- modül olsun. Bu durumda $E_\tau(M)$ nin endomorfizma halkası yereldir.' önermeleri verilmiş ve ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde Krause (18) tarafından 2003 yılında yayınlanan makale detaylı olarak incelenmiştir. Krause bu çalışmasında abel kategorilerde düzgün ayrışımların tekliği üzerinde durmuştur. Bu nedenle bu kısımda, öncelikle kategori teoride yer alan kavramlar, abel kategori, Grothendieck kategorisi hakkında bilgi verilmiştir.

Krause (18) de, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ve $B_1, B_2, \cdots, B_m$ herhangi bir abel kategoride düzgün objeler ve $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$ büyük denk olmak üzere, yani $A' \cong B'$ olacak şekilde $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ altobjeleri varsa, $n = m$ ve her $i = 1,2,\dots,n$ için A_i ve $B_{\sigma(i)}$ nin büyük denk olduğu bir σ permütasyonu vardır, sonucuna yer vermiştir.

Krause'den önce Diracca ve Facchini benzer bir sonucu A ve B objelerinin büyük denk olması yerine $A \longrightarrow B$ ve $B \longrightarrow A$ monomorfizmlerinin varlığı şartı ile elde etmiştir. O halde Krause'nin elde ettiği sonuç Diracca ve Facchini'nin (19, Teorem 1) de verdiği sonucun bir genelleştirilmiş halidir.

Beşinci bölümde Krause'nin ulaştığı sonuç torsion teoriye uygulanmıştır. Yani, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ve $B_1, B_2, \cdots, B_n$ τ – düzgün R – modüller ve $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ τ – büyük denk ise, yani $A' \cong B'$ olacak şekilde $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ τ – büyük altmodülleri varsa bu durumda $m = n$ ve her i için, A_i ve $B_{\sigma(i)}$ τ – büyük denk olacak şekilde $\{1,2,\cdots,n\}$ nin bir σ permütasyonu vardır, sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışmada, her iki sonucun da klasik Krull-Remak-Schmidt Teoreminin sonuçları olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada halkalar birimli ve aksi belirtilmedikçe modüller sol R-modül olarak alınacaktır. Bu bölümde tezin diğer bölümlerinin anlaşılırlığını arttırmak ve gerekli alt yapıyı oluşturmak amacıyla modül teorideki temel tanımlara, Noether ve Artin modüllere, injektif modüllere, torsion teorinin temel tanımlarına ve modüllerin torsion teorideki belli başlı tanım ve uygulamalarına yer verilmiştir. Verilen temel tanım ve özelliklerin ayrıntıları için (1), (2), (3), (4), (5), (6), (9) ve (13) kaynakları referans olarak verilebilir.

2.1. Modüller ve Altmodüller

Tanım 2.1.1. R halkası ve $(M,+)$ abel grubu için $f: R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(r,m) \in M$ elemanını rm ile göstereceğiz. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için,

(i) $r(m+n) = rm + rn$

(ii) $(r+s)m = rm + sm$

(iii) $(rs)m = r(sm)$

(iv) $1.m = m$

ise M ye bir *(üniter) sol R-modül* veya R *halkası üzerinde bir sol modül* denir ve ${}_RM$ ile gösterilir. Benzer koşulları gerçekleyen bir $g: M \times R \longrightarrow M$, $g(m,r) = mr$ fonksiyonu verilmişse M ye *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir (1).

Örneğin;

V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir F-modüldür.

Her R halkası kendisi üzerinde hem sol R-modül hem de sağ R-modüldür.

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $R[x]$ polinomlar halkası bir R-modüldür.

Tez boyunca bir R halkası üzerinde sol R-modüller kısaca modül olarak ifade edilecektir.

Tanım 2.1.2. M bir modül olsun. M modülünün boş olmayan bir N alt kümesi kendi başına modül oluyorsa *N ye M nin bir altmodülü* denir ve $N \leq M$ veya $_RN \leq {}_RM$ biçiminde gösterilir (1).

Tanım 2.1.3. M modülünün bir S alt kümesini içeren en küçük $\langle S \rangle$ altmodülüne *S nin ürettiği altmodül* denir. $\langle S \rangle$ altmodülünün her zaman mevcut olduğu ve S yi içeren tüm altmodüllerin kesişimine eşit olduğu kolayca kontrol edilir. Ayrıca $S \neq \emptyset$ alt kümesi için S nin ürettiği $\langle S \rangle$ altmodülü $r_i \in R, s_i \in S$ $(i = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere tüm $r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n$ şeklinde yazılabilen elemanlardan yani S nin elemanlarının tüm lineer bileşimlerinden oluşur. $S = \emptyset$ ise $\langle S \rangle = 0$ dır (1).

Tanım 2.1.4. S , M modülünün sonlu bir alt kümesi ve $M = \langle S \rangle$ ise M ye *sonlu üretilen modül* denir (1).

Tanım 2.1.5. S, tek elemanlı kümeyse $(S = \{x\})$, $\langle S \rangle = \langle x \rangle = Rx = \{rx \mid r \in R\}$ altmodülüne *x in ürettiği devirli modül* denir (1).

Tanım 2.1.6. M modülünün K ve L altmodüllerinin $K \cap L$ kesişimi de bir altmodüldür. Ancak $K \cup L$ birleşimi altmodül olmayabilir. Bu iki altmodülü içeren en küçük altmodülü $\langle K \cup L \rangle = \{k + l : k \in K, l \in L\}$ olduğu kolayca görülür. Bu altmodüle *K ve L altmodüllerinin toplamı* denir ve $K + L$ ile gösterilir (1).

Tanım 2.1.7. Kendisinden ve sıfırdan başka altmodülü bulunmayan sıfırdan farklı modüle *basit modül* denir (1).

Önerme 2.1.1. Her basit modül devirlidir. (2, Önerme 1.2.)

İspat. M bir basit modül olsun. M sıfırdan farklı bir modül olduğundan $0 \neq m \in M$ elemanı mevcuttur. Bu $0 \neq m \in M$ elemanı ile oluşturulan Rm devirli altmodülünü ele alalım. M basit olduğundan $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

Tanım 2.1.8. Bir M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü N olsun. M nin N de içerilen sıfırdan farklı ve N den başka hiçbir altmodülü yoksa N modülüne *minimal altmodül* denir (3).

N nin bir minimal altmodül olması için gerek ve yeter koşul basit altmodül olmasıdır (3).

Tanım 2.1.9. Bir M modülünün bir öz altmodülü N modülü olsun. M modülünün N modülünü kapsayan N modülünden başka hiçbir öz altmodülü yoksa N modülüne bir *maksimal altmodül* denir (3).

Bir modülün birden fazla maksimal altmodülü olabilir. Örneğin; ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünde her p asal sayısı için $p\mathbb{Z}$ maksimal altmodüldür. Diğer taraftan maksimal altmodülü bulunmayan modüller de vardır. Bir B modülünün basit olması için gerek ve yeter koşul 0 altmodülünün maksimal olmasıdır (1).

Teorem 2.1.1. M sonlu üretilmiş, sıfırdan farklı bir modül olsun. Bu durumda M nin her altmodülü bir maksimal atmodül tarafından kapsanır. Dolayısıyla M maksimal altmodüle sahiptir (5).

Tanım 2.1.10. M bir modül olsun. M modülünün her U altmodülü için $A \cap U = 0$ olması durumunda $U = 0$ oluyorsa A altmodülüne M de *büyük (essential)* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir (4).

Sıfırdan farklı her modülün kendi içinde bir büyük altmodül olduğu açıktır.

Lemma 2.1.1. K ve N, bir M modülünün altmodülleri olsun.

1. $N \leq_e M \Leftrightarrow$ her $0 \neq m \in M$ için $N \cap Rm \neq 0$
2. $K \subset N$, $K \leq_e M \Leftrightarrow$ $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$
3. $N \leq_e M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dir.
4. $N \leq_e M$ ve $K \leq_e M$ ise $N \cap K \leq_e M$ dir.
5. $K \subset N$ olsun. Eğer ${}^{N}/_{K} \leq_e {}^{M}/_{K}$ ise $N \leq_e M$ dir.
6. $N \leq_e M$ ve $m \in M$ ise Nm^{-1}, R nin büyük sol idealidir (4).

Teorem 2.1.2. M bir modül olmak üzere, L_i $(i \in I)$, M nin büyük altmodülü ise kesişimler de büyüktür yani ; $\bigcap L_i \leq_e M$ (5).

Tanım 2.1.11. M bir modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. N yi M de büyük olarak içeren altmodüllerin ailesi içinde maksimal olan bir K altmodülüne N nin M de bir *kapanışı (closure)* denir (4).

2.2. Modül Homomorfizmaları ve Bölüm Modülü

Tanım 2.2.1. M ve N iki modül olsun. Her $x, y \in M$ ve her $a, b \in R$ için,

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

olacak biçimde $f : M \longrightarrow N$ fonksiyonuna *modül homomorfizması* denir. Ayrıca f örten ise, f ye *modül epimorfizması*, birebir ise *modül monomorfizması* adı verilir. Eğer f hem birebir hem de örten ise, f ye *modül izomorfizması* denir. Bu durumda M ile N *izomorf modüller* olup, $M \cong N$ ile gösterilir (5).

Tanım 2.2.2. $f : M \longrightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun.

$\{x \in M : f(x) = 0_N\}$ kümesine f nin *çekirdeği* denir ve $Çekf$ ile gösterilir.

$Görf = \{f(m) : m \in M\}$ kümesine f altında M *nin görüntüsü* denir (1).

Tanım 2.2.3. M bir modül ve $N \leq M$ olsun. N nin M içindeki sol kosetlerinden oluşan $M/N = \{x + N : x \in M\}$ kümesi $x + N$, $y + N \in M/N$ ve $a \in R$ için $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ ve $a(x + N) = ax + N$ ile tanımlı işlemlerle bir modül olur. Bu modüle M *nin* N *ye* göre *bölüm modülü* denir (5).

Teorem 2.2.1. (İzomorfizma Teoremleri) M ve N modülleri için

(i) $f : M \longrightarrow N$ modül homomorfizması ise $M/Çekf \cong Görf$ dir.

(ii) $K \leq L \leq M$ ise $M/L \cong (M/K)/(L/K)$ dir.

(iii) $K, H \leq M$ için $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ dir (5).

Örnek 2.2.1. M modülünün L altmodülü için $i_L : L \longrightarrow M$ içerme fonksiyonu bir modül monomorfizmasıdır. i_L ye *doğal gömme fonksiyonu* da denir. Ayrıca $Göri_L \cong L$ dir. Böylece M nin her altmodülü bir monomorfizmanın görüntüsüdür.

Örnek 2.2.2. M bir modül ve N, M nin altmodülü olsun. $x \in M$ için $\pi_N(x) = x + N$ ile tanımlanan $\pi_N : M \longrightarrow M/N$ fonksiyonu bir modül epimorfizmasıdır. Bu epimorfizmaya *doğal epimorfizma* denir. Ayrıca $Çek\pi_N = N$ dir. Dolayısıyla M nin her altmodülü bir epimorfizmanın çekirdeğidir.

Önerme 2.2.1. M bir modül olmak üzere $\varphi_M : Hom_R(R, M) \longrightarrow M$ bir modül izomorfizmasıdır (7).

Teorem 2.2.2. R, S ve S' halkalar olsun. $\phi : R \longrightarrow S$ homomorfizma ve $\phi' : R \longrightarrow S'$ epimorfizma olmak üzere $K = Çek\phi$ ve $K' = Çek\phi'$ ise, $K' \subseteq K$ dır (5).

2.3. Sıfırlayanlar

Tanım 2.3.1. M bir modül, $N \subseteq M$ ve $A \subseteq R$ olmak üzere $r_R(N) = \{r \in R : Nr = 0\}$ kümesine *N nin R deki sıfırlayanı,* $l_M(A) = \{x \in M : xA = 0\}$ kümesine *A nın M deki sıfırlayanı* adı verilir (5).

Önerme 2.3.1. M modülü göz önüne alındığında $r_R(N)$ kümesi, eğer $N \subseteq M$ ise R nin bir sağ ideali, $N \leq M$ ise R nin bir idealidir (5).

Önerme 2.3.2. M bir modül ve I bir indeks kümesi olmak üzere, $\alpha \in I$ için K_α lar M nin altgrupları olsun. Bu durumda $r_R(\sum_{\alpha \in I} K_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} r_R(K_\alpha)$ dır (5).

2.4. Modüllerin Direkt Toplamı, Direkt Çarpımı ve Serbest Modüller

Tanım 2.4.1. Herhangi $\{M_k \mid k \in K\}$ modüller topluluğunun $\prod_{k \in K} M_k$ kartezyen çarpımının $(\dots, m_k, \dots)$ elemanını kısaca (m_k) ile gösterelim. Kartezyen çarpımın (m_k) ve (n_k) gibi iki elemanının toplamını $(m_k) + (n_k) = (m_k + n_k)$ ve $r \in R$ ile çarpımını $r(m_k) = (rm_k)$ olarak tanımlayarak, $\prod_{k \in K} M_k$ nın bir modül oluşturduğunu kolayca kontrol edebiliriz. Bu $\prod_{k \in K} M_k$ modülüne, M_k modüllerinin *direkt çarpımı* denir (1).

Tanım 2.4.2. $\prod_{k \in K} M_k$ direkt çarpımının

$$\bigoplus_{k \in K} M_k = \left\{(m_k) \in \prod_{k \in K} M_k \,\middle|\, en\ çok\ sonlu\ sayıda\ k \in K\ için\ m_k \neq 0\right\}$$

altmodülüne m_k modüllerinin *direkt toplamı* denir.

K indis kümesinin sonlu olduğu durumda $\prod_{k \in K} M_k = \bigoplus_{k \in K} M_k$ olduğu açıktır (1).

Önerme 2.4.1. M bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M , $M = \sum_{i \in I} S_i$ koşulunu sağlayan basit altmodüllerinin bir $\{s_{i \in I}\}_{i \in I}$ ailesine sahiptir.

(ii) M, toplamı M nin kendisi olan basit altmodüllerinin bir ailesine sahiptir.

(iii) M nin her altmodülü M nin bir direkt toplananıdır. (2, Önerme 3.1)

Tanım 2.4.3. Önerme 2.1.1. deki denk koşullardan herhangi birini sağlayan M modülüne *yarı basit modül* denir. Kısaca basit altmodüllerin toplamı şeklinde gösterilebilen modüle *yarı basit modül* denir (2).

Tanım 2.4.4. M bir modül ve X, M nin alt kümesi olmak üzere,

(i) $\langle X \rangle = XR = M$ ise $X,\ M$ yi *üretir* denir.

(ii) $i = 1,2,\dots,n \in \mathbb{N}$ için $x_i \in X$ ve $r_i \in R$ olmak üzere eğer $x_1r_1 + \cdots + x_nr_n = 0$ iken, her i için $r_i = 0$ oluyorsa X e *R-bağımsız* denir (6).

Tanım 2.4.5. M modülünün X alt kümesi R-bağımsız ve M yi üretirse *X e M nin bir bazı* (*R-bazı*) denir (6).

Lemma 2.4.1. M modülünün X alt kümesi için aşağıdakiler denktir:

(i) X , M nin bir bazıdır.

(ii) M nin sıfırdan farklı her bir m elemanı farklı $x_i \in X$ ve $0 \neq r_i \in R$ olmak üzere $m = x_1r_1 + \cdots + x_nr_n$ biçiminde tek türlü yazılır (6).

Tanım 2.4.6. M modülü bir X bazına sahipse M ye *serbest (free) modül* denir (6).

Lemma 2.4.2. M modülü ve $X \subseteq M$ için aşağıdakiler denktir:

(i) M, bazı X olan bir serbest modüldür.

(ii) $x \in X$ için, $R_x = R$ olmak üzere $M \cong \bigoplus_{x \in X} R_x$ dir (6).

2.5. Tam Diziler ve Parçalanma

Tanım 2.5.1. Modüllerin $\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \cdots$ dizisi ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $Çek f_n = Gör f_{n+1}$ oluyorsa diziye *tam dizi (exact sequence)* denir. Modüllerin $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ formundaki tam dizisine *kısa tam dizi (short exact sequence)* denir (7).

Tanım 2.5.2. $f : M \longrightarrow N$ ve $f' : N \longrightarrow M$ homomorfizmaları için $ff' = 1_N$ ise f dönüşümüne *parçalanabilir (split) epimorfizma* ve f' dönüşümüne *parçalanabilir (split) monomorfizma* denir (5).

Tanım 2.5.3. $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$ kısa tam dizisinde f split monomorfizma ve g split endomorfizma ise bu diziye *parçalanabilir kısa tam dizi* denir (5).

Önerme 2.5.1. $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Dizi parçalanabilirdir.

(ii) $f : M_1 \rightarrow M$ parçalanabilir monomorfizmdir.

(iii) $g : M \rightarrow M_2$ parçalanabilir endomorfizmdir.

(iv) $Görf = Çekg \leq \oplus M$ dir.

(v) Her $h : M_1 \longrightarrow N$ homomorfizmi için $\overline{h}f = h$ olacak biçimde $\overline{h} : M \longrightarrow N$ homomorfizmi vardır.

(vi) Her $h : N \longrightarrow M_2$ homomorfizmi için $g\overline{h} = h$ olacak biçimde $\overline{h} : N \longrightarrow M$ homomorfizmi vardır (5).

2.6. İnjektif Modül

Tanım 2.6.1. M ve E modülleri verilsin. Eğer her $f : K \longrightarrow E$ monomorfizmi ve her $\gamma : K \longrightarrow M$ homomorfizmi için $hf = \gamma$ olacak şekilde bir $h : E \longrightarrow M$ homomorfizmi varsa, M ye E*-injektif modül* denir (3).

Lemma 2.6.1. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) Her $\alpha : M \longrightarrow B$ monomorfizmi parçalanabilirdir (split; yani $Görf,\ B$ de bir direkt toplanandır).

(ii) Her $f : A \longrightarrow B$ monomorfizmi ve her $g : A \longrightarrow M$ homomorfizmi için $f = hg$ olacak şekilde bir $h : B \longrightarrow M$ homomorfizmi vardır.

(iii) Her $f : A \longrightarrow B$ monomorfizmi için $Hom(f, 1_M) : Hom_R(B, M) \longrightarrow Hom_R(A, M)$ bir epimorfizmdir (3, Teorem 5.3.1).

Tanım 2.6.2. Lemma 2.6.1. de verilen denk koşullardan birini sağlayan bir M modülüne *injektif modül* denir (3).

Tanım 2.6.3. I injektif modülüne, $f : M \longrightarrow I$ büyük monomorfizmi ile birlikte M modülünün *injektif zarfı (injective hull)* denir (1).

Teorem 2.6.1. Her modülün bir injektif zarfı bulunur ve injektif zarf izomorfizm farkıyla tektir (1, Teorem 10,2).

Lemma 2.6.2. $A \leq B$ ve $E(B)$, B nin injektif zarfı olsun. Bu durumda bir $C \leq E(B)$ için $E(B) = E(A) \oplus C$ olacak şekilde A nın bir $E(A)$ injektif zarfı vardır. Eğer A, B nin büyük altmodülü ise $E(A) \cong E(B)$ dır (8).

2.7. Torsion Teori

Tanım 2.7.1. Aşağıdaki koşullar geçerli olduğunda, $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ modül sınıfları torsion teori olarak adlandırılır:

(i) Her $A \in \mathcal{T}$ ve her $B \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(A, B) = 0$ dır.
(ii) Her $B \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(A, B) = 0$ ise $A \in \mathcal{T}$ dir.
(iii) Her $A \in \mathcal{T}$ için $Hom_R(A, B) = 0$ ise $B \in \mathcal{F}$ dir.

$\mathcal{T}$ sınıfı, τ nin *torsion sınıfı* olarak adlandırılır ve objelerine *τ-torsion modül* denir, buna karşılık $\mathcal{F}$ sınıfı ise τ nin *torsion free sınıfı* olarak adlandırılır ve objelerine *τ-torsion free modül* denir (9).

Tanım 2.7.2. Modüllerin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için,

(i) Her $A \in \mathcal{A}$ ve A nın her B altmodülü için, $B \in \mathcal{A}$ ise altmodül altında kapalıdır.
(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ ve her epimorfizm (sırasıyla izomorfizm) $f : A \longrightarrow B$ için, $B \in \mathcal{A}$ ise homomorfik görüntüler (sırasıyla izomorfizmler) altında kapalıdır.
(iii) Her $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I)$ için $\bigoplus_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ (sırasıyla $\prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$) için direkt toplam (sırasıyla direkt çarpım) altında kapalıdır.
(iv) Her tam dizi $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ ile $A', A'' \in \mathcal{A}$ için $A \in \mathcal{A}$ ise genişlemeler altında kapalıdır.
(v) Her $A \in \mathcal{A}$ için $E(A) \in \mathcal{A}$ ise injektif zarf altında kapalıdır.

denir (9).

Lemma 2.7.1. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bir torsion teorisi olsun. $\mathcal{T}$ direkt toplam altında kapalı ve $\mathcal{F}$ direkt çarpım altında kapalıdır (9).

Teorem 2.7.1. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}$ modül sınıfları olsun. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ nin bir torsion teori olması için gerek ve yeter koşul,

(i) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.

(ii) $\mathcal{T}$, homomorfik görüntüler altında kapalıdır.

(iii) $\mathcal{F}$, altmodüller altında kapalıdır.

(iv) Her A modülü $t(A)$ altmodülüne sahiptir öyle ki $t(A) \in \mathcal{T}$ ve $A/t(A) \in \mathcal{F}$ dır (9).

İspat. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ nin bir torsion teori olsun. Bu durumda (i) sağlanır. $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ tam dizi olsun. Bu tam diziden her $F \in \mathcal{F}$ için, $0 \longrightarrow Hom_R(A'', F) \longrightarrow Hom_R(A, F)$ tam dizisi elde edilir ve böylece eğer $A \in \mathcal{T}$ ise o zaman $A'' \in \mathcal{T}$ dır. Ayrıca ilk tam diziden her $T \in \mathcal{T}$ için, $0 \longrightarrow Hom_R(T, A') \longrightarrow Hom_R(T, A)$ tam dizisi elde edilir. Böylece her $A \in \mathcal{F}$ ise o zaman $A' \in \mathcal{F}$ dir.

Dördüncü durum için, A bir modül ve

$$t(A) = \sum_{i \in I} \{B_i \leq A \mid B_i \in \mathcal{T}\}$$

olsun. $f : \oplus_{i \in I} B_i \longrightarrow t(A)$ doğal bir epimorfizm olduğu için, (ii) ve Lemma 2.7.1. den $t(A) \in \mathcal{T}$ dir.

Varsayalım ki $A/t(A) \notin \mathcal{F}$ olsun. Buradan $T \in \mathcal{T}$ ve sıfırdan farklı bir $g : T \longrightarrow A/t(A)$ homomorfizmi vardır. Öyleyse $B/t(A) = Görg \in \mathcal{T}$ olur.

Diğer taraftan,

$$0 \longrightarrow t(A) \longrightarrow B \longrightarrow B/t(A) \longrightarrow 0$$

tam dizisinden, her $F \in \mathcal{F}$ için,

$$Hom_R(B/t(A), F) \longrightarrow Hom_R(B, F) \longrightarrow Hom_R(t(A), F)$$

tam dizisi elde edilir.

İlk ve son terim sıfır olduğundan, her $F \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(B, F) = 0$ vardır, bu nedenle $B \in \mathcal{T}$ dır. Ama $B = t(A)$ ve $g = 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

Tersine, şimdi $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}$ sınıflarının (i)-(iv) koşullarını karşıladığını varsayalım.

İlk olarak, $T \in \mathcal{T}$ ve $Hom_R(T, F) \neq 0$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ olsun ve $0 \neq f : T \longrightarrow F$ diyelim. Öyleyse (i) den $Görf = 0$ olduğundan, (ii) den $Görf \in \mathcal{T}$ ve (iii) den $Görf \in \mathcal{F}$ olur ki, bu ise bir çelişkidir.

İkinci olarak A, her $F \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(A, F) = 0$ olacak şekilde bir modül olsun. (iv) den $t(A) \in \mathcal{T}$ ve $A/t(A) \in \mathcal{F}$ olacak şekilde A nın bir $t(A)$ altmodülü vardır. Bu durumda $A = t(A) \in \mathcal{T}$ olduğundan $Hom_R(A, A/t(A)) = 0$ dır.

Böylece $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ torsion teorinin tanımından ikinci koşulu karşılar. (iii) de benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.7.2. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}$ modül sınıfları olsun.

(i) Herhangi bir torsion teoriye göre $\mathcal{T}$ nin torsion sınıf olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{T}$ nin homomorfik görüntüler, direkt toplamlar ve genişlemeler altında kapalı olmasıdır.

(ii) Herhangi bir torsion teoriye göre $\mathcal{F}$ nin torsion free sınıf olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ nin altmodüller, direkt çarpımlar ve genişlemeler altında kapalı olmasıdır (9).

Tanım 2.7.3. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bir torsion teorisi olsun.

(i) Eğer $\mathcal{T}$ injektif zarf altında kapalı ise kararlıdır,

(ii) Eğer $\mathcal{T}$ altmodüller altında kapalı ise kalıtsaldır denir (9).

Önerme 2.7.1. τ nun kararlı bir torsion teorisi olması için gerek ve yeter koşul $t(A)$ nın her A injektif modülünün direkt toplananı olmasıdır (9).

İspat. A bir injektif modül ve τ kararlı bir torsion teorisi olsun. $E(t(A))$ τ-torsion olduğundan $E(t(A)) = t(A)$ dır. Öyleyse $t(A)$, A injektif modülünün direkt toplamıdır.

Diğer taraftan, A bir τ-torsion modülü ve $t(E(A))$, $E(A)$ nın direkt toplamı olsun. $A \subseteq t(E(A))$ ve $A \leq_e E(A)$ olduğundan, $t(E(A)) = E(A)$ dır. Öyleyse $E(A)$ τ-torsion dır, sonuç olarak τ kararlıdır.

2.8. τ–yoğun(τ–dense), τ–kapalı (τ–closed), τ–kapanış (τ–clousure) Altmodülleri

Tanım 2.8.1. B , A nın bir altmodülü olmak üzere, eğer $A/_B$ τ – torsion ise, B , A'da *τ – yoğundur (τ – dense)* denir (9).

Önerme 2.8.1. A bir modül ve $B, B' \leq A$ olsun.

(i) $B \subseteq B'$ olmak üzere B nin A da τ-yoğun olması için gerek ve yeter koşul B nin B' de ve B' nin de A da τ-yoğun olmasıdır.

(ii) Eğer B ve B', A da τ-yoğunsa, $B \cap B'$, A da τ-yoğundur.

(iii) Eğer, A τ-torsion free ve B , A da τ-yoğunsa, $B \leq_e A$ dır (9).

Tanım 2.8.2. B , A nın bir altmodülü olmak üzere, eğer $A/_B$ τ – torsion free ise, B , A'da τ – *kapalıdır (τ – closed)* denir (9).

Önerme 2.8.2. A bir modül ve $B, B' \leq A$ olsun.

(i) $t(A)$, A nın τ – kapalı bir altmodülüdür.

(ii) B, A da τ – kapalı ise, $t(A) \subseteq B$ ve $t(B) = t(A)$ dır.

(iii) $B \subseteq B'$ ve B, A da τ – kapalı ise B, B' de τ – kapalıdır.

(iv) $B \subseteq B'$ olmak üzere B, B'de τ – kapalı ve B', A da τ – kapalı ise B de A da τ – kapalıdır.

(v) A nın τ – kapalı altmodüllerinin sınıfı, kesişimler altında kapalıdır.

(vi) $t(A)$, A nın tüm τ – kapalı altmodüllerinin kesişimidir (9).

Tanım 2.8.3. A bir modül, $B \leq A$ olsun. B yi içeren A nın tek minimal τ-kapalı altmodülüne A daki B nin *τ – kapanışı (τ – closure)* denir (9).

B yi içeren A nın tüm τ – kapalı altmodüllerinin kesişiminin A da τ – kapalıdır (bkz, 9 Önerme 2.8.2).

Önerme 2.8.3. A bir modül ve $B \leq A$ ve B', A daki B nin τ – kapanışı olsun. Öyleyse, $B'/_B = t(A/_B)$ dir (9).

Önerme 2.8.4. $(A_i)_{i \in I}$ bir modül ailesi olsun. Aşağıdaki koşullardan biri geçerli olsun.

(i) I sonlu bir küme;

(ii) τ, altmodüller ve homomorfik görüntüler altında kapalı olan bir $\mathcal{A}$ modül sınıfı tarafından üretilir ve R nin her bir $\mathcal{A}$ – yoğun sol ideali, sonlu olarak üretilir. Bu durumda,

$$E_\tau(\oplus_{i\in I}A_i) = \oplus_{i\in I}E_\tau(A_i)$$

dır (9).

2.9. τ–injektif (τ–injective), τ–büyük (τ–essential) Modüller

Tanım 2.9.1. B, A modülünün bir altmodülü olsun. B, A da τ – yoğun ve büyük ise o zaman B ye τ – *büyük (τ – essential)* altmodül denir (12).

Teorem 2.9.1. R bir halka olsun. Bir A modülü için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) A, τ – torsion bir çekirdeğe sahip olan her monomorfizme göre injektiftir.

(ii) A, $E(A)$ 'nın bir τ – kapalı altmodülüdür.

(iii) R nin τ – yoğun bir sol idealinden A ya tanımlı her homomorfizm, R den A ya bir homomorfizme genişletilebilir**.**

(iv) Her τ – torsion modül B için $Ext_R^1(B, A) = 0$ dir.

(v) R nin her τ – yoğun sol ideal I sı için $Ext_R^1(R/I, A) = 0$ dir (9, Teorem 2.1.1).

Tanım 2.9.2. Teorem 2.9.1 in eşdeğer koşullarını sağlayan bir modül τ – *injektif* olarak adlandırılır (9, Tanım 2.1.2).

Önerme 2.9.1. Bir A modülünün τ – injektif olması için gerek ve yeter koşul R nin τ – büyük bir sol idealinden A ya tanımlı her homomorfizm, R den A ya bir homomorfizme genişletilebilir olmasıdır (9, Önerme 2.1.3).

Tanım 2.9.3. τ, altmodüller ve homomorfik görüntüler altında kapalı olan bir $\mathcal{A}$ modül sınıfı tarafından üretilen kalıtsal bir torsion teori olsun. A bir modül ve B, A nın bir altmodülü olsun. Eğer $A/B \in \mathcal{A}$ ise B altmodülüne $\mathcal{A}$ – *yoğundur* denir (9, Tanım 2.1.4).

Önerme 2.9.2. τ, altmodüller ve homomorfik görüntüler altında kapalı olan bir $\mathcal{A}$ modül sınıfı tarafından oluşturulan kalıtsal bir torsion teori ve A bir modül olsun. Bu durumda,

(i) A, τ – injektiftir.

(ii) $\mathcal{A}$ sınıfının her modülü, modüllerinin $0 \longrightarrow A \longrightarrow E(A) \longrightarrow E(A)/A \longrightarrow 0$ kısa tam dizisine göre projektiftir (9, Önerme 2.1.6).

Önerme 2.9.3. τ nin kararlı olması için gerek ve yeter koşul $t(A)$ nın, her τ – injektif A modülünün direkt toplananı olmasıdır (9, Önerme 2.1.8).

Tanım 2.9.4. A modülünün $E(A)$ içindeki τ – kapanışına A nın τ *–injektif zarfı* denir ve $E_\tau(A)$ şeklinde gösterilir (9, Tanım 2.2.1).

Önerme 2.9.4. τ kararlı bir torsion teorisi ve A bir modül olsun. $E_\tau(A/t(A)) = t(E(A)/E(t(A))) = E(t(A))$ ve $E_\tau(A) \cong E_\tau\big(t(A)\big) \oplus E_\tau(A/t(A))$ dır (9, Önerme 2.2.7).

Lemma 2.9.1. A bir modül olsun. Bu durumda,

(i) $E_\tau(A)$, $E(A)$ nın bir büyük τ – injektif altmodülüdür ve $E_\tau(A)$, $E(A)$ nın τ – injektif altmodülleri içinde bu özelliğe sahip en küçük altmodüldür.

(ii) $E_\tau(A)/A = \tau(E(A)/A)$ dır.

(iii) D bir τ – injektif modül ise o zaman $D = E_\tau(A)$ olması için gerek ve yeter koşul A modülünün, D nin τ – yoğun büyük altmodülü olmasıdır.

(iv) Eğer A τ – torsion (sırasıyla τ – torsion free) ise, $E_\tau(A)$ da τ – torsion dır (sırasıyla τ – torsion free dir) (9, Lemma 2.2.2).

2.10. Noether ve Artin Modüller

Tanım 2.10.1. M bir modül olsun. M nin altmodüllerinin boştan farklı her Ω ailesi bir maksimal elemana sahipse yani Ω, K altmodülünü kapsayan bir elemanı olmayacak şekilde bir K elemanına sahipse, M modülüne altmodülleri için *maksimal koşulunu sağlar* denir (2).

Tanım 2.10.2. M bir modül olsun. M nin altmodüllerinin $K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \cdots$ şeklinde her bir artan zinciri için öyle $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq m$ koşulunu sağlayan $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_m = K_n$ oluyorsa, M modülüne *artan zincir koşulunu sağlar* denir (2).

Tanım 2.10.3. M modülünün bütün altmodülleri üzerinde artan zincir koşulu (ascending chain condition, ACC) sağlanıyorsa, M modülüne *Noether modül (Noetherian)* denir. Bu durumda M nin her altmodülü sonlu üretilmiştir. Eğer M nin her sonlu üretilmiş altmodülü Noether ise M *locally Noetherdir* denir (2).

Önerme 2.10.1. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M Noether modüldür.

(ii) M nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

(iii) M nin altmodüllerinin boş olmayan her alt kümesinin bir maksimal elamanı vardır (5).

İspat. (i) ⇒ (iii) $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun ve $\mathcal{A}$ nın maksimal elemanı olmasın. O zaman her $L \in \mathcal{A}$ için $\{L' \in \mathcal{A} \mid L' > L\} \neq \emptyset$ dır. L' için durum devam ettirilirse $L' < L'' < \cdots$ olur. M Noether olduğundan M nin altmodüllerinin bir artan zinciri elde edilir. Ancak bu durum M nin Noether olmasıyla çelişir.

(iii) ⇒ (ii) $K \leq M$ olsun. $K = \sum \mathcal{A}$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin $\mathcal{A}$ ailesini göz önüne alalım. $\mathcal{P} = \sum\{F \mid F \leq \mathcal{A}\ sonlu\}$ olsun. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ve hipotezden bir maksimal elamanı vardır. Bu eleman $\sum F$ dir. Buradan açıkça $K = \sum F$ bulunur.

(ii) ⇒ (i) M nin her altmodülü sonlu üretilmiş olsun. $L' < L'' < \cdots$ şeklinde M nin altmodüllerinin artan zincirini alalım ve $M = \sum_{n\in\mathbb{N}} L_n$ olsun. Hipotezden $L_{n+i} = L_n$ olmak üzere $\sum_{sonlu} L_n = M$ olacak şekilde bir n vardır. O halde dizi sonludur. Yani M Noether modüldür (5).

Önerme 2.10.2. $0 \to K \to M \to N \to 0$ sol R-modüllerinin bir kısa tam dizisi olsun. M nin Noether olması için gerek ve yeter koşul K ve N nin Noether olmasıdır (5).

İspat. (⇒) M Noether olsun. M nin altmodülü ve bölüm modülü Noether olur. K, M nin bir altmodülüne izomorf ve $M/_K \cong N$ olduğundan K ve $M/_K$ Noether olur.

(⇐) K ve N, Noether modüller olsun. M nin Noether olduğunu gösterelim. $K \leq M$ ve $M/_K = N$ olsun. M nin altmodüllerinin $L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq L_n$ dizisini göz önüne alalım. $L_1 + K \leq L_2 + K \leq \cdots \leq L_n + K = L_{n+i} + K$ dizisi için $M/_K$ Noether olduğundan $(i = 1, \cdots, \mathrm{n})$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. $L_1 \cap K \leq L_2 \cap K \leq \cdots \leq L_n \cap K = L_{n+i} \cap K, (i = 1, \cdots, n)$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Böylece, $L_n \leq L_{n+i}$

olduğundan modülarite kuralı gereğince $L_{n+i} = L_{n+i} \cap (L_{n+i} + K) = L_{n+i} \cap (L_n + K) = L_n + (L_{n+i} \cap K) = L_n$ olur. Böylece M, Noether olur.

Tanım 2.10.4. $\mathcal{L}$, M modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{L}$ deki her $L_1 \geq L_2 \geq \cdots$ $(i = 1,2,\cdots)$ azalan zinciri için $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ ye *azalan zincir koşulunu sağlar* denir (5).

Tanım 2.10.5. M nin bütün altmodüllerinde azalan zincir şartı sağlanıyorsa M modülüne *Artin modül (Artinian)* denir (5).

Teorem 2.10.1. $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ modülünün Noether (Artin) olması için gerek ve yeter koşul R, S ve M modüllerinin Noether (Artin) olmasıdır (13).

3. DÜZGÜN ALTMODÜLLER

Bu bölümde düzgün altmodüller modül teoride ve torsion teoride incelenmiştir. Bunun için öncelikle düzgün modül ve düzgün (Goldie) boyut kavramları üzerinde durulmuş, modül teori ve torsion teorideki temel tanım ve özellikleri verilmiştir. Verilen tanım ve özelliklerin ayrıntıları için (4), (9), (12), (14) ve (15) kaynakları referans olarak verilebilir.

3.1. Düzgün (Uniform) Modül

Tanım 3.1.1. U sıfırdan farklı bir modül olsun. Eğer U nun sıfırdan farklı her V, W altmodülü için $V \cap W \neq 0$ oluyorsa U ya bir *düzgün (uniform) modül* denir (4).

Buna denk olarak;

M sıfırdan farklı bir modül olmak üzere M nin sıfırdan farklı her altmodülü M de büyük (essential) ise M ye *düzgün modül* denir (4).

Örnek 3.1.1. Her p asal sayısı ve n doğal sayısı için $\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}_{p^n}}$ devirli grupları birer düzgün modüldür (4).

Örnek 3.1.2. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ prüfer grubu düzgün $\mathbb{Z}$ - modüldür (4).

Örnek 3.1.3. Her cisim kendi üzerinde düzgün modüldür.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$ $\mathbb{Z}$-modülünün altmodülleri $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ ve $B = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ için, $A \cap B = \{\overline{0}\}$ olduğundan düzgün modül değildir.

Düzgün modüllerin direkt toplamı yine düzgün modül olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.5. $\mathbb{Z}_2$ ve $\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülleri düzgün modüldür. Fakat $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$ -modülü, $\langle \overline{1}, \overline{4} \rangle$ ve $\langle \overline{0}, \overline{4} \rangle$ altmodülleri için, $\langle \overline{1}, \overline{4} \rangle \cap \langle \overline{0}, \overline{4} \rangle = 0$ olduğundan düzgün değildir.

Tanım 3.1.2. Sıfırdan farklı bir M modülünün 0 ve M den başka direkt toplananı yoksa M ye *ayrıştırılamaz (indecomposable) modül* denir.

Önerme 3.1.1. Eğer M düzgün modül ise, M ayrıştırılamazdır (14).

İspat. M düzgün modül olduğundan M nin her altmodülü büyüktür. Yani M nin sıfırdan farklı herhangi iki altmodülünün ara kesiti de sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $M = M \oplus 0$ olmak zorundadır.

Buna karşın, ayrıştırılamaz olan fakat düzgün olmayan modüller de vardır.

Örnek 3.1.5. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sağ $R -$ modülü göz önüne alınsın. $A = \begin{bmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq M$ için $A \cap B = 0$ olduğundan M düzgün modül değildir. Diğer taraftan $M \neq A \oplus B$ dir. Bu durumda, herhangi bir $0 \neq N \leq M$ alınsın ve $0 \neq n = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N$ olsun.

Eğer $a \neq 0$ ise, F cisim olduğundan $a^{-1} \in F$ var olup,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

dir. O halde keyfi bir $r = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \in R$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

dir. Dolayısıyla $N = M$ olur. Eğer $a = 0$ ise, $nr \in N$ için $nr \in A + B$ olması nedeniyle $N \leq A + B$ olur. Böylece M ayrıştırılamaz bir modüldür.

Tanım 3.1.3. M nin her altmodülü, M nin bir direkt toplananında büyük (essential) ise M ye C_1 *özelliğine sahip*,*CS* ya da *genişleyen (extending) modül* denir (14).

Teorem 3.1.1. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

(i) M bir *CS* modüldür.

(ii) M nin her N altmodülü için N nin M deki kapanışı M nin bir direkt toplananıdır.

(iii) M nin her altmodülü M nin bir direkt toplananında büyüktür (M, C_1 özelliğine sahiptir).

Örnek 3.1.6. Düzgün modüller C_1 özelliğine sahiptir.

Önerme 3.1.2. M ayrıştırılamaz modülü C_1 özelliğine sahip ise düzgün modüldür (14).

İspat. M ayrıştırılamaz modülü C_1 özelliğine sahip ise her altmodülü M nin bir direkt toplananında büyük olur. M ayrıştırılamaz olduğundan $M = M \oplus 0$ dir, yani sıfır ve kendinden başka direkt toplananı yoktur. Bu durumda M nin her altmodülü M de büyük olur, öyleyse M düzgün modüldür.

3.2. Sol R - Modüllerin Kategorisinde Düzgün Altmodüller

Genel olarak, bir R halkası için, sıfırdan farklı her R-modül düzgün bir altmodül içermez. Örneğin, K bir cisim ve $R = \langle X, Y \rangle$, X ve Y değişkenleri üzerindeki serbest cebirse, R-modülü düzgün bir altmodül içermez.

Daha basit bir örnek verecek olursak; $\mathbb{Z}_4$ bir halka olmak üzere, $\mathbb{Z}_4$-modülü düzgün bir altmodül içermez. Ancak aşağıdaki teorem doğrudur (4).

Teorem 3.2.1. M, sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz bir direkt toplamını içermeyen sıfırdan farklı bir modül olsun. Bu durumda M, düzgün bir altmodül içerir (4).

İspat. M nin düzgün bir altmodül içermediğini varsayalım. Öncelikle M nin kendisi düzgün değildir ve dolayısıyla $K_1 \cap L_1 = 0$ olacak şekilde, M nin sıfırdan farklı K_1 ve L_1 altmodülleri vardır. Şimdi L_1 düzgün değildir ve L_1 in, $K_2 \cap L_2 = 0$ olacak şekilde, sıfırdan farklı K_2 ve L_2 altmodülleri vardır. L_2 nin düzgün olmadığını not edip, bu işleme devam edersek, M nin sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz bir direkt toplamı olan $K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots$ içerdiğini görürüz ki bu ise bir çelişkidir. Böylece M, düzgün bir altmodül içerir.

Sonuç 3.2.1.

(1) Sıfırdan farklı her noetherian modül bir düzgün altmodül içerir.
(2) R bir sol noetherian halkası olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir R-modülü düzgün bir altmodül içerir (4).

Lemma 3.2.1. M, sıfırdan farklı altmodülleri bir düzgün altmodül içeren sıfırdan farklı bir modül olsun. O zaman M nin, düzgün altmodüllerin direkt toplamı olacak şekilde bir N büyük altmodülü vardır (15).

Lemma 3.2.2. Her bir U_i, M nin düzgün altmodülü olmak üzere M, $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ formunda bir büyük altmodüle sahip olsun. Bu durumda,

(i) M nin herhangi sıfırdan farklı altmodüllerinin toplamı en fazla n toplanana sahiptir.
(ii) Her bir V_i düzgün olmak üzere, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \leq_e M$ ise $n = k$ dır.

Özetle, sıfırdan farklı bir M modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz direkt toplamını içermemesi için gerek ve yeter koşul $U_i \subseteq M$ olmak üzere $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ formunda bir büyük altmodüle sahip olacak şekilde bir n tamsayısının var olmasıdır. M modülü için değişmez olan bu n tamsayısına düzgün (Goldie) boyut denir (4).

3.3. Bir Torsion Teoriye Göre Düzgün Altmodüller

Tanım 3.3.1. Sıfırdan farklı bir A modülünün her sıfırdan farklı altmodülü A da $\tau -$ büyük ise, A ya τ – *düzgün (uniform) modül* denir (9).

Lemma 3.3.1. M düzgün (τ – düzgün) bir R- modül olsun. Bu durumda $E_\tau(M)$ düzgündür (τ-düzgündür). Özel olarak, eğer M düzgün (τ-düzgün) ise, $E_\tau(M)$ ayrıştırılamazdır (12).

Teorem 3.3.1. Her modül bir tek τ-injektif zarfa sahiptir. (9, Teorem 2.2.3)

İspat. Varlığı tanım gereği açıktır. A bir modül ve E_1 ve E_2 de A nın τ-injektif zarfı olsun. $i : A \longrightarrow E_1$ ve $j : A \longrightarrow E_2$ ile dahil etme homomorfizmini gösterelim. E_2 nin τ-injektifliği ile $fi = j$ olacak şekilde bir $f : E_1 \longrightarrow E_2$ homomorfizmi vardır. i büyük bir monomorfizma olduğundan, f nin monomorfizma olduğu sonucuna varılır. $f(E_1)$ in τ-injektifliği ile, tam $0 \longrightarrow f(E_1) \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_2/f(E_1) \longrightarrow 0$ dizisi ayrılır, yani $E_2 =$

$f(E_1) \oplus B$ dır. Sonra $j(M) \cap B = 0$ olur. $j(M) \leq_e E_2$ den $B = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla f bir epimorfizmdir. Böylece $E_1 \cong E_2$ dir.

Tanım 3.3.2. Bir tek maksimal ideale sahip olan halkalara *yerel (lokal) halka* denir (5).

Lemma 3.3.2. $M,\ \tau$-düzgün bir R- modül olsun. Bu durumda $E_\tau(M)$ nin endomorfizma halkası yereldir (12).

İspat. $M,\ \tau$-düzgün bir R- modül olsun. Öyleyse M düzgündür. Lemma 3.3.1. den, $E_\tau(M)$ de düzgündür. $A = E_\tau(M)$ şeklinde gösterelim. Diğer taraftan, herhangi bir $f \in End(A)$ için, $Çekf \cap Çek(1_A - f) = 0$ dır. Eğer, $Çekf = 0$ ise, $f(A)$ τ- injektiftir, bu nedenle de $f(A)$, A nın direkt toplamıdır. Teorem 3.3.1. den $f(A) = A$ dır ve bu yüzden f bir izomorfizmadır. $Çekf \neq 0$ olduğundan, $Çek(1_A - f) = 0$ dır ve $1_A - f$ bir izomorfizmadır.

Tanım 3.3.3. Bir modül eğer τ – kapalı altmodüllerinde ACC ' yi sağlarsa, bu modüle τ – *noether modül* denir (9).

Önerme 3.3.1. A bir modül ve $B \leq A$ olsun. O halde, A nın τ – noether olması için gerek ve yeter koşul B ve A/B nin τ – noether olmasıdır (9).

Önerme 3.3.2. Her τ – torsion free τ – noether modül sonlu düzgün (Goldie) boyuta sahiptir (9).

İspat. A τ – torsion free τ – noetherian modül olsun. A nın sıfırdan farklı altmodüllerinin direkt toplamının sonsuz bir $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ kümesi olduğunu kabul edelim. Her j için B_j, A daki $A_1 \oplus \cdots \oplus A_j$ nın τ – kapanışı olsun. Açıkça, her B_j, her j için A ve $B_j \subseteq B_{j+1}$ nin τ – kapalı bir altmodülüdür. A τ – noether olduğundan, $B_k = B_{k+1}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi eğer $a \in A_{k+1}$ ise $a \in B_{k+1} = B_k$, dolayısıyla R nin bazı τ –yoğun I sol idealleri için $Ia \subseteq A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ vardır. $Ia \subseteq A_{k+1}$ ve toplam $A_1 + \cdots + A_{k+1}$ direkt olduğu için $Ia = 0$ olmalıdır. Ama A τ – torsion free, dolayısıyla $a = 0$, böylece $A_{k+1} = 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 3.3.1. Sıfırdan farklı her τ – noether modül bir τ – düzgün altmodül içerir.

4. ABEL KATEGORİLERDE DÜZGÜN AYRIŞIMLARIN TEKLİĞİ

Bu bölümde Krause'nin (18) makalesi incelenmiştir. Krause, bu makalesinde, abel kategorilerde düzgün ayrışımların tekliği üzerinde durmuştur. Bu nedenle öncelikle kategori alt yapısı oluşturmak amacıyla temel kategori tanımı, ardından abel kategori kavramı için gerekli tüm diğer tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Verilen tanım ve teoremlerin ayrıntıları için (11), (16), (17) kaynakları referans olarak verilebilir.

4.1. Kategori Kavramı

Tanım 4.1.1. $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıda verilen ve istenenleri sağlayan bir sistemdir.

Verilenler;

(i) *Objeler sınıfı*: $Ob(\mathcal{C})$ ile göstereceğimiz ve elemanları *obje* olarak isimlendirilen sınıftır. Bu sınıfın elemanları genellikle $A, B, \dots, X, Y, \dots$ ile gösterilir.

(ii) *Morfizmler kümesi*: X, Y objeleri için

$$\mathcal{C}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f \mid f : X \longrightarrow Y\}$$

biçiminde ifade edilen, elemanları *morfizm (ok)* olarak adlandırılan kümedir. $Ob(\mathcal{C})$ deki her X objesi için

$$I_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$$

morfizmine *birim morfizm* denir.

(iii) *Kompozisyon işlemi*: $Ob(\mathcal{C})$ deki her X, Y, Z objeleri için

$$\text{o} : \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Z)$$
$$(g,f) \longrightarrow g \text{ o } f$$

biçiminde tanımlanan işlemdir.

(i), (ii) ve (iii) özellikleri sistemde var olması gerekenlerdir. Sistemin sağlaması gerekenler yani istenenler;

(K1) Asosyatiflik: Her $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ ve $h : Z \longrightarrow W$ morfizmleri için,

$$(h \text{ o } g) \text{ o } f = h \text{ o } (g \text{ o } f)$$

olmalıdır.

(K2) Birimlilik: $Ob(\mathcal{C})$ deki her X objesi için,

$$I_X : X \longrightarrow X$$

biçiminde birim morfizm var olup $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi için,

$$I_Y \text{ o } f = f \text{ o } I_X$$

olmalıdır (16).

Örnek 4.1.1. Set ile gösterilen kümeler kategorisinde;

- $Ob(\text{Set})$: Kümeler
- $Mor(\text{Set}) = \{f \mid f{:}X \longrightarrow Y,\ X,Y \in Ob(\text{Set})\}$
- Kompozisyon : $f, g \in Mor(\text{Set})$ fonksiyonları için g o f bileşke işlemidir.

Bu yapının *(K1)* ve *(K2)* koşullarını sağladığını gösterelim.

(K1) $X, Y, Z, W \in Ob(\text{Set})$ olmak üzere $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ ve $h : Z \longrightarrow W$ morfizmler ve her $x \in X$ için,

$$\big((h \text{ o } g)\text{o } f\big)(x) = (h \text{ o } g) \text{ o } \big(f(x)\big)h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big((g \text{ o } f)(x)\big) = \big(h \text{ o}(g \text{ o } f)(x)\big)$$

olduğundan,

$$(h \text{ o } g) \text{ o } f = h \text{ o } (g \text{ o } f)$$

elde edilir.

(K2) $Ob(\text{Set})$ deki her X objesi için,

$$I_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longrightarrow x$$

biçiminde bir fonksiyon her zaman var olup $f : X \longrightarrow Y$ ve her $x \in X$ için,

$$(f \text{o}\, I_X)(x) = f\big(I_X(x)\big) = f(x) = I_Y\big(f(x)\big) = (I_Y \text{ o } f)(x)$$

olduğundan,

$$f \text{ o } I_X = f = I_Y \text{ o } f$$

dir.

Benzer şekilde,

Grp Gruplar ve grup homomorfizmleri

Mod-*R* R- modüller ve modül homomorfizmleri

Rng Halkalar ve halka homomorfizmleri

Vect Vektör uzayları ve lineer dönüşümler

Top Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar

diğer kategori örnekleridir.

Tanım 4.1.2. $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}), \text{o})$ herhangi bir kategori ve $*$ kompozisyonu

$$f * g = g \text{ o } f$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\mathcal{C}^{op} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}),*)$ kategorisine $\mathcal{C}$ *kategorisinin duali* denir (17).

Tanım 4.1.3. $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{B}$, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin *altkategorisi* denir.

(i) $Ob(\mathcal{B}) \subset Ob(\mathcal{C})$ veya $Ob(\mathcal{B})$ objelerin sınıfı $Ob(\mathcal{C})$ nin altsınıfıdır.

(ii) $Mor(\mathcal{B}) \subset Mor(\mathcal{C})$ veya $Ob(\mathcal{B})$ daki her A, B objeleri için $Mor_{\mathcal{B}}(A, B) \subset Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ dir.

(iii) $\mathcal{B}$ nin kompozisyon fonksiyonları, $\mathcal{C}$ nin karşı gelen fonksiyonlarının kısıtlanmışlarıdır. Yani $\mathcal{B}$ deki iki morfizmin kompozisyonu, $\mathcal{C}$ deki kompozisyonu ile aynıdır. $Ob(\mathcal{B})$ daki her A, B, C objeleri için

$$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longrightarrow g \circ_{\mathcal{B}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f$$

dir.

(iv) $\mathcal{B}$ nin birim morfizmi, $\mathcal{C}$ nin birim morfizmidir.

Bununla birlikte $\mathcal{B}$ deki her A, B objeleri için

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) = Mor_{\mathcal{B}}(A, B)$$

veya her B, B' objesi için $\mathcal{B}(B, B') = \mathcal{C}(B, B')$ ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin *dolu (full) altkategorisi* denir (17).

Örnek 4.1.2. Her kategori kendisinin bir dolu altkategorisidir.

Örnek 4.1.3. FiniteSets objeleri sonlu kümeler olan kategori, **Set** nin dolu alt kategorisidir.

Çözüm. FiniteSets kategorisini K_1 ile **Set** kategorisini de K ile gösterelim.

(i) Sonlu kümelerin sınıfı tüm kümelerin oluşturduğu sınıfın bir altsınıfıdır. Başka bir deyişle,

$$Ob(K_1) \subset Ob(K)$$

dir.

(ii) $A, B \in Ob(K_1)$ olmak üzere $f \in Mor_{K_1}(A, B)$ olsun. Bu durumda f dönüşümü A dan B ye bir fonksiyondur. A dan B ye tanımlı fonksiyonların kümesi $Mor_K(A, B)$ olduğundan f aynı zamanda $Mor_K(A, B)$ nin de bir elemanı olup buradan

$$Mor_{K_1}(A, B) \subset Mor_K(A, B)$$

elde edilir.

(iii)$A, B, C \in Ob(K_1)$ olmak üzere, $f \in Mor_{K_1}(A, B)$ ve $g \in Mor_{G_1}(B, C)$ için

$$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$$

olsun. Bu durumda

$$Mor_{K_1}(A, B) \times Mor_{K_1}(B, C) \longrightarrow Mor_{K_1}(A, C)$$

$$(f, g) \longrightarrow g \circ_{K_1} f = g \circ_K f$$

dır. Yani K_1 in morfizmleri K da karşılık gelen morfizmlerin kısıtlanmışıdır.

(iv)$Ob(K_1)$ deki her bir A objesi için

$$I_A : A \longrightarrow A$$

biçimindeki birim morfizmler aynı zamanda K kategorisinin de birim morfizmidir.

K kategorisinde sonlu iki küme A, B olmak üzere $f \in Mor_K(A,B)$ alalım. A ve B kümeleri sonlu olduklarından dolayı $f \in Mor_{K_1}(A,B)$ olur. Bu durumda

$$Mor_{K_1}(A,B) = Mor_K(A,B)$$

eşitliği elde edilir ki bu da K_1 kategorisinin dolu altkategori olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.4. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun.

1. $\mathcal{C}$ kategorisindeki $\mathcal{D}$ kategorisindeki objelere $\mathcal{C}$-morfizmleri $\mathcal{D}$-morfizmlere götüren ve bileşkeyi koruma; $\mathcal{F}(g \text{ o } f) = \mathcal{F}(g) \text{ o } \mathcal{F}(h)$ ile birimi koruma; $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ özelliklerini sağlayan özel $\mathcal{F}$ fonksiyonuna *funktor* denir.

2. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru tam dizileri koruyorsa; yani $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ tam dizi iken $0 \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(C) \longrightarrow 0$ tam dizi oluyorsa *tam (exact) funktor* denir (16).

Tanım 4.1.5 $\alpha : B \longrightarrow C$ morfizminin *çekirdeği (kernel),* $\kappa : K \longrightarrow B$ morfizmidir. Buna göre,

(i) $\alpha\kappa = 0$ dır.

(ii) $\alpha\xi = 0$ olan her $\xi : X \longrightarrow B$ için, $\xi = \kappa\gamma$ olacak şekilde tek bir $\gamma : X \longrightarrow K$ vardır.

Çekirdek $ker\alpha$ ile gösterilir. Çekirdek kavramının duali *eş-çekirdek (cokernel)* olarak adlandırılır ve $coker\alpha$ ile gösterilir (11).

Tanım 4.1.6. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. $A \times B$ bir obje ve p_1, p_2 projeksiyon morfizmleri olmak üzere, herhangi $\pi_1 : C \longrightarrow A$, $\pi_2 : C \longrightarrow B$ morfizmleri için

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $(\pi_1, \pi_2) : C \longrightarrow A \times B$ morfizmi varsa $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ üçlüsüne *çarpım (product)* denir.

Çarpım kavramının duali *eş-çarpım (coproduct)* olarak adlandırılır (16).

Tanım 4.1.7. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \longrightarrow B$ morfizm olsun. $u \circ f = v \circ f$ eşitliğini sağlayan $u, v : B \longrightarrow C$ morfizmleri için $u = v$ oluyorsa, f dönüşümüne *epimorfizm* denir (16).

Tanım 4.1.8. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \longrightarrow B$ morfizm olsun. $f \circ u = f \circ v$ eşitliğini sağlayan her $u, v : C \longrightarrow A$ morfizmleri için için $u = v$ oluyorsa, f dönüşümüne *monomorfizm* denir (16).

Tanım 4.1.9. $\mathcal{C}$ bir kategori, C, C', C'', $\mathcal{C}$ nin herhangi objeleri olmak üzere eğer her bir $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ kümesi bir abel grup ve $Hom(C', C'') \times Hom(C, C') \longrightarrow Hom(C, C'')$ kompozisyon dönüşümleri bilineer ise $\mathcal{C}$ kategorisine bir *öntoplamsal* (*preadditive) kategori* denir (11).

Tanım 4.1.10. $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{C}$ bir *abel kategoridir* denir.

(i) $\mathcal{C}$ öntoplamsaldır.
(ii) $\mathcal{C}$ deki objelerin her sonlu ailesi bir çarpıma ve bir eşçarpıma sahiptir.
(iii) $\mathcal{C}$ deki her morfizm bir çekirdeğe ve bir eşçekirdeğe sahiptir.
(iv) Her α morfizmi için, $\bar{\alpha} : Coker(ker\, \alpha) \longrightarrow Ker(coker\, \alpha)$ bir izomorfizmdir (11).

Örnek 4.1.4. R değişmeli halka üzerindeki modüllerin kategorisi R-Mod abel kategoridir (16).

Tanım 4.1.11. Bir T funktorunun *sadık (faithfull)* olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her C objesi için $T(C) \neq 0$ olmasıdır (11).

Tanım 4.1.12. $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $C, \mathcal{C}$ nin bir objesi olsun. Eğer $Hom(C, -)$ sadık ise C ye $\mathcal{C}$ için bir *üreteç (generator)* denir (11).

Tanım 4.1.13. $\mathcal{C}$ bir öntoplamsal kategori, $\mathcal{I}$ bir küçük, yani, objeleri bir küme olan kategori ve $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ bir funktor olsun. X, $\mathcal{C}$ nin bir objesi ve $\mathcal{I}$ nın her bir i objesi için bir $\alpha_i : X \longrightarrow F(i)$ morfizmi verilsin. Eğer $\mathcal{I}$ kategorisindeki her $\lambda : i \longrightarrow j$ morfizmleri için $\alpha_j : F(\lambda)\alpha_i$ sağlanıyorsa $\{\alpha_i\}$ ailesine *uyumlu (compatible) aile* denir (11).

Tanım 4.1.14. $\mathcal{C}$ bir öntoplamsal kategori, $\mathcal{I}$ bir küçük kategori ve $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ bir funktor olsun. $\mathcal{I}$ nın her bir i objesi ve $\mathcal{C}$ bir L objesi için, $\{\pi_i : L \longrightarrow F(i)\}$ morfizmlerin bir uyumlu ailesi ile $\{\xi_i : X \longrightarrow F(i)\}$ uyumlu ailesi için, $\pi_i\xi = \xi_i$ olacak şekilde bir tek $\xi : X \longrightarrow L$ morfizmi varsa L ye $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktorunun bir *limiti* denir ve $L = \varprojlim F$ ile gösterilir. Burada bir F funktorunun limiti izomorfizm altında tektir.

F funktorunun *eş-limiti (colimit)* dual olarak tanımlanır ve $\varinjlim F$ ile gösterilir (11).

Tanım 4.1.15. $\mathcal{I}$ bir küçük kategori olsun. $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere her $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktorunun limiti varsa $\mathcal{C}$ kategorisine *tam (complete) kategori* denir. Ayrıca $\mathcal{C}$ kategorisinde her F funktorunun eş-limiti varsa $\mathcal{C}$ ye *eş-tam (cocomplete) kategori* denir (11).

Tanım 4.1.16. $\mathcal{I}$ bir ayrık (discrete) kategori, yani, monomorfizmleri sadece birim monomorfizmler olan kategori olsun. Bu durumda $\varprojlim F = \prod F(i)$ ve $\varinjlim F = \bigoplus F(i)$ olur. Eğer $\mathcal{I}$ bir yönlendirilmiş küme ise $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ direkt sisteminin eş-limiti *direkt limittir* (11).

Tanım 4.1.17. Bir eş-tam abel $\mathcal{C}$ kategorisinde direkt limitler tam ve $\mathcal{C}$ bir üretece sahipse, bu kategoriye *Grothendieck kategori* denir (11).

4.2. Düzgün Ayrışımlar

Tanım 4.2.1. Modül kategoride olduğu gibi, C bir $\mathcal{C}$ abel kategorisinin objesi olsun. C nin bir B altobjesi, sıfırdan farklı her $C' \subset C$ için $B \cap C' \neq 0$ ise, B ye *büyüktür (essential)* denir (11).

Tanım 4.2.2. E injektif bir obje olmak üzere, $\mathcal{C}$ abel kategorinin bir C objesinin *injektif zarfı (injective envelope)*, $C \longrightarrow E$ bir büyük monomorfizm olarak tanımlanır (11).

Tanım 4.2.3. Bir abel kategorisindeki iki obje A ve B nin, büyük $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ alt objeleri varsa $A' \cong B'$ olacak şekilde *büyük denktir* denir (18).

Bu bağıntı objeler sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Çünkü iki büyük altobjenin kesişimi de bir büyük altobje ve iki büyük monomorfizmin bileşkesi de bir büyük monomorfizmdir.

Lemma 4.2.1. A ve B, abel kategorisindeki objeler olsun ve injektif zarflarının sırasıyla $E(A)$ ve $E(B)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda A ve B nin büyük denk olması için gerek ve yeter koşul $E(A)$ ve $E(B)$ nin izomorf olmasıdır (18).

İspat. Varsayalım ki A ve B büyük denk objeler olsun. $A' \cong B'$ olmak üzere $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ altobjelerini alalım. O zaman

$$E(A) \cong E(A') \cong E(B') \cong E(B)$$

dır. Tersine $E\ (A)\ \cong E\ (B)$ olsun ve $U = A \cap B$ alalım. U, A ve B nin büyük bir altobjesi olduğundan, A ve B büyük denktir.

Lemma 4.2.2. $\mathcal{C}$ bir abel kategori ve $\mathcal{C}'$ küçük bir altkategori olsun. Bu durumda, küçük (small) ve $\mathcal{C}'$ içeren bir tam abel $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ altkategorisi vardır. Dahası, bir abel Grothendieck $\mathcal{A}$ kategorisi ve $T(f) = 0$ ise $f = 0$ olacak şekilde bir $T: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ funktoru vardır. Bu funktor düzgün objeleri düzgün objelere eşler ve büyük altobjeleri büyük altobjelere eşler (18, Lemma 1).

Teorem 4.2.1. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ve $B_1, B_2, \cdots, B_m$ herhangi bir abel kategoride düzgün objeler olsun. $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$ nin büyük denk olduğunu varsayalım, yani $A' \cong B'$ olacak şekilde $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ altobjeleri olsun. O zaman $n = m$ dir ve her $i = 1,2,\ldots,n$ için A_i ve $B_{\sigma(i)}$ nin büyük denk olduğu bir σ permütasyonu vardır (18, Teorem).

İspat. Lemma 4.2.2. den bir abel Grothendieck kategoride çalıştığımızı varsayabiliriz. Bu, her objenin bir injektif zarfı olduğu anlamına gelir (bkz. 11). Şimdi $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$ nin büyük denk olduğunu varsayalım. Böylece, Lemma 4.1.1. e göre $E(A) \cong E(B)$ dır. Yani,

$$E(A_1) \oplus E(A_2) \oplus \cdots \oplus E(A_n) \cong E(B_1) \oplus E(B_2) \oplus \cdots \oplus E(B_m)$$

dır.

Düzgün bir objenin injektif zarfı ayrıştırılamazdır ve yerel bir endomorfizm halkasına sahiptir. Böylece klasik Krull-Remak-Schmidt Teoremini uygulayabiliriz. Bu durumda $n = m$ ve her $i = 1,2,\ldots,n$ için $E\ (A_i)\ =\ E\ \left(B_{\sigma(i)}\right)$ olacak şekilde bir σ permütasyon elde ederiz. Dolayısıyla, her i için $E\ (A_i)$ ve $E\left(B_{\sigma(i)}\right)$ büyük denktir (bkz. Lemma 4.2.1.). İspatı tamamlamak için $E\ (A_i)$ ve $E\ (B_{\sigma(i)})$ nin orjinal abel kategorimizde büyük denk olduğunu göstermemiz gerekir. Bu ise, bir düzgün objenin sıfırdan farklı her altobjesinin büyük olmasından kolayca görülür.

5. BİR TORSİON TEORİYE GÖRE DÜZGÜN AYRIŞIMLARIN TEKLİĞİ

Bu bölümde düzgün ayrışımların tekliği torsion teoride incelenmiştir. Krause'nin (18) de ulaştığı sonuç torsion teoriye uygulanmıştır. Bu hususta gerekli tanım ve teoremler için (5), (9), (12) den yararlanılmıştır.

Tanım 5.1. A ve B iki modül olsun. $A' \cong B'$ olacak şekilde $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ τ-büyük altmodülleri varsa, A ve B modüllerine *τ-büyük denk (essentially equivalent) modüller* denir (12).

Önerme 5.1. A bir modül olsun. A nın τ – büyük altmodüllerinin kesişimi de τ – büyüktür.

İspat. Büyük altmodüllerin kesişiminin büyük olduğunu biliyoruz. Önerme 2.8.1. (ii) den τ – yoğun altmodüllerin kesişimi de τ – yoğundur.

Teorem 5.1. τ-büyük denklik R-modüllerin kategorisinde bir denklik bağıntısıdır (12).

İspat. A ve B iki R-modül olsun.

(i) $A \cong A$ olduğundan A, A ya τ-büyük denktir.

(ii) A, B ye τ-büyük denk olsun. Öyleyse $A' \cong B'$ olacak şekilde $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ τ-büyük altmodülleri vardır. O halde $B' \cong A'$ olduğundan B, A ya τ-büyük denktir.

(iii) Önerme 5.1. den τ-büyük altmodüllerin kesişimi de τ-büyük olduğundan açıktır.

Lemma 5.1. A sıfırdan farklı bir modül ve $B \leq_e A$ olsun. Bu durumda B nin A da τ-yoğun olması için gerek ve yeter koşul $E_\tau(B) = E_\tau(A)$ olmasıdır (9).

İspat. Kabul edelim ki B, A da τ-yoğun olsun. $E(A) = E(B)$ olduğunu biliyoruz. Öte yandan, $A/B \subseteq t(E(A)/B) = E_\tau(B)/B$ ve dolayısıyla $A \subseteq E_\tau(B)$ dir. $E_\tau(A) \subseteq E_\tau(B)$ ve buradan da $E_\tau(B) = E_\tau(A)$ dır.

Şimdi $E_\tau(B) = E_\tau(A)$ olduğunu kabul edelim. Sonra $A/B \subseteq E_\tau(A)/B = E_\tau(B)/B$ dir. Fakat $E_\tau(B)/B$ bir τ-torsion dır, bu nedenle A/B de bir τ-torsion dır.

Önerme 5.2. M ve K iki modül, $j : K \longrightarrow M$ bir monomorfizm ve $Görj = I$ olsun. Bu durumda $jv = i_I$ olacak şekilde bir tek izomorfizm $v : I \longrightarrow K$ vardır (5).

Önerme 5.3. Bir $f : L \longrightarrow M$ monomorfizminin büyük olması için gerek ve yeter koşul tüm h homomorfizmleri (epimorfizmler) için, eğer hf monomorfizm ise, h nin monomorfizmdir (5).

İspat. $K = Görf$ olsun. Önerme 5.2. den $fv = i_K$ olacak şekilde $v : K \longrightarrow L$ izomorfizmi vardır. Böylece hi_K nın monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul hf nin monomorfizm olmasıdır. Ama ikinci koşul ancak ve ancak $Çekf \cap K = 0$ olduğunda geçerlidir. h, $Görh$ üzerine bir epimorfizmdir.

Lemma 5.2. A ve B iki modül olsun. Bu durumda, A ve B nin τ-büyük denk olması için gerek ve yeter koşul $E_\tau(A)$ ve $E_\tau(B)$ nın izomorf olmasıdır (12).

İspat. Varsayalım ki A ve B nin τ-büyük denk olsun. Yani, $A' \subseteq A$ ve $B' \subseteq B$ τ-büyük altmodüller ve $A' \cong B'$ olsun. A', A nın τ-büyük bir altmodülü olduğu için A da büyük ve τ-yoğundur. Lemma 5.1. den, $E_\tau(A') \cong E_\tau(A)$ olduğunu biliyoruz (aslında, eşit). Benzer şekilde $E_\tau(B') \cong E_\tau(B)$ olduğu da gösterilebilir.

Öte yandan, $\varphi : B' \longrightarrow A'$ şeklinde bir izomorfizm olduğunu varsayalım. $i: A' \longrightarrow E_\tau(A')$ ve $j : B' \longrightarrow E_\tau(B')$ ile içerme homomorfizmlerini gösterelim. Bu durumda $B' \longrightarrow A' \longrightarrow E_\tau(A')$ bileşkesi bir monomorfizmdir. $E_\tau(B')$ τ-injektif olduğundan $fi\varphi = j$ olacak şekilde bir $f : E_\tau(A') \longrightarrow E_\tau(B')$ homomorfizmi vardır. $i\varphi$ büyük monomorfizm olduğu için, f nin monomorfizm olduğunu biliyoruz. (bkz. Önerme 5.3.) $f(E_\tau(A'))$ nin τ-injektif olduğundan,

$$0 \longrightarrow f(E_\tau(A')) \longrightarrow E_\tau(B') \longrightarrow X = E_\tau(B')/f(E_\tau(A')) \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanan yani, $E_\tau(B') = f(E_\tau(A') \oplus X$ dir. $fi\varphi = j$ olduğundan, B' nin herhangi bir N altmodülü için $j(N) \cap X = 0$ dır. Ama $j(N)$ nin $E_\tau(B')$ nin büyük altmodülü olduğunu biliyoruz, bu yüzden $X = 0$ dır. O zaman f bir epimorfizmdir. Böylece, $E_\tau(A') \cong E_\tau(B')$ dır. O halde,

$$E_\tau(A) \cong E_\tau(A') \cong E_\tau(B') \cong E_\tau(B)$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $\gamma : E_\tau(A) \longrightarrow E_\tau(B)$ ve $\gamma' : E_\tau(B) \longrightarrow E_\tau(A)$ birer izomorfizm olsun. $A' = A \cap \gamma'(B)$ ve $B' = B \cap \gamma(A)$ eşitliklerini alalım. O zaman $\gamma(A') = \gamma(A) \cap \gamma\gamma'(B) = \gamma(A) \cap B = B'$ vardır. γ ve γ' izomorfizm olduğu için, beklediğimiz gibi $A' \cong B'$ dır.

Şimdi A' nin A da τ- büyük ve B' nin de B de τ- büyük olduğunu gösterelim. İlk önce büyüklük durumunu gösterelim. Büyük altmodüllerin kesişimi yine büyük bir altmodül olduğu için, $A' = A \cap \gamma'(B)$ A da büyüktür ve benzer şekilde $B' = B \cap \gamma(A)$ B de büyüktür.

Diğer taraftan, $(A\,/A') \subseteq E_\tau(A)\,/\,A'$ dır. τ - injektif zarf tanımından A , $E_\tau(A)$ da τ-yoğundur. $(E_\tau(A)\,/\,\gamma'(B)) \cong (E_\tau(B)/B)$ olduğu için, $\gamma'(B)$, $E_\tau(A)$ da τ – yoğundur. Böylece, $A\,/\,A'$ altmodülü τ – torsiondur. Benzer şekilde $B\,/\,B'$ nin τ – torsion olduğu gösterilebilir.

Teorem 5.2. $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ve $B_1, B_2, \cdots, B_n$ $\tau-$ düzgün R – modüller ve $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ τ – büyük denk olsun. Bu durumda $m = n$ ve her i için, A_i ve $B_{\sigma(i)}$ τ – büyük denk olacak şekilde $\{1,2,\cdots,n\}$ nin bir σ permütasyonu vardır (12).

İspat. Kabul edelim ki $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ ve $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ τ – büyük denk olsun. Lemma 5.2 ve Önerme 2.8.4. den,

$$E_\tau(A_1) \oplus \cdots \oplus E_\tau(A_m) \cong E_\tau(A) \cong E_\tau(B) \cong E_\tau(B_1) \oplus \cdots \oplus E_\tau(B_n)$$

olduğunu biliyoruz.

Lemma 3.3.1. den, bir τ – düzgün modülün injektif zarfı ayrıştırılamazdır ve Lemma 3.3.2. den, bir yerel endomorfizm halkasına sahiptir. Buradan klasik Krull-Remak-Schmidt Teoremi uygulanırsa, $m = n$ ve her i için, $E_\tau(A) \cong E_\tau(B_{\sigma(i)})$ olacak şekilde $\{1,2,\cdots,n\}$ nin bir σ permütasyonu vardır. Lemma 5.2. den, her i için, A_i ve $B_{\sigma(i)}$ τ – büyük denktir.

Girişte belirtildiği gibi Teorem 5.2. Krause'un çalışmalarının bir sonucu olarak elde edilebilir. Teorem 5.2. nin hipotezlerinden, Krause'un hipotezleri gibi $m = n$ ve A_i, $B_{\sigma(i)}$ ye büyük denk olacak şekilde σ permütasyonlarının var olduğu sonuçları çıkar. Bu modüller artık hipotezden τ – düzgün olduklarından, boştan farklı her bir büyük altmodül, τ – yoğun ve dolayısıyla τ – büyüktür.

KAYNAKLAR

1. Alizade R, Pancar A. "Homoloji cebire giriş". Samsun: Ondokuz Mayıs Universitesi Yayınları; 1999.

2. Pancar A, Nişancı-Türkmen B. "İnjektif modüllere giriş". Ankara: Pegem Akademi; 2014.

3. Kasch F. "Modules and rings". New York: Academic Press; 1982.

4. Dung NV, Van Huynh D, Smith PF, Wisbauer R. "Extending modules". Harlow: Longman Scientific & Technical; 1994.

5. Anderson FW, Fuller KR. "Rings and categories of modules". New York: Springer Science & Business Media; 2012.

6. Dauns J. "Modules and rings". New York: Cambridge University Press; 1994.

7. Rotman JJ. "An introduction to homological algebra". 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media; 2008.

8. Wisbauer R. "Foundations of module and ring theory". Philadelphia: Gordon & Breach Science Publishers; 1991.

9. Crivei S. "Injective modules relative to torsion theories". Cluj: Editura Fundaţiei pentru Studii Europene; 2004.

10. Golan JS. "Torsion theories". New York: Longman Scientific & Technical; 1986.

11. Stenström B. "Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory". New York: Springer Science & Business Media; 2012.

12. Şahin E. "Uniqueness of uniform decomposition relative to a torsion theory". Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi. 2018;2(2):35-8.

13. Lam TY. "A first course in noncommutative rings". 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media; 2013.

14. Mohamed SH, Müller BJ. "Continuous and discrete modules". New York: Cambridge University Press; 1990.

15. Grzeszczuk P, Puczyłowski ER. "On Goldie and dual Goldie dimensions". Journal of Pure and Applied Algebra. 1984;31(1-3):47-54.

16. Mac Lane S. "Categories for the working mathematician". 2nd ed. New York: Springer-Verlag; 1971.

17. Barr M, Wells C. "Category Theory Lecture Notes for ESSLLI". Department of Mathematics and Statistics McGill Universty, Canada, Deparment of Mathematics Case Western reserve University, USA; 1999.

18. Krause H. "Uniqueness of uniform decompositions in abelian categories". Journal of Pure and Applied Algebra. 2003;183(1):125-8.

19. Diracca L, Facchini A. "Uniqueness of monogeny classes for uniform objects in abelian categories". Journal of Pure and Applied Algebra. 2002;172(2-3):183-91.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Şahin, Eda
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 09.10.1991 Uşak
e-mail	: edasahin64@hotmail.com
	: edaasahinn@icloud.com

Eğitim

Derece	Eğitim Kurumu	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Uşak Üniversitesi, Uşak Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	10/06/2019
Lisans	Selçuk Üniversitesi, Konya Fen Fakültesi Matematik Bölümü	23/06/2013
Lise	Gülkent Anadolu Lisesi, Isparta	12/06/2009

İş Deneyimi

Kurum Adı	Yıl	Görev
Sakarıkaracaören Ortaokulu, Eskişehir	2013-2014	Matematik Öğretmeni
Ömer Bedrettin Uşaklı Ortaokulu, Uşak	2014-2015	Matematik Öğretmeni
23 Nisan Ortaokulu, Uşak	2015-2016	Matematik Öğretmeni

Arhan Özel Öğretim Kursu, Uşak	2017-2018	Matematik Öğretmeni
Viranşehir Anadolu İHL, Viranşehir	2019-…	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce : Okuma ve Yazma – Orta

Konuşma – Orta

Seminerler

Haziran, 2019 – 'Gelişmiş Ülkelerin Eğitim Sistemleri, Uluslararası Kuruluşların Eğitim Çalışmaları Semineri'

Aralık, 2019 - 'Şanghay Matematiği Eğitmenlik Eğitimi Semineri'

Ocak, 2019 – 'Ulusal ve Uluslararası Eğitim Projeleri ve Örnek Projeler Semineri'

Bilgisayar

- MS Office Uygulamaları (Outlook, PowerPoint, Word, Excel)
- Pascal Programlama Dili
- Latex
- Matlab
- C++